

MỤC LỤC

CHƯƠNG 3 Vectơ trong không gian. Quan hệ vuông góc		3
1	Vectơ trong không gian. Sự đồng phẳng của các vectơ	3
	A Tóm tắt lí thuyết	3
	B Một số dạng toán	4
	C Bài tập ôn luyện	16
	D Bài tập trắc nghiệm	25
2	Hai đường thẳng vuông góc	32
	A Tóm tắt lí thuyết	32
	B Một số dạng toán	32
	C Bài tập ôn luyện	39
	D Bài tập trắc nghiệm	45
3	Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng	56
	A Tóm tắt lí thuyết	56
	B Phương pháp giải toán	58
	C Bài tập ôn luyện	72
	D Bài tập trắc nghiệm	82
4	Hai mặt phẳng vuông góc	93
	A Tóm tắt lí thuyết	93
	B Một số dạng toán	95
	C Bài tập ôn-luyện	105
	D Bài tập trắc nghiệm	118

5	Khoảng cách	133
A	Tóm tắt lí thuyết	133
B	Một số dạng toán	134
C	Bài tập ôn luyện	144
D	Bài tập trắc nghiệm	153
	Ôn tập chương	166
A	Bộ đề số 1	166
B	Bộ đề số 2	176
C	Bộ đề số 3	188
D	Bộ đề số 4	197
E	Bộ đề số 5	206
F	Bài tập tự luận ôn tập chương	217

CHƯƠNG 3

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

BÀI 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. SỰ ĐỒNG PHẪNG CỦA CÁC VECTƠ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vectơ trong không gian.

- ① Quy tắc ba điểm: Với ba điểm bất kì A, B, C ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- ② Quy tắc hình bình hành: Nếu $OABC$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$.
- ③ Quy tắc phân tích một vectơ thành hiệu của hai vectơ cùng gốc:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \text{ với mọi điểm } O.$$

- ④ I là trung điểm đoạn thẳng AB khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}, \text{ với mọi điểm } O. \quad (i)$$

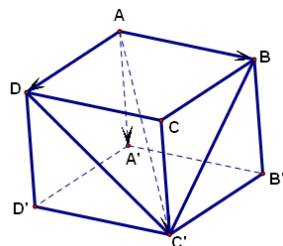
- ⑤ G là trọng tâm tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}, \text{ với mọi điểm } O. \quad (ii)$$

Lưu ý. Khi gặp tổng hai vectơ cùng gốc hoặc tổng ba vectơ cùng gốc ta thường sử dụng (i), (ii).

- ⑥ Quy tắc hình hộp (để cộng ba vectơ khác $\vec{0}$ không đồng phẳng):
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó:
 $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

- ⑦ $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{a} = k\vec{b}$.



2. Sự đồng phẳng của các vectơ. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng.

Định nghĩa 1. Ba vectơ gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Định lý 1 (Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng).

Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Điều kiện cần và đủ để $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là có các số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Hơn nữa, các số m, n là duy nhất.

Chú ý 1. Ba vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ đồng phẳng khi và chỉ khi bốn điểm O, A, B, C đồng phẳng, tức là ba đường thẳng OA, OB, OC cùng nằm trong một mặt phẳng.

Định lý 2 (Biểu thị một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng).

Nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng thì với mỗi vectơ $\vec{d}$, luôn tồn tại các số m, n, p sao cho $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Hơn nữa các số m, n, p là duy nhất.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh các đẳng thức vectơ. Biểu thị một vectơ theo các vectơ không đồng phẳng.

Phương pháp. Dựa vào các quy tắc, tính chất và các hệ thức vectơ thường dùng.

Bài 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{CA'}$, $\overrightarrow{DB'}$, $\overrightarrow{BC'}$, $\overrightarrow{A'D}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.

Lời giải

Ta có

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{b}.$$

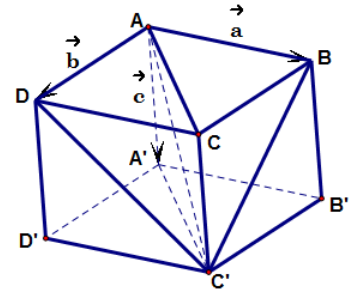
$$\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

$$\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

$$\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

$$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \vec{b} + \vec{c}.$$

$$\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{b} - \vec{c}.$$



Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và O là trung điểm đoạn thẳng AG . Chứng minh rằng:

a) $3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$

b) $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 6\overrightarrow{MO}$ (M là điểm bất kì trong không gian).

Lời giải

a) Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$. Vì O là trung điểm đoạn thẳng AG nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OG} = \vec{0}$. Do đó

$$3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 3(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OG}) = \vec{0}.$$

b) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned} & 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \\ &= 3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD} \\ &= 6\overrightarrow{MO} + 3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 6\overrightarrow{MO}. \end{aligned}$$

Lưu ý. Có thể giải câu b) như sau: Do G là trọng tâm $\triangle BCD$ nên

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG}.$$

Do đó

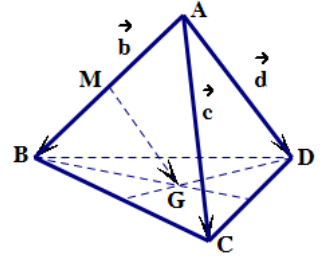
$$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MG} = 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG}) = 6\overrightarrow{MO}.$$

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm AB và G là trọng tâm tam giác BCD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Phân tích $\overrightarrow{MG}$ theo $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MG} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{d} \right] \\ &= -\frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}.\end{aligned}$$



Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$.

a) Chứng minh rằng nếu $ABCD$ là hình bình hành thì

$$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}.$$

Điều ngược lại đúng không?

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng tỏ rằng $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.

Lời giải

a) Ta có sự tương đương:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} &\Leftrightarrow \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SD} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow ABCD \text{ là hình bình hành (do } ABCD \text{ đã là tứ giác rồi).}\end{aligned}$$

Vậy nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$. Chiều ngược lại cũng đúng.

b) Giả sử $ABCD$ là hình bình hành. Khi đó:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} \\ &= \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD} \\ &= 4\overrightarrow{SO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = 4\overrightarrow{SO}.\end{aligned}$$

Giả sử $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD . Khi đó:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} \\ &= 4\overrightarrow{SO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = 4\overrightarrow{SO} + 2(\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}).\end{aligned}$$

Bởi vậy: $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$. Suy ra O là trung điểm IJ . Suy ra $I \in BD$ và $J \in AC$. Do đó $I \equiv J \equiv O$. Vậy hai đường chéo AC và BD có cùng chung trung điểm. Suy ra $ABCD$ là hình bình hành.

Cách khác. Ta có $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} = m\overrightarrow{OB}$. Do đó:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} &= 4\overrightarrow{SO} \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD}) = 4\overrightarrow{SO} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (1+k)\overrightarrow{OA} + (1+m)\overrightarrow{OB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1+k=0 \\ 1+m=0 \end{cases} \quad \left(\text{do } \overrightarrow{OA} \text{ và } \overrightarrow{OB} \text{ không cùng phương} \right)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} O \text{ là trung điểm } AC \\ O \text{ là trung điểm } BD \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow ABCD \text{ là hình bình hành.}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Chứng minh:

- a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \vec{0}$.
- b) Gọi D_1, D_2, D_3 lần lượt là điểm đối xứng của điểm D' qua A, B', C .
Chứng tỏ rằng $\overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{BD_2} + \overrightarrow{BD_3} + \overrightarrow{BD'} = \vec{0}$.

Lời giải

a) Do O là trung điểm ba đoạn thẳng $AC', A'C, BD', B'D$ nên ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC'} &= \vec{0}, \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD'} = \vec{0}, \\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA'} &= \vec{0}, \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB'} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Cộng lại ta được điều phải chứng minh.

b) Đặt:

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}.$$

Khi đó:

$$\overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{BD_2} + \overrightarrow{BD_3} + \overrightarrow{BD'} = (\overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{BD'}) + (\overrightarrow{BD_2} + \overrightarrow{BD_3}).$$

Mà

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{BD'} &= 2\overrightarrow{BA} = -2\vec{b}, \\ \overrightarrow{BD_2} &= \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'D_2} = \vec{a} + (-\vec{c} + \vec{b}), \\ \overrightarrow{BD_3} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD_3} = \vec{c} - \vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

nên ta có:

$$(\overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{BD'}) + (\overrightarrow{BD_2} + \overrightarrow{BD_3}) = -2\vec{b} + \vec{a} + (-\vec{c} + \vec{b}) + \vec{c} - \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}.$$

Dạng 2. Xác định vị trí các điểm thỏa điều kiện vectơ, chứng minh các điểm trùng nhau, các điểm thẳng hàng.

Phương pháp.

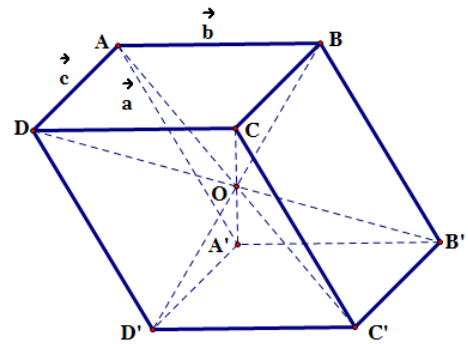
☑ Thường đưa về các hệ thức quen thuộc liên quan đến các điểm như trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác ...

☑ Lưu ý rằng:

- * $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A \equiv B$.
- * Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.
- * Khi gặp tổng hai vectơ cùng gốc ta thường dùng:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

với I là trung điểm AB .



* Khi gặp tổng ba vectơ cùng gốc ta thường dùng:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

với G là trọng tâm tam giác ABC .

Bài 6. Cho tứ diện $ABCD$.

- a) Xác định điểm O thỏa mãn $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
(Điểm O thỏa điều kiện trên gọi là trọng tâm của tứ diện $ABCD$). (1)
- b) Xác định điểm P để $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}|$ có giá trị nhỏ nhất.

🔗 Lời giải

- a) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Gọi I là trung điểm MN . Ta có:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} = 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}).$$

Vậy điểm O thỏa mãn (1) khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OI} = \vec{0} \Leftrightarrow O \equiv I.$$

Do đó O là trung điểm MN .

- b) Gọi O là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Ta có:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} \\ &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD} \\ &= 4\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{PO}. \end{aligned}$$

Do đó điều kiện cần và đủ để $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

$$\overrightarrow{PO} = \vec{0} \Leftrightarrow P \equiv O.$$

Bài 7. Cho tứ diện $ABCD$, M và N là hai điểm lần lượt thuộc AB và CD sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$. Các điểm I, J, K lần lượt thuộc AD, MN, BC sao cho $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{JM} = k\overrightarrow{JN}$, $\overrightarrow{KB} = k\overrightarrow{KC}$ ($k \neq 1$).

- a) Biểu diễn $\overrightarrow{IJ}$ theo $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{DN}$; biểu diễn $\overrightarrow{JK}$ theo $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NC}$.
- b) Chứng minh rằng các điểm I, J, K thẳng hàng.

🔗 Lời giải

a)

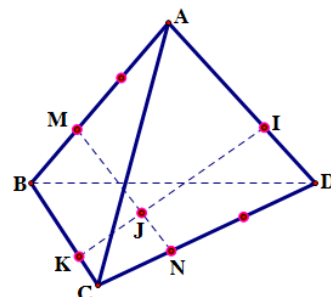
Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MJ} \\ \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NJ} \\ k\overrightarrow{IJ} &= k\overrightarrow{ID} + k\overrightarrow{DN} + k\overrightarrow{NJ} \\ k\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + k\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{MJ} \\ (1-k)\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{DN}. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AM} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{DN}.$$

Chứng minh tương tự như trên ta có: $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{MB} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{NC}$.



- b) Do $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$ nên $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{1-k}\overrightarrow{MB} - \frac{2k}{1-k}\overrightarrow{NC}$.
 Như vậy $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{JK}$, suy ra ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Dạng 3. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng. Chứng minh bốn điểm cùng nằm trong một mặt phẳng, đường thẳng song song với đường thẳng, đường thẳng song song với mặt phẳng.

Phương pháp.

- ☑ Từ định nghĩa 1 suy ra ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu chúng nằm trên ba mặt phẳng đôi một song song hoặc trùng nhau.
- ☑ Bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow$ ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.
- ☑ Từ định lí 1 suy ra nếu $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
- ☑ Để chứng minh $AB \parallel CD$ ta chứng minh $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ và điểm A không nằm trên đường thẳng CD .
- ☑ Để chứng minh $MN \parallel (ABC)$ ta chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ đồng phẳng và M (hoặc N) không thuộc (ABC) .

Bài 8. Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD lấy điểm M và trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$.

Theo giả thiết ta có:

$$\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{NC}. \text{ Vậy:}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= -3\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{NC} \\ &= \overrightarrow{AB} - 3(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD}) + 3\overrightarrow{NC} \\ &= \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DC} + 3(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CM}) \\ &= \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DC} + 3\overrightarrow{NM}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } 4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}.$$

Do đó ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

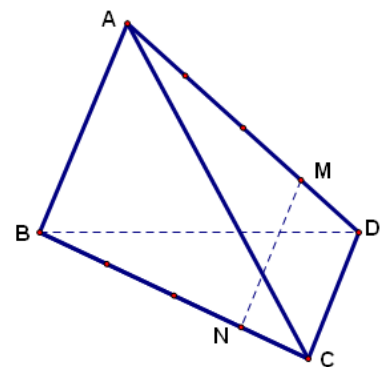
Lưu ý. Ta có cách làm ngắn gọn hơn như sau: Trên cạnh AC lấy điểm K sao cho $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KC}$. Khi đó:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.$$

Suy ra $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Bài 9. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Hãy chứng tỏ ba vectơ $\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{CB'}$ không đồng phẳng và biểu thị vectơ $\overrightarrow{AA'}$ theo ba vectơ đó.

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{y}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{z}$. Ta sẽ biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{CB'}$ theo $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$. Ta có:

$$\overrightarrow{AC'} = \vec{x} + \vec{z}. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{BA'} = \vec{x} - \vec{y}. \quad (2)$$

$$\overrightarrow{CB'} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}. \quad (3)$$

Giả sử phản chứng rằng ba vectơ $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{CB'}$ đồng phẳng. Khi đó do $\overrightarrow{BA'}$ và $\overrightarrow{CB'}$ không cùng phương nên tồn tại các số α, β sao cho:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC'} &= \alpha \overrightarrow{BA'} + \beta \overrightarrow{CB'} \\ \Leftrightarrow \vec{x} + \vec{z} &= \alpha (\vec{x} - \vec{y}) + \beta (\vec{x} + \vec{y} - \vec{z}) \\ \Leftrightarrow (\alpha + \beta - 1) \vec{x} + (-\alpha + \beta) \vec{y} + (-\beta - 1) \vec{z} &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Do $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ không đồng phẳng nên từ (4) ta phải có:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 1 = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ -\beta - 1 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Để thấy hệ (5) vô nghiệm. Vậy ba vectơ $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{CB'}$ không đồng phẳng. Từ (1), (2), (3) ta có:

$$\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} = 3\vec{x} = 3\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'}).$$

Lưu ý. Khi gặp hình lăng trụ tam giác, ta thường chọn một bộ ba vectơ có chung điểm đầu và không đồng phẳng (trong lời giải bài tập 9 là $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) làm cơ sở và biểu diễn các vectơ liên quan theo ba vectơ đó.

Bài 10. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I, J lần lượt là trung điểm AB, CD . Xét P là một điểm thuộc AC , N là một điểm thuộc BD sao cho $\frac{PA}{PC} = \frac{NB}{ND}$. Chứng minh rằng:

a) $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

b) Bốn điểm I, J, P, N thuộc cùng một mặt phẳng.

✍️ Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$. Do đó:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) + 2\overrightarrow{IJ} + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}) \\ &= 2\overrightarrow{IJ}. \end{aligned}$$

b) Giả sử $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BD} = h\overrightarrow{BN}$. Khi đó:

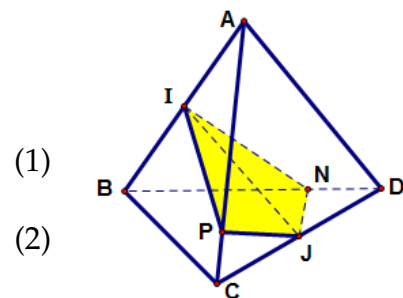
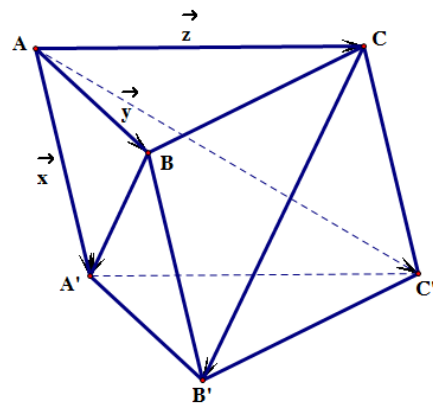
$$k = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AP}} = \frac{\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{AP}} = 1 + \frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{AP}} = 1 - \frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{PA}}.$$

$$h = \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BN}} = \frac{\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{ND}}{\overrightarrow{BN}} = 1 + \frac{\overrightarrow{ND}}{\overrightarrow{BN}} = 1 - \frac{\overrightarrow{ND}}{\overrightarrow{NB}}.$$

Từ giả thiết $\frac{PA}{PC} = \frac{NB}{ND}$ và từ (1), (2) suy ra $h = k$.

Theo câu a) ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IJ} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{k}{2} (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BN}) = \frac{k}{2} (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IN}) \\ &= \frac{k}{2} [(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IN}] = \frac{k}{2} (\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IN}). \end{aligned}$$



Từ $\vec{IJ} = \frac{k}{2} (\vec{IP} + \vec{IN})$, suy ra ba vectơ $\vec{IJ}$, $\vec{IP}$, $\vec{IN}$ đồng phẳng, suy ra bốn điểm I, J, P, N đồng phẳng.

Bài 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử điểm M thuộc AC , điểm N thuộc DC' và $\vec{AM} = x\vec{AC}$, $\vec{DN} = y\vec{DC'}$.

a) Biểu diễn các vectơ $\vec{BD'}$, $\vec{MN}$ theo $\vec{BA} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{BB'} = \vec{c}$.

b) Tìm x và y sao cho $MN \parallel BD'$, khi đó tính tỉ số $\frac{MN}{BD'}$.

🔗 Lời giải

a) Ta có $\vec{BA} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{BB'} = \vec{c}$. Khi đó theo quy tắc hình hộp ta có:

$$\vec{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

$$\text{Ta có } \vec{MN} = \vec{BN} - \vec{BM}.$$

Từ $\vec{DN} = y\vec{DC'}$ ta có

$$\vec{BN} - \vec{BD} = y(\vec{BC'} - \vec{BD}), \text{ suy ra}$$

$$\vec{BN} - (\vec{a} + \vec{b}) = y(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a} - \vec{b}).$$

$$\vec{BN} = (1 - y)\vec{a} + \vec{b} + y\vec{c}.$$

$$\text{Từ } \vec{AM} = x\vec{AC} \text{ suy ra } \vec{BM} - \vec{BA} = x(\vec{BC} - \vec{BA}). \text{ Vậy}$$

$$\vec{BM} - \vec{a} = x(\vec{b} - \vec{a}) \Rightarrow \vec{BM} = (1 - x)\vec{a} + x\vec{b}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \vec{MN} &= \vec{BN} - \vec{BM} = (1 - y)\vec{a} + \vec{b} + y\vec{c} - (1 - x)\vec{a} - x\vec{b} \\ &= (x - y)\vec{a} + (1 - x)\vec{b} + y\vec{c}. \end{aligned}$$

b) Điều kiện để $MN \parallel BD'$ là $\vec{MN} = k\vec{BD'}$ hay

$$k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (x - y)\vec{a} + (1 - x)\vec{b} + y\vec{c}. \quad (*)$$

Do $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không cùng phương nên từ (*) suy ra

$$\begin{cases} k = x - y \\ k = 1 - x \\ k = y \end{cases} \Leftrightarrow (x; y; k) = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

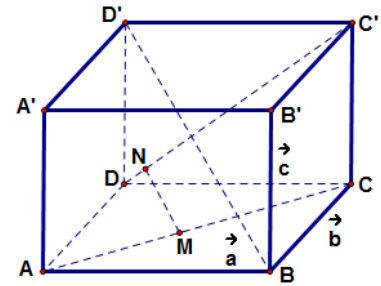
Vậy M và N được xác định bởi $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AC}$, $\vec{DN} = \frac{1}{3}\vec{DC'}$. Lúc này

$$\vec{MN} = \frac{1}{3}\vec{BD'} \Rightarrow \frac{MN}{BD'} = |k| = \frac{1}{3}.$$

Bài 12. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AB' và $A'B$. Đặt $\vec{AA'} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$.

a) Hãy tính các vectơ $\vec{GI}$, $\vec{CG'}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng GI và CG' song song với nhau.



✍️ **Lời giải**

a) Gọi M là trung điểm BC . Khi đó:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{3} (\vec{b} + \vec{c}).\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}).$$

$$\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{3} (\vec{b} + \vec{c}).$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{GI} = \frac{3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{6}.$$

(1)

Ta có

$$\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'})$$

$$= \frac{1}{3} (\vec{a} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{a}) = \vec{a} + \frac{1}{3} (\vec{b} + \vec{c}).$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{CG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3} (\vec{b} + \vec{c}) - \vec{c} = \frac{3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{3}. \quad (2)$$

b) Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{CG'} = 2\overrightarrow{GI}$. Ngoài ra điểm G không thuộc đường thẳng CG' . Vậy GI và CG' là hai đường thẳng song song.

Bài 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và DD' . Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của các tứ diện $A'D'MN$ và $BCC'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.

a) Hãy tính $\overrightarrow{GG'}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng GG' và mp($ABB'A'$) song song với nhau.

✍️ **Lời giải**

a) Vì G' là trọng tâm của tứ diện $BCC'D'$ nên

$$\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'})$$

và G là trọng tâm của tứ diện $A'D'MN$ nên

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}). \text{ Từ đó}$$

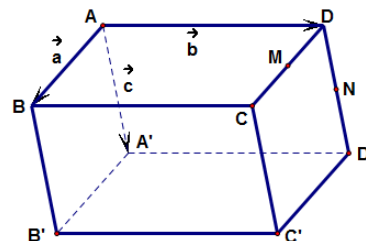
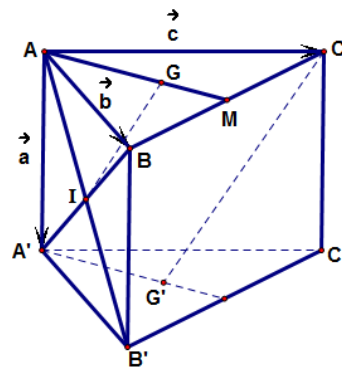
$$\begin{aligned}\overrightarrow{GG'} &= \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{D'C} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{ND'}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\vec{a} - \vec{c} + \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{c} \right) = \frac{1}{8} (5\vec{a} - \vec{c}).\end{aligned}$$

b) Theo câu a) ta có: $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{8} (5\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'})$. Điều này chứng tỏ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{GG'}$ đồng phẳng. Mặt khác G không thuộc mặt phẳng ($ABB'A'$) nên đường thẳng GG' và mặt phẳng ($ABB'A'$) song song với nhau.

Bài 14. Trong không gian cho tam giác ABC .

a) Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc (ABC) thì có ba số x, y, z mà $x + y + z = 1$ sao cho

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}, \text{ với mọi điểm } O.$$



b) Ngược lại, nếu có một điểm O trong không gian sao cho

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC},$$

trong đó $x + y + z = 1$ thì điểm M thuộc mặt phẳng (ABC) .

Lời giải

a) Vì M thuộc mặt phẳng (ABC) nên ba vectơ $\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ đồng phẳng. Do đó tồn tại các số x, y sao cho:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} &= x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = x(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + y(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} &= x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + (1 - x - y)\overrightarrow{OC}.\end{aligned}$$

Đặt $z = 1 - x - y$ khi đó $x + y + z = 1$ và ta có điều phải chứng minh.

b) Giả sử $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, trong đó $x + y + z = 1$. Khi đó:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + (1 - x - y)\overrightarrow{OC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} &= x(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + y(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} &= x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}.\end{aligned}\quad (*)$$

Vì $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ không cùng phương nên từ (*) suy ra $\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ đồng phẳng, do đó M thuộc mặt phẳng (ABC) .

Lưu ý.

- ☒ Kết quả bài tập 14 rất quan trọng, dùng nó ta sẽ giải được nhiều bài tập khác, chẳng hạn như 15, 30, 31, 32.
- ☒ Đối với câu a), khi M thuộc mặt phẳng (ABC) thì sẽ có rất nhiều lựa chọn những bộ ba vectơ đồng phẳng để suy ra điều cần chứng minh, chẳng hạn như:

$$\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}; \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM}; \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AB}...$$

Nhưng dễ thấy rằng tốt nhất nên chọn những bộ 3 vectơ đồng phẳng trong đó điểm M chỉ xuất hiện 1 lần và vectơ có chứa điểm M mang hệ số 1 như đã trình bày ở lời giải câu a).

Bài 15. Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (P) cắt các tia SA, SB, SC, SG (G là trọng tâm $\triangle ABC$) lần lượt tại A', B', C', G' . Chứng minh rằng

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3 \frac{SG}{SG'}.$$

Lời giải

Đặt $\frac{SA}{SA'} = a, \frac{SB}{SB'} = b, \frac{SC}{SC'} = c, \frac{SG}{SG'} = d$. Ta phải chứng minh $a + b + c = 3d$. Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SG} \Leftrightarrow a\overrightarrow{SA'} + b\overrightarrow{SB'} + c\overrightarrow{SC'} = 3d\overrightarrow{SG'}.\quad (1)$$

Vì A', B', C', G' cùng thuộc mặt phẳng (P) nên theo bài tập 14a) ở trang 11 suy ra có các số m, n, p mà $m + n + p = 1$ sao cho

$$\overrightarrow{SG'} = m\overrightarrow{SA'} + n\overrightarrow{SB'} + p\overrightarrow{SC'}.\quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$a\overrightarrow{SA'} + b\overrightarrow{SB'} + c\overrightarrow{SC'} = 3dm\overrightarrow{SA'} + 3dn\overrightarrow{SB'} + 3dp\overrightarrow{SC'}. \quad (3)$$

Tóm lại ta đã có $\overrightarrow{SA'}$, $\overrightarrow{SB'}$, $\overrightarrow{SC'}$ không đồng phẳng và

$$\begin{aligned} 3d\overrightarrow{SG'} &= a\overrightarrow{SA'} + b\overrightarrow{SB'} + c\overrightarrow{SC'} \\ 3d\overrightarrow{SG'} &= 3dm\overrightarrow{SA'} + 3dn\overrightarrow{SB'} + 3dp\overrightarrow{SC'}. \end{aligned}$$

Vậy theo định lí 2 ở trang 3, suy ra

$$a = 3dm, b = 3dn, c = 3dp \Rightarrow a + b + c = 3d(m + n + p) = 3d \text{ (đpcm)}.$$

Dạng 4. Dùng vector để chứng minh đẳng thức về độ dài.

Phương pháp. Sử dụng công thức: $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$.

Bài 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Chứng minh

$$SA^2 + SC^2 = SB^2 + SD^2.$$

Lời giải

Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$. Ta có

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}| &= |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OD}| \\ SA^2 &= (\overrightarrow{SA})^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA})^2 = SO^2 + OA^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OA} \\ SB^2 &= (\overrightarrow{SB})^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OB})^2 = SO^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OB} \\ SC^2 &= (\overrightarrow{SC})^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC})^2 = SO^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OC} \\ SD^2 &= (\overrightarrow{SD})^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD})^2 = SO^2 + OD^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OD} \\ SA^2 + SC^2 - SB^2 - SD^2 &= 2\overrightarrow{SO} (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}). \end{aligned} \quad (1)$$

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$, bởi vậy

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}.$$

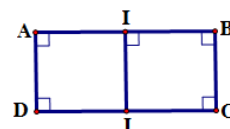
Do đó từ (1) ta có

$$SA^2 + SC^2 - SB^2 - SD^2 = 0 \Leftrightarrow SA^2 + SC^2 = SB^2 + SD^2.$$

Cách khác. Gọi I, J là trung điểm AB, CD .

Ta có sự tương đương sau:

$$\begin{aligned} SA^2 + SC^2 &= SB^2 + SD^2 \\ \Leftrightarrow SA^2 - SB^2 &= SD^2 - SC^2 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{SA}^2 - \overrightarrow{SB}^2 &= \overrightarrow{SD}^2 - \overrightarrow{SC}^2 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB})(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}) &= (\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SC})(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SC}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot 2\overrightarrow{SI} &= \overrightarrow{CD} \cdot 2\overrightarrow{SJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{SI} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{SJ} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{SI} &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{SJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{SI} - \overrightarrow{SJ}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{JI} = \vec{0} \text{ (đúng)}. \end{aligned}$$



Bài 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD . Gọi G là trung điểm của EF .

a) Chứng minh $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm M trong không gian, ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}.$$

c) Chứng minh rằng với mọi điểm M trong không gian ta có "công thức Lep-nhit" sau:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2.$$

d) Xác định vị trí của điểm M để đại lượng $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GF}$. Vậy

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}) = 2\vec{0} = \vec{0}.$$

b) Với mọi điểm M trong không gian, ta có:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \\ &= \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD} \\ &= 4\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} \\ &= 4\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{MG}. \end{aligned}$$

c) Theo công thức bình phương vô hướng $(\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2$ ta có:

$$\begin{aligned} & MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \\ &= (\overrightarrow{MA})^2 + (\overrightarrow{MB})^2 + (\overrightarrow{MC})^2 + (\overrightarrow{MD})^2 \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD})^2 \\ &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) \\ &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \vec{0} \text{ (theo câu a)} \\ &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2. \end{aligned}$$

d) Theo câu c) ta có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2.$$

Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ bé nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất, tức là $MG = 0 \Leftrightarrow M \equiv G$. Vậy $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ nhỏ nhất là bằng $GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$, đạt được khi và chỉ khi M trùng với G .

Bài 18. Chứng minh rằng diện tích S của tam giác ABC có thể tính theo công thức:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}.$$

Lời giải

Gọi α là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Ta có:

$$\begin{aligned} AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2 &= AB^2 \cdot AC^2 - (|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \alpha)^2 \\ &= AB^2 \cdot AC^2 (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= AB^2 \cdot AC^2 \sin^2 \alpha = 4 \left(\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \alpha \right)^2 = 4S. \end{aligned}$$

Suy ra $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$.

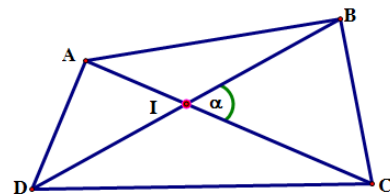
Bài 19. Chứng minh rằng diện tích của tứ giác lồi $ABCD$ là:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 \cdot BD^2 - (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD})^2}.$$

Lời giải

Gọi α là góc giữa hai đường chéo AC và BD . Khi đó:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sqrt{AC^2 \cdot BD^2 - (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 \cdot BD^2 - [AC \cdot BD \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})]^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 \cdot BD^2 [1 - \cos^2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})]} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 \cdot BD^2 \sin^2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 \cdot BD^2 \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$



(1)

Mặt khác:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{IAD} + S_{IBC} + S_{IAB} + S_{ICD} \\ &= \frac{1}{2} [IA \cdot ID + IB \cdot IC + IA \cdot IB + ID \cdot IC] \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} [IA(ID + IB) + IC(IB + ID)] \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} [IA \cdot BD + IC \cdot BD] \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} BD(IA + IC) \sin \alpha = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

(2)

Từ (1) và (2) suy ra: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 \cdot BD^2 - (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD})^2}$.

Bài 20. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi N là điểm thuộc cạnh CD (N khác C, D) sao cho $NA = NB$. Chứng minh rằng:

$$\frac{NC}{ND} = \frac{|CA^2 - CB^2|}{|DA^2 - DB^2|}.$$

Lời giải

Ta có:

$$CA^2 - CB^2 = (\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NC})^2 - (\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC})^2$$

$$\begin{aligned}
 &= NA^2 - 2\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NC} + NC^2 - (NB^2 - 2\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{NC} + NC^2) \\
 &= 2\overrightarrow{NC} (\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NA}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{NC}.
 \end{aligned}$$

Tương tự, ta có:

$$\begin{aligned}
 DA^2 - DB^2 &= (\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{ND})^2 - (\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{ND})^2 \\
 &= NA^2 - 2\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{ND} + ND^2 - (NB^2 - 2\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{ND} + ND^2) \\
 &= 2\overrightarrow{ND} (\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NA}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ND}.
 \end{aligned}$$

Mặt khác, do N, C, D thẳng hàng nên:

$$NC \cdot ND = NC \cdot ND \Rightarrow ND \cdot \overrightarrow{NC} = -NC \cdot \overrightarrow{ND} \Rightarrow \overrightarrow{NC} = -\frac{NC}{ND} \cdot \overrightarrow{ND}.$$

Từ đó:

$$CA^2 - CB^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{NC} = -2 \cdot \frac{NC}{ND} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ND} = -\frac{NC}{ND} (DA^2 - DB^2).$$

Suy ra:

$$\frac{CA^2 - CB^2}{DA^2 - DB^2} = -\frac{NC}{ND} \Rightarrow \frac{NC}{ND} = \frac{|CA^2 - CB^2|}{|DA^2 - DB^2|}.$$

Cách khác. Ta có:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{CA^2 - CB^2}{DA^2 - DB^2} \right| &= \left| \frac{\overrightarrow{CA}^2 - \overrightarrow{CB}^2}{\overrightarrow{DA}^2 - \overrightarrow{DB}^2} \right| = \left| \frac{(\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NA})^2 - (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NB})^2}{(\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NA})^2 - (\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NB})^2} \right| \\
 &= \left| \frac{CN^2 + 2\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{NA} + NA^2 - (CN^2 + 2\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{NB} + NB^2)}{DN^2 + 2\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{NA} + NA^2 - (DN^2 + 2\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{NB} + NB^2)} \right| \\
 &= \left| \frac{2\overrightarrow{CN} (\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB})}{2\overrightarrow{DN} (\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB})} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{BA}} \right| = \left| \frac{CN \cdot BA \cdot \cos(\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{BA})}{DN \cdot BA \cdot \cos(\overrightarrow{DN}, \overrightarrow{BA})} \right|.
 \end{aligned}$$

Vì N, C, D cùng nằm trên một đường thẳng nên:

$$|\cos(\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{BA})| = |\cos(\overrightarrow{DN}, \overrightarrow{BA})|.$$

Vậy từ (*) suy ra: $\left| \frac{CA^2 - CB^2}{DA^2 - DB^2} \right| = \frac{CN}{DN}.$

Lưu ý. Sẽ là sai lầm nếu biến đổi $\left| \frac{\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{BA}} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{DN}} \right| = \frac{CN}{DN},$ vì không có phép chia vectơ.

C. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1. Đề bài

Bài 21. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có đồng phẳng hay không nếu một trong hai điều sau đây xảy ra?

a) Có một trong ba vectơ đó bằng $\vec{0}$.

b) Có hai trong ba vectơ đó cùng phương.

Bài 22. Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Bài 23. Cho tứ diện $ABCD$.

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm G sao cho

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Hãy xác định vị trí điểm G đó.

b) Chứng minh rằng ba đoạn thẳng nối trung điểm của các cặp cạnh đối diện của tứ diện đồng quy tại một điểm.

Bài 24. Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng. Chứng minh rằng các đường phân giác của góc $\widehat{zOx}, \widehat{zOy}$ và đường phân giác của góc kề bù với góc $\widehat{xOy}$ đồng phẳng.

Bài 25. Cho hai tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tứ diện đó. Chứng minh rằng:

$$GG' \leq \frac{1}{4} (AA' + BB' + CC' + DD').$$

Bài 26. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

a) Hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{AG'}$ theo các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

b) Gọi G, I lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ACC' . Chứng minh $(GG'I) \parallel (BB'C'C)$.

Bài 27. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}.$$

Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm $AD, BB', C'D'$.

a) Chứng minh $(BDA') \parallel (B'D'C)$.

b) Chứng minh: $2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{AC'}, 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB'}$.

Biểu diễn $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$ theo ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

c) Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{C'D}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}$ đồng phẳng, từ đó suy ra rằng $C'D \parallel (MNP)$.

Bài 28. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Điểm M chia đoạn AD theo tỉ số $-\frac{1}{4}$, điểm N chia đoạn $A'C$ theo tỉ số $-\frac{2}{3}$ (Điểm E gọi là chia đoạn PQ theo tỉ số $k \neq -1$ nếu $\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OP} - k\overrightarrow{OQ}}{1 - k}$, với mọi điểm O). Đặt

$$\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BB'} = \vec{b}, \overrightarrow{BC} = \vec{c}.$$

a) Hãy tính $\overrightarrow{MN}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

b) Chứng minh rằng $MN \parallel (BC'D)$.

Bài 29. Cho tứ diện $ABCD$. Kí hiệu M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Trên các đường thẳng CM và BN ta chọn các điểm tương ứng I và K sao cho $IK \parallel AD$. Đặt $\overrightarrow{IK} = x\overrightarrow{AD}$. Tìm giá trị của x .

Bài 30. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi B', D' là trung điểm các cạnh SB, SD . Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C' .

- Trình bày cách dựng điểm C' .
- Chứng minh rằng $SC = 3SC'$.

Bài 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K là trung điểm cạnh SC . Mặt phẳng qua AK cắt tia SB, SD lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng $\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3$.

Bài 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) cắt các tia SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại K, L, M, N . Chứng minh rằng: $\frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = \frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN}$.

Bài 33. Cho tứ diện $S.ABC$ và các điểm M, N, P lần lượt thay đổi trên các tia SA, SB, SC sao cho $\frac{SA}{SM} + 2\frac{SB}{SN} + 3\frac{SC}{SP} = 10$. Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 34. Cho tứ diện gần đều $ABCD$ ($AB = CD, BC = AD, AC = BD$). Gọi G là trọng tâm của tứ diện ($\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$).

- Chứng minh rằng G cách đều 4 đỉnh A, B, C, D .
- Tìm M sao cho $MA + MB + MC + MD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 35. Chứng minh rằng với sáu số thực a, b, c, x, y, z tùy ý ta có:

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z).$$

2. Lời giải, hướng dẫn

Câu 21.

- Nếu trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có một vectơ bằng $\vec{0}$, chẳng hạn $\vec{a} = \vec{0}$ thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng vì đẳng thức sau luôn đúng

$$1.\vec{a} + 0.\vec{b} + 0.\vec{c} = \vec{0}.$$

Cách khác. Từ điểm O tùy ý, vẽ $\vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}, \vec{OA} = \vec{a}$. Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ thì A trùng với O . Như vậy các điểm O, A, B, C cùng thuộc một mặt phẳng, tức là ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

- Nếu hai trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng phương, chẳng hạn $\vec{b}$ và $\vec{c}$ thì $\vec{b} = k\vec{c}$ (xét $\vec{c} \neq \vec{0}$ vì nếu $\vec{c} = \vec{0}$ thì theo câu a), ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng). Khi đó ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng vì đẳng thức sau luôn đúng

$$0.\vec{a} + 1.\vec{b} - k\vec{c} = \vec{0}.$$

Cách khác. Nếu $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là hai vectơ cùng phương, từ điểm O tùy ý, vẽ $\vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}, \vec{OA} = \vec{a}$ thì hai đường thẳng OB và OC trùng nhau. Khi đó các điểm O, A, B, C cùng thuộc một mặt phẳng, tức là ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 22. Ta có $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Câu 23.

a) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD . Gọi G là trung điểm của EF . Khi đó

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}) = 2\vec{0} = \vec{0}.$$

Giả sử $\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} + \overrightarrow{G'D} = \vec{0}$. Khi đó

$$2(\overrightarrow{G'E} + \overrightarrow{G'F}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{G'E} + \overrightarrow{G'F} = \vec{0}.$$

Vậy G' là trung điểm EF , suy ra G' trùng với G . Vậy tồn tại duy nhất điểm G sao cho

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Điểm G chính là trung điểm của EF .

b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BC và AD . Gọi I là trung điểm của PQ . Khi đó

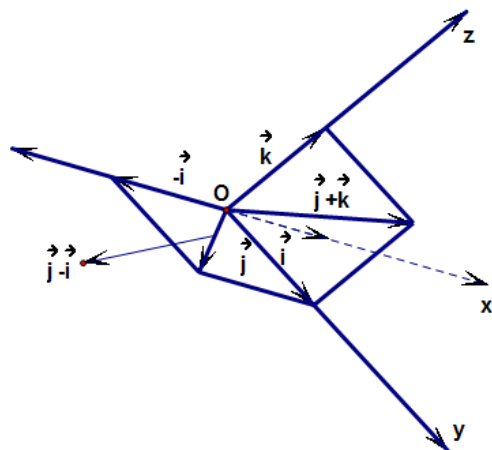
$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}) + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = 2(\overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IP}) = 2\vec{0} = \vec{0}.$$

Suy ra I trùng với G . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD . Gọi J là trung điểm của MN . Tương tự như trên ta chứng minh được J trùng với G . Vậy ba đoạn thẳng nối trung điểm của các cặp cạnh đối diện của tứ diện đồng quy tại một điểm.

Chú ý 2. Điểm G duy nhất thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ gọi là trọng tâm của tứ diện.

Câu 24.

Trên các tia Ox, Oy, Oz lần lượt xét các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ có độ dài bằng 1 và lần lượt cùng hướng với các tia Ox, Oy, Oz . Khi đó tia phân giác Oa của góc $\widehat{zOy}$ cùng hướng với $\vec{\alpha} = \vec{j} + \vec{k}$, tia phân giác Ob của góc $\widehat{zOx}$ cùng hướng với $\vec{\beta} = \vec{i} + \vec{k}$, tia phân giác Oc của góc kề bù với góc $\widehat{xOy}$ cùng phương với $\vec{\gamma} = \vec{j} - \vec{i}$. Do $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ nên ba vectơ $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ đồng phẳng. Do đó các tia Oa, Ob, Oc đồng phẳng. Điều phải chứng minh.



Câu 25. Vì G và G' là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ nên:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} + \overrightarrow{G'D'} = \vec{0}. \quad (1)$$

Mặt khác ta có:

$$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'G'} \quad (3)$$

$$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'G'} \quad (4)$$

$$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'G'}. \quad (5)$$

Cộng (2), (3), (4), (5) và sử dụng (1) ta được:

$$4\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} \Rightarrow |\overrightarrow{GG'}| = \frac{1}{4} |\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'}|.$$

Từ đó suy ra: $GG' \leq \frac{1}{4} (AA' + BB' + CC' + DD')$.

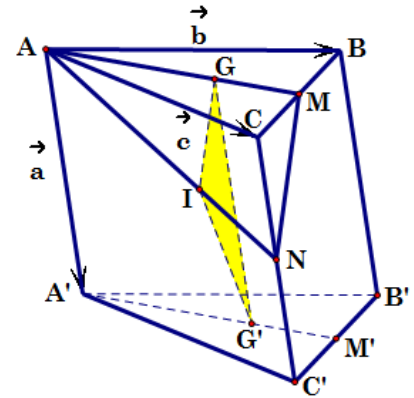
Câu 26.

a) Gọi M' là trung điểm của $B'C'$. Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'G'} &= \frac{2}{3} \overrightarrow{A'M'} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}) \\ &= \frac{1}{3} (\vec{b} + \vec{c}). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} = \vec{a} + \frac{1}{3} (\vec{b} + \vec{c}).$$

b) Gọi hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của BC và CC' . Ta có $GG' \parallel BB' \subset (BB'C'C)$, $GG' \not\subset (BB'C'C)$, suy ra $GG' \parallel (BB'C'C)$. (1)



Mặt khác $\frac{AG}{AM} = \frac{AI}{AN} = \frac{2}{3}$, suy ra $GI \parallel MN$.

Mà $MN \subset (BB'C'C)$ và $GI \not\subset (BB'C'C)$, nên $GI \parallel (BB'C'C)$. (2)

Lại có $GG' \cap GI = G$ và GG', GI cùng nằm trong $(GG'I)$ nên từ (1) và (2) suy ra $(GG'I)$ song song với $(BB'C'C)$.

Câu 27.

a) Ta có $\begin{cases} BD \parallel B'D' \subset (B'D'C) \\ BD \not\subset (B'D'C). \end{cases}$

Suy ra $BD \parallel (B'D'C)$. (1)

Ta có $\begin{cases} A'B \parallel CD' \subset (B'D'C) \\ A'B \not\subset (B'D'C). \end{cases}$

Suy ra $A'B \parallel (B'D'C)$. (2)

Mà $A'B$ và BD là hai đường thẳng cắt nhau cùng nằm trong $(A'BD)$ nên từ (1) và (2) suy ra $(BDA') \parallel (B'D'C)$.

b) Theo giả thiết $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Ta có:

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'P}. \quad (3)$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'P}. \quad (4)$$

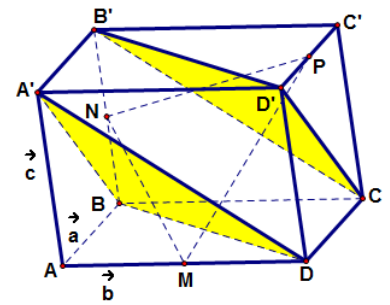
Cộng (3) và (4) ta được:

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{AC'} \Rightarrow \overrightarrow{MP} \\ &= \frac{1}{2} [\vec{c} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})] = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}). \end{aligned} \quad (5)$$

Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}. \quad (6)$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{B'N}. \quad (7)$$



Cộng (6) và (7) ta được

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB'} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \left[\vec{a} + (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \right] \\ &= \frac{1}{2} (2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}). \end{aligned} \quad (8)$$

Cộng (5) và (8) ta được

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{1}{2} (2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = \frac{3}{2} (\vec{a} + \vec{c}). \quad (9)$$

c) Ta có

$$\overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{C'C} = -\vec{a} - \vec{c} = -(\vec{a} + \vec{c}). \quad (10)$$

Từ (9) và (10) suy ra $\overrightarrow{C'D} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{MP} - \frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$. Vậy ba vectơ $\overrightarrow{C'D}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ đồng phẳng. Do đó ba đường thẳng $C'D$, MN , MP nằm trên ba mặt phẳng đôi một song song hoặc trùng nhau. Nhưng do MN , MP đồng phẳng và điểm C' không thuộc mặt phẳng (MNP) nên $C'D \parallel (MNP)$.

Câu 28.

a) Ta có $\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{BC'} = \vec{b} + \vec{c}$,

$$\overrightarrow{BA'} = \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}}{1 + \frac{1}{4}},$$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{4\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}}{5} = \frac{5\vec{a} + \vec{c}}{5}.$$

$$\overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BA'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC'}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3\overrightarrow{BA'} + 2\overrightarrow{BC'}}{5}.$$

Từ đó $\overrightarrow{BN} = \frac{3\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}}{5}$. Suy ra

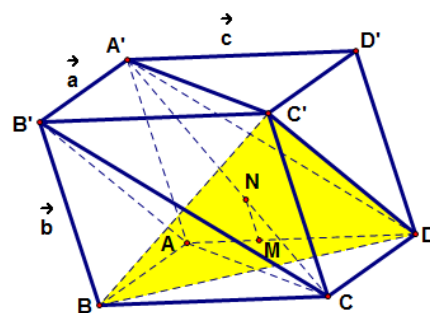
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{3\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}}{5} - \frac{5\vec{a} + \vec{c}}{5} = \frac{-2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}}{5}.$$

b) Trước hết ta chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC'}$ đồng phẳng, tức là tồn tại hai số m, n sao cho $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{BD} + n\overrightarrow{BC'}$, tức là

$$\begin{aligned} \frac{-2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}}{5} &= m(\vec{a} + \vec{c}) + n(\vec{b} + \vec{c}) \\ \Leftrightarrow \frac{-2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}}{5} &= m\vec{a} + n\vec{b} + (m+n)\vec{c} \Leftrightarrow (m; n) = \left(-\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right). \end{aligned}$$

Vậy ta có $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{BD} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC'}$, suy ra ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC'}$ đồng phẳng. Mà điểm M không thuộc (BDC') nên suy ra $MN \parallel (BDC')$.

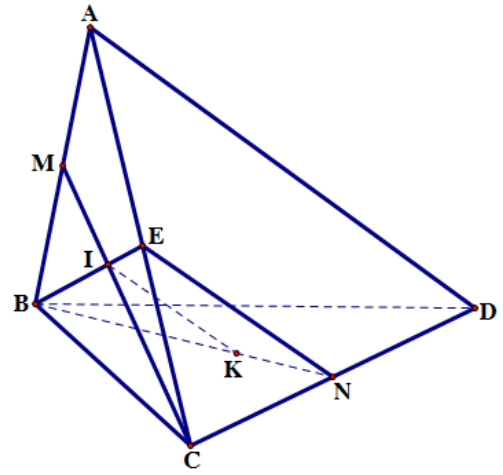
Câu 29.



