TRẦN ĐỨC HUYÊN (Chủ biên)
NGUYỄN DUY HIẾU - PHẠM THỊ BÉ HIỀN
(TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TP.HỒ CHÍ MINH)

GIẢI TOÁN 12

TÍCH PHÂN NGUYÊN HÀM

DÙNG CHO HỌC SINH LỚP CHUYÊN

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Trong thời gian vừa qua, được sự giúp đỡ của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, trường Trung học phổ thông chuyên Lê Hồng Phong TP. Hồ Chí Minh đã biên soạn bộ sách *"Giải toán dành cho học sinh lớp chuyên"* theo định hướng bám sát sách giáo khoa, bổ sung các chủ đề nâng cao theo trình độ trường chuyên và các nội dung thi đại học. Bộ sách đã được đông đảo học sinh và giáo viên các trường chuyên sử dụng và tin cậy.

Trong quá trình đổi mới giáo dục, đáp ứng yêu cầu mới của sách giáo khoa chuyên ban, xây dựng phương pháp kiểm tra kết hợp giữa tự luận và trắc nghiệm khách quan, chúng tôi biên soạn lại bộ sách Giải toán dành cho học sinh các trường chuyên và học sinh khá giỏi ở các trường Trung học phổ thông trên toàn quốc. Bộ sách *"Giải toán 12"* được biên soạn nhằm đáp ứng tốt nhất cho các kì thi Tốt nghiệp THPT và đặc biệt là kì thi Tuyển sinh Đại học – Cao đẳng. Bộ sách này gồm năm quyển :

– Giải toán 12 – Hàm số mũ – lôgarit và số phức ;

– Giải toán 12 – Phương pháp toạ độ trong không gian ;

– Giải toán 12 – Khảo sát hàm số ;

– Giải toán 12 – Khối đa diện và khối tròn xoay ;

– Giải toán 12 – Tích phân – nguyên hàm.

Nội dung quyển *"Giải toán 12 – Tích phân – Nguyên hàm"* bám sát theo cấu trúc của sách giáo khoa Giải tích 12 (Nâng cao) và được trình bày theo bốn chương như sau :

- Chương I : Nguyên hàm ;
- Chương II : Tích phân ;
- Chương III : Ứng dụng tích phân để giải toán ;
- Chương IV : Các bài toán tổng hợp.

Trong ba chương đầu, ở mỗi bài học, chúng tôi xây dựng hệ thống bài tập rèn luyện dựa theo các vấn đề cụ thể, một số bài tập là các đề thi đại học để bạn đọc tham khảo, có cung cấp đáp án và hướng dẫn giải sơ lược của một số bài tập tiêu biểu nhằm giúp các bạn đọc ôn tập, nâng cao kiến thức, rèn luyện kĩ năng giải toán. Chương IV là các bài toán tổng hợp, giúp học sinh vận dụng sâu kiến thức đã học, có gợi ý, hướng dẫn giải.

Hi vọng quyển sách này cùng với những quyển sách của Bộ sách Giải toán 12 sẽ giúp ích cho các bạn học sinh trong quá trình học tập, rèn luyện nâng cao kiến thức, rèn kĩ năng môn Toán lớp 12, chủ động và tự tin bước vào kì thi Tuyển sinh Đại học – Cao đẳng để đạt được kết quả tốt nhất ; Bộ sách này cũng là tài liệu hỗ trợ cho giáo viên Toán các trường Trung học phổ thông trong công tác đào tạo học sinh giỏi.

Mọi ý kiến đóng góp xin được gửi về địa chỉ sau :

- *Trường Trung học phổ thông chuyên Lê Hồng Phong, 235 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh.*
- *Ban biên tập Toán – Tin, Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản giáo dục Gia Định – Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, Tp.HCM.*

Trân trọng cảm ơn !

CÁC TÁC GIẢ

CHƯƠNG I NGUYÊN HÀM

§1. ĐỊNH NGHĨA NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT CỦA NGUYÊN HÀM

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. KHÁI NIỆM NGUYÊN HÀM

1. Định nghĩa

Cho hàm số f xác định trên K (K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng nào đó).

Hàm số F được gọi là một nguyên hàm của hàm số f trên K nếu F'(x) = f(x) với mọi x thuộc K.

Chú ý : Nếu F là nguyên hàm của f trên khoảng (a ; b) và hai hàm f và F liên tục trên đoạn [a ; b] thì F cũng là nguyên hàm của f trên đoạn [a ; b].

2. Định lí

Giả sử hàm số F là một nguyên hàm của hàm số f trên K. Khi đó :

a) Với mỗi hằng số C, hàm số y = F(x) + C cũng là một nguyên hàm của f trên K.

b) Ngược lại, với mỗi nguyên hàm G của f trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho G(x) = F(x) + C với mọi x thuộc K.

Như vậy, nếu F là một nguyên hàm của hàm số f trên K thì mọi nguyên hàm của hàm số f trên K đều có dạng F(x) + C với $C \in \mathbb{R}$. Khi đó : F(x) + C, $C \in \mathbb{R}$ được gọi là họ tất cả các nguyên hàm của f trên K, kí hiệu là $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ với } C \in \mathbb{R}.$$

Chú ý :

- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
- *Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.*

II. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

1) $\int 0dx = C$

2) $\int dx = \int 1dx = x + C$

3) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$

4) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$; $\int \sin kx dx = -\dfrac{\cos kx}{k} + C \ (k \neq 0)$

6) $\int \cos x dx = \sin x + C$; $\int \cos kx dx = \dfrac{\sin kx}{k} + C \ (k \neq 0)$

7) $\int e^x dx = e^x + C$; $\int e^{kx} dx = \dfrac{e^{kx}}{k} + C \ (k \neq 0)$

8) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$

9) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$

10) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$

III. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM

Định lí. Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên K thì :

a) $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

b) Với $k \in \mathbb{R}^*$: $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1

Chứng minh F(x) là một nguyên hàm của f(x)

1. PHƯƠNG PHÁP

Để chứng minh F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên D, ta chứng minh $F'(x) = f(x), \forall x \in D$.

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1.

a) Chứng minh rằng hàm số $F(x) = -\ln|\cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan x$.

b) Chứng minh rằng hàm số $F(x) = \ln|\sin x|$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cot x$.

c) Chứng minh rằng hàm số $F(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Giải

a) Ta có : $F'(x) = -\dfrac{(\cos x)'}{\cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x = f(x)$

nên F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x).

b) Ta có : $F'(x) = \dfrac{(\sin x)'}{\sin x} = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x = f(x)$

nên F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x).

c) Ta có : $F'(x) = \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = f(x)$

nên F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x).

Ví dụ 2. Cho $a \neq 0$. Chứng minh rằng :

a) Hàm số $F(x) = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{a^2 - x^2}$.

b) Hàm số $F(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

c) Hàm số $F(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

Giải

a) Ta có : $F'(x) = \frac{1}{2a}.\frac{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)'}{\frac{a+x}{a-x}} = \frac{1}{2a}.\frac{2a}{(a-x)^2}.\frac{a-x}{a+x}$

$$= \frac{1}{(a-x)(a+x)} = \frac{1}{a^2-x^2} = f(x)$$

nên F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x).

b) Ta có : $F'(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)'}{x+\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} = f(x)$

nên F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x).

c) Ta có : $F'(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)'}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} = f(x)$

nên F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x).

Ví dụ 3.

a) Tìm a để hàm số $F(x) = \frac{ax+1}{x-5}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$.

b) Xác định a, b, c sao cho $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ trong $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Giải

a) Với mọi $x \neq 5$, ta có : $F'(x) = \frac{-5a-1}{(x-5)^2}$.

F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x)

$\Leftrightarrow \frac{-5a-1}{(x-5)^2} = \frac{1}{(x-5)^2}$, $\forall x \neq 5 \Leftrightarrow -5a-1=1 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{5}$.

b) Với mọi $x \in \left(\frac{3}{2};+\infty\right)$, ta có :

$$F'(x) = (2ax+b)\sqrt{2x-3} + (ax^2+bx+c)\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

$$= \frac{(2ax+b)(2x-3)+ax^2+bx+c}{\sqrt{2x-3}} = \frac{5ax^2+(3b-6a)x+c-3b}{\sqrt{2x-3}}$$

F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x)

$$\Leftrightarrow \frac{5ax^2+(3b-6a)x+c-3b}{\sqrt{2x-3}} = \frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}, \quad \forall x \in \left(\frac{3}{2}\,;+\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow 5ax^2+(3b-6a)x+c-3b = 20x^2-30x+7, \quad \forall x \in \left(\frac{3}{2}\,;+\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 20 \\ 3b-6a = -30 \\ c-3b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Vấn đề 2

Tìm họ nguyên hàm của hàm số

1. PHƯƠNG PHÁP

Tính $\int f(x)dx$.

Phân tích f(x) thành tổng của các hàm cơ bản. Áp dụng các tính chất và công thức nguyên hàm cơ bản.

Chú ý : Tìm nguyên hàm của một hàm số được hiểu là tìm nguyên hàm trên tập xác định của hàm số đó.

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm các họ nguyên hàm sau :

a) $\int \frac{(x^3+5)(x^5-3)}{x^7}dx$;

b) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x\sqrt{x}}dx$ trên khoảng $(0\,;+\infty)$;

c) $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$ trên khoảng $(0\,;+\infty)$.

Giải

a) $\int \frac{(x^3+5)(x^5-3)}{x^7}dx = \int \frac{x^8+5x^5-3x^3-15}{x^7}dx = \int\left(x+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^4}-\frac{15}{x^7}\right)dx$

$= \int\left(x+5x^{-2}-3x^{-4}-15x^{-7}\right)dx = \frac{x^2}{2}-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{5}{2x^6}+C$

b) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x\sqrt{x}}dx = \int \frac{x\sqrt{x}-3x+3\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}}dx = \int\left(1-\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$

$= \int\left(1-\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}-x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = x-6\sqrt{x}+3\ln x+\frac{2}{\sqrt{x}}+C$

c) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx = \int\left(x+2x^{\frac{1}{6}}+x^{-\frac{2}{3}}\right)dx = \frac{x^2}{2}+\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+3\sqrt[3]{x}+C$

Ví dụ 2. Tìm các họ nguyên hàm sau :

a) $\int e^x\left(15-\frac{20e^{-x}}{x^5}\right)dx$;

b) $\int 9^x(5^x+x^7 3^{-2x}+7^{-x})dx$.

Giải

a) $\int e^x(15-\frac{20e^{-x}}{x^5})dx = \int(15e^x-\frac{20}{x^5})dx = \int\left(15e^x-20x^{-5}\right)dx = 15e^x+\frac{5}{x^4}+C$

b) $\int\left[9^x(5^x+x^7 3^{-2x}+7^{-x})\right]dx = \int\left[45^x+x^7+\left(\frac{9}{7}\right)^x\right]dx$

$$= \frac{45^x}{\ln 45}+\frac{x^8}{8}+\left(\frac{9}{7}\right)^x\frac{1}{\ln\frac{9}{7}}+C$$

Ví dụ 3. Tìm các họ nguyên hàm sau :

a) $\int \cos 5x.\cos 3x.\sin 2x.dx$;

b) $\int\left(\frac{5\cos^2 x-3\cot^2 x}{\cos^2 x}+\frac{2\sin^2 x+4\tan^2 x}{\sin^2 x}\right)dx$;

c) $\int\left[(\sin x+\cos x)^2+\left(\tan x\ -\ \cot x\right)^2\right]dx$;

d) $\int(\sin^4 x+\cos^4 x)dx$;

e) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$.

Giải

a) $\int\cos 5x.\cos 3x.\sin 2x.dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos 8x+\cos 2x\right).\sin 2xdx$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\cos 8x.\sin 2x+\cos 2x.\sin 2x\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\cos 8x.\sin 2x+\cos 2x.\sin 2x\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\sin 10x-\sin 6x+\sin 4x\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{10}\cos 10x+\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 4x\right)+C$$

$$=-\frac{1}{40}\cos 10x+\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x+C$$

b) $\int\left(\frac{5\cos^2 x-3\cot^2 x}{\cos^2 x}+\frac{2\sin^2 x+4\tan^2 x}{\sin^2 x}\right)dx=\int\left(7-\frac{3}{\sin^2 x}+\frac{4}{\cos^2 x}\right)dx$

$$=7x+3\cot x+4\tan x+C$$

c) $\int\left[(\sin x+\cos x)^2+\left(\tan x\ -\ \cot x\right)^2\right]dx$

$$=\int\left[\sin 2x+\left(\tan^2 x+1\right)+\left(\cot^2 x+1\right)-3\right]dx$$

$$=-\frac{1}{2}\cos 2x+\tan x-\cot x-3x+C$$

d) $\int(\sin^4 x+\cos^4 x)dx=\int(1-2\sin^2 x.\cos^2 x)dx=\int(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)dx$

$$=\int\left[1-\frac{1}{4}\left(1-\cos 4x\right)\right]dx=\int\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x\right)dx=\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+C$$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{dx}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2} = \int \frac{dx}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = -\cot\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C$

Vấn đề 3

Tìm một nguyên hàm của hàm số thoả mãn điều kiện cho trước

1. PHƯƠNG PHÁP

Tìm một nguyên hàm F(x) của hàm số f(x) thoả mãn điều kiện F(a) = b

Ta thực hiện 2 bước sau :

– Tìm họ nguyên hàm của f(x) là : F(x) = G(x) + C

– Giải điều kiện $F(a) = b \Leftrightarrow G(a) + C = b \Leftrightarrow C = b - G(a)$

– Kết luận F(x) = G(x) + C, với C tìm được ở trên.

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm một nguyên hàm F(x) của f(x) thoả điều kiện cho trước :

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$; F(2) = 3 ;

b) $f(x) = e^{x+\ln 10}$; F (1) = e.

Giải

a) Ta có : $\displaystyle\int f(x)dx = \frac{x^4}{2} - x^3 + 2x^2 + 5x + C = F(x)$

$F(2) = 3 \Leftrightarrow 8 - 8 + 8 + 10 + C = 3 \Leftrightarrow C = -15$

Vậy $F(x) = \dfrac{x^4}{2} - x^3 + 2x^2 + 5x - 15.$

b) Ta có : $f(x) = e^{x+\ln 10} = e^x.e^{\ln 10} = 10.e^x$

$\Rightarrow \int f(x)dx = 10e^x + C = F(x)$

$F(1) = e \Leftrightarrow 10e + C = e \Leftrightarrow C = -9e$

Vậy $F(x) = 10e^x - 9e.$

Ví dụ 2. Cho $f(x) = 3x^2 - (2m - 1)x + 2m$. Xác định m để nguyên hàm F(x) của f(x) thoả mãn điều kiện F(0) = 3 và F(1) = 15.

Giải

Ta có : $\int f(x)dx = x^3 - (2m-1)\frac{x^2}{2} + 2mx + C = F(x)$

$$\begin{cases} F(0) = 3 \\ F(1) = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 3 \\ 1 - \frac{2m-1}{2} + 2m + C = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 3 \\ 2m = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 3 \\ m = \frac{21}{2} \end{cases}$$

Vậy $m = \frac{21}{2}$.

C. BÀI TẬP

Tìm các họ nguyên hàm sau :

1. $\int \frac{6x^3 - 4x^2 + 1}{3x - 2}dx$;

2. $\int \frac{4}{x^4 - 7x^2 + 6}dx$;

3. $\int \frac{dx}{x^4(1 - x^2)}$;

4. $\int \frac{1}{(4x^2 - 12x + 9)(4x^2 - 12x + 5)}dx$;

5. $\int \frac{1}{x(x-2)(x+2)}dx$;

6. $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}}dx$;

7. $\int \frac{1}{x.\ln x}dx$;

8. $\int \frac{1}{x.\ln^5 x}dx$;

9. $\int \frac{1}{x.\sqrt{\ln x}}dx$;

10. $\int \sin^5 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} dx$;

11. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx$;

12. $\int \frac{3 + 2\cot x}{\sin^2 x}dx$;

13. $\int \sin 7x.\cos 5x.\cos x dx$;

14. $\int \frac{1 + 2\sin x.\cos x}{\sin x + \cos x}dx$;

15. $\int \frac{1}{\sin 2x}dx$;

16. $\int \frac{1}{\cos 2x}dx$;

17. $\int \frac{1}{\cos^4 x}dx$;

18. $\int \frac{1}{\cos^6 x}dx$;

19. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$;

20. $\int (\tan x + 1)^2 dx$;

21. $\int \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin 2x} dx$;

22. $\int \left[(1+\sin x)^2 + (1+\cos x)^2\right] dx$;

23. $\int \left(\sin^4 \frac{x}{4} + \cos^4 \frac{x}{4}\right) dx$;

24. $\int (4^x - 3.7^x).2^x dx$;

25. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$.

§2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Định lí 1. Cho hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K và hàm số $y = f(u)$ liên tục sao cho $f[u(x)]$ xác định trên K. Khi đó :

Nếu F là một nguyên hàm của f, tức là : $\int f(u)du = F(u) + C$ thì :

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C \qquad (1)$$

II. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Định lí 2. Nếu u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì :

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x).u'(x)dx \qquad (2)$$

Công thức (2) có thể viết gọn dưới dạng : $\int udv = uv - \int vdu$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1

Phương pháp đổi biến số

Biết $\int f(u)du = F(u) + C$. Tính $\int f(u(x)).u'(x)dx$ (*)

– Đặt : $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$

– Khi đó : (*) = $\int f(t).dt = F(t) + C = F(u(x)) + C$

DẠNG 1. Nguyên hàm các hàm số đơn giản

1. PHƯƠNG PHÁP

- **Dùng phương pháp đổi biến số và áp dụng kết quả sau :**

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ *thì* $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

- **Bảng nguyên hàm các hàm đơn giản :**

u là hàm số theo x	***Trường hợp đặc biệt :*** **u = ax + b**
◆ $\int du = u + C$	
◆ $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	◆ $\int (ax+b)^{\alpha}dx = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
◆ $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C \quad (u(x) \neq 0)$	◆ $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
◆ $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C \quad (u(x) > 0)$	◆ $\int \frac{du}{\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{a}2\sqrt{ax+b} + C$

- **Lưu ý cách phân tích :** $\frac{1}{A(A+k)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{A+k}\right)$, $\forall k \neq 0$

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm các họ nguyên hàm sau :

a) $\int \sqrt{(5-3x)^5}dx$ trên khoảng $\left(-\infty ; \frac{5}{3}\right)$;

b) $\int \left(\frac{1}{(3x+1)^3} + \frac{2}{\sqrt{4x-3}}\right)dx$;

c) $\int \frac{dx}{9-4x^2}$.

Giải

a) Trên khoảng $\left(-\infty\,;\,\frac{5}{3}\right)$, ta có :

$$\int\sqrt{(5-3x)^5}\,dx = \int(5-3x)^{\frac{5}{2}}dx = -\frac{1}{3}(5-3x)^{\frac{7}{2}}.\frac{2}{7}+C = -\frac{2}{21}\sqrt{(5-3x)^7}+C$$

b) $$\int\left(\frac{1}{(3x+1)^3}+\frac{2}{\sqrt{4x-3}}\right)dx = \int\frac{1}{(3x+1)^3}dx + \int\frac{2}{\sqrt{4x-3}}dx$$

$$= \int(3x+1)^{-3}dx + \int\frac{2}{\sqrt{4x-3}}dx = -\frac{1}{6}.\frac{1}{(3x+1)^2}+\sqrt{4x-3}+C$$

c) $$\int\frac{dx}{9-4x^2} = -\int\frac{dx}{(2x-3)(2x+3)} = -\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{2x-3}-\frac{1}{2x+3}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{6}.\left(\frac{1}{2}\ln|2x-3|-\frac{1}{2}\ln|2x+3|\right)+C = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x+3}{2x-3}\right|+C$$

Ví dụ 2. Tìm các họ nguyên hàm sau :

a) $\displaystyle\int\frac{x^3}{x^8-8}dx$;   b) $\displaystyle\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$;   c) $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$.

Giải

a) Đặt : $t = x^4 \Rightarrow dt = 4x^3\,dx \Rightarrow x^3\,dx = \dfrac{dt}{4}$

$$\Rightarrow \int\frac{x^3}{x^8-8}dx = \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2-8} = \frac{1}{4}\int\frac{1}{(t-2\sqrt{2})(t+2\sqrt{2})}dt$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{t-2\sqrt{2}}-\frac{1}{t+2\sqrt{2}}\right)dt$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-2\sqrt{2}}{t+2\sqrt{2}}\right|+C = \frac{1}{16\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-2\sqrt{2}}{x^4+2\sqrt{2}}\right|+C$$

b) Đặt $t = 1-x \Rightarrow \begin{cases} dt = -\,dx \Rightarrow dx = -\,dt \\ x = 1-t \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx = \int \frac{(1-t)^2 dt}{t^{100}} = \int \frac{1-2t+t^2}{t^{100}}dt = \int\left(\frac{1}{t^{100}} - \frac{2}{t^{99}} + \frac{1}{t^{98}}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{99}.\frac{1}{t^{99}} + \frac{2}{98}.\frac{1}{t^{98}} - \frac{1}{97}.\frac{1}{t^{97}} + C$$

$$= -\frac{1}{99}.\frac{1}{(1-x)^{99}} + \frac{2}{98}.\frac{1}{(1-x)^{98}} - \frac{1}{97}.\frac{1}{(1-x)^{97}} + C$$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$

Đặt : $t = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} dt = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)dx \\ t^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \int \frac{dt}{t^2-2} = \int \frac{dt}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2 - x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right| + C$$

Ví dụ 3. Tìm các họ nguyên hàm sau :

a) $\displaystyle\int \frac{6x}{\sqrt[3]{x^2+4}}dx$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x.\ln x.\ln(\ln x)}$; c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

Giải

a) Đặt : $t = \sqrt[3]{x^2+4} \Rightarrow t^3 = x^2 + 4 \Rightarrow 3t^2dt = 2xdx \Rightarrow 6xdx = 9t^2dt$

$$\Rightarrow \int \frac{6x}{\sqrt[3]{x^2+4}}dx = \int \frac{9t^2dt}{t} = \int 9tdt = \frac{9}{2}t^2 + C = \frac{9}{2}\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2 + C$$

b) Đặt : $t = \ln(\ln x) \Rightarrow dt = \dfrac{1}{x\ln x}dx$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x.\ln x.\ln(\ln x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln(\ln x)| + C$$

c) Đặt : $t = \sqrt{1+\ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + \ln x \Rightarrow 2tdt = \frac{1}{x}dx$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}.dx = \int 2t^2dt = \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + C$$

DẠNG 2. Nguyên hàm của hàm số mũ

1. PHƯƠNG PHÁP

u là hàm số theo x	◆ *Trường hợp đặc biệt* : $u = ax + b$ $(a \neq 0)$
◆ $\int e^u du = e^u + C$	◆ $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}.e^{ax+b} + C$
◆ $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ $(0 < a \neq 1)$	◆ $\int a^{mx+n}du = \frac{a^{mx+n}}{m.\ln a} + C$ $(0 < a \neq 1, m \neq 0)$

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm các họ nguyên hàm sau :

a) $\int \left(e^{2x+4} - e^{2-5x}\right)dx$;   b) $\int (x+1)e^{x^2+2x}dx$;

c) $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$;   d) $\int \frac{e^{2x}dx}{1+e^x}$.

Giải

a) $\int \left(e^{2x+4} - e^{2-5x}\right)dx = \frac{1}{2}e^{2x+4} + \frac{1}{5}e^{2-5x} + C$

b) Đặt : $t = x^2 + 2x \Rightarrow dt = (2x+2)dt \Rightarrow (x+1)dx = \frac{dt}{2}$

$$\Rightarrow \int (x+1)e^{x^2+2x}dx = \int e^t\frac{dt}{2} = \frac{e^t}{2} + C = \frac{e^{(x^2+2x)}}{2} + C$$

c) $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 1}$

Đặt : $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

$$\Rightarrow \int \frac{e^x dx}{e^{2x}-1} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$$

d) Đặt : $t = 1 + e^x \Rightarrow \begin{cases} dt = e^x\,dx \\ e^x = t-1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{e^{2x}dx}{1+e^x} = \int \frac{e^x.e^x dx}{1+e^x} = \int \frac{(t-1)dt}{t} = \int\left(1 - \frac{1}{t}\right)dt$$

$$= t - \ln|t| + C = 1 + e^x - \ln(1+e^x) + C$$

Ví dụ 2. Tìm các họ nguyên hàm sau :

a) $\int \frac{6^x}{9^x - 4^x}dx$; b) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}}$; c) $\int e^{\sin x + 1}\cos x dx$.

Giải

a) $\int \frac{6^x}{9^x - 4^x}dx = \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 1}dx$

Đặt : $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x \Rightarrow dt = \left(\frac{3}{2}\right)^x \ln\frac{3}{2}dx \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x dx = \frac{dt}{\ln\frac{3}{2}}$

$$\Rightarrow \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 1}dx = \frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\int\frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\int\frac{dt}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1}\right| + C = \frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x}\right| + C$$

b) Đặt : $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

$$\Rightarrow \int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}} = \int \frac{tdt}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}} = \int \frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{2}dt$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{(1+t)^3}+\sqrt{(1-t)^3}\right)+C$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{(1+e^x)^3}+\sqrt{(1-e^x)^3}\right)+C.$$

c. Đặt $t = \sin x + 1 \Rightarrow dt = \cos x dx$

$$\Rightarrow \int e^{\sin x+1}\cos x dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x+1} + C.$$

DẠNG 3. Nguyên hàm của hàm phân thức hữu tỉ

1. PHƯƠNG PHÁP

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (P(x), Q(x) \text{ là đa thức})$$

✓ Nếu **bậc P(x) < bậc Q(x)**

Ta biến đổi f(x) về tổng (hiệu) các hàm số đơn giản rồi tìm nguyên hàm.

✓ Nếu **bậc P(x) ≥ bậc Q(x)**

Ta thực hiện phép chia đa thức P(x) cho Q(x) rồi biến đổi f(x) về tổng (hiệu) các hàm số đơn giản và tìm nguyên hàm.

Lưu ý cách phân tích sau :

- Nếu tam thức ax^2+bx+c có 2 ngiệm x_1, x_2 thì :

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1).(x-x_2)$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}dx = \frac{1}{a(x_2-x_1)}\int\left[\frac{1}{x-x_2}-\frac{1}{x-x_1}\right]dx$

- Cho $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$$

$$P(x) = Q(x) \ (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = b_n \\ a_{n-1} = b_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 = b_1 \\ a_0 = b_0 \end{cases} \quad \text{(Phương pháp đồng nhất thức)}$$

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm các nguyên hàm sau :

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2-4x+4)}$; b) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x+1)(x^2+x-2)}$.

Giải

a) $$\int\frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2-4x+4)} = \int\frac{dx}{x^2-4x+3} - \int\frac{dx}{x^2-4x+4}$$

$$= \int\frac{dx}{(x-1)(x-3)} - \int\frac{dx}{(x-2)^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx - \int\frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| + \frac{1}{x-2} + C$$

b) $$\int\frac{dx}{x(x+1)(x^2+x-2)} = \int\frac{dx}{(x^2+x)(x^2+x-2)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2+x-2}-\frac{1}{x^2+x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(x+1)} = \frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx - \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$$

Ví dụ 2. Tìm các nguyên hàm sau :

a) $\displaystyle\int\frac{4}{x^4-7x^2+6}dx$; b) $\displaystyle\int\frac{2x-3}{3x^2-2x-1}dx$;

c) $\displaystyle\int\frac{x^5}{x^6-x^3-2}dx$; d) $\displaystyle\int\frac{x^4}{x^4-5x^2+4}dx$.

Giải

a) $$\int\frac{4}{x^4-7x^2+6}dx=\int\frac{4}{(x^2-1)(x^2-6)}dx=\frac{4}{5}\int\left(\frac{1}{x^2-6}-\frac{1}{x^2-1}\right)dx$$

$$=\frac{4}{5}\int\frac{1}{x^2-6}dx-\frac{4}{5}\int\frac{1}{x^2-1}dx$$

$$=\frac{4}{5}\int\frac{1}{(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})}dx-\frac{4}{5}\int\frac{1}{(x-1)(x+1)}dx$$

$$=\frac{2}{5\sqrt{6}}\int\left(\frac{1}{x-\sqrt{6}}-\frac{1}{x+\sqrt{6}}\right)dx-\frac{2}{5}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\frac{2}{5\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{6}}{x+\sqrt{6}}\right|-\frac{2}{5}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

b) $$\int\frac{2x-3}{3x^2-2x-1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{6x-2-7}{3x^2-2x-1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{6x-2}{3x^2-2x-1}dx-\frac{7}{3}\int\frac{dx}{3x^2-2x-1}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{(3x^2-2x-1)'}{3x^2-2x-1}dx-\frac{7}{3}\int\frac{dx}{3(x-1)(x+\frac{1}{3})}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{(3x^2-2x-1)'}{3x^2-2x-1}dx-\frac{7}{9}.\frac{3}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+\frac{1}{3}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2x-1\right|-\frac{7}{12}\ln\left|\frac{x-1}{x+\frac{1}{3}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2x-1\right|-\frac{7}{12}\ln\left|\frac{3(x-1)}{3x+1}\right|+C$$

c) *Cách 1 :*

$$\int\frac{x^5}{x^6-x^3-2}dx=\int\frac{x^5}{(x^3+1)(x^3-2)}dx=\frac{1}{3}\int\left(\frac{x^5}{x^3-2}-\frac{x^5}{x^3+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{x^5}{x^3-2}dx-\frac{1}{3}\int\frac{x^5}{x^3+1}dx=A-B$$

Tính A :

Đặt : $t = x^3 - 2 \Rightarrow \begin{cases} dt = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \dfrac{dt}{3} \\ x^3 = t + 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{3}\int \frac{x^5}{x^3 - 2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{(t+2)dt}{3t} = \frac{1}{9}\int\left(1 + \frac{2}{t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{9}\left(t + 2\ln|t|\right) + C = \frac{1}{9}\left(x^3 - 2 + 2\ln\left|x^3 - 2\right|\right) + C$$

Tính B :

Đặt : $t = x^3 + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \dfrac{dt}{3} \\ x^3 = t - 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{3}\int \frac{x^5}{x^3 + 1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{(t-1)dt}{3t} = \frac{1}{9}\int\left(1 - \frac{1}{t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{9}\left(t - \ln|t|\right) + C = \frac{1}{9}\left(x^3 + 1 - \ln\left|x^3 + 1\right|\right) + C$$

Suy ra : $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^6 - x^3 - 2}dx = \frac{1}{9}\left(x^3 - 2 + 2\ln\left|x^3 - 2\right|\right) - \frac{1}{9}\left(x^3 + 1 - \ln\left|x^3 + 1\right|\right) + C$

$$= \frac{1}{9}\ln\left(\left|x^3 + 1\right|.(x^3 - 2)^2\right) + C$$

Cách 2 :

$$\int \frac{x^5}{x^6 - x^3 - 2}dx = \int \frac{x^3.x^2}{(x^3 - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}}dx$$

Đặt : $t = x^3 - \dfrac{1}{2} \Rightarrow dt = 3x^2dx \Rightarrow \begin{cases} x^2dx = \dfrac{dt}{3} \\ x^3 = t + \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3.x^2}{(x^3-\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{(t+\frac{1}{2})dt}{t^2-\frac{9}{4}} = \frac{1}{3}\int \frac{t}{t^2-\frac{9}{4}}dt + \frac{2}{3}\int \frac{1}{(2t-3)(2t+3)}dt$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{2t}{t^2-\frac{9}{4}}dt + \frac{1}{9}\int\left(\frac{1}{2t-3}-\frac{1}{2t+3}\right)dt$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|t^2-\frac{9}{4}\right| + \frac{1}{18}\ln\left|\frac{2t-3}{2t+3}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^6-x^3-2\right| + \frac{1}{18}\ln\left|\frac{x^3-2}{x^3+1}\right| + C$$

d) $$\int \frac{x^4}{x^4-5x^2+4}dx = \int \frac{x^4}{(x^2-1)(x^2-4)}dx = \frac{1}{3}\int\left(\frac{x^4}{x^2-4}-\frac{x^4}{x^2-1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\int\left[\left(x^2+4+\frac{16}{x^2-4}\right)-\left(x^2+1+\frac{1}{x^2-1}\right)\right]dx$$

$$= \frac{1}{3}\int\left(3-\frac{1}{x^2-1}+\frac{16}{x^2-4}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\int 3dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx + \frac{1}{3}\int \frac{16}{(x-2)(x+2)}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int 3dx - \frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx + \frac{4}{3}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= x - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{4}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

Ví dụ 3.

a) Cho $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)(x-2)}$. Tính $\int f(x)dx$.

b) Cho $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-1)^2}$. Tính $\int f(x)dx$.