Gọi E là trung điểm AC , ta có $NE \parallel AD$. Vì $IK \parallel AD$ nên $NE \parallel IK$ và I, K thuộc (BNE) . Do đó I là giao điểm của hai đường trung tuyến BE và CM nên là trọng tâm ΔABC . Trong ΔBNE , ta có:

$$\frac{IK}{NE} = \frac{BI}{BE} = \frac{2}{3}.$$

Mặt khác, $AD = 2NE$ và các vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{IK}$ cùng chiều nên từ $IK = \frac{2}{3}NE = \frac{1}{3}AD$ ta có $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, suy ra $x = \frac{1}{3}$.



Câu 30.

a) Gọi $O = AC \cap BD$. Trong mặt phẳng (SBD) , gọi O' là giao điểm của $B'D'$ và SO . Trong mặt phẳng (SAC) , ta có điểm C' chính là giao điểm của hai đường thẳng AO' và SC .

b) Do bốn điểm A, B', C', D' đồng phẳng nên theo bài tập 14a) ở trang 11 suy ra có các số α, β, γ mà $\alpha + \beta + \gamma = 1$ sao cho

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SC'} &= \alpha \overrightarrow{SA} + \beta \overrightarrow{SB'} + \gamma \overrightarrow{SD'} \\ &= \alpha \overrightarrow{SA} + \frac{\beta}{2} \overrightarrow{SB} + \frac{\gamma}{2} \overrightarrow{SD}.\end{aligned}$$

Đặt $\frac{SC'}{SC} = m$. Ta cần chứng minh $m = \frac{1}{3}$. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SC'} &= m \overrightarrow{SC} = m (\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC}) = m (\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{AD}) \\ &= m (\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SA}) = -m \overrightarrow{SA} + m \overrightarrow{SB} + m \overrightarrow{SD}.\end{aligned}$$

Tóm lại ta đã có ba vectơ $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ không đồng phẳng và

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SC'} &= \alpha \overrightarrow{SA} + \frac{\beta}{2} \overrightarrow{SB} + \frac{\gamma}{2} \overrightarrow{SD} \\ \overrightarrow{SC'} &= -m \overrightarrow{SA} + m \overrightarrow{SB} + m \overrightarrow{SD}.\end{aligned}$$

Vậy theo định lí 2 ở trang 3, suy ra

$$\alpha = -m, \frac{\beta}{2} = m, \frac{\gamma}{2} = m \Rightarrow 1 = \alpha + \beta + \gamma = -m + 2m + 2m \Rightarrow m = \frac{1}{3}.$$

Câu 31.

Đặt $\frac{SB}{SM} = m, \frac{SD}{SN} = n$.

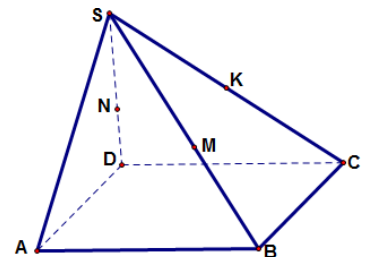
Ta cần chứng minh $m + n = 3$.

Ta có $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{m} \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SN} = \frac{1}{n} \overrightarrow{SD}$.

Vì A, M, N, K cùng thuộc một mặt phẳng nên tồn tại các số α, β, γ với $\alpha + \beta + \gamma = 1$ sao cho $\overrightarrow{SK} = \alpha \overrightarrow{SA} + \beta \overrightarrow{SM} + \gamma \overrightarrow{SN}$. Khi đó

$$\overrightarrow{SK} = \alpha \overrightarrow{SA} + \frac{\beta}{m} \overrightarrow{SB} + \frac{\gamma}{n} \overrightarrow{SD}.$$

Lại có



$$\vec{SK} = \frac{1}{2}\vec{SC} = \frac{1}{2}(\vec{SB} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}(\vec{SB} + \vec{AD}) = \frac{1}{2}(\vec{SB} + \vec{SD} - \vec{SA}).$$

Vậy ta đã có ba vectơ $\vec{SB}, \vec{SD}, \vec{SA}$ không đồng phẳng và

$$\begin{aligned}\vec{SK} &= \alpha\vec{SA} + \frac{\beta}{m}\vec{SB} + \frac{\gamma}{n}\vec{SD} \\ \vec{SK} &= -\frac{1}{2}\vec{SA} + \frac{1}{2}\vec{SB} + \frac{1}{2}\vec{SD}.\end{aligned}$$

Vậy theo định lí 2 ở trang 3, suy ra

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \frac{\beta}{m} = \frac{1}{2}, \frac{\gamma}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{1}{2} + \frac{m}{2} + \frac{n}{2} \Rightarrow m + n = 3.$$

Câu 32.

Đặt $\frac{SA}{SK} = x, \frac{SC}{SM} = y, \frac{SB}{SL} = m, \frac{SD}{SN} = n$. Ta cần chứng minh

$x + y = m + n$. Ta có $\vec{SK} = \frac{1}{x}\vec{SA}, \vec{SM} = \frac{1}{y}\vec{SC}, \vec{SL} = \frac{1}{m}\vec{SB},$

$\vec{SN} = \frac{1}{n}\vec{SD}$. Vì L, M, N, K cùng thuộc mặt phẳng (P) nên tồn

tại các số α, β, γ với $\alpha + \beta + \gamma = 1$ sao cho

$$\vec{SK} = \alpha\vec{SM} + \beta\vec{SL} + \gamma\vec{SN}.$$

$$\text{Khi đó } \vec{SK} = \frac{\alpha}{y}\vec{SC} + \frac{\beta}{m}\vec{SB} + \frac{\gamma}{n}\vec{SD}.$$

Mặt khác

$$\vec{SK} = \frac{1}{x}\vec{SA} = \frac{1}{x}(\vec{SB} + \vec{BA}) = \frac{1}{x}(\vec{SB} + \vec{CD}) = \frac{1}{x}(\vec{SB} + \vec{SD} - \vec{SC}).$$

Vậy ta đã có ba vectơ $\vec{SB}, \vec{SD}, \vec{SC}$ không đồng phẳng và

$$\begin{aligned}\vec{SK} &= \frac{\alpha}{y}\vec{SC} + \frac{\beta}{m}\vec{SB} + \frac{\gamma}{n}\vec{SD} \\ \vec{SK} &= -\frac{1}{x}\vec{SC} + \frac{1}{x}\vec{SB} + \frac{1}{x}\vec{SD}.\end{aligned}$$

Vậy theo định lí 2 ở trang 3, suy ra $\frac{\alpha}{y} = -\frac{1}{x}, \frac{\beta}{m} = \frac{1}{x}, \frac{\gamma}{n} = \frac{1}{x}$. Vì thế

$$1 = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{y}{x} + \frac{m}{x} + \frac{n}{x} \Rightarrow m + n - y = x \Rightarrow m + n = x + y.$$

Câu 33.

Đặt:

$$\frac{SA}{SM} = x, \frac{SB}{SN} = y, \frac{SC}{SP} = z.$$

Khi đó $x + 2y + 3z = 10$.

$$\vec{SA} = x\vec{SM}, \vec{SB} = y\vec{SN}, \vec{SC} = z\vec{SP}.$$

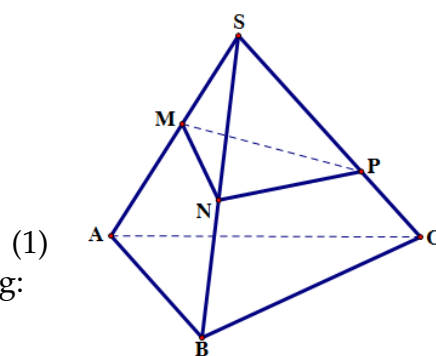
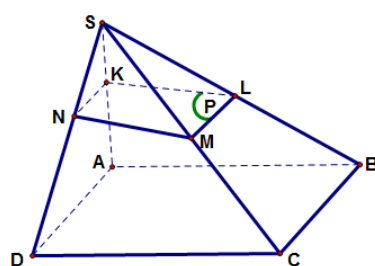
Trong (ABC) xét điểm I sao cho:

$$\vec{IA} + 2\vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0}.$$

Điểm I hoàn toàn xác định và duy nhất. Ta có (1) tương đương:

$$(\vec{SA} - \vec{SI}) + 2(\vec{SB} - \vec{SI}) + 3(\vec{SC} - \vec{SI}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 6\vec{SI} = \vec{SA} + 2\vec{SB} + 3\vec{SC} \Leftrightarrow 6\vec{SI} = x\vec{SM} + 2y\vec{SN} + 3z\vec{SP}. \quad (2)$$



Trong mặt phẳng (MNP) xét điểm J sao cho: $x\overrightarrow{JM} + 2y\overrightarrow{JN} + 3z\overrightarrow{JP} = \vec{0}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} & x\overrightarrow{SM} + 2y\overrightarrow{SN} + 3z\overrightarrow{SP} \\ &= x(\overrightarrow{SJ} + \overrightarrow{JM}) + 2y(\overrightarrow{SJ} + \overrightarrow{JN}) + 3z(\overrightarrow{SJ} + \overrightarrow{JP}) \\ &= (x + 2y + 3z)\overrightarrow{SJ} + x\overrightarrow{JM} + 2y\overrightarrow{JN} + 3z\overrightarrow{JP} \\ &= 10\overrightarrow{SJ}. \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra: $6\overrightarrow{SI} = 10\overrightarrow{SJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{SJ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{SI}$. Do đó điểm J cố định. Vậy mặt phẳng (MNP) luôn đi qua điểm J cố định.

Câu 34.

a) Gọi P, Q, K lần lượt là trung điểm AB , trung điểm CD , trung điểm PQ .

Ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Lại có:

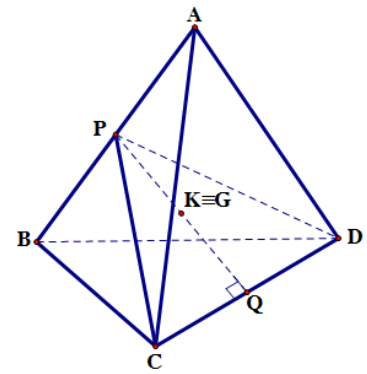
$$\begin{aligned} \vec{0} &= (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) \\ &= 2\overrightarrow{GP} + 2\overrightarrow{GQ} = 2(\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ}) = 4\overrightarrow{GK}. \end{aligned}$$

Suy ra $G \equiv K$. Vậy trọng tâm G của tứ diện chính là trung điểm K của PQ . Ta có $\triangle CBA = \triangle DAB$, suy ra $PC = PD$, do đó đường trung tuyến PQ của $\triangle PCD$ cũng là đường trung trực của CD . Vậy $KC = KD$. Tương tự ta có:

$$KC = KB, KB = KA, KA = KD.$$

$$\text{Vậy } KA = KB = KC = KD = R.$$

Hay G cách đều 4 đỉnh A, B, C, D .



b) Ta có:

$$\begin{aligned} R.MA &= MA.KA \geq \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{KA} \\ &= (\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KM}) \cdot \overrightarrow{KA} = KA^2 - \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KA} = R^2 - \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KA}. \end{aligned}$$

Tương tự ta có:

$$R.MB \geq R^2 - \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KB},$$

$$R.MC \geq R^2 - \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KC},$$

$$R.MD \geq R^2 - \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KD}.$$

Do đó và lưu ý rằng $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$ nên ta có:

$$R(MA + MB + MC + MD) \geq 4R^2 - \overrightarrow{KM}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}) = 4R^2.$$

Bởi vậy $MA + MB + MC + MD \geq 4R$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv G$.

Do đó $MA + MB + MC + MD$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $M \equiv G$.

Câu 35. Xét ba vectơ đơn vị $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ đôi một vuông góc với nhau. Đặt:

$$\vec{u} = a\vec{\alpha} + b\vec{\beta} + c\vec{\gamma}, \vec{v} = x\vec{\alpha} + y\vec{\beta} + z\vec{\gamma}, \vec{w} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}.$$

Khi đó:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a\vec{\alpha} + b\vec{\beta} + c\vec{\gamma}) \cdot (x\vec{\alpha} + y\vec{\beta} + z\vec{\gamma}) = ax + by + cz.$$

$$\vec{u}\vec{w} = (a\vec{\alpha} + b\vec{\beta} + c\vec{\gamma}) (\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}) = a + b + c.$$

$$\vec{v}\vec{w} = (x\vec{\alpha} + y\vec{\beta} + z\vec{\gamma}) (\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}) = x + y + z.$$

$$\vec{u}^2 = (a\vec{\alpha} + b\vec{\beta} + c\vec{\gamma}) (a\vec{\alpha} + b\vec{\beta} + c\vec{\gamma}) = a^2 + b^2 + c^2.$$

$$\vec{v}^2 = (x\vec{\alpha} + y\vec{\beta} + z\vec{\gamma}) (x\vec{\alpha} + y\vec{\beta} + z\vec{\gamma}) = x^2 + y^2 + z^2.$$

$$\vec{w}^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}) (\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Như vậy: $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $|\vec{w}| = \sqrt{3}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\vec{u}\vec{v} + |\vec{u}||\vec{v}| \geq \frac{2}{3} (\vec{u}\vec{w}) (\vec{v}\vec{w}). \quad (1)$$

☑ Nếu $|\vec{u}| = 0$ hoặc $|\vec{v}| = 0$ thì (1) đúng.

☑ Giả sử $|\vec{u}| > 0$ và $|\vec{v}| > 0$. Khi đó:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} + 1 \geq \frac{2(\vec{u}\vec{w})(\vec{v}\vec{w})}{3|\vec{u}||\vec{v}|} \\ &\Leftrightarrow \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} + 1 \geq \frac{2(\vec{u}\vec{w})(\vec{v}\vec{w})}{|\vec{w}|^2|\vec{u}||\vec{v}|} \\ &\Leftrightarrow \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} + 1 \geq 2 \frac{\vec{u}\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|} \cdot \frac{\vec{v}\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}. \end{aligned} \quad (2)$$

Đặt ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ có chung gốc O và xét ba tia Ox , Oy , Oz lần lượt có hướng $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Đặt: $\alpha_0 = \widehat{xOy}$, $\beta_0 = \widehat{xOz}$, $\gamma_0 = \widehat{zOy}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow 1 + \cos \alpha_0 \geq 2 \cos \beta_0 \cos \gamma_0 \\ &\Leftrightarrow 1 + \cos \alpha_0 \geq \cos (\beta_0 + \gamma_0) + \cos (\beta_0 - \gamma_0). \end{aligned} \quad (3)$$

Theo bài tập ?? (ở trang ??), ta có $\alpha_0 \leq \beta_0 + \gamma_0 \leq 2\pi - \alpha_0$, suy ra

$$\cos \alpha_0 \geq \cos (\beta_0 + \gamma_0).$$

Như vậy:

$$1 + \cos \alpha_0 \geq 1 + \cos (\beta_0 + \gamma_0) \geq \cos (\beta_0 - \gamma_0) + \cos (\beta_0 + \gamma_0).$$

Do đó (3) đúng, ta có điều phải chứng minh.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

Câu 1. Tính chất nào sau đây là sai?

A. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

C. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

B. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$.

D. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Câu 2. Cho điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k , với $k \neq 1$ thì ta có: $\vec{MA} = k\vec{MB}$. Khi đó với điểm O tùy ý ta có:

A. $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + k\vec{OB}}{1 - k}$.

C. $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + k\vec{OB}}{1 + k}$.

B. $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} - k\vec{OB}}{1 + k}$.

D. $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} - k\vec{OB}}{1 - k}$.

Câu 3. Cho tứ diện $OABC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Phân tích nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
 B. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
 C. $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
 D. $\overrightarrow{OG} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Câu 4. Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng là:

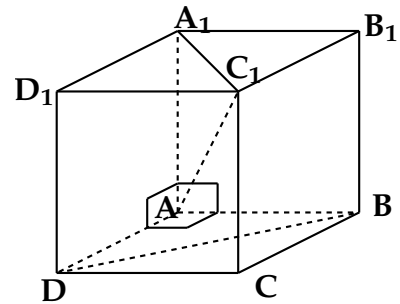
- A. Giá của chúng không cùng thuộc một mặt phẳng.
 B. Giá của chúng cùng thuộc một mặt phẳng.
 C. Giá của chúng không cùng song song với một mặt phẳng.
 D. Giá của chúng cùng song song một mặt phẳng.

Câu 5. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Điều kiện nào sau đây **không** kết luận được ba vectơ đó đồng phẳng?

- A. Một trong ba vectơ đó bằng $\vec{0}$.
 B. Có hai trong ba vectơ đó cùng phương.
 C. Có một vectơ không cùng hướng với hai vectơ còn lại.
 D. Có hai trong ba vectơ đó cùng hướng.

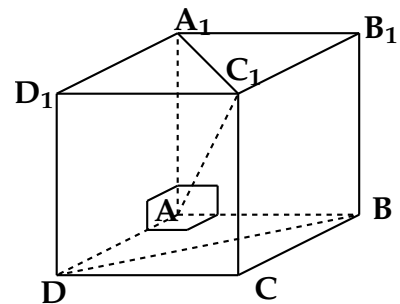
Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{BD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$.

- A. $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 0.\overrightarrow{AA_1}$.
 B. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.
 C. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + 0.\overrightarrow{AA_1}$.
 D. $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1}$.



Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AC_1}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$.

- A. $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1}$.
 B. $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.
 C. $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.
 D. $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1}$.



Câu 8. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt

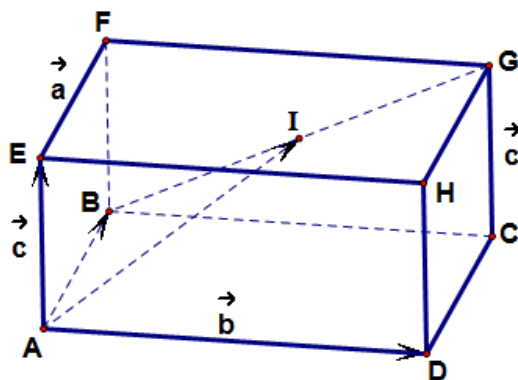
$$\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{d}.$$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.
 B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
 C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
 D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$ có $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$. Gọi I là trung điểm của đoạn BG . Hãy biểu thị vector $\overrightarrow{AI}$ qua ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

- A. $\overrightarrow{AI} = 2\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$.
 B. $\overrightarrow{AI} = 3\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$.
 C. $\overrightarrow{AI} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.
 D. $\overrightarrow{AI} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$.



Câu 10. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}.$$

Hãy phân tích vector $\overrightarrow{B'C}$ theo các vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

- A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
 B. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.
 C. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.
 D. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 11. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. Vectơ không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.
 B. Hai vectơ có độ dài bằng nhau và cùng phương thì hai vectơ đó bằng nhau.
 C. Giá của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và cuối của vectơ đó.
 D. Độ dài vectơ là độ dài đoạn thẳng có hai đầu mút là điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Câu 12. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Ba vectơ đồng phẳng thì có giá song song với nhau.
 B. Ba vectơ đồng phẳng thì có giá cùng nằm trong một mặt phẳng.
 C. Nếu giá của ba vectơ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vectơ đó đồng phẳng.
 D. Nếu giá của ba vectơ đôi một vuông góc thì ba vectơ đó đồng phẳng.

Câu 13. Hãy chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau đây?

- A. Cho hình chóp $S.ABCD$, nếu có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
 B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.
 C. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.
 D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

Câu 14. Cho các mệnh đề sau:

- (I) Vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ luôn đồng phẳng với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.
 (II) Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ và ít nhất một trong ba số m, n, p khác không thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.
 (III) Nếu ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ thì $m = n = p = 0$.

Có bao nhiêu mệnh đề **đúng**?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 15. Cho hai điểm phân biệt A, B và một điểm O bất kì. Hãy xem xét mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{BA}$.

B. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$.

C. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + (1 - k)\overrightarrow{OB}$.

D. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Câu 16. Cho 4 điểm A, B, C, D trong không gian. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là 4 điểm đó?

A. 3.

B. 6.

C. 9.

D. 12.

Câu 17. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với tâm O . Hãy chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau:

A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$.

Câu 18. Cho tam giác ABC . Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC) . Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Biết biểu diễn $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{SC}$ là duy nhất. Tính $m + n$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 B 3 B 5 C 7 C 9 C 11 B 13 A 15 C 17 C
2 D 4 C 6 A 8 C 10 B 12 C 14 D 16 D 18 B

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tính chất sai là: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$.

Chọn đáp án **B**

Câu 2. Ta có $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, suy ra $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1 - k}$.

Chọn đáp án **D**

Câu 3. Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Chọn đáp án **B**

Câu 4. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Chọn đáp án **C**

Câu 5. Hai vectơ còn lại có thể không cùng phương nên ba vectơ có thể không đồng phẳng.

Chọn đáp án **C**

Câu 12. Nếu giá của ba vectơ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vectơ đó đồng phẳng. Chọn đáp án **C**

Câu 13. Nếu $\vec{SB} + \vec{SD} = \vec{SA} + \vec{SC}$ thì:

$$\vec{SB} - \vec{SA} = \vec{SC} - \vec{SD} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC}.$$

Suy ra tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. Mệnh đề **D** sai vì:

$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{AD} - \vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{CD}.$$

Chọn đáp án **A**

Câu 14. Do $\vec{x}$ được biểu thị qua hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nên (I) đúng. Xét mệnh đề (II): giả sử $m \neq 0$, khi đó:

$$m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = -\frac{n}{m}\vec{b} - \frac{p}{m}\vec{c}.$$

Suy ra ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng. Vậy mệnh đề (II) đúng. Do mệnh đề (III) tương đương với mệnh đề (II) nên mệnh đề (III) đúng.

Chọn đáp án **D**

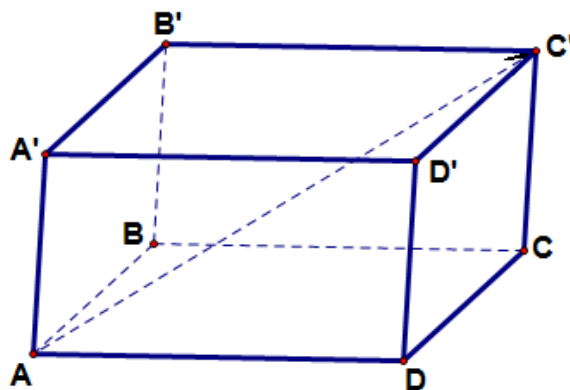
Câu 15.

Chọn đáp án **C**

Câu 16. Lấy A làm gốc ta được 3 vectơ $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$. Tương tự đối với B, C, D ta được $4.3 = 12$ vectơ.

Chọn đáp án **D**

Câu 17. Theo quy tắc hình hộp thì A đúng.



Do $\vec{AB}, \vec{CD}$ đối nhau và $\vec{BC'}, \vec{D'A}$ đối nhau nên B đúng.

Do $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC'} = \vec{AC'}, \vec{AD'} + \vec{D'O} + \vec{OC'} = \vec{AC'}$ nên D đúng.

Do $\vec{AB} + \vec{AA'} = \vec{AB'}, \vec{AD} + \vec{DD'} = \vec{AD'}$ nên C sai.

Ta thấy mệnh đề C tương đương với $\vec{AB} = \vec{AD}$ (sai).

Chọn đáp án **C**

Câu 18.

Theo giả thiết ta có:

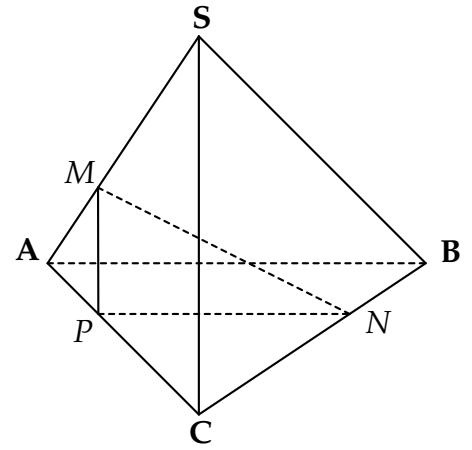
$$\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}.$$

Lấy điểm P trên cạnh AC sao cho $\overrightarrow{PC} = -2\overrightarrow{PA}$. Khi đó:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{2}{3}, n = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Do đó } m + n = 1.$$



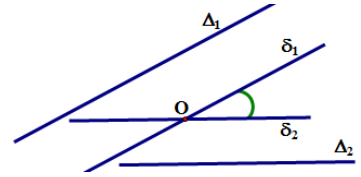
Chọn đáp án **B**

BÀI 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc giữa hai đường thẳng.

Định nghĩa 1. Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là góc giữa hai đường thẳng δ_1 và δ_2 cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với Δ_1 và Δ_2 .



2. Hai đường thẳng vuông góc.

Định nghĩa 2. Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

Nhận xét 1. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 5. Tính góc α giữa hai đường thẳng a và b .

Phương pháp. Sử dụng một trong hai cách sau:

- ☑ Tìm các vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và $\vec{v}$ của a và b rồi tính góc α giữa hai đường thẳng a và b theo công thức $\cos \alpha = |\cos(\vec{u}, \vec{v})|$.
- ☑ Dựng góc α rồi tính số đo góc α bằng cách dùng tích vô hướng giữa hai vectơ hoặc các hệ thức lượng trong tam giác (thường dùng định lý hàm số cosin).

Chú ý 3. Góc α giữa hai đường thẳng phải thỏa mãn $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Chú ý 4. Cho hai đường thẳng có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}, \vec{v}$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng đó. Ta có:

$$\alpha = (\vec{u}, \vec{v}), \text{ khi } (\vec{u}, \vec{v}) \leq 90^\circ; \quad \alpha = 180^\circ - (\vec{u}, \vec{v}), \text{ khi } (\vec{u}, \vec{v}) > 90^\circ.$$

Chú ý 5. Vì $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} \Rightarrow BC^2 = AC^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + AB^2$ nên:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

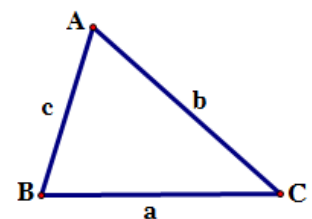
Chú ý 6 (Định lý cosin trong tam giác).

Trong tam giác ABC với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$



Bài 1. Cho hình chóp $A.BCD$ có M, N theo thứ tự là trung điểm của BC và AD . Biết rằng $AB = 10$; $CD = 6$, $MN = 7$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

🔗 **Lời giải**

Lời giải 1. Gọi P là trung điểm AC . Ta có

$$PM \parallel AB, PM = \frac{1}{2}AB = 5;$$

$$PN \parallel CD, PN = \frac{1}{2}CD = 3.$$

Do đó góc giữa hai đường thẳng AB và CD là góc giữa hai đường thẳng PM và PN . Ta có

$$\begin{aligned} \cos \widehat{MPN} &= \frac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2PM \cdot PN} \\ &= \frac{9 + 25 - 49}{30} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{MPN} = 120^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng AB và đường thẳng CD là $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Lời giải 2. Ta có:

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} \\ &= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}) + (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}) \\ &= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{DN}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}) \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}. \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} 4MN^2 &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD})^2 = BA^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} \\ \Rightarrow 196 &= 100 + 36 + 2 \cdot 10 \cdot 6 \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}) \Rightarrow \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy góc giữa đường thẳng AB và đường thẳng CD là 60° .

Bài 2. Cho tứ diện $SABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB .

Lời giải

Ta có $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$;

$$AC^2 + AB^2 = BC^2.$$

Suy ra $AC \perp AB$. Ta có

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) &= \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} \\ &= \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{a^2} = \frac{-\frac{a^2}{2} + 0}{a^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$. Góc giữa SC và AB là $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Cách 2. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, AC .

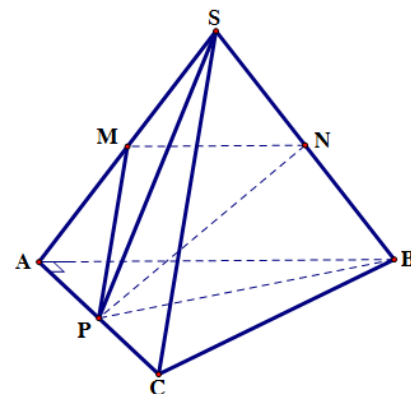
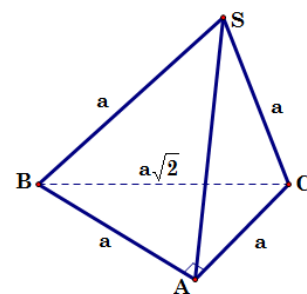
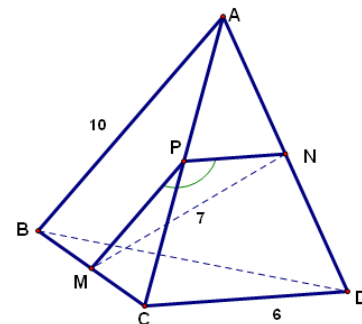
Khi đó $MN \parallel AB, MP \parallel SC$. Để tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB , ta cần tính $\widehat{NMP}$.

$$MN = MP = \frac{a}{2}, SP^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

$$BP^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{5a^2}{4}.$$

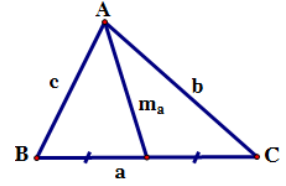
$$\begin{aligned} PN^2 &= \frac{PS^2 + PB^2}{2} - \frac{SB^2}{4} = \frac{3a^2}{4}. \quad \cos \widehat{NMP} = \\ &= \frac{MP^2 + MN^2 - PN^2}{2MP \cdot MN} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{NMP} = 120^\circ$. Vậy góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng 60° .



Lưu ý. Xin nhắc lại công thức tính độ dài đường trung tuyến của tam giác trong hình học lớp 10. Trong $\triangle ABC$ ta có:

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \\ m_b^2 &= \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4} \\ m_c^2 &= \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}. \end{aligned}$$



Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a , đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi N là trung điểm SB .

- Chứng minh rằng các tam giác SAC, SBD là các tam giác vuông.
- Tính góc giữa hai đường thẳng: AN và CN ; AN và SD .

Lời giải

a)

Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a nên

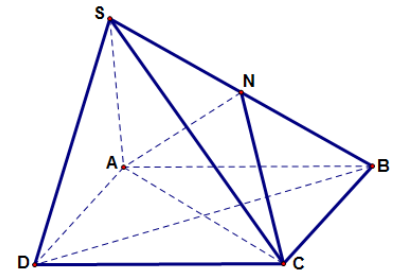
$$AC = BD = a\sqrt{2}.$$

Xét các tam giác SAC, SBD ta có:

$$SA^2 + SC^2 = 2a^2 = AC^2;$$

$$SB^2 + SD^2 = 2a^2 = BD^2.$$

Vậy $\triangle SAC, \triangle SBD$ vuông tại S .



- b) Ta có AN và CN là đường cao của các tam giác đều SAB, SBC nên ta có $AN = CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Trong tam giác } ANC \text{ ta có } \cos \widehat{ANC} = \frac{AN^2 + CN^2 - AC^2}{2AN \cdot AC} = -\frac{1}{3}.$$

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AN và CN . Khi đó

$$\cos \alpha = |\cos \widehat{ANC}| = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{3} \approx 70^\circ 31'.$$

Gọi β là góc giữa hai đường thẳng AN và SD . Khi đó

$$\cos \beta = \left| \cos(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{SD}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{SD}|}{|\overrightarrow{AN}| |\overrightarrow{SD}|}.$$

Vì $BN \perp SD$ và $\widehat{SDC} = 60^\circ$ nên ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{SD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) \cdot \overrightarrow{SD} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SD} \\ &= -\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DS} = -DC \cdot DS \cdot \cos \widehat{SDC} \\ &= -a^2 \cos 60^\circ = -\frac{1}{2}a^2. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \beta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54^\circ 44'.$$

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA = SC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và CD , P là điểm trên cạnh SB sao cho $BP = 3PS$.

- a) Tính góc giữa hai đường thẳng AC và SD .
- b) Xác định thiết diện tạo bởi (MNP) với hình chóp.

Lời giải

a) Gọi E là trung điểm của cạnh SB . Ta có $\Delta SAB = \Delta SCB$ vì $SA = SC, AB = CB, SB$ chung. Do đó hai trung tuyến tương ứng bằng nhau: $AE = CE$. Từ đó ta thấy tam giác ACE cân tại E . Suy ra $OE \perp AC$. Tam giác SBD có OE là đường trung bình nên OE song song SD . Vậy $AC \perp SD$.

b) Gọi $I = MN \cap BD$.
Trong (SBD) Gọi $J = IP \cap SO$.

Ta có $\begin{cases} MN \parallel AC \\ MN \subset (MNP), AC \subset (SAC). \end{cases}$

Suy ra (MNP) cắt (SAC) theo giao tuyến HK qua J và $HK \parallel AC$ (H thuộc SA, K thuộc SC). Từ đó ta thấy thiết diện tạo thành là ngũ giác $MNKPH$.

Lưu ý. Có thể giải câu a) cách khác như sau: Ta có:

$$\cos(\widehat{AC;SD}) = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{SD}}{AC \cdot SD} = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AS}}{AC \cdot SD}. \quad (1)$$

Mà

$$\begin{aligned} DC^2 &= (\vec{AC} - \vec{AD})^2 = AC^2 + AD^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AD} \\ 2\vec{AC} \cdot \vec{AD} &= AC^2 + AD^2 - DC^2 = AC^2 \\ SC^2 &= (\vec{AC} - \vec{AS})^2 = AC^2 + AS^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AS} \\ 2\vec{AC} \cdot \vec{AS} &= AC^2 + AS^2 - SC^2 = AC^2. \end{aligned}$$

nên từ (1) suy ra $\cos(\widehat{AC;SD}) = 0 \Rightarrow \vec{AC} \perp \vec{SD} \Rightarrow AC \perp SD$.

Bài 5. Cho tứ diện $ABCD$ có:

$$AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c.$$

- a) Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AB và CD .
- b) Gọi G là trọng tâm ΔABC . Tính khoảng cách từ D đến G .

Lời giải

a) Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và CD , ta có:

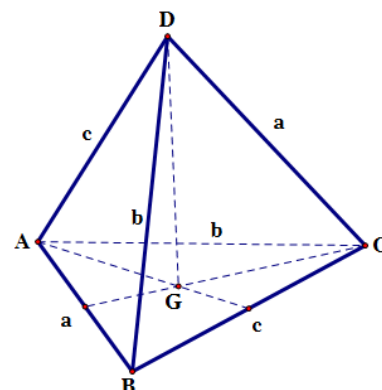
$$\cos \alpha = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{CD}|}{AB \cdot CD}.$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } \vec{AB} \cdot \vec{CD} &= \vec{AB} \cdot (\vec{AD} - \vec{AC}) \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AB} \cdot \vec{AC}. \end{aligned}$$

Ta có:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2};$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$



Từ đó ta tính được: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = c^2 - b^2$.

Do đó: $\cos \alpha = \frac{|c^2 - b^2|}{a^2}$.

b) Do G là trọng tâm ΔABC nên: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$. Suy ra:

$$\begin{aligned} 9DG^2 &= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})^2 \\ &= DA^2 + DB^2 + DC^2 + 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + b^2 + c^2 - a^2 + b^2 + a^2 - c^2 + a^2 + c^2 - b^2 \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Do đó: $DG = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}}{3}$.

Dạng 6. Chứng minh hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau.

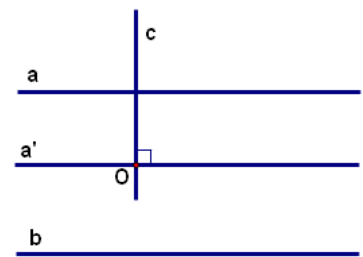
Phương pháp. Có thể sử dụng một trong các phương pháp sau:

- ☑ Nếu hai đường thẳng a, b được đưa về cùng một mặt phẳng (P) thì sử dụng các cách chứng minh hai đường thẳng vuông góc trong hình học phẳng.
- ☑ Dùng định nghĩa góc của hai đường thẳng trong không gian và chứng minh góc đó bằng 90° .
- ☑ Tìm hai vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và $\vec{v}$ của hai đường thẳng a, b và chứng minh $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Đặc biệt, nếu $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ thì $AB \perp CD$.
- ☑ Sử dụng nhận xét 1 ở trang 32.

Bài 6. Chứng minh nhận xét 1 ở trang 32.

Lời giải

Giả sử $a \parallel b$ và $c \perp a$. Lấy điểm O bất kì trên c sao cho $O \notin a$, kẻ đường thẳng a' đi qua O và song song với a . Khi đó $\widehat{cOa'} = 90^\circ$. Để thấy $a' \parallel b$ nên $\widehat{cOa'}$ chính là góc giữa hai đường thẳng c và b . Do đó ta có $c \perp b$.

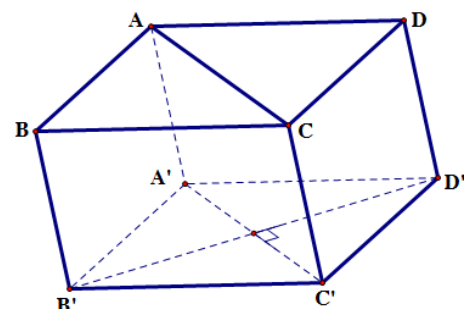


Bài 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. (hình hộp như thế gọi là hình hộp thoi). Chứng minh rằng $AC \perp B'D'$.

Lời giải

Tứ giác $ACC'A'$ có cặp cạnh đối AA', CC' song song và bằng nhau nên là hình bình hành, do đó AC song song với $A'C'$. Theo giả thiết, tứ giác $A'B'C'D'$ là hình thoi nên $A'C'$ vuông góc với $B'D'$. Như vậy:

$$\begin{cases} AC \parallel A'C' \\ B'D' \perp A'C' \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp AC.$$



Bài 8. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD . Chứng minh rằng:

- ① $IJ \perp AB$; ② $IJ \perp CD$; ③ $AB \perp CD$.

Lời giải

① Ta có $\triangle ACD, \triangle BCD$ là hai tam giác đều và bằng nhau, do đó $AJ = BJ$. Suy ra $\triangle AJB$ cân tại J . Mà I là trung điểm AB nên $IJ \perp AB$.

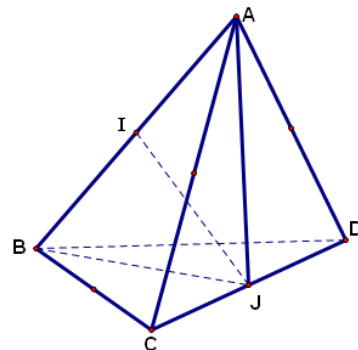
② Tương tự câu (1).

③ Ta có:
 $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = (\vec{AJ} + \vec{JB}) \cdot \vec{CD}$
 $= \vec{AJ} \cdot \vec{CD} + \vec{JB} \cdot \vec{CD} = 0.$
 (do $JA \perp CD, JB \perp CD$). Vậy $AB \perp CD$.

Cách khác. Gọi a là độ dài cạnh tứ diện. Khi đó

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{CD} &= (\vec{AC} + \vec{CB}) \cdot \vec{CD} = \vec{AC} \cdot \vec{CD} + \vec{CB} \cdot \vec{CD} \\ &= AC \cdot CD \cdot \cos 120^\circ + CB \cdot CD \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0. \end{aligned}$$

Bởi vậy $\vec{AB} \perp \vec{CD} \Rightarrow AB \perp CD$.



Bài 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a (hình hộp như thế gọi là hình hộp thoi) và $\widehat{ABC} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} = 60^\circ$. Tính diện tích tứ giác $A'B'CD$.

Lời giải

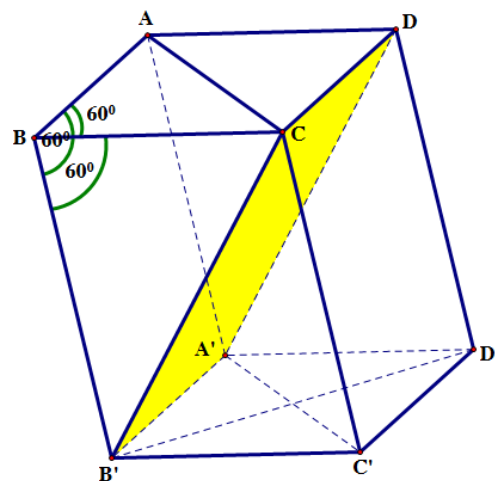
Ta có:
 $\begin{cases} A'B' \parallel C'D' \\ A'B' = C'D' \end{cases} ; \begin{cases} CD \parallel C'D' \\ CD = C'D' \end{cases}.$

Vậy $A'B' \parallel CD$ và $A'B' = CD$, suy ra tứ giác $A'B'CD$ là hình bình hành. Ngoài ra $B'C = a = CD$ nên $A'B'CD$ là hình thoi. Ta sẽ chứng minh $A'B'CD$ là hình vuông. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} \vec{CB'} \cdot \vec{CD} &= (\vec{CB} + \vec{BB'}) \cdot \vec{CD} \\ &= \vec{CB} \cdot \vec{CD} + \vec{BB'} \cdot \vec{CD} \\ &= \vec{BB'} \cdot \vec{BA} - \vec{BC} \cdot \vec{BA} \\ &= a \cdot a \cdot \cos 60^\circ - a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = 0. \end{aligned}$$

Vậy $CB' \perp CD$, do đó $A'B'CD$ là hình vuông cạnh a .

Từ đó diện tích hình vuông $A'B'CD$ bằng a^2 .



Bài 10. Chứng minh rằng với bốn điểm A, B, C, D tùy ý trong không gian ta có:

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0. \quad (*)$$

Từ đó suy ra rằng nếu một tứ diện có hai cặp cạnh đối diện vuông góc thì cặp cạnh đối diện thứ ba cũng vuông góc.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} &\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} \\ &= \vec{AB}(\vec{CB} + \vec{BD}) + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} \\
 &= (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}) \\
 &= (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}) \\
 &= \overrightarrow{CB}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{BD}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \\
 &= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}) = 0.
 \end{aligned}$$

Giả sử tứ diện $ABCD$ có:

$AB \perp CD$ và $BC \perp AD$.

Khi đó:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \text{ và } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0.$$

Vậy từ (*) ta có $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Suy ra $BD \perp AC$. Do đó ta có điều cần chứng minh.

Lưu ý. Bài tập 10 này không khó nhưng rất có ý nghĩa, được dùng để giải một số bài tập khác. Vì vậy bạn đọc nên nhớ để sử dụng khi cần.

Bài 11. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

a) $AD \perp BC$ khi và chỉ khi $AC^2 + BD^2 = AB^2 + DC^2$.

b) Nếu $AD \perp BC$ và $AC \perp BD$ thì $AB \perp CD$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 AC^2 + BD^2 &= AB^2 + DC^2 \Leftrightarrow AC^2 - AB^2 = DC^2 - DB^2 \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{DC}^2 - \overrightarrow{DB}^2 \\
 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB})(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB}) \\
 &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DI} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}) = \vec{0} \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow BC \perp AD.
 \end{aligned}$$

b) Do $AD \perp BC$ và $AC \perp BD$ nên theo câu a) ta có:

$$AB^2 + DC^2 = AC^2 + BD^2, \quad AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2.$$

Từ đó $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$. Cũng theo câu a) suy ra $AB \perp CD$.

Bài 12. Cho hai đường thẳng cắt nhau b và c cùng nằm trong mặt phẳng (P) . Chứng minh rằng nếu đường thẳng a vuông góc với cả b và c thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P) .

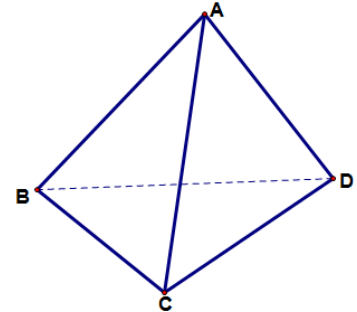
Lời giải

Giả sử d là một đường thẳng bất kì trong (P) . Ta cần chứng minh $a \perp d$. Gọi $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{r}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của a, b, c, d . Do b, c, d đồng phẳng và b, c không cùng phương nên tồn tại các số m, n sao cho:

$$\vec{r} = m\vec{v} + n\vec{w}.$$

Bởi vậy:

$$\vec{u} \cdot \vec{r} = \vec{u} \cdot (m\vec{v} + n\vec{w}) = m\vec{u} \cdot \vec{v} + n\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{r} \Rightarrow a \perp d.$$



C. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1. Đề bài

Bài 13. Cho vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương. Chứng minh rằng nếu $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì ba vectơ $\vec{n}, \vec{a}, \vec{b}$ không đồng phẳng.

Bài 14. Chứng minh rằng nếu ba vectơ cùng vuông góc với vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ thì đồng phẳng. Từ đó suy ra nếu ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 cùng vuông góc với một đường thẳng d thì ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 cùng song song với một mặt phẳng.

Bài 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, cạnh bên $SA = AB$ và $SA \perp BC$.

- Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC .
- Gọi I, J lần lượt là các điểm thuộc SB và SD sao cho $IJ \parallel BD$. Chứng minh rằng góc giữa AC và IJ không phụ thuộc vào vị trí của I và J .

Bài 16. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC . Tính góc giữa các cặp đường thẳng AB và DN giữa AN và DM .

Bài 17. Cho tứ diện $ABCD$ trong đó góc giữa AB và CD bằng α . Gọi M là điểm bất kì thuộc cạnh AC , đặt $AM = x$ ($0 < x < AC$). Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với AB, CD .

- Xác định vị trí của điểm M để diện tích thiết diện của hình tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi (P) đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.
- Chứng minh rằng chu vi thiết diện nêu trên không phụ thuộc vào x khi và chỉ khi $AB = CD$.

Bài 18. Cho hình tứ diện $ABCD$, trong đó $AB \perp AC, AB \perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là các điểm thuộc các đường thẳng AB và CD sao cho $\vec{PA} = k\vec{PB}, \vec{QC} = k\vec{QD}$ ($k \neq 1$).

- Chứng minh rằng ba vectơ $\vec{PQ}, \vec{AC}, \vec{BD}$ đồng phẳng.
- Chứng minh rằng $AB \perp PQ$.

Bài 19. Cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm AB . Xác định vị trí điểm N trên đường thẳng AC sao cho $DN \perp CM$.

Bài 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $4\sqrt{2}$, $SC = 2$, SC vuông góc với CA và CB . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC . Tính góc giữa hai đường thẳng CE và SF .

Bài 21. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh bằng a . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BC, AD . Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Đặt $\vec{AB} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c}, \vec{AD} = \vec{d}$.

- Biểu diễn các vectơ $\vec{MG}, \vec{NP}$ theo $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$.
- Tính góc giữa hai đường thẳng MG và NP .

Bài 22. Cho tứ diện $ABCD$ có tích các cặp cạnh đối bằng nhau. Gọi α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi các cặp đường thẳng $AB, CD; AC, BD; AD, BC$. Chứng minh rằng trong ba giá trị $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ có một giá trị bằng tổng của hai giá trị còn lại.

Bài 23. Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng. Gọi $\alpha = \widehat{yOz}, \beta = \widehat{zOx}, \gamma = \widehat{xOy}$. Chứng minh rằng: $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > -\frac{3}{2}$.

Bài 24. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M bất kì trong không gian nhìn các cạnh của tứ diện dưới các góc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$. Chứng minh rằng

$$\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 + \cos \alpha_4 + \cos \alpha_5 + \cos \alpha_6 \geq -2.$$

2. Lời giải, hướng dẫn

Câu 13. Nếu $\vec{n}, \vec{a}, \vec{b}$ đồng phẳng thì tồn tại các số thực x và y sao cho $\vec{n} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Từ đó

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = (x\vec{a} + y\vec{b}) \cdot \vec{n} = x\vec{a} \cdot \vec{n} + y\vec{b} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{n} = \vec{0},$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết. Suy ra ba vectơ $\vec{n}, \vec{a}, \vec{b}$ không đồng phẳng.

Câu 14. Giả sử ba vectơ cùng vuông góc với vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, tức là

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = \vec{b} \cdot \vec{n} = \vec{c} \cdot \vec{n} = 0.$$

Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng. Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương thì ba vectơ $\vec{n}, \vec{a}, \vec{b}$ không đồng phẳng (theo bài tập 13). Khi đó

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{n}.$$

Suy ra

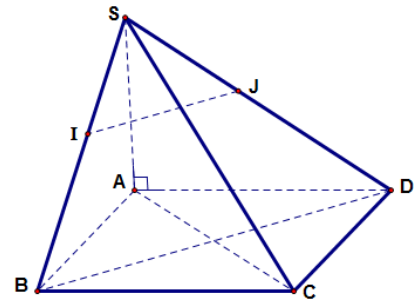
$$\vec{c} \cdot \vec{n} = (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{n}) \cdot \vec{n} = x\vec{a} \cdot \vec{n} + y\vec{b} \cdot \vec{n} + z\vec{n}^2 = z\vec{n}^2. \quad (*)$$

Mà $\vec{c} \perp \vec{n}$ nên từ (*) suy ra $z\vec{n}^2 = 0$, suy ra $z = 0$, tức là $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Vậy ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng. Nếu ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 cùng vuông góc với một đường thẳng d thì theo kết quả trên suy ra ba vectơ chỉ phương của d_1, d_2, d_3 đồng phẳng, tức là ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 cùng song song với một mặt phẳng.

Câu 15.

a) Vì $BC \parallel AD$ nên góc giữa SD và BC bằng góc giữa SD và AD . Từ giả thiết ta có $SA \perp BC$ nên $SA \perp AD$. Mặt khác SA bằng cạnh của hình thoi $ABCD$ nên $\widehat{SDA} = 45^\circ$ là góc phải tìm. Vậy góc giữa SD và BC bằng 45° .

b) Do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$. Mặt khác $IJ \parallel BD$ nên $AC \perp IJ$, tức là góc giữa IJ và AC bằng 90° không đổi.



Câu 16.

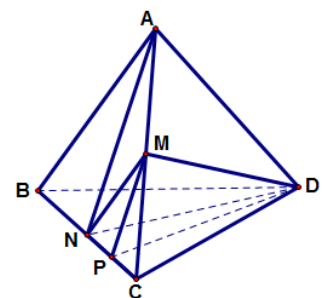
Tam giác ABC có MN là đường trung bình nên $MN \parallel AB$. Như thế góc giữa AB và DN là góc giữa MN và DN . Đặt $\widehat{DNM} = \alpha$. Tam giác DMN có:

$$MN = \frac{a}{2}, DM = DN = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Sử dụng định lý côsin cho $\triangle DMN$ ta có:

$$DM^2 = DN^2 + MN^2 - 2DN \cdot MN \cos \alpha.$$

$$\text{Suy ra } \cos \alpha = \frac{MN^2}{2DN \cdot MN} = \frac{MN}{2DN} = \frac{\frac{a}{2}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} > 0.$$



Vậy α là góc nhọn và góc giữa AB và DN là $\alpha = \arccos \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Gọi P là trung điểm NC , khi đó $MP \parallel AN$, vậy góc giữa AN và DM là góc giữa MP và MD . Từ định lý cosin cho tam giác PMD ta có

$$\cos \widehat{PMD} = \frac{MD^2 + MP^2 - PD^2}{2MD \cdot MP} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{16} - \left(\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{16}\right)}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{6}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AN và DM là $\arccos \frac{1}{6}$.

Câu 17.

a) Ta có $\begin{cases} M \in (P) \cap (ABC) \\ AB \subset (ABC), AB \parallel (P). \end{cases}$

Suy ra giao tuyến của (P) và (ABC) là đường thẳng Mz qua M và song song với AB . Gọi $N = Mz \cap BC$. Tương tự, giao tuyến của (P) và (BCD) là đường thẳng $NQ \parallel CD$, với $Q \in BD$. Vậy thiết diện là hình bình hành $MNQR$. Do $MN \parallel AB$ và $NQ \parallel CD$ nên góc giữa AB và CD bằng góc giữa MN và NQ , do đó $\sin \widehat{MNQ} = \sin \alpha$ (do α bằng hoặc bù với $\widehat{MNQ}$). Diện tích hình bình hành $MNQR$ là

$$S_{MNQR} = NM \cdot NQ \cdot \sin \alpha.$$

Ta có:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{AC - x}{AC} \Rightarrow MN = \frac{AB}{AC} (AC - x).$$

Lại có: $NQ = MR$, $\frac{MR}{CD} = \frac{AM}{AC} = \frac{x}{AC} \Rightarrow MR = \frac{CD}{AC} x$. Do đó:

$$S_{MNQR} = \frac{AB}{AC} (AC - x) \cdot \frac{CD}{AC} x \cdot \sin \alpha = \frac{AB \cdot CD}{AC^2} (AC - x) x \cdot \sin \alpha$$

Vì $\frac{AB \cdot CD}{AC^2}$ không đổi và theo bất đẳng thức Cô si thì

$$(AC - x) \cdot x \leq \left(\frac{AC - x + x}{2} \right)^2 = \frac{AC^2}{4}.$$

Vậy S_{MNQR} lớn nhất là bằng $\frac{AB \cdot CD}{4} \sin \alpha$, đạt được khi và chỉ khi

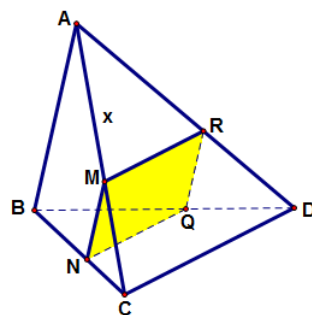
$$AC - x = x \Leftrightarrow x = \frac{AC}{2} \Leftrightarrow M \text{ là trung điểm } AC.$$

b) Chu vi của thiết diện là:

$$2(MN + MR) = 2 \left[\frac{AB}{AC} (AC - x) + \frac{CD}{AC} x \right] = 2 \frac{CD - AB}{AC} x + 2AB.$$

Vậy chu vi của thiết diện không phụ thuộc vào x khi và chỉ khi

$$CD - AB = 0 \Leftrightarrow AB = CD.$$



Câu 18.

a) Ta có:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ}. \quad (2)$$

$$k\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{PB} + k\overrightarrow{BD} + k\overrightarrow{DQ}. \quad (3)$$

Từ (1) và (3) ta có: $(1-k)\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} - k\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CQ} - k\overrightarrow{DQ}.$

Do $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{QC} = k\overrightarrow{QD}$ nên:

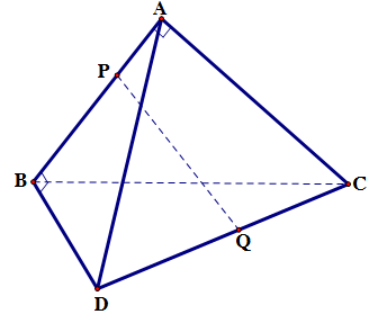
$$(1-k)\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AC} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BD} \text{ (do}$$

$k \neq 1$). Như vậy ba vectơ $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ đồng phẳng.

b) Theo câu a), ta có: $(1-k)\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB}.$

Theo giả thiết ta có: $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, $AB \perp BD \Rightarrow \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$

Vậy $(1-k)\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, mà $k \neq 1$ nên $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow PQ \perp AB.$



Câu 19.

Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Khi đó:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a \text{ và}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{a^2}{2}.$$

Do M là trung điểm AB nên:

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}). \text{ Do đó:}$$

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c}.$$

Xét điểm N thuộc AC và giả sử $\overrightarrow{NA} = t\overrightarrow{NC}$, $t \neq 1$. Khi đó:

$$\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DN} = t(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DN}) \Rightarrow \overrightarrow{DN} = \frac{\overrightarrow{DA} - t\overrightarrow{DC}}{1-t} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = \frac{\vec{a} - t\vec{c}}{1-t}.$$

Vậy:

$$\begin{aligned} DN \perp CM &\Leftrightarrow \overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right) (\vec{a} - t\vec{c}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a^2}{2} - t\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - t\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + ta^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + t\frac{a^2}{2} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Từ đó $N \in DC$ mà $\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{NA}$ thì $DN \perp CM$.

Câu 20.

Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CS} = \vec{c}$.

Khi đó: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4\sqrt{2}$, $|\vec{c}| = 2$

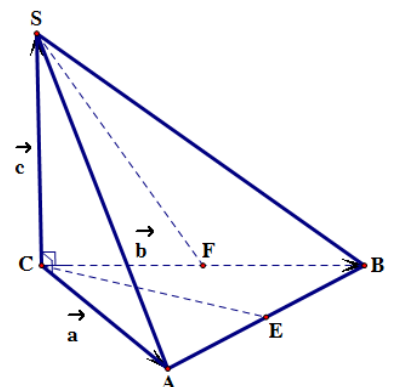
và $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \widehat{ACB} = 16.$$

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng CE và SF.

Khi đó: $\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{SF}|}{CE \cdot SF}.$

Ta có: $\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CS} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}.$



$$SF^2 = \left(\frac{1}{2} \vec{b} - \vec{c} \right)^2 = \frac{1}{4} \vec{b}^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2 = 8 + 4 = 12 \Rightarrow SF = 2\sqrt{3}.$$

$$\vec{CE} = \frac{\vec{CA} + \vec{CB}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \Rightarrow CE^2 = \frac{\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2}{4} = \frac{96}{4} = 24. \text{ Ta có:}$$

$$\begin{aligned} \vec{CE} \cdot \vec{SF} &= \frac{1}{4} (\vec{b} - 2\vec{c}) (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \frac{\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} - 2\vec{c} \cdot \vec{b}}{4} = 12. \end{aligned}$$

Vậy: $\cos \varphi = \frac{12}{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$, tức là góc giữa hai đường thẳng CE và SF bằng 45° .

Lưu ý. Như vậy, quy trình để giải một bài toán hình học bằng phương pháp vectơ là:

- ☑ Chọn một bộ ba vectơ không đồng phẳng làm cơ sở.
- ☑ Biểu diễn các vectơ liên quan theo cơ sở đó.
- ☑ Trả lời các yêu cầu đề bài.

Ngoài cách giải bằng phương pháp vectơ như trên ta còn có thể giải bằng "Phương pháp dựng góc" như sau: Gọi G là trung điểm EB , khi đó $FG \parallel CE$ nên

$$(CE, SF) = (FG, FS).$$

Ta có

$$\begin{aligned} SE^2 &= \frac{SA^2 + SB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{36 + 36}{2} - \frac{32}{4} = 28 \\ SG^2 &= \frac{SE^2 + SB^2}{2} - \frac{EB^2}{4} = \frac{28 + 36}{2} - \frac{8}{4} = 32 - 2 = 30. \end{aligned}$$

Do đó

$$\cos \widehat{SFG} = \frac{FS^2 + FG^2 - SG^2}{2FS \cdot FG} = \frac{12 + 6 - 30}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{-12}{4\sqrt{18}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $\widehat{SFG} = 135^\circ \Rightarrow (CE, SF) = (FG, FS) = 108^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

Câu 21.

Ta có:

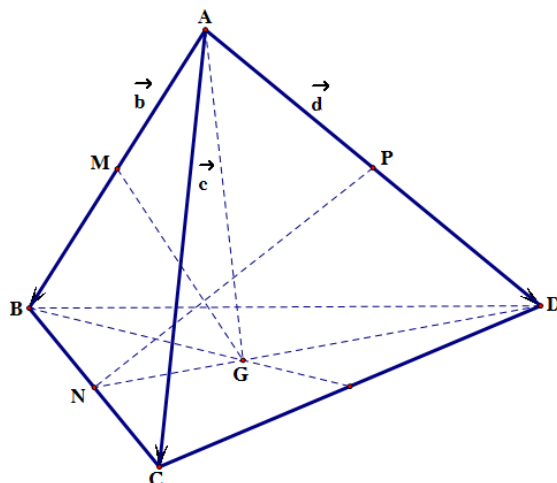
$$\begin{aligned} |\vec{b}| &= |\vec{c}| = |\vec{d}| = a \text{ và} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \widehat{ABC} \end{aligned}$$

$$= a^2 \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

Tương tự, ta có:

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{b} = \frac{a^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } \vec{MG} &= \vec{AG} - \vec{AM} \\ &= \frac{1}{3} (\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}) - \vec{AM} \\ &= \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3} - \frac{1}{2} \vec{b} \\ &= \frac{-\vec{b} + 2\vec{c} + 2\vec{d}}{6}. \end{aligned} \tag{1}$$



Ta có: $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}) = \frac{-\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}}{2}$. (2)

b) Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng MG và NP . Khi đó:

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{NP}|}{MG \cdot NP}. \quad (3)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{NP} &= \frac{1}{12} (-\vec{b} + 2\vec{c} + 2\vec{d}) (-\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}) \\ &= \frac{1}{12} (|\vec{b}|^2 - 2|\vec{c}|^2 + 2|\vec{d}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} - 3\vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{c} \cdot \vec{d}) \\ &= \frac{1}{12} \left(a^2 - \frac{3a^2}{2} \right) = -\frac{a^2}{12}. \\ MG^2 &= \frac{1}{36} (-\vec{b} + 2\vec{c} + 2\vec{d})^2 \\ &= \frac{1}{36} (|\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 + 4|\vec{d}|^2 - 4\vec{b} \cdot \vec{c} + 8\vec{c} \cdot \vec{d} - 4\vec{b} \cdot \vec{d}) \\ &= \frac{9a^2}{36} = \frac{a^2}{4}. \\ NP^2 &= \frac{1}{4} (\vec{b} + \vec{c} - \vec{d})^2 \\ &= \frac{1}{4} (|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{c} \cdot \vec{d} - 2\vec{b} \cdot \vec{d}) \\ &= \frac{1}{4} (3a^2 - a^2) = \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

Thay vào (3), ta được:

$$\cos \varphi = \frac{a^2}{12} : \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{6} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{\sqrt{2}}{6} \approx 76^\circ 22'.$$

Câu 22. Theo bài tập 10 (ở trang 37), ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \\ \Leftrightarrow AB \cdot CD \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + AC \cdot BD \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) \\ + AD \cdot BC \cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Theo giả thiết ta có:

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC.$$

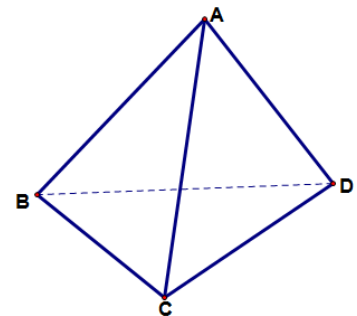
$$\cos \alpha = |\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})|.$$

$$\cos \beta = |\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB})|.$$

$$\cos \gamma = |\cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})|.$$

Do đó (1) trở thành:

$$\cos \alpha \pm \cos \beta \pm \cos \gamma = 0.$$



☑ Trường hợp 1: $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$. (2)

Do $\cos \alpha \geq 0, \cos \beta \geq 0, \cos \gamma \geq 0$ nên từ (2) ta có:

$$\cos \alpha = 0, \cos \beta = 0, \cos \gamma = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \cos \beta + \cos \gamma.$$

- ☑ Trường hợp 2: $\cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma = 0$. Khi đó $\cos \alpha = \cos \beta + \cos \gamma$.
- ☑ Trường hợp 3: $\cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = 0$. Khi đó $\cos \gamma = \cos \alpha + \cos \beta$.
- ☑ Trường hợp 4: $\cos \alpha - \cos \beta + \cos \gamma = 0$. Khi đó $\cos \beta = \cos \alpha + \cos \gamma$.

Như vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 23. Trên ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt đặt ba vectơ đơn vị $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lần lượt cùng hướng với tia chứa nó. Do ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng nên $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, suy ra $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \neq \vec{0}$. Do đó:

$$\begin{aligned} 0 < (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 &= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) \\ &= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2[|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \gamma + |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \alpha + |\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cos \beta] \\ &= 3 + 2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma). \end{aligned}$$

Suy ra $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > -\frac{3}{2}$.

Câu 24. Xét các vectơ đơn vị $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ lần lượt có hướng trùng với các tia MA, MB, MC, MD ($|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$). Khi đó

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos \widehat{AMB}.$$

Tương tự, suy ra

$$\begin{aligned} &\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{c} \cdot \vec{d} \\ &= \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 + \cos \alpha_4 + \cos \alpha_5 + \cos \alpha_6. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})^2 \\ &= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \vec{d}^2 \\ &\quad + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{c} \cdot \vec{d}) \\ &= 4 + 2(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 + \cos \alpha_4 + \cos \alpha_5 + \cos \alpha_6). \end{aligned}$$

Suy ra $\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 + \cos \alpha_4 + \cos \alpha_5 + \cos \alpha_6 \geq -2$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

Câu 1. Cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Nếu a song song với b và c vuông góc với a thì c vuông góc với b .
- B. Nếu c vuông góc với a và c vuông góc với b thì a song song với b .
- C. Nếu a và b vuông góc với c thì a và b không thể chéo nhau.
- D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Câu 2. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song.
- B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.
- C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì có thể vuông góc với nhau.
- D. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì hoặc song song với nhau hoặc vuông góc với nhau.

Câu 3. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

- A. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).
- B. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c .
- C. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.
- D. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

Câu 4. Mệnh đề nào **đúng** trong các mệnh đề sau?

- A. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.
- B. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.
- C. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).
- D. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c .

Câu 5 (HK2 Toán 11, Đức Thọ, Hà Tĩnh 2018).

Góc giữa hai đường thẳng bất kỳ trong không gian là góc nào trong các góc dưới đây.

- A. Góc giữa hai đường thẳng cắt nhau và không song song với chúng.
- B. Góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với chúng.
- C. Góc giữa hai đường thẳng cùng đi qua 1 điểm và lần lượt song song với chúng.
- D. Góc giữa hai đường thẳng cắt nhau và lần lượt vuông góc với chúng.

Câu 6. Trong không gian cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Nếu a và b cùng vuông góc với c thì $a \parallel b$.
- B. Nếu $a \parallel b$ và $c \perp a$ thì $c \perp b$.
- C. Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì $a \parallel b$.
- D. Nếu a và b cùng nằm trong $\text{mp}(\alpha)$, $(\alpha) \parallel c$ thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c .

Câu 7. Cho hai đường thẳng a và a' lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}$ và $\vec{u}'$. Nếu φ là góc giữa hai đường thẳng a và a' thì

- A. $\varphi = (\vec{u}, \vec{u}')$.
- B. $\varphi = \pi - (\vec{u}, \vec{u}')$.
- C. $\cos \varphi = \cos (\vec{u}, \vec{u}')$.
- D. $\cos \varphi = |\cos (\vec{u}, \vec{u}')|$.

Câu 8. Cho hình chóp $OABC$ có $OA = OB = OC = 1$, các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi M là trung điểm của AB . Tính tích vô hướng của hai vectơ $\vec{OC}, \vec{MA}$.

- A. 0.
- B. 1.
- C. -1.
- D. $\frac{1}{2}$.

Câu 9. Cho tứ diện $O.ABC$ trong đó ba đường thẳng OB, OC, OA đôi một vuông góc. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Hai cạnh đối nào của tứ diện cũng vuông góc với nhau.
- B. Mỗi cạnh OB, OC, OA của tứ diện đều vuông góc với đúng ba cạnh khác của tứ diện.
- C. Tam giác ABC là tam giác vuông.
- D. Tam giác ABC có thể là tam giác đều.

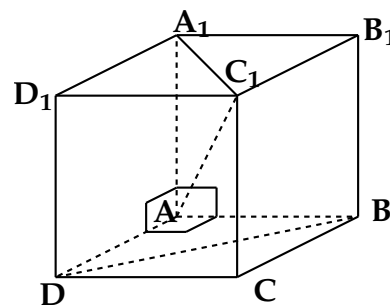
Câu 10. Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA = OB = OC = 1$; các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi M là trung điểm của AB . Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{BC}$.

- A. 0° . B. 60° . C. 90° . D. 120° .

Câu 11. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

Tính $\cos(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{BD})$.

- A. 1. B. 0. C. -1. D. $\frac{1}{2}$.



Câu 12. Trong không gian cho 2 đường thẳng song song a, b và một điểm M . Có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm M , vuông góc với a và b đồng thời cắt cả a và b ?

- A. Không có. B. Có một và chỉ một.
C. có vô số. D. Có một hoặc không có.

Câu 13. Trong không gian cho đường thẳng a và điểm M . Có bao nhiêu đường thẳng đi qua M , cắt a và vuông góc với a ?

- A. Không có. B. Có vô số.
C. Có một và chỉ một. D. Có một hoặc vô số.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$ là

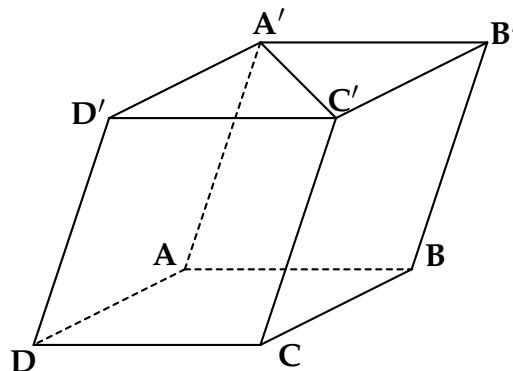
- A. 120° . B. 90° . C. 45° . D. 60° .

Câu 15. Cho hình chóp $SABC$ có $AB = AC, \widehat{SAB} = \widehat{SAC}$. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng SA và BC .

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Câu 16. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có 3 góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

- A. $\widehat{AB'C}$. B. $\widehat{DA'C'}$.
C. $\widehat{BB'D}$. D. $\widehat{BDB'}$.



Câu 17. Cho tứ diện đều $ABCD$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

- A. 90° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .

Câu 18. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$ là

- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại đúng không?

Sau đây là lời giải.

☑ Bước 1: Ta có sự tương đương:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD. \end{aligned}$$

☑ Bước 2: Chứng minh tương tự ta có: $AD \perp BC, AB \perp CD$.

☑ Bước 3: Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở đâu?

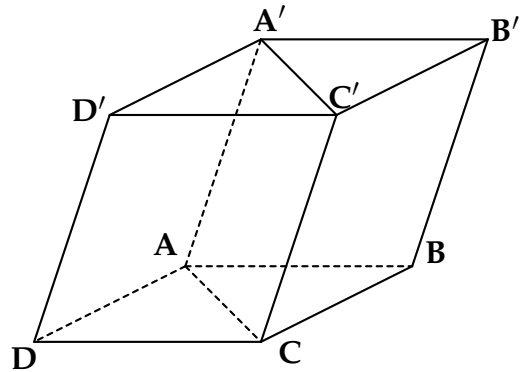
- A. Sai ở bước 3. B. Đúng. C. Sai ở bước 2. D. Sai ở bước 1.

Câu 20. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a . Gọi M là trung điểm AD . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1}$.

- A. $\frac{a^2}{2}$. B. a^2 . C. $\frac{3a^2}{4}$. D. $\frac{3a^2}{2}$.

Câu 21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có thể sai?

- A. $A'C' \perp BD$. B. $A'B \perp DC'$.
C. $BB' \perp BD$. D. $BC' \perp A'D$.



Câu 22. Cho $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$, góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120° . Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau?

- A. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$. B. $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$.
C. $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{139}$. D. $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 9$.

Câu 23. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của AB . Gọi α là góc giữa hai đường thẳng CM và DM , khi đó $\cos \alpha$ bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 24. Cho tứ diện đều $ABCD$, với I và J lần lượt là trung điểm AB và CD . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng CI và AJ .

- A. $\frac{2}{3}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 25. Cho tứ diện đều $ABCD$, I là trung điểm AB . Góc giữa hai đường thẳng IC và AD có cosin bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết

$$AB = a, AD = SA = a\sqrt{3}.$$

Hai mặt bên SAB và SAD là các tam giác vuông tại A . Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SB và AC . Tính $\cos \varphi$.

- A. $\cos \varphi = \frac{1}{3}$. B. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$. C. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 27. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của CD , N là điểm trên AD sao cho BN vuông góc với AM . Tính tỉ số $\frac{DN}{DA}$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Chọn khẳng định đúng?

A. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$.

B. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 6(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$.

C. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 4(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$.

D. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 2(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 A	4 C	7 D	10 D	13 D	16 B	19 B	22 D	25 D	28 C
2 C	5 C	8 A	11 B	14 B	17 A	20 A	23 C	26 B	
3 A	6 A	9 C	12 D	15 D	18 A	21 C	24 A	27 B	

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khi cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c thì mệnh đề: "Nếu a song song với b và c vuông góc với a thì c vuông góc với b " là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án **A**

Câu 2. Mệnh đề đúng là: Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì có thể vuông góc với nhau.

Chọn đáp án **C**

Câu 3. Mệnh đề đúng là: Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).

Chọn đáp án **A**

Câu 4. Mệnh đề đúng là: Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).

Chọn đáp án **C**

Câu 5. Dựa vào định nghĩa góc giữa hai đường thẳng.

Chọn đáp án **C**

Câu 6. Mệnh đề đúng là: Nếu a và b cùng vuông góc với c thì $a \parallel b$.

Chọn đáp án **A**

Câu 7. Do góc giữa hai đường thẳng bằng hoặc bù với góc giữa hai vectơ chỉ phương của chúng nên đáp án đúng là **D**.

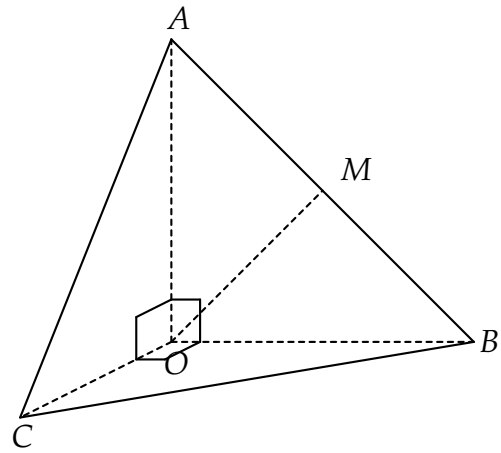
Chọn đáp án **D**

Câu 8.

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{MA} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BA} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= 0 - 0 = 0.\end{aligned}$$

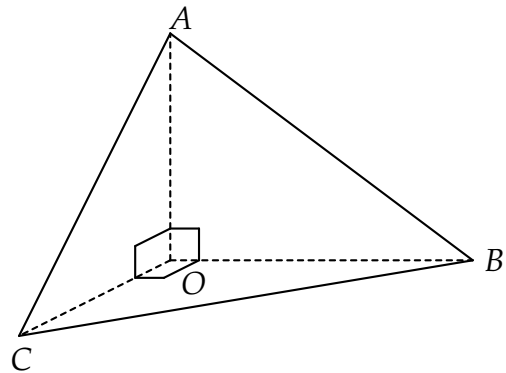
Vậy $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.



Chọn đáp án **A**

Câu 9.

Tam giác ABC luôn là tam giác nhọn.



Chọn đáp án **C**

Câu 10.

Ta có:

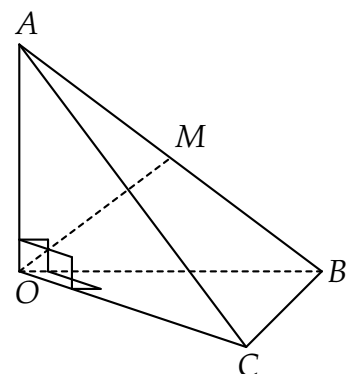
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{OB^2}{2} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Như vậy:

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{OM, BC}) &= \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC}}{OM \cdot BC} \\ \cos(\widehat{OM, BC}) &= -\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Do đó $\widehat{OM, BC} = 120^\circ$.

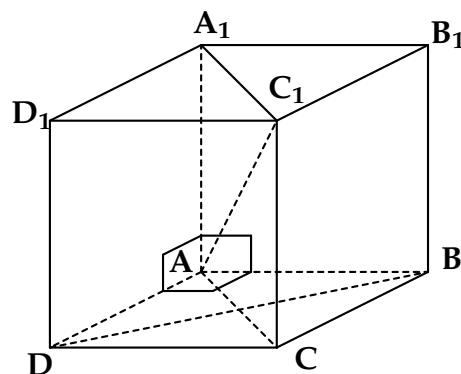
Chọn đáp án **D**



Câu 11.

Ta có:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC}) (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= 0. \\ & \text{Vậy } \overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{BD} = 0. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(B)**

Câu 12. Có 1 nếu M thuộc mặt phẳng chứa a và b , không có nếu M không thuộc mặt phẳng đó.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 13. Có 1 nếu M không thuộc a , có vô số nếu M thuộc a .

Chọn đáp án **(D)**

Câu 14. Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{SA} (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} \\ &= |\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{SC}| \cos \widehat{ASC} - |\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{SB}| \cos \widehat{ASB} = 0 \Rightarrow SA \perp BC. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

Câu 15. Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AS} &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AS} \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AS} \\ &= AC \cdot AS \cdot \cos \widehat{SAC} - AB \cdot AS \cdot \cos \widehat{SAB} \\ &= 0 \text{ (do } AC = AB, \widehat{SAB} = \widehat{SAC}). \end{aligned}$$

Suy ra góc giữa hai đường thẳng SA và BC bằng 90° .

Chọn đáp án **(D)**

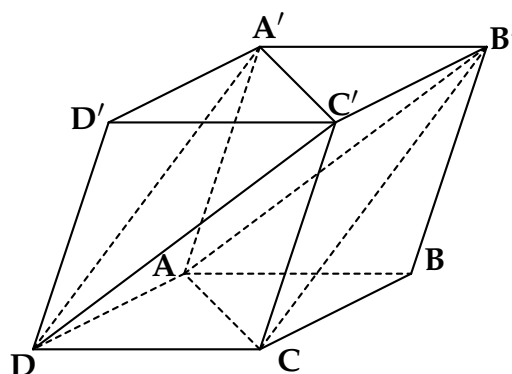
Câu 16.

Do $ACC'A'$ là hình bình hành nên AC song song với $A'C'$. Do đó:

$$(\widehat{AC, A'D}) = (\widehat{A'C', A'D}).$$

Như vậy:

$$(\widehat{AC, A'D}) = \widehat{DA'C'}.$$



Chọn đáp án **(B)**

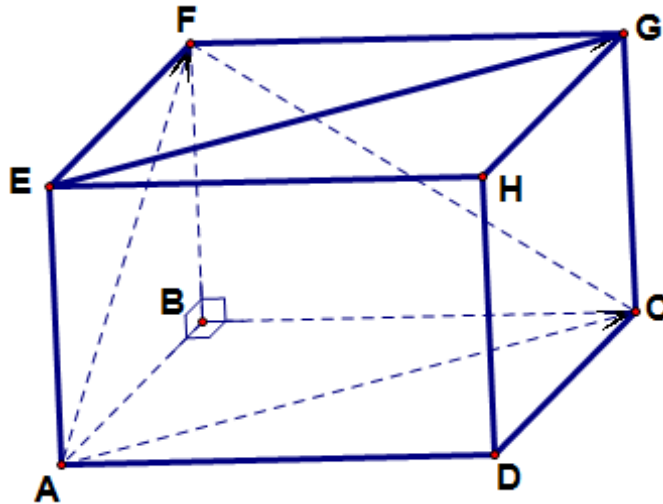
Câu 17. Gọi a là độ dài cạnh tứ diện. Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= AC \cdot CD \cdot \cos 120^\circ + CB \cdot CD \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0.\end{aligned}$$

Bởi vậy $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Rightarrow AB \perp CD$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 18. Dễ thấy rằng tam giác ACF là tam giác đều và $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$.



Như thế góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$ là:

$$(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{FAC} = 60^\circ.$$

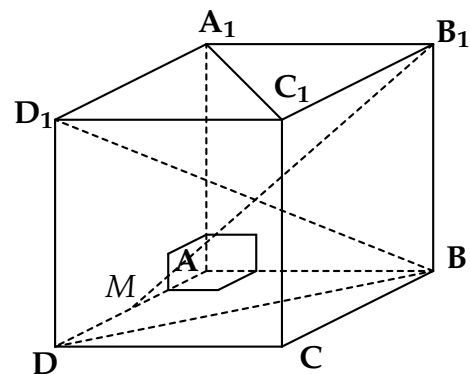
Chọn đáp án **(A)**

Câu 19. Lời giải đã cho là lời giải đúng.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 20.

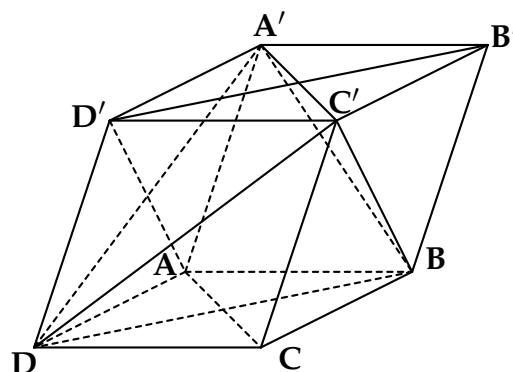
$$\begin{aligned}\text{Ta có } \overrightarrow{BD_1} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD_1}, \\ \text{Hay } \overrightarrow{BD_1} &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}. \\ \text{Ta có } \overrightarrow{B_1M} &= \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AM}. \\ \text{Hay } \overrightarrow{B_1M} &= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}. \\ \text{Do đó:} \\ \overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{B_1M} &= AB^2 - A_1A^2 + \frac{1}{2}AD^2 \\ \text{Hay } \overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{B_1M} &= \frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án **(A)**

Câu 21.

Dễ thấy các phương án **A**, **B**, **D** đúng. Phương án **C** sẽ bị sai trong trường hợp hình hộp có cạnh bên không vuông góc với mặt đáy.



Chọn đáp án **C**

Câu 22. Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3.5 \cos 120^\circ = -\frac{15}{2}$. Do đó:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 9 - 15 + 25 = 19$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 9 + 15 + 25 = 49$$

$$(\vec{a} - 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 9 + 30 + 100 = 139$$

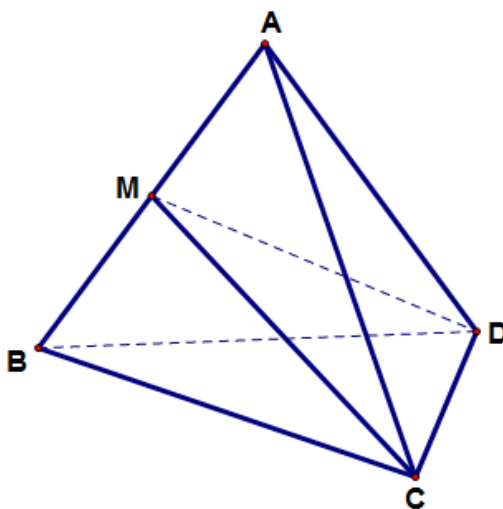
$$(\vec{a} + 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 9 - 30 + 100 = 79.$$

Như vậy **A**, **B**, **C** đúng, còn **D** sai.

Chọn đáp án **D**

Câu 23. Gọi a là độ dài cạnh của tứ diện đều. Khi đó:

$$CD = a, MC = MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Áp dụng định lí cosin vào tam giác CMD ta được:

$$\cos \widehat{CMD} = \frac{MC^2 + MD^2 - CD^2}{2MC \cdot MD} = \frac{\frac{3a^2}{2} - a^2}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **C**

Câu 24.

Giả sử cạnh tứ diện đều bằng a . Khi đó:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

Do đó:

$$\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

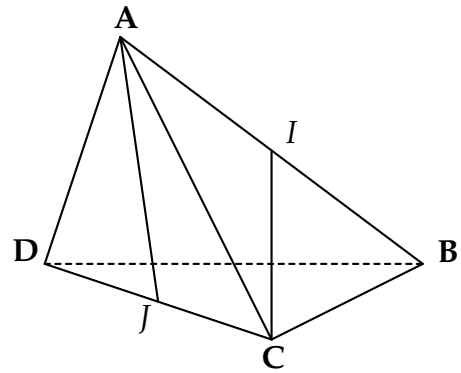
$$\text{Hay } \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \frac{-1}{2}a^2.$$

$$\text{Ta lại có } AJ = CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{AJ}) = \frac{-2}{3}.$$

Vậy cosin góc giữa hai đường thẳng AJ, CI là $\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án **(A)**



Câu 25.

Giả sử cạnh tứ diện đều bằng a . Khi đó:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2 \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Tương tự: } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}.$$

Ta có:

$$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

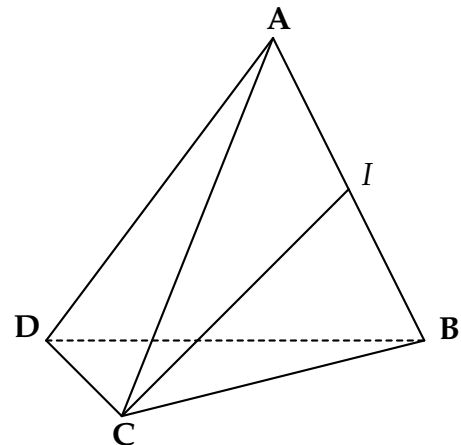
Do đó:

$$\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}.$$

$$\text{Mà } \cos(\widehat{IC, AD}) = \frac{|\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{IC}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} \text{ nên}$$

$$\cos(\widehat{IC, AD}) = \frac{a^2}{4} : \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án **(D)**



Câu 26.

Ta có:

$$\cos(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{SB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}}{4a^2}.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

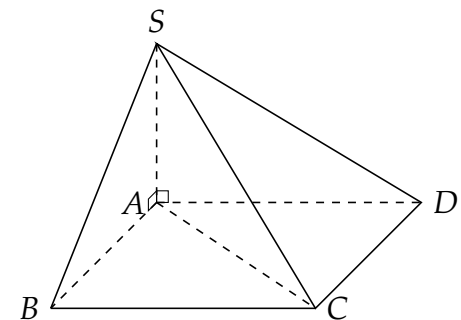
Ta có:

$$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AS} \cdot (m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}) = 0.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a \cdot 2a \cos 60^\circ = a^2.$$

$$\text{Do đó } \cos(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}. \text{ Vậy } \cos \varphi = \frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án **(B)**



Câu 27.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Ta có
 $|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = AB = a$,
 $(\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{d}) = (\vec{d}, \vec{b}) = 60^\circ$.

Suy ra $\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{b} = \frac{a^2}{2}$.

Giả sử $\overrightarrow{AN} = k \cdot \overrightarrow{AD}$. Khi đó
 $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\vec{b} + k\vec{d}$.

Vì M là trung điểm của CD nên

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{c} + \vec{d}.$$

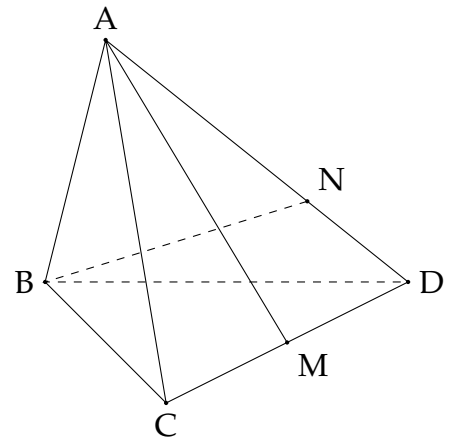
Khi đó $\overrightarrow{BN} \perp \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

$$\text{Hay } (-\vec{b} + k\vec{d}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = 0.$$

$$\text{Do đó } -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + k \cdot \frac{a^2}{2} + k \cdot a^2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \frac{DN}{DA} = \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **(B)**



Câu 28. Theo công thức bình phương vô hướng $(\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2$ ta có:

$$\begin{aligned} & MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \\ &= (\overrightarrow{MA})^2 + (\overrightarrow{MB})^2 + (\overrightarrow{MC})^2 + (\overrightarrow{MD})^2 \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD})^2 \\ &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) \\ &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \vec{0} \\ &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2. \end{aligned}$$

Lần lượt chọn M trùng A, B, C, D ta được:

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 + AD^2 &= 5GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \\ BA^2 + BC^2 + BD^2 &= 5GB^2 + GA^2 + GC^2 + GD^2 \\ CA^2 + CB^2 + CD^2 &= 5GC^2 + GA^2 + GB^2 + GD^2 \\ DA^2 + DB^2 + DC^2 &= 5GD^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \end{aligned}$$

Cộng bốn đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\begin{aligned} & AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 \\ &= 4(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2). \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)**

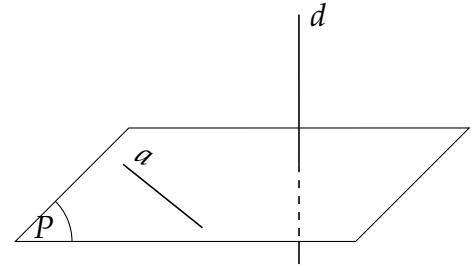
BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Một số định nghĩa và tính chất.

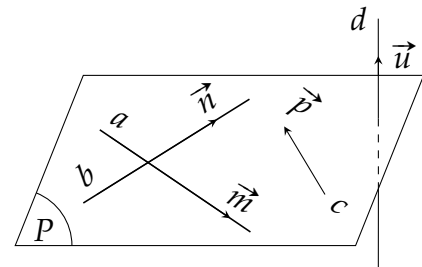
Định nghĩa 1.

Đường thẳng d gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong (P) , kí hiệu $d \perp (P)$.



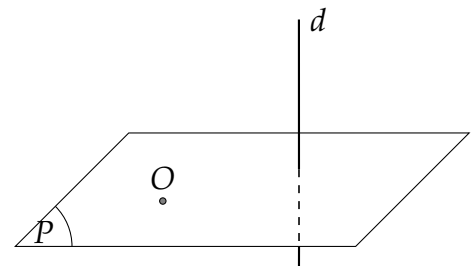
Định lí 1.

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì $d \perp (P)$.



Định lí 2.

Có duy nhất một mặt phẳng (P) đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một đường thẳng d cho trước.

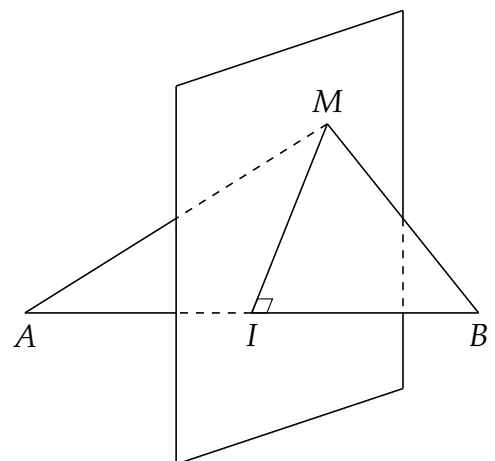


Định lí 3. Có duy nhất một đường thẳng d đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước.

Định nghĩa 2.

Cho đoạn thẳng AB có trung điểm là I . Mặt phẳng vuông góc với đường thẳng AB tại điểm I gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB .

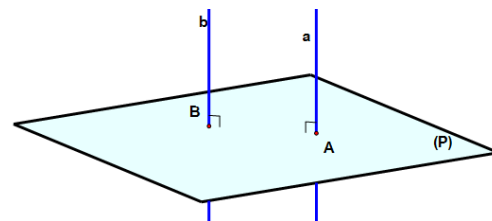
Lưu ý. Trong không gian, cho đoạn thẳng AB . Khi đó $MA = MB$ khi và chỉ khi M nằm trên mặt trung trực của đoạn thẳng AB .



2. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng.

Định lí 4.

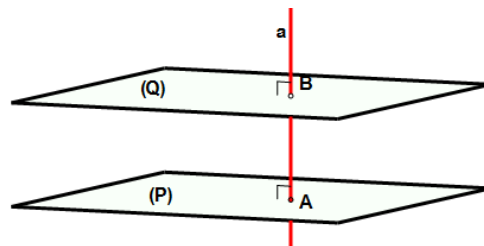
Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc một mặt phẳng thì song song với nhau. Như vậy:



$$\begin{cases} a \parallel b \\ (P) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) \perp b; \quad \begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (P) \\ a \neq b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$

Định lý 5.

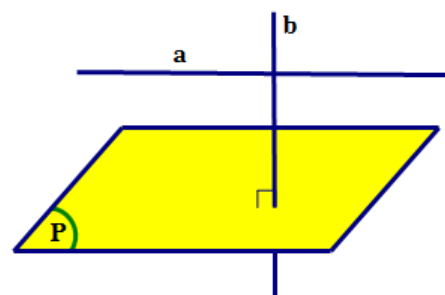
Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc một đường thẳng thì song song với nhau. Như vậy:



$$\begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q); \quad \begin{cases} (P) \perp a \\ (Q) \perp a \\ (P) \neq (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \parallel (Q).$$

Định lý 6.

Cho đường thẳng a và $mp(P)$ song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (P) thì cũng vuông góc với a . Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau. Như vậy:



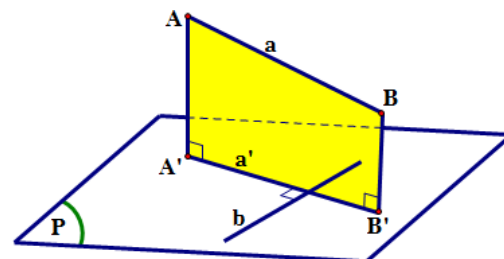
$$\begin{cases} a \parallel (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow b \perp a; \quad \begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \perp b \\ (P) \perp b \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P).$$

3. Định lý ba đường vuông góc.

Định nghĩa 3. Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương ℓ vuông góc với mặt phẳng (P) gọi là phép chiếu vuông góc lên (P) , hay được gọi đơn giản là phép chiếu lên (P) .

Định lý 7 (Định lý ba đường vuông góc).

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) . Điều kiện cần và đủ để $b \perp a$ là b vuông góc với hình chiếu a' của đường thẳng a trên (P) .



4. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Suy ra $OH \perp AB$. Tương tự, ta có $OH \perp BC$. Mà AB và BC là hai đường thẳng cắt nhau cùng nằm trong (ABC) nên dẫn đến $OH \perp (ABC)$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , đường thẳng SA vuông góc với (ABC) . Trong tam giác SAB kẻ đường cao AH , trong tam giác SAC kẻ đường cao AK , trong tam giác ABC kẻ đường cao BM .

a) Chứng minh: $BC \perp (SAB)$, $AH \perp (SBC)$.

b) Chứng minh: $SC \perp (AHK)$.

c) Chứng minh: $BM \parallel (AHK)$.

Lời giải

a) Ta có $\begin{cases} BC \perp BA \subset (SAB) \\ BC \perp SA \subset (SAB) \\ BA \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

Ta có $BC \perp (SAB)$, mà $AH \subset (SAB)$ nên BC vuông góc với AH .

$\begin{cases} AH \perp SB \subset (SBC) \\ AH \perp BC \subset (SBC) \\ SB \cap BC = B \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC).$

b)

Ta có $AH \perp (SBC)$.

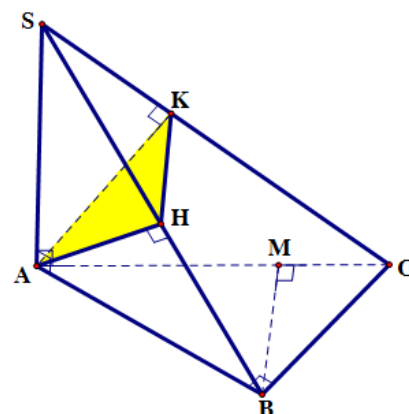
Mà $SC \subset (SBC)$ nên SC vuông góc với AH .

$\begin{cases} SC \perp AK \subset (AHK) \\ SC \perp AH \subset (AHK) \\ AK \cap AH = A \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK).$

c) Ta có $BM \perp AC$ mà AC là hình chiếu của SC trên (ABC)

nên $BM \perp SC$. Như vậy: $\begin{cases} BM \perp SC \\ (AHK) \perp SC \\ BM \not\subset (AHK). \end{cases}$

Sử dụng định lý 6 (ở trang 57) suy ra $BM \parallel (AHK)$.



Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a$, đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$.

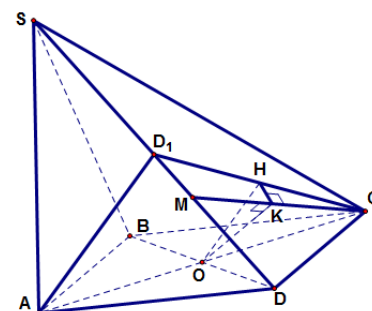
a) Gọi D_1 là trung điểm SD . Chứng minh rằng $AD_1 \perp (SCD)$.

b) Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, M là điểm thay đổi trên SD . Chứng minh rằng hình chiếu của điểm O trên CM thuộc đường tròn cố định.

Lời giải

a) Vì $SA = AD = a$ và D_1 là trung điểm của SD nên $AD_1 \perp SD$. Mặt khác, ta có $CD \perp (SAD)$ nên $AD_1 \perp CD$. Vậy AD_1 vuông góc với (SCD) .

b) Trong (AD_1C) , kẻ $OH \parallel AD_1$, khi đó H là trung điểm CD_1 và $OH \perp (SCD)$, ngoài ra H cố định. Gọi K là hình chiếu của O trên CM , khi đó theo định lý ba đường vuông góc suy ra $HK \perp KC$. Từ đó suy ra điểm K thuộc đường tròn đường kính HC trong (SCD) . Đó là đường tròn cố định chứa hình chiếu của tâm hình vuông lên (SCD) .



Lưu ý. Có thể chứng minh $KH \perp KC$ như sau:

$$\begin{cases} CK \perp OK \\ CK \perp OH \end{cases} \Rightarrow CK \perp KH.$$

Dạng 8. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau.

Phương pháp.

Cách 1. Chứng minh đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia.

Cách 2. Cho ΔABC . Khi đó $\begin{cases} d \perp AB \\ d \perp AC \end{cases} \Rightarrow d \perp BC$.

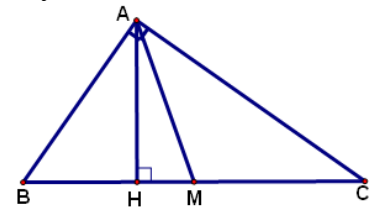
Cách 3. Sử dụng định lý ba đường vuông góc.

Cách 4. Nếu hai đường thẳng đó cắt nhau thì ta có thể dùng các phương pháp chứng minh đã biết trong hình học phẳng như: áp dụng định lý đảo các hệ thức lượng trong tam giác vuông, hai đường chéo hình thoi, hai cạnh kề của hình chữ nhật, góc nội tiếp...

Một số hệ thức lượng trong tam giác thường dùng.

Định lý. Nếu tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH , trung tuyến AM thì ta có các hệ thức sau:

- (1) $AM = \frac{1}{2}BC$;
- (2) $BC^2 = AB^2 + AC^2$;
- (3) $AH^2 = HB \cdot HC$;
- (4) $AB^2 = BH \cdot BC$ ($AC^2 = CH \cdot CB$);
- (5) $AH \cdot BC = AB \cdot AC$ ($= 2S_{\Delta ABC}$);
- (6) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.