Giải

a) *Cách 1 :*

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{x(x-2)} - \frac{1}{x(x-1)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}.\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}.\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln|x-2| - \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x| + C = \frac{1}{2}\ln|x(x-2)| - \ln|x-1| + C$$

Cách 2 : (dùng phương pháp đồng nhất thức)

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

$$= \frac{A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 - (3A+2B+C)x + 2A}{x(x-1)(x-2)}$$

Như vậy với mọi $x \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1, 2\}$, ta phải có hệ sau :

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=0 \\ 2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{2} \\ B=-1 \\ C=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $f(x) = \frac{1}{2}.\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}.\frac{1}{x-2}$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + C = \frac{1}{2}\ln|x(x-2)| - \ln|x-1| + C$$

b) *Cách 1 :*

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right).$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}.\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = -\frac{1}{2}.\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Cách 2 : (dùng phương pháp đồng nhất thức)

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (B+C-2A)x + (A+C)}{(x+1)(x-1)^2}$$

Như vậy với mọi $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, ta phải có hệ sau :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \\ C=\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}.\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}.\frac{x-3}{(x-1)^2} = \frac{1}{4}.\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\frac{(x-1)-2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}.\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}.\frac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow \int f(x)dx = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}.\frac{1}{x-1} + C$$

DẠNG 4. Nguyên hàm các hàm căn thức

1. PHƯƠNG PHÁP

Một số lưu ý khi tính nguyên hàm có chứa dấu căn như sau :

– Dùng công thức biến đổi căn : $\sqrt[n]{u^m} = u^{\frac{m}{n}}$ $(u > 0)$

– Khử dấu bằng bằng cách nhân lượng liên hợp

– Thường đổi biến : đặt $t = \sqrt[n]{u(x)} \Rightarrow t^n = u(x) \Rightarrow n.t^{n-1}dt = u'(x)dx$

u là hàm số theo x	***Trường hợp đặc biệt :* u = ax + b :**
◆ $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$ $(u(x) > 0)$	◆ $\int \frac{du}{\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{a}2\sqrt{ax+b} + C$

2. VÍ DỤ

Tìm nguyên hàm các hàm số sau :

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}}$ trên khoảng $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$;

b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$;

c) $\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx$;

d) $\int \frac{xdx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

Giải

a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}} = \frac{1}{2}\int\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[(3x+1)^{\frac{1}{2}}-(3x-1)^{\frac{1}{2}}\right]dx$$

$$= \frac{1}{9}\left[\sqrt{(3x+1)^3}-\sqrt{(3x-1)^3}\right]+C$$

b) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}} = \int \frac{x^2dx}{x^3\sqrt{1+x^3}}$$

Đặt $t=\sqrt{1+x^3} \Rightarrow t^2 = 1+x^3 \Rightarrow \begin{cases} 2tdt = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{2}{3}tdt \\ x^3 = t^2-1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}} = \frac{2}{3}\int \frac{tdt}{(t^2-1).t} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{\sqrt{1+x^3}+1}\right|+C$$

c) Đặt : $t=\sqrt{1+\sqrt{x}} \Rightarrow t^2 = 1+\sqrt{x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2tdt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow dx = 4t(t^2-1)dt \\ \sqrt{x} = t^2-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx = \int \frac{(t^2-1)^2 4t(t^2-1)}{t}dt = 4\int (t^2-1)^3 dt$$

$$= 4\int \left(t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1\right)dt = \frac{4}{7}t^7 - \frac{12}{5}t^5 + 4t^3 - 4t + C$$

$$= \frac{4}{7}\sqrt{\left(1+\sqrt{x}\right)^7} - \frac{12}{5}\sqrt{\left(1+\sqrt{x}\right)^5} + 4\sqrt{\left(1+\sqrt{x}\right)^3} - 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + C$$

d) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} = \int \frac{1}{(1+x^2)}.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Đặt : $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow \begin{cases} dt = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ t^2 = 1+x^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{xdx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

DẠNG 5. Nguyên hàm các hàm số lượng giác

1. PHƯƠNG PHÁP

u là hàm số theo x	◆ Trường hợp đặc biệt : u = ax + b (a ≠ 0)
◆ $\int \cos u du = \sin u + C$	◆ $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
◆ $\int \sin u du = -\cos u + C$	◆ $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
◆ $\int \frac{1}{\cos^2 u}du = \int (1+\tan^2 u)du$ $= \tan u + C$	◆ $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \int [1+\tan^2(ax+b)]dx$ $= \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
◆ $\int \frac{1}{\sin^2 u}du = \int (1+\cot^2 u)du$ $= -\cot u + C$	◆ $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = \int [1+\cot^2(ax+b)]dx$ $= -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$

- Tính $\int f(x)dx$ với

$$f(x)=\frac{\alpha\sin x+\beta\cos x}{a\sin x+b\cos x}=\frac{u(x)}{v(x)},\ \left(\alpha^2+\beta^2\neq 0\ ,\ a^2+b^2\neq 0\right)$$

Biến đổi : $f(x)=\dfrac{A.v(x)+B.v'(x)}{v(x)}$

$$=\frac{A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x)}{a\sin x+b\cos x}$$

$$=\frac{(aA-bB)\sin x+(Ab+aB)\cos x}{a\sin x+b\cos x}$$

Dùng phương pháp đồng nhất thức :

$(aA-bB)\sin x+(Ab+aB)\cos x=\alpha\sin x+\beta\cos x,\ \forall x\in D_f$

$\Leftrightarrow\begin{cases}aA-bB=\alpha\\Ab+aB=\beta\end{cases}$ suy ra A và B.

Suy ra :

$$\int f(x)dx=\int\frac{A.v(x)+B.v'(x)}{v(x)}dx=\int Adx+B\int\frac{v'(x)}{v(x)}dx=Ax+B\ln|v(x)|+C$$

Nhắc lại một số công thức lượng giác thường gặp :

- $\sin 2a=2\sin a.\cos a$
- $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$
- $t=\tan\dfrac{a}{2}\Rightarrow\begin{cases}\sin a=\dfrac{2t}{1+t^2}\\ \cos a=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\ \tan a=\dfrac{2t}{1-t^2}\end{cases}$
- $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$; $\cos^3 a=\dfrac{3\cos a+\cos 3a}{4}$
- $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$; $\sin^3 a=\dfrac{3\sin a-\sin 3a}{4}$
- $\cos a.\cos b=\dfrac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$

- $\sin a.\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
- $\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính các họ nguyên hàm sau :

a) $\int \frac{dx}{\cos^4 x - \sin^4 x}$; b) $\int \sin^4 x.\cos^3 xdx$;

c) $\int \sqrt{1+\cos^2 x}.\sin 2xdx$; d) $\int \cos^5 xdx$.

Giải

a) $\int \frac{dx}{\cos^4 x - \sin^4 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos 2x} = \int \frac{\cos 2x}{1-\sin^2 2x}dx$

Đặt : $t = \sin 2x \Rightarrow dt = 2\cos 2xdx \Rightarrow \cos 2xdx = \frac{dt}{2}$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos 2x}{1-\sin^2 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = -\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin 2x - 1}{\sin 2x + 1}\right| + C$$

b) Đặt : $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x.dx$

$$\Rightarrow \int \sin^4 x.\cos^3 xdx = \int \sin^4 x.(1-\sin^2 x).\cos x.dx = \int t^4(1-t^2)dt$$

$$= \int (t^4 - t^6)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$$

c) Đặt : $t = \sqrt{1+\cos^2 x} \Rightarrow t^2 = 1 + \cos^2 x \Rightarrow 2tdt = -\sin 2xdx \Rightarrow \sin 2xdx = -2tdt$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1+\cos^2 x}.\sin 2xdx = -2\int t^2dt = -\frac{2}{3}t^3 + C = -\frac{2}{3}\sqrt{\left(1+\cos^2 x\right)^3} + C$$

d) Đặt : $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x.dx$

$$\Rightarrow \int \cos^5 xdx = \int (1-\sin^2 x)^2.\cos x.dx = \int (1-t^2)^2 dt = \int (1 - 2t^2 + t^4)dt$$

$$= t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

Ví dụ 2. Tính các họ nguyên hàm sau :

a) $\int \frac{1}{\sin x}dx$; b) $\int \frac{1}{\sin^6 x}dx$; c) $\int \frac{1}{\sin^4 x\cos x}dx$;

d) $\int \tan^4 xdx$; e) $\int \tan^6 xdx$; f) $\int \tan^5 xdx$.

Giải

a) *Cách 1 :*

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1}{2\tan\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}}dx$$

$$= \int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

Cách 2 :

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

$$= -\int \frac{d\left(\cos\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}} + \int \frac{d\left(\sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= -\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

Cách 3 :

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$$

Đặt : $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x\,dx$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{dt}{t^2-1} = \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\tan^2\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

b) $\int \frac{1}{\sin^6 x}dx = \int (1+\cot^2 x)^2.\frac{1}{\sin^2 x}dx = -\int (1+2\cot^2 x+\cot^4 x)d(\cot x)$

$$= -\cot x - \frac{2}{3}\cot^3 x - \frac{1}{5}\cot^5 x + C$$

c) $\int \frac{1}{\sin^4 x\cos x}dx = \int \frac{\cos x}{\sin^4 x(1-\sin^2 x)}dx$

Đặt : $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{\sin^4 x\cos x}dx = \int \frac{dt}{t^4(1-t^2)} = -\int \left(\frac{1}{t^2}.\frac{1}{t^2(t^2-1)}\right)dt = -\int \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2}\right)dt$

$$= -\int \frac{1}{t^2(t^2-1)}dt + \int \frac{1}{t^4}dt = -\int \frac{1}{t^2-1}dt + \int \frac{1}{t^2}dt + \int \frac{1}{t^4}dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt + \int \frac{1}{t^2}dt + \int \frac{1}{t^4}dt$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right| - \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$$

d) $\int \tan^4 x dx = \int (\tan^4 x - 1).dx + \int dx = \int (\tan^2 x-1)(\tan^2 x+1)dx + \int dx$

$$= \int (\tan^2 x - 1)d(\tan x) + \int dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C$$

e) $\int \tan^6 x dx = \int \left(\tan^6 x + 1\right)dx - \int dx$

$$= \int \left(\tan^2 x+1\right)\left(\tan^4 x - \tan^2 x + 1\right)dx - \int dx$$

$$= \int \left(\tan^4 x - \tan^2 x + 1\right)d\left(\tan x\right)) - \int dx$$

$$= \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + C$$

f) $\int \tan^5 x dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^5 x}\sin x dx$

Đặt : $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

$$\Rightarrow \int \tan^5 x dx = -\int \frac{(1-t^2)^2}{t^5} dt = -\int \frac{1-2t^2+t^4}{t^5} dt = -\int \frac{1}{t^5} dt + 2\int \frac{1}{t^3} dt - \int \frac{1}{t} dt$$

$$= \frac{1}{4t^4} - \frac{1}{t^2} - \ln|t| + C = \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \ln|\cos x| + C$$

Ví dụ 3. Tính các họ nguyên hàm sau :

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} dx$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x - 5}$;

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x.\cos x}$; d) $\displaystyle\int \frac{1}{3\cos^2 x + \sin^2 x + 4\sin x \cos x} dx.$

Giải

a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)dx}{1 - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$$

Đặt : $t = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow dt = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 - 1} = -\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1}\right| + C$$

b) Đặt $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} dt = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x - 5} = \int \frac{1}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} - 5} \cdot \frac{2dt}{(1+t^2)}$$

$$= -\int \frac{dt}{4t^2 - 4t + 1} = -\int \frac{dt}{(2t-1)^2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2t-1} + C = \frac{1}{2}.\frac{1}{2\tan\frac{x}{2} - 1} + C$$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x.\cos x} = \int \frac{1}{\cos^2 x(\tan^2 x - 5\tan x)} dx$

Đặt : $t = \tan x \Rightarrow dt = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x.\cos x} = \int \frac{dt}{t^2 - 5t} = \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{t-5} - \frac{1}{t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{t-5}{t}\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\tan x - 5}{\tan x}\right| + C$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{3\cos^2 x + \sin^2 x + 4\sin x.\cos x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x\left(3 + \tan^2 x + 4\tan x\right)} dx$

$$= \int \frac{d(\tan x)}{(\tan x + 1)(\tan x + 3)} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\tan x + 1} - \frac{1}{\tan x + 3}\right) d(\tan x)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan x + 1}{\tan x + 3}\right| + C$$

Ví dụ 4. Tìm nguyên hàm : $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} dx.$

Giải

Dùng phương pháp đồng nhất thức ta có :

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} dx = \int \frac{A(\sin x + 2\cos x) + B(\cos x - 2\sin x)}{\sin x + 2\cos x} dx$$

$$= \int \frac{(A - 2B)\sin x + (2A + B)\cos x}{\sin x + 2\cos x} dx$$

Đồng nhất hệ số : $(A - 2B)\sin x + (2A + B)\cos x = \sin x - \cos x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A - 2B = 1 \\ 2A + B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{5} \\ B = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}dx = -\frac{1}{5}\int \frac{\sin x + 2\cos x}{\sin x + 2\cos x}dx - \frac{3}{5}\int \frac{(\sin x + 2\cos x)'}{\sin x + 2\cos x}dx$$

$$= -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}\ln|\sin x + 2\cos x| + C$$

Vấn đề 2
Phương pháp nguyên hàm từng phần

Ta có : $\int udv = uv - \int vdu$

DẠNG 1. Tìm nguyên hàm : $\int P(x).\ln Q(x)dx$

1. PHƯƠNG PHÁP

- Đặt $\begin{cases} u = \ln Q(x) \\ dv = P(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = ? \\ v = ? \end{cases}$
- $\int P(x).\ln Q(x)dx = uv - \int vdu$

2. VÍ DỤ

Ví dụ. Tính :

a) $\int \ln^2 x dx$; b) $\int x.\ln(1+x^2)dx$; c) $\int \frac{\ln(x^2-1)}{x^2}dx$;

d) $\int \frac{x.\ln x}{(x^2+1)^2}dx$; e) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$; f) $\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

Giải

a) Đặt : $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\frac{\ln x}{x}dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow \int \ln^2 x dx = x.\ln^2 x - 2\int \ln x dx$

Đặt : $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \ln^2 x dx = x.\ln^2 x - 2\left[x\ln x - \int dx\right] = x.\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

b) Đặt : $\begin{cases} u = \ln(1+x^2) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2x}{1+x^2}dx \\ v = \dfrac{1+x^2}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int x.\ln(1+x^2)dx = \frac{1+x^2}{2}\ln(1+x^2) - \int xdx = \frac{1+x^2}{2}\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + C$$

c) Đặt : $\begin{cases} u = \ln(x^2-1) \\ dv = \dfrac{1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2x}{x^2-1}dx \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln(x^2-1)}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln(x^2-1) + 2\int \frac{1}{x^2-1}dx$$

$$= -\frac{1}{x}\ln(x^2-1) + \int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{x}\ln(x^2-1) + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

d) Đặt : $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = -\dfrac{1}{2(x^2+1)} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{x.\ln x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{2(x^2+1)}\ln x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+1)}\ln x + \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2(x^2+1)}dx$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+1)}\ln x + \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right)2xdx$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+1)}\ln x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2}{x^2+1}\right| + C$$

e) Đặt : $\begin{cases} u = \ln(\sin x) \\ dv = \dfrac{1}{\sin^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\cos x}{\sin x}dx = \cot x dx \\ v = -\cot x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx = -\cot x \ln(\sin x) + \int \cot^2 x dx$$

$$= -\cot x \ln(\sin x) + \int (1 + \cot^2 x)dx - \int dx$$

$$= -\cot x \ln(\sin x) - \cot x - x + C$$

f) Đặt : $\begin{cases} u = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) \\ dv = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}dx \\ v = \sqrt{1 + x^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{x \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{\sqrt{1 + x^2}}dx = \sqrt{1 + x^2}\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \int dx$$

$$= \sqrt{1 + x^2}\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - x + C$$

DẠNG 2. $\int P(x).\left(\sin x, \cos x, e^x\right)dx$

1. PHƯƠNG PHÁP

- Đặt $\begin{cases} u = P(x) & \Rightarrow du = P'(x)dx \\ dv = \left(\sin x, \cos x, e^x\right)dx & \Rightarrow v = \int \sin x dx \quad \left(v = \int \cos x dx, v = \int e^x dx\right) \end{cases}$

- $\int P(x).\left(\sin x, \cos x, e^x\right)dx = uv - \int v du$

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính :

a) $\int x^2.e^{2x}dx$; b) $\int (x^2 - 1)\cos^2 x dx$;

c) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$; d) $\int \frac{1}{\sin^3 x}dx$.

Giải

a) Đặt : $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \int x^2.e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}dx$

Đặt : $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int x^2.e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2.e^{2x} - \left[\frac{1}{2}x.e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}x^2.e^{2x} - \frac{1}{2}x.e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

b. $\int (x^2 - 1)\cos^2 xdx = \frac{1}{2}\int (x^2 - 1)(1 + \cos 2x)dx$

$$= \frac{1}{2}\int \left(x^2 - 1\right)dx + \frac{1}{2}\int \left(x^2 - 1\right)\text{cox}2xdx$$

- Tính : $\frac{1}{2}\int \left(x^2 - 1\right)dx = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x + C_1$
- Tính : $\frac{1}{2}\int \left(x^2 - 1\right)\text{cox}2xdx$

Đặt : $\begin{cases} u = x^2 - 1 \\ dv = \cos 2xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \left(x^2 - 1\right)\text{cox}2xdx = \frac{1}{4}\left(x^2 - 1\right)\sin 2x - \frac{1}{2}\int x\sin 2xdx \qquad (1)$$

- Tính : $\int x\sin 2xdx$

Đặt : $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int x\sin 2xdx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2xdx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_2$$

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{2}\int\left(x^2-1\right)\text{cox}2x\,dx = \frac{1}{4}\left(x^2-1\right)\sin 2x - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^2-1\right)\sin 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + C_2$$

Vậy :

$$\int(x^2-1)\cos^2 x\,dx = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\left(x^2-1\right)\sin 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + C$$

c) Đặt : $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{1}{\sin^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int\frac{x}{\sin^2 x}dx = -x.\cot x + \int\cot x\,dx = -x.\cot x + \int\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$= -x.\cot x + \int\frac{d(\sin x)}{\sin x} = -x.\cot x + \ln|\sin x| + C$$

d) Đặt : $\begin{cases} u = \dfrac{1}{\sin x} \\ dv = \dfrac{1}{\sin^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}dx \\ v = -\cot x = -\dfrac{\cos x}{\sin x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int\frac{1}{\sin^3 x}dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}dx$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int\frac{1}{\sin^3 x}dx + \int\frac{dx}{\sin x}$$

Suy ra : $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^3 x}dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \int\frac{dx}{\sin x}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x}$

- $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}dx = \int\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}dx = \int\frac{1}{2\tan\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$$= \int\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sin^3 x}dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

Ví dụ 2. Tính : $I = \int e^x \cos x dx$ và $J = \int e^x \sin x dx$.

Giải

Tính I :

Đặt : $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - J \qquad (*)$$

Đặt : $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$\Rightarrow J = \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + I \qquad (**)$$

$$(*) \Rightarrow I = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + I\right) \Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x + \cos x\right)$$

$$(**) \Rightarrow J = -e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x\left(\sin x + \cos x\right) = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x - \cos x\right)$$

C. BÀI TẬP

Tìm các họ nguyên hàm sau :

1. $\int x(2+x)^{12}dx$;

2. $\int \frac{1-x^2}{x^4 - x^2 + 1}dx$;

3. $\int x^{10}(x^{11}+1)^{12}dx$;

4. $\int x^2\left(\frac{x^3}{18}-1\right)^5 dx$;

5. $\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx$;

6. $\int \frac{x}{(x-1)^2}dx$;

7. $\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}dx$;

8. $\int \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^3\sqrt{x^2+1}}$;

9. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}-1)^2}dx$;

10. $\int x^2 e^{x^3+1}dx$;

11. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+3}dx$;

12. $\int \frac{\ln(1+x)-\ln x}{x(1+x)}dx$;

13. $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx$;

14. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos x}$;

15. $\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$;

16. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$;

17. $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$;

18. $\int \sin x.\ln(1+\cos x)dx$;

19. $\int x.\sin x.\cos^2 x dx$;

20. $\int x^3 e^x dx$;

21. $\int x^2\cos 2x dx$;

22. $\int \sqrt{x}\ln x dx$;

23. $\int x^2\ln(2x)dx$;

24. $\int \sin(\ln x)dx$;

25. $\int (2x+1).\ln(x+1)dx$;

26. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$;

27. $\int x.\ln^2(x+1)dx$;

28. $\int (1-\ln x)^2 dx$;

29. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx$;

30. $\int \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx.$

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

§1. ĐỊNH NGHĨA NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT CỦA NGUYÊN HÀM

1. $$\int\frac{6x^3-4x^2+1}{3x-2}dx=\int\left(2x^2+\frac{1}{3x-2}\right)dx=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}\ln|3x-2|+C$$

2. $$\int\frac{4}{x^4-7x^2+6}dx=\int\frac{4}{(x^2-1)(x^2-6)}dx=\frac{4}{5}\int\left(\frac{1}{x^2-6}-\frac{1}{x^2-1}\right)dx$$

$$=\frac{4}{5}\int\frac{1}{(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})}dx-\frac{4}{5}\int\frac{1}{(x-1)(x+1)}dx$$

$$=\frac{2}{5\sqrt{6}}\int\left(\frac{1}{x-\sqrt{6}}-\frac{1}{x+\sqrt{6}}\right)dx-\frac{2}{5}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\frac{2}{5\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{6}}{x+\sqrt{6}}\right|-\frac{2}{5}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

3. $$\int\frac{dx}{x^4(1-x^2)}=-\int\frac{1}{x^2}.\frac{1}{x^2(x^2-1)}.dx=-\int\frac{1}{x^2}.\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2}\right).dx$$

$$=-\int\frac{1}{x^2(x^2-1)}dx+\int\frac{1}{x^4}dx=-\int\frac{1}{x^2-1}dx+\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x^4}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx+\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x^4}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$$

4. $$\int\frac{1}{(4x^2-12x+9)(4x^2-12x+5)}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{4x^2-12x+5}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{4x^2-12x+9}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{(2x-5)(2x-1)}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{(2x-3)^2}dx$$

$$=\frac{1}{16}\int\left(\frac{1}{2x-5}-\frac{1}{2x-1}\right)dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{(2x-3)^2}dx$$

$$=\frac{1}{32}\ln\left|\frac{2x-5}{2x-1}\right|+\frac{1}{8}.\frac{1}{2x-3}+C$$

5. $\displaystyle\int\frac{1}{x(x-2)(x+2)}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x(x-2)}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x(x+2)}dx=\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)dx-\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-4}{x^2}\right|+C$

6. $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}dx=\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{6}\sqrt{(2x+1)^3}-\frac{1}{6}\sqrt{(2x-1)^3}+C$

7. $\displaystyle\int\frac{1}{x.\ln x}dx=\int\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln\left|\ln x\right|+C$

8. $\displaystyle\int\frac{1}{x.\ln^5 x}dx=\int\frac{d(\ln x)}{\ln^5 x}=-\frac{1}{4\ln^4 x}+C$

9. $\displaystyle\int\frac{1}{x.\sqrt{\ln x}}dx=\int\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}}=2\sqrt{\ln x}+C$

10. $\displaystyle\int\sin^5\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}dx=3\int\sin^5\frac{x}{3}d\left(\sin\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin^6\frac{x}{3}+C$

11. $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

$=-\cot x-\tan x+C$

12. $\displaystyle\int\frac{3+2\cot x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{3}{\sin^2 x}dx+2\int\frac{\cot x}{\sin^2 x}dx$

$\displaystyle=\int\frac{3}{\sin^2 x}dx-2\int\cot x d(\cot x)=-3\cot x-\cot^2 x+C$

13. $\displaystyle\int\sin 7x.\cos 5x.\cos x dx=\frac{1}{2}\int\sin 7x\left(\cos 6x+\cos 4x\right)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\int\left(\sin 13x+\sin x+\sin 11x+\sin 3x\right)dx$

$$= -\frac{1}{52}\cos 13x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{44}\cos 11x - \frac{1}{12}\cos 3x + C$$

14. $\int \frac{1+2\sin x.\cos x}{\sin x+\cos x}dx = \int \frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}dx = \int (\sin x+\cos x)dx$

$$= \sin x - \cos x + C$$

15. $\int \frac{1}{\sin 2x}dx = \int \frac{dx}{2\sin x\cos x} = \int \frac{dx}{2\tan x.\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{d(\tan x)}{\tan x} = \frac{1}{2}\ln|\tan x| + C$

16. $\int \frac{1}{\cos 2x}dx = \int \frac{\cos 2x}{1-\sin^2 2x}dx$

$$= -\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{\sin 2x-1} - \frac{1}{\sin 2x+1}\right)d(\sin 2x) = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin 2x-1}{\sin 2x+1}\right| + C$$

17. $\int \frac{1}{\cos^4 x}dx = \int (1+\tan^2 x).\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int (1+\tan^2 x)d(\tan x)$

$$= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

18. $\int \frac{1}{\cos^6 x}dx = \int (1+\tan^2 x)^2 \frac{1}{\cos^2 x}dx$

$$= \int \left(1+2\tan^2 x+\tan^4 x\right)d(\tan x) = \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C$$

19. $\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 \frac{x}{2}} = -\cot\frac{x}{2} + C$

20. $\int (\tan x + 1)^2 dx = \int (\tan^2 x + 1 + 2\tan x)dx$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - 2\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \tan x - 2\ln|\cos x| + C$$

21. $\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin 2x}dx = \int \frac{(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2}dx = -\frac{1}{\sin x+\cos x} + C$

22. $\int \left[(1+\sin x)^2 + (1+\cos x)^2\right]dx = \int (3+2\sin x+2\cos x)dx$

$$= 3x - 2\cos x + 2\sin x + C$$

23. $\int\left(\sin^4\frac{x}{4}+\cos^4\frac{x}{4}\right)dx=\int\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$

$$=\int\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 x\right)dx=\int\left(1-\frac{1-\cos 2x}{4}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 2x\right)dx=\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$$

24. $\int(4^x-3.7^x).2^x\,dx=\int\left(8^x-3.14^x\right)dx=\frac{8^x}{\ln 8}-3\frac{14^x}{\ln 14}+C$

25. $\int\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(x^{-\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt{x}+C$

§2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

1. Đặt : $t=2+x\Rightarrow\begin{cases}dt=dx\\ x=t-2\end{cases}$

$$\Rightarrow\int x(2+x)^{12}dx=\int(t-2).t^{12}dt=\int(t^{13}-2t^{12})dt$$

$$=\frac{1}{14}t^{14}-\frac{2}{13}t^{13}+C=\frac{1}{14}(2+x)^{14}-\frac{2}{13}(2+x)^{13}+C$$

2. $\int\frac{1-x^2}{x^4-x^2+1}dx=-\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}dx$

Đặt : $t=x+\frac{1}{x}\Rightarrow\begin{cases}dt=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx\\ t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2\end{cases}$

$$\Rightarrow\int\frac{1-x^2}{x^4-x^2+1}dx=-\int\frac{1}{t^2-3}dt=-\int\frac{1}{(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})}dt$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\left(\frac{1}{t-\sqrt{3}}-\frac{1}{t+\sqrt{3}}\right)dt=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+C$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{3}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{3}}\right| + C = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2 - x\sqrt{3}+1}{x^2+x\sqrt{3}+1}\right| + C$$

3. Đặt : $t = x^{11} + 1 \Rightarrow dt = 11x^{10}dx \Rightarrow x^{10}dx = \frac{dt}{11}$

$$\Rightarrow \int x^{10}(x^{11}+1)^{12}dx = \frac{1}{11}\int t^{12}dt = \frac{t^{13}}{11.13} + C = \frac{(x^{11}+1)^{13}}{143} + C$$

4. Đặt : $t = \frac{x^3}{18} - 1 \Rightarrow dt = \frac{x^2}{6}dt \Rightarrow x^2dt = 6dt$

$$\Rightarrow \int x^2\left(\frac{x^3}{18}-1\right)^5 dx = \int t^5.6dt = t^6 + C = \left(\frac{x^3}{18}-1\right)^6 + C$$

5. $\displaystyle\int\frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx = \int\frac{(x^4-3)x^3}{x^4(x^8+3x^4+2)}dx$

Đặt : $t = x^4 \Rightarrow dt = 4x^3dx$

$$\Rightarrow \int\frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx = \frac{1}{4}\int\frac{(t-3)}{t(t^2+3t+2)}dt = \frac{1}{4}\int\frac{t-3}{t(t+1)(t+2)}dt \qquad (*)$$

Dùng phương pháp đồng nhất thức:

$$\frac{t-3}{t(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t+2} = \frac{(A+B+C)t^2 + (3A+2B+C)t + 2A}{t(t+1)(t+2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=1 \\ 2A=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{3}{2} \\ B=4 \\ C=-\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{t-3}{t(t+1)(t+2)} = -\frac{3}{2t} + \frac{4}{t+1} - \frac{5}{2(t+2)} \qquad (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow \int\frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx = \frac{1}{4}\int\left(-\frac{3}{2t} + \frac{4}{t+1} - \frac{5}{2(t+2)}\right)dt$$

$$= -\frac{3}{8}\ln|t| + \ln|t+1| - \frac{5}{8}\ln|t+2| + C = -\frac{3}{8}\ln\left|x^4\right| + \ln\left|x^4+1\right| - \frac{5}{8}\ln\left|x^4+2\right| + C$$

6. Đặt : $t = x - 1 \Rightarrow dt = dx$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{(x-1)^2}dx = \int \frac{t+1}{t^2}dt = \int\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt = \ln|t| - \frac{1}{t} + C = \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

7. Đặt : $t = 1 + x^4 \Rightarrow \begin{cases} dt = 4x^3dx \Rightarrow x^3dx = \dfrac{dt}{4} \\ x^4 = t - 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}dx = \int \frac{t-1}{4t^2}dt = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\ln|t| + \frac{1}{4t} + C = \frac{1}{4}\ln\left|1+x^4\right| + \frac{1}{4(1+x^4)} + C$$

8. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{(x^2+1)^3\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}.\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

Đặt : $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \begin{cases} dt = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \\ t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = t^2 - 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3dx}{(x^2+1)^3\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{t^2-1}{t^3}dt = \int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right)dt$$

$$= \ln|t| + \frac{1}{2t^2} + C = \ln\left|\sqrt{x^2+1}\right| + \frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

9. Đặt : $t = \sqrt{x+1} - 1 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = (t+1)^2 \Rightarrow dx = 2(t+1)dt \\ \sqrt{x+1} = t + 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}-1)^2}dx = \int \frac{2(t+1)^2dt}{t^2} = 2\int \frac{t^2+2t+1}{t^2}dt$$

$$= 2\int\left(1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt = 2t + 4\ln|t| - \frac{2}{t} + C$$

$$= 2\left(\sqrt{x+1} - 1\right) + 4\ln\left|\sqrt{x+1} - 1\right| - \frac{2}{t} + C$$

10. Đặt : $t = x^3 + 1 \Rightarrow dt = 3x^2\,dx \Rightarrow x^2dt = \dfrac{dt}{3}$

$$\Rightarrow \int x^2e^{x^3+1}dx = \int e^t\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{(x^3+1)} + C$$

11. Đặt : $t = 3 + e^x \Rightarrow \begin{cases} dt = e^x\,dx \\ e^x = t - 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int\frac{e^{2x}dx}{3+e^x} = \int\frac{e^x.e^xdx}{3+e^x} = \int\frac{(t-3)dt}{t} = \int\left(1-\frac{3}{t}\right)dt$$

$$= t - 3\ln|t| + C = 3 + e^x - 3\ln(3+e^x) + C$$

12. Đặt : $t = \ln(1+x) - \ln x \Rightarrow dt = \left(\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{x}\right)dx = -\dfrac{dx}{x(1+x)}$

$$\Rightarrow \int\frac{\ln(1+x)-\ln x}{x(1+x)}dx = -\int tdt = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln x\right] + C$$

13. Đặt : $t = \dfrac{1}{x} \Rightarrow dt = -\dfrac{1}{x^2}dx$

$$\Rightarrow \int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\,dx = -\int\sin t.\cos t.dt = -\frac{1}{2}\int\sin 2t.dt = \frac{1}{4}\cos 2t + C$$

$$= \frac{1}{4}\cos\frac{2}{x} + C$$

14. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos x} = \int\frac{\cos x dx}{\sin^4 x(1-\sin^2 x)}$

Đặt : $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{\sin^4 x\cos x} = \int\frac{dt}{t^4(1-t^2)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + C \text{ (kết quả Ví dụ 2c, Dạng 5)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| - \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$$

15. Đặt : $t = 1 + \cos^2 x \Rightarrow \begin{cases} dt = -2\sin x \cos x dx \\ \cos^2 x = t - 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(t-1)dt}{t} = -\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}(1+\cos^2 x) + \frac{1}{2}\ln\left|1+\cos^2 x\right| + C$$

16. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \tan^2 x(1+\tan^2 x)\frac{1}{\cos^2 x} dx$

Đặt : $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int t^2(1+t^2)dt = \int\left(t^2+t^4\right)dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C$$

$$= \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C$$

17. $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x\sqrt{1+\cos x}} = \int \frac{\sin x dx}{(1-\cos^2 x)\sqrt{1+\cos x}}$

Đặt : $t = \sqrt{1+\cos x} \Rightarrow t^2 = 1 + \cos x \Rightarrow \begin{cases} 2tdt = -\sin x dx \\ \cos x = t^2 - 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}} = -\int \frac{2tdt}{\left[1-(t^2-1)^2\right]t} = 2\int \frac{dt}{t^2(t^2-2)}$$

$$= \int\left(\frac{1}{t^2-2} - \frac{1}{t^2}\right)dt = \int \frac{dt}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})} - \int \frac{dt}{t^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt - \int \frac{dt}{t^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} + C$$

18. Đặt $t = 1 + \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow \int \sin x.\ln(1+\cos x)dx = -\int \ln t dt$

Đặt : $\begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{t}dt \\ v = t \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \sin x.\ln(1+\cos x)dx = -\left[t\ln t - \int dt\right] = -t\ln t + t + C$$

$$= (1+\cos x)\left[1 - \ln(1+\cos x)\right] + C$$

19. $\int x.\sin x.\cos^2 x dx = \dfrac{1}{2}\int x\sin x(1+\cos 2x)dx = \dfrac{1}{2}\int x\sin x dx + \dfrac{1}{2}\int x\sin x\cos 2x dx$

$= \dfrac{1}{2}\int x\sin x dx + \dfrac{1}{4}\int x(\sin 3x - \sin x)dx = \dfrac{1}{4}\int x\sin x dx + \dfrac{1}{4}\int x\sin 3x dx$

Đặt : $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\int x\sin x dx = \frac{1}{4}\left[-x\cos x + \int \cos x dx\right] = -\frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}\sin x + C$$

Đặt : $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 3x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\int x\sin 3x dx = \frac{1}{4}\left[-x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x dx\right] = -\frac{1}{4}x\cos 3x + \frac{1}{36}\sin 3x + C$$

20. Đặt : $\begin{cases} u = x^3 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3x^2 dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int x^3 e^x dx = e^x x^3 - 3\int x^2 e^x dx$

Đặt : $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int x^3 e^x dx = e^x x^3 - 3\left[e^x x^2 - 2\int x e^x dx\right] = e^x x^3 - 3e^x x^2 + 6\int x e^x dx$$

Đặt : $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int x^3 e^x dx = e^x x^3 - 3e^x x^2 + 6\left[x e^x - \int e^x dx\right]$$

$$= e^x x^3 - 3e^x x^2 + 6x e^x - 6e^x + C$$

21. Đặt : $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int x^2 \cos 2x dx = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x - \int x \sin 2x dx$$

Đặt : $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int x^2 \cos 2x dx = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x - \left[-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

22. Đặt : $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \sqrt{x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{2}{3}\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + C$$

23. Đặt : $\begin{cases} u = \ln 2x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{2x}dx \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int x^2 \ln(2x) dx = \frac{x^3}{3}\ln(2x) - \frac{1}{6}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln(2x) - \frac{1}{18}x^3 + C$$

24. Đặt : $\begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}dx \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \sin(\ln x) dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

Đặt : $\begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{\sin(\ln x)}{x}dx \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \left[x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx\right]$$

$$\Rightarrow \int \sin(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)\right] + C$$

25. Đặt : $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = (2x+1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ v = x^2 + x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int (2x+1).\ln(x+1)\,dx = (x^2+x)\ln(x+1) - \int x\,dx$$

$$= (x^2+x)\ln(x+1) - \frac{x^2}{2} + C$$

26. Đặt : $\begin{cases} u = \ln(\ln x) \\ dv = \dfrac{1}{x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x\ln x}dx \\ v = \ln x \end{cases}$

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx = \ln x.\ln(\ln x) - \int \frac{1}{x}dx = \ln x.\ln(\ln x) + \ln x + C$$

27. Đặt : $\begin{cases} u = \ln^2(x+1) \\ dv = x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}dx \\ v = \dfrac{x^2-1}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int x.\ln^2(x+1)dx = \frac{x^2-1}{2}.\ln^2(x+1) - \int (x-1)\ln(x+1)dx$$

Đặt : $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = (x-1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ v = \dfrac{x^2-2x-3}{2} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int x.\ln^2(x+1)dx = \frac{x^2-1}{2}.\ln^2(x+1) - \frac{1}{2}\left[(x+1)(x-3)\ln(x+1) - \int (x-3)dx\right]$$

$$= \frac{x^2-1}{2}.\ln^2(x+1) - \frac{1}{2}(x+1)(x-3)\ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

28. $\int(1-\ln x)^2\,dx = \int(\ln x-1)^2\,dx$

Đặt : $\begin{cases} u=(\ln x-1)^2 \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2\dfrac{\ln x-1}{x}dx \\ v=x \end{cases}$

$\Rightarrow \int(\ln x-1)^2\,dx = x(\ln x-1)^2 - 2\int(\ln x-1)\,dx$

Đặt : $\begin{cases} u=\ln x-1 \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{1}{x}dx \\ v=x \end{cases}$

$\Rightarrow \int(\ln x-1)^2\,dx = x(\ln x-1)^2 - 2\left[x(\ln x-1)-\int dx\right]$

$= x(\ln x-1)^2 - 2x(\ln x-1)+2x+C$

29. Đặt : $\begin{cases} u=\ln(\cos x) \\ dv=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=-\dfrac{\sin x}{\cos x}dx=-\tan x dx \\ v=\tan x \end{cases}$

$\Rightarrow \int\dfrac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx = \tan x\ln(\cos x)+\int\tan^2 x dx$

$= \tan x\ln(\cos x)+\int(1+\tan^2 x)dx-\int dx$

$= \tan x\ln(\cos x)+\tan x-x+C$

30. Đặt : $\begin{cases} u=\ln\sqrt{x} \\ dv=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{1}{2x}dx \\ v=2\sqrt{x} \end{cases}$

$\Rightarrow \int\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}-\int\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$

CHƯƠNG II

TÍCH PHÂN

§1. ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN VÀ TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

Định nghĩa

Cho hàm số f liên tục trên K và a, b $\in$ K.

Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì hiệu số F(b) – F(a) được gọi là *tích phân của f từ a đến b* và kí hiệu : $\int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{(Công thức Newton – Leibniz)}$$

Chú ý :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du \ \ldots = F(b) - F(a)$$

II. CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Giả sử các hàm số f, g liên tục trên K và a, b, c $\in$ K. Khi đó ta có :

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

5) $\forall k \in \mathbb{R}$: $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1

Tính tích phân bằng công thức Newton – Leibniz

1. PHƯƠNG PHÁP

Dùng công thức Newton – Leibniz $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

2. VÍ DỤ

Tính các tích phân sau :

a) $\int_1^3 \frac{2x^3 - x^2 + 2x + 1}{x^2}dx$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$;

c) $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x + 1}dx$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (\sin^6 x + \cos^6 x)dx$;

e) $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$;

f) $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}$.

Giải

a) $I = \int_1^3 \frac{2x^3 - x^2 + 2x + 1}{x^2}dx = \int_1^3 \left(2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$

$= \left(x^2 - x + 2\ln x - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^3 = \frac{20}{3} + 2\ln 3$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^2 x + 1\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$

c) $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x + 1}dx = \int_1^2 \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = \ln\left|e^x + 1\right|\Big|_1^2 = \ln\frac{e^2 + 1}{e + 1}$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{8}}(\sin^6 x+\cos^6 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}}(1-3\sin^2 x.\cos^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}}(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left[1-\frac{3}{8}(1-\cos 4x)\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x\right)dx$$

$$=\left(\frac{5}{8}x+\frac{3}{32}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}=\frac{5\pi}{64}+\frac{3}{32}$$

e) $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx=\int_1^e \sin(\ln x).d(\ln x)=-\cos(\ln x)\Big|_1^e=-\cos 1+1$

f) $\int_0^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}=\int_0^{16}\frac{\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x}\right)}{9}dx=\frac{1}{9}.\frac{2}{3}\left(\sqrt{(x+9)^3}+\sqrt{x^3}\right)\Big|_0^{16}=12$

Vấn đề 2
Tích phân có chứa dấu trị tuyệt đối

Tính tích phân : $I=\int_a^b |f(x)|dx$

1. PHƯƠNG PHÁP

Xét dấu biểu thức f(x) trên đoạn [a ; b] rồi mở dấu trị tuyệt đối của f(x). Nếu f(x) có đổi dấu trên đoạn [a ; b] tại nghiệm $c\in(a\ ;\ b)$ thì ta dùng tính chất sau :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

2. VÍ DỤ

Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^{\pi}|\cos x|dx$; b) $\int_0^2|1-x|dx$; c) $\int_{-2}^2|x+1|dx$; d) $\int_1^5|x^2-5x+6|dx$.

Giải

a) $\int_0^{\pi}|\cos x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x.dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2$

b) $\int_0^2|1-x|dx = \int_0^1(1-x)dx - \int_1^2(1-x)dx = \left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 - \left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = 1$

c) $\int_{-2}^{2}|x+1|dx = -\int_{-2}^{-1}(x+1)dx + \int_{-1}^{2}(x+1)dx = -\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-2}^{-1} + \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{2} = 5$

d) $\int_1^5\left|x^2-5x+6\right|dx = \int_1^2\left(x^2-5x+6\right)dx - \int_2^3\left(x^2-5x+6\right)dx + \int_3^5\left(x^2-5x+6\right)dx$

$= \left(\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x\right)\Big|_1^2 - \left(\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x\right)\Big|_2^3 + \left(\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x\right)\Big|_3^5$

$= \frac{5}{6} - (-\frac{1}{6}) + \frac{14}{3} = \frac{17}{3}.$

Vấn đề 3
Chứng minh bất đẳng thức tích phân

1. PHƯƠNG PHÁP

Áp dụng các tính chất sau :

a) Nếu hàm số f liên tục trên [a ; b] và $f(x) \geq 0, \forall x \in [a ; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

b) Nếu hai hàm số f và g liên tục trên [a ; b] và $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a ; b]$ thì :

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

c) Nếu hàm số f liên tục trên [a ; b] và $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a ; b]$ thì :

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

2. VÍ DỤ

Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) Chứng minh $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$;

b) Chứng minh $\frac{\pi}{75} \le \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{10+60\cos^2 x} \le \frac{\pi}{30}$.

Giải

a) $\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, ta có : $\sin 2x = 2\sin x\cos x \le 2\sin x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

b) $\forall x \in \left[\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right]$, ta có :

$$-\frac{1}{2} \le \cos x \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \le \cos^2 x \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow 10 \le 10+60\cos^2 x \le 25$$

$$\Rightarrow \frac{1}{25} \le \frac{1}{10+60\cos^2 x} \le \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{25}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} dx \le \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{10+60\cos^2 x} \le \frac{1}{10}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{75} \le \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{10+60\cos^2 x} \le \frac{\pi}{30}$$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Tính các tích phân sau :

1. $\int_0^1 \left(e^{2x} + \frac{3}{x+1}\right)dx$;

2. $\int_1^2 \frac{4}{e^{5x}}dx$;

3. $\int_{-2}^0 \left(x^2 - e^{-2x}\right)dx$;

4. $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 dx$;

5. $\int_1^2 (\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 dx$;

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 5x.\cos 3x.\sin 2x)dx$;

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \sin 2x \sin 3x)dx$;

8. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1 + \sin x}$;

9. $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x}dx$;

10. $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{(10+3x)^3}$;

11. $\int_1^e \frac{dx}{x + x^3}$;

12. $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 + x - 2}dx$;

13. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}dx$;

14. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}dx$;

15. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$;

16. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^6 x}dx$;

17. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^6 x}dx$;

18. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}dx$;

19. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$;

20. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} dx$;

21. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$;

22. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x} dx$;

23. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$;

24. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3 - 2\cot^2 x}{\cos^2 x} dx$;

25. $\int_{-2}^{2} \left| x^2 - 1 \right| dx$;

26. $\int_{0}^{\pi} \left| \cos x \right| \sqrt{\sin x} dx$;

27. $\int_{-3}^{3} \left(|x+1| - |x-1| \right) dx$;

28. $\int_{-3}^{2} \left| \frac{x}{x+4} \right| dx$;

29. $\int_{-1}^{1} (2x - 1 - |x|)^2 dx$;

30. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \left| \ln x \right| dx$;

31. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \left| \frac{\ln x}{x} \right| dx$;

32. $\int_{0}^{\ln 4} \left| e^{2x} - e^{x+1} \right| dx$;

33. $\int_{0}^{4} \left| x^2 - 2x - 3 \right| dx$;

34. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$.

Bài 2. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

1. $\int_{1}^{2} e^x dx \le \int_{1}^{2} e^{x^2} dx$;

2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx \le \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$;

3. $\dfrac{\pi}{14} \le \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{4+3\cos^2 x} \le \dfrac{\pi}{8}$;

4. $54\sqrt{2} \le \displaystyle\int_{-7}^{11} \left(\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\right)dx \le 108$;

5. $2 \le \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{x^2}dx \le 2e$;

6. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{3+e^{-x}}\,dx \le 2$;

7. $\dfrac{\pi}{2} \le \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3+2\sin^2 x}\,dx \le \dfrac{\pi\sqrt{5}}{4}$;

8. $\dfrac{2}{9} \le \displaystyle\int_{-1}^{1} \dfrac{dx}{8+x^3} \le \dfrac{2}{7}$;

9. $2e^{-\frac{1}{4}} \le \displaystyle\int_0^2 e^{x^2-x}dx \le 2e^2$.

§2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Ta có : $\displaystyle\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$

trong đó hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K, hàm số $y = f(u)$ liên tục sao cho hàm hợp $f[u(x)]$ xác định trên K và $a, b \in K$.

Có 2 quy tắc đổi biến số :

- **Quy tắc đổi biến số loại 1**

Tính tích phân : $I = \displaystyle\int_a^b f[u(x)].u'(x)dx$ ta làm như sau :

1. Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$

2. Đổi cận : $\begin{cases} x = a \Rightarrow t = u(a) = \alpha \\ x = b \Rightarrow t = u(b) = \beta \end{cases}$

3. Thay vào I, ta được $I = \int_a^b f[u(x)].u'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$ (*)

4. Tính tích phân (*) ta được tích phân cần tìm.

• **Quy tắc đổi biến số loại 2**

Tính tích phân : $I = \int_a^b f(x)dx$ với f(x) là hàm số liên tục trên [a ; b].

1. Đặt $x = u(t)$

2. Tính $dx = u'(t)dt$

3. Đổi cận : $\begin{cases} x = a \Rightarrow t = \alpha \\ x = b \Rightarrow t = \beta \end{cases}$

4. Thay vào I, ta được : $I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[u(t).u'(t)dt = \int_\alpha^\beta g(t)dt$ (*)

Tính tích phân (*) ta được tích phân I cần tìm.

II. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Cho các hàm u, v có đạo hàm liên tục trên K và a, b ∈ K. Ta có :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x).v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

Công thức trên còn viết dưới dạng : $\int_a^b udv = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1

Phương pháp đổi biến loại 1

1. PHƯƠNG PHÁP

• Tính tích phân : $I = \int_a^b f[u(x)].u'(x)dx$ ta làm như sau :

1. Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$

2. Đổi cận : $\begin{cases} x = a \Rightarrow t = u(a) = \alpha \\ x = b \Rightarrow t = u(b) = \beta \end{cases}$

3. Thay vào I, ta được $I = \int_a^b f[u(x)].u'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt \quad (*)$

4. Tính tích phân (*) ta được kết quả cần tìm.

Chú ý : Trong một số trường hợp việc tính dt khá khó khăn, ta có thể dùng "phương pháp thế" như sau :

Tính tích phân dạng $I = \int_a^b f(x)dx$ ta làm như sau :

1. Đặt $t = u(x)$. Tìm x theo t rồi tính dx theo dt.

2. Đổi cận : $x = a \Rightarrow t = u(a) = \alpha$

$x = b \Rightarrow t = u(b) = \beta$

3. Thay vào ta được $I = \int_\alpha^\beta g(t)dt \quad (*)$

4. Tính tích phân (*) ta được kết quả cần tìm.

2. VÍ DỤ

Tính các tích phân sau :

a) $A = \int_1^2 x\sqrt{x^2+3}dx$; b) $B = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{x^8-1}dx$;

c) $C = \int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx$; d) $D = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$;

e) $E = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$; f) $F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 xdx$.

Giải

a) $A = \int_1^2 x\sqrt{x^2+3}dx$

Đặt : $t = \sqrt{x^2+3} \Rightarrow t^2 = x^2+3 \Rightarrow 2tdt = 2xdx \Rightarrow tdt = xdx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 2 \\ x = 2 \Rightarrow t = \sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow A = \int_2^{\sqrt{7}} t^2dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_2^{\sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}-8}{3}$

b) $B = \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{x^8 - 1} dx$

Đặt : $t = x^4 \Rightarrow dt = 4x^3dx \Rightarrow x^3dx = \frac{dt}{4}$

Đổi cận : $\begin{cases} x = \sqrt{2} \Rightarrow t = 4 \\ x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 9 \end{cases}$

$$\Rightarrow B = \int\limits_4^9 \frac{dt}{4(t^2 - 1)} = \frac{1}{4}\int\limits_4^9 \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{8}\int\limits_4^9 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_4^9 = \frac{1}{8}\ln\frac{4}{3}$$

c) $C = \int\limits_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx = \int\limits_0^1 x^8\sqrt{1+3x^8}\,x^7dx$

Đặt : $t = \sqrt{1+3x^8} \Rightarrow t^2 = 1 + 3x^8 \Rightarrow \begin{cases} 2tdt = 24x^7dx \Rightarrow x^7dx = \frac{tdt}{12} \\ x^8 = \frac{t^2 - 1}{3} \end{cases}$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow C = \int\limits_1^2 \frac{t^2 - 1}{3}.t.\frac{tdt}{12} = \frac{1}{36}\int\limits_1^2 \left(t^4 - t^2\right)dt = \frac{1}{36}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{29}{270}$$

d) $D = \int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}dx = \int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}dx$

Đặt : $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} dt = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx \\ t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \end{cases}$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 2 \\ x = \sqrt{2} \Rightarrow t = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$$\Rightarrow D = \int_2^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{t^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_2^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{t - \sqrt{2}} - \frac{1}{t + \sqrt{2}} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}}\right|\Bigg|_2^{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)\left(2 + \sqrt{2}\right)}{\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right)\left(2 - \sqrt{2}\right)}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\frac{\left(2 + \sqrt{2}\right)}{5\left(2 - \sqrt{2}\right)}$$

e) $$E = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cos x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \cos x dx$$

Đặt : $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow E = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1 - t^2}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) dt = \left(-\frac{1}{t} - t \right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{2}$

f) $$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx$$

Đặt : $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow F = \int_0^1 (1 - t^2)^2 dt = \int_0^1 \left(t^4 - 2t^2 + 1 \right) dt = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{2}{3} t^3 + t \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{8}{15}$$

Vấn đề 2

Phương pháp đổi biến loại 2 (đổi biến dạng lượng giác)

DẠNG 1. Tính tích phân : $I = \int_{\alpha}^{\beta} P\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$

1. PHƯƠNG PHÁP

- Đặt $x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t dt$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

- Đổi cận : $\begin{cases} x = \alpha \Rightarrow t = \arcsin\frac{\alpha}{a} \\ x = \beta \Rightarrow t = \arcsin\frac{\beta}{a} \end{cases}$

- Thay vào I và tính tích phân theo biến t.

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho a > 0. Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Giải

Đặt $x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t dt$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{a}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a\cos t}{a\cos t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6}$$

Ví dụ 2. Tính tích phân : $I = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}dx$.

Giải

Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t dt$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \sqrt{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\sin^2 t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} 2\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin^2 t\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2t)\, dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t dt = \frac{\pi}{2} - \sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

DẠNG 2. Tính tích phân : $I = \int_\alpha^\beta P\left(x, (a^2+x^2)\right)dx$ hay $I = \int_\alpha^\beta P\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$

1. PHƯƠNG PHÁP

- Đặt $x = a\tan t \Rightarrow dx = a(1 + \tan^2 t)dt$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
- Đổi cận : $\begin{cases} x = \alpha \Rightarrow t = \arctan\frac{\alpha}{a} \\ x = \beta \Rightarrow t = \arctan\frac{\beta}{a} \end{cases}$
- Thay vào I và tính tích phân theo biến t.

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho $a > 0$. Tính tích phân : $I = \int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}$.

Giải

Đặt $x = a\tan t$, $dx = a(1 + \tan^2 t)dt$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = a \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a(1+\tan^2 t)}{a^2 + a^2\tan^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{a} = \frac{\pi}{4a}$

Ví dụ 2. Tính tích phân : $I = \displaystyle\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+4}dx.$

Giải

Đặt $x = 2\tan t$, $dx = 2(1 + \tan^2 t)dt$, $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 2 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4} \\ x = 2\sqrt{3} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2(1+\tan^2 t)}{4\tan^2 t + 4}dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \frac{\pi}{24}$

Vấn đề 3
Phương pháp tích phân từng phần

DẠNG 1. Tính tích phân : $I = \int_a^b P(x).\ln x dx$

1. PHƯƠNG PHÁP

Đặt : $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = P(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = ? \\ v = ? \end{cases}$

Ta có : $\displaystyle\int_a^b udv = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$

2. VÍ DỤ

Tính các tích phân sau :

a) $I = \displaystyle\int_1^e (3x^2 + 2x)\ln x dx$;

b) $I = \displaystyle\int_1^2 x\ln(x+2)dx$;

c) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(1+\cos x)dx$;

d) $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}dx.$

Giải

a) Đặt : $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \left(3x^2 + 2x\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x^3 + x^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \left[\left(x^3 + x^2\right)\ln x\right]\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3 + x^2}{x}dx = e^3 + e^2 - \int_1^e \left(x^2 + x\right)dx$$

$$= e^3 + e^2 - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^e = e^3 + e^2 - \left(\frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{2}\right) + \frac{5}{6} = \frac{2}{3}e^3 + \frac{e^2}{2} + \frac{5}{6}$$

b) Đặt : $\begin{cases} u = \ln(x+2) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+2}dx \\ v = \frac{x^2 - 4}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{x^2 - 4}{2}\ln(x+2)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2 - 4}{2(x+2)}dx = \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\int_1^2 (x-2)dx$$

$$= \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\frac{(x-2)^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{3}{2}\ln 3 + \frac{1}{4}$$

c) Đặt : $\begin{cases} u = \ln(1+\cos x) \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{-\sin x}{1+\cos x}dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = -\left[\cos x.\ln(1+\cos x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1+\cos x}dx = \ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1+\cos x}dx$$

Đặt $t = 1 + \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 2 \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \ln 2 - \int_1^2 \frac{(t-1)}{t} dt = \ln 2 - \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = \ln 2 - (t - \ln t)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1$$

d) Đặt : $\begin{cases} u = \ln(\sin x) \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\cos x}{\sin x} dx \\ v = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = [\tan x . \ln(\sin x)]\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = \sqrt{3} \ln \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \ln 2 - \frac{\pi}{6}$$

DẠNG 2. Tính tích phân : $I = \int_a^b P(x).\left[e^{kx}, \cos kx, \sin kx\right] dx$

1. PHƯƠNG PHÁP

Đặt : $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = [e^{kx}, \cos kx, \sin kx\ ] dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = ? \\ v = ? \end{cases}$

Ta có : $\int_a^b u dv = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b v du.$

2. VÍ DỤ

Tính các tích phân sau :

a) $I = \int_0^1 \left(x^2 + x\right) e^x dx$;

b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$;

c) $I = \int_0^{\pi} e^x \cos x . dx$;

d) $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) e^x dx.$

Giải

a) Đặt : $\begin{cases} u = x^2 + x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x+1)dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \left[\left(x^2 + x\right)e^x\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 (2x+1)e^x dx = 2e - \int_0^1 (2x+1)e^x dx$$

Đặt : $\begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = 2e - \left[(2x+1)e^x\right]\Big|_0^1 + 2\int_0^1 e^x dx = 2e - (3e-1) + 2e^x\Big|_0^1 = e - 1$$

b) Đặt : $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \left(x^2 \sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

Đặt : $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi^2}{4} - 2\left[(-x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx\right] = \frac{\pi^2}{4} - 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

c) Đặt : $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \left(e^x \sin x\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x dx = -\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$$

Đặt : $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \left(e^x \cos x\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x dx = -e^{\pi} - 1 - I \Rightarrow 2I = -e^{\pi} - 1 \Rightarrow I = \frac{-e^{\pi} - 1}{2}$$

d) $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) e^x dx = \int_1^2 \frac{1}{x} e^x dx + \int_1^2 e^x \ln x dx = I_1 + I_2$ (*)

Xét : $I_2 = \int_1^2 e^x \ln x dx$

Đặt : $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow I_2 = \left(e^x \ln x\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} e^x dx = e^2 \ln 2 - I_1$ (**)

Thế (**) vào (*), ta được : $I = e^2 \ln 2$

Vấn đề 4
Một số dạng đặc biệt

DẠNG 1. Tích phân hàm hữu tỉ $I_1 = \int_a^b \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$

1. PHƯƠNG PHÁP

- Nếu mẫu số có 2 nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thì ta phân tích mẫu số : $a(x - x_1)(x - x_2)$

Khi đó : $I_1 = \int_a^b \frac{1}{a(x - x_1)(x - x_2)} dx = \frac{1}{a(x_2 - x_1)} \int_a^b \left[\frac{1}{x - x_2} - \frac{1}{x - x_1}\right] dx$

- Nếu mẫu số có nghiệm kép là x_0 thì ta đưa mẫu số về hằng đẳng thức $a(x - x_0)^2$

Khi đó : $I_1 = \int_a^b \frac{1}{a(x - x_0)^2} dx = \frac{-1}{a} \cdot \left(\frac{1}{x - x_0}\right)\Big|_a^b$

• Nếu mẫu vô nghiệm thì ta đưa mẫu về dạng : $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+A^2\right]$

Khi đó : $I_1=\frac{1}{a}\int_a^b \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+A^2}dx.$

Dùng phương pháp đổi biến loại 2. Đặt : $x+\frac{b}{2a}=A\tan t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

2. VÍ DỤ

Tính các tích phân sau :

a) $I=\int_2^3 \frac{dx}{2x^2-9x+7}$;

b) $I=\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2+2x+10}$;

c) $I=\int_0^1 \frac{dx}{(4x^2+4x+1)(4x^2+4x+4)}$;

d) $I=\int_2^4 \frac{dx}{(x^2-6x+5)(x^2-6x+10)}$.

Giải

a) $I=\int_2^3 \frac{dx}{2x^2-9x+7}=\int_2^3 \frac{dx}{2(x-1)\left(x-\frac{7}{2}\right)}=\frac{1}{2}.\frac{2}{5}\int_2^3\left(\frac{1}{x-\frac{7}{2}}-\frac{1}{x-1}\right)dx$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-\frac{7}{2}}{x-1}\right|\Bigg|_2^3=-\frac{1}{5}\ln 6$$

b) $I=\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2+2x+10}=\int_{-1}^2 \frac{dx}{(x+1)^2+9}$

Đặt : $x+1=3\tan t\Rightarrow dx=3(1+\tan^2 t)dt,\ \ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Đổi cận : $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow t=0 \\ x=2 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{3(1+\tan^2 t)}{9\tan^2 t+9}dt=\dfrac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dt=\dfrac{\pi}{12}$

c) $I=\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{(4x^2+4x+1)(4x^2+4x+4)}=\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1\left(\dfrac{1}{(2x+1)^2}-\dfrac{1}{(2x+1)^2+3}\right)dx$

$=\dfrac{1}{3}\left(I_1-I_2\right)$

Tính I_1 : $I_1=\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{(2x+1)^2}=-\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2x+1}\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}$

Tính I_2 : Đặt : $2x+1=\sqrt{3}\tan t \Rightarrow dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2 t)dt$, $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

Đổi cận : $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6} \\ x=1 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow I=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{36}\right)=\dfrac{1}{9}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{108}$

d) $I=\int\limits_2^4 \dfrac{dx}{(x^2-6x+5)(x^2-6x+10)}=\dfrac{1}{5}\int\limits_2^4\left(\dfrac{1}{x^2-6x+5}-\dfrac{1}{x^2-6x+10}\right)dx$

$=\dfrac{1}{5}\left[\int\limits_2^4 \dfrac{dx}{(x-1)(x-5)}-\int\limits_2^4 \dfrac{dx}{(x-3)^2+1}\right]=\dfrac{1}{5}\left(I_1-I_2\right)$

Tính I_1 : $I_1=\int\limits_2^4 \dfrac{dx}{(x-1)(x-5)}=\dfrac{1}{4}\int\limits_2^4\left(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{x-1}\right)dx=\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-5}{x-1}\right|\Big|_2^4=-\dfrac{1}{4}\ln 9$

Tính I_2 : Đặt : $x-3=\tan t \Rightarrow dx=(1+\tan^2 t)dt$, $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

Đổi cận : $\begin{cases} x=2 \Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{4} \\ x=4 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow I_2=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{(1+\tan^2 t)dt}{\tan^2 t+1}=\dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\ln 9-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{20}\ln 9-\frac{\pi}{10}$$

DẠNG 2. Tích phân hàm hữu tỉ $I_2=\int_a^b\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}dx$

1. PHƯƠNG PHÁP

Viết lại biểu thức $\alpha x+\beta$ về dạng đạo hàm của mẫu cộng với một hằng số :

$$\alpha x+\beta=\frac{\alpha}{2a}[(2ax+b)+\gamma]$$

Khi đó : $I_2=\frac{\alpha}{2a}\int_a^b\frac{(ax^2+bx+c)'+\gamma}{ax^2+bx+c}dx=\frac{\alpha}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|\Big|_a^b+\frac{\alpha\gamma}{2a}I_1$

Chú ý :

Nếu $I=\int_a^b\frac{u(x)}{v(x)}dx$ trong đó bậc của u(x) lớn hơn hay bằng bậc của v(x) thì ta thực hiện phép chia đa thức u(x) cho v(x) rồi phân tích I thành tổng các tích phân.

2. VÍ DỤ

Tính các tích phân sau :

a) $I=\int_{-1}^{0}\frac{2x+2}{x^2+x-2}dx$;

b) $I=\int_{-2}^{2}\frac{xdx}{4x^2+12x+9}$;

c) $I=\int_0^1\frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx$;

d) $I=\int_0^2\frac{x^7}{(1+x^4)^2}dx$.

Giải

a) $I=\int_{-1}^{0}\frac{(2x+1)+1}{x^2+x-2}dx=\int_{-1}^{0}\frac{2x+1}{x^2+x-2}dx+\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(x-1)(x+2)}$

$$=\ln\left|x^2+x-2\right|\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{3}\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Big|_{-1}^{0}=-\frac{2}{3}\ln 2$$

b) $I=\frac{1}{8}\int_{-2}^{2}\frac{8x+12-12}{4x^2+12x+9}dx=\frac{1}{8}\int_{-2}^{2}\frac{8x+12}{4x^2+12x+9}dx-\frac{1}{8}\int_{-2}^{2}\frac{12}{(2x+3)^2}dx$

$=\frac{1}{8}\ln\left|4x^2+12x+9\right|\Big|_{-2}^{2}+\frac{1}{8}.\frac{6}{2x+3}\Big|_{-2}^{2}=\frac{1}{8}\ln 49+\frac{6}{7}$

c) $I=\int_{0}^{1}\frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx=\int_{0}^{1}\left(x+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}+J$

Đặt : $x=\tan t\Rightarrow dx=(1+\tan^2 t)dt,\quad t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Đổi cận : $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow J=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\tan^2 t)}{\tan^2 t+1}dt=\frac{\pi}{4}\Rightarrow I=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

d) Đặt : $t=1+x^4\Rightarrow\begin{cases}dt=4x^3dx\Rightarrow x^3dx=\frac{dt}{4}\\ x^4=t-1\end{cases}$

Đổi cận : $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=1\Rightarrow t=2\end{cases}$

$\Rightarrow I=\frac{1}{4}\int_{1}^{2}\frac{(t-1)}{t^2}dt=\frac{1}{4}\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{1}{4}\left(\ln t+\frac{1}{t}\right)\Big|_{1}^{2}=\frac{1}{4}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$

DẠNG 3. Tích phân hàm lượng giác

$$I=\int_{a}^{b}\sin^n x\cos^m x dx \qquad \textbf{hay} \qquad I=\int_{a}^{b}\frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx$$

1. PHƯƠNG PHÁP

- Trường hợp n lẻ, ta phân tích : $I=\int_{a}^{b}\sin^{n-1}x\cos^m x\sin x dx$

và đặt : $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin x dx$

- Trường hợp m lẻ, ta phân tích : $I = \int_a^b \sin^n x \cos^{m-1} x \cos x dx$

và đặt : $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

- Trường hợp n và m đều lẻ, đặt $t = \sin x$ hoặc $t = \cos x$
- Trường hợp n và m đều chẵn, ta thường dùng công thức hạ bậc, hoặc đưa về hàm theo tanx và đổi biến, đặt $t = \tan x$.

2. VÍ DỤ

Tính các tích phân sau :

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x dx$;

b) $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$;

c) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$;

d) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx$.

Giải

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)^2 \cos^4 x \sin x dx$

Đặt : $t = \cos x \Rightarrow dt = - \sin x dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 (1 - t^2)^2 t^4 dt = \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4) t^4 dt = \int_0^1 (t^4 - 2t^6 + t^8) dt$$

$$= \left(\frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{315}$$

b) $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cos x dx$

Đặt : $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{cases} \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1-t^2}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) dt = -\left(\frac{1}{t} + t\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{2}$

c) $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{\cos^5 x} \sin x dx$

Đặt : $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1-t^2}{t^5} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{t^5} - \frac{1}{t^3}\right) dt = \left(-\frac{1}{4t^4} + \frac{1}{2t^2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{9}{4}$

d) $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{4} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2x \cos^2 x dx = \frac{1}{16} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 4x)(1 + \cos 2x) dx$

$= \frac{1}{16} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 2x \cos 4x) dx$

$= \frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{32} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 6x + \cos 2x) dx$

$= \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{96} = \frac{\pi}{64} + \frac{1}{48}$

DẠNG 4. Tính tích phân : $I = \int\limits_a^b R(\sin x, \cos x)dx$

1. PHƯƠNG PHÁP

a) Đổi biến số, đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, đưa tích phân về dạng tích phân hàm hữu tỉ.

Khi đó ta có : $\begin{cases} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dt = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)dx \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{cases}$

b) Đưa tích phân về dạng : $I = \int\limits_a^b R(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}dx$

Đổi biến số, đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$, đưa tích phân về dạng tích phân hàm hữu tỉ.

2. VÍ DỤ

Tính các tích phân sau :

a) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$; b) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x(\sin x-\cos x)}$;

c) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$.