Định lý đảo. Nếu tam giác ABC có đường cao AH với H thuộc cạnh BC ; trung tuyến AM và thỏa mãn một trong sáu hệ thức trên thì tam giác đó vuông tại A .

Định lý côsin trong tam giác. Trong ΔABC ta có:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B; \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \end{aligned}$$

Bài 5 (Kết quả bài tập này được phép sử dụng mà không cần chứng minh lại).

Chứng minh rằng nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh thứ ba.

Lời giải

Giả sử đường thẳng Δ vuông góc với cạnh AB và AC của ΔABC . Khi đó:

$$\begin{cases} \Delta \perp AB \subset (ABC) \\ \Delta \perp AC \subset (ABC) \\ AB \cap AC = A \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (ABC).$$

Mà $BC \subset (ABC)$ nên $\Delta \perp BC$.

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông.

- a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.
- b) Hạ $AH \perp SB$ tại H . Chứng minh $SC \perp BD$ và $SC \perp AH$.

✍️ **Lời giải**

a) Từ giả thiết $SA \perp (ABCD)$ ta có $SA \perp AB$, $SA \perp AD$, suy ra SAB và SAD là các tam giác vuông tại A . Lại có

$$\begin{cases} CD \perp DA \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp DS.$$

Suy ra $\triangle SDC$ vuông tại D .

$$\text{Ta có } \begin{cases} CB \perp BA \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp SB.$$

Suy ra $\triangle SBC$ vuông tại B .

b) Ta có

$$\begin{cases} BD \perp AC \subset (SAC) \\ BD \perp SA \subset (SAC) \\ AC \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$$

Ta có $CB \perp (SAB)$ mà $AH \subset (SAB)$ nên $AH \perp CB$. Vậy

$$\begin{cases} AH \perp SB \subset (SBC) \\ AH \perp CB \subset (SBC) \\ SB \cap CB = B \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC.$$

Cách khác. Ta có $BD \perp AC$, mà AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ nên $BD \perp SC$. Ta có $AH \perp SB$, mà SB là hình chiếu của SC trên (SAB) nên $AH \perp SC$.

Bài 7. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và H là trực tâm tam giác SBC . Chứng minh rằng $SG \perp BC$ và $AH \perp BC$.

✍️ **Lời giải**

Gọi E là trung điểm của BC . Do tam giác ABC đều nên ba điểm A, G, E thẳng hàng và $AE \perp BC$. Do tam giác SBC cân tại S nên $SE \perp BC$.

$$\text{Như vậy: } \begin{cases} BC \perp EA \subset (SAE) \\ BC \perp ES \subset (SAE) \\ EA \cap ES = E. \end{cases}$$

Suy ra $BC \perp (SAE)$.

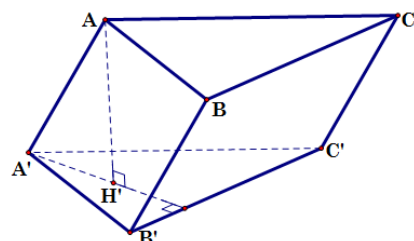
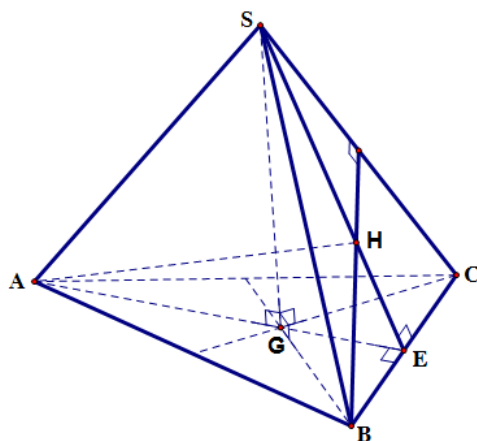
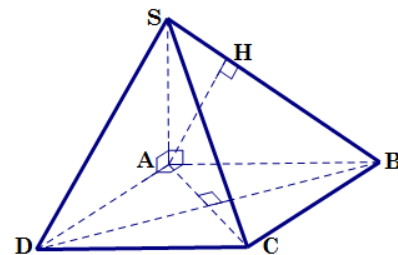
Mà $SG \subset (SAE)$ nên $BC \perp SG$. Rõ ràng H nằm trên SE nên AH nằm trong (SAE) , mà $BC \perp (SAE)$, nên $BC \perp AH$.

Lưu ý. Có thể chứng minh $SG \perp BC$ cách khác như sau: Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC) . Khi đó các tam giác vuông SOA, SOB, SOC bằng nhau, suy ra $OA = OB = OC$, hơn nữa vì tam giác ABC đều nên $O \equiv G$. Như vậy $SG \perp (ABC)$, suy ra $SG \perp BC$.

Bài 8. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có hình chiếu vuông góc của A trên $(A'B'C')$ trùng với trực tâm tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng tứ giác $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

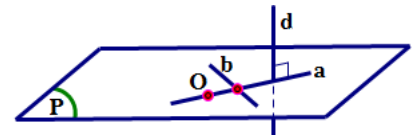
✍️ **Lời giải**

Gọi H' là trực tâm $\triangle A'B'C'$. Theo giả thiết thì $AH' \perp (A'B'C')$. Ta có $B'C' \perp A'H'$, mà $A'H'$ là hình chiếu của $A'A$ trên mặt phẳng $(A'B'C')$ nên theo định lý ba đường vuông góc suy ra $B'C' \perp AA'$. Do AA', BB', CC' là ba cạnh bên của hình lăng trụ nên $AA' \parallel BB' \parallel CC'$. Mà ta đã chứng minh được $B'C' \perp AA'$ nên suy ra $B'C' \perp BB'$ và $B'C' \perp CC'$, do đó hình bình hành $BCC'B'$ là hình chữ nhật.



Dạng 9. Dựng mặt phẳng (P) qua điểm O và vuông góc với đường thẳng d.

Phương pháp. Ta dựng hai đường thẳng a và b cắt nhau và cùng vuông góc với d , trong đó có ít nhất một đường đi qua O. Khi đó (P) chính là $mp(a, b)$.



Bài 9. Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác đều và $SA \perp (ABC)$. Xét điểm M cạnh SC sao cho M không trùng với S và C . Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB .

- Xác định mặt phẳng (P).
- Mặt phẳng (P) cắt tứ diện $SABC$ theo thiết diện là hình gì?

Lời giải

Phân tích. Đối với câu a), để xác định mặt phẳng (P), ta cần vẽ hai đường thẳng a và b cắt nhau và cùng vuông góc với AB , trong đó có ít nhất một đường đi qua M . Khi đó (P) chính là $mp(a, b)$. Do đã có $SA \perp (ABC)$ nên trước hết ta vẽ đường thẳng a qua M và song song với SA , khi đó $a \perp (ABC)$, suy ra $a \perp AB$. Giả sử a cắt AC tại N , khi đó $MN \perp AB$. Tiếp theo ta lấy b là đường thẳng qua N và vuông góc với AB tại P , lúc này (P) chính là mặt phẳng (MNP).

a) Gọi I là trung điểm AB . Khi đó $CI \perp AB$. Trong ΔSAC , kẻ MN song song với SA , cắt AC tại N . Ta có:

$$\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ SA \parallel MN \end{cases} \Rightarrow MN \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp AB.$$

Trong ΔABC , kẻ NP song song với CI , cắt AB tại P . Khi đó vì $CI \perp AB$ nên $NP \perp AB$. Vậy mặt phẳng (MNP) qua M và vuông góc với AB , do đó mặt phẳng (P) chính là mặt phẳng (MNP).

b) $(MNP) \cap (ABC) = NP$, $(MNP) \cap (SAC) = NM$. Để tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với (SAB) ta sử dụng định lý ?? ở trang ?? (xem thêm dạng ?? ở trang ??). Ta có:

$$\begin{cases} P \in (SAB) \cap (MNP) \\ MN \parallel (SAB) \\ MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (MNP) = Px,$$

với Px là đường thẳng qua P và song song với SA . Gọi $Q = Px \cap SB$. Khi đó thiết diện là tứ giác $MNPQ$. Vì $MN \parallel QP$, $MN \perp NP$, $QP \perp PN$ nên thiết diện là hình thang vuông tại N và P .

Bài 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA = SB = SC = b$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

- Chứng minh rằng $SG \perp (ABC)$. Tính SG .
- Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng SC . Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C . Khi đó hãy tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi (P).

Lời giải

a) Kẻ $SH \perp (ABC)$. Do $SA = SB = SC$ nên ba tam giác SHA, SHB, SHC bằng nhau theo trường hợp c-g-c. Do đó $HA=HB=HC$. Mặt khác $\triangle ABC$ đều nên H trùng với trọng tâm G của tam giác đó. Vậy $SG \perp (ABC)$. Trong tam giác vuông SGA ta có:

$$SG^2 = SA^2 - AG^2$$

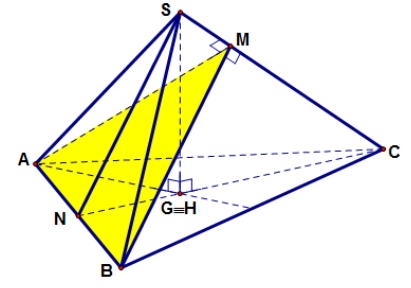
$$= b^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 = b^2 - \frac{a^2}{3}.$$

Từ đó $SG = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$, với $3b^2 > a^2$.

b) Ta có $\begin{cases} AB \perp GC \\ AB \perp GS \end{cases} \Rightarrow AB \perp SC$. Kẻ đường cao AM của tam giác SAC . Vì (ABM) chứa A và vuông góc với SC nên (P) chính là (ABM) . Do $\triangle SAC$ cân tại S nên M nằm trong đoạn thẳng SC khi và chỉ khi $\widehat{ASC} < 90^\circ$. Điều này tương đương với $AC^2 < SA^2 + SC^2$ hay $a^2 < 2b^2$. Trong trường hợp này, thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi (P) là $\triangle ABM$. Vì $\triangle ASC = \triangle BSC$ (c-c-c) nên $MA = MB$, vậy $\triangle ABM$ cân tại M . Gọi N là trung điểm AB . Ta có $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot MN = \frac{a}{2} \cdot MN$. Mặt khác $2S_{\triangle SNC} = MN \cdot SC = SG \cdot NC$.

$$\text{Suy ra: } MN = \frac{SG \cdot NC}{SC} = \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{b} = \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{2b}.$$

$$\text{Vậy } S_{\triangle ABM} = \frac{a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}}{4b}.$$



Bài 11. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có AA' vuông góc với (ABC) và $AA' = a\sqrt{3}$. Đáy ABC là tam giác cân tại A , $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi E là trung điểm cạnh AC . Một mặt phẳng (P) qua E và vuông góc với đường thẳng $B'C$. Tính diện tích thiết diện của mặt phẳng (P) với hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a .

✍️ Lời giải

Phân tích. Để xác định mặt phẳng (P) , ta cần vẽ hai đường thẳng a và b cắt nhau và cùng vuông góc với $B'C$, trong đó có ít nhất một đường đi qua E . Khi đó (P) chính là $mp(a, b)$. Do đáy ABC là tam giác cân tại A nên ta có $AD \perp BC$ (với D là trung điểm BC), suy ra AD vuông góc với mặt phẳng $(BCC'B')$ chứa $B'C$. Như vậy ta sẽ lấy a là đường thẳng qua E và song song với AD , cắt BC tại F , lúc này $EF \perp B'C$. Đường thẳng b phải cắt EF và vuông góc với $B'C$. Từ giả thiết bài toán thấy rằng tứ giác $BCC'B'$ là hình vuông, do đó $B'C \perp BC'$. Như vậy ta lấy b là đường thẳng qua F và song song với BC' .

Giải. Do $AA' \perp (ABC)$ nên BB' và CC' đều vuông góc với (ABC) , suy ra các mặt bên của lăng trụ là những hình chữ nhật. Định lý hàm số cosin trong $\triangle ABC$ cho ta:

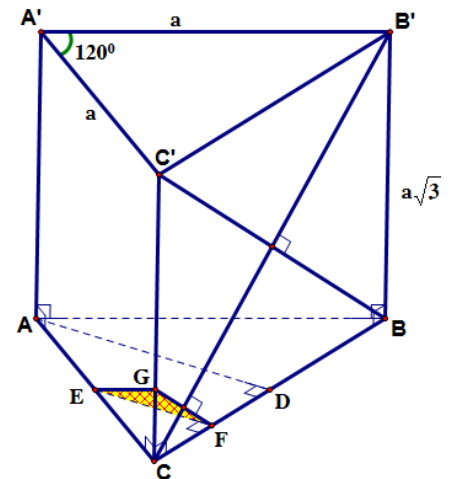
$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \widehat{BAC} \\ &= a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 120^\circ = 3a^2. \end{aligned}$$

Suy ra $BC = a\sqrt{3} = AA' = BB'$. Do đó mặt bên $(BCC'B')$ là hình vuông, dẫn tới $BC' \perp B'C$. Gọi D là trung điểm BC . Do tam giác ABC cân tại A nên $AD \perp BC$.

$$\begin{cases} AD \perp BC \\ AD \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AD \perp (BCC'B').$$

Mà $B'C \subset (BCC'B')$ nên $AD \perp B'C$. Gọi F là trung điểm DC . Qua F vẽ đường thẳng song song với BC' , cắt cạnh CC' tại G . Ta có:

$$\begin{cases} EF \parallel AD \\ AD \perp B'C \end{cases} \Rightarrow EF \perp B'C; \quad \begin{cases} GF \parallel BC' \\ BC' \perp B'C \end{cases} \Rightarrow GF \perp B'C.$$



Như vậy (EFG) qua E và vuông góc với $B'C$ nên (EFG) chính là (P) và thiết diện của (P) với lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là tam giác EFG . Ta có:

$$\begin{cases} EF \parallel AD \\ AD \perp (BCC'B') \end{cases} \Rightarrow EF \perp (BCC'B') \Rightarrow EF \perp FG.$$

Do đó: $S_{EFG} = \frac{1}{2}FE.FG$. Trong tam giác vuông ADB , ta có:

$$AD = AB \sin \widehat{ABC} = a \sin 30^\circ = \frac{a}{2}.$$

Do EF là đường trung bình của $\triangle ADC$ nên: $EF = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{4}$.

$$FG \parallel BC' \Rightarrow \frac{FG}{BC'} = \frac{CF}{CB} = \frac{1}{4} \Rightarrow FG = \frac{1}{4}BC' = \frac{1}{4}BB'\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Như vậy: } S_{EFG} = \frac{1}{2}FE.FG = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a^2\sqrt{6}}{32}.$$

Dạng 10. Dựng đường thẳng đi qua một điểm A cho trước và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước; Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Phương pháp.

☑ **Bước 1.** Chọn trong mặt phẳng (P) một đường thẳng d rồi dựng mặt phẳng (Q) qua A và vuông góc với d (xem dạng 9 ở trang 62).

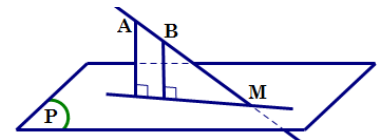
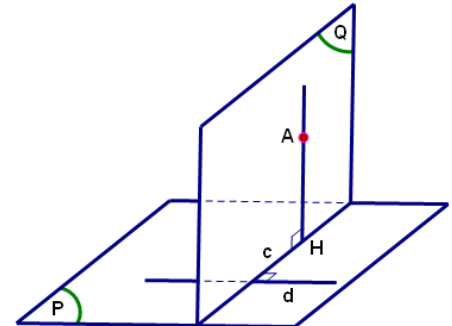
☑ **Bước 2.** Tìm $c = (P) \cap (Q)$.

☑ **Bước 3.** Trong (Q) dựng $AH \perp c$ tại H .

- Khi đó AH là đường thẳng cần tìm.
- Khoảng cách từ A đến (P) bằng độ dài đoạn thẳng AH : $d(M, (P)) = AH$.

Lưu ý. Giả sử đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (P) tại M . Trên Δ

lấy hai điểm A và B . Khi đó $\frac{d(A; (P))}{d(B; (P))} = \frac{AM}{BM}$.



Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là vuông cạnh a . Biết SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$.

- Hãy dựng đường thẳng qua trung điểm của cạnh SC và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.
- Hãy dựng đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (SBC) . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .
- Tính khoảng cách từ tâm O của hình vuông $ABCD$ đến (SBC) .

🔗 Lời giải

Phân tích. Do SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên để giải câu a) ta cần phải vẽ đường thẳng qua M và song song với đường thẳng SA , khi đó đường thẳng này sẽ qua M và vuông

góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Đối với câu b) khó hơn nên bạn đọc hãy làm tuần tự theo các bước đã trình bày ở dạng 10 (ở trang 64).

Giải.

a) Gọi M , O lần lượt là trung điểm của SC , AC . Khi đó $MO \parallel SA$ mà $SA \perp (ABCD)$ nên $MO \perp (ABCD)$, vậy O là hình chiếu của M trên $(ABCD)$, hay nói cách khác MO là đường thẳng qua M và vuông góc với $(ABCD)$.

b) Trong (SBC) , chọn đường thẳng BC . Ta có (SAB) là mặt phẳng chứa A và vuông góc với BC , giao tuyến của (SAB) và (SBC) là SB . Trong tam giác SAB kẻ đường cao AH (H thuộc SB). Khi đó:

$$\begin{cases} AH \perp SB \subset (SBC) \\ AH \perp BC \subset (SBC) \\ SB \cap BC = B \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC).$$

Vậy AH là đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (SBC) . Vì AH là đường cao của tam giác vuông SAB nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

c) Trong tam giác CAH , vẽ $OP \parallel AH$, khi đó P là trung điểm HC và đường thẳng OP qua O , vuông góc với (SBC) . Khoảng cách từ O đến (SBC) là

$$OP = \frac{1}{2}AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Lưu ý. Dạng toán 10 (ở trang 64) rất quan trọng, được sử dụng để giải nhiều bài toán hình học không gian liên quan đến hình chiếu, góc, khoảng cách.

Bài 13. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O , cạnh bằng a và $AC = a$. Từ trung điểm H của cạnh AB , dựng SH vuông góc với $(ABCD)$. Cho $SH = a$.

a) Hãy dựng đường thẳng qua H và vuông góc với (SCD) , tính khoảng cách từ H đến (SCD) , từ đó suy ra khoảng cách từ O đến (SCD) .

b) Tính khoảng cách từ A đến (SBC) .

Lời giải

Vì tam giác ABC đều và H là trung điểm đoạn thẳng AB nên $CH \perp AB$, mà $CD \parallel AB$ nên $CH \perp CD$.

a) Ta có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$. Trong mp (SCD) chọn đường thẳng CD . Ta có:

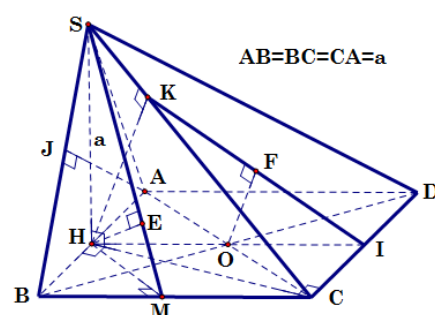
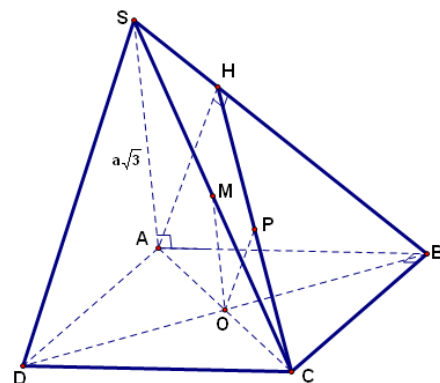
$$\begin{cases} CD \perp CH \subset (SHC) \\ CD \perp SH \subset (SHC) \\ CH \cap SH = H \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SCH).$$

Vậy (SHC) là mặt phẳng chứa H và vuông góc với CD .

Lại có $(SCH) \cap (SCD) = SC$. Kẻ HK vuông góc với SC tại K .

Khi đó

$$\begin{cases} HK \perp SC \subset (SCD) \\ HK \perp CD \subset (SCD) \\ SC \cap CD = C \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SCD).$$



Vậy HK là đường thẳng qua H và vuông góc với (SCD) . Vì HK là đường cao của tam giác vuông SHC nên $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HC^2}$. Ta có $HS = a$, do HC là đường cao của tam giác đều cạnh a nên $HC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Vì thế: } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2}.$$

$$\text{Suy ra: } HK = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow d(H, (SCD)) = HK = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Kẻ đường thẳng qua O , song song với HK , cắt KI tại F . Khi đó F là hình chiếu của O trên (SCD) , do đó

$$d(O, (SCD)) = OF = \frac{HK}{2} = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

b) Trước hết ta tính khoảng cách từ H đến (SBC) . Ta sẽ tìm hình chiếu của H trên (SBC) . Trong (SBC) chọn đường thẳng BC . Vẽ M là hình chiếu của H trên BC . Ta có

$$\begin{cases} BC \perp MH \subset (SHM) \\ BC \perp SH \subset (SHM) \\ HM \cap HS = H \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHM).$$

Vậy (SHM) là mặt phẳng chứa H và vuông góc với BC , giao tuyến của (SHM) và (SBC) là SM . Vẽ E là hình chiếu của H trên SM . Khi đó

$$\begin{cases} HE \perp SM \subset (SBC) \\ HE \perp BC \subset (SBC) \\ SM \cap BC = M \end{cases} \Rightarrow HE \perp (SBC).$$

Vậy E là hình chiếu của H trên (SBC) , do đó $d(H, (SBC)) = HE$. Do HE là đường cao của tam giác vuông SHM nên

$$\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{19}{3a^2}.$$

Từ đây $HE = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}} = \frac{a\sqrt{57}}{19}$. Vì đường thẳng AH cắt (SBC) tại B nên

$$\frac{d(A, (SBC))}{d(H, (SBC))} = \frac{AB}{HB} = 2 \Rightarrow d(A, (SBC)) = 2d(H, (SBC)) = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

Khoảng cách từ A đến (SBC) là: $d(A, (SBC)) = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh bằng a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = \frac{a}{2}$.

a) Hãy dựng đường thẳng qua O và vuông góc với (SCD) , tính khoảng cách từ O đến (SCD) .

b) Gọi E là trung điểm cạnh SA . Chứng minh rằng đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (BDE) và tính khoảng cách từ trung điểm M của cạnh BC đến mặt phẳng (BDE) .

Lời giải

Phân tích. Trong (SCD) chọn đường thẳng CD . Ta cần dựng mặt phẳng qua O và vuông góc với CD . Do đã có $OS \perp CD$ nên ta chỉ cần vẽ $OK \perp CD$ tại K sẽ được mặt phẳng qua O và vuông góc với CD là (SOK) .

Giải.

a) Vẽ OK vuông góc với CD tại K . Khi đó CD vuông góc với (SOK) . Ta có giao tuyến của hai mặt phẳng (SOK) và (SCD) là SK . Vẽ OH vuông góc với giao tuyến SK tại H . Kết hợp với OH vuông góc với CD suy ra $OH \perp (SCD)$. Vậy OH là đường thẳng qua O và vuông góc với (SCD) tại H . Khoảng cách từ O đến (SCD) là: $d(O, (SCD)) = OH$. Ta có ABC và ACD là những tam giác đều. Trong tam giác vuông OCK , ta có:

$$OK = OC \sin \widehat{OCK} = \frac{a}{2} \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Trong tam giác vuông SOK , ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{16}{3a^2} = \frac{28}{3a^2}.$$

Vậy khoảng cách từ O đến (SCD) là $OH = a\sqrt{\frac{3}{28}}$.

b) Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SA$.

Tam giác SAC có trung tuyến $SO = \frac{a}{2} = \frac{AC}{2}$ nên ΔSAC vuông tại S . Vì OE là đường trung bình của ΔSAC nên $OE \parallel SC$, suy ra $OE \perp SA$. Ta có:

$$\begin{cases} SA \perp BD \subset (BDE) \\ SA \perp OE \subset (BDE) \\ BD \cap OE = O \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BDE).$$

Do $AE \perp (BDE)$ nên $d(A, (BDE)) = AE$. Tam giác vuông SAC có trung tuyến $SO \perp AC$ nên tam giác SAC vuông cân tại S , suy ra:

$$SA = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow d(A, (BDE)) = AE = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Gọi $G = AM \cap BO \Rightarrow G = AM \cap (BDE)$ và G là trọng tâm tam giác ABC . Do đó:

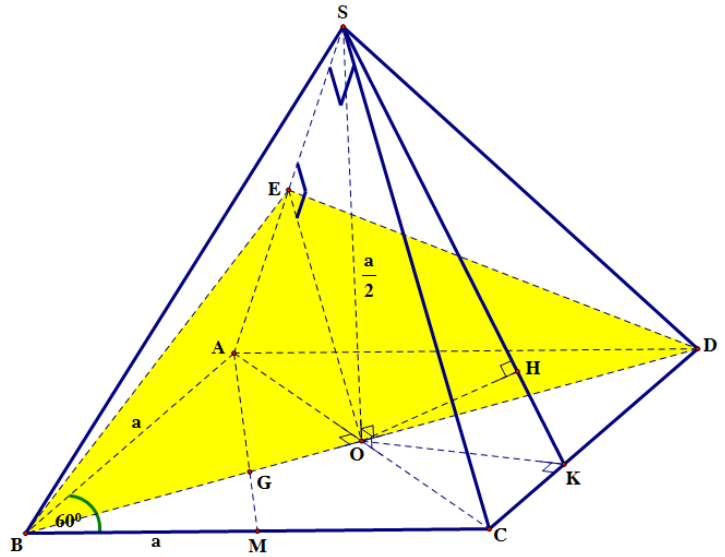
$$\frac{d(M, (BDE))}{d(A, (BDE))} = \frac{GM}{GA} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(M, (BDE)) = \frac{1}{2}d(A, (BDE)) = \frac{a\sqrt{2}}{8}.$$

Lưu ý. Có thể chứng minh SA vuông góc với mặt phẳng (BDE) cách khác. Ta có

$$SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}} = a,$$

như vậy tam giác SDA cân tại D , suy ra $SA \perp ED$. Tương tự ta cũng có $SA \perp BE$. Tóm lại:

$$\begin{cases} SA \perp ED \subset (BDE) \\ SA \perp EB \subset (BDE) \\ ED \cap EB = E \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BDE).$$

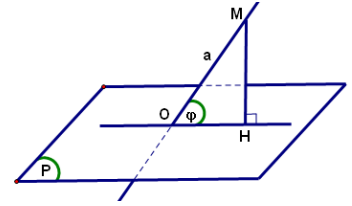


Dạng 11. Xác định góc φ (với $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$) giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) .

Phương pháp. Sử dụng định nghĩa 4 ở trang 57, cụ thể như sau:

☑ **Bước 1.** Tìm $O = a \cap (P)$.

☑ **Bước 2.** Chọn $M \in a$. Dựng H là hình chiếu của M trên (P) .
 Khi đó $\varphi = \widehat{MOH}$.



Bài 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a tâm O , gọi I là trung điểm AB . Biết $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = SB = SD = a\sqrt{3}$,

- Tính góc giữa đường thẳng SA, SB, SC, SD với đáy $(ABCD)$.
- Tính góc giữa SB, SD với mặt phẳng (SAC) .
- Tính góc giữa SC với mặt phẳng (SDI) .

✍ **Lời giải**

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (BAD) . Khi đó ba tam giác vuông SHA, SHB, SHD bằng nhau, suy ra $HA = HB = HD$ hay H là tâm của tam giác đều ABD , như vậy H là giao điểm của AO và DI . Do $SH \perp (ABCD)$ nên hình chiếu của SD trên $(ABCD)$ là HD , suy ra góc giữa SD và $(ABCD)$ là góc giữa DS và DH , tức là góc $\widehat{SDH}$. Ta có:

$$DH = \frac{2}{3}DI = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos \widehat{SDH} = \frac{DH}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra $\widehat{SDH} \approx 70^\circ 32'$.

Tương tự, góc giữa SA, SB với $(ABCD)$ là $\approx 70^\circ 32'$. Hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ là HC , do đó góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc giữa CS và CH , tức là $\widehat{SCH}$. Ta có:

$$SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{8a^2}{3}} = \frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$$

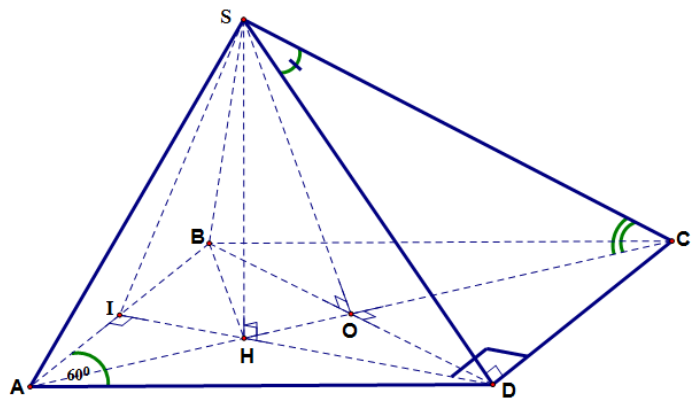
$$CH = CO + OH = AO + \frac{1}{3}AO = \frac{4}{3}AO = \frac{4}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan \widehat{SCH} = \frac{SH}{CH} = \frac{\frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SCH} \approx 54^\circ 44'.$$

Vậy góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCH} \approx 54^\circ 44'$.

b) Do $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$. Ta có: $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BD$. Như vậy:

$$\begin{cases} BD \perp SH \subset (SAC) \\ BD \perp AC \subset (SAC) \\ SH \cap AC = H \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC).$$



Hình chiếu của SB trên (SAC) là SO . Góc giữa SB và (SAC) là góc giữa SB và SO , tức là góc $\widehat{BSO}$.

$$\sin \widehat{BSO} = \frac{BO}{SB} = \frac{a}{2\sqrt{3}a} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{BSO} \approx 16^\circ 47'.$$

Vậy góc giữa SB, SD với (SAC) bằng nhau và bằng $\widehat{BSO} \approx 16^\circ 47'$.

c) $\begin{cases} AB \parallel CD \\ DI \perp AB \end{cases} \Rightarrow DI \perp CD$. Ta có:

$$\begin{cases} CD \perp DI \subset (SDI) \\ CD \perp SH \subset (SDI) \\ DI \cap SH = H \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SDI).$$

Như vậy hình chiếu của SC trên (SDI) là SD , do đó góc giữa SC với mặt phẳng (SDI) là $\widehat{CSD}$.

$$\tan \widehat{CSD} = \frac{CD}{SD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CSD} = 30^\circ.$$

Vậy góc giữa SC và mặt phẳng (SDI) bằng 30° .

Bài 16. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh bên AA_1 vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và B_1C_1 . Biết $MN = a$ và góc giữa MN với (ABC) là α .

a) Tính cạnh đáy và cạnh bên của lăng trụ.

b) Xác định góc α biết góc giữa MN và mặt bên (BCC_1B_1) là 30° .

Lời giải

a) Gọi P là trung điểm của BC . Khi đó $NP \perp (ABC)$.

Như thế $\widehat{PMN} = \alpha$. Từ đó:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{MP}{MN} \\ \sin \alpha = \frac{NP}{MN} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} MP = a \cos \alpha \\ NP = a \sin \alpha. \end{cases}$$

$$AB = AC = 2MP = 2a \cos \alpha,$$

$$AA_1 = NP = a \sin \alpha.$$

$$BC = AB\sqrt{2} = 2a\sqrt{2} \cos \alpha.$$

$$b) \text{ Ta có } \begin{cases} AP \perp BC \subset (BCC_1B_1) \\ AP \perp NP \subset (BCC_1B_1) \\ BC \text{ cắt } NP. \end{cases}$$

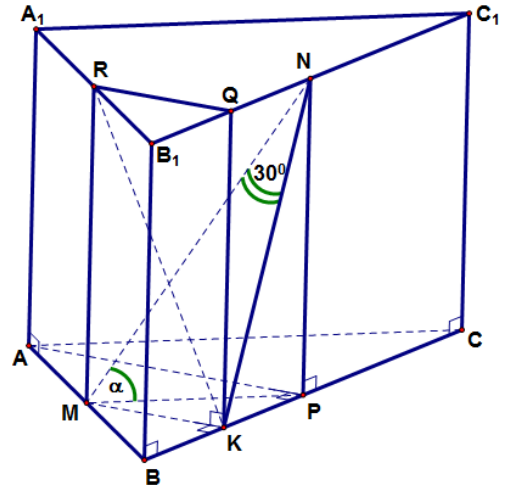
Suy ra $AP \perp (BCC_1B_1)$. Gọi K là trung điểm của BP thì $MK \parallel AP$. Vì thế MK vuông góc với (BCC_1B_1) . Thành thử góc giữa MN và mặt phẳng (BCC_1B_1) là $\widehat{MNK} = 30^\circ$. Ta có

$$\sin \widehat{MNK} = \frac{MK}{MN} \Rightarrow MK = MN \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}.$$

Mặt khác, vì $MK = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}BP = KP$ nên $\triangle MPK$ vuông cân tại K nên

$$MP = MK\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{MP}{MN} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Lưu ý. Có thể dựng hình chiếu vuông góc của M trên (BCC_1B_1) bằng cách vận dụng dạng toán 10 (ở trang 64) như sau:



- ☑ Trong (BCC_1B_1) , chọn đường thẳng BC .
- ☑ Mặt phẳng qua M và vuông góc với BC là $(MKQR)$, với K, Q, R lần lượt là trung điểm của BP, B_1N, A_1B_1 .
- ☑ $(BCC_1B_1) \cap (MKQR) = KQ$.
- ☑ Hình chiếu của M trên KQ là K

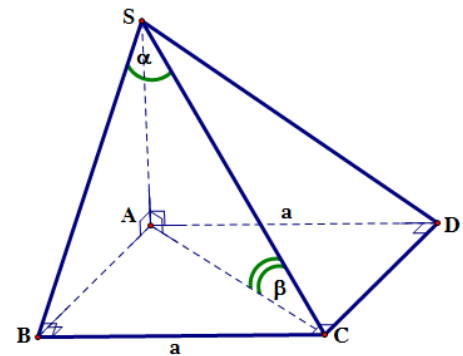
Khi đó K là hình chiếu của M trên (BCC_1B_1) , suy ra góc giữa đường thẳng MN và (BCC_1B_1) là $(\widehat{NM, NK}) = \widehat{MNK}$.

Bài 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $BC = a$, SA vuông góc với $(ABCD)$. Biết rằng SC tạo với (SAB) một góc α và tạo với mặt đáy góc β . Chứng minh rằng:

$$AB = \frac{a\sqrt{\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}}{\sin \alpha}.$$

✍️ Lời giải

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ là AC , do đó $\beta = \widehat{SCA}$. Ta có $BC \perp BA$, $BC \perp SA$ mà BA và SA là hai đường thẳng cắt nhau cùng nằm trong (SAB) nên suy ra $BC \perp (SAB)$, do đó hình chiếu của SC trên (SAB) là SB , bởi vậy $\alpha = \widehat{BSC}$. Trong tam giác vuông SBC , ta có: $\sin \alpha = \frac{a}{SC} \Rightarrow \frac{a}{\sin \alpha} = SC$. Mặt khác: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$.
Mà $\cos \beta = \frac{AC}{SC}$ nên:



$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{SC^2 \cos^2 \beta - a^2} = \sqrt{\frac{a^2 \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha} - a^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 (\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha}} = \frac{a}{\sin \alpha} \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{a}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{1 + \cos 2\beta}{2} - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{a}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{1}{2} (\cos 2\alpha + \cos 2\beta)} \\ &= \frac{a\sqrt{\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

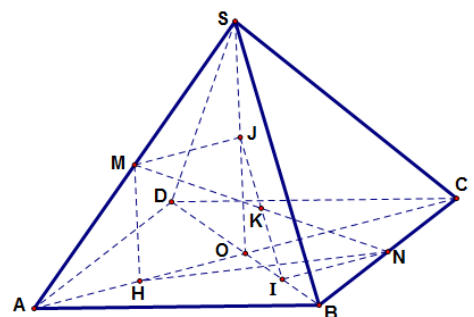
Bài 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a , $SO \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Cho biết góc giữa đường thẳng MN và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính góc giữa đường thẳng MN và (SBD) .

✍️ Lời giải

Cách 1. Kẻ $MH \perp (ABCD)$, dễ thấy H là trung điểm cạnh AO . Khi đó $\widehat{MNH} = 60^\circ$. Xét tam giác NCH , ta có:

$$\begin{aligned} NH^2 &= HC^2 + NC^2 - 2HC \cdot NC \cdot \cos \widehat{NCH} \\ &= \left(\frac{3}{4}a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos 45^\circ \\ &= \frac{9a^2}{8} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } NH = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.$$



Xét tam giác vuông MNH , ta có: $\frac{HN}{MN} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

Vậy $MH = HN \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của OB, SO . Khi đó $MJ \parallel IN$

và $MJ = IN$, MN cắt IJ tại K thì $JK = \frac{1}{2}IJ$. Vì $IN \perp (SBD)$ nên $MJ \perp (SBD)$. Vậy hình chiếu của MN trên (SBD) là JI , do đó góc giữa MN và (SBD) là $\widehat{MKJ}$. Ta có

$$IJ^2 = JO^2 + OI^2 = MH^2 + OI^2 = \frac{15a^2}{8} + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{16a^2}{8} = 2a^2.$$

Từ đó $IJ = a\sqrt{2}$ và $IK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Suy ra

$$\tan \widehat{MKJ} = \frac{MJ}{JK} = \frac{a\sqrt{2}}{4} : \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MKJ} = \arctan \frac{1}{2}.$$

Cách 2. Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$.

Suy ra:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB}). \end{aligned}$$

Từ đó và do $\overrightarrow{SO}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OB}$ đôi một vuông góc nên

$$MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{OB}^2) = \frac{1}{4}\left(SO^2 + \frac{5a^2}{2}\right).$$

Suy ra $MN = \frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}$. Ta có $\overrightarrow{AC}$ là vectơ pháp tuyến của (SBD) . Gọi α là góc giữa MN và (SBD) . Khi đó:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\frac{1}{2} |(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AC}|}{\frac{1}{2} \sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}} \cdot a\sqrt{2}} \\ &= \frac{AC^2}{\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{2a}{\sqrt{2SO^2 + 5a^2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ta có $\overrightarrow{SO}$ là vectơ pháp tuyến của $(ABCD)$. Do góc giữa đường thẳng MN và $(ABCD)$ bằng 60° nên:

$$\begin{aligned} \sin 60^\circ &= \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{SO}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{SO}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{1}{2} |(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{SO}|}{\frac{1}{2} \sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}} \cdot SO} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{SO^2}{\frac{1}{2} \sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}} \cdot SO} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{SO}{\frac{1}{2} \sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}} \\ \Leftrightarrow 8SO^2 &= 3(2SO^2 + 5a^2) \Leftrightarrow 2SO^2 = 15a^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sin \alpha = \frac{2a}{\sqrt{15a^2 + 5a^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$.

C. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1. Đề bài

Bài 19. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên $mp(ABC)$. Chứng minh rằng:

- $BC \perp (OAH)$.
- H là trực tâm của tam giác ABC và $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.
- Các góc của tam giác ABC đều nhọn.
- Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2.$$

Bài 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Các tam giác SAB, SAD vuông tại A . Trên cạnh AB ta lấy điểm M , trên cạnh AD ta lấy điểm N và trên SB lấy điểm E sao cho $MN \perp AC$ và $ME \perp SB$. Chứng minh rằng $SC \perp (MNE)$.

Bài 21. Trong mặt phẳng (P) cho ΔABC vuông tại B với

$$AB = a\sqrt{2}, BC = 2a.$$

Điểm O nằm ngoài mặt phẳng (P) sao cho $OA \perp (P)$ và $OA = a\sqrt{2}$.

- Tính góc tạo bởi các đường thẳng OB, OC với (P) .
- Tính góc giữa đường thẳng OA với (OBC) .

Bài 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC, SD .

- Chứng minh $BC \perp (SAB), CD \perp (SAD)$ và $BD \perp (SAC)$.
- Chứng minh $SC \perp (AHK)$ và điểm I thuộc (AHK) .
- Chứng minh $HK \perp (SAC)$, từ đó suy ra $HK \perp AI$.
- Chứng minh rằng tứ giác $AHIK$ nội tiếp một đường tròn.

Bài 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC không vuông. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC, SBC . Chứng minh rằng:

- AH, SK, BC đồng quy.
- $SC \perp (BHK)$.
- $HK \perp (SBC)$.

Bài 24. Cho tam giác ABC cân đỉnh A có $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh $BC = a\sqrt{3}$. Lấy điểm S ở ngoài mặt phẳng chứa tam giác ABC sao cho $SA = a$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC .

- Chứng minh rằng: $AO \perp (SBC)$.
- Tính AO khi tam giác SBC vuông tại S .

Bài 25. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy và tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi M là trung điểm CC' . Chứng minh rằng $A'B \perp B'M$.

Bài 26. Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC .

- Chứng minh rằng ba đường thẳng AH, SK và BC đồng quy.
- Chứng minh rằng $SC \perp (BHK), HK \perp (SBC)$.
- Kéo dài SA cắt HK tại R . Chứng minh rằng tứ diện $SBCR$ có các cặp cạnh đối vuông góc.

Bài 27 (Đề thi ĐH khối D năm 2010).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a$, hình chiếu của S trên $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC mà $AH = \frac{1}{4}AC$. Gọi M là chân đường cao kẻ từ C của tam giác SAC . Chứng minh M là trung điểm của đoạn thẳng SA .

Bài 28. Cho tứ diện $ABCD$, có $DA \perp (ABC)$, $AB = AC = a$, $BC = \frac{6}{5}a$. Gọi M là trung điểm BC . Vẽ AH vuông góc với MD tại H .

- Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.
- Cho $AD = \frac{4}{5}a$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và DM .
- Gọi G_1, G_2 lần lượt là các trọng tâm của tam giác ABC và tam giác DBC . Chứng minh rằng $G_1G_2 \perp (ABC)$.

Bài 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác ABC vuông ở B . Biết $\widehat{BSC} = 30^\circ$. Đặt $\widehat{ACB} = \alpha$. Gọi I là hình chiếu của B lên SC . Xác định α để BI hợp với mặt phẳng (SAC) góc 60° .

Bài 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ với $AD = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$. $SH \perp (ABCD)$ (H là trung điểm của AD). Biết góc giữa SB và $(ABCD)$ là 60° .

- Tính độ dài SH .
- Tính góc giữa SC với (SAD) .
- Tính góc giữa CH với (SAB) .

Bài 31. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu của A' trên (ABC) là trung điểm của BC . Tính $\cos \alpha$, ở đây α là góc giữa AA' và $B'C'$.

Bài 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AC = 2a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC . Xác định thiết diện của hình chóp với (P) , tính diện tích thiết diện.

Bài 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với

$$AB = BC = a, AD = 2a, SA \perp (ABCD), SA = 2a.$$

Gọi M là một điểm trên cạnh AB , đặt $AM = x$ ($0 < x < a$). Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AB .

- Tìm giao tuyến của (α) và (SAB) .

b) Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (α) . Thiết diện là hình gì?

c) Tính diện tích thiết diện theo a và x .

Bài 34. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D với $AB = AD = a$, $DC = 2a$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại D lấy điểm S với $SD = a\sqrt{3}$. Gọi M là điểm trên cạnh AB với $AM = x$ ($0 < x < a$). Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với BD , (P) cắt các cạnh DC , SC , SB lần lượt tại N , L , K .

a) Chứng minh rằng $BC \perp (SBD)$.

b) Tứ giác $MNLK$ là hình gì? Tính diện tích tứ giác đó.

2. Lời giải, hướng dẫn

Câu 19.

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} OA \perp OB \subset (OBC) \\ OA \perp OC \subset (OBC) \\ OB \cap OC = O \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC. \quad (1)$$

Ta có $OH \perp (ABC)$, suy ra $OH \perp BC$.

Kết hợp với (1) suy ra $BC \perp (AOH)$.

b) Vì $BC \perp (AOH)$ nên $AH \perp BC$. Tương tự ta chứng minh được $BH \perp AC$. Vậy H là trực tâm của tam giác ABC .

Gọi $I = AH \cap BC$. Vì OH là đường cao của tam giác vuông

$$AOI \text{ nên } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2}. \quad (2)$$

Vì OI là đường cao của tam giác vuông OBC nên

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}. \quad (3)$$

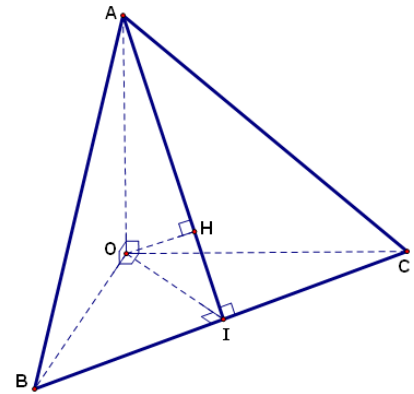
$$\text{Từ (2), (3) suy ra } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

c) Xét $\triangle ABC$, ta có

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \\ \Leftrightarrow \cos A &= \frac{OA^2 + OB^2 + OA^2 + OC^2 - (OB^2 + OC^2)}{2AB \cdot AC} \\ \Leftrightarrow \cos A &= \frac{OA^2}{AB \cdot AC} > 0 \Rightarrow \text{góc } A \text{ nhọn.} \end{aligned}$$

d) Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Gọi I là điểm cách đều bốn điểm O, A, B, C (I chính là giao điểm của đường thẳng đi qua trung điểm của BC và song song với OA và mặt trung trực của OA). Ta có:

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= 3MO^2 \\ \Leftrightarrow (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2 &= 3(\vec{MI} + \vec{IO})^2 \\ \Leftrightarrow 2\vec{MI}(\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}) + IA^2 + IB^2 + IC^2 &= 6\vec{MI} \cdot \vec{IO} + 3IO^2 \\ \Leftrightarrow 2\vec{MI}(\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}) &= 6\vec{MI} \cdot \vec{IO} \quad (\text{do } IA = IB = IC = IO) \\ \Leftrightarrow 6\vec{MI} \cdot \vec{IG} &= 6\vec{MI} \cdot \vec{IO} \Leftrightarrow \vec{MI}(\vec{IG} - \vec{IO}) = 0 \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{OG} = 0 \Leftrightarrow IM \perp OG.$$

Vậy điểm M thuộc mặt phẳng đi qua I và vuông góc với OG , mặt phẳng này cố định vì I cố định và đường thẳng OG cũng cố định.

Câu 20.

Ta có:

$$\begin{cases} SA \perp AB \subset (ABCD) \\ SA \perp AD \subset (ABCD) \\ AB \cap AD = A. \end{cases}$$

Suy ra $SA \perp (ABCD)$, do đó SA vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong $(ABCD)$.

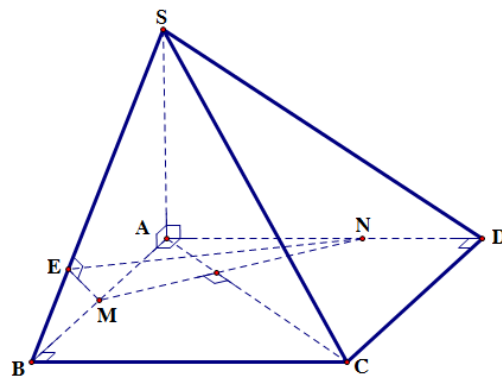
Ta có $MN \perp AC$, mà AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ nên $MN \perp SC$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp BA \subset (SAB) \\ BC \perp SA \subset (SAB) \\ BA \cap SA = A. \end{cases}$$

Suy ra: $BC \perp (SAB)$, mà $EM \subset (SAB)$ nên $BC \perp EM$. Ta có:

$$\begin{cases} EM \perp SB \\ EM \perp BC \end{cases} \Rightarrow EM \perp SC.$$

$$\text{Như vậy: } \begin{cases} SC \perp MN \subset (MNE) \\ SC \perp EM \subset (MNE) \\ MN \cap EM = M \end{cases} \Rightarrow SC \perp (MNE).$$



Câu 21.

a) Hình chiếu của OB , OC lên mặt phẳng (P) lần lượt là AB

và AC . Ta có $\tan \widehat{OBA} = \frac{OA}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1$. Suy ra $\widehat{OBA} = 45^\circ$.

Vậy góc tạo bởi OB và $\text{mp}(P)$ là 45° . Ta có:

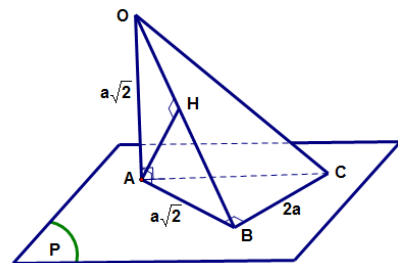
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2 + 4a^2 = 6a^2.$$

Suy ra $AC = a\sqrt{6}$. Trong tam giác OCA ta có:

$$\tan \widehat{OCA} = \frac{OA}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{OCA} = 30^\circ.$$

Vậy góc giữa OC và $\text{mp}(P)$ là 30° .