Giải

a) Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dt = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)dx \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{cases}$$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2)\left(1+\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int_0^1 \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1|\Big|_0^1 = \ln 2$$

b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{dx}{\cos x(\sin x - \cos x)} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{dx}{\cos^2 x(\tan x - 1)}$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \dfrac{dt}{t-1} = \ln|t-1|\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \ln\left|\dfrac{\sqrt{3}}{3}-1\right|$

c) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{dx}{b^2\cos^2 x\left(\dfrac{a^2}{b^2}\tan^2 x + 1\right)}$

• Đặt : $t = \dfrac{a}{b}\tan x \Rightarrow dt = \dfrac{a}{b}\dfrac{1}{\cos^2 x}dx \Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \dfrac{b}{a}dt$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = \dfrac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow I = \dfrac{1}{ab}\int_0^{\frac{a}{b}} \dfrac{dt}{t^2+1}$

• Đặt : $t = \tan u \Rightarrow dt = (1+\tan^2 u)du,\ u \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Đổi cận : $\begin{cases} t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ t = \dfrac{a}{b} \Rightarrow u = \arctan\dfrac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow I = \dfrac{1}{ab}\int_0^{\arctan\frac{a}{b}} \dfrac{(\tan^2 u+1)dt}{\tan^2 u+1} = \dfrac{1}{ab}\arctan\dfrac{b}{a}$

DẠNG 5. Tích phân hàm có chứa căn thức

1. PHƯƠNG PHÁP

Ta thường đặt ẩn phụ $t=\sqrt[n]{u(x)} \Rightarrow t^n = u(x) \Rightarrow nt^{n-1}dt = u'(x)dx$ để đưa tích phân về dạng tích phân hàm hữu tỉ.

2. VÍ DỤ

Tính các tích phân sau :

a) $I=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}dx$;

b) $I=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$;

c) $I=\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}dx$;

d) $I=\int_1^e \frac{\sqrt[3]{1+\ln^2 x}\ln x}{x}dx$;

e) $I=\int_0^{\sqrt{7}} \frac{xdx}{1+\sqrt[3]{x^2+1}}$;

f) $I=\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$.

Giải

a) Đặt : $t=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow dt = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

Đổi cận : $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2 \end{cases} \Rightarrow I=\int_1^2 4dt = 4[t]\Big|_1^2 = 4$

b) Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t dt$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Đổi cận : $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow t=\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{4\sin^2 t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin^2 t dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 2t)dt = \left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

c) Đặt : $t=\sqrt{x^3+1}\Rightarrow t^2=x^3+1\Rightarrow 2tdt=3x^2dx\Rightarrow x^2dx=\frac{2}{3}tdt$

Đổi cận : $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\x=2\Rightarrow t=3\end{cases}$ $\Rightarrow I=\int_1^3\frac{2}{3}t^2dt=\frac{2}{9}t^3\Big|_1^3=\frac{52}{9}$

d) Đặt : $t=\sqrt[3]{1+\ln^2 x}\Rightarrow t^3=1+\ln^2 x\Rightarrow 3t^2dt=2\frac{\ln x}{x}dx$

$$\Rightarrow\frac{\ln x}{x}dx=\frac{3}{2}t^2dt$$

Đổi cận : $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1\\x=e\Rightarrow t=\sqrt[3]{2}\end{cases}$ $\Rightarrow I=\frac{3}{2}\int_1^{\sqrt[3]{2}}t^3dt=\frac{3}{8}t^4\Big|_1^{\sqrt[3]{2}}=\frac{3}{8}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

e) Đặt : $t=\sqrt[3]{x^2+1}\Rightarrow t^3=x^2+1\Rightarrow 3t^2dt=2xdx\Rightarrow xdx=\frac{3}{2}t^2dt$

Đổi cận : $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\x=\sqrt{7}\Rightarrow t=2\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\frac{3}{2}\int_1^2\frac{t^2dt}{1+t}=\frac{3}{2}\int_1^2\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{3}{2}\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)\Bigg|_1^2=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}$$

f) Đặt : $t=\sqrt[6]{x}\Rightarrow t^6=x\Rightarrow 6t^5dt=dx$

Đổi cận : $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1\\x=64\Rightarrow t=2\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_1^2\frac{6t^5}{t^2+t^3}dt=6\int_1^2\frac{t^3}{1+t}dt=6\int_1^2\left(t^2-t+1-\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|1+t|\right)\Bigg|_1^2=11+6\ln\frac{2}{3}$$

Vấn đề 5
Một số dạng đổi biến đặc biệt

Ví dụ 1.

a) Chứng minh rằng nếu f là hàm số liên tục trên [0 ; 1] thì :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$$

b) Tính các tích phân sau :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx \ ; J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Giải

a) Xét tích phân : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

Đặt : $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right]dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

b) Xét tích phân I :

Đặt : $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=J$$

Mà ta có : $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x+\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow I=J=\frac{\pi}{4}$

Ví dụ 2.

a) Chứng minh rằng nếu f là hàm số liên tục trên [0 ; 1] thì :

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx.$$

b) Tính tích phân sau: $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$

Giải

a) Xét vế trái : $I=\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx$

Đặt : $t=\pi-x\Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận : $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=\pi\\ x=\pi\Rightarrow t=0\end{cases}$

$$I=\int_0^{\pi}(\pi-t).f\left(\sin\left(\pi-t\right)\right)dt=\int_0^{\pi}(\pi-t)f\left(\sin t\right)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}f\left(\sin t\right)dt-\int_0^{\pi}t.f\left(\sin t\right)dt=\pi\int_0^{\pi}f\left(\sin t\right)dt-I$$

$\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f\left(\sin t\right)dt=$ vế phải (đpcm)

b) Tính : $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

Đặt : $t=\pi-x\Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận : $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=\pi\\ x=\pi\Rightarrow t=0\end{cases}$

$$I=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}dt=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int_0^{\pi}\frac{t.\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-I$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

Đặt : $u=\cos t\Rightarrow du=-\sin tdt$

Đổi cận : $\begin{cases}t=0\Rightarrow u=1\\ t=\pi\Rightarrow u=-1\end{cases}\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{1+u^2}$

Đặt : $u=\tan v\Rightarrow du=(1+\tan^2 v)dv$, $v\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Đổi cận : $\begin{cases}u=-1\Rightarrow v=-\frac{\pi}{4}\\ u=1\Rightarrow v=\frac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\tan^2 v)}{\tan^2 v+1}dv=\frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$

Ví dụ 3.

a) Chứng minh rằng nếu f là hàm số liên tục trên [a ; b] thì :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx.$$

b) Tính tích phân sau : $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1+\cot x\right)dx.$

Giải

a) Xét vế phải : $I=\int_a^b f(a+b-x)dx$

Đặt : $t=a+b-x\Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận : $\begin{cases}x=a\Rightarrow t=b\\ x=b\Rightarrow t=a\end{cases}\Rightarrow I=\int_a^b f(t)dt$ = vế trái (đpcm)

b) Đặt : $t=\frac{3\pi}{4}-x\Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left[1 + \cot\left(\frac{3\pi}{4} - t\right)\right] dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left[1 + \frac{1 - \cot t}{\cot t + 1}\right] dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left[\frac{2}{1 + \cot t}\right] dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln 2dt - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cot t) dt = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

Vấn đề 6
Phương pháp tích phân truy hồi

1. PHƯƠNG PHÁP

Để thiết lập công thức truy hồi của tích phân, ta phân tích hàm số dưới dấu tích phân một cách thích hợp rồi áp dụng phương pháp tích phân từng phần.

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1. cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \ (n \in \mathbb{N}^*)$.

a) Chứng minh rằng : $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

b) Từ đó hãy tính I_5.

Giải

a) Ta có : $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x.\cos x dx$

Đặt : $\begin{cases} u = \cos^{n+1} x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -(n+1)\cos^n x \sin x dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$I_{n+2} = \left(\sin x.\cos^{n+1} x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^n x.\sin^2 x dx$$

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x.(1-\cos^2 x)dx = (n+1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} x dx\right]$$

$\Leftrightarrow I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$

$\Leftrightarrow (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$

$\Leftrightarrow I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$

b) Áp dụng công thức truy hồi ở câu a) ta có :

$$I_5 = \frac{4}{5}I_3 = \frac{4}{5}.\frac{2}{3}I_1 = \frac{8}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{8}{15}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{15}$$

Ví dụ 2. Cho $I_n = \int_0^3 (3-x)^n.e^x dx$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

a) Tìm hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n-1}.

b) Tính I_3.

Giải

a) $I_n = \int_0^3 (3-x)^n.e^x dx$

Đặt : $\begin{cases} u = (3-x)^n \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -n(3-x)^{n-1}dx \\ v = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow I_n = \left(e^x(3-x)^n\right)\Big|_0^3 + n\int_0^3 (3-x)^{n-1}.e^x dx = -3^n + nI_{n-1}$

Vậy : $I_n = -3^n + nI_{n-1}$

b) Áp dụng công thức truy hồi ở câu a) ta có :

$$I_3 = -3^3 + 3I_2 = -27 + 3I_2$$

$$I_2 = -3^2 + 2I_1 = -9 + 2I_1$$

$$I_1 = \int_0^3 (3-x)e^x dx$$

Đặt : $\begin{cases} u = 3 - x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \left(e^x(3-x)\right)\Big|_0^3 + \int_0^3 e^x dx = -3 + e^x\Big|_0^3 = -4 + e^3$$

$$\Rightarrow I_2 = -9 + 2(-4 + e^3) = -17 + 2e^3$$

$$\Rightarrow I_3 = -27 + 3(-17 + 2e^3) = -78 + 6e^3$$

Ví dụ 3. Cho tích phân $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

a) Lập hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n+1}.

b) Tính I_3.

Giải

a) $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}$

Đặt : $\begin{cases} u = \dfrac{1}{(1+x^2)^n} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{2nx}{(1+x^2)^{n+1}} dx \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n}\Bigg|_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx$$

$$\Leftrightarrow I_n = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \frac{1}{2^n} + 2n\left[\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx\right]$$

$$\Leftrightarrow I_n = \frac{1}{2^n} + 2n\left(I_n - I_{n+1}\right) \Leftrightarrow 2n.I_{n+1} = \frac{1}{2^n} + (2n-1)I_n$$

$$\Leftrightarrow I_{n+1}=\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{2^n}+(2n-1)I_n\right]$$

b) Áp dụng công thức truy hồi ở câu a) ta có :

$$I_3=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}+3I_2\right]\ ;\ \ I_2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+I_1\right]\ ;\ I_1=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)}dx$$

Tính I_1 :

Đặt : $x=\tan t\Rightarrow dx=(1+\tan^2 t)dt$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Đổi cận : $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\tan^2 t)}{\tan^2 t+1}dt=\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow I_2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow I_3=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}+3I_2\right]=\frac{1}{16}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{4}+\frac{3\pi}{32}$$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Tính các tích phân sau :

1. $\displaystyle\int_1^3\frac{x^3}{x^2-16}dx$;

2. $\displaystyle\int_0^1 x^{11}(1+x^4)^3dx$;

3. $\displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}}\frac{dx}{e^x+3e^{-x}}$;

4. $\displaystyle\int_1^2\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$;

5. $\displaystyle\int_1^4\frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

6. $\displaystyle\int_1^e\frac{dx}{x.\sqrt{1+\ln x}}$;

7. $\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{(1+\ln x)^2}{x}dx$;

8. $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1-x}\,dx$;

9. $\int_0^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}}dx$;

10. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$;

11. $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}+\sqrt{2x+1}}dx$;

12. $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$;

13. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$;

14. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$;

15. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}}dx$;

16. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$;

17. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$;

18. $\int_1^e \frac{1}{x.(\ln^2 x+1)}dx$;

19. $\int_1^e \frac{dx}{x.\sqrt{1-\ln^2 x}}$;

20. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$ (Đề thi ĐH khối A – 2005)

21. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}dx$ (Đề thi ĐH khối B – 2005)

22. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{\sin x}+\cos x\right)\cos x dx$ (Đề thi ĐH khối D – 2005)

23. $I=\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}$ (Đề thi ĐH khối B – 2006)

24. $I=\int_{1}^{e} x^3\ln^2 x dx$ (Đề thi ĐH khối D – 2007)

25. $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx$ (Đề thi ĐH khối A – 2008)

26. $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx}{\sin 2x+2(1+\sin x+\cos x)}$ (Đề thi ĐH khối B – 2008)

27. $I=\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{x^3} dx$ (Đề thi ĐH khối D – 2008)

28. $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 x-1\right)\cos^2 x dx$ (Đề thi ĐH khối A – 2009)

29. $I=\int_{1}^{3} \frac{3+\ln x}{(x+1)^2} dx$ (Đề thi ĐH khối B – 2009)

30. $I=\int_{1}^{3} \frac{dx}{e^x-1}$ (Đề thi ĐH khối D – 2009)

Bài 2. Tính các tích phân sau :

1. $I=\int_{-1}^{1} \frac{e^{3x}}{e^x+e^{-x}} dx$ và $J=\int_{-1}^{1} \frac{e^{-3x}}{e^x+e^{-x}} dx$

2. $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x} dx$ và $J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x} dx$

3. $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x} dx$ và $J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x} dx$

4. $I = \int_0^{\pi} (x\sin x)^2 dx$ và $J = \int_0^{\pi} (x\cos x)^2 dx$

Bài 3.

1. Chứng minh rằng nếu f(x) liên tục trên [–a ; a] thì :

a) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2.\int_0^a f(x)dx$ nếu f là hàm số chẵn.

b) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ nếu f là hàm số lẻ.

2. Áp dụng tính các tích phân sau :

a) $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^5 - 10x^3 + 2}{\cos^2 x} dx$; b) $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x.\ln\frac{1+x}{1-x} dx.$

Bài 4.

Cho a > 0, f(x) là hàm số chẵn và liên tục trên [–a ; a]

a) Chứng minh : $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{b^x + 1} dx = \int_0^a f(x)dx$ $(0 < b \neq 1)$.

b) Tính tích phân sau : $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^4}{2^x + 1} dx.$

Bài 5.

a) Cho f là hàm tuần hoàn với chu kỳ T, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng : $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$

b) Tính : $I = \int_0^{2010\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx.$

Bài 6.

Chứng minh rằng nếu f(x) liên tục trên [a ; b] và f(a + b – x) = f(x) thì :

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

Bài 7. Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}$.

a) Tìm hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n+2}.

b) Tính I_n.

Bài 8. Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}$.

Tìm hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n+2}.

Bài 9. Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx, \quad n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Tìm hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n-1}.

Bài 10. Cho $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx, \quad n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng : $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} I_n$.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

§1. ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN VÀ TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Bài 1. Tính các tích phân sau :

1. $\int_0^1 \left(e^{2x} + \frac{3}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2}\left(e^{2x} + 3\ln|x+1| \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^2 + 3\ln 2 - 1 \right)$

2. $\int_1^2 \frac{4}{e^{5x}} dx = 4\int_1^2 e^{-5x} dx = -\frac{4}{5} e^{-5x}\Big|_1^2 = -\frac{4}{5}\left(e^{-10} - e^{-5} \right)$

3. $\int_{-2}^0 \left(x^2 - e^{-2x} \right) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}e^{-2x} \right)\Big|_{-2}^0 = \frac{19}{6} - \frac{1}{2}e^4$

4. $\int_1^4 \left(\sqrt{x}-1\right)^2 dx = \int_1^4 \left(x-2\sqrt{x}+1\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x\right)\Bigg|_1^4 = \frac{7}{6}$

5. $\int_1^2 \left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int_1^2 \left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx$

$$= \int_1^2 \left(x^{\frac{2}{3}}+3.x^{-\frac{1}{6}}+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \left(\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{18}{5}x^{\frac{5}{6}}+\ln x\right)\Bigg|_1^2$$

$$= \frac{6}{5}\sqrt[3]{4}+\frac{18}{5}\sqrt[6]{32}+\ln 2-\frac{21}{5}$$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos 5x.\cos 3x.\sin 2x\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos 8x+\cos 2x\right).\sin 2x.dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos 8x.\sin 2x+\cos 2x.\sin 2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos 8x.\sin 2x+\cos 2x.\sin 2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin 10x-\sin 6x+\sin 4x\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{10}\cos 10x+\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{30}$$

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x\sin 2x\sin 3x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(\cos x-\cos 5x)\,dx$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\sin 6x+\sin 4x)\,dx$$

$$=-\frac{1}{8}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{24}\cos 6x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{16}\cos 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{6}$$

8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{1+\sin x}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=-\cot\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=1-\frac{1}{\sqrt{3}}$

9. $\displaystyle\int_1^e\frac{1+\ln x}{x}dx=\int_1^e(1+\ln x)\,d(1+\ln x)=\frac{(1+\ln x)^2}{2}\Big|_1^e=\frac{3}{2}$

10. $\displaystyle\int_{-3}^{-1}\frac{dx}{(10+3x)^3}=\int_{-3}^{-1}(10+3x)^{-3}dx=-\frac{1}{6}.\frac{1}{(10+3x)^2}\Big|_{-3}^{-1}=\frac{8}{49}$

11. $\displaystyle\int_1^e\frac{dx}{x+x^3}=\int_1^e\frac{dx}{x(1+x^2)}=\int_1^e\frac{xdx}{x^2(1+x^2)}=\int_1^e\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)xdx$

$$=\int_1^e\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int_1^e\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\ln|x|\Big|_1^e-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Big|_1^e=1-\frac{1}{2}\ln\frac{1+e^2}{2}$$

12. $\displaystyle\int_{-1}^0\frac{1}{x^2+x-2}dx=\int_{-1}^0\frac{1}{(x-1)(x+2)}dx=\frac{1}{3}\int_{-1}^0\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Big|_{-1}^0=\frac{1}{3}\ln\frac{1}{4}$$

13. $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}\right)\sin x dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(1-\cos x)}{1-\cos x}-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}.$$

14. $$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}\right)\cos x dx=-\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(1-\sin x)}{1-\sin x}+\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(1+\sin x)}{1+\sin x}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

15. $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$$

$$=\left(\tan x-\cot x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

16. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^6 x}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2 x\right)^2 \frac{1}{\cos^2 x}dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1+2\tan^2 x+\tan^4 x\right)d\left(\tan x\right)$$

$$= \left(\tan x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\frac{\tan^5 x}{5}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{56}{15}$$

17. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^6 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cot^2 x\right)^2 \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cot^2 x+\cot^4 x\right)d\left(\cot x\right)$

$$= -\left(\cot x+\frac{2}{3}\cot^3 x+\frac{\cot^5 x}{5}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{28}{15}$$

18. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x} = -\ln\left|\sin x+\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\sqrt{2}$

19. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^2 x.\frac{1}{\sin^2 x}dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^2 x.d\left(\cot x\right)$

$$= -\frac{1}{3}\cot^3 x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}-1\right)$$

20. $$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\cos t}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{(1-\sin^2 t)}dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{(1-\sin t)(1+\sin t)}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{1-\sin t}+\frac{1}{1+\sin t}\right)\cos tdt=-\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(1-\sin t)}{1-\text{sint}}+\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(1+\sin t)}{1+\sin t}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{4}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{3(2-\sqrt{3})}$$

21. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{\tan x}d(\tan x)=\left(e^{\tan x}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=e-1$$

22. $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x}dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}e^{\cot x}d(\cot x)=-\left(e^{\cot x}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=e-1$$

23. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)^2\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\sin^2 x+\sin^4 x\right)d(\sin x)$$

$$=\left(\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{15}$$

24. $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3-2\cot^2 x}{\cos^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin^2 x}\right)dx=(3\tan x+2\cot x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{11\sqrt{3}}{3}-5$$

25. $\int_{-2}^{2}\left|x^2-1\right| = \int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx - \int_{-1}^{1}(x^2-1)dx + \int_{1}^{2}(x^2-1)dx$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} - \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{1}^{2} = 4$$

26. $\int_{0}^{\pi}|\cos x|\sqrt{\sin x}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\sqrt{\sin x}dx$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}.d(\sin x) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin x}.d(\sin x) = \frac{2}{3}\sin x\sqrt{\sin x}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}\sin x\sqrt{\sin x}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{3}$$

27. $\int_{-3}^{3}\left(|x+1|-|x-1|\right)dx = \int_{-3}^{-1}(-2)dx + \int_{-1}^{1}2xdx + \int_{1}^{3}2dx = -4 + x^2\Big|_{-1}^{1} + 4 = 0$

28. $\int_{-3}^{2}\left|\frac{x}{x+4}\right|dx = -\int_{-3}^{0}\frac{x}{x+4}dx + \int_{0}^{2}\frac{x}{x+4}dx = \int_{-3}^{0}\left[-1+\frac{4}{x+4}\right]dx + \int_{-3}^{0}\left[1-\frac{4}{x+4}\right]dx$

$$=\left(-x+4\ln|x+4|\right)\Big|_{-3}^{0} + \left(x-4\ln|x+4|\right)\Big|_{0}^{2}$$

$$=(4\ln 4-3)+(2-4\ln 6+4\ln 4) = -1+4\ln\frac{8}{3}$$

29. $\int_{-1}^{1}(2x-1-|x|)^2dx = \int_{-1}^{0}(3x-1)^2dx + \int_{0}^{1}(x-1)^2dx$

$$=\frac{1}{3}\frac{(3x-1)^3}{3}\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{(x-1)^3}{3}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{9}(-1+64)+\frac{1}{3}(0+1) = \frac{22}{3}$$

30. $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln xdx + \int_{1}^{e}\ln xdx = -(x\ln x - x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + (x\ln x - x)\Big|_{1}^{e} = 2\left(1-\frac{1}{e}\right)$

31. $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left|\frac{\ln x}{x}\right|dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{\ln x}{x}dx + \int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x d(\ln x) + \int_{1}^{e}\ln x d(\ln x)$

$$= -\frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_{\frac{1}{e}}^{1} + \frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_{1}^{e} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

32. $\int_0^{\ln 4}\left|e^{2x}-e^{x+1}\right|dx = \int_0^1\left(e^{x+1}-e^{2x}\right)dx + \int_1^{\ln 4}\left(e^{2x}-e^{x+1}\right)dx$

$$= \left(e^{x+1}-\frac{1}{2}e^{2x}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x+1}\right)\Bigg|_1^{\ln 4}$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}\right) + \left(8 - 4e + \frac{1}{2}e^2\right) = e^2 - 5e + \frac{17}{2}$$

33. $\int_0^4\left|x^2-2x-3\right|dx = -\int_0^3\left(x^2-2x-3\right)dx + \int_3^4\left(x^2-2x-3\right)dx$

$$= -\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Bigg|_0^3 + \left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Bigg|_3^4 = 9 - \frac{20}{3} + 9 = \frac{34}{3}$$

34. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x - \cos x\right|dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x - \cos x)dx$

$$= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\sqrt{2}-1\right) + \left(-1+\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}-2$$

Bài 2.

1. $\forall x \in [1\,;2]:\ x \le x^2 \Rightarrow e^x \le e^{x^2} \Rightarrow \int_1^2 e^x dx \le \int_1^2 e^{x^2}dx$

2. $\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, ta có : $0 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \sin^{10} x \le \sin^2 x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

3. $\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, ta có :

$0 \le \cos^2 x \le 1 \Rightarrow 4 \le 4 + 3\cos^2 x \le 7 \Rightarrow \frac{1}{7} \le \frac{1}{4+3\cos^2 x} \le \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{7} dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+3\cos^2 x} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} dx \quad \Rightarrow \frac{\pi}{14} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+3\cos^2 x} \le \frac{\pi}{8}$

4. $\forall x \in [-7 ; 11]$: Xét $f(x) = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+7}} - \frac{1}{2\sqrt{11-x}}, \ \forall x \in (-7 ; 11)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+7} = \sqrt{11-x} \Leftrightarrow x = 2$

Tính : $f(-7) = 3\sqrt{2}$, $f(11) = 3\sqrt{2}$, $f(2) = 6$

f là hàm số liên tục trên $[-7 ; 11]$ và có đạo hàm trên khoảng $(-7 ; 11)$ nên ta có : $3\sqrt{2} \le f(x) \le 6, \ \forall x \in [-7 ; 11] \Rightarrow \int_{-7}^{11} 3\sqrt{2} dx \le \int_{-7}^{11} f(x) dx \le \int_{-7}^{11} 6 dx$

$\Rightarrow 54\sqrt{2} \le \int_{-7}^{11} f(x) dx \le 108$

5. $\forall x \in [-1 ; 1]$: $0 \le x^2 \le 1 \Rightarrow 1 \le e^{x^2} \le e$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} dx \le \int_{-1}^{1} e^{x^2} dx \le \int_{-1}^{1} e dx \Rightarrow 2 \le \int_{-1}^{1} e^{x^2} dx \le 2e$

6. $\forall x \in [0 ; 1]$: $-1 \le -x \le 0 \Rightarrow \frac{1}{e} \le e^{-x} \le 1 \Rightarrow 3 + \frac{1}{e} \le 3 + e^{-x} \le 4$

$\Rightarrow \sqrt{3+e^{-x}} \le 2 \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{3+e^{-x}} dx \le 2$

7. $\forall x \in \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, ta có : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \le \sin x \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \le \sin^2 x \le 1 \Rightarrow 4 \le 3 + 2\sin^2 x \le 5$

$$\Rightarrow 2 \le \sqrt{3+2\sin^2 x} \le \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2dx \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3+2\sin^2 x}dx \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{5}dx \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3+2\sin^2 x}dx \le \frac{\pi\sqrt{5}}{4}$$

8. $\forall x \in [-1; 1]$: $-1 \le x^3 \le 1 \Rightarrow 7 \le 8 + x^3 \le 9 \Rightarrow \dfrac{1}{9} \le \dfrac{1}{8+x^3} \le \dfrac{1}{7}$

$$\Rightarrow \frac{2}{9} \le \int_{-1}^{1} \frac{dx}{8+x^3} \le \frac{2}{7}$$

9. Xét $f(x) = x^2 - x$, f liên tục trên đoạn $[0 ; 2]$

$f'(x) = 2x - 1$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$f(0) = 0$; $f(2) = 2$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$

Suy ra : $-\dfrac{1}{4} \le f(x) \le 2, \forall x \in [0 ; 2] \Rightarrow e^{-\frac{1}{4}} \le e^{f(x)} \le e^2$

$$\Rightarrow 2e^{-\frac{1}{4}} \le \int_0^2 e^{x^2-x}dx \le 2e^2$$

§2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài 1.

1. $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{x^3}{x^2-16}dx = \int_1^3 \frac{x^2}{x^2-16}xdx$

Đặt : $t = x^2 - 16 \Rightarrow \begin{cases} dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \dfrac{dt}{2} \\ x^2 = t + 16 \end{cases}$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = -15 \\ x = 3 \Rightarrow t = -7 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_{-15}^{-7} \frac{t+16}{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_{-15}^{-7} \left(1 + \frac{16}{t}\right) dt = \frac{1}{2}\left(t + 16\ln|t|\right)\Big|_{-15}^{-7}$$

$$= \frac{1}{2}\left(8 + 16\ln\frac{7}{15}\right) = 4 + 8\ln\frac{7}{15}$$

2. $I = \int_0^1 x^{11}(1+x^4)^3 dx = \int_0^1 x^8(1+x^4)^3 x^3 dx$

Đặt : $t = 1 + x^4 \Rightarrow \begin{cases} dt = 4x^3dx \Rightarrow x^3dx = \dfrac{dt}{4} \\ x^4 = t - 1 \end{cases}$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 (t-1)^2 t^3 \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int_1^2 \left(t^5 - 2t^4 + t^3\right) dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^6}{6} - \frac{2}{5}t^5 + \frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{37}{80}$$

3. $I = \int_0^{\ln\sqrt{3}} \dfrac{dx}{e^x + 3e^{-x}} = \int_0^{\ln\sqrt{3}} \dfrac{e^x dx}{e^{2x} + 3}$

Đặt : $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \ln\sqrt{3} \Rightarrow t = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow I = \int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{dt}{t^2 + 3}$

Đặt : $t = \sqrt{3}\tan u \Rightarrow dt = \sqrt{3}\left(1 + \tan^2 u\right)du$, $u \in \left(-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Đổi cận : $\begin{cases} t = 1 \Rightarrow u = \dfrac{\pi}{6} \\ t = \sqrt{3} \Rightarrow u = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3}(1 + \tan^2 u)du}{3\tan^2 u + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}$$

4. Đặt : $t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2}dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^t dt = \left(e^t\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = e - \sqrt{e}$

5. Đặt : $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 4 \Rightarrow t = 2 \end{cases} \Rightarrow I = 2\int_1^2 3^t dt = 2\left(\frac{3^t}{\ln 3}\right)\Big|_1^2 = \frac{12}{\ln 3}$

6. Đặt : $t = \sqrt{1 + \ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + \ln x \Rightarrow 2tdt = \frac{1}{x}dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = e \Rightarrow t = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2tdt}{t} = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$

7. Đặt : $t = 1 + \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = e^2 \Rightarrow t = 3 \end{cases} \Rightarrow I = \int_1^3 t^2 dt = \left(\frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^3 = \frac{26}{3}$

8. Đặt : $t = \sqrt{1 - x} \Rightarrow t^2 = 1 - x \Rightarrow \begin{cases} 2tdt = -dx \\ x = 1 - t^2 \end{cases}$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 (1 - t^2)^3 t.2tdt = 2\int_0^1 \left(t^2 - 3t^4 + 3t^6 - t^8\right)dt$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{3}{5}t^5 + \frac{3}{7}t^7 - \frac{t^9}{9}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{32}{315}$$

9. Đặt : $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow \begin{cases} 2tdt = dx \\ x = t^2 - 1 \end{cases}$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 3 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 \frac{(t^2-1)^2+1}{t} 2tdt = 2\int_1^2 \left(t^4 - 2t^2 + 2\right)dt = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{2}{3}t^3 + 2t\right)\Bigg|_1^2 = \frac{106}{15}$$

10. $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

Đặt : $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = 1 + x^2 \Rightarrow \begin{cases} 2tdt = 2xdx \Rightarrow tdt = xdx \\ x^2 = t^2 - 1 \end{cases}$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2} \\ x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{tdt}{(t^2-1)t} = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{2}+1)}{3(\sqrt{2}-1)}$$

11. Đặt : $t = \sqrt[6]{2x+1} \Rightarrow t^6 = 2x+1 \Rightarrow \begin{cases} 6t^5dt = 2dx \\ \sqrt[3]{(2x+1)^2} = t^4 \\ \sqrt{2x+1} = t^3 \end{cases}$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 4 \Rightarrow t = \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_1^{\sqrt[3]{3}} \frac{3t^5dt}{t^4+t^3} = 3\int_1^{\sqrt[3]{3}} \frac{t^2dt}{t+1} = 3\int_1^{\sqrt[3]{3}} \left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= 3\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right)\Bigg|_1^{\sqrt[3]{3}} = 3\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{2} - \sqrt[3]{3} + \frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt[3]{3}+1}{2}\right)$$

12. Đặt : $t=\sqrt{e^x+1}\Rightarrow t^2=e^x+1\Rightarrow 2tdt=e^xdx\Rightarrow \dfrac{2t}{t^2-1}dt=dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=\sqrt{2}\\ x=\ln 2\Rightarrow t=\sqrt{3}\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{t}.\frac{2t}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{2}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\ln\frac{t-1}{t+1}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}=\ln\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

13. Đặt : $x=2\sin t,\quad t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=2\cos tdt$

Đổi cận : $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=0\\ x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos tdt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)dt$$

$$=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

14. $I=\displaystyle\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$

Đặt : $x=4\tan t,\quad t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=4\left(1+\tan^2 t\right)dt$

Đổi cận : $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=0\\ x=4\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\left(1+\tan^2 t\right)dt}{\sqrt{(16+16\tan^2 t)^3}}=\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\sqrt{1+\tan^2 t}}$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt = \frac{1}{16}\left(\sin t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{32}$$

15. Đặt : $2x = \sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\cos t dt$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{\sqrt{1-\sin^2 t}}.\frac{1}{2}\cos t dt = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{3\pi}{8}$$

16. Đặt : $x = 2\sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 2\cos t dt$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin^2 t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} 2\cos t dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 2t) dt = 2\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

17. Đặt : $x = a\sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = a\cos t dt$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[a^2 \sin^2 t.\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}.a\cos t \right] dt = a^4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\sin^2 t \cos^2 t \right] dt$$

$$= \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{a^4}{8} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4 \pi}{16}$$

18. Đặt : $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = e \Rightarrow t = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow I = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt$

Đặt : $t = \tan u, \quad u \in \left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow dt = \left(1 + \tan^2 u \right) du$

Đổi cận : $\begin{cases} t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ t = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan^2 u + 1) du}{\tan^2 u + 1} = \frac{\pi}{4}$

19. Đặt : $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = e \Rightarrow t = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$

Đặt : $t = \sin u, \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow dt = \cos u du$

Đổi cận : $\begin{cases} t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ t = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u du}{\sqrt{1 - \sin^2 u}} = \frac{\pi}{2}$

20. (Đề thi ĐH khối A – 2005)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\cos x + 1)\sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} dx$$

Đặt : $t=\sqrt{1+3\cos x} \Rightarrow t^2=1+3\cos x \Rightarrow \begin{cases} 2tdt=-3\sin xdx \Rightarrow -\dfrac{2t}{3}dt=\sin xdx \\ \cos x=\dfrac{t^2-1}{3} \end{cases}$

Đổi cận : $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=2 \\ x=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t=1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\frac{2}{3}\int_1^2\left(2\frac{t^2-1}{3}+1\right)dt=\frac{2}{9}\int_1^2\left(2t^2+1\right)dt=\frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}t^3+t\right)\Bigg|_1^2=\frac{34}{27}$$

21. (Đề thi ĐH khối B – 2005)

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}dx \;=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos^2 x}{1+\cos x}dx$$

Đặt : $t=1+\cos x \Rightarrow dt=-\sin xdx$

Đổi cận : $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=2 \\ x=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t=1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I=2\int_1^2\frac{(t-1)^2}{t}dt=2\int_1^2\left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt=2\left(\frac{t^2}{2}-2t+\ln|t|\right)\Bigg|_1^2=2\ln 2-1$$

22. (Đề thi ĐH khối D – 2005)