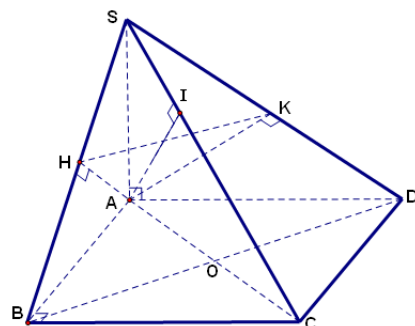
b) Trong $\triangle OAB$ hạ $AH \perp OB$ ($H \in OB$). Ta có $BC \perp AH$ (vì $BC \perp (OAB)$) nên $AH \perp (OBC)$. Như thế OB là hình chiếu của OA lên (OBC) . Vì tam giác OAB vuông cân tại A nên $\widehat{AOB} = 45^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng OA và (OBC) là 45° .



Câu 22.

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên SA vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Vậy ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AB \subset (SAB) \\ BC \perp SA \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp (SAB). \\ AB \cap SA = A \\ CD \perp DA \subset (SAD) \\ CD \perp SA \subset (SAD) \Rightarrow CD \perp (SAD). \\ DA \cap SA = A \\ BD \perp AC \subset (SAC) \\ BD \perp SA \subset (SAC) \Rightarrow BD \perp (SAC). \\ AC \cap SA = A \end{cases}$$



b) Ta có $BC \perp (SAB)$ mà $AH \subset (SAB)$ nên $BC \perp AH$. Vậy:

$$\begin{cases} AH \perp SB \subset (SBC) \\ AH \perp BC \subset (SBC) \\ SB \cap BC = B \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC.$$

Ta có $CD \perp (SAD)$ mà $AK \subset (SAD)$ nên $CD \perp AK$. Vậy:

$$\begin{cases} AK \perp CD \subset (SCD) \\ AK \perp SD \subset (SCD) \\ CD \cap SD = D \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC.$$

Ta có $\begin{cases} SC \perp AH \subset (AHK) \\ SC \perp AK \subset (AHK) \\ AH \cap AK = A \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$. Gọi $J = SC \cap (AHK)$, khi đó $AJ \subset (AHK)$, mà

$SC \perp (AHK)$ nên $AJ \perp SC$, suy ra $I \equiv J$, vậy $I \in (AHK)$.

c) Ta có hai tam giác vuông $\widehat{SAB}$ và $\widehat{SAD}$ bằng nhau vì chúng có chung cạnh SA và $AB = AD$ (c.g.c). Do đó $SB = SD$, $SH = SK$, suy ra $HK \parallel BD$. Vì $BD \perp (SAC)$ nên $HK \perp (SAC)$ và do $AI \subset (SAC)$ nên $HK \perp AI$.

d) Ta có $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HI, AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp KI$. Vì tứ giác $AHIK$ có

$$\widehat{AHI} = \widehat{AKI} = 90^0$$

nên nội tiếp đường tròn.

Lưu ý. Trong câu b), có thể chứng minh bốn điểm A, I, H, K đồng phẳng như sau: vì AH, AI, AK là ba đường thẳng cùng đi qua A và vuông góc với SC nên chúng cùng nằm trong mặt phẳng qua A và vuông góc với SC , do đó bốn điểm A, I, H, K cùng thuộc mặt phẳng này.

Câu 23.

a) Gọi $J = AH \cap BC$, ta cần chứng minh SK đi qua J , tức là chứng minh $BC \perp SJ$. Ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} BC \perp AJ \subset (SAJ) \\ BC \perp SA \subset (SAJ) \\ AJ \cap SA = A \end{array} \right. \Rightarrow BC \perp (SAJ). \text{ Mà } SJ \text{ nằm trong } (SAJ) \text{ nên}$$

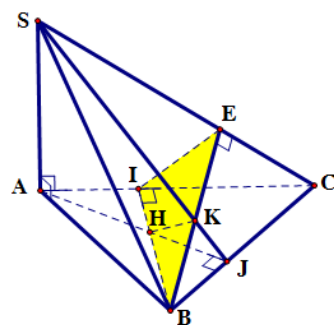
$BC \perp SJ$. Do đó AH, SK, BC đồng quy tại J .

$$b) \begin{cases} BH \perp AC \subset (SAC) \\ BH \perp SA \subset (SAC) \\ AC \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC).$$

Mà $SC \subset (SAC)$ nên $BH \perp SC$. Vậy
$$\begin{cases} SC \perp BK \subset (BHK) \\ SC \perp BH \subset (BHK) \\ BH \cap BK = B \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BHK).$$

c) Theo câu b), ta có $SC \perp (BHK)$, mà $HK \subset (BHK)$ nên $SC \perp HK$. Lại có $BC \perp (SAJ)$, suy ra $BC \perp HK$. Như vậy:

$$\begin{cases} HK \perp SC \subset (SBC) \\ HK \perp BC \subset (SBC) \\ SC \cap BC = C \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC).$$



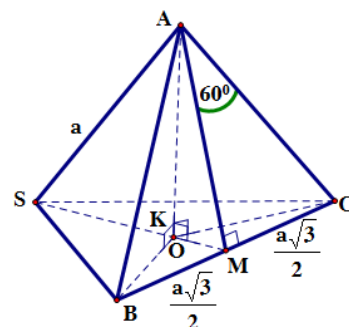
Câu 24.

a) Gọi M là trung điểm BC . Khi đó:

$$AM \perp BC, \widehat{MAC} = 60^0, MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra: $AB = AC = \frac{CM}{\sin 60^\circ} = a.$

Như vậy: $AS = AB = AC = a$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (SBC) , khi đó ba tam giác KAS, KAC, KAB bằng nhau (c-g-c), suy ra $KS = KB = KC$, hay K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC . Dẫn đến $K \equiv O$, suy ra $AO \perp (SBC)$.



b) Khi tam giác SBC vuông tại S thì $O \equiv M$, do đó

$$AO = AM = BM \cot \widehat{BAM} = BM \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}.$$

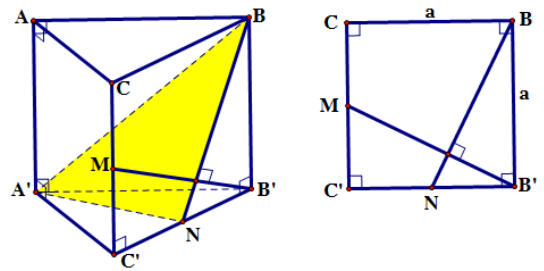
Câu 25.

Gọi N là trung điểm $B'C'$. Trong hình vuông $BCC'B'$ ta có $B'M \perp BN$. Mặt khác theo giả thiết

$$\begin{cases} A'N \perp B'C' \subset (BCC'B') \\ A'N \perp CC' \subset (BCC'B') \\ B'C' \cap CC' = C' \end{cases}$$

Suy ra $A'N \perp (BCC'B')$, mà $B'M$ nằm trong $(BCC'B')$ nên $A'N \perp B'M$. Như vậy ta có:

$$\begin{cases} B'M \perp BN \subset (A'BN) \\ B'M \perp A'N \subset (A'BN) \\ BN \cap A'N = N \end{cases} \Rightarrow B'M \perp (A'BN) \Rightarrow B'M \perp A'B.$$



Câu 26.

Gọi E là chân đường cao hạ từ A của tam giác ABC .

a) Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

$$\begin{cases} BC \perp AE \subset (SAE) \\ BC \perp SA \subset (SAE) \\ AE \cap SA = A. \end{cases}$$

Suy ra $BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp SE$.

Suy ra S, K, E thẳng hàng. Do đó ba đường thẳng AH, SK và BC đồng quy tại E .

b) Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BH$. Do đó

$$\begin{cases} BH \perp SA \subset (SAC) \\ BH \perp AC \subset (SAC) \\ SA \cap AC = A \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC.$$

Như vậy $\begin{cases} SC \perp BK \subset (BHK) \\ SC \perp BH \subset (BHK) \\ BK \cap BH = B \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BHK)$. Tiếp theo ta có

$$\begin{cases} HK \perp SC \text{ (do } SC \perp (BHK)) \\ HK \perp BC \text{ (do } BC \perp (SAE)) \end{cases} \Rightarrow KH \perp (SBC).$$

c) Trong tứ diện $SBCR$, ta có $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp SR$. Ta có

$$RB \subset (BHK) \Rightarrow SC \perp RB \text{ (vì } SC \perp (BHK) \text{ chứa } RB).$$

Tiếp theo ta có $\begin{cases} SB \perp RK \\ SB \perp KC \end{cases} \Rightarrow SB \perp (RKC) \Rightarrow SB \perp RC$. Như vậy tứ diện $SBCR$ có $BC \perp SR$, $SC \perp RB$, $SB \perp RC$, suy ra điều phải chứng minh.

Câu 27.

Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$. Do đó:

$$AH = \frac{1}{4}AC = \frac{a\sqrt{2}}{4}. \text{ Ta có tam giác } SAH \text{ vuông tại } H, \text{ suy ra:}$$

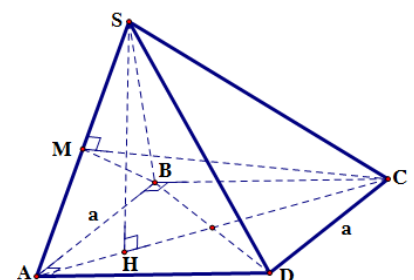
$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

$$\text{Ta có } HC = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

Vì tam giác SCH vuông tại H nên

$$SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = a\sqrt{2}.$$

Như vậy $CS = CA$, suy ra $\triangle SCA$ cân tại A , dẫn tới M là trung điểm của SA .



Câu 28.

a) Vì $BC \perp AM$, $BC \perp AD$
nên $BC \perp (DAM)$, mà $AH \subset (DAM)$ nên $BC \perp AH$. Vậy

$$\begin{cases} AH \perp BC \subset (DBC) \\ AH \perp DM \subset (DBC) \Rightarrow AH \perp (DBC). \\ BC \cap DM = M \end{cases}$$

b) Kẻ $MN \parallel AC$ ($N \in AB$), khi đó góc giữa DM và MN bằng hoặc bù với góc $\widehat{DMN}$. Ta có:

$$MN = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}, \quad AN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}.$$

Dẫn đến:

$$DN^2 = DA^2 + AN^2 = \frac{16a^2}{25} + \frac{a^2}{4} = \frac{89a^2}{100}$$

$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = a^2 - \frac{9a^2}{25} = \frac{16a^2}{25} \Rightarrow AM = \frac{4a}{5}.$$

$$DM^2 = AD^2 + AM^2 = \frac{16a^2}{25} + \frac{16a^2}{25} = \frac{32a^2}{25} \Rightarrow DM = \frac{4a\sqrt{2}}{5}$$

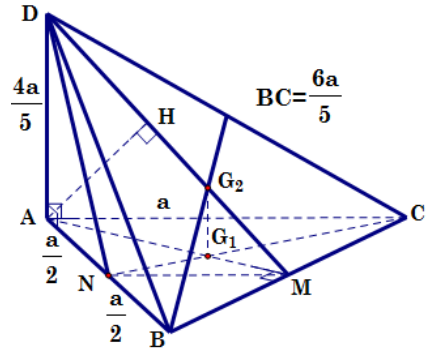
$$DN^2 = DM^2 + MN^2 - 2DM \cdot MN \cdot \cos \widehat{DMN}$$

$$\Leftrightarrow \frac{89a^2}{100} = \frac{32a^2}{25} + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{4a\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \widehat{DMN}$$

$$\Leftrightarrow \frac{64a^2}{100} = \frac{4a^2\sqrt{2}}{5} \cdot \cos \widehat{DMN} \Leftrightarrow \cos \widehat{DMN} = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AC và DM là $\arccos \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

$$c) \frac{MG_1}{MA} = \frac{MG_2}{MD} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel AD. \text{ Mà } AD \perp (ABC) \text{ nên } G_1G_2 \perp (ABC).$$



Câu 29.

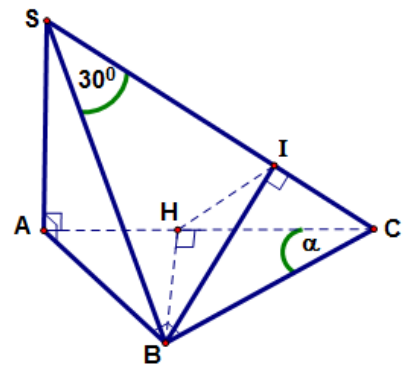
Hạ $BH \perp AC$. Ta có $SA \perp (ABC)$, suy ra $BH \perp SA$. Kết hợp với $BH \perp AC$ ta được $BH \perp (SAC)$. Suy ra hình chiếu của BI trên (SAC) là HI . Vậy góc giữa BI và mặt phẳng (SAC) là $\widehat{BIH} = \beta$. Ta cũng có $BC \perp BA$ và $BC \perp AS$ nên $BC \perp BS$. Đặt $BC = a$. Theo giả thiết $\widehat{ACB} = \alpha$ ta có $BH = a \cdot \sin \alpha$. Tam giác SBC vuông tại B và $\widehat{BSC} = 30^\circ$ nên:

$$SB = BC \cot 30^\circ = a\sqrt{3},$$

$$BI = SB \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \beta = 60^\circ \Leftrightarrow BH = BI \sin 60^\circ \Leftrightarrow a \sin \alpha = BI \sin 60^\circ.$$

Do đó $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Khi $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ thì đường thẳng BI hợp với mặt phẳng (SAC) góc 60° .



Câu 30.

a) Dễ thấy góc giữa SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SBH} = 60^\circ$. Do tam giác ABH vuông ở A nên:

$$BH^2 = AB^2 + AH^2.$$

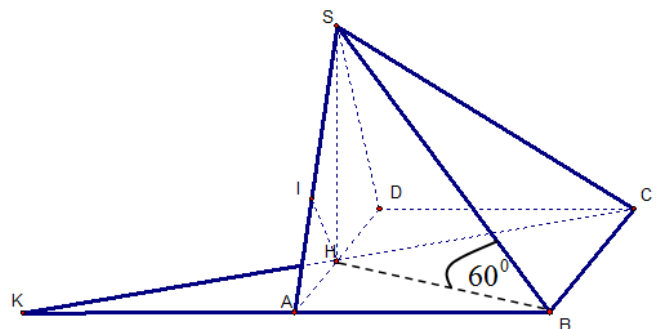
Suy ra $BH = 2a$.

Từ đó

$$SH = HB \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}.$$

b) Ta có:

$$\begin{cases} CD \perp SH \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD).$$



Như thế góc giữa SC với (SAD) là góc $\widehat{CSD}$. Ta có:

$$\sin \widehat{CSD} = \frac{CD}{SC} = \frac{a\sqrt{3}}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \widehat{CSD} \approx 25^{\circ}39'.$$

c) Trong tam giác vuông SAH , hạ $HI \perp SA$ ($I \in SA$). Ta có

$$\begin{cases} HI \perp SA \\ HI \perp AB \end{cases} \Rightarrow HI \perp (SAB).$$

Kéo dài CH cắt AB tại K . Vậy góc giữa CH và (SAB) là góc $\widehat{HKI}$. Ta có

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HA^2} = \frac{1}{12a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{13}{12a^2} \Rightarrow HI = 2a \frac{\sqrt{39}}{13}.$$

Dễ dàng tính được $HK = CH = 2a$. Vậy $\sin \widehat{HKI} = \frac{HI}{KH} = \frac{\sqrt{39}}{13}$.

Góc giữa CH và (SAB) là $28^{\circ}42'$.

Câu 31.

Trong (ABC) , qua điểm A kẻ đường thẳng Δ song song với BC . Từ đó $\Delta \parallel B'C'$. Suy ra góc giữa AA' và $B'C'$ chính là góc giữa hai đường thẳng Δ và AA' . Gọi M là trung điểm BC . Theo giả thiết M là hình chiếu của A' trên (ABC) . Trong (ABC) , kẻ $MH \perp \Delta$ tại H . Ta có $A'M \perp (ABC)$, suy ra $A'M \perp \Delta$, mà $A'M$ là hình chiếu của $A'H$ trên (ABC) nên theo định lý ba đường vuông góc suy ra $A'H \perp \Delta$, từ đó $\alpha = \widehat{A'AH}$, suy ra $\cos \alpha = \frac{AH}{AA'}$.

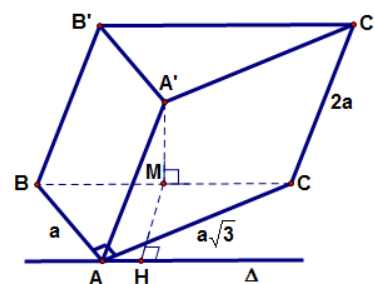
Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2$.

Suy ra $AM = \frac{1}{2}BC = a$. Ta có MH bằng độ dài đường cao kẻ từ A của $\triangle ABM$, nhưng vì

$\triangle ABM$ đều cạnh a nên $MH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó:

$$AH^2 = AM^2 - MH^2 = a^2 - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Bởi vậy } \cos \alpha = \frac{AH}{AA'} = \frac{\frac{a}{2}}{2a} = \frac{1}{4}.$$



Câu 32. Phân tích. Theo dạng 9 (ở trang 62), để xác định tường minh mặt phẳng (P) ta cần xác định hai đường thẳng cắt nhau cùng vuông góc với SC trong đó có một đường đi qua A . Như vậy trước hết ta phải dựng K là hình chiếu của A trên SC .

Giải. Vẽ AK vuông góc với SC tại K . Vẽ AH vuông góc với SB tại H . Ta có:

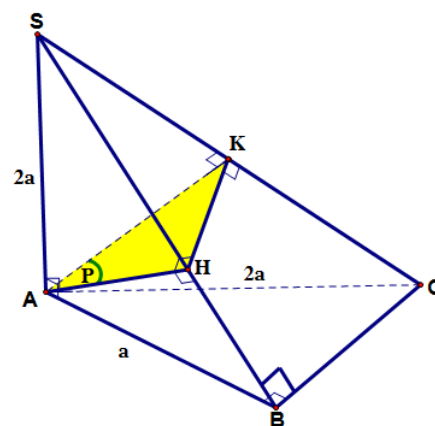
$$\begin{cases} BC \perp BA \subset (SAB) \\ BC \perp SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB). \\ SA \cap BA = A$$

Mà $AH \subset (SAB)$ nên $BC \perp AH$.

$$\begin{cases} AH \perp SB \subset (SBC) \\ AH \perp BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC). \\ SB \cap BC = B$$

Mà $SC \subset (SBC)$ nên $AH \perp SC$.

$$\begin{cases} SC \perp AK \subset (AHK) \\ SC \perp AH \subset (AHK) \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK). \\ AH \cap AK = A$$



Như vậy (AHK) là mặt phẳng chứa điểm A và vuông góc với SC hay $(P) \equiv (AHK)$. Thiết diện cần tìm là tam giác AHK . Ta có:

$$AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HK$$

nên diện tích thiết diện: $S_{AHK} = \frac{1}{2}HA.HK$. Ta tính được:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

$$AK = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 4a^2} = a\sqrt{2}.$$

$$HK = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{4a^2}{5}} = \sqrt{\frac{6a^2}{5}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy: } S_{AHK} = \frac{1}{2}HA.HK = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{a^2\sqrt{6}}{5}.$$

Câu 33.

$$a) \text{ Ta có: } \begin{cases} (\alpha) \perp AB \\ SA \perp AB \\ M \neq A \end{cases} \Rightarrow SA \parallel (\alpha).$$

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ SA \subset (SAB), SA \parallel (\alpha). \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của (α) và (SAB) là đường thẳng Mx qua M và song song với SA .

b) Trong (SAB) , gọi $N = Mx \cap SB$.

$$\text{Tương tự: } \begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ AD \subset (ABCD) \\ AD \parallel (\alpha). \end{cases}$$

Suy ra $(\alpha) \cap (ABCD) = My$, với My là đường thẳng đi qua M , song song với AD , cắt CD tại Q . Giao tuyến của (α) và (SBC) là đường thẳng Nz qua N , song song với BC , cắt SC tại P . Thiết diện là tứ giác $MNPQ$. Ta có: $MQ \parallel AD \parallel BC \parallel NP \Rightarrow MQ \parallel NP$.

$$\begin{cases} MN \parallel SA \\ SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MN \perp (ABCD) \Rightarrow MN \perp MQ.$$

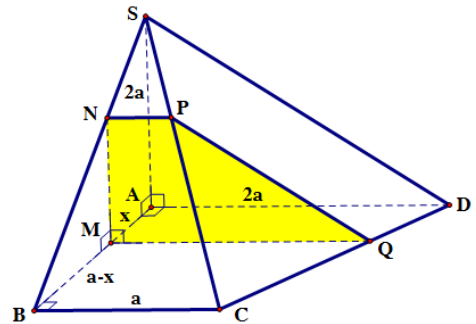
Thiết diện là hình thang $MNPQ$ vuông tại M và N . Diện tích thiết diện là:

$$S_{MNPQ} = \frac{(MQ + NP)MN}{2}.$$

Ta có:

$$\frac{MN}{AS} = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MN = SA \cdot \frac{a-x}{a} = \frac{2a(a-x)}{a} = 2(a-x).$$

$$\frac{NP}{BC} = \frac{SN}{SB} = \frac{AM}{AB} = \frac{x}{a} \Rightarrow NP = BC \cdot \frac{x}{a} = x.$$



Gọi I là giao điểm AB và CD . Khi đó dễ thấy rằng BC là đường trung bình của tam giác IAD . Ta có:

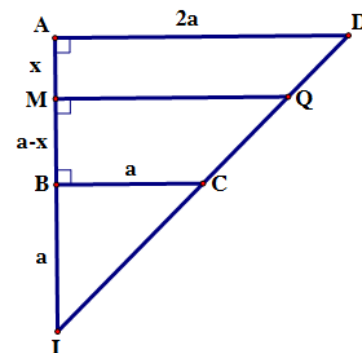
$$\frac{MQ}{AD} = \frac{IM}{IA} = \frac{2a-x}{2a}.$$

Suy ra:

$$MQ = AD \cdot \frac{2a-x}{2a} = 2a-x.$$

Như vậy:

$$\begin{aligned} S_{MNPQ} &= \frac{(MQ+NP)MN}{2} \\ &= \frac{(2a-x+x)2(a-x)}{2} = 2a(a-x). \end{aligned}$$



Câu 34.

a) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD .

Khi đó $ADIB$ là hình vuông.

Suy ra $BI = IC = ID = a$.

Từ đó ta có $BC \perp BD$.

Lại có $SD \perp BC$ (vì $SD \perp (ABCD)$).

Vậy $BC \perp (SBD)$.

b) Trước hết nhận xét rằng $(P) \perp BD$, $BC \perp BD$, $SD \perp BD$, suy ra $(P) \parallel BC$, $(P) \parallel SD$. Ta có:

$$\begin{cases} (P) \parallel BC \\ BC \subset (ABCD) \\ (P) \cap (ABCD) = MN. \end{cases}$$

Suy ra MN song song với BC . Ta có

$$\begin{cases} (P) \parallel SD, SD \subset (SCD) \\ (P) \cap (SCD) = NL \end{cases} \Rightarrow NL \parallel SD.$$

Gọi H là giao điểm của BD và MN . Ta có:

$$\begin{cases} (P) \parallel SD, SD \subset (SBD) \\ H \in (P) \cap (SBD). \end{cases}$$

Suy ra giao tuyến của (P) và (SBD) là $HK \parallel SD$. Cuối cùng

$$\begin{cases} (P) \parallel BC \subset (SBC) \\ (P) \cap (SBC) = KL \end{cases} \Rightarrow KL \parallel BC.$$

Do $SD \perp MN$ (vì $SD \perp (ABCD)$) nên $NL \perp MN$. Vậy thiết diện là hình thang vuông $MNLK$.

Gọi S là diện tích $MNLK$. Ta có:

$$S = \frac{1}{2}(MN + LK)NL.$$

Ta có $ABID$ là hình vuông cạnh a nên $MN = AI = a\sqrt{2}$. Xét tam giác SBD có $HK \parallel SD$ nên

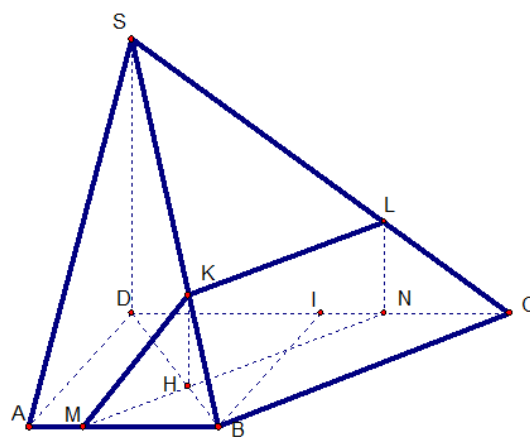
$$\frac{HK}{SD} = \frac{BH}{BD} = \frac{BH}{2OB} = \frac{1}{2} \frac{BM}{BA} = \frac{AB-AM}{2AB} \Rightarrow HK = \frac{\sqrt{3}(a-x)}{2},$$

ở đây O là giao điểm của AI và BD . Tam giác SBC có $KL \parallel BC$ nên

$$\frac{KL}{BC} = \frac{SK}{SB} = \frac{BD-BH}{DB} = 1 - \frac{BH}{2OB} = 1 - \frac{1}{2} \frac{BM}{BA} = 1 - \frac{1}{2} \frac{AB-AM}{AB}.$$

Từ đó tính được

$$KL = BC \left(1 - \frac{a-x}{2a}\right) = a\sqrt{2} \cdot \frac{a+x}{2a} = \frac{(a+x)\sqrt{2}}{2}.$$



Như thế diện tích hình thang vuông $MNLK$ là

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(MN + LK)NL = \frac{1}{2} \left(a\sqrt{2} + (a+x)\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (a-x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{8}(a-x)(3a+x). \end{aligned}$$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

Câu 1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định **sai**?

- A. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) .
- B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.
- C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (α) .
- D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a \parallel (\alpha)$ thì $d \perp a$.

Câu 2. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O . Qua điểm O có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ .

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. Vô số.

Câu 3. Trong không gian, tập hợp các điểm M cách đều hai điểm cố định A và B là:

- A. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB .
- B. Đường thẳng trung trực của đoạn thẳng AB .
- C. Mặt phẳng vuông góc với AB tại A .
- D. Đường thẳng qua A và vuông góc với AB .

Câu 4. Mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.
- B. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) khi a và b song song (hoặc đường thẳng a trùng với đường thẳng b).
- C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) .
- D. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b .

Câu 5. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định **sai**?

- A. Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.
- B. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$.
- C. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.
- D. Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

Câu 6. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

Câu 7. Cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c và mặt phẳng (P) . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$.
- B. Nếu $a \parallel b$ và $b \perp c$ thì $a \perp c$.
- C. Nếu $a \perp (P)$ và $b \parallel (P)$ thì $a \perp b$.
- D. Nếu $a \perp b, c \perp b$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng chứa hai đường thẳng a và c .

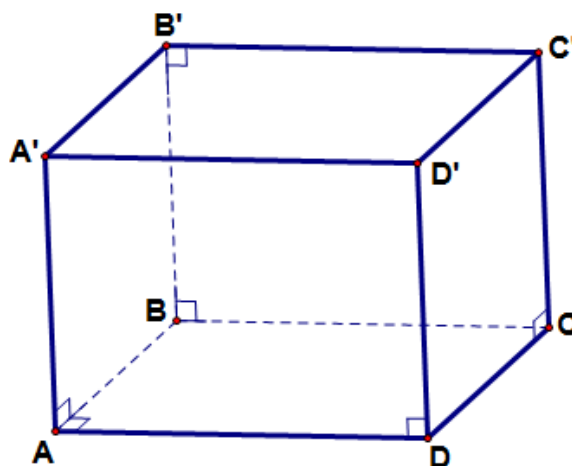
Câu 8. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định sai?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Câu 9. Trong không gian cho đường thẳng a và điểm M . Có bao nhiêu đường thẳng đi qua M và vuông góc với a ?

- A. Có một và chỉ một.
- B. Có hai.
- C. Có vô số.
- D. Có một hoặc vô số.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy trả lời các câu 10, 11, 12, 13.



Câu 10. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{AC}$.

- A. 90° .
- B. 0° .
- C. 60° .
- D. 135° .

Câu 11. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{BC}$.

- A. 45° .
- B. 0° .
- C. 60° .
- D. 135° .

Câu 12. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$.

- A. 0° .
- B. 60° .
- C. 90° .
- D. 135° .

Câu 13. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{CB}$ là

- A. 0° .
- B. 135° .
- C. 60° .
- D. 45° .

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , tam giác SAB vuông tại A và tam giác SCD vuông tại D . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $AC = BD$.
- B. $SO \perp (ABCD)$.
- C. $AB \perp (SAD)$.
- D. $BC \perp AB$.

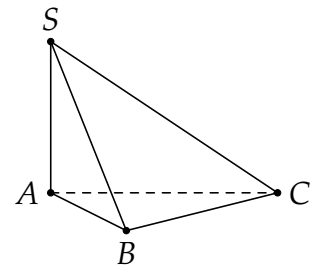
Câu 15. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định sai?

- A. Góc giữa B_1D_1 và AA_1 bằng 60° .
- B. Góc giữa B_1D_1 và AC bằng 90° .
- C. Góc giữa AD và C_1B bằng 45° .
- D. Góc giữa BD và CA_1 bằng 90° .

Câu 16 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 101).

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B , $AB = \sqrt{3}a$ và $BC = a$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 90° . B. 45° . C. 30° . D. 60° .



Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $SA \perp BD$. B. $SC \perp BD$. C. $SO \perp BD$. D. $AD \perp SC$.

Câu 18 (HK2 khối 11, 2017 - 2018 Sở Giáo Dục Hà Nam).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Biết $SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $SC \perp (ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng SA . Tính độ dài đoạn thẳng IH .

- A. $IH = \frac{a\sqrt{15}}{10}$. B. $IH = \frac{a\sqrt{5}}{15}$. C. $IH = \frac{a\sqrt{15}}{30}$. D. $IH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **đúng**?

- A. Mặt bên của hình chóp là những tam giác cân.
B. Mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.
C. Mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông và tam giác thường.
D. Mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông cân.

Câu 20. Cho tam giác ABC vuông tại A và có hai đỉnh B, C nằm trên mặt phẳng (P) . Gọi C' là hình chiếu vuông góc của đỉnh C lên $mp(P)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Tam giác ABC' vuông. B. Tam giác ABC' có ba góc nhọn.
C. Tam giác ABC' có một góc tù. D. Tam giác ABC' có một góc bằng 60° .

Câu 21. Cho tam giác ABC vuông tại A và có hai đỉnh B, C nằm trên $mp(P)$. Gọi A' là hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên $mp(P)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Tam giác $A'BC$ là tam giác vuông.
B. Tam giác $A'BC$ là tam giác nhọn.
C. Tam giác $A'BC$ là tam giác tù.
D. Tam giác $A'BC$ có góc A' không bé hơn góc vuông.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, O là giao điểm của 2 đường chéo và $SA = SC$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A. $SA \perp (ABCD)$. B. $BD \perp (SAC)$. C. $AC \perp (SBD)$. D. $AB \perp (SAC)$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông tại B . Gọi AH là đường cao của tam giác SAB . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định **sai**?

- A. $SA \perp BC$. B. $AB \perp BC$. C. $AH \perp AC$. D. $AH \perp SC$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) là α (đơn vị là độ). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A. $\alpha = \widehat{SBA}$. B. $\alpha = \widehat{BSA}$. C. $\alpha = 90^\circ$. D. $\alpha = 180^\circ - \widehat{SBA}$.

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định **đúng**?

- A. $DB \perp (ABC)$. B. $AC \perp BD$. C. $CD \perp (ABD)$. D. $BC \perp AD$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Biết $SA = SC$ và $SB = SD$, trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định **sai**?

- A. $SO \perp (ABCD)$. B. $AC \perp BD$. C. $BD \perp (SAC)$. D. $CS \perp AC$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 28. Cho hình tứ diện $ABCD$ có AB, CD, BC đôi một vuông góc. Khi đó

- A. $AB \perp (ACD)$. B. $BC \perp (ACD)$. C. $CD \perp (ABC)$. D. $AD \perp (BCD)$.

Câu 29. Cho hình tứ diện $OABC$ có AO, BO, CO đôi một vuông góc. Nếu I là hình chiếu của điểm O trên mặt phẳng (ABC) thì I là:

- A. trọng tâm tam giác ABC .
B. trực tâm tam giác ABC .
C. tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
D. tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Câu 30. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC , M là điểm không nằm trên (P) sao cho $MA = MB = MC$, d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) . Khi đó đường thẳng d đi qua:

- A. trọng tâm tam giác ABC .
B. trọng tâm tam giác ABC .
C. tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
D. tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Câu 31. Mệnh đề nào sau đây **không đúng**?

- A. (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB nếu nó đi qua 3 điểm phân biệt cách đều A, B .
B. (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB nếu nó vuông góc với AB tại trung điểm của AB .
C. (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB nếu nó đi qua 3 điểm phân biệt không thẳng hàng cách đều A, B .
D. (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB nếu nó chứa hai đường trung trực khác nhau của đoạn thẳng AB .

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a và $SA = SB = SC = b$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Độ dài SG bằng

- A. $\frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - 3a^2}$. B. $\frac{4b^2 - 3a^2}{4}$. C. $\frac{1}{3}\sqrt{9b^2 - 3a^2}$. D. $\frac{3b^2 - a^2}{3}$.

Câu 33. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. M là điểm bất kì thuộc miền trong tam giác ABC . Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \frac{MA^2}{OA^2} + \frac{MB^2}{OB^2} + \frac{MC^2}{OC^2}$.

- A. $\min T = 3$. B. $\min T = 2$. C. $\min T = 4$. D. $\min T = 6$.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 B	5 D	9 C	13 B	17 D	21 D	25 D	29 B	33 B
2 A	6 C	10 A	14 B	18 A	22 C	26 D	30 C	
3 A	7 A	11 A	15 A	19 B	23 C	27 B	31 A	
4 B	8 C	12 C	16 B	20 A	24 A	28 C	32 C	

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. "Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$ " là khẳng định sai, cần thêm điều kiện hai đường thẳng nằm trong (α) cắt nhau nữa thì mới thành khẳng định đúng.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 2. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O . Qua điểm O có đúng một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ .

Chọn đáp án **(A)**

Câu 3. Trong không gian, tập hợp các điểm M cách đều hai điểm cố định A và B là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB .

Chọn đáp án **(A)**

Câu 4. "Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) khi a và b song song (hoặc đường thẳng a trùng với đường thẳng b)" là khẳng định đúng.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 5. "Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$ " là khẳng định sai vì có thể $b \subset (P)$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 6. "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau" là khẳng định đúng.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 7. "Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$ " là khẳng định sai, vì có thể a cắt c .

Chọn đáp án **(A)**

Câu 8. Khẳng định "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau" là khẳng định sai, vì hai đường thẳng đó có thể cắt nhau.

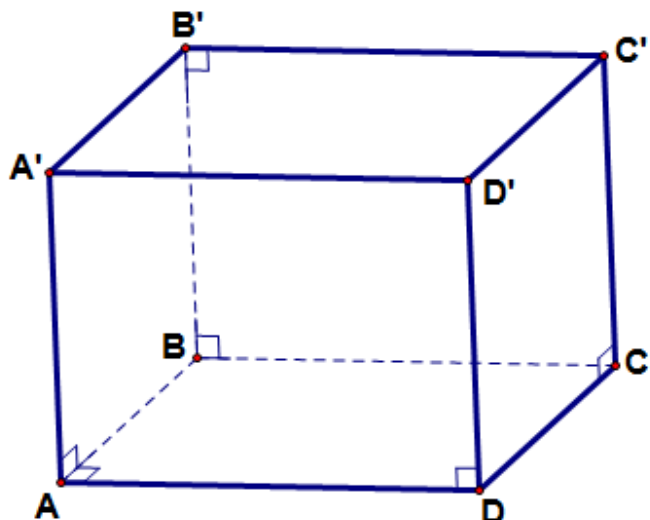
Chọn đáp án **(C)**

Câu 9. Trong không gian cho đường thẳng a và điểm M . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với a . Khi đó mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) và đi qua M đều vuông góc với a .

Chọn đáp án **(C)**

Câu 10.

Do $AA' \perp (ABCD)$ nên góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{AC}$ là 90° .



Chọn đáp án **(A)**

Câu 11. Ta có $\widehat{(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{BC})} = \widehat{(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AD})} = 45^\circ$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 12. Ta có $\widehat{(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC})} = 90^\circ$.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 13. Ta có $\widehat{(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{CB})} = 135^\circ$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 14.

Ta có

$$\widehat{(CD, SA)} = \widehat{(AB, SA)} = 90^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp SD. \end{cases}$$

Suy ra $CD \perp AD$, do đó $ABCD$ là hình chữ nhật.

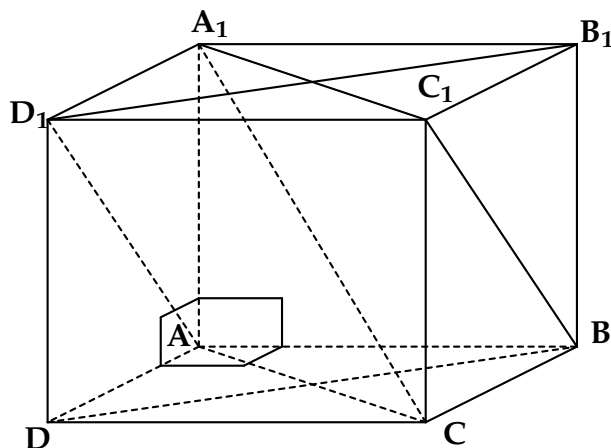
Dẫn tới các phương án **(A)**, **(C)**, **(D)** đúng. Phương

án **(B)** sai, vì nếu SO vuông góc $(ABCD)$ thì

$$\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp AO, \text{ đây là điều vô lí.}$$

Chọn đáp án **(B)**

Câu 15. Dễ thấy rằng **(B)**, **(C)**, **(D)** đúng.



Phương án **(A)** sai vì $\widehat{(B_1D_1, AA_1)} = 90^\circ$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 16.

Do $SA \perp (ABC)$ nên góc giữa SC và (ABC) chính là góc $\widehat{SCA}$. Theo định lý pytago, do tam giác ABC vuông tại B nên ta có

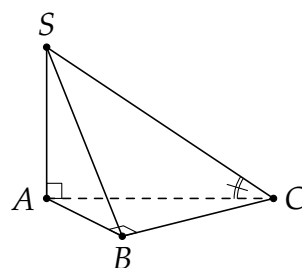
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a.$$

Xét tam giác SAC vuông tại A có

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{2a}{2a} = 1.$$

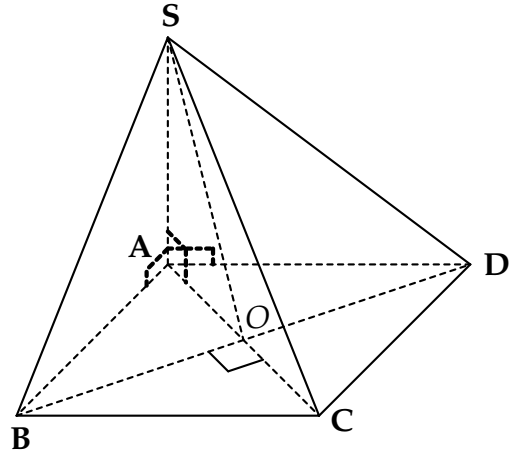
Suy ra $(SC, (ABC)) = \widehat{SCA} = 45^\circ$.

Chọn đáp án **(B)**



Câu 17.

Ta có: $SA \perp (ABCD)$, suy ra SA vuông góc với BD .
Do tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên BD vuông góc với AC , mà SA vuông góc với BD nên $BD \perp (SAC)$,
suy ra $BD \perp SC$ và $BD \perp SO$. Để thấy AD không vuông góc với SC , vì nếu AD vuông góc với SC thì AD vuông góc với AC , vô lí.



Chọn đáp án **(D)**

Câu 18.

Ta có tam giác ABD là tam giác đều nên

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

Vì $\triangle SCA \sim \triangle IHA$ nên

$$\frac{SC}{IH} = \frac{SA}{IA} \Leftrightarrow IH = \frac{SC \cdot IA}{SA}.$$

Xét tam giác vuông SCA ta có

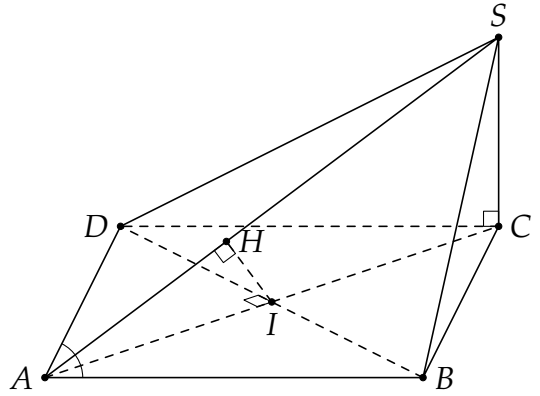
$$SA = \sqrt{SC^2 + AC^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + 3a^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Từ (1) suy ra

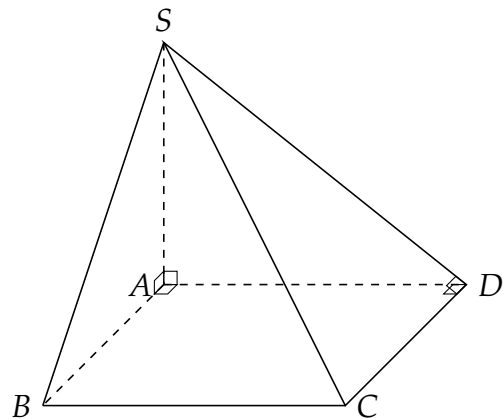
$$IH = \frac{SC \cdot IA}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{15}}{2}} = \frac{a\sqrt{15}}{10}.$$

Chọn đáp án **(A)**

(1)

**Câu 19.**

Do $SA \perp (ABCD)$ nên hiển nhiên $\triangle SAB, \triangle SAD$ là những tam giác vuông. Ta có $CD \perp DA$, mà DA là hình chiếu của DS trên $(ABCD)$ nên CD vuông góc với DS , suy ra mặt bên SDC là tam giác vuông tại D . Tương tự ta có mặt bên SBC là tam giác vuông tại B . Như vậy chỉ có khẳng định "Mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông" là chắc chắn đúng. Ta chọn phương án **(B)**.



Chọn đáp án **(B)**

Câu 20. Vì C' trùng với C nên tam giác ABC' vuông tại A .

Chọn đáp án **(A)**

Câu 21. Nếu A nằm trên (P) tức A' trùng A thì tam giác $A'BC$ có góc A vuông, nếu A không nằm trên (P) thì

$$\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{A'A} \cdot \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'A} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} < 0,$$

suy ra góc $BA'C$ là góc tù.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 22. Ta có: $SA = SC$, suy ra SAC là tam giác cân. Mặt khác O là trung điểm của AC (tính chất hình thoi) nên $AC \perp SO$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD).$$

Chọn đáp án **(C)**

Câu 23.

Ta có đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , mà đường thẳng BC nằm trong (ABC) nên SA vuông góc với BC , suy ra **(A)** đúng. Hiển nhiên **(B)** đúng. Như vậy:

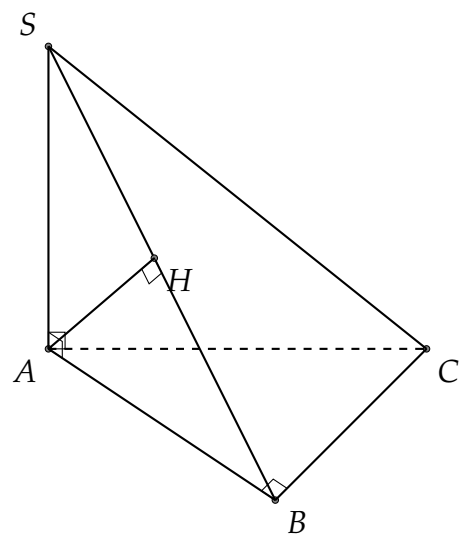
$$\begin{cases} BC \perp BA \subset (SAB) \\ BC \perp SA \subset (SAB) \\ BA \cap SA = A. \end{cases}$$

Suy ra $BC \perp (SAB)$.

Do đó $BC \perp AH$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB. \end{cases}$$

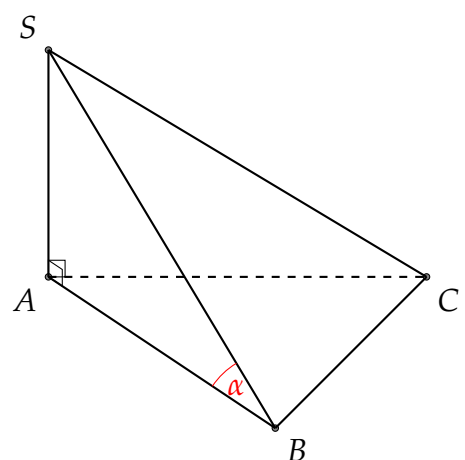
Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$. Vậy **(D)** đúng. Dễ thấy rằng $AH \perp AC$ là khẳng định sai. Vậy chọn **(C)**.



Chọn đáp án **(C)**

Câu 24.

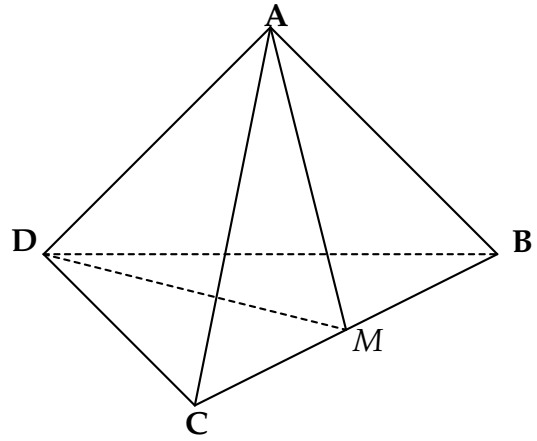
Ta có đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên hình chiếu của đường thẳng SB trên mặt phẳng (ABC) là đường thẳng AB . Do đó góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa hai đường thẳng SB và AB , tức là $\alpha = \widehat{SBA}$.



Chọn đáp án **(A)**

Câu 25.

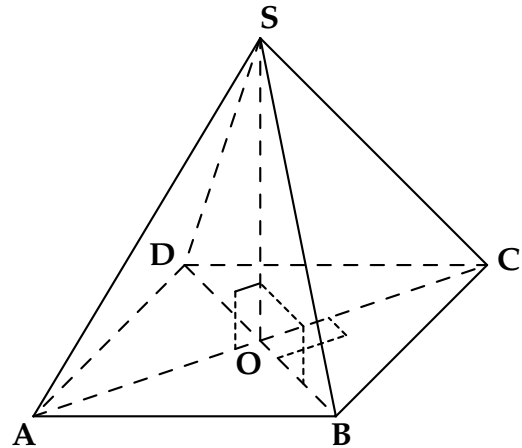
Gọi M là trung điểm BC . Khi đó, do ABC, DBC lần lượt là những tam giác cân tại A, D nên BC vuông góc với MA và BC vuông góc với MD . Suy ra BC vuông góc với mặt phẳng (ADM) , vì thế nên BC vuông góc với AD .



Chọn đáp án **D**

Câu 26.

Do SAC, SBD lần lượt là những tam giác cân tại S nên SO vuông góc với AC và SO vuông góc với BD . Suy ra SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.
 Để thấy rằng
 $SO \perp (ABCD)$,
 $AC \perp BD$,
 $BD \perp (SAC)$
 là những khẳng định đúng.



Chọn đáp án **D**

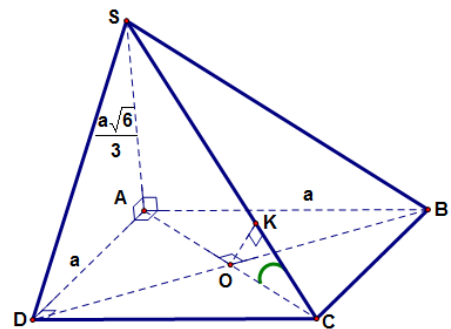
Câu 27.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên suy ra hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ là AC . Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$. Ta có:

$$\begin{aligned} \tan(\widehat{SCA}) &= \frac{SA}{AC} \\ &= \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{SCA} = 30^\circ$.

Chọn đáp án **B**



Câu 28.

Ta có:

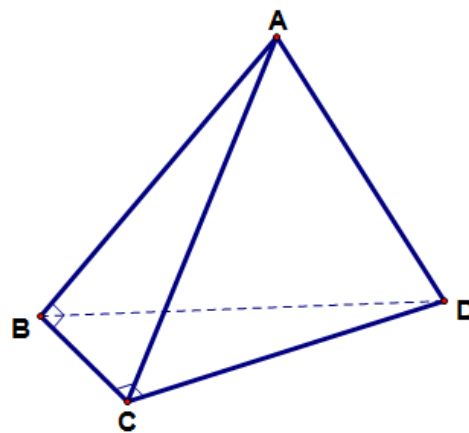
$$\begin{cases} CD \perp AB \subset (ABC) \\ CD \perp CB \subset (ABC) \\ AB \cap CB = B \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABC).$$

Vậy **C** đúng.

Mệnh đề **A** sai vì nếu $AB \perp (ACD)$ thì $AB \perp AC$, vô lí.

Mệnh đề **B** sai vì nếu $BC \perp (ACD)$ thì $BC \perp CA$, vô lí.