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{\sin x}\right)d(\sin x)+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2x\right)dx=e^{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=e-1+\frac{\pi}{4}$$

23. (Đề thi ĐH khối B – 2006)

$$I=\int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}=\int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{e^x dx}{e^{2x}-3e^x+2}$$

Đặt : $t=e^x \Rightarrow dt=e^x dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = \ln 3 \Rightarrow t = 3 \\ x = \ln 5 \Rightarrow t = 5 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_3^5 \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = \int_3^5 \frac{dt}{(t-1)(t-2)} = \int_3^5 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}\right)dt = \ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right|\Bigg|_3^5 = \ln\frac{3}{2}$$

24. (Đề thi ĐH khối D – 2007)

Đặt : $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2\ln x}{x}dx \\ v = \dfrac{x^4}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{x^4}{4}\ln^2 x\Bigg|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2}J$$

Đặt : $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{x^4}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow J = \frac{x^4}{4}\ln x\Bigg|_1^e - \frac{1}{4}\int_1^e x^3 dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4}\Bigg|_1^e = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{16}\left(e^4 - 1\right) = \frac{3}{16}e^4 + \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{16}e^4 + \frac{1}{16}\right) = \frac{5}{32}e^4 - \frac{1}{32}$$

25. (Đề thi ĐH khối A – 2008)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{1 - \tan^2 x}.\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

Đặt : $t = \tan x \Rightarrow dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$$I=\int_0^{\frac{1}{\sqrt3}}\frac{t^4}{1-t^2}dt=-\int_0^{\frac{1}{\sqrt3}}\left(\frac{t^4-1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=-\int_0^{\frac{1}{\sqrt3}}\left[t^2+1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right]dt$$

$$=-\left(\frac{t^3}{3}+t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt3}}=-\left(\frac{1}{9\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt3}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt3-1}{\sqrt3+1}\right)$$

$$=-\left(\frac{10}{9\sqrt3}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt3-1}{\sqrt3+1}\right)$$

26. (Đề thi ĐH khối B – 2008)

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx}{\sin2x+2(1+\sin x+\cos x)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\sqrt2}(\sin x-\cos x)dx}{\sin2x+2(1+\sin x+\cos x)}$$

Đặt : $t=\sin x+\cos x\Rightarrow\begin{cases}dt=(\cos x-\sin x)dt\\ t^2=1+\sin2x\Rightarrow\sin2x=t^2-1\end{cases}$

Đổi cận : $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\sqrt2\end{cases}$

$$\Rightarrow I=-\frac{1}{\sqrt2}\int_1^{\sqrt2}\frac{dt}{t^2-1+2(1+t)}=-\frac{1}{\sqrt2}\int_1^{\sqrt2}\frac{dt}{(t+1)^2}=\frac{1}{\sqrt2}\frac{1}{t+1}\Bigg|_1^{\sqrt2}=\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{1}{\sqrt2+1}-\frac{1}{2}\right)$$

27. (Đề thi ĐH khối D – 2008)

Đặt : $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\frac{1}{x^3}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=-\frac{1}{2x^2}\end{cases}$

$$\Rightarrow I=-\frac{1}{2x^2}\ln x\Bigg|_1^2+\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{x^3}dx=-\frac{1}{8}\ln2+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_1^2$$

$$=-\frac{1}{8}\ln2+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}\ln2+\frac{3}{16}$$

28. (Đề thi ĐH khối A – 2009)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 x - 1\right)\cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \cos x dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = I_1 - \frac{1}{2} I_2$$

Tính I_1 :

Đặt : $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^2 dt = \int_0^1 \left(1 - 2t^2 + t^4\right) dt = \left(t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{15}$$

Tính I_2 :

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = \left(x + \frac{1}{2}\sin 2x \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{8}{15} - \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$$

29. (Đề thi ĐH khối B – 2009)

Đặt : $\begin{cases} u = 3 + \ln x \\ dv = \dfrac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x} dx \\ v = -\dfrac{1}{x+1} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{x+1}(3 + \ln x)\Bigg|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x(x+1)} dx = -\frac{1}{4}(3 + \ln 3) + \frac{3}{2} + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\ln 3 + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_1^3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\ln 3 + \ln\frac{3}{2}$$

30. (Đề thi ĐH khối D – 2009)

$$I=\int_1^3\frac{dx}{e^x-1}=\int_1^3\frac{e^xdx}{e^x\left(e^x-1\right)}$$

Đặt : $t=e^x\Rightarrow dt=e^xdx$

Đổi cận : $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=e\\x=3\Rightarrow t=e^3\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_e^{e^3}\frac{dt}{t(t-1)}=\int_e^{e^3}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|\Bigg|_e^{e^3}=\ln\left|\frac{e^3-1}{e^3}.\frac{e}{e-1}\right|$$

$$=\ln\frac{e^2+e+1}{e^2}=\ln\left(e^2+e+1\right)-2$$

Bài 2

1. $I=\int_{-1}^1\frac{e^{3x}}{e^x+e^{-x}}dx$ và $J=\int_{-1}^1\frac{e^{-3x}}{e^x+e^{-x}}dx$

• Ta xét tích phân : $I=\int_{-1}^1\frac{e^{3x}}{e^x+e^{-x}}dx$

Đặt $t=-x\Rightarrow dt=-dx$.

Đổi cận : $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=-1\\x=-1\Rightarrow t=1\end{cases}\Rightarrow I=-\int_1^{-1}\frac{e^{-3t}}{e^{-t}+e^t}dt=\int_{-1}^1\frac{e^{-3t}}{e^t+e^{-t}}dt=J$ (1)

• Ta có : $I+J=\int_{-1}^1\frac{e^{3x}+e^{-3x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int_{-1}^1(e^{2x}-1+e^{-2x})dx$

$$=\left(\frac{1}{2}e^{2x}-x-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_{-1}^1=2\left(\frac{1}{2}e^2-1-\frac{1}{2}e^{-2}\right)\quad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $I=J=\left(\frac{1}{2}e^2-1-\frac{1}{2}e^{-2}\right)$

2. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ và $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$

- Ta xét tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = J \qquad (1)$$

Ta có : $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $I = J = \frac{\pi}{4}$

3. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$ và $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx$

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos x + \sin x} dx = J \qquad (1)$$

Ta có : $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{1}{2} \sin 2x) dx$

$$= \left(x + \frac{1}{4} \cos 2x \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $I = J = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$

4. $I = \int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx$ và $J = \int_0^{\pi} (x \cos x)^2 dx$

Ta có : $I + J = \int_0^{\pi} \left[(x \sin x)^2 + (x \cos x)^2 \right] dx = \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} \qquad (1)$

$$J - I = \int_0^{\pi} \left[(x \sin x)^2 - (x \cos x)^2 \right] dx = \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx$$

Đặt : $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$

$$\Rightarrow J - I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin 2x dx = -\int_0^{\pi} x \sin 2x dx$$

Đặt : $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$

$$\Rightarrow J - I = -\left[-\frac{1}{2} x \cos 2x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2x dx \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $I = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{2}\right]$; $J = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2}\right]$

Bài 3.

1. Ta có : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$ (1)

Xét tích phân : $\int_{-a}^{0} f(x)dx$

Đặt : $t = -x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = -a \Rightarrow t = a \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-t)dt$

a) f là hàm số chẵn trên [–a ; a] nên : $\forall t \in [-a\ ;\ a] : f(-t) = f(t)$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(x)dx \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2.\int_{0}^{a} f(x)dx$ (đpcm)

b) f là hàm số lẻ trên [–a ; a] nên : $\forall t \in [-a\ ;\ a] : f(-t) = -f(t)$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{0} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(x)dx \quad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ (đpcm)

2. Áp dụng tính các tích phân sau :

a) $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^5 - 10x^3 + 2}{\cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^5 - 10x^3}{\cos^2 x} dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\cos^2 x} dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^5 - 10x^3}{\cos^2 x} dx + \left(2\tan x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = J + 4$$

Xét $f(x)=\dfrac{x^5-10x^3}{\cos^2 x}$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$

$\forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]: f(-x)=\dfrac{(-x)^5-10(-x)^3}{\cos^2(-x)}=-\dfrac{x^5-10x^3}{\cos^2 x}=-f(x)$

$\Rightarrow$ f là hàm số lẻ trên $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$

Áp dụng kết quả câu b) ta có : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=0 \Rightarrow J=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^5-10x^3}{\cos^2 x}dx=0$

$\Rightarrow I=4$

Chú ý : Trong khi làm bài, nếu dùng kết quả của câu b) thì phải chứng minh lại. Nếu không áp dụng thì làm trực tiếp như sau :

Tính tích phân

$$J=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^5-10x^3}{\cos^2 x}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{x^5-10x^3}{\cos^2 x}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^5-10x^3}{\cos^2 x}dx=J_1+J_2$$

Xét J_1 :

Đặt : $t=-x\Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}\\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$

$$\Rightarrow J_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-t^5+10t^3}{\cos^2(-t)}dt=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{t^5-10t^3}{\cos^2 t}dt=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^5-10x^3}{\cos^2 x}dx=-J_2$$

$\Rightarrow J=0 \ \Rightarrow I=4$

b) $I=\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x.\ln\frac{1+x}{1-x}dx$

Xét hàm số : $f(x)=\cos x.\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ trên $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$

$\forall x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]: f(-x)=\cos(-x).\ln\dfrac{1-x}{1+x}=-\cos x.\ln\dfrac{1+x}{1-x}=-f(x)$

$\Rightarrow$ f là hàm số lẻ trên $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$

Áp dụng kết quả câu b) ta có : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=0\Rightarrow I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x.\ln\frac{1+x}{1-x}dx=0$.

Bài 4.

a) Đặt : Vế trái = $\displaystyle I=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{b^x+1}dx=\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{b^x+1}dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{b^x+1}dx=I_1+I_2$ (1)

Xét tích phân : $\displaystyle I_1=\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{b^x+1}dx$

Đặt : $t=-x\Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận : $\begin{cases}x=-a\Rightarrow t=a\\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$

$\displaystyle\Rightarrow I_1=\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{b^x+1}dx=\int_{0}^{a}\frac{f(-t)}{b^{-t}+1}dt=\int_{0}^{a}\frac{b^tf(t)}{1+b^t}dt=\int_{0}^{a}\left(1-\frac{1}{1+b^t}\right)f(t)dt$

(f là hàm số chẵn trên [–a ; a] nên $f(-t)=f(t),\forall t\in[-a;a]$)

$\displaystyle=\int_{0}^{a}f(t)dt-\int_{0}^{a}\frac{f(t)}{b^t+1}dt=\int_{0}^{a}f(t)dt-I_2$ (2)

(1) và (2) $\displaystyle\Rightarrow I=\int_{0}^{a}f(x)dx$ = vế phải (đpcm)

b) Xét $f(x)=x^4$ trên đoạn [–1 ; 1]

Ta có f liên tục và là hàm số chẵn trên [–1 ; 1]

Áp dụng kết quả câu a) ta có : $\displaystyle I=\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{2^x+1}dx=\int_{0}^{1}x^4dx=\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1=\frac{1}{5}$

Bài 5.

a) Đặt $I = \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^{T} f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx = I_1 + I_2$

Xét $I_2 = \int\limits_T^{a+T} f(x)dx$

Đặt : $x = t + T \Rightarrow dx = dt$

Đổi cận : $\begin{cases} x = T \Rightarrow t = 0 \\ x = a + T \Rightarrow t = a \end{cases}$

$\Rightarrow I_2 = \int\limits_0^{a} f(t+T)dt = \int\limits_0^{a} f(t)dt$ (f là hàm tuần hoàn với chu kỳ T nên $f(t+T) = f(t)$)

$\Rightarrow I = \int_a^{T} f(x)dx + \int_0^{a} f(x)dx = \int_0^{T} f(x)dx$

b) Tính : $I = \int\limits_0^{2010\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}dx$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{1 - \cos 2x}$, $(x \in \mathbb{R})$

Ta có : $I = \int\limits_0^{\pi} f(x)dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} f(x)dx + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx + ... + \int\limits_{2009\pi}^{2010\pi} f(x)dx$

Ta có : $f(x+\pi) = \sqrt{1 - \cos 2(x+\pi)} = \sqrt{1 - \cos 2x} = f(x)$

Áp dụng câu a) ta có : $\int\limits_0^{\pi} f(x)dx = \int\limits_{\pi}^{2\pi} f(x)dx = \int\limits_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx = ... = \int\limits_{2009\pi}^{2010\pi} f(x)dx$

$\Rightarrow I = 2010\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}dx = 2010\int\limits_0^{\pi} \sqrt{2}\sin x dx = -2010\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi} = 4020\sqrt{2}$

Bài 6.

Vế trái $= I = \int_a^{b} xf(x)dx$

Đặt : $t = a + b - x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x = a \Rightarrow t = b \\ x = b \Rightarrow t = a \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_a^b (a+b-t)f(a+b-t)dt = \int_a^b (a+b-t)f(t)dt$$

$$= (a+b)\int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt = (a+b)\int_a^b f(t)dt - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx = \text{vế phải} \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 7.

a) Ta có : $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x.\sin x dx$

Đặt : $\begin{cases} u = \sin^{n+1} x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n+1)\sin^n x\cos x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$I_{n+2} = \left(-\cos x.\sin^{n+1} x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\sin^n x.\cos^2 x dx$$

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.(1-\sin^2 x)dx = (n+1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx\right]$$

$$\Leftrightarrow I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \Leftrightarrow (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

$$\Leftrightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

b) Tính I_n

Áp dụng câu a) ta có : $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

* Trường hợp n chẵn : $n = 2k$

Ta có : $I_n = \frac{2k-1}{2k} I_{n-2} = \frac{2k-1}{2k}.\frac{2k-3}{2k-2} I_{n-4} = \ldots = \frac{2k-1}{2k}.\frac{2k-3}{2k-2}.\frac{2k-5}{2k-4}.\ldots.\frac{1}{2} I_0$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi(2k)!}{2^{2k+1}(k!)^2}$$

* Trường hợp n lẻ : n = 2k + 1

$$I_n = \frac{2k}{2k+1}.\frac{2k-2}{2k-1}...\frac{2}{3}I_1$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2k}{2k+1}.\frac{2k-2}{2k-1}...\frac{2}{3} = \frac{\left(2^k.k!\right)^2}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$$

Bài 8.

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x.\tan^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\left(\tan^2 x + 1\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx \qquad (1)$$

Xét tích phân : $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\left(\tan^2 x + 1\right)dx$

Đặt : $\begin{cases} u = \tan^n x \\ dv = (1+\tan^2 x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = n\tan^{n-1} x(1+\tan^2 x)dx \\ v = \tan x \end{cases}$

$$\Rightarrow A = \tan^{n+1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1+\tan^2 x)dx = 1 - n\left(I_n + I_{n+2}\right) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow I_{n+2} = 1 - n\left(I_n + I_{n+2}\right) - I_n$

$$\Rightarrow (n+1)I_{n+2} = 1 - (n+1)I_n \Rightarrow I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n$$

Bài 9.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} e^{-(n-1)x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(e^{-x}+1\right)-1}{1+e^{-x}} e^{-(n-1)x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-(n-1)x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-(n-1)x}}{1+e^{-x}} dx$$

$$= -\frac{1}{n-1} e^{-(n-1)x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_{n-1} = -\frac{1}{n-1}\left(e^{-\frac{(n-1)\pi}{4}} - 1\right) - I_{n-1}$$

Vậy : $I_n = -\frac{1}{n-1}\left(e^{-\frac{(n-1)\pi}{4}} - 1\right) - I_{n-1}$

Bài 10.

Ta xét tích phân : $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\,dx$

Đặt : $\begin{cases} u = x^{n+1} \\ dv = \sqrt{1-x}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n+1)x^n dx \\ v = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \end{cases}$

$$\Rightarrow I_{n+1} = -\frac{2}{3}x^{n+1}(1-x)\sqrt{1-x}\Bigg|_0^1 + \frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 x^n(1-x)\sqrt{1-x}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}(n+1)\left[\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx - \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\,dx\right] = \frac{2}{3}(n+1)\left(I_n - I_{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1)\left(I_n - I_{n+1}\right) \Rightarrow I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} I_n$$

CHƯƠNG III
ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ GIẢI TOÁN

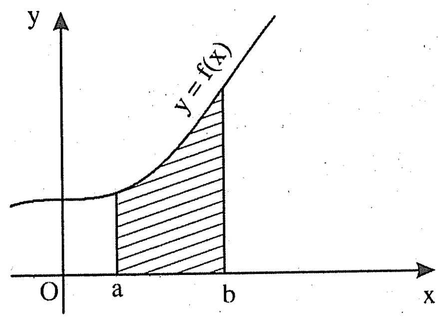
§1. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Công thức 1

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ là :

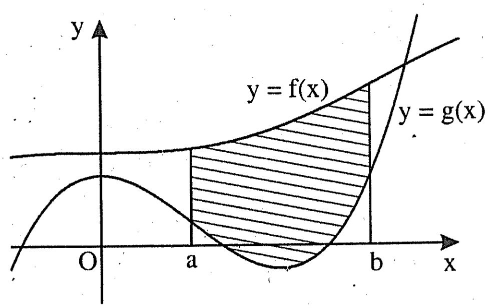
$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx \quad (1)$$



II. Công thức 2

Nếu hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, đồ thị hàm số $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ là :

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \quad (2)$$



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

> **Vấn đề 1**
>
> **Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi bốn đường :**
>
> **(C) : y = f(x), trục Ox, x = a và x = b (a < b)**

1. PHƯƠNG PHÁP

➢ Áp dụng công thức (1) ta có diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_a^b |f(x)|dx$$

➢ Xét dấu f(x) trên [a ; b], từ đó bỏ dấu trị tuyệt đối ta sẽ tính được giá trị của tích phân.

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số : $y = f(x) = x^3 - 1$, đường thẳng x = 3, trục tung và trục hoành.

Giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^3 |x^3 - 1|.dx$

Vì với $x \in [0 ; 1]$ thì $x^3 - 1 \le 0$ và với $x \in [1 ; 3]$ thì $x^3 - 1 \ge 0$ nên :

$$S = \int_0^1 (1 - x^3)dx + \int_1^3 (x^3 - 1)dx$$

$$= \left[x - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - x\right]_1^3$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \left(\frac{81}{4} - 3\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{75}{4} \text{ (đvdt).}$$

Ví dụ 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường y = sinx, y = 0, x = 0 và x = 2π.

Giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^{2\pi} |\sin x|dx$

Vì với $x \in [0\,;\pi]$ thì $\sin x \geq 0$ và với $x \in [\pi\,;2\pi]$ thì $\sin x \leq 0$ nên

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx = [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= 1 - (-1) + 1 - (-1) = 4 \text{ (đvdt).}$$

Ví dụ 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$y = x^4 - x^2,\ y = 0,\ x = -1 \text{ và } x = 2.$$

Giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_{-1}^{2} \left|x^4 - x^2\right| dx$

Ta có : $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1)$ nên với $x \in [-1\,;1]$ thì $x^4 - x^2 \leq 0$ và với $x \in [1\,;2]$ thì $x^4 - x^2 \geq 0$ nên

$$S = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - x^4\right) dx + \int_{1}^{2} \left(x^4 - x^2\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{32}{5} - \frac{8}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{62}{15} \text{ (đvdt)}$$

Chú ý :

Muốn tính $S = \int_a^b |f(x)| dx$ thì thường phải xét dấu f(x) trên đoạn [a ; b] để khử dấu trị tuyệt đối.

Tuy nhiên có thể dựa vào tính chất : "Nếu hàm số f *liên tục* trên đoạn [a ; b] và phương trình f(x) = 0 *không có nghiệm* trên (a ; b) thì f(x) *không đổi dấu* trên (a ; b)" để tính S đơn giản hơn.

Ta thực hiện như sau :

Giải phương trình f(x) = 0 trên (a ; b).

Giả sử các nghiệm thuộc (a ; b) của phương trình là

$$c_1, c_2, .., c_k\ (a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b).$$

Thế thì : $S = \left|\int_a^{c_1} f(x) dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x) dx\right| + \ldots + \left|\int_{c_n}^{b} f(x) dx\right|.$

Ví dụ 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (C) : $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.

Giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_{-1}^{2} \left| x^3 - 3x^2 + 2x \right| dx$

Ta có : $x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 1$ hay $x = 2$.

Do đó :

$$S = \left| \int_{-1}^{0} (x^3 - 3x^2 + 2x)dx \right| + \left| \int_{0}^{1} (x^3 - 3x^2 + 2x)dx \right| + \left| \int_{1}^{2} (x^3 - 3x^2 + 2x)dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_{-1}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_{0}^{1} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_{1}^{2} \right|$$

$$= \left| 0 - \left(\frac{1}{4} + 1 + 1 \right) \right| + \left| \frac{1}{4} \right| + \left| (4 - 8 + 4) - \frac{1}{4} \right| = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \text{ (đvdt).}$$

Vấn đề 2

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

(C) : y = f(x), (D) : y = g(x), x = a và x = b (a < b)

1. PHƯƠNG PHÁP

Áp dụng công thức (2) ta có $S = \int_{a}^{b} \left| f(x) - g(x) \right| dx$.

Xét dấu biểu thức $F(x) = f(x) - g(x)$, bỏ dấu trị tuyệt đối, từ đó tính được S.

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường :

(C) : $y = -x^2 + 4$; (D) : $y = x^3 + 3x + 4$; $x = -1$ và $x = 1$.

Giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_{-1}^{1} \left| (-x^2 + 4) - (x^3 + 3x + 4) \right| dx = \int_{-1}^{1} \left| x^3 + x^2 + 3x \right| dx$$

Ta có $F(x) = x^3 + x^2 + 3x = x(x^2 + x + 3)$.

Suy ra $F(x) \le 0$ với $x \in [-1\,;\,0]$ và $F(x) \ge 0$ với $x \in [0\,;\,1]$

Do đó $S = \int_{-1}^{0}\left(-x^3 - x^2 - 3x\right)dx + \int_{0}^{1}(x^3 + x^2 + 3x)dx$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2} \text{ (đvdt)}$$

Ví dụ 2. (Diện tích hình elip).

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi elip : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$.

Giải

Ta có thể xem hình elip trên là hình giới hạn bởi các đường sau :

$$x = -a\,;\, x = a\,;\, y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ và } y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Do đó : $S = \int_{-a}^{a}\left|2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right|dx = 4\frac{b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

Đặt $x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t\,dt$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 0$

$$x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

Suy ra $S = \frac{4b}{a}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}.a\cos t\,dt = 4ba\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$

$$= 2ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos 2t)dt = 2ab\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

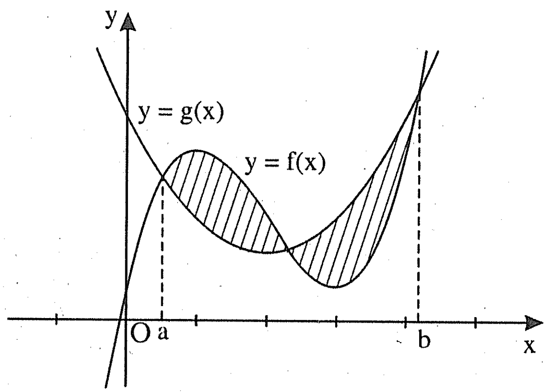
$$= 2ab\left[\frac{\pi}{2} + 0\right] = \pi ab \text{ (đvdt)}$$

Vấn đề 3

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$

1. PHƯƠNG PHÁP

Bốn đường gồm đồ thị của hai hàm số liên tục f, g và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ luôn xác định được một hình phẳng. Tuy nhiên, đôi khi chỉ với hai đồ thị của hai hàm số liên tục f và g cũng đủ xác định một hình phẳng, chẳng hạn như trong hình vẽ bên. Trong trường hợp này thì hình phẳng được kẻ sọc trong hình vẽ là hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị f và g.



Muốn tính diện tích hình phẳng như vậy ta thực hiện các bước sau :

– Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đường

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = a\ ;\ x = c\ ;\ \ldots\ ;\ x = b\ (a < c < \ldots < b).$$

– Diện tích hình phẳng cần tìm là : $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường parabol (P) : $y = 2 - x^2$ và đường thẳng (d) : $y = -x$.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là :

$$2 - x^2 = -x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_{-1}^{2}\left|(2-x^2)-(-x)\right|dx = \int_{-1}^{2}\left|-x^2+x+2\right|dx$$

$$= \int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)dx \text{ (vì } -x^2+x+2 \geq 0 \text{ với mọi } x \in [-1\ ;\ 2])$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

Ví dụ 2. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường parabol (C) : $y = x^3 - 2x$ và đường thẳng (d) : $y = 3x^2 - 2x$.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là :

$$x^3 - 2x = 3x^2 - 2x \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_{0}^{3}\left|(x^3-2x)-(3x^2-2x)\right|dx = \int_{0}^{3}\left|x^3-3x^2\right|dx$$

$$= \int_{0}^{3}\left(3x^2-x^3\right)dx \text{ (vì } x^3 - 3x^2 \leq 0 \text{ với mọi } x \in [0\ ;\ 3])$$

$$= \left[x^3-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{3} = \frac{27}{4}.$$

Vấn đề 4

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi nhiều hơn hai đồ thị

1. PHƯƠNG PHÁP

Công thức (2) chỉ sử dụng để tính diện tích của hình phẳng được xác định bởi đồ thị của hai hàm số f, g và hai đường thẳng x = a, x = b.

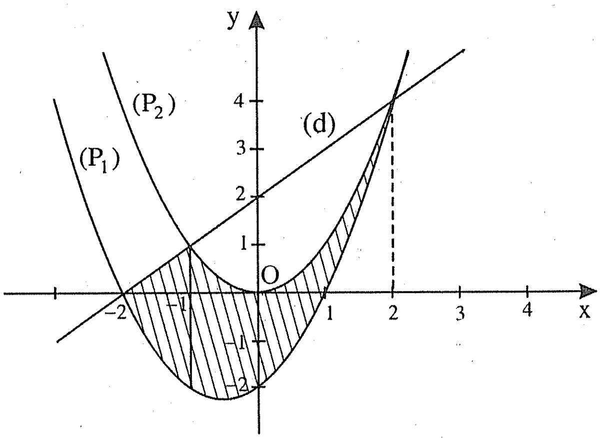
Trong trường hợp hình phẳng (H) được xác định bởi nhiều hơn hai đồ thị của hàm số : y = f(x) ; y = g(x) ; y = h(x) ; …

Khi đó muốn tính diện tích của (H) thì ta phải **vẽ hình** (H) (tức là vẽ các đường xác định (H)). Dựa vào hình vẽ của hình (H) ta chia hình (H) thành các hình đơn giản hơn mà ta đã biết cách tính ở trên.

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường : $(P_1) : y = x^2 + x - 2$; $(P_2) : y = x^2$ và $(d) : y = x + 2$.

Giải



Phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2) là :

$$x^2 + x - 2 = x^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P_2) và (d) là :

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 2.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P_1) là :

$$x + 2 = x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Theo hình vẽ ta suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là

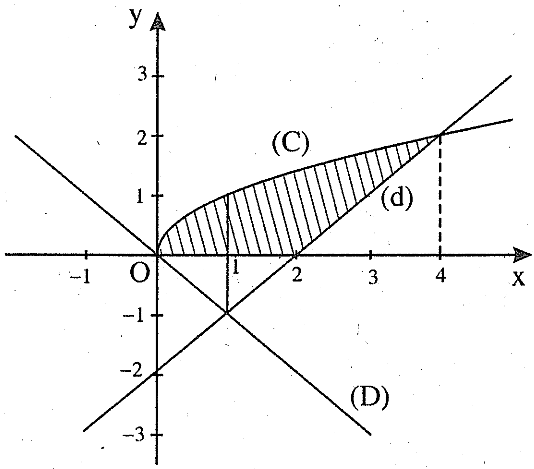
$$S = \int_{-2}^{-1}(y_d - y_{P_1})dx + \int_{-1}^{2}(y_{P_2} - y_{P_1})dx$$

$$= \int_{-2}^{-1}(4 - x^2)dx + \int_{-1}^{2}(2 - x)dx$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{37}{6}.$$

Ví dụ 2. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị (C) : $y = \sqrt{x}$, đường thẳng (d) : $y = x - 2$ và đường thẳng (D) : $y = -x$.

Giải



Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là : $\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow x = 4$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (D) là : $-x = x - 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (C) là : $\sqrt{x} = -x \Leftrightarrow x = 0$.

Theo hình vẽ ta suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_0^1 (y_C - y_D)dx + \int_1^4 (y_C - y_d)dx$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{x} + x)dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - x + 2)dx$$

$$= \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^4$$

$$= \frac{13}{3}.$$

Vấn đề 5

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

$x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = a$ và $y = b$ $(a < b)$

1. PHƯƠNG PHÁP

Trong các bài toán ở các vấn đề 1, 2, 3, 4. Diện tích hình phẳng được biểu thị bằng các tích phân mà biến tích phân là x.

Tương tự với các trường hợp ta đã biết ở trên, trong nhiều trường hợp nếu ta coi x là hàm của biến y thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường cong x = g(y), x = h(y) và hai đường thẳng y = a, y = b (a < b) là

$$S = \int_c^d |g(y) - h(y)| dy. \quad (3)$$

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Hãy tính diện tích hình phẳng trong ví dụ 2 (Vấn đề 4) bằng cách dùng công thức (3).

Giải

Ta có thể xem hình phẳng đã cho là hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) : $x = y^2$, đường thẳng (d) : x = y + 2 và đường thẳng (D) : x = –y.

Do đó ta có thể tính ngay S theo công thức (3) như sau :

$$S = \int_{-1}^{0}(x_d - x_D)dy + \int_0^2 (x_d - x_C)dy$$

$$= \int_{-1}^{0}(2y+2)dy + \int_0^2 (y+2-y^2)dy$$

$$= \left[y^2 + 2y\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{13}{3}.$$

Ví dụ 2. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường (P) : $y^2 = 4x$ và (d) : y = 2x – 4.

Giải

Ta có : (P) : $y^2 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{4}$; (d) : $y = 2x - 4 \Leftrightarrow x = \frac{y+4}{2}$.

Phương trình tung độ giao điểm của (C) và (d) :

$$\frac{y^2}{4} = \frac{y+4}{2} \Leftrightarrow y^2 - 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = 4. \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_{-2}^{4}\left|\frac{y^2}{4}-\frac{y+4}{2}\right|dy = \frac{1}{4}\int_{-2}^{4}(-y^2+2y+8)dy = \frac{1}{4}\left[-\frac{y^3}{3}+y^2+8y\right]_{-2}^{4} = 9.$$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

1. $y = 3x^2 + 6x - 9$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 2$;

2. $y = 4x\sin 2x$, trục Ox, trục Oy và đường $x = \pi$;

3. $y = 3xe^x$, trục Ox ; $x = 0$ và $x = 3$;

4. $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ và $y = \sin^2 x$;

5. $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = 2$;

6. $y = 0$, $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^4}$, $x = 0$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$;

7. $y = x^4\sqrt{x^5+4}$, $x = 0$, $x = 2$ và trục Ox ;

8. $y = x\ln(x + 1)$; $x = 0$; $x = 3$ và trục Ox ;

9. $y = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$; $x = \dfrac{1}{2}$; $x = 1$ và trục Ox ;

10. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$; trục Ox ; $x = 0$ và $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

11. $y = \dfrac{x^3}{x+\sqrt{x^2+1}}$; trục Ox ; $x = -1$; $x = 1$;

12. $y = \dfrac{\cos x + \sin x}{\sqrt{3+\sin 2x}}$; $x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2}$ và trục Ox.

Bài 2. Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi (P) : $y = x^2 + m$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Tìm m để diện tích của (D) đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi 4 đường $x = 0$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, trục Ox và

$$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Bài 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

$$y = \sin^2 x\cos^3 x,\ y = 0,\ x = 0 \text{ và } x = \frac{\pi}{2}.$$

Bài 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

1. $y = x^3 - 2x$, $y = 2x$, $x = -2$ và $x = 2$.
2. $y = 3x^2 - x^3$, $y = x^2 - x + 2$, $x = 0$ và $x = 3$.
3. $x = -1$, $x = 2$, $y = 3x^2$ và $y = 4x^3$.
4. $y = 3x - x^3$, $y = -x$, $x = -2$ và $x = 2$.
5. Đường elip (E) : $9x^2 + 16y^2 = 144$.
6. $y = \sin\frac{x}{2}\cos x$, $y = \cos x$, $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$.
7. $x = -1$, $x = 2$, $y = x$ và $y = x^2 - 2x$.
8. $y = 5^{x-2}$, $x = 1$, $x = 4$ và $y = 3 - x$.
9. (C) : $y = x\sqrt{x^2+1}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$.

Bài 6. Hãy vẽ và tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

1. (C) : $y = \frac{x+1}{x-1}$, $x = -1$, $x = 0$ và đường tiệm cận ngang của (C).
2. (C) : $y = \frac{x^2-3x}{x-2}$, $x = -1$, $x = 1$ và đường tiệm cận xiên.
3. (C) : $y = x + 1 + \frac{1}{x-1}$, $x = 2$, $x = 3$ và đường tiệm cận xiên.

Bài 7. Cho hàm số $y = 4x - x^3$ $(0 \le x \le 2)$.

Xác định m để đường thẳng $y = mx$ chia hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục Ox thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Bài 8. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

1. $y = 4$ và $y = x^2$;

2. $y = x^2 + 2$, $y = 3x$;

3. $x = e$, $y = 0$ và $y = \ln x$;

4. $y = 0$ và $y = x(x-1)(x-2)$;

5. $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$;

6. $y = 2x^2$ và $y = x^4 - 2x^2$ trong miền $x \geq 0$;

7. $y = \sqrt{4 - x^2}$ và $x^2 - 3y = 0$;

8. $y = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ và đường thẳng $y = -\dfrac{x}{2} + 1$;

9. $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$;

10. $y = 2 + \sin x$ và $y = 1 + \cos^2 x$ với $x \in [0 ; \pi]$.