Ta có $AB \perp (BCD)$ nên mệnh đề **D** sai vì nếu $AD \perp (BCD)$ thì dẫn tới B trùng D , vô lí.



Chọn đáp án **C**

Câu 29. Vì $AB \perp OI$ và $AB \perp OC$ nên $AB \perp CI$, tương tự $BC \perp AI$.

Vậy I là trực tâm tam giác ABC .

Chọn đáp án **B**

Câu 30. Gọi M' là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) thì M' là hình chiếu của M trên (P) nên từ $MA = MB = MC$ suy ra $M'A = M'B = M'C$.

Chọn đáp án **C**

Câu 31. Mệnh đề sai là: " (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB nếu nó đi qua 3 điểm phân biệt cách đều A, B ".

Chọn đáp án **A**

Câu 32. Giả sử H là chân đường vuông góc hạ từ S xuống mặt phẳng (ABC) . Khi đó, do SA, SB, SC bằng nhau nên $HA = HB = HC$ hay H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , tức là $H \equiv G$. Vì tam giác ABC đều cạnh a nên

$$GC = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow SG = \sqrt{SC^2 - GC^2} = \frac{1}{3}\sqrt{9b^2 - 3a^2}.$$

Chọn đáp án **C**

Câu 33. Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Khi đó $\overrightarrow{OM} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, với x, y, z là ba số có tổng bằng 1. Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = (x-1)\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \\ \Rightarrow AM^2 &= (x-1)^2\vec{a}^2 + y^2\vec{b}^2 + z^2\vec{c}^2 \\ \Rightarrow \frac{MA^2}{OA^2} &= (x-1)^2 + y^2\frac{b^2}{a^2} + z^2\frac{c^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Tương tự ta được:

$$\frac{MB^2}{OB^2} = (y-1)^2 + z^2\frac{c^2}{b^2} + x^2\frac{a^2}{b^2}; \quad \frac{MC^2}{OC^2} = (z-1)^2 + x^2\frac{a^2}{c^2} + y^2\frac{b^2}{c^2}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} T &= \frac{MA^2}{OA^2} + \frac{MB^2}{OB^2} + \frac{MC^2}{OC^2} \\ &= x^2a^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + y^2b^2\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + z^2c^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \\&= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) (x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2) \\&- (x^2 + y^2 + z^2) + (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \\&= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) (x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2) \\&- 2(x+y+z) + 3.\end{aligned}$$

Ta biết rằng H là chân đường cao kẻ từ đỉnh O của tứ diện vuông $OABC$ khi và chỉ khi H là trực tâm của tam giác ABC . Hơn nữa

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{OH^2}; \quad x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2 = OM^2.$$

Do đó $T = \frac{MA^2}{OA^2} + \frac{MB^2}{OB^2} + \frac{MC^2}{OC^2} = \frac{OM^2}{OH^2} + 1 \geq 1 + 1 = 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $OM = OH$ hay M trùng H . Vậy min $T = 2$, đạt được khi M trùng H hay M là trực tâm của tam giác ABC .

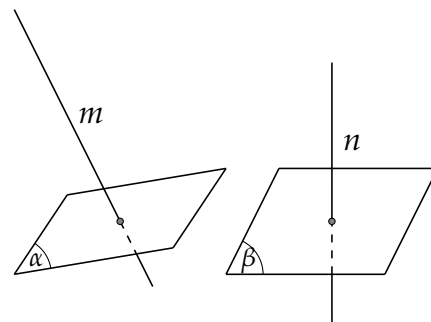
Chọn đáp án **B**

BÀI 4. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc giữa hai mặt phẳng.

Định nghĩa 1. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.



Định lý 1 (Định lý hình chiếu). Gọi S là diện tích đa giác ($\mathcal{H}$) trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu ($\mathcal{H}'$) của ($\mathcal{H}$) trên mặt phẳng (P'). Khi đó $S' = S \cdot \cos \varphi$, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').

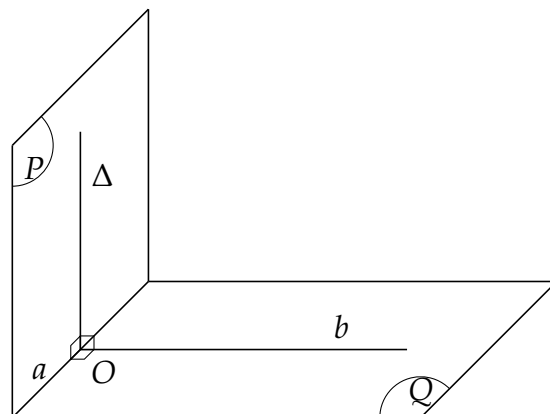
2. Hai mặt phẳng vuông góc.

Định nghĩa 2. Hai mặt phẳng (P) và (Q) gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° . Kí hiệu $(P) \perp (Q)$.

Định lý 2. Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau. Vậy:

$$\begin{cases} \Delta \subset (P) \\ \Delta \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$

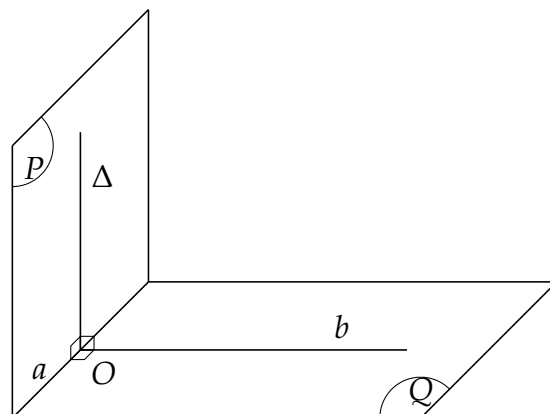
Để xác định chân đường cao của hình chóp, ta thường dùng định lý 3 sau đây.



Định lý 3. Nếu $(P) \perp (Q)$ thì bất cứ đường thẳng Δ nào nằm trong (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q). Vậy:

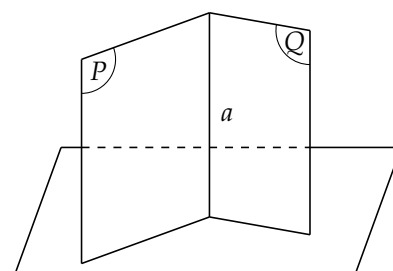
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = a \\ \Delta \subset (P), \Delta \perp a \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (Q).$$

Hệ quả 1. Nếu $(P) \perp (Q)$ và điểm $A \in (P)$ thì đường thẳng a đi qua A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P).



Hệ quả 2. Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba. Vậy

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R).$$



Hệ quả 3. Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P) .

3. Hình lăng trụ đứng. Hình hộp chữ nhật. Hình lập phương.

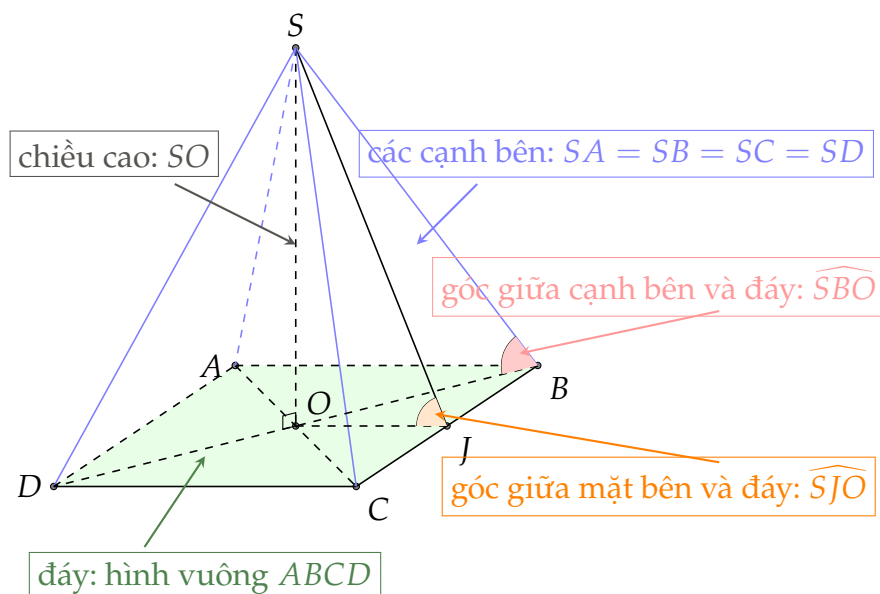
Định nghĩa	Hình vẽ	Một số đặc trưng
Hình lăng trụ đứng Là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.		Mặt bên là hình chữ nhật. Các mặt bên vuông góc với mặt đáy.
Hình lăng trụ đều Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.		Các mặt bên là những hình chữ nhật bằng nhau.
Hình hộp đứng Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.		Mặt bên là hình chữ nhật. Các mặt bên, cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
Hình hộp chữ nhật Là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.		Các mặt bên và mặt đáy là hình chữ nhật.
Hình lập phương Là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.		Mặt bên và mặt đáy là những hình vuông bằng nhau.

4. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều.

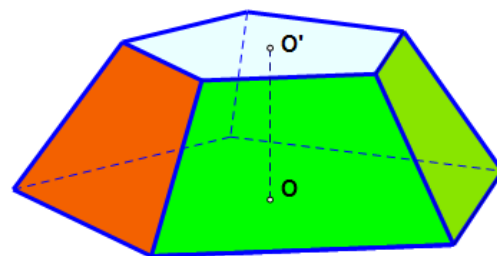
Định nghĩa 3. Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Lưu ý. Trong hình chóp đều, chân đường cao trùng với tâm của đáy.

Ví dụ. Hình chóp tứ giác đều:



Định nghĩa 4. Khi cắt hình chóp đều bởi mặt phẳng song song với đáy để được một hình chóp cắt thì hình chóp cắt đó được gọi là hình chóp cắt đều.



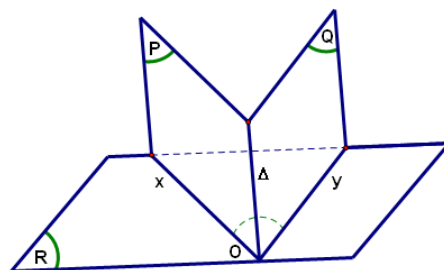
B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 12. Xác định góc giữa hai mặt phẳng. Diện tích hình chiếu của một đa giác.

Phương pháp. Để dựng góc ϕ (với $0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$) giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) ta làm như sau:

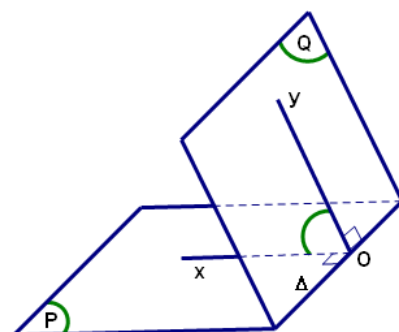
Cách 1.

- ✓ **Bước 1:** Xác định giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (P) và (Q) .
- ✓ **Bước 2:** Dựng mặt phẳng (R) vuông góc với đường thẳng Δ tại O .
- ✓ **Bước 3:** $\begin{cases} (R) \cap (P) = Ox \\ (R) \cap (Q) = Oy \end{cases} \Rightarrow \phi = (Ox, Oy).$



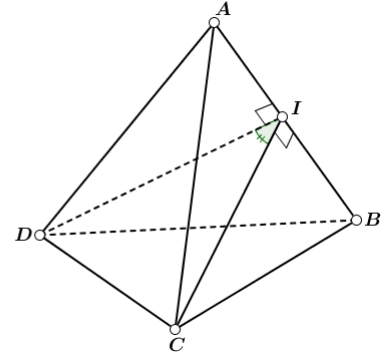
Cách 2.

- ✓ **Bước 1:** Xác định giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (P) và (Q) .
- ✓ **Bước 2:** Chọn điểm $O \in \Delta$. Vẽ đường thẳng Ox nằm trong (P) sao cho $Ox \perp \Delta$. Vẽ đường thẳng $Oy \subset (Q)$ sao cho $Oy \perp \Delta$.
- ✓ **Bước 3:** Khi đó $\phi = (Ox, Oy)$.



Trường hợp đặc biệt: Với tứ diện $ABCD$ có đặc điểm $AB \perp CD$, nếu muốn tìm góc giữa (DAB) và (CAB) thì ta thực hiện:

- ☑ Dựng mặt phẳng (P) chứa CD và $(P) \perp AB$.
- ☑ Nếu (P) cắt AB tại I thì ta có $CI \perp AB, DI \perp AB$.
Do đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là góc CID .



Chú ý 7. Ta có thể dùng công thức diện tích hình chiếu của đa giác ở định lí 1, trang 93 để:

- ☑ Tính diện tích hình chiếu đa giác.
- ☑ Tính góc hợp bởi hai mặt phẳng và không cần vẽ hình đồ.

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp (BCD)$ và $AB = a, \Delta BCD$ đều cạnh $2a$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) .

Lời giải

Ta có $(ACD) \cap (BCD) = CD$.

Kẻ $AH \perp CD$ tại H . Khi đó:

$$\begin{cases} CD \perp HA \\ CD \perp AB \end{cases} \Rightarrow CD \perp BH.$$

$$\text{Tóm lại: } \begin{cases} (ACD) \cap (BCD) = CD \\ AH \subset (ACD), AH \perp CD \\ BH \subset (BCD), BH \perp CD. \end{cases}$$

Suy ra $\varphi = \widehat{AHB}$ là góc giữa mặt phẳng (ACD) và mặt phẳng (BCD) . Do tam giác ABH vuông tại B nên:

$$\tan \varphi = \frac{AB}{BH} = \frac{a}{2a \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = 30^\circ.$$

Lưu ý. Có thể dựng góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) cách khác như sau:

$$\begin{cases} (ACD) \cap (BCD) = CD \\ (ABH) \perp CD \\ (ABH) \cap (ACD) = HA \\ (ABH) \cap (BCD) = HB \end{cases} \Rightarrow ((ACD), (BCD)) = (\widehat{HA}, \widehat{HB}) = \widehat{AHB}.$$

Như vậy để dựng góc giữa hai mặt phẳng, việc đầu tiên là ta phải tìm giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

Bài 2. Cho ΔABC đều cạnh a và BC nằm trong một mặt phẳng (P) . Chiếu ΔABC trên mp (P) thành tam giác $A'BC$ vuông tại A' .

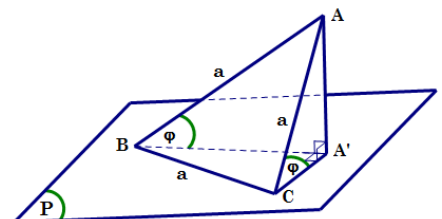
- a) Tính góc giữa đường thẳng AB với mặt phẳng (P) và góc giữa đường thẳng AC với mặt phẳng (P) .
- b) Tính diện tích tam giác $A'BC$ rồi suy ra góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải

a) Gọi φ (với $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$) là góc giữa đường thẳng AB và mp (P) . Khi đó $\varphi = \widehat{ABA'}$. Vì $AB = AC = a$ nên $\Delta A'BC$ vuông cân tại A' . Do đó

$$BC^2 = 2A'B^2 \Rightarrow A'B = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Trong tam giác vuông ABA' ta có



$$\cos \widehat{ABA'} = \frac{a}{\sqrt{2}} : a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ suy ra}$$

$\varphi = \widehat{ABA'} = 45^\circ$. Tương tự, góc giữa đường thẳng AC với mặt phẳng (P) là 45° .

b) Gọi S và S' lần lượt là diện tích của ΔABC và $\Delta A'BC$. Ta có

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, S' = \frac{1}{2}A'B.A'C = \frac{1}{2}A'B^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

Gọi α (với $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) là góc giữa mặt phẳng (P) và $mp(ABC)$. Ta có

$$S' = S \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{S'}{S} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{4}{a^2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD, AC = BD, AD = BC$ và số đo các góc tạo bởi các mặt phẳng $(DBC), (DCA), (DAB)$ với mặt phẳng (ABC) tương ứng là α, β, γ . Giả sử chân đường cao của tứ diện kẻ từ D nằm trong ΔABC . Chứng minh rằng $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1$.

Lời giải

Ta có $\Delta ABC = \Delta DBC = \Delta DCA = \Delta DAB$ (c-c-c). Kí hiệu diện tích các tam giác này là S . Gọi H, K, N, M theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của D trên mặt phẳng $(ABC), BC, CA, AB$ như hình vẽ. Khi đó

$$\widehat{DKH} = \alpha, \widehat{DNH} = \beta, \widehat{DMH} = \gamma.$$

Theo định lí hình chiếu:

$$S_{HBC} = S_{DBC} \cdot \cos \alpha = S \cdot \cos \alpha.$$

Tương tự:

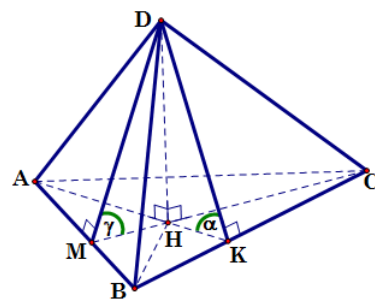
$$S_{HCA} = S \cdot \cos \beta, S_{HAB} = S \cdot \cos \gamma.$$

Do điểm H nằm trong tam giác ABC nên

$$S_{ABC} = S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB}.$$

Từ đó ta được

$$S = S (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \Leftrightarrow \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1.$$



Bài 4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Kí hiệu α là góc giữa SA và (ABC) , β là góc giữa (SAB) và (ABC) . Chứng minh rằng: $\tan \beta = 2 \tan \alpha$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) , khi đó 3 tam giác vuông SHA, SHB, SHC bằng nhau nên $HA = HB = HC$ hay H là tâm của tam giác đều ABC . Ta có hình chiếu của SA trên (ABC) là AH , do đó $\alpha = \widehat{SAH}$. Gọi M là trung điểm AB . Khi đó:

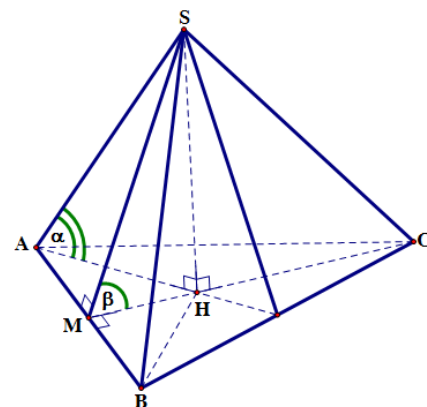
$$\begin{cases} (SAB) \cap (ABC) = AB \\ (SMC) \perp AB \\ (SMC) \cap (SAB) = MS \\ (SMC) \cap (ABC) = MC. \end{cases}$$

Suy ra: $\beta = \widehat{SMC}$. Ta có:

$$\tan \alpha = \frac{SH}{AH}, \tan \beta = \frac{SH}{MH}.$$

Do tam giác ABC đều nên H là trọng tâm của ΔABC , dẫn tới: $MH = \frac{1}{2}CH = \frac{1}{2}AH$. Như vậy:

$$\tan \beta = \frac{SH}{MH} = \frac{2SH}{AH} = 2 \tan \alpha. \text{ Ta có điều phải chứng minh.}$$



Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = a, BC = b$ ($b > a > 0$). Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = c$. Kí hiệu α là góc giữa SC và BD ; β là góc giữa (SBC) và $(ABCD)$. Chứng minh rằng:

$$\cos \alpha = \frac{k^2 - 1}{\sqrt{k^2 + 1 + \tan^2 \beta} \cdot \sqrt{1 + k^2}}, \text{ với } k = \frac{b}{a}.$$

✍️ Lời giải

Dễ thấy rằng $\beta = \widehat{SBA}$. Trong tam giác vuông SAB , ta có: $\tan \beta = \frac{c}{a}$.

Ta có: $\cos \alpha = \frac{|\vec{SC} \cdot \vec{BD}|}{SC \cdot BD}$.

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} \vec{SC} \cdot \vec{BD} &= (\vec{AC} - \vec{AS}) \cdot \vec{BD} \\ &= \vec{AC} \cdot \vec{BD} - \vec{AS} \cdot \vec{BD} \\ &= \vec{AC} \cdot \vec{BD} \\ &= (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{AD} - \vec{AB}) \\ &= -AB^2 + \vec{BC} \cdot \vec{AD} \\ &= -a^2 + \vec{BC} \cdot \vec{BC} \\ &= -a^2 + BC^2 = b^2 - a^2. \end{aligned}$$

Lại có: $BD^2 = AB^2 + AD^2 = a^2 + b^2$. Do tam giác SAC vuông tại A nên:

$$SC^2 = SA^2 + CA^2 = c^2 + a^2 + b^2.$$

Thay vào (*), ta được:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\frac{b^2}{a^2} - 1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}}} \\ &= \frac{k^2 - 1}{\sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{1 + k^2 + \tan^2 \beta}}. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

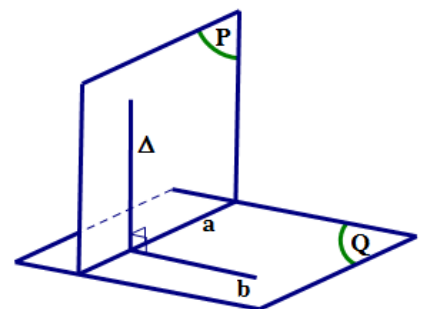
Dạng 13. Chứng minh hai mặt phẳng (P) và (P') vuông góc với nhau.

Phương pháp.

Cách 1. Chứng minh góc giữa hai mặt phẳng bằng 90° .

Cách 2. Vận dụng định lí 2 ở trang 93 : Chứng minh trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia, tức là

$$\begin{cases} \Delta \subset (P) \\ \Delta \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$



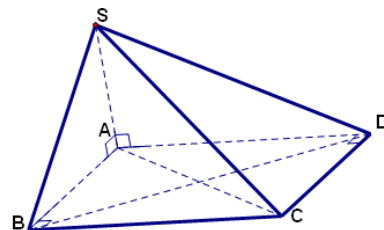
Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $(SCD) \perp (SAD)$.

 **Lời giải**

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$. Vậy

$$\begin{cases} CD \perp DA \subset (SAD) \\ CD \perp SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD).$$

Mà $CD \subset (SCD)$ nên $(SCD) \perp (SAD)$.



Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có các mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Gọi H và K lần lượt hình chiếu của A trên các cạnh SB và SD . Chứng minh rằng

- ① $(SAC) \perp (SBD)$; ② $(SAC) \perp (AHK)$.

 **Lời giải**

Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$. Suy ra $SA \perp BD$.

- ① $\begin{cases} BD \perp SA \subset (SAC) \\ BD \perp AC \subset (SAC) \\ SA \cap AC = A \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.
- Mà $BD \subset (SBD)$ nên suy ra $(SBD) \perp (SAC)$.

- ② $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Vậy $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$. (1)

Ta có $\begin{cases} DC \perp DA \\ DC \perp SA \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SDA) \Rightarrow DC \perp AK$.

Vậy: $\begin{cases} AK \perp DC \\ AK \perp SD \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SDC) \Rightarrow AK \perp SC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (AHK) \Rightarrow (SAC) \perp (AHK)$.

Lưu ý. Có thể giải câu b) cách khác như sau: ta chứng minh được:

$$\begin{cases} HK \parallel BD \\ BD \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow (AHK) \perp (SAC).$$

Bài 8. Cho hai tam giác ACD và BCD có $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$ và hai tam giác này nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD .

a) Tính AB và IJ theo a và x .

b) Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau?

 **Lời giải**

- a) Vì J là trung điểm của đoạn thẳng CD và $AC = AD$ nên $AJ \perp CD$. Do $(ACD) \perp (BCD)$ nên $AJ \perp (BCD)$. Mặt khác $AC = AD = BC = BD$ nên tam giác AJB vuông cân, suy ra $AB = AJ\sqrt{2}$ và $AJ^2 = a^2 - x^2$.

$$\text{Do đó: } AJ = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

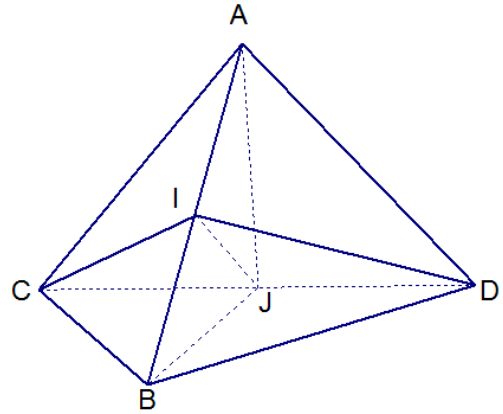
$$\text{Vậy } AB = \sqrt{2(a^2 - x^2)}, \text{ với } a > x.$$

Do I là trung điểm AB , tam giác AJB vuông tại J nên

$$JI = \frac{1}{2}AB, \text{ tức là } IJ = \frac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2}.$$

- b) Rõ ràng là CI và DI vuông góc với AB . Vậy $(ABC) \perp (ABD)$ khi và chỉ khi

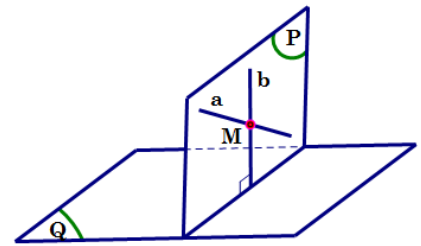
$$\begin{aligned} \widehat{CID} = 90^\circ &\Leftrightarrow IJ = \frac{CD}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2} = x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$



Dạng 14. Cho trước mặt phẳng (Q) và đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (Q) . Xác định mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và $(P) \perp (Q)$.

Phương pháp. Từ điểm M thuộc đường thẳng a , ta dựng đường thẳng b qua M và $b \perp (Q)$. Khi đó (P) là mặt phẳng chứa a và b , tức là $(P) \equiv mp(a, b)$.

Lưu ý. Để dựng đường thẳng b bạn đọc cần xem lại dạng toán 10 (ở trang 64).



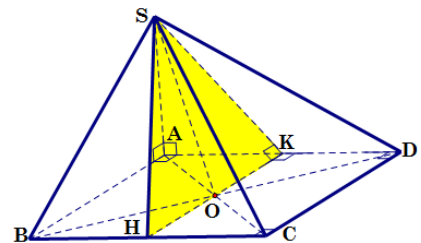
Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Dựng và tính diện tích thiết diện qua SO và vuông góc với (SAD) .

Lời giải

Gọi H, K là trung điểm BC, AD . Ta có:

$$\begin{cases} OK \perp AD \subset (SAD) \\ OK \perp AS \subset (SAD) \\ AD \cap AS = A \end{cases} \Rightarrow OK \perp (SAD).$$

Mà $OK \subset (SKH)$ nên $(SKH) \perp (SAD)$. Vậy mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD) là (SKH) . Ta có $KH \perp SK$, suy ra thiết diện là tam giác vuông SKH . Ta có:



$$\begin{aligned} SK^2 &= SA^2 + AK^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \\ \Rightarrow SK &= \frac{a\sqrt{5}}{2}, KH = AB = a. \end{aligned}$$

$$\text{Diện tích thiết diện là } S = S_{SHK} = \frac{1}{2}SK.KH = \frac{1}{2}a \frac{\sqrt{5}a}{2} = \frac{\sqrt{5}a^2}{4}.$$

Bài 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (SCD) . Hãy xác định mặt phẳng (α) . Mặt phẳng (α) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện.

Lời giải

Dựng $AH \perp SD$ ($H \in SD$). Ta có

$$\begin{cases} DC \perp AD \subset (SAD) \\ DC \perp SA \subset (SAD) \Rightarrow DC \perp (SAD). \\ AD \cap SA = A \end{cases}$$

Mà $AH \subset (SAD)$ nên $DC \perp AH$. Vậy

$$\begin{cases} AH \perp DC \subset (SCD) \\ AH \perp SD \subset (SCD) \Rightarrow AH \perp (SCD). \\ DC \cap SD = D \end{cases}$$

Mà $AH \subset (ABH)$ nên $(ABH) \perp (SCD)$.

Vì (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (SCD) nên (α) chính là (ABH) . Ta có $(ABH) \cap (SAD) = AH$, $(ABH) \cap (SAB) = AB$. Lại có

$$\begin{cases} H \in (ABH) \cap (SCD) \\ AB \subset (ABH) \\ AB \parallel (SCD) \end{cases} \Rightarrow (ABH) \cap (SCD) = Hx,$$

với Hx là đường thẳng qua H và song song với CD (do định lí ?? ở trang ??). Gọi $K = Hx \cap SC$. Do đó

$$(ABH) \cap (SCD) = HK, (ABH) \cap (SBC) = BK.$$

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $AHKB$. Ta có $HK \parallel AB$. Hơn nữa

$$AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AH, HK \parallel AB \Rightarrow HK \perp AH.$$

Do đó thiết diện là hình thang vuông tại A và H . Ta có diện tích thiết diện là

$$S_{AHKB} = \frac{(AB + HK)AH}{2}.$$

Vì $\triangle SAD$ vuông tại A nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có:

$$SA^2 = SH \cdot SD \Rightarrow SH = \frac{SA^2}{SD} = \frac{3a^2}{\sqrt{AD^2 + AS^2}} = \frac{3a^2}{\sqrt{4a^2}} = \frac{3a}{2}.$$

Lại có:

$$\frac{SH}{SD} = \frac{HK}{CD} \Rightarrow HK = \frac{SH \cdot CD}{SD} = \frac{\frac{3a}{2} \cdot a}{2a} = \frac{3a}{4}.$$

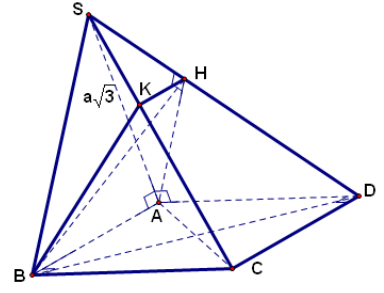
Vậy:

$$S_{AHKB} = \frac{(AB + HK)AH}{2} = \frac{1}{2} \left(a + \frac{3a}{4} \right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}a^2}{16}.$$

Chú ý 8. Ta còn có thể tìm giao tuyến của mặt phẳng (ABH) và (SCD) bằng cách vận dụng hệ quả ?? ở trang ?? như sau:

$$\begin{cases} H \in (ABH) \cap (SCD) \\ AB \subset (ABH), CD \subset (SCD) \Rightarrow (ABH) \cap (SCD) = Hx, \\ AB \parallel CD \end{cases}$$

với Hx là đường thẳng qua H và song song với CD .



Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi I là trung điểm AB , gọi (P) là mặt phẳng chứa DI và vuông góc với (SBC) .

- a) Tìm thiết diện của mặt phẳng (P) với hình chóp. Giả sử (P) cắt SC tại M , tính tỉ số $\frac{CM}{CS}$.
- b) Xác định hình chiếu của C trên mặt phẳng (P) .

Lời giải

Phân tích. Trên DI , ta sẽ chọn một điểm rồi dựng đường thẳng đi qua điểm đó và vuông góc với (SBC) (theo dạng 14 ở trang 100). Do giả thiết $(SAB) \perp (ABCD)$ nên ta sẽ chọn điểm I . Do đã có $IB \perp BC$ nên theo dạng 10 ở trang 64, trong (SBC) , ta chọn BC và dựng mặt phẳng qua I và vuông góc với BC . Và như vậy, theo dạng 9 ở trang 62, ta chỉ cần vẽ thêm một đường thẳng cắt BI và vuông góc với BC .

Giải.

a) Gọi E, J lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SB và EB . Ta có hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SAB) vuông góc với nhau theo giao tuyến AB , mà BC vuông góc với AB nên BC vuông góc với (SAB) , suy ra BC vuông góc với IJ . Do tam giác SAB đều nên AE vuông góc với SB . Ta có $IJ \perp SB$ (do IJ là đường trung bình của $\triangle ABE$). Như vậy:

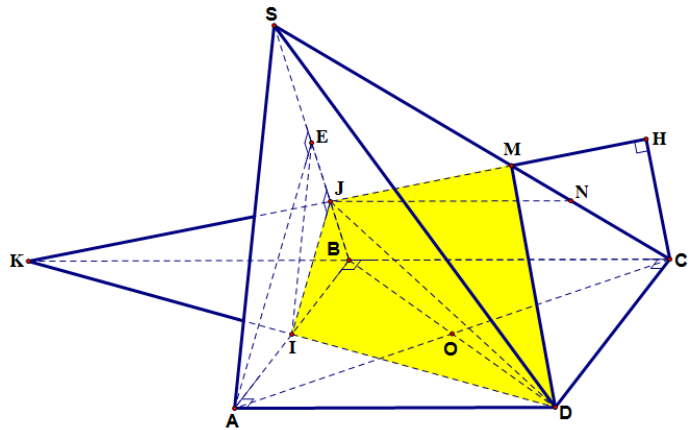
$$\begin{cases} IJ \perp SB \subset (SBC) \\ IJ \perp BC \subset (SBC) \\ SB \cap BC = B \end{cases} \Rightarrow IJ \perp (SBC).$$

Do đó $(DIJ) \perp (SBC) \Rightarrow (P) \equiv (DIJ)$. Gọi $K = DI \cap BC$, $M = KJ \cap SC$. Khi đó thiết diện là tứ giác $DIJM$. Trong tam giác KCD , ta có $BI \parallel CD$ và $BI = \frac{1}{2}CD$ nên B, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng KC, KD . Qua J dựng đường thẳng song song với BC cắt SC tại N . Ta có: $\frac{SN}{SC} = \frac{JN}{BC} = \frac{SJ}{SB} = \frac{3}{4}$. Vì $CK = 2BC$ nên:

$$\begin{aligned} \frac{JN}{CK} = \frac{3}{8} &\Rightarrow \frac{MN}{MC} = \frac{MJ}{MK} = \frac{JN}{CK} = \frac{3}{8} \\ &\Rightarrow \frac{CN}{CM} = \frac{MC - MN}{CM} = 1 - \frac{MN}{MC} = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \\ &\Rightarrow CM = \frac{8}{5}CN = \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{4}SC = \frac{2}{5}SC. \end{aligned}$$

Như vậy $\frac{CM}{CS} = \frac{2}{5}$.

b) Theo câu a), ta có: $(SBC) \perp (P)$, $(SBC) \cap (P) = JM$. Như vậy, từ C vẽ CH vuông góc với JM tại H , khi đó CH vuông góc với $(P) = (KDM)$ tại H , hay H là hình chiếu C đến mặt phẳng (P) .



Dạng 15 (Liên hệ dạng này với dạng 10 ở trang 64, dạng 17 ở trang 135).

Xác định chân đường vuông góc hạ từ một điểm xuống một mặt phẳng: Cho mặt phẳng (P) và điểm M không thuộc mặt phẳng đó. Xác định hình chiếu của M trên (P) .

Phương pháp. Sau đây ta sẽ phân loại, xét một số trường hợp thường gặp và đưa ra phương pháp giải chúng.

Trường hợp 1. Trong (P) có một điểm A và một đường thẳng d không đi qua A sao cho $MA \perp d$.

Cách giải.

☑ Trong mặt phẳng (P) kẻ đường thẳng d' đi qua A và $d' \perp d$.

☑ Trong mặt phẳng (M, d') , dựng $MH \perp d'$. Khi đó H là điểm cần tìm.

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều và hình chiếu H của S trên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm của tam giác ABC . Xác định chân đường vuông góc hạ từ A đến mặt phẳng (SBC) .

✍ **Lời giải**

Vì tam giác ABC đều nên H là trực tâm của nó. Vì ba tam giác vuông SHA, SHB, SHC bằng nhau nên

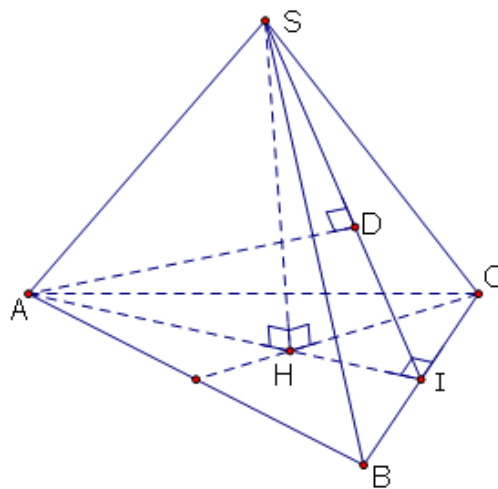
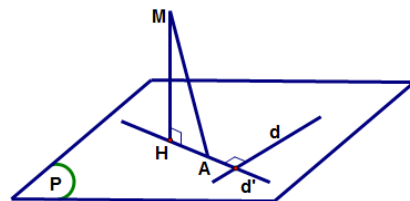
$$\begin{cases} SA = SB = SC. \text{ Ta có} \\ BC \perp SH \subset (SAH) \\ BC \perp AH \subset (SAH) \\ SH \cap AH = H. \end{cases}$$

Suy ra $BC \perp (SAH)$.

Do đó $BC \perp SA$. Vẽ SI vuông góc với BC tại I . Khi đó I là trung điểm BC . Vẽ AD vuông góc với SI tại D . Khi đó D là điểm cần tìm. Thật vậy, vì

$$\begin{cases} AD \perp SI \subset (SBC) \\ AD \perp BC \subset (SBC) \Rightarrow AD \perp (SBC) \\ SI \cap BC = I \end{cases}$$

nên D (chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAI) là hình chiếu của A trên (SBC) .



Trường hợp 2. Trong (P) có hai điểm A, B sao cho $MA = MB$.

Cách giải.

☑ Trong (P) kẻ đường trung trực d của đoạn thẳng AB .

☑ Trong mặt phẳng (M, d) , dựng $MH \perp d$. Khi đó H là điểm cần tìm.

Bài 13. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác cân tại A và $\widehat{SAB} = \widehat{SAC}$. Xác định đường thẳng chứa chân đường cao của hình chóp.

✍ **Lời giải**

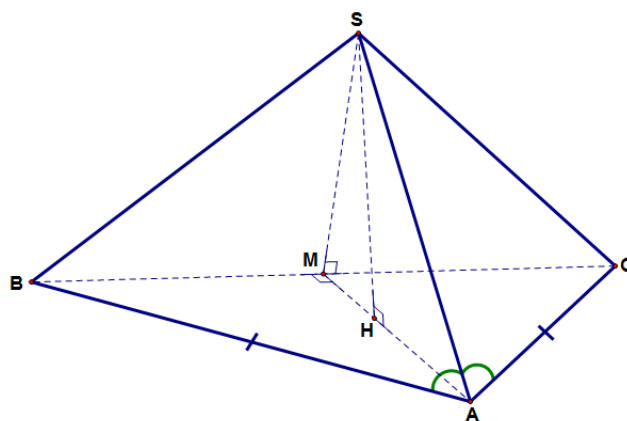
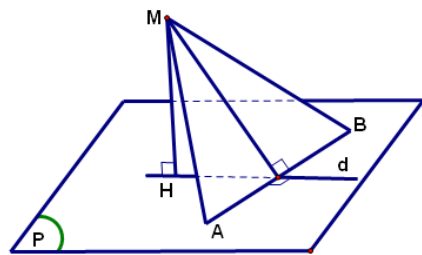
Hai tam giác SAB và SAC bằng nhau (do $AB = AC$, SA là cạnh chung, $\widehat{SAB} = \widehat{SAC}$), suy ra $SB = SC$. Dựng đường cao AM của $\triangle ABC$. Khi đó AM là đường trung trực của đoạn thẳng BC . Trong (SAM) , kẻ SH vuông góc với MA tại H .

Khi đó:

$$\begin{cases} BC \perp MS \subset (SMA) \\ BC \perp MA \subset (SMA) \\ MS \cap MA = M. \end{cases}$$

Suy ra

$$BC \perp (SMA) \Rightarrow BC \perp SH.$$



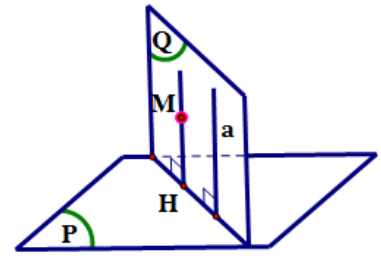
Ta có $\begin{cases} SH \perp AM \subset (ABC) \\ SH \perp BC \subset (ABC) \\ AM \cap BC = M \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$. Chân đường cao H hạ từ S của hình chóp nằm trên AM .

Trường hợp 3. Tồn tại một đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) .

Cách giải.

☑ Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng a . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

☑ Kẻ đường thẳng qua M và song song với a , cắt giao tuyến tại H . Khi đó H là điểm cần tìm.



Bài 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C . Cho SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Xác định chân đường vuông góc hạ từ điểm M thuộc cạnh AB xuống mặt phẳng (SBC) .

Lời giải

Gọi K là hình chiếu của A trên SC .

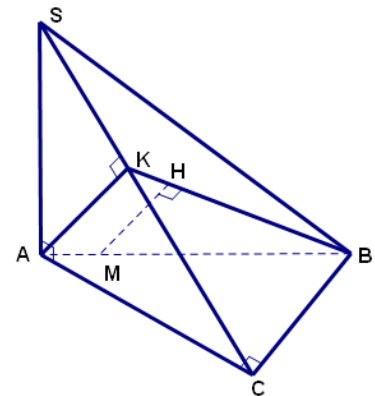
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AC \subset (SAC) \\ BC \perp SA \subset (SAC) \\ AC \cap SA = A. \end{cases}$

Suy ra $BC \perp (SAC)$.

Mà $AK \subset (SBC)$ nên $BC \perp AK$.

Ta có: $\begin{cases} AK \perp SC \subset (SBC) \\ AK \perp BC \subset (SBC) \\ SC \cap BC = C. \end{cases}$

Suy ra $AK \perp (SBC)$.



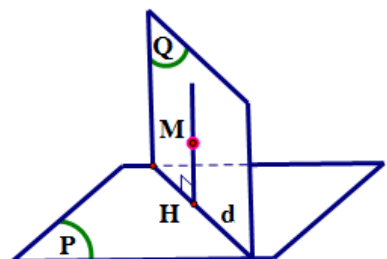
Mặt phẳng (AKB) chứa M và đường thẳng AK , lại có $(AKB) \cap (SBC) = KB$. Trong (AKB) vẽ đường thẳng qua M , song song với AK , cắt KB tại H . Vì $MH \perp (SBC)$ nên H là điểm cần tìm.

Trường hợp 4. Điểm M thuộc mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P) .

Cách giải.

☑ Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

☑ Chọn trên d điểm H sao cho $MH \perp d$. Khi đó H là điểm cần tìm.



Bài 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Cho đường thẳng SA vuông góc với $(ABCD)$.

a) Chứng minh rằng $(SAB) \perp (SBC)$.

b) Xác định chân đường vuông góc hạ từ điểm M nằm trên đường SA xuống mặt phẳng (SBC) .

c) Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD , gọi (α) là mặt phẳng qua O và song song với đường thẳng BC . Xác định chân đường vuông góc hạ từ S xuống (α) .

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \begin{cases} BC \perp SA \subset (SAB) \\ BC \perp AB \subset (SAB) \\ SA \cap AB = A. \end{cases}$$

Vậy $BC \perp (SAB)$.

Mà $BC \subset (SBC)$

nên $(SBC) \perp (SAB)$.

b) Ta có:

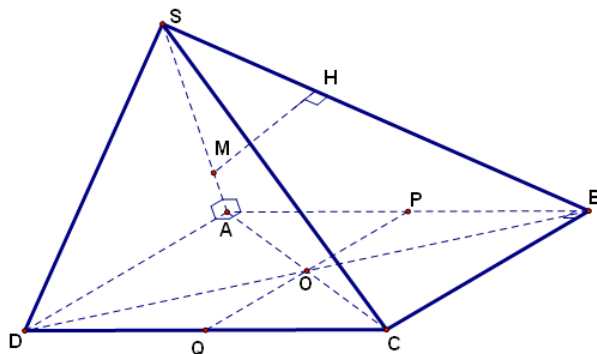
$(SAB) \cap (SBC) = SB$.

Trong mặt phẳng (SAB) , vẽ đường thẳng qua M , vuông góc với SB tại H . Vì $MH \perp (SAB)$ nên H là điểm cần tìm.

c) Ta có:

$$\begin{cases} O \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ BC \subset (ABCD), BC \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = Ox,$$

với Ox là đường thẳng qua O và $Ox \parallel BC$. Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của Ox với AB và CD . Khi đó vì $PQ \subset (\alpha)$ và $PQ \perp (SAB)$ nên $(\alpha) \perp (SAB)$. Điểm S thuộc (SAB) , do đó chân đường vuông góc hạ từ S xuống (α) nằm trên giao tuyến của (α) và (SAB) .



C. BÀI TẬP ÔN-LUYỆN

1. Đề bài

Bài 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , SA vuông góc với (ABC) . Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A xuống SB, SC . Chứng minh rằng:

- $BC \perp (SAB)$.
- $AB' \perp (SBC)$.
- $(AB'C') \perp (SAC)$.
- Tứ giác $BCC'B'$ nội tiếp đường tròn.

Bài 17. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Tính góc giữa các mặt phẳng

- (SAB) và $(ABCD)$;
- (SAB) và (SCD) .

Bài 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $SA \perp (ABC)$, $\widehat{BAC} = \alpha$, $SA = a$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SC . Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) là β .

- Chứng minh $BC \perp AH$, $SC \perp (AHK)$.
- Chứng minh rằng $\tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{a}{SK}$.

Bài 19. Cho $\triangle ABC$ có $BC = 2a$ và đường cao $AD = a$. Trên đường thẳng vuông góc với $mp(ABC)$ tại A lấy điểm S sao cho $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SB, SC .

- Chứng minh $BC \perp (SAD)$.
- Gọi H là hình chiếu của A trên EF . Chứng minh AH nằm trong (SAD) . Hãy cho biết vị trí của điểm H đối với hai điểm S và D .

c) Tính diện tích tam giác AEF .

Bài 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều, $SC = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của AD . Chứng minh rằng

① $(SAB) \perp (ABCD)$;

② $AC \perp SK, CK \perp SD$.

Bài 21. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$. Gọi H là trực tâm tam giác BCD và K là trực tâm tam giác ACD . Chứng minh rằng (AHK) vuông góc với (ACD) và (BCD) .

Bài 22 (ĐH-2002A). Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, có độ dài cạnh đáy bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SB, SC . Tính theo a diện tích ΔAMN , biết rằng $(AMN) \perp (SBC)$.

Bài 23. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau góc 60° .

Bài 24 (ĐH-2008B). Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$, $(SAB) \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh AB, BC . Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng SM, DN .

Bài 25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Trên các cạnh DC, BB' lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $DM = BN = x$, với $0 \leq x \leq a$. Chứng minh rằng $AC' \perp MN$.

Bài 26. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp gì nếu thoả mãn một trong các điều kiện sau?

a) Tứ diện $AB'CD'$ có các cạnh đối bằng nhau;

b) Tứ diện $AB'CD'$ có các cạnh đôi vuông góc;

c) Tứ diện $AB'CD'$ là tứ diện đều.

Bài 27. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, BC = b, CC' = c$.

a) Chứng minh rằng tổng bình phương tất cả các đường chéo của hình hộp bằng tổng bình phương tất cả các cạnh của hình hộp.

b) Nếu $AC' = BD' = B'D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ thì hình hộp đó có phải là hình hộp chữ nhật không? Vì sao?

Bài 28. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

a) Chứng minh rằng AC' vuông góc với hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(B'CD')$.

b) Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của AC' . Chứng minh thiết diện tạo thành là một lục giác đều. Tính diện tích của thiết diện đó.

Bài 29. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a và điểm K thuộc cạnh CC' sao cho $CK = \frac{2}{3}a$. Mặt phẳng (α) đi qua A, K và song song với BD .

a) Tìm giao tuyến của (α) và $(BDD'B')$.

b) Chứng minh rằng thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi (α) là hình thoi.

c) Tính diện tích của tứ giác $BCKM$, với M là giao điểm của mặt phẳng (α) với đường thẳng BB' .

Bài 30. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có

$$AB = AD = a, AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \widehat{BAD} = 60^\circ.$$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'D'$ và $A'B'$. Gọi S là điểm đối xứng của A qua A' . Chứng minh rằng diện tích của tứ giác $BDMN$ bằng ba phần tư lần diện tích $\triangle SBD$ và $AC' \perp (BDMN)$.

Bài 31. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AD và BB' sao cho $AM = BN$. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B'D}$ đồng phẳng.

Bài 32. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

- Tính góc giữa hai đường thẳng AC và DA' .
- Chứng minh $BD \perp AC'$.

Bài 33. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 1. Lấy M, N, P theo thứ tự trên các cạnh BB_1, CD và A_1D_1 sao cho

$$B_1M = CN = D_1P = \frac{1}{3}.$$

- Tính $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$. Suy ra độ dài MN .
- Chứng minh rằng $AC_1 \perp MN$.

Bài 34. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là các điểm thuộc AD' và DB sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD'}$, $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$ ($k \neq 0, k \neq 1$).

- Chứng minh rằng $MN \parallel (A'BC)$.
- Khi $MN \parallel A'C$, chứng tỏ rằng $MN \perp AD'$ và $MN \perp DB$.

Bài 35. Cho hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) có giao tuyến Δ . Lấy A, B cùng thuộc Δ và lấy $C \in (P), D \in (Q)$ sao cho $AC \perp AB, BD \perp AB$ và $AB = AC = BD$. Xác định thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc với CD . Tính diện tích thiết diện khi $AC = AB = BD = a$.

Bài 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt bên hợp với mặt đáy góc α .