Bài 9. Xác định $a > 0$ sao cho diện tích S giới hạn bởi hai parabol : $y = \dfrac{4a^2 - 2ax - x^2}{1 + a^4}$, $y = \dfrac{x^2}{1 + a^4}$ có giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Bài 10. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong

$$y = \frac{x^2\sqrt{x^3+1}}{24} ; y = x.2^{-x}.$$

Bài 11. Cho $a > 0$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong (C) : $y = \dfrac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^4}$ và (d) : $y = \dfrac{a^2 - ax}{1 + a^4}$. Tìm a để diện tích hình phẳng lớn nhất.

Bài 12. Hãy vẽ và tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

1. (P) : $y = x^2 - 2x + 2$, trục Oy và tiếp tuyến với (P) tại điểm M(3 ;) ;

2. (P) : $y = x^2 - 2x$ và hai tiếp tuyến của (P) vẽ từ điểm A(2 ; –9) ;

3. (P) : $y = x^2 - 1$ và hai tiếp tuyến của (P) tại 2 điểm A(–1 ; 0) và B(2 ; 3) ;

4. $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{27}$ và $y = \dfrac{27}{x}$.

5. $y = x^2$, $y = \dfrac{x^3}{8}$ và $y = \dfrac{8}{x}$.

6. $y = |x|$ và đường $y = x^2 - 2$

Bài 13. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số

$$y = \left|x^2 - 4x + 3\right| \text{ và } y = x + 3.$$

Bài 14. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P) : $y = x^2 - 4x + 5$ và hai tiếp tuyến của (P) tại hai điểm A(1 ; 2) và B(4 ; 5).

Bài 15. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường (P) : $y = (x + 3)^2$, $y = 0$, $x = 0$. Viết phương trình hai đường thẳng đi qua điểm A(0 ; 9) và chia (H) thành ba phần bằng nhau.

Bài 16. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

1. $x = y^3$, $y = 1$ và $x = 8$.
2. $y^2 = 2x$, $27y^2 = 8(x - 1)^3$.
3. $y^2 = 4x$ với $y \le 0$, $2x = -y^2 + 6y$ với $y \le 2$ và $x = 4$.

Bài 17. Cho parabol (P) $y^2 = 6x$ và đường tròn (C) $x^2 + y^2 = 16$. (P) chia hình tròn (C) thành hai phần, tính diện tích của mỗi phần.

§2. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

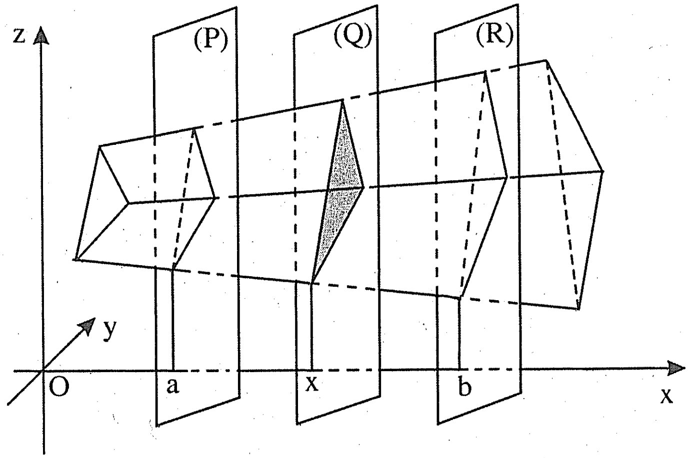
A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I . Tính thể tích vật thể

Cho một vật thể trong không gian toạ độ Oxyz. Gọi B là phần của vật thể đó giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b ($a < b$).

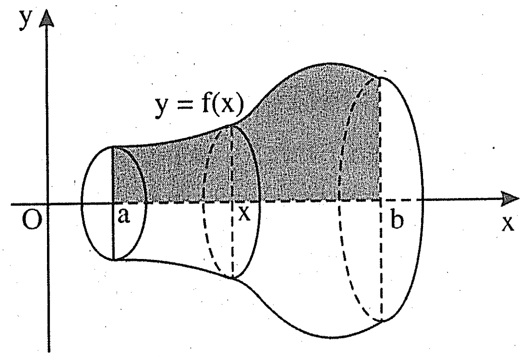
Gọi S(x) là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($a \le x \le b$)

Giả sử $S = S(x)$ là một hàm số liên tục. Người ta chứng minh được rằng thể tích của vật thể B là $V = \int_a^b S(x)dx$ (1)



II. Thể tích khối tròn xoay

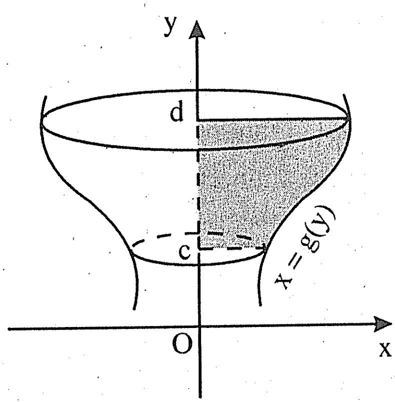
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên $[a ; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay (xem hình vẽ bên). Thể tích của nó được tính theo công thức



$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx \quad (2)$$

Tương tự

Cho đường cong $x = g(y)$, trong đó $g(y)$ là hàm số liên tục trên $[c ; d]$. Hình phẳng giới hạn bởi đường cong $x = g(y)$, trục tung và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$, quay quanh trục tung tạo nên một khối tròn xoay (xem hình vẽ bên). Thể tích V của nó được tính theo công thức



$$V = \pi\int_c^d g^2(y)dy \quad (3)$$

Chú ý :

Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số liên tục trên [a ; b] là $y = f(x)$, $y = g(x)$ (với $f(x)$ và $g(x)$ cùng dấu trên [a ; b]) và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.

Thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra khi (H) quay quanh trục hoành là

$$V = \pi\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right| dx .$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1

Tính thể tích của vật thể T

1. PHƯƠNG PHÁP

– Giới hạn T bởi 2 mặt phẳng song song (α) và (β).

– Chọn trục Ox vuông góc với (α), (β) tại a và b ($a < b$).

– Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với Ox tại x, $a \le x \le b$.

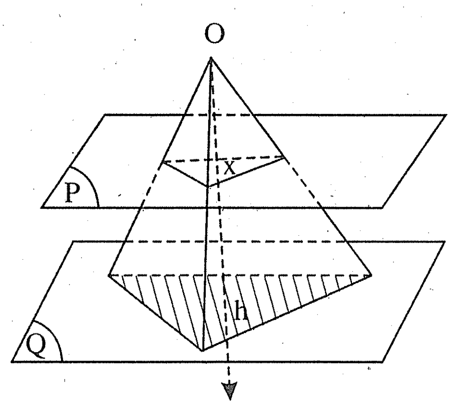
– Tính diện tích thiết diện S(x) tạo bởi (P) và T.

– Khi đó $V = \int_a^b S(x)dx$

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính thể tích của khối chóp (C) có diện tích đáy là B và chiều cao là h.

Giải



Gọi O là đỉnh hình chóp.

Giới hạn hình chóp bởi hai mặt phẳng (Q) chứa đáy chóp và (R) qua O và song song (Q).

Chọn trục Ox vuông góc với (R) và (Q) lần lượt tại O và h.

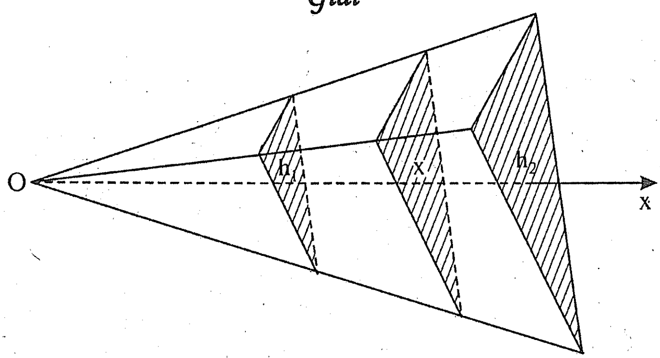
Dựng mặt phẳng (P) vuông góc Ox tại x, cắt hình chóp theo thiết diện có diện tích là S(x).

Ta có $\dfrac{S(x)}{B} = \dfrac{x^2}{h^2} \Rightarrow S(x) = B.\dfrac{x^2}{h^2}$.

Thể tích của khối chóp đã cho là : $V = \int_0^h B.\dfrac{x^2}{h^2}.dx = \dfrac{B}{h^2}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^h = \dfrac{1}{3}.B.h$.

Ví dụ 2. Tính thể tích của khối chóp cụt (T) có chiều cao là h và diện tích hai đáy là B và B' (B > B').

Giải



Gọi O là đỉnh của hình chóp sinh ra hình chóp cụt và h là đường cao hình chóp cụt.

Giới hạn hình chóp cụt bởi hai mặt phẳng (α), (β) lần lượt chứa đáy lớn và đáy nhỏ của hình chóp cụt.

Chọn trục Ox vuông góc (β), (α) lần lượt tại h_1 và h_2 ($h_1 < h_2$)

Cắt hình chóp cụt bởi mp(P) vuông góc Ox tại x ($h_1 \le x \le h_2$), ta được thiết diện có diện tích là S(x).

Ta có $\dfrac{S(x)}{B} = \dfrac{x^2}{h_2^2} \Rightarrow S(x) = \dfrac{x^2}{h_2^2}B$

Thể tích khối chóp cụt là : $V = \int_{h_1}^{h_2} B.\dfrac{x^2}{h_2^2}.dx = \dfrac{B}{h_2^2}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_{h_1}^{h_2}$

$$= \frac{B}{3h_2^2}\left[h_2^3 - h_1^3\right] = \frac{1}{3}.B(h_2 - h_1)(1 + \frac{h_1}{h_2} + \frac{h_1^2}{h_2^2})$$

$$= \frac{1}{3}B.h(1 + \frac{\sqrt{B'}}{\sqrt{B}} + \frac{B'}{B}) = \frac{1}{3}h(B + \sqrt{B'.B} + B').$$

Nhận xét : Khối chóp được coi là khối chóp cụt có B' = 0 .Vì vậy, nên ta dễ dàng kiểm chứng công thức thể tích V của khối chóp có chiều cao h và diện tích đáy B là $V = \frac{1}{3}.B.h.$

Vấn đề 2

Tính thể tích khối tròn xoay

1. PHƯƠNG PHÁP

– Xác định hình phẳng giới hạn bởi 4 đường tạo ra khối tròn xoay.

– Xác định công thức tính theo bảng sau :

Hình phẳng giới hạn bởi các đường :	Quay quanh trục	Thể tích vật thể tròn xoay
$x = a,\ x = b\ (a < b)$ $y = 0$ và $y = f(x)$	Ox	$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$
$y = a,\ y = b\ (a < b)$ $x = 0$ và $x = f(y)$	Oy	$V = \pi \int_a^b f^2(y)dy$
$x = a,\ x = b\ (a < b)$ $y = f(x)$ và $y = g(x)$ với $f(x) \geq g(x) \geq 0$	Ox	$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$

– Tính tích phân, từ đó suy ra thể tích V.

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 1$, $x = e$, $y = 0$ và $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ quanh trục Ox.

Giải

Ta có : $V = \pi \int_1^e y^2dx = \pi \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}.dx$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 0$; $x = e \Rightarrow t = 1$.

Suy ra $V = \pi \int_0^1 t^2 dt = \pi\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$ (đvtt).

Ví dụ 2. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = 2$, $y = e^x$ và $y = e^{-x+2}$ quanh trục Ox.

Giải

Ta có $V = \pi \int_0^2 \left|(e^x)^2 - (e^{-x+2})^2\right| dx = \pi \int_0^2 \left|e^{2x} - e^4.e^{-2x}\right|.dx$

Vì $f(x) = e^{2x} - e^4.e^{-2x} = \frac{e^{4x} - e^4}{e^{2x}}\begin{cases} > 0 \text{ khi } x > 1 \\ < 0 \text{ khi } x < 1 \end{cases}$ nên

$$V = \pi \left[\int_0^1 (e^{-2x+4} - e^{2x})dx + \int_1^2 (e^{2x} - e^{-2x+4})dx \right]$$

$$= \pi\left[\frac{-e^{-2x+4} - e^{2x}}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{e^{2x} + e^{-2x+4}}{2}\right]_1^2$$

$$= \pi\left[\frac{-e^2 - e^2 + e^4 + 1}{2} + \frac{e^4 + 1 - e^2 - e^2}{2}\right]$$

$= \pi(e^2 - 1)^2$ (đvtt).

Ví dụ 3. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 0$, $y = 2$, $y = 4$ và $y = \frac{x^2}{2}$ $(x \geq 0)$ quanh trục Oy.

Giải

Ta có : $V = \pi \int_2^4 x^2 dy = \pi \int_2^4 2y dy = \pi\left[y^2\right]_2^4 = 12\pi$ (đvtt).

Ví dụ 4. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi cho Elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ quay quanh trục Ox.

Giải

Ta có thể xem khối tròn xoay trên là do hình giới hạn bởi 4 đường

$x = -a$, $x = a$, $y = 0$ và $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ quay quanh trục Ox tạo nên.

Vậy $V = \pi\int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}$

$$= \frac{\pi b^2}{a^2}\left(2a^3 - \frac{2a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi ab^2 \text{ (đvtt).}$$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \le x \le 1$) là một hình vuông cạnh là $2\sqrt{1 - x^2}$.

Bài 2. Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \le x \le \pi$) là một tam giác đều cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.

Bài 3. (Thể tích khối chỏm cầu). Cho khối chỏm cầu bán kính R và chiều cao h. Chứng minh rằng thể tích V của khối chỏm cầu đó là

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

Từ đó hãy suy ra thể tích của khối bán cầu và thể tích của khối cầu.

Bài 4. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và parabol (P) : $y = 2x - x^2$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi (H) quay quanh trục hoành.

Bài 5. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) : $y = \sqrt{x}$, trục tung và đường thẳng $y = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi (H) quay quanh trục tung.

Bài 6. Cho parabol (P) : $y = x^2$, $A(-1\ ;\ 1)$ và $B(2\ ;\ 4)$ là hai điểm thuộc (P). Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi (P) và dây cung AB của nó. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi (H) quay quanh trục Ox.

Bài 7. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 0$, $x = 4$ và $y = \sqrt{x} - 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục hoành.

Bài 8. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox, với (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường :

1. $y = x.e^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$.

2. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = e$.

3. $y = \sin^2 x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \pi$.

4. $y = \sqrt{\sin^6 x + \cos^6 x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Bài 9. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình elip $\dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$ quanh trục Ox.

Bài 10. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{2}{x}$, $y = 1$, $y = 4$ và trục Oy. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục tung.

Bài 11. Cho hình tròn (C) tâm I(2 ; 0), bán kính R = 1 quay quanh Oy. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra.

Bài 12. Cho hàm số xác định trên [0 ; 3] với $y = f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2 \\ 3 - x & \text{nếu } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

1. Vẽ đồ thị của hàm số f(x).

2. Tính $I = \int_0^3 f(x)dx$.

3. Tính thể tích của hình tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số f và trục Ox quanh trục Oy.

Bài 13. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đường (C) : $y = x^3 - 3x + 2$ và (P) : $y = \sqrt{2x} + 2$.

Tính thể tích của khối tròn xoay nhận được khi cho (H) quay quanh trục Ox.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

§1. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

Bài 1.

1. Diện tích hình phẳng là $S = \int_0^2 \left|3x^2 + 6x - 9\right| dx$

x	0		1		2
$3x^2 + 6x - 9$		$-$	0	$+$	

Vậy $S = -\int_0^1 (3x^2 + 6x - 9)dx + \int_1^2 (3x^2 + 6x - 9)dx$

$= -\left[x^3 + 3x^2 - 9x\right]_0^1 + \left[x^3 + 3x^2 - 9x\right]_1^2$

$= -(1 + 3 - 9) + (8 + 12 - 18) - (1 + 3 - 9) = 12$ (đvdt)

2. $y = 4x\sin 2x$, trục Ox, trục Oy và đường $x = \pi$.

$$S = \int_0^{\pi} |4x\sin 2x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x\sin 2x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-4x\sin 2x)dx$$

Đặt $u = 4x \Rightarrow u' = 4$

$v' = \sin 2x \Rightarrow v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x$

$$\text{Suy ra } S = \left[-2x\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 2x dx - \left(\left[-2x\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cos 2x dx\right)$$

$$= \pi + \left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(-2\pi - \pi + \left[\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)$$

$= \pi - (-3\pi) = 4\pi.$

3. $y = 3xe^x$, trục Ox, $x = 0$ và $x = 3$.

$S = \int_0^3 \left|3xe^x\right| dx = \int_0^3 3xe^x dx$

Đặt $u = 3x \Rightarrow u' = 3$

$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

Suy ra $S = \left[3xe^x\right]_0^3 - \int_0^3 3e^x dx = 9e^3 - \left[3e^x\right]_0^3 = 6e^3 + 3$.

4. $S = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$.

5. $S = \int_1^2 \left|\frac{1}{x}\right| dx = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = \left[\ln x\right]_1^2 = \ln 2$.

6. $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^4}\right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^4}dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^4}dx$

Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow dt = (\cos x - \sin x)dx$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 1$

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \sqrt{2}$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

Suy ra

$$S = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^4} - \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{dt}{t^4} = 2\left[-\frac{1}{3t^3}\right]_1^{\sqrt{2}} = 2\left(-\frac{1}{6\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}} = \frac{4-\sqrt{2}}{6}.$$

7. $y = x^4\sqrt{x^5+4}$; $x = 0$; $x = 2$ và trục Ox.

$S = \int_0^2 \left|x^4\sqrt{x^5+4}\right| dx = \int_0^2 x^4\sqrt{x^5+4}dx$

Đặt $t = \sqrt{x^5+4} \Rightarrow t^2 = x^5 + 4 \Rightarrow 2tdt = 5x^4dx \Rightarrow x^4dx = \frac{2}{5}tdt$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 2$

$x = 2 \Rightarrow t = 6$

Suy ra $S = \int_2^6 \frac{2}{5}t^2dt = \left[\frac{2t^3}{15}\right]_2^6 = \frac{2}{15}(216-8) = \frac{416}{15}$.

8. $y = x\ln(x+1)$; $x = 0$; $x = 3$ và trục Ox.

$S = \int_0^3 |x\ln(x+1)|dx = \int_0^3 x\ln(x+1)dx$ (vì $x\ln(x+1) \geq 0$ với mọi $x \in [0 ; 3]$)

Đặt $u = \ln(x+1) \Rightarrow u' = \dfrac{1}{x+1}$

$v' = x \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}$

Suy ra $S = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^3 - \dfrac{1}{2}\int_0^3 \dfrac{x^2}{x+1}dx$

$= \dfrac{9}{2}\ln 4 - \dfrac{1}{2}\int_0^3 (x - 1 + \dfrac{1}{x+1})dx$

$= \dfrac{9}{2}\ln 4 - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^3$

$= 9\ln 2 - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{9}{2} - 3 + \ln 4\right] = 8\ln 2 - \dfrac{3}{4}$.

9. $y = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$; $x = \dfrac{1}{2}$; $x = 1$ và trục Ox.

$S = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left|\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\right| dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{\frac{1}{x}} . \dfrac{1}{x^2} dx$.

Đặt $t = \dfrac{1}{x} \Rightarrow dt = -\dfrac{1}{x^2}dx$.

Đổi cận : $x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow t = 2$; $x = 1 \Rightarrow t = 1$.

Suy ra $S = \int_2^1 e^t(-dt) = \left[-e^t\right]_2^1 = e^2 - e$.

10. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$; trục Ox ; $x = 0$ và $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$$S = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \right| dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t)dt$.

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

Suy ra $S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^2 t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}(1+\tan^2 t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.

Do đó $S = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^2.dt}{(1-t^2)^2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} . \frac{t+1+t-1}{(t-1)(t+1)} \right)^2 dt$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{2}{(t-1)(t+1)} \right) dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \ln\left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(2 - \frac{2}{3} + \ln\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3} - \ln 3 \right)$$

11. $y = \frac{x^3}{x+\sqrt{x^2+1}}$; trục Ox ; $x = -1$; $x = 1$.

$$S = \int_{-1}^{1}\left|\frac{x^3}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|dx = \int_{-1}^{0}\frac{-x^3}{x+\sqrt{x^2+1}}dx + \int_{0}^{1}\frac{x^3}{x+\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$= \int_{-1}^{0}-x^3\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx + \int_{0}^{1}x^3(\sqrt{x^2+1}-x)dx$$

$$= \int_{-1}^{0}x^4dx - \int_{0}^{1}x^4dx - \int_{-1}^{0}x^3\sqrt{x^2+1}dx + \int_{0}^{1}x^3\sqrt{x^2+1}dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^5}{5}\right]_{0}^{1} - \int_{-1}^{0}x^3\sqrt{x^2+1}dx + \int_{0}^{1}x^3\sqrt{x^2+1}dx$$

$$= -\int_{-1}^{0}x^3\sqrt{x^2+1}dx + \int_{0}^{1}x^3\sqrt{x^2+1}dx$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow tdt = xdx.$

Đổi cận : $x = -1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$; $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$.

Suy ra $S = -\int_{\sqrt{2}}^{1}(t^2-1)t.tdt + \int_{1}^{\sqrt{2}}(t^2-1)t.tdt$

$$= 2\int_{1}^{\sqrt{2}}\left(t^4-t^2\right)dt = 2\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_{1}^{\sqrt{2}}$$

$$= 2\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right) = \frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)}{15}$$

12. $y = \dfrac{\cos x+\sin x}{\sqrt{3+\sin 2x}}$; $x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2}$ và trục Ox.

$$S = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{3+\sin 2x}}\right|dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{3+\sin 2x}}\right)dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{4-(\sin x-\cos x)^2}}\right)dx$$

Đặt sinx – cosx = 2 sint ⇒ (cosx + sinx)dx = 2costdt

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{6}$; $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6}$

Suy ra $S = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t dt}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} dt = [t]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}$.

Bài 2. Ta có : $S = \int_0^1 \left|x^2+m\right| dx = \int_0^1 \left(x^2+|m|\right) dx = \frac{1}{3}x^3 + |m|x\Big|_0^1 = \frac{1}{3}+|m|$

Diện tích của miền D đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow S = \frac{1}{3} \Leftrightarrow |m| = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Bài 3. Ta có : $S = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left|\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\right| dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

Đặt $x^2 = \sin t \Rightarrow 2xdx = \cos tdt$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

Do đó : $S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t.dt}{2\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{2} = \left[\frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12}$.

Bài 4.

$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin^2 x \cos^3 x\right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x dx$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

Suy ra $S = \int_0^1 t^2(1-t^2)dt = \int_0^1 (t^2-t^4)dt = \left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{1}{5} = \frac{2}{15}$.

Bài 5.

1. $y = x^3 - 2x$, $y = 2x$, $x = -2$ và $x = 2$.
   Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-2}^{2} \left|(x^3-2x)-2x\right| dx = \int_{-2}^{2} \left|x^3-4x\right| dx$$

Bảng xét dấu

x	-2		0		2
$x^3 - 4x$	0	$+$	0	$-$	0

Vậy $S = \int_{-2}^{0}(x^3 - 4x)dx + \int_{0}^{2}(-x^3 + 4x)dx$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$= 0 - (4 - 8) + (-4 + 8) = 8 \text{ (đvdt)}$$

2. $y = f(x) = 3x^2 - x^3$, $y = g(x) = x^2 - x + 2$, $x = 0$ và $x = 3$.

Ta có $S = \int_{0}^{3}\left|(3x^2 - x^3) - (x^2 - x + 2)\right|dx$

$$= \int_{0}^{3}\left|(-x^3 + 2x^2 + x - 2)\right|dx = \int_{0}^{3}\left|(x - 2)(x^2 - 1)\right|dx$$

Bảng xét dấu

x	0		1		2		3
$(x - 2)(x^2 - 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó :

$$S = \int_{0}^{1}\left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right)dx - \int_{1}^{2}\left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right)dx + \int_{2}^{3}\left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{0}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{1}^{2} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{2}^{3}$$

$$= \frac{13}{12} - \frac{2}{3} + \frac{13}{12} + \frac{15}{4} - \frac{2}{3} = \frac{55}{12}.$$

3. $x = -1$, $x = 2$, $y = 3x^2$ và $y = 4x^3$.

$$S = \int_{-1}^{2}\left|3x^2 - 4x^3\right|dx = \int_{-1}^{\frac{3}{4}}\left(3x^2 - 4x^3\right)dx - \int_{\frac{3}{4}}^{2}\left(3x^2 - 4x^3\right)dx$$

$$= \left[x^3 - x^4\right]_{-1}^{\frac{3}{4}} - \left[x^3 - x^4\right]_{\frac{3}{4}}^{2} = \frac{27}{256} + 2 - \left(-8 - \frac{27}{256}\right) = \frac{1307}{128}$$

4. $y = 3x - x^3$, $y = -x$, $x = -2$ và $x = 2$.

$$S = \int_{-2}^{2}\left|(3x - x^3) + x\right|dx = \int_{-2}^{2}\left|4x - x^3\right|dx$$

$$= \int_{-2}^{0}(-4x + x^3)dx + \int_{0}^{2}(4x - x^3)dx$$

$$= \left[-2x^2 + \frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_{-2}^{0} + \left[2x^2 - \frac{x^4}{3}\right]\Bigg|_{0}^{2}$$

$$= 0 - (-4) + 4 = 8.$$

5. Đường elip (E) : $9x^2 + 16y^2 = 144 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Ta có thể xem hình elip trên là hình giới hạn bởi các đường sau :

$$x = -4 \; ; \; x = 4 \; ; \; y = -\frac{3}{4}\sqrt{4^2 - x^2} \text{ và } y = \frac{3}{4}\sqrt{4^2 - x^2}.$$

Do đó : $S = \displaystyle\int_{-4}^{4}\left|2\frac{3}{4}\sqrt{4^2 - x^2}\right|dx = 3\int_{0}^{4}\sqrt{4^2 - x^2}dx$

Đặt $x = 4\sin t \Rightarrow dx = 4\cos t dt$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 0$

$$x = 4 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

Suy ra $S = 3\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16 - 16\sin^2 t}.4\cos t dt = 48\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt$

$$= 24\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos 2t)dt$$

$$= 24\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 24\left[\frac{\pi}{2} + 0\right] = 12\pi \text{ (đvdt)}$$

6. $y = \sin\dfrac{x}{2}\cos x$, $y = \cos x$, $x = 0$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin\frac{x}{2}\cos x - \cos x\right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos x\left(\sin\frac{x}{2} - 1\right)\right| dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x - \sin\frac{x}{2}\cos x\right) dx$$

$$= \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{x}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right) dx$$

$$= 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right)\sin\frac{x}{2}\, dx$$

Đặt $t = \cos\frac{x}{2} \Rightarrow dt = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}dx$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$S = 1 - \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (2t^2 - 1).(-2)dt = 1 - \left[2t - \frac{4t^3}{3}\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= 1 - \left[\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} - 2 + \frac{4}{3}\right] = \frac{5 - 2\sqrt{2}}{3}.$$

7. $x = -1, x = 2, y = x$ và đường $y = x^2 - 2x$

$$S = \int_{-1}^{2} \left|(x^2 - 2x) - x\right| dx = \int_{-1}^{2} \left|(x^2 - 3x)\right| dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^2 - 3x)dx + \int_0^2 (3x - x^2)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 6 - \frac{8}{3} = \frac{31}{6}.$$

8. $y = 5^{x-2}$, $x = 1$, $x = 4$ và $y = 3 - x$.

$$S = \int_1^4 \left|5^{x-2} - (3 - x)\right| dx = \int_1^2 \left(3 - x - 5^{x-2}\right) dx + \int_2^4 (5^{x-2} - 3 + x)dx$$

(Vì $x < 2$ thì $3 - x > 1 = 5^0 > 5^{x-2}$)

$$= \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{5^{x-2}}{\ln 5}\right]\Bigg|_1^2 + \left[\frac{5^{x-2}}{\ln 5} - 3x + \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_2^4$$

$$= 6 - 2 - \frac{1}{\ln 5} - 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5\ln 5} + \frac{25}{\ln 5} - 12 + 8 - \frac{1}{\ln 5} + 6 - 2 = \frac{3}{2} + \frac{116}{5\ln 5}$$

9. (C) : $y = x\sqrt{x^2+1}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $x\sqrt{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$S = \int_0^1 \left|x\sqrt{x^2+1}\right| dx = \int_0^1 \left(x\sqrt{x^2+1}\right) dx$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow tdt = xdx$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$.

Suy ra $S = \int_1^{\sqrt{2}} t.tdt = \left[\frac{t^3}{3}\right]\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

Bài 6.

1. (C) : $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x = -1$, $x = 0$ và đường tiệm cận ngang của (C).

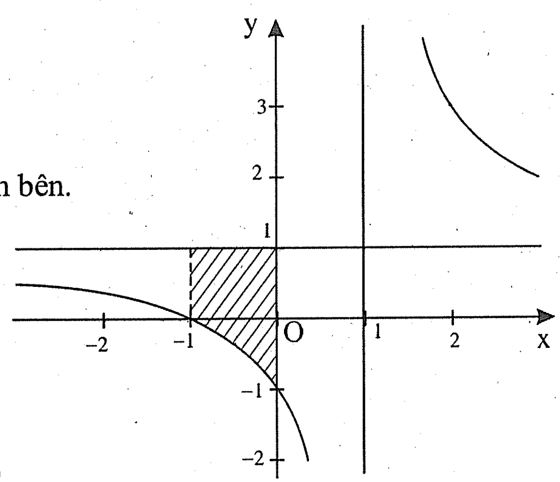
Ta có : $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Tiệm cận đứng : $x = 1$;

Tiệm cận ngang : $y = 1$.

Hình biểu diễn hình phẳng như hình bên.

Dựa vào hình vẽ ta có :



$$S = \int_{-1}^0 \left(y_{TCN} - y_C\right) dx$$

$$= \int_{-1}^0 \left(1 - \frac{x+1}{x-1}\right) dx$$

$$= \int_{-1}^0 \left(\frac{-2}{x-1}\right) dx = \left[-2\ln|x-1|\right]\Big|_{-1}^0 = 2\ln 2$$

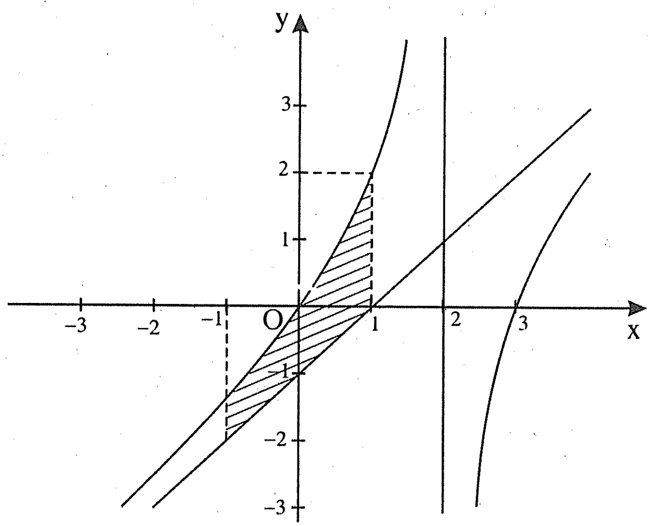
2. (C) : $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 2}$, $x = -1$, $x = 1$ và đường tiệm cận xiên.

Ta có : $y' = \dfrac{x^2 - 4x + 6}{(x-2)^2}$;

Tiệm cận đứng : $x = 2$;

Tiệm cận xiên : $y = x - 1$.

Hình biểu diễn của hình phẳng như hình sau.



Diện tích hình phẳng là $S = \int_{-1}^{1} \left(y_C - y_{TCX} \right) dx$

$$= \int_{-1}^{1} \left(x - 1 - \frac{2}{x-2} - x + 1 \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{-2}{x-2} dx$$

$$= \left[-2\ln|x-2| \right] \Big|_{-1}^{1} = 2\ln 3.$$

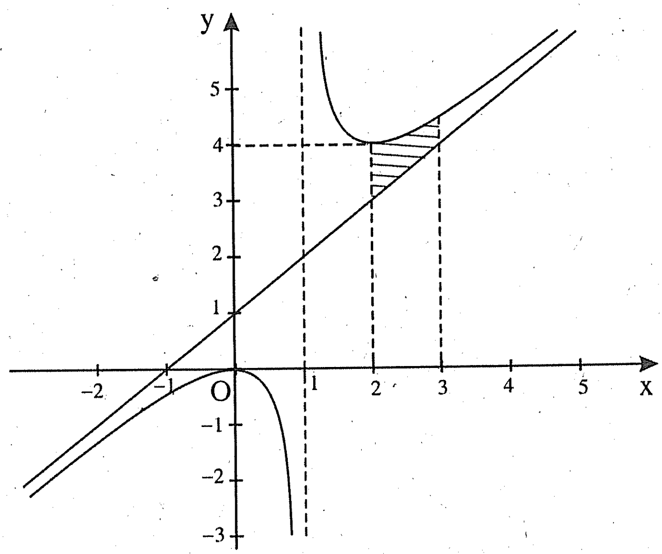
3. (C) : $y = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$, $x = 2$, $x = 3$ và đường tiệm cận xiên.

Ta có : $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$;

Tiệm cận đứng : $x = 1$;

Tiệm cận xiên : $y = x + 1$.

Hình biểu diễn của hình phẳng như hình sau.



Diện tích hình phẳng là $S = \int_2^3 \left(y_C - y_{TCX}\right)dx$

$$= \int_2^3 \left(x+1+\frac{1}{x-1}-x-1\right)dx$$

$$= \int_2^3 \frac{1}{x-1}dx \quad = \left[\ln|x-1|\right]_2^3$$

$= \ln 2$.