- Chứng minh rằng hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là tâm của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.
- Chứng minh $S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA} = \frac{S_{ABC}}{\cos \alpha}$.

Bài 37. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh $AB = 2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng α . Một mặt phẳng đi qua AB tạo với mặt phẳng (ABC) góc β ($\alpha > \beta$) cắt cạnh SC tại D . Tính diện tích của tam giác ABD theo α và β .

2. Lời giải, hướng dẫn

Câu 16.

a) Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp SA \subset (SAB) \\ BC \perp BA \subset (SAB) \\ SA \cap BA = A \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

b) Do $BC \perp (SAB)$, mà $AB' \subset (SAB)$ nên suy ra $BC \perp AB'$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} AB' \perp SB \subset (SBC) \\ AB' \perp BC \subset (SBC) \\ SB \cap BC = B \end{cases} \Rightarrow AB' \perp (SBC).$$

c) Do $AB' \perp (SBC)$ nên $AB' \perp SC$. Như vậy ta có

$$\begin{cases} SC \perp AB' \subset (AB'C') \\ SC \perp AC' \subset (AB'C') \\ AB' \cap AC' = A \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AB'C'). \quad (*)$$

Mà $SC \subset (SAC)$ nên từ (*) suy ra $(AB'C') \perp (SAC)$.

d) Theo trên ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp BS$. Ta có

$$SC \perp (AB'C') \Rightarrow SC \perp C'B'.$$

Như vậy tứ giác $BCC'B'$ có $\widehat{CBB'} + \widehat{CC'B'} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên nội tiếp đường tròn.

Câu 17. Gọi O là hình chiếu của điểm S trên $(ABCD)$.

- ① Ta có OA, OB, OC, OD lần lượt là hình chiếu của SA, SB, SC, SD trên $(ABCD)$, mà $SA = SB = SC = SD$ nên ta có $OA = OB = OC = OD$. Vậy O là giao điểm của AC và BD .

Ta có $(SAB) \cap (ABCD) = AB$. Gọi α (với $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm AB .

$$\text{Ta có } \begin{cases} OM \subset (ABCD), OM \perp AB \\ SM \subset (SAB), SM \perp AB. \end{cases}$$

Suy ra $\alpha = \widehat{SMO}$. Lại có $OM = \frac{a}{2}$ nên

$$SO^2 = SB^2 - OB^2 = \frac{5a^2}{4} - \frac{2a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

Trong tam giác SMO ta có

$$\tan \alpha = \frac{SO}{MO} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

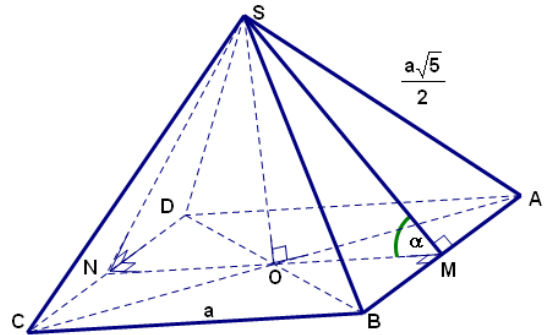
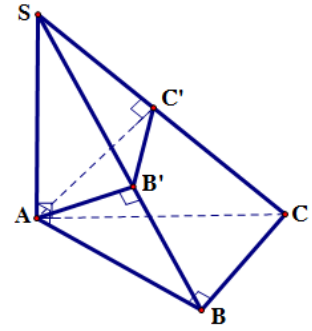
- ② Gọi β (với $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$), $N = MO \cap DC$. Ta có

$$\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx,$$

với Sx là đường thẳng qua S và song song với AB . Ta có

$$\begin{cases} (SAB) \cap (SCD) = Sx \\ (SMN) \perp Sx \text{ (do } AB \perp (SMN), AB \parallel Sx) \\ (SMN) \cap (SAB) = SM, (SMN) \cap (SCD) = SN. \end{cases}$$

Vậy góc giữa mặt phẳng (SAB) và (SCD) là góc giữa đường thẳng SM và SN . Vì $\triangle SMN$ cân tại S và có $\widehat{SMN} = \alpha = 60^\circ$ nên $\triangle SMN$ đều, suy ra $\beta = \widehat{MSN} = 60^\circ$.



Câu 18.

a) Ta có $SA \perp (ABC)$, mà BC nằm trong (ABC) nên $SA \perp BC$. Như vậy:

$$\begin{cases} BC \perp SA \subset (SAB) \\ BC \perp BA \subset (SAB) \\ SA \cap BA = A. \end{cases}$$

Suy ra $BC \perp (SAB)$.

Mà $AH \subset (SAB)$ nên $BC \perp AH$.

$$\begin{cases} AH \perp SB \subset (SBC) \\ AH \perp BC \subset (SBC) \\ SB \cap BC = B. \end{cases}$$

Suy ra $AH \perp (SBC)$.

Mà $SC \subset (SBC)$ nên $AH \perp SC$.

$$\begin{cases} SC \perp AH \subset (AHK) \\ SC \perp AK \subset (AHK) \Rightarrow SC \perp (AHK). \\ AH \cap AK = A \end{cases}$$

b) Ta có: $\begin{cases} (SAC) \cap (SBC) = SC, (AHK) \perp SC \\ (AHK) \cap (SAC) = KA, (AHK) \cap (SBC) = KH. \end{cases}$

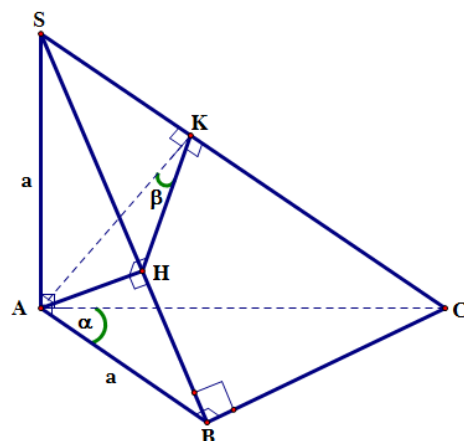
Suy ra $\beta = \widehat{AKH}$. Ta có:

$$\tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AH}{HK} = \frac{AH}{AB} \cdot \frac{BC}{HK}, \cos \alpha = \frac{AB}{AC}.$$

Do tam giác HBA đồng dạng với tam giác ABS nên: $\frac{AH}{AB} = \frac{SA}{SB}$.

Do tam giác SHK đồng dạng với tam giác SCB nên: $\frac{BC}{KH} = \frac{SB}{SK}$.

Từ đó: $\tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{SA}{SB} \cdot \frac{SB}{SK} = \frac{SA}{SK} = \frac{a}{SK}$.

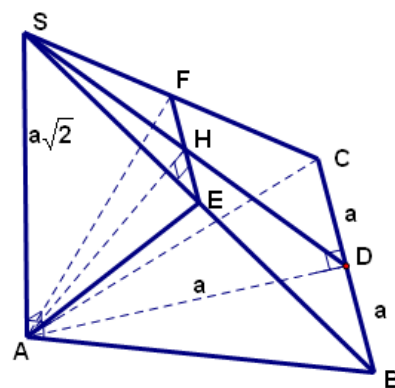

Câu 19.

a) Ta có $SA \perp (ABC)$. Vậy $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AD. \end{cases}$

Suy ra $BC \perp (SAD)$.

b) Ta có $AB = AC = a\sqrt{2}$, $SB = SC = 2a$, $AE = a = AF$. Suy ra $\triangle AEF$ cân tại A, do đó H là trung điểm EF. Do tam giác ABC cân tại A nên D là trung điểm BC. Bởi vậy SD đi qua trung điểm H của EF, do đó $H \in (SAD)$, suy ra $AH \subset (SAD)$, hơn nữa H là trung điểm SD (do EF là đường trung bình của của tam giác SBC).

c) $\triangle AEF$ đều cạnh a, do đó có diện tích là $S_{\triangle AEF} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



Câu 20. Do $\triangle SAB$ đều nên $SB = SA = AB = a$.

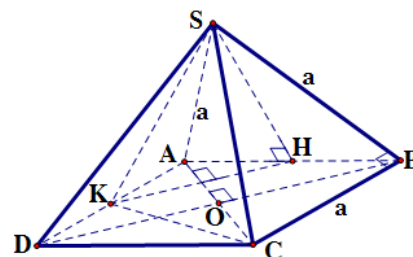
① Ta có $SB^2 + BC^2 = 2a^2 = SC^2$.

Vậy $\triangle SBC$ vuông cân tại B.

Do đó

$$\begin{cases} BC \perp BA \subset (SAB) \\ BC \perp BS \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp (SAB). \\ BA \cap BS = B \end{cases}$$

Mà $BC \subset (ABCD)$ nên $(ABCD) \perp (SAB)$.



- ② Gọi H là trung điểm AB . Khi đó $SH \perp AB$, mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$ (do định lí 3), mà $AC \subset (ABCD)$ nên $SH \perp AC$. Ta có

$$\begin{cases} AC \perp HK \subset (SHK) \\ AC \perp SH \subset (SHK) \\ HK \cap SH = H \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK.$$

Trong hình vuông $ABCD$ có $CK \perp DH$. Lại có $CK \perp SH$, suy ra $CK \perp (SDH)$. bởi vậy $CK \perp SD$.

Câu 21.

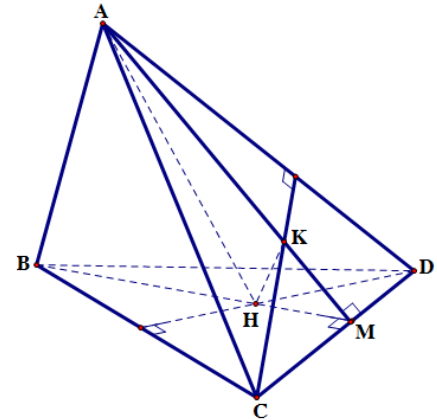
Gọi M là giao điểm của BH và CD . Ta có:

$$\begin{cases} CD \perp BM \subset (ABM) \\ CD \perp AB \subset (ABM) \\ AB \cap BM = B \end{cases}$$

Suy ra $CD \perp (ABM) \Rightarrow CD \perp AM$. Như vậy ba điểm A, K, M thẳng hàng. Do đó mặt phẳng (AHK) cũng chính là mặt phẳng (ABM) . Ta có:

$$\begin{cases} CD \perp (AHK) \\ CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow (ACD) \perp (AHK)$$

$$\begin{cases} CD \perp (AHK) \\ CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow (BCD) \perp (AHK).$$



Câu 22.

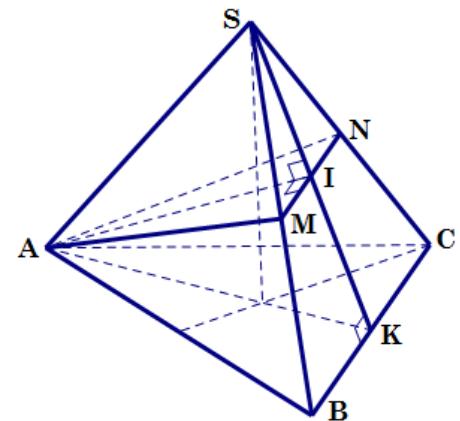
Gọi K là trung điểm cạnh BC và $I = SK \cap MN$. Từ giả thiết suy ra $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, $MN \parallel BC$, I là trung điểm của SK và MN . Ta có $\triangle SAB$ bằng $\triangle SAC$, do đó hai trung tuyến tương ứng $AM = AN$, dẫn tới $\triangle AMN$ cân tại A , suy ra $AI \perp MN$. Mà $(SBC) \perp (AMN)$ nên $AI \perp (SBC)$, suy ra $AI \perp SK$. Vậy $\triangle SAK$ cân tại A , suy ra $SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có:

$$SK^2 = SB^2 - BK^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

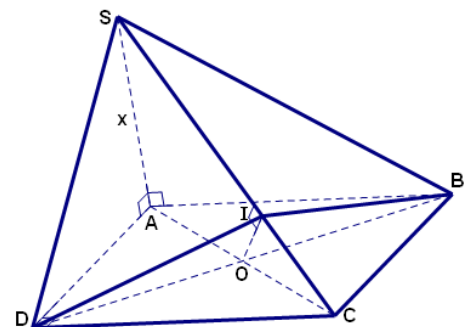
$$\text{Từ đó } AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{SK}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

$$\text{Vậy: } S_{AMN} = \frac{1}{2}MN \cdot AI = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{4} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}.$$



Câu 23.

Ta có $(SBC) \cap (SDC) = SC$. Trong (SAC) kẻ $OI \perp SC$ ($I \in SC$). Do $AC \perp BD$ mà AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ nên $BD \perp SC$. Suy ra $SC \perp (BID)$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc giữa hai đường thẳng ID và IB . Do hai tam giác SCD và SCB bằng nhau nên $ID = IC$, suy ra $IO \perp CD$. Mặt khác vì $IO \perp BD$, $OI < OC$ mà $OC = OB$ nên $OI < OB$, suy ra $\widehat{BIO} > 45^\circ$ (vì tam giác BOI vuông tại O). Tương tự ta có $\widehat{DIO} > 45^\circ$. Vậy để hai mặt phẳng (SBC) , (SDC) tạo với nhau góc 60° tương đương với việc tìm x để $\widehat{BID} = 120^\circ$. Do $\triangle BID$ cân tại I nên ta cần tìm x để $\widehat{BIO} = 60^\circ$. Ta có



$$\sin \widehat{OCI} = \frac{OI}{OC} \Leftrightarrow OI = OC \cdot \sin \widehat{OCI} \Leftrightarrow OI = OC \cdot \frac{SA}{SC}.$$

Vậy:

$$\begin{aligned} \widehat{BIO} &= 60^\circ \Leftrightarrow \tan \widehat{BIO} = \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \frac{BO}{OI} &= \sqrt{3} \Leftrightarrow BO = OI\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow BO &= OC \cdot \frac{SA}{SC} \sqrt{3} \Leftrightarrow SC = SA\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \sqrt{SA^2 + AC^2} &= SA\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2a^2} = \sqrt{3}x \\ \Leftrightarrow x^2 + 2a^2 &= 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = a. \end{aligned}$$

Điều kiện hai mặt phẳng (SBC) , (SDC) tạo với nhau góc 60° là $x = a$.

Câu 24. Phân tích. Giả thiết cho $(SAB) \perp (ABCD)$ nên ta sẽ sử dụng định lí 3 ở trang 93. Góc giữa hai đường thẳng SM và DN được quy về góc giữa hai đường thẳng cắt nhau SM và ME , với $ME \parallel DN$.

Giải.

Cách 1. Hạ $SH \perp AB$ tại H , khi đó SH vuông góc với $(ABCD)$. Vì

$$SA^2 + SB^2 = 4a^2 = AB^2$$

nên $\triangle SAB$ vuông tại S , dẫn đến $SM = \frac{AB}{2} = a$.

Do đó $\triangle SAM$ đều cạnh a , suy ra $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vẽ $ME \parallel DN$, với E thuộc đoạn AD , khi đó $AE = \frac{a}{2}$. Ta có $AE \perp AH$, mà AH là hình chiếu của SA trên $(ABCD)$ nên $AE \perp SA$, suy ra:

$$SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, ME = \sqrt{AM^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Tam giác SME cân tại E nên

$$\begin{aligned} \cos(SM, DN) &= \cos(SM, ME) = \cos \widehat{SME} \\ &= \frac{MS^2 + ME^2 - SE^2}{2MS \cdot ME} = \frac{a^2}{a \cdot a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

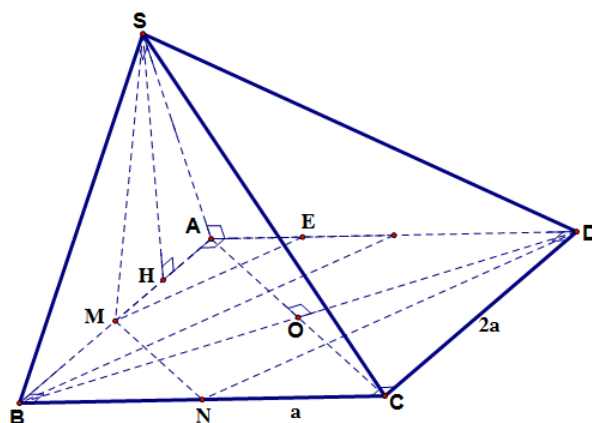
Cách 2. Ta sẽ biểu thị hai vectơ $\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{DN}$ qua ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SM} &= \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \\ \overrightarrow{DN} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

Vậy $\cos(SM, DN) = \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DN}|}{SM \cdot DN}$, với $SM = a$, $DN = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DN} &= \left(-\overrightarrow{AS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) = -\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 \\ &= -AS \cdot AB \cdot \cos 60^\circ + \frac{1}{2}AB^2 = -a^2 + 2a^2 = a^2. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } \cos(SM, DN) = \frac{a^2}{a \cdot a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$



Câu 25.

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

Khi đó:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a,$$

$$\overrightarrow{BN} = \frac{x}{a}\vec{a}, \overrightarrow{DM} = \frac{x}{a}\vec{b}.$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

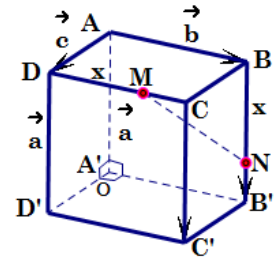
$$\text{Mà } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}) \text{ nên}$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(\vec{b} + \frac{x}{a}\vec{a}\right) - \left(\vec{c} + \frac{x}{a}\vec{b}\right) = \frac{x}{a}\vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b} - \vec{c}.$$

Do $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ nên

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN} &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \left[\frac{x}{a}\vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b} - \vec{c} \right] \\ &= \frac{x}{a}\vec{a}^2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b}^2 - \vec{c}^2 = xa + \left(1 - \frac{x}{a}\right)a^2 - a^2 = 0. \end{aligned}$$

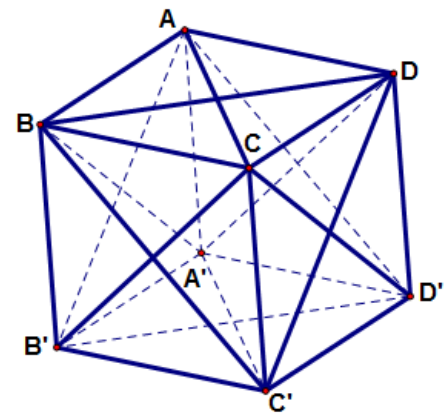
Vậy $\overrightarrow{AC'} \perp \overrightarrow{MN} \Rightarrow AC' \perp MN$.


Câu 26.

a) Ta có $B'D' = BD$. Vậy $AC = B'D' \Leftrightarrow AC = BD$, khi đó $ABCD$ là hình chữ nhật. Tương tự ta cũng có $ABB'A'$ và $ADD'A'$ là hình chữ nhật. Vậy khi tứ diện $AB'CD'$ có các cạnh đối bằng nhau thì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật. Ngược lại nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật thì dễ thấy tứ diện $AB'CD'$ có các cạnh đối bằng nhau.

b) Ta có $BD \parallel B'D'$. Vậy $AC \perp B'D'$ khi và chỉ khi $AC \perp BD$. Khi đó $ABCD$ là hình thoi. Tương tự như trên ta cũng có $ABB'A'$ và $ADD'A'$ là những hình thoi. Vậy hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thoi (tức là sáu mặt của hình hộp là hình thoi). Cũng dễ thấy rằng hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thoi thì tứ diện $AB'CD'$ có các cạnh đối vuông góc.

c) Khi $AB'CD'$ là tứ diện đều thì các cạnh đối diện vừa bằng nhau vừa vuông góc. Vậy từ kết quả câu a) và câu b) suy ra $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương. Ngược lại nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương thì $AB'CD'$ là tứ diện đều.


Câu 27.

a) Trong hình bình hành $BDD'B'$, ta có

$$D'B^2 + B'D^2 = 2(BD^2 + B'B^2).$$

Trong hình bình hành $ACC'A'$, ta có

$$A'C^2 + C'A^2 = 2(AC^2 + A'A^2).$$

Từ đó suy ra

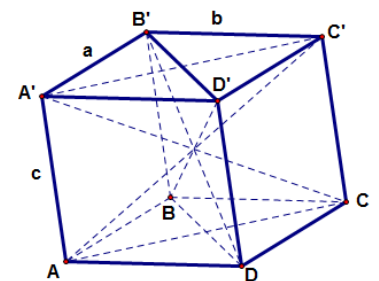
$$\begin{aligned} C'A^2 + A'C^2 + D'B^2 + B'D^2 \\ &= 2(BD^2 + AC^2 + B'B^2 + A'A^2) \\ &= 4(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Nếu $AC' = BD' = B'D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ thì theo câu a) suy ra

$$A'C = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow A'C = AC' = BD' = B'D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

tức là bốn đường chéo của hình hộp bằng nhau. Do $ACC'A'$ là hình bình hành và $AC' = A'C$ nên $ACC'A'$ là hình chữ nhật, suy ra $AA' \perp AC$. Tương tự như trên ta có $BB' \perp BD$, mà $BB' \parallel$



AA' nên $AA' \perp (ABCD)$. Tương tự ta có $AB \perp (ADD'A')$. Do đó $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật.

Câu 28.

a) Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên

$$AA' = AB = AD = a, C'A' = C'B = C'D = a\sqrt{2}.$$

Suy ra A và C' nằm trên trục đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'BD$, bởi vậy $AC' \perp (A'BD)$. Tương tự ta chứng minh được $AC' \perp (CB'D')$.

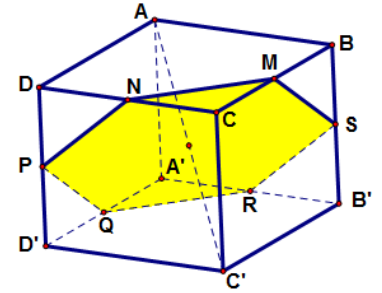
b) Gọi M là trung điểm đoạn thẳng BC , khi đó $MA = MC'$ (vì cùng bằng $\frac{a\sqrt{5}}{2}$) nên M thuộc mặt trung trực (α) của AC' .

Tương tự ta chứng minh được N, P, Q, R, S cũng có tính chất đó (N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của $CD, DD', D'A', A'B', B'B$). Vậy thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi (α) là lục giác $MNPQRS$. Dễ thấy đó là lục giác đều cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vì MA' là đường trung tuyến của $\triangle MAC'$ nên

$$AM'^2 = \frac{MA^2 + MC'^2}{2} - \frac{AC'^2}{4} = \frac{5a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

Từ đó ta tính được diện tích của thiết diện là

$$6S_{\triangle AMN} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot A'M^2 \sin 60^\circ = 3 \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2.$$



Câu 29.

a) Gọi $O = AC \cap BD, O' = A'C' \cap B'D'$.

Trong $(AA'C'C)$, gọi I là giao điểm của OO' và AK .

Ta có $\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (BDD'B') \\ AK \subset (\alpha), (\alpha) \parallel BD. \end{cases}$

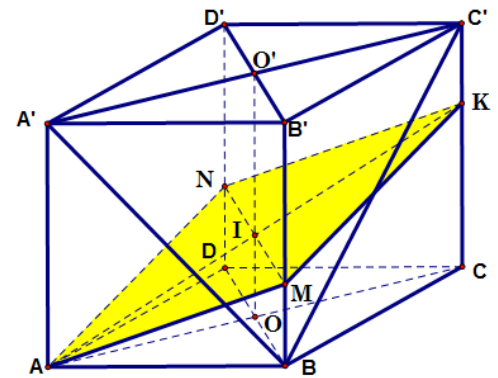
Suy ra giao tuyến của mặt phẳng (α) và $(BDD'B')$ là đường thẳng Ix qua I , song song với BD .

b) Gọi $N = Ix \cap DD', M = Ix \cap BB'$. Khi đó $mp(\alpha) \equiv mp(ANKM)$. Ta có $BM = DN = OI = \frac{a}{3}$. Đáy $ABCD$ là hình vuông suy ra $BD \perp AC$ mà AC là hình chiếu của AK trên $(ABCD)$ nên $BD \perp AK$. Lại có $BD \parallel MN$ nên suy ra $AK \perp MN$. Ta có I là trung điểm của MN và AK nên thiết diện $AMKN$ là hình thoi.

c) Ta có $MB = OI = \frac{1}{2}CK = \frac{a}{3}$.

Vì $BCKM$ là hình thang nên diện tích của tứ giác $BCKM$ là:

$$\left(\frac{a}{3} + \frac{2a}{3} \right) \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}.$$



Câu 30.

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$, gọi S là điểm đối xứng của A qua A' . Khi đó S, M, D thẳng hàng và M là trung điểm của SD ; S, N, B thẳng hàng và N là trung điểm của SB . Ta

có $\triangle BAD$ là tam giác đều cạnh a , suy ra $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AC =$

$2AO = a\sqrt{3} = SA$, $CC' = \frac{a\sqrt{3}}{2} = AO$. Hai tam giác vuông SAO và ACC' bằng nhau, suy ra:

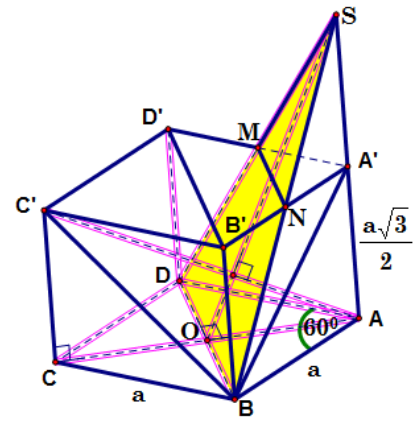
$$\widehat{ASO} = \widehat{CAC'} \Rightarrow \widehat{CAC'} + \widehat{AOS} = 90^\circ.$$

Do đó $AC' \perp SO$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp AC'. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AC' \perp (BDMN)$.

$$\text{Vì } S_{\triangle SMN} = \frac{1}{4} S_{\triangle SBD} \text{ nên } S_{BDMN} = \frac{3}{4} S_{\triangle SBD}.$$



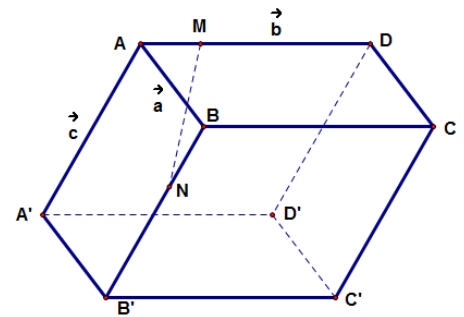
Câu 31.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Ta sẽ khai triển các vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'D}$ theo ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Muốn vậy, đặt $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AD}$. Khi đó $\overrightarrow{NB} = k\overrightarrow{BB'}$. Theo quy tắc hình hộp ta

$$\overrightarrow{B'D} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}. \text{ Như vậy:}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ &= k\vec{b} + \vec{AB} - k\vec{c} \\ &= \vec{AB} + k(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{AB} + k(\overrightarrow{B'D} + \vec{a}) \\ &= (k+1)\vec{AB} + k\overrightarrow{B'D}. \end{aligned}$$

Từ $\overrightarrow{MN} = (k+1)\vec{AB} + k\overrightarrow{B'D}$ và hai vectơ $\vec{AB}$, $\overrightarrow{B'D}$ không cùng phương, suy ra ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\vec{AB}$, $\overrightarrow{B'D}$ đồng phẳng.



Câu 32.

$$\text{Đặt } \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}.$$

Ta có

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\overrightarrow{DA'} = \vec{c} - \vec{b}.$$

Do đó:

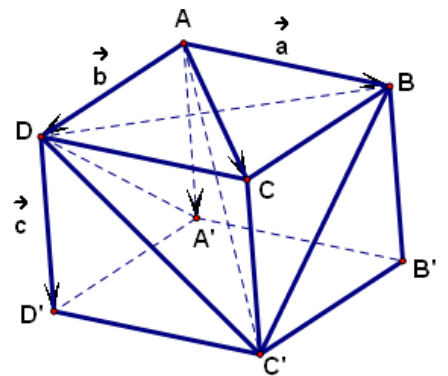
$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA'}) &= \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA'}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{DA'}|} \\ &= \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{c} - \vec{b}|}. \end{aligned}$$

Giả sử hình lập phương có cạnh bằng x , khi đó từ (*) ta có

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA'}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} - (\vec{b})^2}{x\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2}} = \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

(do $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$, $\vec{c} \perp \vec{a}$, $(\vec{b})^2 = |\vec{b}|^2 = x^2$). Vậy

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA'}) = 120^\circ \Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA'}) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$



b) Ta có $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = \vec{b} + \vec{a} + \vec{c}$. Vậy

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC'} &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}) \\ &= (\vec{b})^2 - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - (\vec{a})^2 - \vec{a} \cdot \vec{c} = x^2 - x^2 = 0.\end{aligned}$$

Suy ra $BD \perp AC'$.

Câu 33. a) Trước hết dễ dàng nhận thấy rằng:

$$\overrightarrow{MB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Từ đó:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}MN^2 &= \overrightarrow{MN}^2 = \left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)^2 \\ &= \frac{4}{9}AA_1^2 + AD^2 + \frac{1}{9}AB^2 - \frac{4}{3}\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &\quad - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Do AA_1, AB, AD đôi một vuông góc nên

$$\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0.$$

$$\text{Vậy } MN^2 = \frac{14}{9} \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{14}}{3}.$$

b) Dễ dàng thấy rằng $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Vậy:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{MN} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot \left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) \\ &= -\frac{1}{3}AB^2 + AD^2 - \frac{2}{3}AA_1^2 = 0.\end{aligned}$$

Do đó AC_1 vuông góc với MN .

Câu 34.

a) Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

Khi đó $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$

và $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2$.

Vì $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD'}$ nên:

$$\overrightarrow{MA} = k(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD'})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{k}{k-1}\overrightarrow{AD'}$$

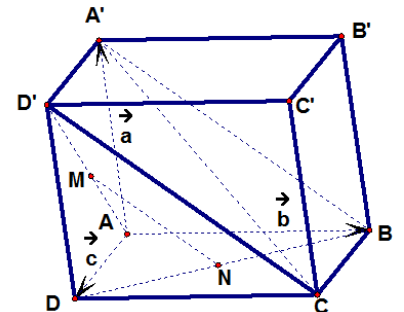
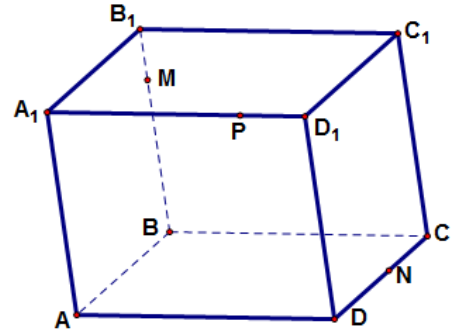
$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{k}{k-1}(\vec{a} + \vec{c}).$$

Từ $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$, ta có:

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AN} = k(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AN}).$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AD} - k\overrightarrow{AB}}{1-k} = \frac{-k}{1-k}\vec{b} + \frac{1}{1-k}\vec{c}.$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{-k}{1-k}\vec{b} + \frac{1}{1-k}\vec{c} - \left(\frac{k}{k-1}(\vec{a} + \vec{c})\right)$$



$$= \frac{1+k}{1-k} \vec{c} + \frac{k}{1-k} (\vec{a} - \vec{b}).$$

Vậy $\overrightarrow{MN} = \frac{1+k}{1-k} \overrightarrow{BC} + \frac{k}{1-k} \overrightarrow{BA'}$. Suy ra ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA'}$ đồng phẳng. Các điểm M, N lần lượt thuộc AD', DB , với $k \neq 0, k \neq 1$ nên MN không thuộc $(A'BC)$. Suy ra $MN \parallel (A'BC)$.

b) Ta có $\overrightarrow{A'C} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $A'C$ và AD' chéo nhau, $A'C$ và BD chéo nhau mà $M \in AD', N \in BD$. Do đó đường thẳng MN song song với đường thẳng $A'C$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{A'C}$, tức là

$$\frac{1+k}{1-k} \vec{c} + \frac{k}{1-k} (\vec{a} - \vec{b}) = -m\vec{a} + m\vec{b} + m\vec{c}.$$

Do $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng nên đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{k}{1-k} = -m \\ \frac{-k}{1-k} = m \\ \frac{1+k}{1-k} = m \end{cases} \Rightarrow -k = 1-k \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Vậy khi $k = \frac{1}{2}$ thì $MN \parallel A'C$. Khi đó $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3} (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$. Mặt khác

$$\overrightarrow{AD'} = \vec{a} + \vec{c}, \overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{c}.$$

Vậy $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD'} = -\frac{1}{3} (\vec{a}^2 - \vec{c}^2) = 0, \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{3} (-\vec{b}^2 + \vec{c}^2) = 0$. Điều này khẳng định $MN \perp AD'$ và $MN \perp BD$.

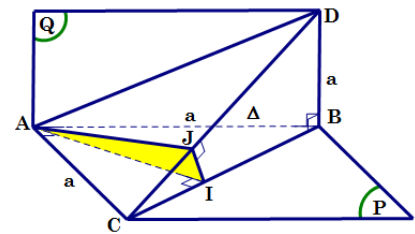
Câu 35.

Gọi I là trung điểm của BC , khi đó $AI \perp BC$. Do $BD \perp (ABC)$ nên CB là hình chiếu vuông góc của CD trên (P) , vậy theo định lý ba đường vuông góc suy ra $AI \perp CD$. Trong (CDB) , kẻ IJ vuông góc với CD ($J \in CD$) thì mặt phẳng (AIJ) chính là mặt phẳng (α) và thiết diện phải tìm là ΔAIJ . Dễ thấy ΔAIJ vuông tại I . Vậy $S_{\Delta AIJ} = \frac{1}{2} IA \cdot IJ$. Ta có

$$AI = \frac{1}{2} BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{IJ}{DB} = \frac{CI}{CD}.$$

$$\text{Suy ra } IJ = \frac{CI}{CD} \cdot DB = \frac{a\sqrt{2}}{2a\sqrt{3}} \cdot a = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Do đó } S_{\Delta AIJ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$



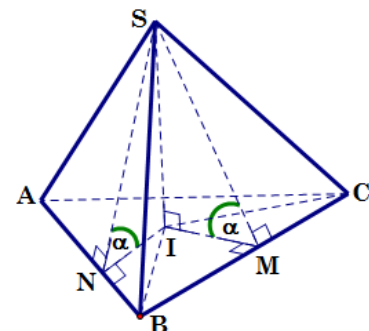
Câu 36.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) . Gọi M, P, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên BC, CA, AB .

a) Ta cần chứng minh $IM = IN = IP$. Ta có $BC \perp MI$, mà MI là hình chiếu của SM trên (ABC) , nên theo định lý ba đường vuông góc suy ra $BC \perp SM$. Từ đó suy ra $\widehat{SMI} = \alpha$. Tương tự ta được $\widehat{SNI} = \alpha, \widehat{SPI} = \alpha$. Ta có

$$\tan \alpha = \frac{SI}{IM} = \frac{SI}{IN} = \frac{SI}{IP} \Rightarrow IM = IN = IP.$$

Nghĩa là I cách đều ba đường thẳng AB, BC, CA , do đó I là tâm của đường tròn nội tiếp ΔABC .



b) Vì hình chiếu của ΔSBC trên (ABC) là tam giác IBC nên theo định lí hình chiếu ta có $S_{IBC} = S_{SBC} \cdot \cos \alpha$. Tương tự

$$S_{ICA} = S_{SCA} \cdot \cos \alpha, S_{IAB} = S_{SAB} \cdot \cos \alpha.$$

Mà điểm I nằm trong tam giác ABC nên

$$S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA} = \frac{S_{IAB} + S_{IBC} + S_{ICA}}{\cos \alpha} = \frac{S_{ABC}}{\cos \alpha} \text{ (đpcm)}.$$

Câu 37.

Phân tích. Đề bài cho hình chóp tam giác đều thì ta phải chú ý đến tính chất: trong hình chóp đều, chân đường cao trùng với tâm của đáy; trong tam giác đều thì tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm trùng nhau. Còn việc dựng các góc α, β , bạn đọc xem lại dạng 12 ở trang 95.

Giải. Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC) . Khi đó HA, HB, HC là hình chiếu của SA, SB, SC trên (ABC) , mà $SA = SB = SC$ nên $HA = HB = HC$. Từ đây kết hợp với giả thiết tam giác ABC đều suy ra H là tâm của tam giác ABC . Gọi E là trung điểm AB . Ta có:

$$\begin{cases} (SAB) \cap (CAB) = AB \\ CE \subset (CAB), CE \perp AB \\ SE \subset (SAB), SE \perp AB. \end{cases}$$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng

$$(SAB) \text{ và } (CAB) \text{ là: } \alpha = \widehat{(SE, CE)} = \widehat{SEC}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (DAB) \cap (CAB) = AB \\ (SCE) \perp AB \\ (SCE) \cap (DAB) = ED \\ (SCE) \cap (CAB) = EC \end{cases} \Rightarrow \beta = \widehat{(ED, EC)} = \widehat{DEC}.$$

Đặt $\varphi = \widehat{SCE}$, khi đó φ là góc nhọn. Ta có: $\cot \alpha = \frac{HE}{HS}, \cot \varphi = \frac{HC}{HS}$.
Mà $HC = 2HE$ nên $\cot \varphi = 2 \cot \alpha$. Trong tam giác DCE , ta có:

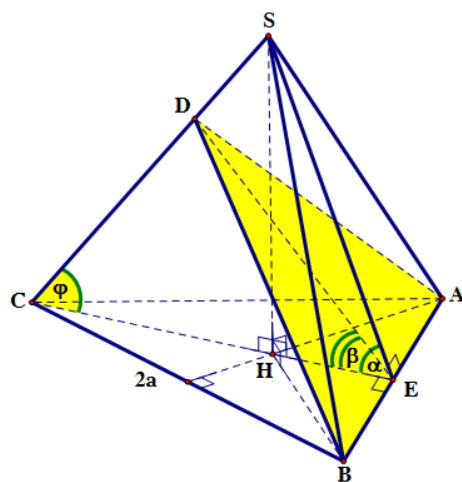
$$\frac{ED}{\sin \varphi} = \frac{CE}{\sin(\beta + \varphi)} \Rightarrow ED = \frac{CE \sin \varphi}{\sin(\beta + \varphi)} = \frac{a\sqrt{3} \sin \varphi}{\sin(\beta + \varphi)}.$$

Do $AB \perp (SEC)$ nên $AB \perp DE$. Như vậy: $S_{ABD} = \frac{1}{2} ED \cdot AB = \frac{a^2 \sqrt{3} \sin \varphi}{2 \sin(\beta + \varphi)}$. Tiếp theo, ta sẽ tính $\sin \varphi, \cos \varphi$ theo α . Ta có:

$$\begin{aligned} \cot^2 \varphi &= 4 \cot^2 \alpha \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \varphi} - 1 = 4 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \varphi} &= \frac{4}{\sin^2 \alpha} - 3 = \frac{4 - 3 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{4 - 3 \sin^2 \alpha}}. \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta có:

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi &= \frac{\sin^2 \alpha}{4 - 3 \sin^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 - \cos^2 \varphi = \frac{\sin^2 \alpha}{4 - 3 \sin^2 \alpha} \\ \Leftrightarrow \cos^2 \varphi &= 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{4 - 3 \sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \varphi = \frac{4 - 4 \sin^2 \alpha}{4 - 3 \sin^2 \alpha} \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow \cos^2 \varphi = \frac{4\cos^2 \alpha}{4 - 3\sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{2\cos \alpha}{\sqrt{4 - 3\sin^2 \alpha}}.$$

Như vậy:

$$\begin{aligned} S_{ABD} &= \frac{a^2 \sqrt{3} \sin \varphi}{\sin(\beta + \varphi)} = \frac{a^2 \sqrt{3} \sin \alpha}{\sqrt{4 - 3\sin^2 \alpha} (\sin \beta \cos \varphi + \cos \beta \sin \varphi)} \\ &= \frac{a^2 \sqrt{3} \sin \alpha}{2 \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha}. \end{aligned}$$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

Câu 1. Mệnh đề nào **đúng** trong các mệnh đề sau?

- A. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.
- B. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi $(Q) \parallel (R)$ (hoặc mặt phẳng (Q) trùng với mặt phẳng (R)).
- C. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) thì (Q) song song với (R) .
- D. Cả ba mệnh đề trên đều đúng.

Câu 2. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

- A. Nếu đường thẳng a vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) thì a vuông góc với mặt phẳng (P) và vuông góc với mặt phẳng (Q) .
- B. Một đường thẳng đi qua một điểm của mặt phẳng (P) và vuông góc với mặt phẳng (Q) thì nằm trọn trong mặt phẳng (P) .
- C. Một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.
- D. Trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Câu 3. Cho mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (Q) . Khi đó

- A. a vuông góc với (P) .
- B. a song song với (P) .
- C. a nằm trên (P) .
- D. a nằm trên (P) hoặc song song với (P) .

Câu 4. Cho (P) và (Q) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau và giao tuyến của chúng là đường thẳng m . Gọi a, b, c, d là các đường thẳng. Xét các mệnh đề sau:

- (1) Nếu $a \subset (P)$ và $a \perp m$ thì $a \perp (Q)$.
- (2) Nếu $b \perp m$ thì $b \subset (P)$ hoặc $b \subset (Q)$.
- (3) Nếu $c \parallel m$ thì $c \parallel (P)$ hoặc $c \parallel (Q)$.
- (4) Nếu $d \perp m$ thì $d \perp (P)$.

Có bao nhiêu mệnh đề **đúng**?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

Câu 5. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi

- A. có hai đường thẳng vuông góc với nhau và lần lượt nằm trong hai mặt phẳng đó.
- B. có một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với mặt phẳng kia.
- C. mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này đều vuông góc với mặt phẳng kia.
- D. góc lớn nhất giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng đó là góc vuông.

Câu 6. Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ là hai mặt phẳng vuông góc với nhau có giao tuyến là đường thẳng m và a, b, c, d là các đường thẳng. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. Nếu $a \subset (P)$ và $a \perp m$ thì $a \perp (Q)$.
- B. Nếu $b \perp m$ thì $b \subset (P)$ hoặc $b \subset (Q)$.
- C. Nếu $c \parallel m$ thì $c \parallel (P)$ hoặc $c \parallel (Q)$.
- D. Nếu $d \perp m$ và $d \parallel (Q)$ thì $d \perp (P)$.

Câu 7. Điều kiện nào sau đây không phải là điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau?

- A. Có một đường thẳng song song với (P) và vuông góc với (Q) .
- B. Mỗi đường thẳng a nằm trong (P) đều có đường thẳng b nằm trong (Q) sao cho a vuông góc với b .
- C. Có một đường thẳng nằm trong (P) mà hình chiếu vuông góc của nó trên (Q) trùng với giao tuyến của (P) và (Q) .
- D. Có hai đường thẳng a, b vuông góc với nhau, lần lượt nằm trên (P) và (Q) sao cho a và b đều vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) .

Câu 8. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua một điểm A cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) ?

- A. Không có.
- B. Có một.
- C. Có vô số.
- D. Có một hoặc có vô số.

Câu 9. Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) . Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua a và vuông góc với mặt phẳng (P) ?

- A. Không có.
- B. Có một.
- C. Có vô số.
- D. Có một hoặc có vô số.

Câu 10. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và một cạnh bên vuông góc với mặt đáy. Có bao nhiêu mặt bên vuông góc với mặt đáy?

- A. Không có mặt bên nào vuông góc với mặt đáy.
- B. Có đúng một mặt bên vuông góc với mặt đáy.
- C. Có đúng hai mặt bên vuông góc với mặt đáy.
- D. Có đúng ba mặt bên vuông góc với mặt đáy.

Câu 11. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- B. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.
- C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cùng song song với một đường thẳng.
- D. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cùng vuông góc với một đường thẳng.

Câu 12. Cho ba mặt phẳng $(P), (Q)$ và (R) . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. Nếu $(P) \perp (Q)$ và $(R) \perp (Q)$ thì $(P) \parallel (R)$.
- B. Nếu $(P) \parallel (Q)$ và $(R) \perp (P)$ thì $(R) \parallel (Q)$.
- C. Nếu $(P) \perp (Q)$ và $(R) \parallel (Q)$ thì $(P) \perp (R)$.
- D. Nếu $(P) \parallel (Q)$ và $(R) \parallel (Q)$ thì $(P) \perp (R)$.

Câu 13. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ . Gọi φ là góc giữa (P) và (Q) . Có tất cả bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- ☒ φ bằng góc giữa hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với Δ .
- ☒ φ bằng góc giữa hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với Δ , lần lượt nằm trên (P) và (Q) .
- ☒ φ bằng góc giữa hai đường thẳng a và b đồng quy với Δ , cùng vuông góc với Δ , lần lượt nằm trên (P) và (Q) .

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông tại B . Hãy xác định góc α giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) .

A. $\alpha = \widehat{SBA}$. B. $\alpha = \widehat{BCA}$. C. $\alpha = \widehat{SCA}$. D. $\alpha = \widehat{SBC}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông tại A . Hãy xác định góc α giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) .

A. $\alpha = \widehat{SBA}$. B. $\alpha = \widehat{BCA}$. C. $\alpha = \widehat{SCA}$. D. $\alpha = \widehat{SMA}$.

Với M là hình chiếu của A trên BC .

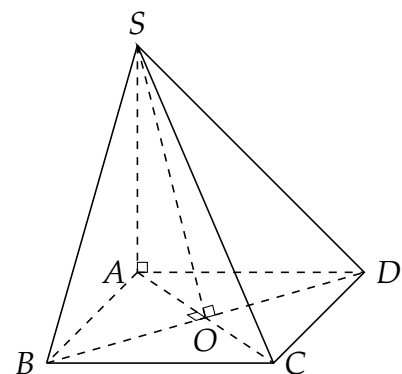
Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân tại A . Hãy xác định góc α giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) .

A. $\alpha = \widehat{SBA}$. B. $\alpha = \widehat{MSA}$. C. $\alpha = \widehat{SMA}$. D. $\alpha = \widehat{SCA}$.

Với M là trung điểm BC .

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , SA vuông góc với $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là

A. $\widehat{AOS}$. B. $\widehat{ADS}$. C. $\widehat{ABS}$. D. $\widehat{BSO}$.



Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ với các đường thẳng AB, AC, AD đôi một vuông góc, H là trực tâm tam giác BCD . Góc giữa mặt phẳng (BCD) và mặt phẳng (ACD) bằng góc nào trong các góc sau đây?

A. $\widehat{ACB}$. B. $\widehat{ADB}$. C. $\widehat{ABH}$. D. $\widehat{BAH}$.

Câu 19 (HK2 khối 11, 2017 - 2018 Sở Giáo Dục Hà Nam).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = 3a$. Gọi α giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) . Tính $\tan \alpha$.

A. $\tan \alpha = 2$. B. $\tan \alpha = 2\sqrt{3}$. C. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\tan \alpha = 3\sqrt{3}$.

Câu 20 (HK2 năm học 2016-2017, THPT Chuyên Long An, Long An).

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD , cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a . Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) bằng:

A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Câu 21. Cho tứ diện $OABC$ với các đường thẳng OA, OB, OC đôi một vuông góc. Bộ ba mặt phẳng vuông góc với nhau từng đôi một là

A. $(OAB), (ABC), (OCA)$. B. $(OAB), (OBC), (OCA)$.
C. $(ABC), (OBC), (OAB)$. D. $(ACB), (OBC), (OCA)$.

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$ với các đường thẳng AB, BC, CD đôi một vuông góc. Góc giữa mặt phẳng (BCD) và mặt phẳng (ACD) bằng góc nào trong các góc sau đây?

- A. $\widehat{ACB}$.
- B. $\widehat{ADB}$.
- C. $\widehat{AIB}$, trong đó I là trung điểm của CD .
- D. $\widehat{ABG}$, trong đó G là trọng tâm tam giác BCD .

Câu 23 (TT LTDH Diệu Hiền 11/2017, Cần Thơ).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$, $SA = \sqrt{3}$ cm, $AB = 1$ cm, $BC = \sqrt{2}$ cm. Mặt bên (SBC) hợp với đáy một góc bằng

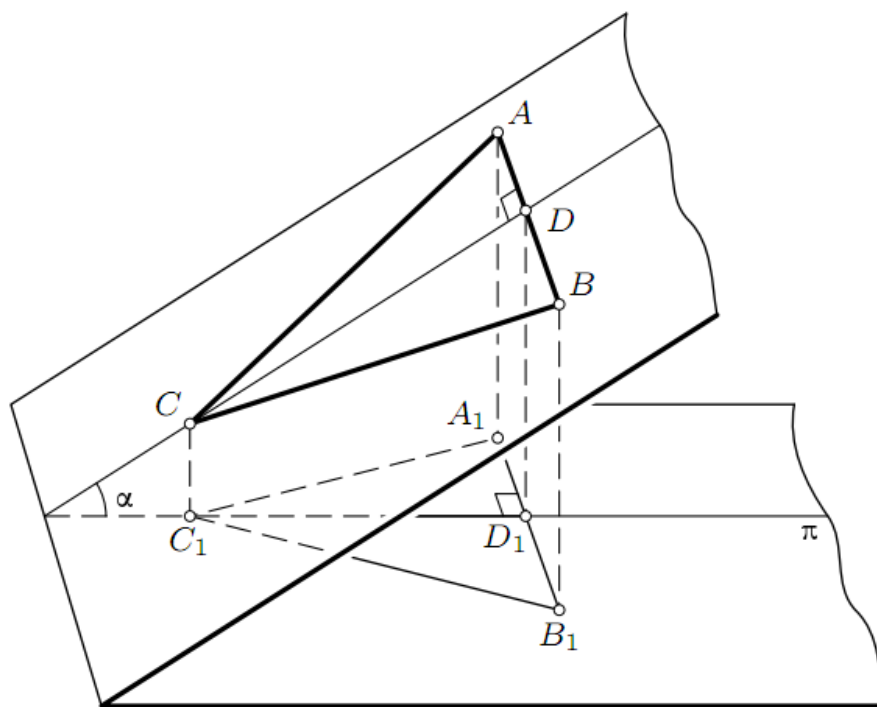
- A. 30° .
- B. 90° .
- C. 60° .
- D. 45° .