Bài 7. Cho hàm số $y = 4x - x^3$ $(0 \le x \le 2)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) : $y = mx$ là :

$$4x - x^3 = mx \Leftrightarrow x(x^2 + m - 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 4 - m \end{array}\right. \qquad (1)$$

Vì (d) chia hình phẳng giới hạn bởi (C) và Ox thành 2 phần nên $0 < 4 - m < 2$ $\Leftrightarrow 2 < m < 4$.

Khi đó :

(1) $\Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \sqrt{4-m} \in (0 ; 2)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{4-m}}(4x-x^3-mx)dx = \frac{1}{2}\int_0^2(4x-x^3)dx$

$$\Leftrightarrow \left[(4-m)\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{4-m}} = \frac{1}{2}\left[2x^2-\frac{x^4}{4}\right]_0^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4-m)^2}{2}-\frac{(4-m)^2}{4} = \frac{1}{2}(8-4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4-m)^2}{4} = 2 \Leftrightarrow (4-m)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow 4-m = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 4-2\sqrt{2}.$$

Vậy m thoả yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = 4-2\sqrt{2}$.

Bài 8.

1. $y = 4$ và $y = x^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là : $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_{-2}^{2}\left|4-x^2\right|dx = \int_{-2}^{2}(4-x^2)dx = \left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

2. $y = x^2+2$, $y = 3x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là :

$$x^2+2 = 3x \Leftrightarrow x^2-3x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hay } x = 2.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_1^2\left|x^2-3x+2\right|dx = \int_1^2(-x^2+3x-2)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-2x\right]_1^2 = \frac{1}{6}.$$

3. $x = e$, $y = 0$ và $y = \ln x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường $y = \ln x$ vẫ đường $y = 0$ là :

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là : $S = \int_1^e |\ln x| dx = \int_1^e \ln x dx$

Đặt $u = \ln x \Rightarrow u' = \dfrac{1}{x}$;

$v' = 1 \Rightarrow v = x$.

Suy ra $S = [x \ln x]_1^e - \int_1^e dx = e - [x]_1^e = 1$.

4. $y = 0$ và $y = x(x-1)(x-2)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là :

$$x(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = 1 \text{ hay } x = 2.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_0^2 |x(x-1)(x-2)| dx = \left|\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx\right| + \left|\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2\right| = \frac{1}{2}.$$

5. $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là :

$$\sqrt{x} = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = 1.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_0^1 \left|\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right| dx = \left|\int_0^1 (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})dx\right|$$

Đặt $x = t^6$ $(t \geq 0) \Rightarrow dx = 6t^5dt$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 1$

$$S = \left|\int_0^1 (t^3 - t^2).6t^5 dt\right| = \left|\int_0^1 (6t^8 - 6t^7)dt\right| = \left|\left[\frac{6t^9}{9} - \frac{6t^8}{8}\right]_0^1\right| = \left|\frac{6}{9} - \frac{6}{8}\right| = \frac{1}{12}.$$

6. $y = 2x^2$ và $y = x^4 - 2x^2$ trong miền $x \geq 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là :

$2x^2 = x^4 - 2x^2 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \pm 2$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_0^2 \left|x^4 - 4x^2\right| dx = \left|\int_0^2 (x^4 - 4x^2)dx\right| = \left|\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}\right|\Bigg|_0^2 = \left|\frac{32}{5} - \frac{32}{3}\right| = \frac{64}{15}.$$

7. (C) : $y = \sqrt{4 - x^2}$ và $x^2 - 3y = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là :

$$\sqrt{4 - x^2} = \frac{x^2}{3} \Leftrightarrow 9(4 - x^2) = x^4 \Leftrightarrow x^4 + 9x^2 - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 3 \\ x^2 = -12 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left|\sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{3}\right| dx = \frac{1}{3}\left|\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3\sqrt{4 - x^2} - x^2)dx\right|$$

$$= \frac{1}{3}\left|\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 3\sqrt{4 - x^2}dx - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\right|$$

Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t\, dt$

Đổi cận $x = -\sqrt{3} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{3}$; $\quad x = \sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$

Suy ra $S = \frac{1}{3}\left|\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 3\sqrt{4 - 4\sin^2 t}.2\cos t dt - 2\sqrt{3}\right|$

$$= \frac{1}{3}\left|\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 12\cos^2 t dt - 2\sqrt{3}\right|$$

$$= \frac{1}{3}\left|\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 6(1 + \cos 2t)dt - 2\sqrt{3}\right| = \frac{1}{3}\left|\left[6(t + \frac{\sin 2t}{2})\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - 2\sqrt{3}\right|$$

$$= \frac{1}{3}\left|4\pi + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right| = \frac{4\pi + \sqrt{3}}{3}.$$

8. $y = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ và đường thẳng $y = -\dfrac{x}{2} + 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là :

$$\frac{-2x+1}{x+1} = -\frac{x}{2} + 1 \Leftrightarrow -4x + 2 = -x^2 - x + 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = 5.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_0^5 \left|\frac{-2x+1}{x+1} + \frac{x}{2} - 1\right| dx = \left|\int_0^5 (-2 + \frac{3}{x+1} + \frac{x}{2} - 1) dx\right|$$

$$= \left|-3x + 3\ln|x+1| + \frac{x^2}{4}\right|_0^5$$

$$= \left|-15 + 3\ln 6 + \frac{25}{4}\right| = \frac{35}{4} - 3\ln 6$$

9. $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là :

$$x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1 \text{ hay } x = 0.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_0^1 \left|x^2 - \sqrt{x}\right| dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

10. $y = 2 + \sin x$ và $y = 1 + \cos^2 x$ với $x \in [0 ; \pi]$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là :

$$2 + \sin x = 1 + \cos^2 x \Leftrightarrow 2 + \sin x = 2 - \sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = \pi \ \ (\text{do } x \in [0; \pi])$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_0^\pi \left|2 + \sin x - (1 + \cos^2 x)\right| dx = \int_0^\pi \left(\sin x + \sin^2 x\right) dx$$

$$= \int_0^\pi \left(\sin x + \frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx = \left[-\cos x + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi = 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Bài 9. Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường đã cho là :

$$\frac{4a^2-2ax-x^2}{1+a^4}=\frac{x^2}{1+a^4} \Leftrightarrow 2x^2+2ax-4a^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=-2a \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S=\int_{-2a}^{a}\left|\frac{2x^2+2ax-4a^2}{1+a^4}\right|dx=\frac{1}{1+a^4}\int_{-2a}^{a}\left(4a^2-2ax-2x^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{1+a^4}\left[4a^2x-ax^2-\frac{2x^3}{3}\right]_{-2a}^{a}=\frac{9a^3}{1+a^4}$$

Ta có : $S=\dfrac{9a^3}{1+a^4}=\dfrac{27a^3}{3+a^4+a^4+a^4}\le\dfrac{27a^3}{4\sqrt[4]{3a^{12}}}=\dfrac{27}{4\sqrt[4]{3}}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=\sqrt[4]{3}$.

Vậy với $a=\sqrt[4]{3}$ thì diện tích hình phẳng đạt giá trị lớn nhất và $\max S=\dfrac{27}{4\sqrt[4]{3}}$.

Bài 10. Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường cong là :

$$\frac{x^2\sqrt{x^3+1}}{24}=x.2^{-x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x\sqrt{x^3+1}=24.2^{-x}\,(*) \end{array}\right.$$

Vì (*) có vế trái là hàm số tăng và vế phải là hàm số giảm nên (*) có duy nhất nghiệm là $x=2$.

Diện tích hình phẳng là : $S=\displaystyle\int_0^2\left|\frac{x^2\sqrt{x^3+1}}{24}-x2^{-x}\right|dx$

$$=\frac{1}{24}\left|\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}dx-\int_0^2 24x.2^{-x}dx\right|$$

Tính $I=\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}dx$

Đặt $t=\sqrt{x^3+1}\Rightarrow t^2=x^3+1\Rightarrow 2tdt=3x^2dx\Rightarrow x^2dx=\dfrac{2}{3}tdt$

Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=1$; $x=2\Rightarrow t=3$.

Do đó $I = \int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}dx = \int_1^3 \frac{2}{3}t^2dt = \left[\frac{2t^3}{9}\right]_1^3 = \frac{52}{9}$.

Tính $J = \int_0^2 24x2^{-x}dx$

Đặt $u = 24x \Rightarrow u' = 24$

$v' = 2^{-x} \Rightarrow v = -\frac{2^{-x}}{\ln 2}$

$$\Rightarrow J = \int_0^2 24x2^{-x}dx = \left[-\frac{24x.2^{-x}}{\ln 2}\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{24.2^{-x}}{\ln 2}dx$$

$$= -\frac{12}{\ln 2} - \left[\frac{24.2^{-x}}{\ln^2 2}\right]_0^2 = -\frac{12}{\ln 2} + \frac{18}{\ln^2 2}$$

Vậy $S = \frac{1}{24}\left[\frac{52}{9} + \frac{12}{\ln 2} - \frac{18}{\ln^2 2}\right]$.

Bài 11. Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là :

$\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^4} = \frac{a^2-ax}{1+a^4} \Leftrightarrow x^2 + 3ax + 2a^2 = 0 \Leftrightarrow x = -a$ hay $x = -2a$.

Diện tích hình phẳng là

$$S = \int_{-2a}^{-a}\left|\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^4} - \frac{a^2-ax}{1+a^4}\right|dx$$

$$= \frac{1}{1+a^4}\int_{-2a}^{-a}\left|x^2+3ax+2a^2\right|dx$$

$$= \frac{1}{1+a^4}\left|\frac{x^3}{3} + \frac{3ax^2}{2} + 2a^2x\right|_{-2a}^{-a}$$

$$= \frac{1}{1+a^4}\left[\frac{-a^3+8a^3}{3} + \frac{3a^3-12a^3}{2} - 2a^3 + 4a^3\right]$$

$$= \frac{a^3}{6(1+a^4)}$$

Ta có : $S = \dfrac{a^3}{2(3+a^4+a^4+a^4)} \le \dfrac{a^3}{2.4\sqrt[4]{3a^{12}}} = \dfrac{1}{8\sqrt[4]{3}}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = \sqrt[4]{3}$.

Vậy với $a = \sqrt[4]{3}$ thì diện tích hình phẳng đạt giá trị lớn nhất và $\max S = \dfrac{1}{8\sqrt[4]{3}}$.

Bài 12.

1. (P) : $y = x^2 - 2x + 2$, trục Oy và tiếp tuyến với (P) tại điểm M(3; 5).

Ta có $y' = 2x - 2 \Rightarrow y'(3) = 4$

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại M là (d) : $y - 5 = 4(x - 3) \Leftrightarrow y = 4x - 7$.

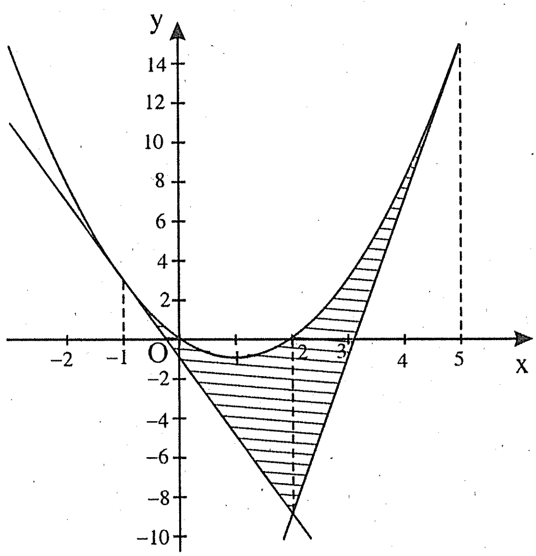
Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_0^3 \left|(x^2 - 2x + 2) - (4x - 7)\right| dx$$

$$= \int_0^3 (x-3)^2 dx = \left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^3 = 9.$$

2. (P): $y = x^2 - 2x$ và hai tiếp tuyến của (P) vẽ từ điểm A(2 ; –9)

Gọi $(x_0 ; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến (d) với (P).



Ta có : (d) : $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = (2x_0 - 2)(x - x_0) + x_0^2 - 2x_0$.

Mà (d) qua A nên $-9 = (2x_0 - 2)(2 - x_0) + x_0^2 - 2x_0 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 5 \end{array}\right.$$

Do đó có hai tiếp tuyến qua A là :

$(d_1) : y = -4(x + 1) + 3 = -4x - 1$

$(d_2) : y = 8(x - 5) + 15 = 8x - 25.$

Diện tích hình phẳng là :

$$S = \int_{-1}^{2}[(x^2 - 2x) - (-4x - 1)]dx + \int_{2}^{5}[x^2 - 2x - (8x - 25)]dx$$

$$= \int_{-1}^{2}(x+1)^2\,dx + \int_{2}^{5}(x-5)^2\,dx$$

$$= \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{(x-5)^3}{3}\right]_{2}^{5} = \frac{27}{3} + \frac{27}{3} = 18.$$

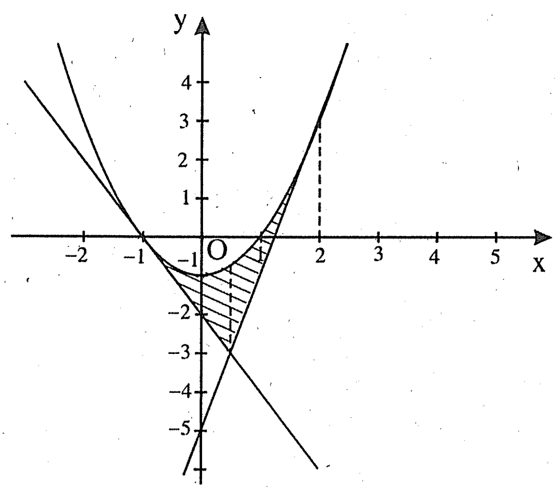
3. (P) : $y = x^2 - 1$ và hai tiếp tuyến của (P) tại 2 điểm A(–1 ; 0) và B(2 ; 3).

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại A là d :

$y = y'(-1)(x + 1) = -2(x + 1) = -2x - 2.$

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại B là Δ :

$y = y'(2)(x - 2) + 3 = 4(x - 2) + 3 = 4x - 5.$



Dựa vào hình vẽ ta có diện tích hình phẳng là :

$$S = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (x^2 - 1 - (-2x - 2))dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (x^2 - 1 - (4x - 5))dx$$

$$= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (x+1)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (x-2)^2 dx$$

$$= \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

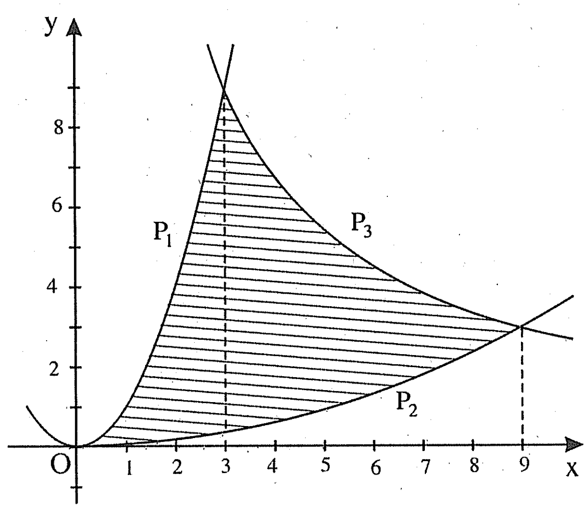
$$= \frac{9}{4}$$

4. $(P_1) : y = x^2$, $(P_2) : y = \dfrac{x^2}{27}$ và $(P_3) : y = \dfrac{27}{x}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2) : $x^2 = \dfrac{x^2}{27} \Leftrightarrow x = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P_2) và (P_3) : $\dfrac{x^2}{27} = \dfrac{27}{x} \Leftrightarrow x = 9$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P_3) và (P_1) : $\dfrac{27}{x} = x^2 \Leftrightarrow x = 3$.



Dựa vào hình vẽ ta có diện tích hình phẳng là :

$$S = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^2}{27} \right) dx + \int_3^9 \left(\frac{27}{x} - \frac{x^2}{27} \right) dx$$

$$= \left[\frac{26x^3}{81} \right]_0^3 + \left[27\ln|x| - \frac{x^3}{81} \right]_3^9$$

$$= \frac{26}{3} + 27\ln 9 - 27\ln 3 - 9 + \frac{1}{3}$$

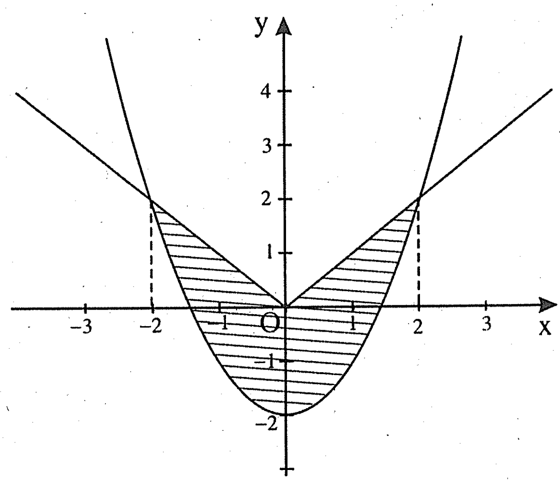
$$= 27\ln 3.$$

5. $y = x^2$, $y = \dfrac{x^3}{8}$ và $y = \dfrac{8}{x}$.

Tương tự bài 4. Đáp số : $S = 8\ln 2$.

6. $y = |x|$ và đường $y = x^2 - 2$

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị là : $|x| = x^2 - 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$.



Dựa vào hình vẽ ta có diện tích hình phẳng là :

$$S = 2\int_0^2 (x - x^2 + 2)dx$$

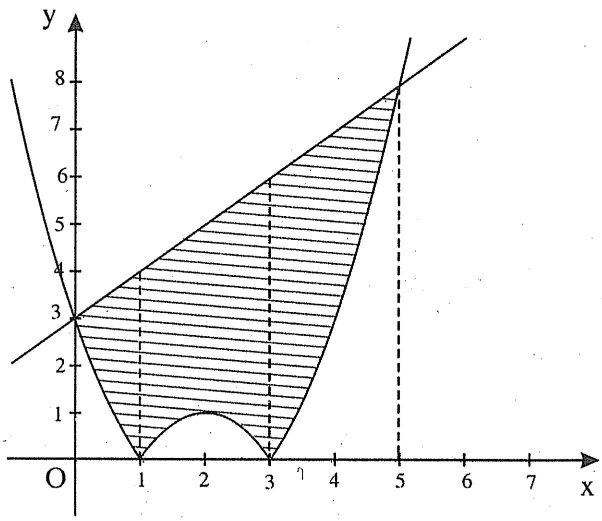
$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_0^2 = \frac{20}{3}.$$

Bài 13. Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường đã cho là :

$$|x^2 - 4x + 3| = x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 = x + 3 \\ x^2 - 4x + 3 = -x - 3 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x = 0 \text{ hay } x = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \text{ hay } x = 0.$$



Theo hình vẽ ta có diện tích hình phẳng là :

$$S = \int_0^1 \left(x + 3 - x^2 + 4x - 3\right)dx + \int_1^3 \left(x + 3 + x^2 - 4x + 3\right)dx$$

$$+ \int_3^5 \left(x + 3 - x^2 + 4x - 3\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(5x - x^2\right)dx + \int_1^3 \left(x^2 - 3x + 6\right)dx + \int_3^5 \left(5x - x^2\right)dx$$

$$= \left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 6x\right]_1^3 + \left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_3^5$$

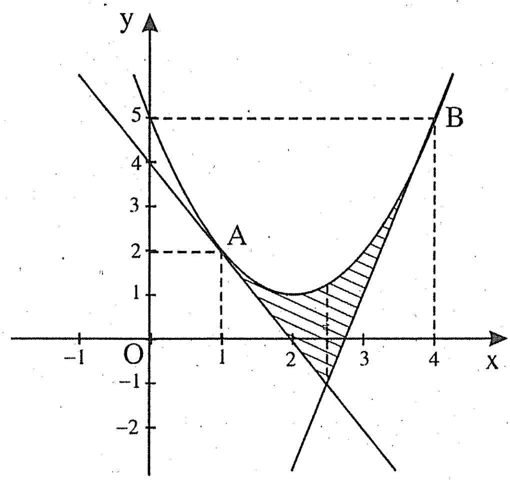
$$= \frac{13}{6} + \frac{27}{2} - \frac{29}{6} + \frac{125}{6} - \frac{27}{2} = \frac{109}{6}.$$

Bài 14. Ta có : y' = 2x – 4 ⇒ y'(1) = –2 ; y'(4) = 4.

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại A là : d : y – 2 = –2(x – 1) ⇔ y = –2x + 4

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại B là : Δ : y – 5 = 4(x – 4) ⇔ y = 4x – 11.

Giao điểm của Δ và d có hoành độ là $x = \dfrac{5}{2}$.



Dựa vào hình vẽ ta có diện tích hình phẳng là :

$$S = \int_1^{\frac{5}{2}}\left(x^2 - 4x + 5 + 2x - 4\right)dx + \int_{\frac{5}{2}}^{4}(x^2 - 4x + 5 - 4x + 11)dx$$

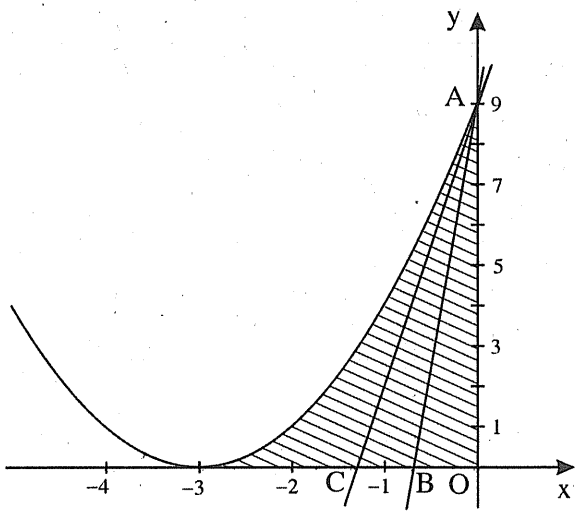
$$= \int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)^2\,dx + \int_{\frac{5}{2}}^{4}(x-4)^2\,dx$$

$$= \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^{\frac{5}{2}} + \left[\frac{(x-4)^3}{3}\right]_{\frac{5}{2}}^{4} = \frac{9}{4}.$$

Bài 15. Gọi B(b ; 0) và C(c ; 0) lần lượt là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 thoả yêu cầu bài toán. (–3 < c < b < 0).

Đường thẳng d_1 qua A và B có phương trình là :

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{9} = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{9}{b}x + 9.$$



Theo giả thiết ta có : $\int_b^0 \left(-\frac{9}{b}x+9\right)dx = \frac{1}{3}\int_{-3}^0 (x+3)^2 dx$

$$\Leftrightarrow \left[-\frac{9x^2}{2b}+9x\right]_b^0 = \frac{1}{3}\left[\frac{(x+3)^3}{3}\right]_{-3}^0 \Leftrightarrow -\frac{9b}{2}=3 \Leftrightarrow b = -\frac{2}{3}.$$

Do đó $d_1 : y = \frac{27}{2}x+9$.

Đường thẳng d_2 qua A và C nên có phương trình $\frac{x}{c}+\frac{y}{9}=1 \Leftrightarrow y=-\frac{9}{c}x+9$

Theo giả thiết ta có : $\int_c^0 \left(-\frac{9}{c}x+9\right)dx = \frac{2}{3}\int_{-3}^0 (x+3)^2 dx$

$$\Leftrightarrow \left[-\frac{9x^2}{2c}+9x\right]_c^0 = \frac{2}{3}\left[\frac{(x+3)^3}{3}\right]_{-3}^0 \Leftrightarrow -\frac{9c}{2}=6 \Leftrightarrow c = -\frac{4}{3}.$$

Do đó $d_2 : y = \frac{27}{4}x+9$.

Bài 16.

1. (C) : $x = y^3$, $y = 1$ và (d) : $x = 8$.

Phương trình tung độ giao điểm của (C) và (d) là $y^3 = 8 \Leftrightarrow y = 2$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_1^2 \left|y^3 - 8\right| dy = \int_1^2 \left(8 - y^3\right) dy = \left[8y - \frac{y^4}{4}\right]\Bigg|_1^2 = \frac{17}{4}.$$

2. (P) : $y^2 = 2x$, (C) : $27y^2 = 8(x-1)^3$.

Toạ độ giao điểm của (C) và (P) thoả hệ :

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ 27y^2 = 8(x-1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x \\ 27.2x = 8(x-1)^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 27x = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 - 15x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(4x^2 + 4x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ hay } x = -\frac{1}{2} \text{ (loại)}$$

Vậy (C) và (P) có hai giao điểm là A(4 ; 2) và B(4 ; –2).

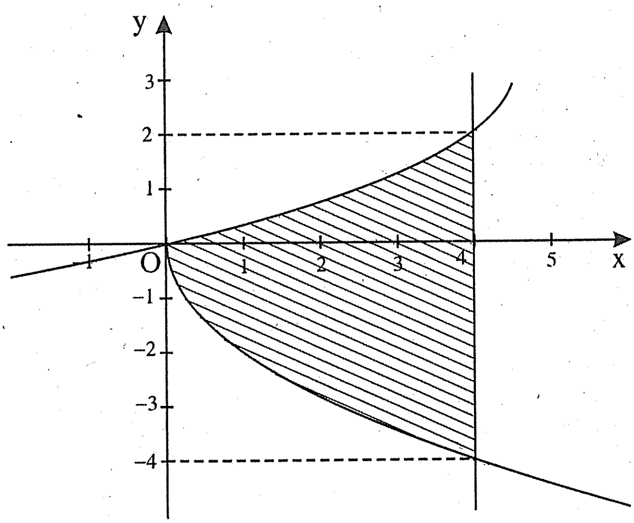
Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-2}^2 \left|x_P - x_C\right| dy = \int_{-2}^2 \left|\frac{y^2}{2} - \left(1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}\right)\right| dy$$

$$= \left|\int_{-2}^2 \left(\frac{y^2}{2} - 1 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}\right) dy\right| = \left|\left[\frac{y^3}{6} - y - \frac{3}{2}.\frac{3}{5}y\sqrt[3]{y^2}\right]\right|_{-2}^2 = \frac{4}{3} + \frac{18\sqrt[3]{4}}{5}.$$

3. $y^2 = 4x$ với $y \le 0$, $2x = -y^2 + 6y$ với $y \le 2$ và $x = 4$.

Ta có hình biểu diễn của hình phẳng như hình sau.



Diện tích hình phẳng là : $S = \int_{-4}^{0}(4-\frac{y^2}{4})dy + \int_{0}^{2}\left(4-\frac{-y^2+6y}{2}\right)dy$

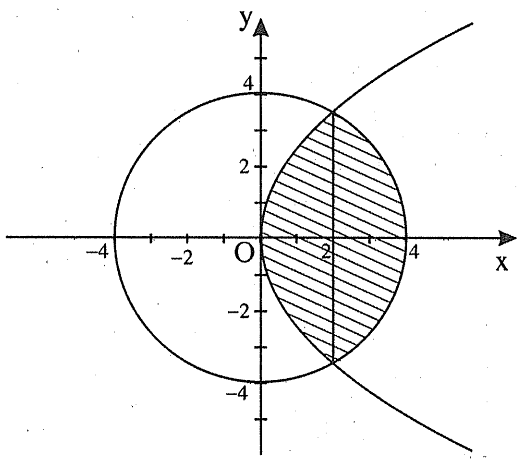
$$= \left[4y-\frac{y^3}{12}\right]_{-4}^{0} + \left[4y+\frac{y^3}{6}-\frac{3y^2}{2}\right]_{0}^{2}$$

$$= 16-\frac{64}{12}+8+\frac{8}{6}-6=14.$$

Bài 17. Phương trình tung độ giao điểm của (P) và (C) là :

$$\left(\frac{y^2}{6}\right)^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow y^4+36y^2-576=0$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 12 \Leftrightarrow y = 2\sqrt{3}.$$



Diện tích của phần có gạch sọc là :

$$S_1 = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{16-y^2}-\frac{y^2}{6}\right)dy = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\sqrt{16-y^2}\,dy - \left[\frac{y^3}{18}\right]_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}$$

Đặt $y = 4\sin t \Rightarrow dy = 4\cos t\,dt$

Đổi cận $y = -2\sqrt{3} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{3}$

$y = 2\sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$

Do đó $S_1 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{16-16\sin^2 t}.4\cos t dt - \frac{8\sqrt{3}}{3} = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 16\cos^2 t dt - \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 8(1+\cos 2t)dt - \frac{8\sqrt{3}}{3} = \left[8t + 4\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{16\pi}{3} + 4\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3}$$

Diện tích phần còn lại :

$$S_2 = S_{\text{hình tròn}} - S_1 = 16\pi - \frac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3} = \frac{32\pi - 4\sqrt{3}}{3}.$$

§2. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

Bài 1. Ta có thiết diện là hình vuông có diện tích là $S(x) = \left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2 = 4(1-x^2)$.

Thể tích của vật thể cần tìm là :

$$V = \int_{-1}^{1} S(x)dx = \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)dx = \left[4\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{3}.$$

Bài 2. Ta có thiết diện là tam giác đều có diện tích là

$$S(x) = \frac{(2\sqrt{\sin x})^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\sin x.$$

Do đó thể tích của vật thể đã cho là :

$$V = \int_0^{\pi} S(x)dx = \int_0^{\pi} \sqrt{3}\sin x dx = \sqrt{3}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2\sqrt{3}.$$

Bài 3. Gọi O là tâm của khối cầu sinh ra khối chỏm cầu. Giới hạn khối chỏm cầu bởi hai mặt phẳng : mặt phẳng (α) chứa đường tròn đáy của chỏm cầu và mặt phẳng β tiếp xúc chỏm cầu tại M và song song với (α).

Chọn trục Ox là trục qua M, trục Ox cắt (α) và (β) tại R – h và h.

Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc trục Ox tại x ($R - h \le x \le h$).

Ta có (P) cắt chỏm cầu theo hình tròn có bán kính $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ nên có diện tích là : $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$

Do đó thể tích khối chỏm cầu là :

$$V = \int_{R-h}^{h} S(x)dx = \pi\int_{R-h}^{h}(R^2 - x^2)dx = \pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{R-h}^{R}$$

$$= \pi\left[R^3 - R^2(R-h) - \frac{R^3}{3} + \frac{(R-h)^3}{3}\right]$$

$$= \pi\left[R^2h - \frac{h\left[R^2 + R(R-h) + (R-h)^2\right]}{3}\right]$$

$$= \frac{\pi h}{3}\left[3R^2 - R^2 - R(R-h) - R^2 + 2Rh - h^2\right]$$

$$= \pi h^2\left[R - \frac{h}{3}\right] \text{ (đpcm).}$$

Khối bán cầu bán kính R được coi là khối chỏm cầu bán kính R, chiều cao h = R. Vì vậy thể tích khối bán cầu bán kính R là :

$$V = \pi R^2\left(R - \frac{R}{3}\right) = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

Do đó thể tích của khối cầu bán kính R là $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.

Bài 4. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và Ox là

$$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = 2.$$

Thể tích khối tròn xoay tạo thành là :

$$V = \pi\int_0^2(2x - x^2)^2dx = \pi\int_0^2\left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right)dx$$

$$= \pi\left[\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \pi\left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5}\right) = \frac{16\pi}{15}.$$

Bài 5. Phương trình tung độ giao điểm của đường $y = \sqrt{x}$ và trục Oy là :

$$y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Thể tích khối tròn xoay tạo thành là :

$$V = \pi\int_0^1 x^2dy = \pi\int_0^1 y^4dy = \pi\left[\frac{y^5}{5}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

Bài 6. Đường thẳng AB qua A và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (3\ ;\ 3) = 3(1\ ;\ 1)$

nên : AB : $1(x + 1) - 1(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = x + 2$.

Thể tích khối tròn xoay nhận được khi quay (H) quanh Ox là :

$$V = \pi\int_{-1}^{2}\left[(x+2)^2 - x^4\right]dx = \pi\left[\frac{(x+2)^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \pi\left[\frac{64-1}{3} - \frac{32+1}{5}\right] = \frac{72\pi}{5}.$$

Bài 7. Phương trình hoành độ giao điểm của đường $y = \sqrt{x} - 1$ và đường $y = 0$ là :

$$\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Thể tích khối tròn xoay tạo thành là :

$$V = \pi\int_1^4\left(\sqrt{x} - 1\right)^2dx = \pi\int_1^4\left(x - 2\sqrt{x} + 1\right)dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - 2.\frac{2x\sqrt{x}}{3} + x\right]\Bigg|_1^4 = \frac{7\pi}{6}.$$

Bài 8.

1. $y = x.e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;

$$V = \pi\int_0^1 x^2.e^{2x}dx$$

Đặt $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$

$v' = e^{2x}$, chọn $v = \dfrac{e^{2x}}{2}$

Suy ra $V = \pi\left(\left[\dfrac{x^2e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 xe^{2x}dx\right) = \pi\left[\dfrac{e^2}{2} - \displaystyle\int_0^1 xe^{2x}dx\right]$

Đặt $u = x \Rightarrow u' = 1$

$$v' = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2}$$

Do đó $V = \pi\left[\frac{e^2}{2} - \left[\frac{xe^{2x}}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}dx\right]$

$$= \pi\left[\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1\right] = \frac{\pi(e^2-1)}{4}.$$

2. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$;

$V = \pi\int_1^e \ln^2 x dx$.

Đặt $u = \ln^2 x \Rightarrow u' = 2\ln x.\frac{1}{x}$

$v' = 1 \Rightarrow v = x$

Suy ra $V = \pi\left(\left[x\ln^2 x\right]_1^e - \int_1^e 2\ln x dx\right)$

Đặt $u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

$v' = 2$, chọn $v = 2x$

Do đó $V = \pi\left(\left[x\ln^2 x\right]_1^e - \left[2x\ln x\right]_1^e + \int_1^e 2dx\right) = \pi(e-2)$

3. $y = \sin^2 x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$.

$V = \pi\int_0^\pi (\sin^2 x)^2 dx = \pi\int_0^\pi \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^\pi \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[3x - 2\sin 2x + \frac{\sin 4x}{4}\right]_0^\pi = \frac{3\pi^2}{8}.$$

4. $y = \sqrt{\sin^6 x + \cos^6 x}$, $y = 0$, $x = 0, x = \dfrac{\pi}{2}$.

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\sin^6 x + \cos^6 x}\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - 3\sin^2 x\cos^2 x)dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right)dx = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4 - \frac{3(1-\cos 4x)}{2}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(5 + 3\cos 4x)dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[5x + \frac{3}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi^2}{16}.$$

Bài 9. Ta có khối tròn xoay do elip đã cho quay quanh Ox tạo nên cũng chính là khối tròn xoay tạo ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay quanh Ox tạo ra :

$$x = -2\ ;\ x = 2\ ;\ y = 0 \text{ và } y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}.$$

Do đó thể tích khối tròn xoay cần tìm là :

$$V = \pi\int_{-2}^{2} y^2 dx = \pi\int_{-2}^{2}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)dx = \pi\left[x - \frac{x^3}{12}\right]_{-2}^{2} = \pi\left[4 - \frac{16}{12}\right] = \frac{8\pi}{3}.$$

Bài 10. Ta có thể tích vật thể cần tìm là :

$$V = \pi\int_1^4 x^2 dy = \pi\int_1^4\left(\frac{4}{y^2}\right)dx = \pi\left[-\frac{4}{y}\right]_1^4$$

$$= \pi(-1 + 4) = 3\pi.$$

Bài 11. Ta có (C) : $(x-2)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 - y^2$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{1 - y^2}\ \ (y \in [-1\ ;\ 1])$$

Ta thấy khối tròn xoay đã cho chính là khối tròn xoay nhận được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường : $y = \pm 1$; $x = 2 \pm \sqrt{1-y^2}$ quanh trục Oy.

Do đó thể tích của khối tròn xoay là :

$$V = \pi\int_{-1}^{1}\left[\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2 - \left(2-\sqrt{1-y^2}\right)^2\right]dy = \pi\int_{-1}^{2} 8\sqrt{1-y^2}\,dy$$

Đặt $y = \sin t \Rightarrow dy = \cos t\,dt$

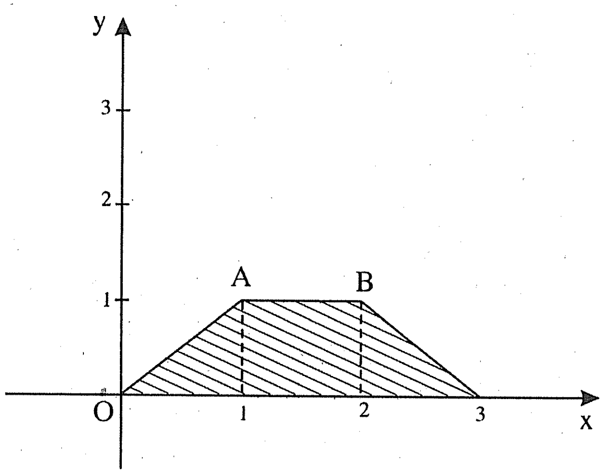
Đổi cận $y = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$; $\quad y = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Do đó } V = \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t\,dt = \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8.\cos^2 t\,dt$$

$$= 4\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = 4\pi\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi^2.$$

Bài 12.

1. Vẽ đồ thị của hàm số f(x) (hình sau)



2. Ta có $I = \int_0^3 f(x)dx$ chính là diện tích của hình phẳng (H) chắn bởi đồ thị hàm số f(x) và trục Ox. Đó chính là diện tích của hình thang OABC.

Do đó $I = \int_0^3 f(x)dx = S_{OABC} = \frac{(1+3).1}{2} = 2$.

3. Tính thể tích của hình tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số f và trục Ox quanh trục Oy.

Ta có : $V = \pi\int_0^1\left(x_{BC}^2 - x_{OA}^2\right)dy = \pi\int_0^1\left[(3-y)^2 - y^2\right]dy$

$= \pi\int_0^1(9-6y)dy = \pi\left[9y-3y^2\right]_0^1 = 6\pi$.

Bài 13. Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là :

$$x^3 - 3x + 2 = \sqrt{2x} + 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x = \sqrt{2x} \ (*)$$

Điều kiện : $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^3 - 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{3}$

Ta có (*) $\Leftrightarrow (x^3-3x)^2 = 2x \Leftrightarrow x^5 - 6x^3 + 9x - 2 = 0$ hay $x = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1) = 0$ hay $x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0 \ (**) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

(vì (**) $\Leftrightarrow (x^2-1)^2 + 2x(x^2-2) + 1 = 0$ vô nghiệm do vế trái > 1 với mọi $x \geq \sqrt{3}$).

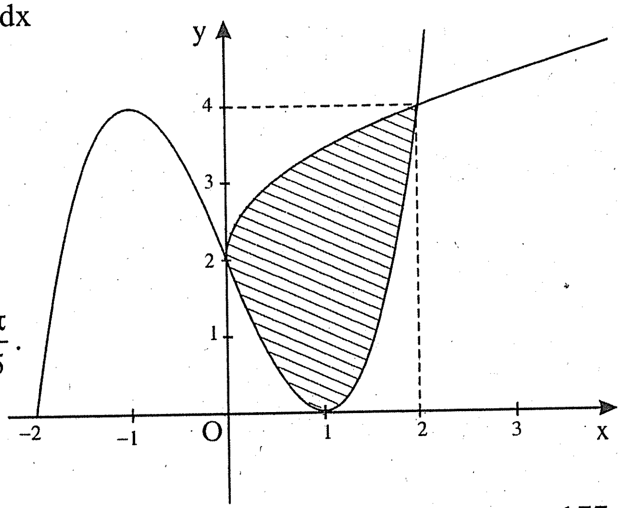
Do đó thể tích vật thể cần tìm là :

$V = \pi\int_0^2\left[\left(\sqrt{2x}\right)^2 - \left(x^3-3x\right)^2\right]dx$

$= \pi\int_0^2\left(2x - x^6 + 6x^4 - 9x^2\right)dx$

$= \pi\left[x^2 - \frac{x^7}{7} + \frac{6x^5}{5} - 3x^3\right]_0^2$

$= \pi\left[4 - \frac{128}{7} + \frac{192}{5} - 24\right] = \frac{4\pi}{35}$.



CHƯƠNG IV
CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP

Bài 1. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

1. $y = 2x^2(1 - x^{-3})$;

2. $y = 8x - \dfrac{2}{x^{\frac{2}{5}}}$;

3. $y = x^{\frac{1}{2}}\sin(x^{\frac{3}{2}} + 1)$;

4. $y = \dfrac{\sin(2x+1)}{\cos^2(2x+1)}$;

5. $y = \dfrac{1}{x^2}\cos(\dfrac{1}{x} - 1)$;

6. $y = x^3(1 + x^4)^3$;

7. $y = \dfrac{xe^{2x}}{3}$;

8. $y = x^2e^x$;

9. $y = \dfrac{\ln^2(x+3)}{x^2 + 6x + 9}$;

10. $y = \cos^4 x\sin^3 x$;

11. $y = \dfrac{4x+5}{x^2 - 2x + 1}$;

12. $y = e^{\sin 3x}\cos 3x$.

Bài 2. Tìm hàm số $y = f(x)$ nếu biết $dy = 12x(3x^2 - 1)^3\,dx$ và $f(1) = 3$.

Bài 3. Xác định số b dương để tích phân $\int_0^b (6x - 3x^2)dx$ có giá trị lớn nhất.

Bài 4. Cho biết $\int_1^9 f(x)dx = -1$, $\int_7^9 f(x)dx = 5$, $\int_7^9 g(x)dx = 4$. Hãy tìm

1. $\int_1^9 -2f(x)dx$;

2. $\int_7^9 [f(x) + g(x)]dx$;

3. $\int_7^9 [2f(x) - 3g(x)]dx$;

4. $\int_1^7 f(x)dx$.

Bài 5. Tính các tích phân sau :

1. $\int_0^2 x^2(1+\sqrt{x^3+1})dx$;

2. $\int_0^3 \frac{x^2+4}{\sqrt{x+1}}dx$;

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos^4 x}dx$;

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$;

5. $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2-16}$;

6. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}$;

7. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

8. $\int_1^{e} \frac{\sin(\pi \ln x)}{x}dx.$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x(3\sin x-\cos x)}$;

10. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{4\sin^2 x+\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$;

11. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$;

12. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$;

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx$ ($a \neq \pm b$ và $a, b \neq 0$) ;

14. $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$;

15. $\int_1^{e} \frac{1+\ln^2 x}{e^{2+\ln x}}dx$

16. $\int_1^{e} (\ln x)^2 dx$;

17. $\int_{-3}^{2} \left|\frac{x-1}{x+4}\right|dx$;

18. $\int_{-1}^{1} (2x-3-|x|)^2 dx$

19. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \left|\frac{4\ln^3 x}{x}\right|dx$;

20. $\int_0^{\ln 4} \left|e^{2x}-e^{x+1}\right|dx.$

Bài 6. Chứng minh các bất đẳng thức :

1. $\int_0^1 \sqrt{3+e^{-x}}dx \le 2$;

2. $\dfrac{3\pi}{4} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3+2\sin^2 x}dx \le \dfrac{\pi\sqrt{15}}{4}$;

3. $\dfrac{1}{4} \le \int_{-1}^{1} \dfrac{dx}{5+3x^3} \le 1$;

4. $24\sqrt{3} \le \int_{-2}^{10} f(x)dx \le 24\sqrt{6}$ với $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{10-x}$.

Bài 7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

1. Đồ thị các hàm số $y = 10 - x^2$, $y = 2 - 2x$;
2. Các đường cong $x = 1 - 2y - 3y^2$, $x = 5 - 2y - y^4$;
3. Đồ thị $y = x^3 - 2x + 2$, tiếp tuyến của nó tại điểm M(2 ; 6) và trục tung ;
4. Parabol $y = -x^2 + 4x - 3$ và các tiếp tuyến của nó tại các điểm A(0 ; –3) và B(3 ; 0).

Bài 8. Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 2$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le 2)$ là một nửa hình tròn có đường kính $8x^2$.

Bài 9. Xét hình phẳng giới hạn bởi đường hypebol $y = \dfrac{2}{x} - 3$ và các đường thẳng $y = -1$, $y = 4$ và $x = 0$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng đó quanh trục tung.

Bài 10. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\cos 2x + 2}$ $\left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ và hai trục toạ độ. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi hình (H) quay quanh trục hoành.

Bài 11. Cho hình phẳng A giới hạn bởi đường cong (C) : $x(y^2 + 1) = 2\sqrt{y}$ và các đường thẳng $x = 0$, $y = 0$, $y = 4$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi A quay quanh trục tung.

Bài 12. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong có phương trình $x - y^2 = 0$ và các đường thẳng $y = 2$, $x = 0$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi (H) quay quanh :

a) trục hoành ;

b) trục tung.

Bài 13. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^{\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi (H) quay quanh trục hoành .

Bài 14. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong có phương trình (C) : $y^2 = 2x^3$ và đường thẳng $x = 2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi (H) quay quanh :

a) trục hoành ;

b) trục tung.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

Bài 1.

1. $\dfrac{2x^3}{3} - 2\ln|x| + C$

2. $4x^2 - \dfrac{10x^{\frac{3}{5}}}{3} + C$

3. Đặt $t = x^{\frac{3}{2}} + 1 \Rightarrow dt = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx \Rightarrow x^{\frac{1}{2}}dx = \dfrac{2}{3}dt$

Ta được $\int x^{\frac{1}{2}}\sin\left(x^{\frac{3}{2}} + 1\right)dx = \dfrac{2}{3}\int \sin t dt$

$$= -\frac{2}{3}\cos t + C = -\frac{2}{3}\cos\left(x^{\frac{3}{2}} + 1\right) + C$$

4. Đặt $t = \cos(2x+1) \Rightarrow dt = -2\sin(2x+1)dx \Rightarrow \sin(2x+1)dx = -\frac{dt}{2}$.

Do đó $\int \frac{\sin(2x+1)dx}{\cos^2(2x+1)} = \int -\frac{dt}{2t^2} = \frac{1}{2t} + C = \frac{1}{2\cos(2x+1)} + C$.

5. Đặt $t = \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2}dx \Rightarrow \frac{1}{x^2}dx = -dt$

Do đó $\int \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}-1\right)dx = \int(-\cos t.dt) = -\sin t + C = -\sin\left(\frac{1}{x}-1\right) + C$

6. Đặt $t = 1 + x^4 \Rightarrow dt = 4x^3dx \Rightarrow x^3dx = \frac{1}{4}dt$

$\Rightarrow \int x^3(1+x^4)^3dx = \frac{1}{4}\int t^3dt = \frac{t^4}{16} + C = \frac{(1+x^4)^4}{16} + C$

7. Đặt $u = x \Rightarrow du = 1dx$

$dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2}$

$\Rightarrow \int \frac{xe^{2x}dx}{3} = \frac{1}{3}\left[x.\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}dx\right] = \frac{xe^{2x}}{6} - \frac{e^{2x}}{12} + C$

8. Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow \int x^2e^2 = x^2e^x - 2\int xe^x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} = \frac{1}{3}\left[x.\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}dx\right] = \frac{xe^{2x}}{6} - \frac{e^{2x}}{12} + C$

$\Rightarrow \int x^2e^2 = x^2e^x - 2\left[xe^x - \int e^x dx\right] = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

9. Đặt $u = \ln^2(x+3) \Rightarrow du = 2\ln(x+3).\frac{1}{x+3}dx$

$dv = \frac{1}{(x+3)^2}dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x+3}$

Do đó $I = -\frac{\ln^2(x+3)}{x+3} + \int \frac{2\ln(x+3)}{(x+3)^2}dx$

Đặt $u = \ln(x+3) \Rightarrow du = \frac{1}{x+3}dx$

$dv = \frac{1}{(x+3)^2}dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x+3}$

Suy ra $I = -\frac{\ln^2(x+3)}{x+3} - \frac{2\ln(x+3)}{x+3} + \int \frac{2}{(x+3)^2}dx$

$= -\frac{\ln^2(x+3)+2\ln(x+3)+2}{x+3} + C$

10. Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

Do đó $I = \int t^4(1-t^2)(-dt) = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$

11. $I = 4\ln|x-1| - \frac{9}{x-1} + C$

12. Đặt $t = \sin 3x \Rightarrow dt = 3\cos 3x dx$.

$I = \int \frac{1}{3}e^t dt = \frac{e^t}{3} + C = \frac{e^{\sin 3x}}{3} + C$

Bài 2. Ta có : $f(x) = \int 12x(3x^2-1)^3 dx$

Đặt $t = 3x^2 - 1 \Rightarrow dt = 6xdx$

Suy ra $f(x) = \int 2t^3 dt = \frac{t^4}{2} + C = \frac{(3x^2-1)^4}{2} + C$

Vì $f(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{(3-1)^4}{2} + C = 3 \Leftrightarrow C = -5$. Vậy $f(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)^4 - 5$.

Bài 3. Ta có : $\int_0^b (6x-3x^2)dx = \left[3x^2 - x^3\right]_0^b = 3b^2 - b^3 = F(b)$.

Ta có $F'(b) = 6b - 3b^2$; $F'(b) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ hay $b = 2$.

Bảng biến thiên

b	0		2		$+\infty$
F'(b)		+	0	–	
F(b)		$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	

Vậy với b = 2 thì F(b) đạt giá trị lớn nhất và max F(b) = 4.

Bài 4.

1. $\int_1^9 -2f(x)dx = -2\int_1^9 f(x)dx = -2(-1) = 2$

2. $\int_7^9 [f(x)+g(x)]dx = \int_7^9 f(x)dx + \int_7^9 g(x)dx = 5+4 = 9$

3. $\int_7^9 [2f(x)-3g(x)]dx = 2\int_7^9 f(x)dx - 3\int_7^9 g(x)dx = 2.5 - 3.4 = -2$

4. $\int_1^7 f(x)dx = \int_1^9 f(x)dx - \int_7^9 f(x)dx = -1-5 = -6$

Bài 5.

1. Đặt $t = \sqrt{x^3+1} \Rightarrow 2tdt = 3x^2dx$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 2 \Rightarrow t = 3$.

Do đó $I = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \int_1^3 t.\frac{2tdt}{3} = \frac{8}{3} + \left[\frac{2t^3}{9}\right]_1^3 = \frac{76}{9}$

2. Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow dx = 2tdt$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 3 \Rightarrow t = 2$.

Do đó $I = \int_1^2 \frac{(t^2-1)^2+4}{t}.2tdt = 2\int_1^2 (t^4-2t^2+9)dt$

$$= 2\left[\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + 5t\right]_1^2 = \frac{196}{15}$$

3. Đặt $\cos^2 x = \tan t \Rightarrow -\sin 2x dx = (1 + \tan^2 t)dt$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Suy ra $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2 t)dt}{1+\tan^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}$.

4. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Do đó $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \left[\ln|t+1|\right]_0^1 = \ln 2$.

5. $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2-16} = \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} \frac{(x+4)-(x-4)}{(x+4)(x-4)} dx = \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4}\right) dx$

$$= \frac{1}{8}\left[\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|\right]_{-2}^{2} = -\frac{1}{8}\ln 9 = -\frac{1}{4}\ln 3.$$

6. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}} = \frac{1}{9}\int_0^{16} \left(\sqrt{x+9} - \sqrt{x}\right) dx$

$$= \frac{1}{9}.\frac{2}{3}.\left[\sqrt{(x+9)^3} - \sqrt{x^3}\right]_0^{16} = \frac{68}{27}.$$

7. Đặt $t = \sqrt{1+\ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + \ln x \Rightarrow 2tdt = \frac{dx}{x}$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = e^3 \Rightarrow t = 2$.

Suy ra $I = \int_1^2 \frac{2tdt}{t} = \int_1^2 2dt = 2.$

8. Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$. Đổi cận : $x = 1 \Rightarrow t = 0$; $x = e \Rightarrow t = 1$.

Do đó $I = \int_0^1 \sin \pi t dt = -\frac{1}{\pi}\left[\cos \pi t\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}.$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x(3\sin x - \cos x)} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 x(3\tan x - 1)}$.

Đặt $t = 3\tan x - 1 \Rightarrow dt = \frac{3}{\cos^2 x}dx$.

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = -1$; $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \sqrt{3} - 1$.

Suy ra $I = \frac{1}{3}\int_{-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\left[\ln|t|\right]_{-1}^{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{3}\ln\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

10. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{4\sin^2 x + \cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$

$$= \left[-\cot x + 3\tan x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

11. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(\frac{\pi}{4} - x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2}dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 2x)dx = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\cos 2x}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right).$$

12. Đặt $t = \sqrt{1 + x^2}$. Đáp số : $-\frac{1}{2}\ln 3(3 - 2\sqrt{2})$.

13. Đặt $t = a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x \Rightarrow dt = 2(a^2 - b^2)\sin x\cos x dx$.

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = b^2$ và $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = a^2$.

Do đó $I = \int_{b^2}^{a^2} \frac{dt}{2(a^2 - b^2)\sqrt{t}} = \frac{1}{a^2 - b^2}\left[\sqrt{t}\right]_{b^2}^{a^2} = \frac{1}{|a|+|b|}$.

14. Đặt $t = \sqrt{e^x + 1} \Rightarrow 2tdt = e^x dx$

Đổi cận $x = \ln 3 \Rightarrow t = 2$; $x = \ln 8 \Rightarrow t = 3$.

Suy ra $I = \int_2^3 \frac{t^2 - 1}{t}.2tdt = \left[\frac{2t^3}{3} - 2t\right]_2^3 = \frac{32}{3}$.

15. Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$;

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 0$; $x = e \Rightarrow t = 1$.

$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{1+t^2}{e^2} dt = \frac{1}{e^2}\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3e^2}$.

16. Đặt $u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = 2\ln x.\frac{1}{x}dx$;

$dv = dx \Rightarrow v = x$

Ta được $I = \left[x\ln^2 x\right]_1^e - \int_1^e 2\ln x dx$

Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$;

$dv = 2dx \Rightarrow v = 2x$.

Suy ra $I = e - \left[2x\ln x\right]_1^e + \int_1^e 2dx = e - 2e + 2e - 2 = e - 2$.

17. $\int_{-3}^{2}\left|\frac{x-1}{x+4}\right|dx = \int_{-3}^{1}\frac{(1-x)dx}{x+4} + \int_1^2 \frac{(x-1)dx}{x+4}$

$= \int_{-3}^{1}\left(-1 + \frac{5}{x+4}\right)dx + \int_1^2\left(1 - \frac{5}{x+4}\right)dx$

$= \left[-x + 5\ln|x+4|\right]_{-3}^{1} + \left[x - 5\ln|x+4|\right]_1^2$

$= -4 + 5\ln 5 + 1 - 5\ln 6 + 5\ln 5 = 5\ln\frac{25}{6} - 3$.

18. $\int_{-1}^{1}(2x-3-|x|)^2dx = \int_{-1}^{0}\left(2x-3+x\right)^2dx + \int_{0}^{1}(2x-3-x)^2dx$

$$= \int_{-1}^{0}(3x-3)^2dx + \int_{0}^{1}(x-3)^2dx$$

$$= \left[\frac{(3x-3)^3}{9}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_{0}^{1} = \frac{82}{3}$$

19. $I = \int_{\frac{1}{e}}^{e}\left|\frac{4\ln^3 x}{x}\right|dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(-\frac{4\ln^3 x}{x}\right)dx + \int_{1}^{e}\frac{4\ln^3 x}{x}dx$.

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$.

Do đó $I = \int_{-1}^{0}-4t^3dt + \int_{0}^{1}4t^3dt = \left[-t^4\right]_{-1}^{0} + \left[t^4\right]_{0}^{1} = 2$.

20. $\int_{0}^{\ln 4}\left|e^{2x}-e^{x+1}\right|dx = \int_{0}^{1}\left(e^{x+1}-e^{2x}\right)dx + \int_{1}^{\ln 4}(e^{2x}-e^{x+1})dx$

$$= \left[e^{x+1}-\frac{e^{2x}}{2}\right]_{0}^{1} + \left[\frac{e^{2x}}{2}-e^{x+1}\right]_{1}^{\ln 4}$$

$$= e^2 - 5e + \frac{17}{2}.$$

Bài 6.

1. Vì $0 \le x \le 1 \Rightarrow -1 \le -x \le 0 \Rightarrow 3 + e^{-x} \le 4 \Rightarrow \sqrt{3+e^{-x}} \le 2$

$\Rightarrow \int_{0}^{1}\sqrt{3+e^{-x}}dx \le 2$.

2. Ta có : $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin x \le 1 \Rightarrow 3 \le \sqrt{3+12\sin^2 x} \le \sqrt{15}$

$$\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}3dx \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3+12\sin^2 x}dx \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{15}dx$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{4} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3+2\sin^2 x}dx \le \frac{\pi\sqrt{15}}{4}.$$

3. Ta có $-1 \le x \le 1 \Rightarrow \frac{1}{8} \le \frac{1}{5+3x^3} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{1}{8}dx \le \int_{-1}^{1} \frac{dx}{5+3x^3} \le \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \le \int_{-1}^{1} \frac{dx}{5+3x^3} \le 1.$$

4. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{10-x}$ trên $[-2 ; 10]$ có

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{10-x}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$; $f(-2) = f(10) = 2\sqrt{3}$ và $f(4) = 2\sqrt{6}$.

Do đó $2\sqrt{3} \le f(x) \le 2\sqrt{6}$, $\forall x \in [-2 ; 10]$.

Suy ra $\int_{-2}^{10} 2\sqrt{3}dx \le \int_{-2}^{10} f(x)dx \le \int_{-2}^{10} 2\sqrt{6}dx \Rightarrow 24\sqrt{3} \le \int_{-2}^{10} f(x)dx \le 24\sqrt{6}$

Bài 7.

1. Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường là

$$10 - x^2 = 2 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng là :

$$S = \int_{-2}^{4} \left|x^2 - 2x - 8\right| dx = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 8x \right]_{-2}^{4} \right| = 36$$

2. Phương trình tung độ giao điểm của hai đường :

$$1 - 2y - 3y^2 = 5 - 2y - y^4 \Leftrightarrow y^4 - 3y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 2.$$

Diện tích cần tìm là :

$$V = \int_{-2}^{2} \left|y^4 - 3y^2 - 4\right| dy = \left| \left[\frac{y^5}{5} - y^3 - 4y \right]_{-2}^{2} \right| = \frac{96}{5}.$$

3. (C) : $y = x^3 - 2x + 2$

Ta có : $y' = 3x^2 - 2 \Rightarrow y'(2) = 10.$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là

$$(d) : y - 6 = 10(x - 2) \Leftrightarrow y = 10x - 14.$$

Diện tích hình phẳng là :

$$S = \int_0^2 \left| x^3 - 2x + 2 - 10x + 14 \right| dx = \int_0^2 \left| x^3 - 12x + 16 \right| dx$$

$$= \int_0^2 (x^3 - 12x + 16)dx = \left[\frac{x^4}{4} - 6x^2 + 16x \right]_0^2 = 12.$$

4. Parabol $y = -x^2 + 4x - 3$ và các tiếp tuyến của nó tại các điểm A(0 ; –3) và B(3 ; 0)

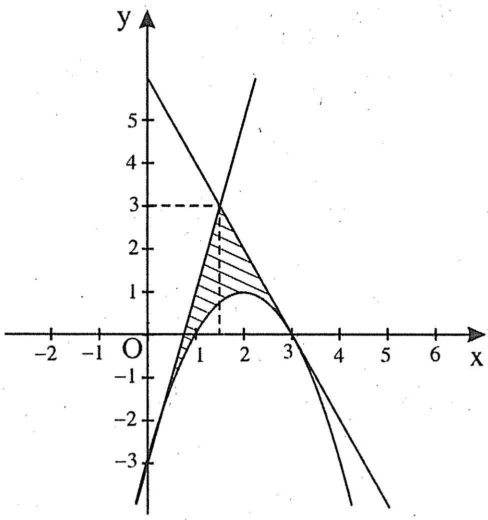
$$y' = -2x + 4 \Rightarrow y'(0) = 4 \ ; \ y'(3) = -2.$$

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại A là d : $y = 4(x - 0) - 3 = 4x - 3$

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại B là Δ : $y = -2(x - 3) = -2x + 6$.

Hoành độ giao điểm của d và Δ là nghiệm của $4x - 3 = -2x + 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Hình biểu diễn như hình vẽ sau.



Diện tích hình phẳng là :

$$S = \int_0^{\frac{3}{2}} (4x - 3 + x^2 - 4x + 3)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{3} \left(-2x + 6 + x^2 - 4x + 3 \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{3}{2}}^{3} (x - 3)^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{(x-3)^3}{3} \right]_{\frac{3}{2}}^{3} = \frac{9}{4}$$

Bài 8. Ta có :

Diện tích thiết diện là $S(x) = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi(4x^2)^2 = 8\pi x^4$.

Do đó thể tích vật thể là : $V = \int_0^2 S(x)dx = \int_0^2 8\pi x^4 dx = \left[\frac{8\pi x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{256\pi}{5}$.

Bài 9. Ta có : $V = \pi\int_{-1}^4 x^2 dy = \pi\int_{-1}^4\left(\frac{2}{y+3}\right)^2 dy$

$$= \pi.\left[\frac{-4}{y+3}\right]_{-1}^4 = \pi\left[-\frac{4}{7}+2\right] = \frac{10\pi}{7}.$$

Bài 10. Ta có thể tích vật thể là :

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x + 2)dx = \pi\left[\frac{\sin 2x}{2} + 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi^2.$$

Bài 11.

Ta có : $(C) : x(y^2+1) = 2\sqrt{y} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{y}}{y^2+1}$.

Do đó thể tích vật thể là : $V = \pi\int_0^4\left(\frac{2\sqrt{y}}{y^2+1}\right)^2 dy = \pi\int_0^4\frac{4ydy}{(y^2+1)^2}$.

Đặt $t = y^2 + 1 \Rightarrow dt = 2ydy$.

Đổi cận : $y = 0 \Rightarrow t = 1$; $y = 4 \Rightarrow t = 17$.

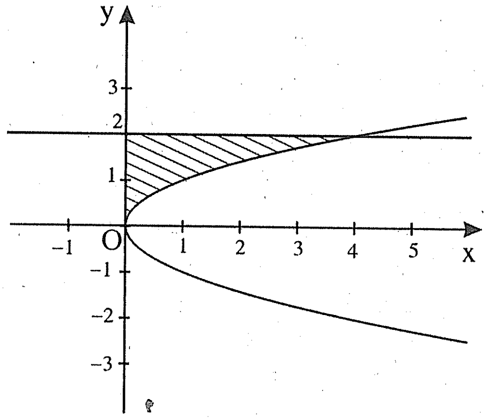
Suy ra $V = \pi\int_1^{17}\frac{2dt}{t^2} = -\pi\left[\frac{2}{t}\right]_1^{17} = \pi\left(-\frac{2}{17}+2\right) = \frac{32\pi}{17}$.

Bài 12.

a) Thể tích vật tròn xoay nhận được khi cho (H) quay quanh Ox là :

$$V_1 = \pi\int_0^4\left(2^2 - x\right)dx = \pi\left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi.$$

Hình biểu diễn của (H) như hình sau.



b) Thể tích vật tròn xoay nhận được khi cho (H) quay quanh Oy là :

$$V_2 = \pi\int_0^2 x^2 dy = \pi\int_0^2 y^4 dy = \pi\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32\pi}{5}.$$

Bài 13. Ta có thể tích vật thể là :

$$V = \pi\int_1^2\left[x^{\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)\right]^2 dx$$

$$= \pi\int_1^2 x\left(e^x + e^{-x} + 2\right)dx$$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = (e^x + e^{-x} + 2)dx \Rightarrow v = e^x - e^{-x} + 2x.$

Suy ra $V = \pi\left(\left[x(e^x - e^{-x} + 2x\right]_1^2 - \int_1^2 (e^x - e^{-x} + 2x)dx\right)$

$$= \pi\left[2(e^2 - e^{-2} + 4) - (e - e^{-1} + 2) - \left[e^x + e^{-x} + x^2\right]_1^2\right]$$

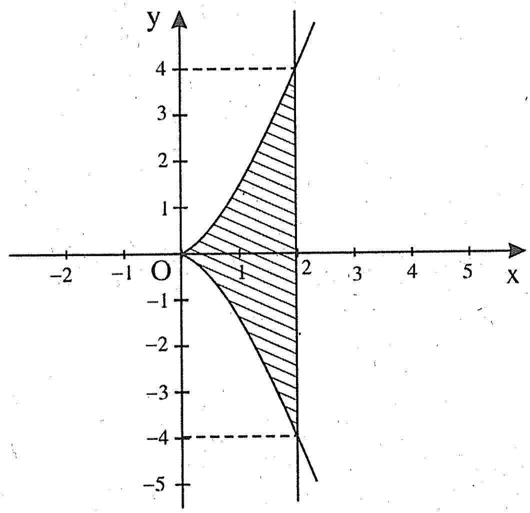
$$= \pi\left[2e^2 - \frac{2}{e} - e + \frac{1}{e} + 6 - e^2 - \frac{1}{e^2} - 4 + e + \frac{1}{e} + 1\right]$$

$$= \pi\left(\frac{e^4 + 3e + 2e - 3}{e^2}\right)$$

Bài 14. a) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox là $2x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Thể tích vật thể nhận được khi cho (H) quay quanh Ox là :

$$V = \pi\int_0^2 y^2dx = \pi\int_0^2 2x^3dx = \pi\left[\frac{x^4}{2}\right]_0^2 = 8\pi.$$



b) Phương trình tung độ giao điểm của (C) và đường thẳng $x = 2$ là

$$y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4.$$

Thể tích vật thể nhận được khi cho (H) quay quanh Oy là :

$$V = \pi\int_{-4}^{4}(4 - x^2)dy = \pi\int_{-4}^{4}\left(4 - \frac{y^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{4}}\right)dy$$

$$= 32\pi - \frac{\pi}{\sqrt[3]{4}}\int_{-4}^{4} y^{\frac{4}{3}}dy$$

$$= 32\pi - \frac{\pi}{\sqrt[3]{4}}\left[\frac{3y^2\sqrt[3]{y}}{7}\right]_{-4}^{4}$$

$$= 32\pi - \frac{96\pi}{7} = \frac{128\pi}{7}.$$

Mục lục

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:
Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN KHÁNH
Phó Giám đốc phụ trách Công ty CP DVXBGD Gia Định TRẦN THỊ KIM NHUNG

Biên tập lần đầu và tái bản: TRẦN THANH HÀ
Biên tập kĩ - mĩ thuật: BÙI NGỌC LAN
Trình bày bìa: NGUYỄN MẠNH HÙNG
Sửa bản in: TRẦN THANH HÀ
Chế bản: CTY CỔ PHẦN MĨ THUẬT SAO MAI

GIẢI TOÁN 12: TÍCH PHÂN, NGUYÊN HÀM

(Dùng cho học sinh lớp chuyên)

Mã số : **TZT38m3 – TTS**
Số đăng kí KHXB : 17 – 2013/CXB/755 – 1972/GD
In 1.500 cuốn, (QĐ : 40 TK), khổ 17 x 24 cm.
Tại trung tâm nghiên cứu và sản xuất Học Liệu
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2013