Câu 24 (HK2 năm học 2016-2017, THPT Chuyên Long An, Long An).

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD , cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a . Góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ bằng:

- A. 45° .
- B. 30° .
- C. 60° .
- D. 90° .

Câu 25. Gọi S là diện tích của tam giác ABC trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu của ΔABC trên mặt phẳng (P') (tức là S' là diện tích của tam giác $A_1B_1C_1$ trong mặt phẳng (P')), gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') .



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $S = S' \cdot \cos \alpha$.
- B. $S' = S \cdot \sin \alpha$.
- C. $S = S' \cdot \sin \alpha$.
- D. $S' = S \cdot \cos \alpha$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, ΔSAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H là trung điểm AB . Tính góc giữa đường thẳng SH và mặt phẳng (ACD) .

- A. 30° .
- B. 45° .
- C. 60° .
- D. 90° .

Câu 27 (Đề thi thử, THPT Phan Châu Trinh, Đà Nẵng, năm 2018).

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) , biết rằng $SC = \frac{a\sqrt{21}}{2}$.

- A. 60° .
- B. 30° .
- C. 45° .
- D. 75° .

Câu 28. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$). Tính $\tan$ góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ theo β .

- A. $\sqrt{2} \cot \beta$. B. $\sqrt{3} \tan \beta$. C. $\sqrt{2} \tan \beta$. D. $\sqrt{3} \cos \beta$.

Câu 29 (HK2 khối 11, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai 2018).

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng 3. Số đo của góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng (làm tròn đến phút)

- A. $61^\circ 52'$. B. $69^\circ 18'$. C. $28^\circ 8'$. D. $75^\circ 2'$.

Câu 30 (Đề TT-THPTQG, Chuyên Biên Hòa, Hà Nam 2018).

Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của AB và α là góc tạo bởi đường thẳng MC' và mặt phẳng (ABC) . Khi đó $\tan \alpha$ bằng

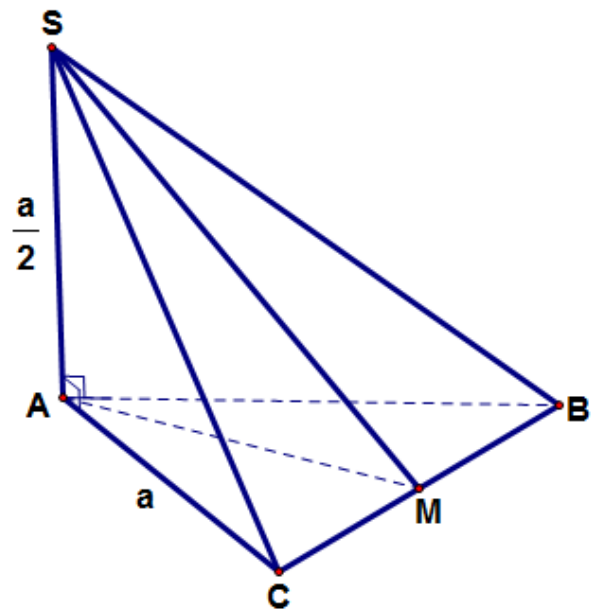
- A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 31. Cho đường thẳng d cắt và không vuông góc với mặt phẳng (P) . Gọi (Q) là mặt phẳng thay đổi nhưng luôn chứa d . Gọi φ là góc giữa (P) và (Q) . Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. Chỉ tồn tại giá trị lớn nhất, không tồn tại giá trị nhỏ nhất của φ .
 B. Chỉ tồn tại giá trị nhỏ nhất, không tồn tại giá trị lớn nhất của φ .
 C. Không tồn tại giá trị lớn nhất và cũng không tồn tại giá trị nhỏ nhất φ .
 D. Tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của φ .

Giả thiết sau dùng cho các câu 32, 33, 34, 35.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = \frac{a}{2}$.



Câu 32. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng

- A. 0° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 33. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng

- A. 0° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 34. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng

- A. 0° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .

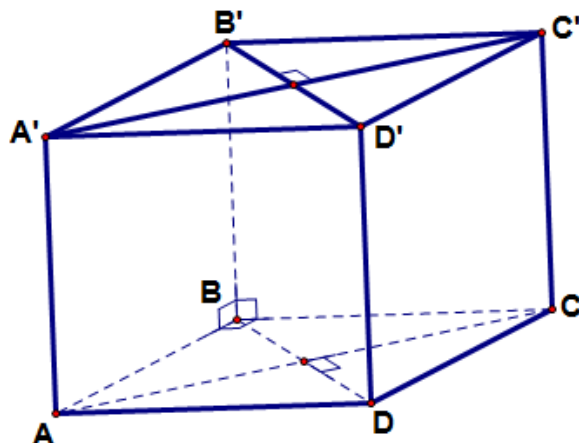
Câu 35. Từ A hạ $AH \perp SM$. khi đó góc giữa $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{AH}$ bằng:

- A. 30° . B. 45° . C. 90° . D. 150° .

Câu 36. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tất cả các hình bình hành có đỉnh là đỉnh của hình hộp đó. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành mà mặt phẳng chứa nó vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$?

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 10.

Giả thiết sau dùng cho các câu 37, 38.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.



Câu 37. Mặt phẳng $(ACC'A')$ vuông góc với các mặt phẳng

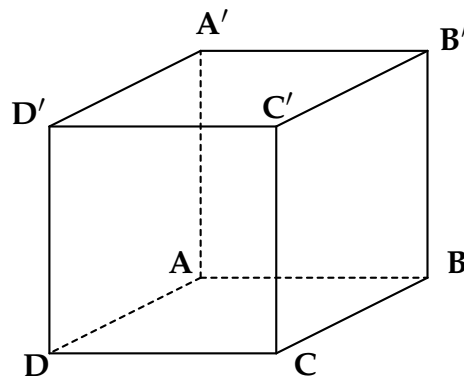
- A. $(BDD'B'), (ABCD), (BCC'B')$. B. $(BDD'B'), (ABCD), (ABB'A')$.
C. $(BDD'B'), (ABCD), (A'B'C'D')$. D. $(BDD'B'), (AA'D'D), (A'B'C'D')$.

Câu 38. Mặt phẳng $(A'BCD')$ vuông góc với mặt phẳng

- A. $(ABCD)$. B. $(ADC'B')$. C. $(BCC'B')$. D. $(ABB'A')$.

Câu 39. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính diện tích thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi mặt phẳng trung trực (α) của đoạn AC' .

- A. $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. D. $\frac{3a^2}{2}$.



Câu 40. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = 4AB = 2AD$. Tính sin của góc tạo bởi mặt phẳng $(A'BD)$ với mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. $2\sqrt{5}$. B. $\frac{2\sqrt{105}}{21}$. C. $\frac{\sqrt{21}}{21}$. D. $1\sqrt{5}$.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 B	5 B	9 D	13 C	17 A	21 B	25 D	29 A	33 C	37 C
2 A	6 B	10 C	14 A	18 D	22 A	26 D	30 D	34 B	38 B
3 D	7 B	11 C	15 D	19 B	23 C	27 A	31 D	35 D	39 B
4 B	8 D	12 C	16 C	20 A	24 A	28 C	32 D	36 B	40 B

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Mệnh đề **(A)** sai vì góc giữa hai mặt phẳng có thể là góc vuông. Mệnh đề **(B)** đúng.
Mệnh đề **(C)** sai vì hai mặt phẳng (R) và (Q) có thể trùng nhau.
Chọn đáp án **(B)**

Câu 2. Mệnh đề sai là: Nếu đường thẳng a vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) thì a vuông góc với mặt phẳng (P) và vuông góc với mặt phẳng (Q) .

Chọn đáp án **(A)**

Câu 3. Cho mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (Q) , khi đó a nằm trên (P) hoặc song song với (P) .

Chọn đáp án **(D)**

Câu 4. (1): đúng; (2): sai; (3): đúng; (4): sai.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 5. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi có một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với mặt phẳng kia.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 6. "Nếu $b \perp m$ thì $b \subset (P)$ hoặc $b \subset (Q)$ " là khẳng định sai vì có thể $b \not\subset (P)$ và $b \not\subset (Q)$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 7. Mỗi đường thẳng a nằm trong (P) đều có đường thẳng b nằm trong (Q) sao cho a vuông góc với b , khi đó (P) và (Q) có thể trùng nhau.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 8. Có một khi (P) và (Q) cắt nhau, có vô số khi $(P) \parallel (Q)$.

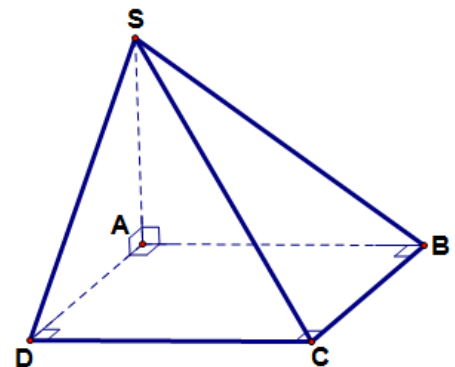
Chọn đáp án **(D)**

Câu 9. Có một khi a không vuông góc với (P) , có vô số khi a vuông góc với (P) .

Chọn đáp án **(D)**

Câu 10.

Giả sử $SA \perp (ABCD)$. Khi đó có đúng 2 mặt bên vuông góc với mặt đáy là SAB, SAD .



Chọn đáp án **(C)**

Câu 11. Mệnh đề **(A)** sai vì hai mặt phẳng đó có thể cắt nhau. Mệnh đề **(B)** sai vì hai mặt phẳng đó có thể tạo với nhau những góc khác 90° . Dễ thấy mệnh đề **(C)** đúng. Mệnh đề **(D)** sai vì trong trường hợp $mp(P)$ và $mp(Q)$ cùng vuông góc với $mp(R)$, $(P) \perp (Q)$ thì không thể có đường thẳng nào cùng vuông góc với (P) và (Q) .

Chọn đáp án **(C)**

Câu 12. Vì một mặt phẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì sẽ vuông góc với mặt phẳng còn lại.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 13. a và b chỉ cần lần lượt nằm trong (P) , (Q) cùng vuông góc với Δ là đủ, thêm đồng quy với Δ càng tốt nên có tất cả 2 mệnh đề đúng.

Chọn đáp án **C**

Câu 14.

Ta có giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là BC . (1)

Ta có đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , mà đường thẳng BC nằm trong (ABC) nên SA vuông góc với BC . Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp BA \subset (SAB) \\ BC \perp SA \subset (SAB) \\ BA \cap SA = A. \end{cases}$$

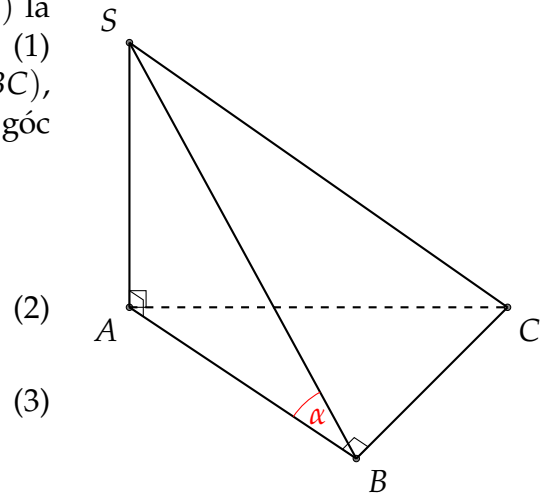
Suy ra $(SAB) \perp BC$.

Lại có:

$$\begin{cases} (SBA) \cap (ABC) = BA \\ (SBA) \cap (SBC) = BS. \end{cases}$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\alpha = \widehat{SBA}$.

Chọn đáp án **A**



Câu 15.

Ta có giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là BC . (1)

Ta có đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , mà đường thẳng BC nằm trong (ABC) nên SA vuông góc với BC . Ta có BC vuông góc với AM tại M . Như vậy:

$$\begin{cases} BC \perp MA \subset (SAM) \\ BC \perp SA \subset (SAM) \\ MA \cap SA = A. \end{cases}$$

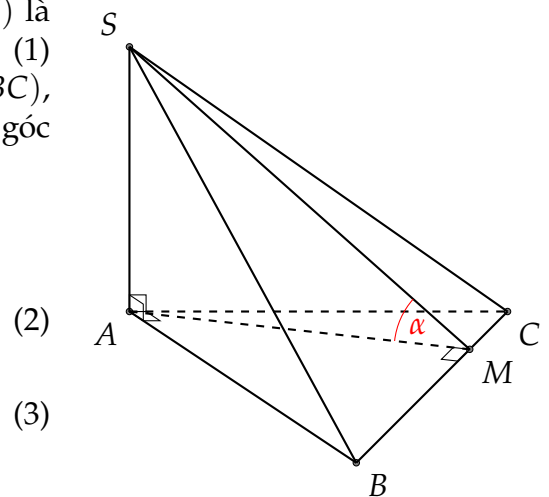
Suy ra $(SAM) \perp BC$.

Lại có:

$$\begin{cases} (SMA) \cap (ABC) = MA \\ (SMA) \cap (SBC) = MS. \end{cases}$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\alpha = \widehat{SMA}$.

Chọn đáp án **D**



Câu 16.

Ta có giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là BC . (1)

Ta có đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , mà đường thẳng BC nằm trong (ABC) nên SA vuông góc với BC . Do tam giác ABC cân tại A và M là trung điểm BC nên BC vuông góc với AM tại M . Như vậy:

$$\begin{cases} BC \perp MA \subset (SAM) \\ BC \perp SA \subset (SAM) \\ MA \cap SA = A. \end{cases}$$

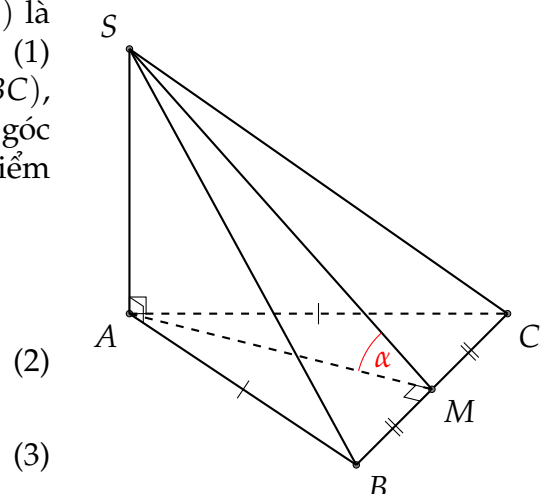
Suy ra $(SAM) \perp BC$.

Lại có:

$$\begin{cases} (SMA) \cap (ABC) = MA \\ (SMA) \cap (SBC) = MS. \end{cases}$$

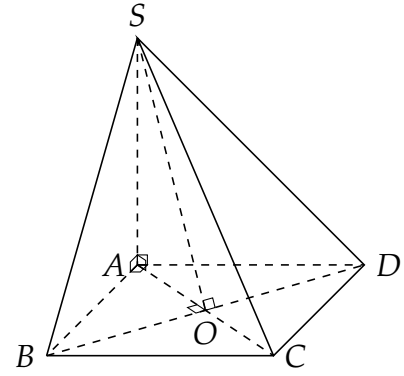
Từ (1), (2), (3) suy ra $\alpha = \widehat{SMA}$.

Chọn đáp án **C**



Câu 17.

Ta có hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SBD) cắt nhau theo giao tuyến BD . Lại có AO nằm trong $(ABCD)$ và vuông góc với BD tại O ; SO nằm trong (SBD) và vuông góc với BD tại O . Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng OA và OS , tức là góc $\widehat{AOS}$.



Chọn đáp án **(A)**

Câu 18. Để thấy rằng $BA \perp (ACD)$, $AH \perp (BCD)$, suy ra góc giữa mặt phẳng (BCD) và mặt phẳng (ACD) bằng góc giữa hai đường thẳng BA và AH , tức là bằng góc $\widehat{BAH}$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 19.

Ta có (ABC) và (SBC) có giao tuyến là BC .
Gọi M là trung điểm BC , suy ra $AM \perp BC$.
Mà $SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAM)$ suy ra $SM \perp BC$.
Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\alpha = ((ABC), (SBC)) = (AM, SM) = \widehat{SMA}.$$

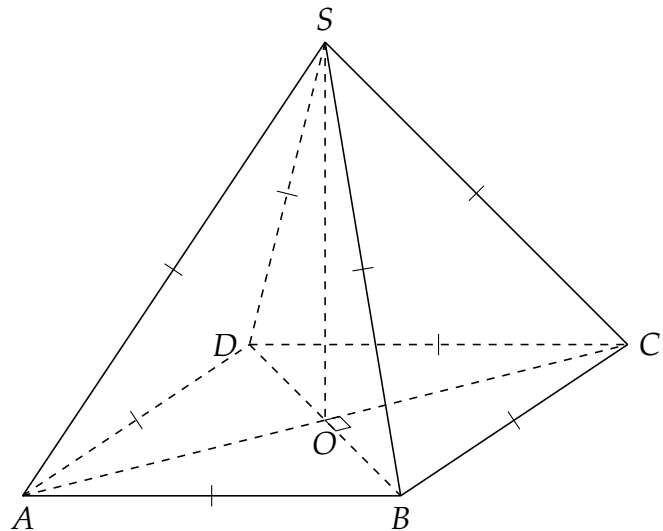
Xét tam giác SAM vuông tại A ta có

$$\tan \alpha = \frac{SA}{AM} = \frac{3a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án **(B)**

Câu 20.

Ta có $BD \perp (SAC)$ nên $(SAC) \perp (SBD)$.



Chọn đáp án **(A)**

Câu 21. Để thấy rằng $OA \perp (OBC)$, $OB \perp (OCA)$, $OC \perp (OAB)$, suy ra phương án đúng là B.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 22. Dễ thấy rằng:
$$\begin{cases} (ACD) \cap (BCD) = CD \\ (ABC) \perp CD \\ (ABC) \cap (ACD) = AC \\ (ABC) \cap (BCD) = BC. \end{cases}$$

Như vậy góc giữa mặt phẳng (BCD) và mặt phẳng (ACD) bằng góc giữa hai đường thẳng AC và BC , tức là bằng góc $\widehat{ACB}$.

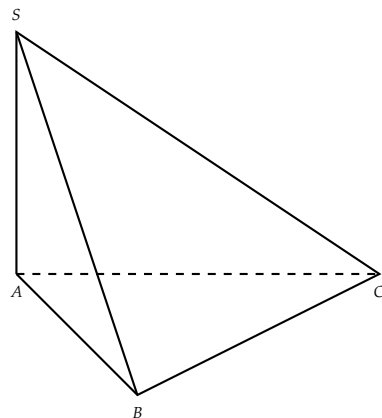
Chọn đáp án **(A)**

Câu 23.

Do $SA \perp (ABC)$ nên $\begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp BC. \end{cases}$

Mặt khác $BC \perp AB$ nên $BC \perp SB$. Vậy góc giữa (SBC) và đáy là góc $\widehat{SBA} = \alpha$. Tam giác SAB vuông tại A nên

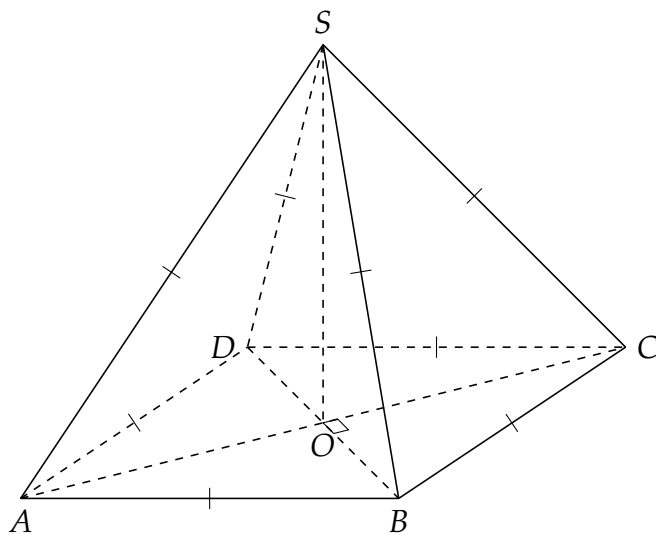
$$\tan \alpha = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$



Chọn đáp án **(C)**

Câu 24.

Góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc giữa SC và OC . Ta có: $SO = OC$ nên $\triangle SOC$ vuông cân. Vậy góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCO} = 45^\circ$.



Chọn đáp án **(A)**

Câu 25. Mệnh đề đúng là $S' = S \cdot \cos \alpha$.

Lưu ý. Ta có kết quả tổng quát hơn (Định lý hình chiếu) như sau: Gọi S là diện tích đa giác $(\mathcal{H})$ trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu $(\mathcal{H}')$ của $(\mathcal{H})$ trên mặt phẳng (P') . Khi đó $S' = S \cdot \cos \alpha$, trong đó α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') .

Chọn đáp án **(D)**

Câu 26. Do tam giác SAB đều cạnh a nên $SH \perp AB$, mà (SAB) vuông góc với $(ABCD)$ theo giao tuyến AB nên $SH \perp (ABCD)$. Như thế ta chọn D .

Chọn đáp án **(D)**

Câu 27.

Dựng $AH \perp BC$ tại H .

Khi đó:

$$BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH.$$

Ta có:

$$\begin{cases} (ABC) \cap (SBC) = BC \\ BC \perp AH, BC \perp SH \\ AH \subset (ABC), SH \subset (SBC). \end{cases}$$

Suy ra $((ABC), (SBC)) = \widehat{SHA}$.

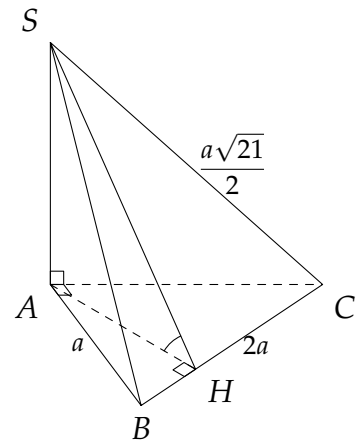
$$\text{Ta có: } AC = a\sqrt{3}; AH = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{và } SA = \frac{3a}{2}. \text{ Suy ra:}$$

$$\tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SHA} = 60^\circ.$$

$$\text{Vậy } ((ABC), (SBC)) = 60^\circ.$$

Chọn đáp án **A**



Câu 28.

Gọi O là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Khi đó vì các tam giác SOA, SOB, SOC, SOD bằng nhau nên các cạnh OA, OB, OC, OD bằng nhau hay O là giao điểm của AC và BD . Hình chiếu của cạnh bên SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là OB , do đó $\widehat{SBO} = \beta$. Gọi M là trung điểm AB . Khi đó:

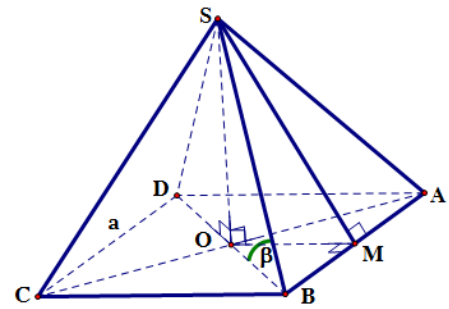
$$\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ MS \subset (SAB), MS \perp AB \\ MO \subset (ABCD), MO \perp AB. \end{cases}$$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ là $\widehat{SMO}$.

Ta có

$$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{OB \tan \beta}{0,5a} = \frac{a\sqrt{2} \tan \beta}{a} = \sqrt{2} \tan \beta.$$

Chọn đáp án **C**



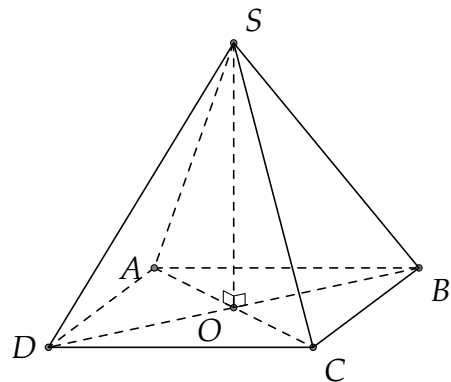
Câu 29.

Góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc SBO (O là tâm của hình vuông $ABCD$). Ta có

$$OB = \frac{BD}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$\cos \widehat{SBO} = \frac{OB}{SB} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \widehat{SBO} = 61^\circ 52'.$$

Chọn đáp án **A**

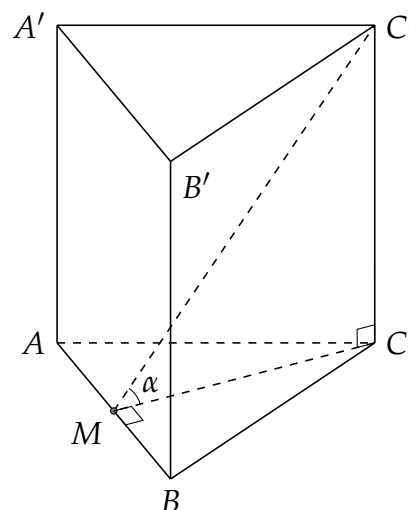


Câu 30.

Ta có MC là hình chiếu của MC' trên mặt phẳng (ABC) nên $\widehat{C'MC}$ là góc giữa đường thẳng MC' và mặt phẳng (ABC) . Do đó $\alpha = \widehat{C'MC}$. Tam giác ABC đều cạnh a có CM là đường cao nên $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác $C'MC$ vuông góc tại C có $\alpha = \widehat{C'MC}$ nên

$$\tan \alpha = \frac{C'C}{CM} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

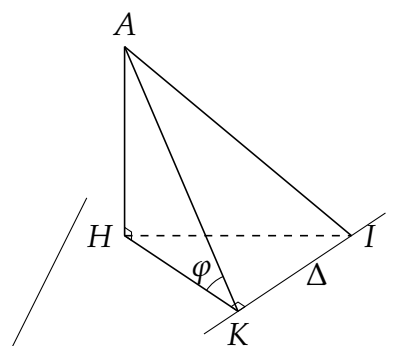


Chọn đáp án **(D)**

Câu 31.

Gọi I là giao điểm của d và (P) . Lấy điểm A trên d không trùng với I . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) . Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q) . Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên Δ . Ta có góc giữa (P) và (Q) là góc $\varphi = \widehat{AKH}$. Khi (Q) thay đổi thì Δ và K thay đổi còn A, H, I cố định. Ta có:

$\cot \varphi = \frac{HK}{AH} \leq \frac{HI}{AH} = \cot \varphi_0$. Suy ra $\varphi \geq \varphi_0$. Do đó φ có giá trị nhỏ nhất. Giá trị lớn nhất của φ là 90° khi $(Q) \perp (P)$.

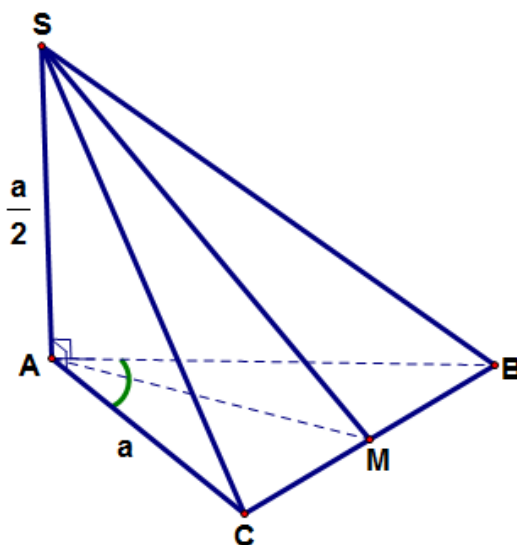


Chọn đáp án **(D)**

Câu 32. Chú ý SA vuông góc với (ABC) , mà $SA \subset (SAB)$ nên $(SAB) \perp (ABC)$.

Chọn đáp án **(D)**

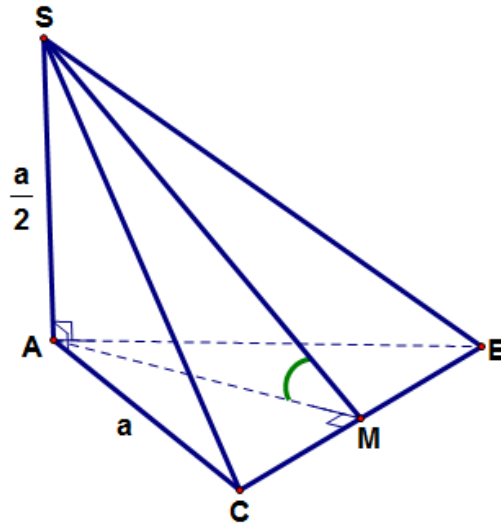
Câu 33. Chú ý SA vuông góc với mặt phẳng đáy và tam giác ABC đều.



$$\begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ (ABC) \perp SA \\ (ABC) \cap (SAB) = AB \\ (ABC) \cap (SAC) = AC \end{cases} \Rightarrow ((SAB), (SAC)) = (\widehat{AB, AC}) = 60^\circ.$$

Chọn đáp án **(C)**

Câu 34. Gọi M là trung điểm của cạnh BC , khi đó AM vuông góc BC .



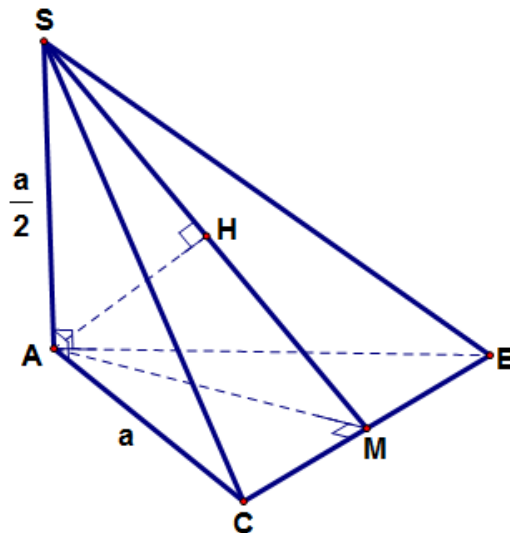
$$\begin{cases} (ABC) \cap (SBC) = BC \\ (SAM) \perp BC \\ (ABC) \cap (SAM) = AM \\ (SBC) \cap (SAM) = SM \end{cases} \Rightarrow ((ABC), (SBC)) = (\widehat{MA, MS}) = \widehat{SMA}.$$

Ta có $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, suy ra $\tan \widehat{SMA} = \frac{SA}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SMA} = 30^\circ$.

Chọn đáp án **B**

Câu 35. Ta có $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \sqrt{\frac{a^4}{4} + \frac{3a^2}{4}} = a$.

Ta có $SA^2 = SH \cdot SM \Rightarrow SH = \frac{a}{4}$.



Do đó:

$$\begin{aligned} \frac{1}{AH^2} &= \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{3a^2} \\ \cos \widehat{SAH} &= \frac{AS^2 + AH^2 - SH^2}{2AS \cdot AH} = \frac{\frac{a^4}{4} + \frac{3a^2}{16} - \frac{a^2}{16}}{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{SAH} = 30^\circ$. Vậy góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{AH}$ bằng

$$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

Chọn đáp án (D)

Câu 36. Bốn mặt bên và hai mặt chéo.

Chọn đáp án (B)

Câu 37. Mặt phẳng $(ACC'A')$ vuông góc với các mặt phẳng

$$(BDD'B'), (ABCD), (A'B'C'D').$$

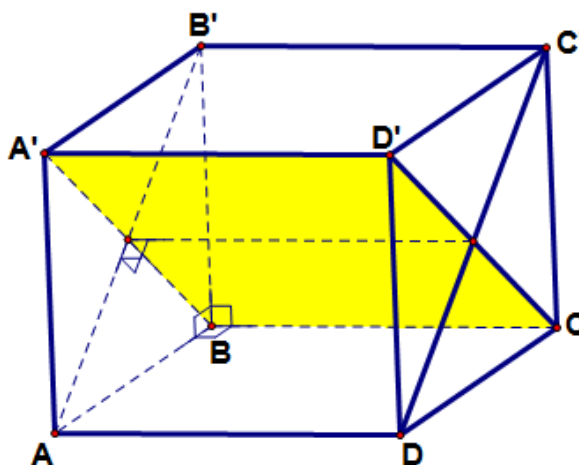
Chọn đáp án (C)

Câu 38.

Dễ thấy: $\begin{cases} AB' \perp A'B \\ AB' \perp A'D' \end{cases}$

Suy ra $AB' \perp (A'BCD')$.

Do đó $(ADC'B') \perp (A'BCD')$.



Chọn đáp án (B)

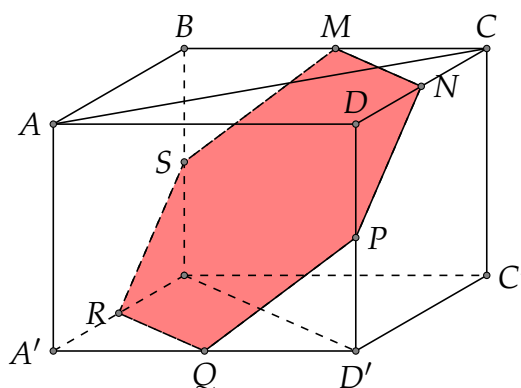
Câu 39.

Gọi M là trung điểm của BC . Ta có $MA = MC' = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ nên M thuộc mặt phẳng trung trực của AC' .

Gọi N, P, Q, R, S lần lượt trung điểm của $CD, DD', D'A', A'B', BB'$. Chứng minh tương tự trên ta có các điểm này đều thuộc mặt phẳng trung trực của AC' . Vậy thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi mặt phẳng trung trực (α) của đoạn AC' là hình lục giác đều $MNPQRS$ có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Diện tích S của thiết diện cần tìm là:

$$S = 6 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Chọn đáp án (B)



Câu 40.

Giả sử

$$AA' = 4AB = 2AD = 4a.$$

Khi đó $\begin{cases} AB = a \\ AD = 2a. \end{cases}$

Gọi H là hình chiếu của A lên BD . Khi đó ta có:

$$\begin{cases} AH \perp BD \\ AA' \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'H).$$

Do đó $A'H \perp BD$. Vậy góc giữa $(A'BD)$ với $(ABCD)$

là góc $\widehat{A'HA}$. Ta có:

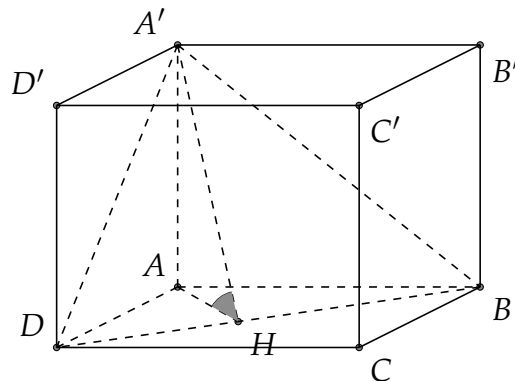
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{5}{4a^2}.$$

Suy ra $AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$

Do đó $A'H = \sqrt{AA'^2 + AH^2} = \frac{2\sqrt{105}}{5}.$

Vậy $\sin \widehat{A'HA} = \frac{AA'}{A'H} = \frac{2\sqrt{105}}{21}.$

Chọn đáp án **B**



BÀI 5. KHOẢNG CÁCH

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

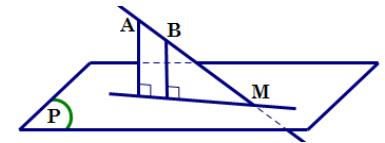
1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, đến một đường thẳng.

Định nghĩa 1. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là $d(M; (P)) = MH$, với H là hình chiếu của M trên mặt phẳng (P) .



Định nghĩa 2. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là $d(M; \Delta) = MH$, với H là hình chiếu của điểm M trên Δ .

Nhận xét 2. Giả sử đường thẳng Δ cắt mp (P) tại M . Trên Δ lấy hai điểm A và B . Khi đó: $\frac{d(A; (P))}{d(B; (P))} = \frac{AM}{BM}$.

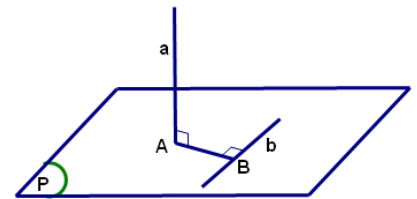


2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng. Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) . Khi đó khoảng cách giữa d và (P) bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên d đến (P) .

3. Dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b . Khoảng cách giữa hai đường thẳng.

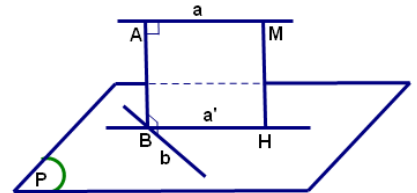
Cách 1 (Sử dụng cho trường hợp $a \perp b$).

- ☑ Dựng (P) chứa b và vuông góc với a tại A .
- ☑ Dựng AB vuông góc với b tại B . Khi đó đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b .



Cách 2.

- ☑ Dựng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng b và song song với đường thẳng a .
- ☑ Dựng a' là hình chiếu của a trên mặt phẳng (P) như sau:
 - Chọn M trên a , dựng $MH \perp (P)$ tại H .
 - Từ H , dựng đường thẳng $a' \parallel a$, cắt đường thẳng b tại điểm B .



- ☑ Từ B , dựng đường thẳng song song với MH , cắt a tại A .

Khi đó đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b .

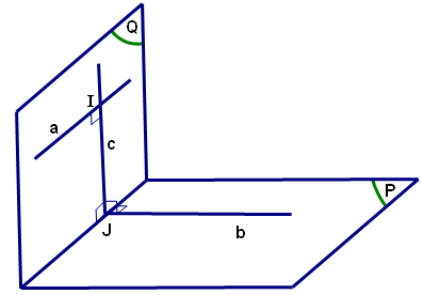
Chú ý 9. Từ cách 2 thấy rằng: $d(a; b) = AB = MH = d(a; (P))$.

- ☑ Do đó nếu bài toán chỉ yêu cầu tính $d(a; b)$ thì ta có thể tính $d(a; (P))$, với (P) là mặt phẳng chứa b và song song với a .
- ☑ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó, chứa đường thẳng còn lại. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

Như vậy, nếu dùng chú ý 10 thì ta có thể tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau một cách gián tiếp mà không cần dựng đoạn vuông góc chung.

Cách 3.

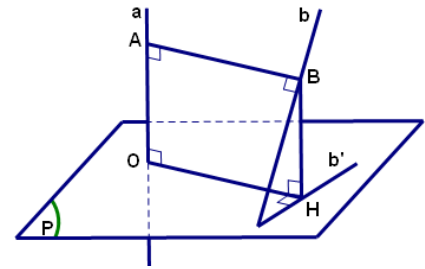
- ✓ Dựng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng b và song song với a .
- ✓ Dựng mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với (P) . Xác định $J = (Q) \cap b$.
- ✓ Từ J , dựng đường thẳng $c \perp (P)$, khi đó $c \subset (Q)$ và c cắt a tại I .



Khi đó đoạn IJ là đoạn vuông góc chung của a và b .

Cách 4.

- ✓ Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng a tại điểm O .
- ✓ Dựng hình chiếu b' của b trên (P) .
- ✓ Dựng hình chiếu H của O trên b' .
- ✓ Từ H , dựng đường thẳng song song với a , cắt b tại B .
- ✓ Từ B , dựng đường thẳng song song với OH , cắt a tại A .



Khi đó đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b .

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 16. Tính khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ .

Phương pháp.

Cách 1. Dùng định nghĩa 2 ở trang 133.

Cách 2. Nếu có mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với Δ tại H thì $d(M; \Delta) = MH$.

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , $SA = AB = 2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và $SA \perp (ABCD)$.

- a) Chứng minh $BD \perp SC$. Tính $d(O; SC)$.
- b) Tính $d(O; SB)$ và $d(D; SB)$.

Lời giải

a) Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$. Mặt khác $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$. Vậy:

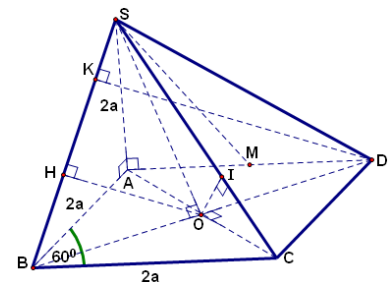
$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$$

Gọi I là hình chiếu của O trên SC .

Vì $\triangle CAS$ đồng dạng với $\triangle CIO$ nên $\frac{CS}{CO} = \frac{AS}{IO}$.

Do đó $OI = \frac{AS \cdot CO}{CS}$. Suy ra:

$$OI = \frac{2a \cdot a}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 + 4a^2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$



$$\text{Vậy } d(O; SC) = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

b) Kẻ OH vuông góc với SB tại H . Khi đó $d(O; SB) = OH$. Vì $BD \perp (SAC)$, mà $SO \subset (SAC)$ nên $BD \perp SO$. Vậy $\triangle SOB$ vuông tại O . Do OH là đường cao của tam giác vuông $\triangle SOB$ nên

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{\left(2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{SA^2 + AO^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{5a^2}.$$

$$\text{Vậy } d(O; SB) = OH = \frac{a\sqrt{30}}{4}.$$

Kẻ DK vuông góc với SB tại K . Khi đó

$$d(D; SB) = DK = 2HO = 2 \frac{a\sqrt{30}}{4} = \frac{a\sqrt{30}}{2}.$$

Dạng 17 (Hãy liên hệ dạng này với dạng 10 ở trang 64, dạng 15 ở trang 102).
Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) .

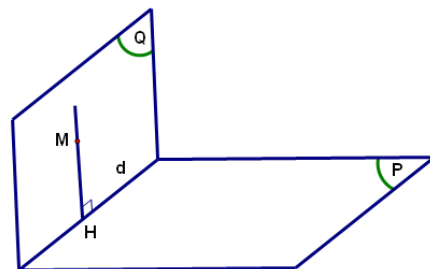
Phương pháp.

Cách 1. Dùng định nghĩa 1 ở trang 133.

Cách 2.

☑ **Bước 1.** Tìm một mặt phẳng (Q) chứa M và $(Q) \perp (P)$.
 Tìm $d = (P) \cap (Q)$.

☑ **Bước 2.** Qua M kẻ $MH \perp d$ tại H . Khi đó vì $MH \perp (P)$ nên $d(M; (P)) = MH$.

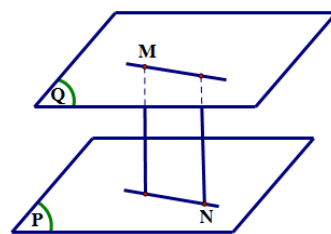
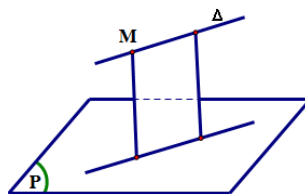


Lưu ý.

☑ Nếu đường thẳng Δ song song với $mp(P)$ thì $d(\Delta; (P)) = d(M; (P))$, với M là điểm bất kì trên Δ .

☑ Nếu mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) thì khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là:

$$d((P); (Q)) = d(M; (P)) = d(N; (Q)), \text{ với } M \in (Q), N \in (P).$$



Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B và $SA \perp (ABC)$. Biết $AC = 2a$, $SA = a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, SB .

a) Chứng minh $MP \parallel (SAC)$. Tính $d(MP, (SAC))$.

b) Chứng minh $(MNP) \parallel (SAC)$. Tính $d((MNP), (SAC))$.

c) Tính khoảng cách giữa SA với (CMP) .

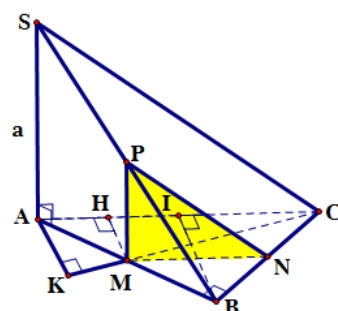
🔗 Lời giải

a) Ta có: $\begin{cases} MP \not\subset (SAC) \\ MP \parallel SA \subset (SAC). \end{cases}$

Suy ra $MP \parallel (SAC)$.

Gọi I là trung điểm của AC . Do tam giác ABC cân tại B nên $BI \perp AC$. Lại có $SA \perp BI$. Từ đó suy ra $BI \perp (SAC)$. Gọi H là trung điểm AI thì $MH \parallel BI$. Do đó $MH \perp (SAC)$. Vậy $MH = d(M; (SAC)) = d(MP; (SAC))$.

(1)



Ta có $MH = \frac{BI}{2} = \frac{AC}{4} = \frac{a}{2}$.

b) $\begin{cases} MN \not\subset (SAC) \\ MN \parallel AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SAC).$ (2)

Mà MN và MP là hai đường thẳng cắt nhau cùng nằm trong (MNP) nên từ (1) và (2) suy ra $(MNP) \parallel (SAC)$. Từ đó

$$d((MNP); (ABD)) = d(M, (SAC)) = MH = \frac{a}{2}.$$

c) Ta có: $\begin{cases} SA \not\subset (CMP) \\ SA \parallel MP \subset (CMP) \end{cases}$.

Suy ra $SA \parallel (CMP) \Rightarrow d(SA, (CMP)) = d(A, (CMP))$.

Hạ $AK \perp CM$ ($K \in CM$). Ta có: $\begin{cases} AK \perp CM \\ AK \perp MP \end{cases} \Rightarrow AK \perp (CMP)$. Sử dụng tính chất đồng dạng

của tam giác ta có $\frac{AK}{BC} = \frac{AM}{CM} \Rightarrow AK = \frac{AM \cdot BC}{CM}$. Dễ dàng tính được:

$$AB = BC = a\sqrt{2}, AM = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$CM = \sqrt{BC^2 + BM^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

$$\text{Từ đó } AK = \frac{AM \cdot BC}{CM} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{Vậy } d(SA, (CMP)) = d(A, (CMP)) = AK = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

Bài 3 (ĐH 2014B). Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm cạnh AB . Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy bằng 60° . Tính theo a khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm AB . Theo giả thiết ta có $A'H \perp (ABC)$. Do đó hình chiếu của $A'C$ trên (ABC) là HC , suy ra góc giữa $A'C$ và mặt đáy là $\widehat{A'CH} = 60^\circ$.

$$A'H = HC \cdot \tan \widehat{A'CH}.$$

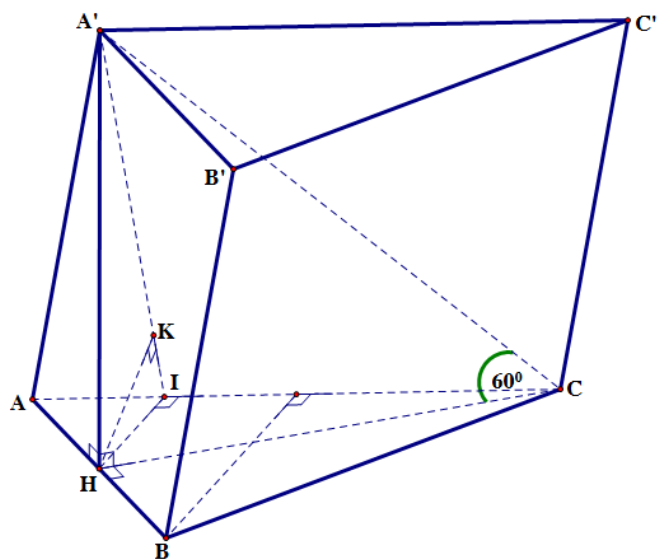
$A'H = \frac{3a}{2}$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của H trên AC . Khi đó:

$$\begin{cases} AC \perp IH \subset (A'IH) \\ AC \perp A'H \subset (A'IH) \\ IH \cap A'H = H \end{cases}$$

Suy ra $AC \perp (A'IH)$, mà $AC \subset (ACC'A')$ nên $(ACC'A') \perp (A'IH)$. Mặt phẳng $(A'IH)$ vuông góc với mặt phẳng $(ACC'A')$ theo giao tuyến $A'I$ nên nếu kẻ HK vuông góc với $A'I$ tại K thì K là hình chiếu của H trên $(ACC'A')$, do đó: $d(H, (ACC'A')) = HK$.

Ta có:

$$HI = AH \sin \widehat{IAH} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4};$$



$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HA'^2} = \frac{16}{3a^2} + \frac{4}{9a^2} = \frac{52}{9a^2} \Rightarrow HK = \frac{3a}{2\sqrt{13}};$$

$$d(B, (ACC'A')) = 2d(H, (ACC'A')) = 2HK = \frac{3\sqrt{13}a}{13}.$$

Bài 4. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Đặt $OA = a, OB = b, OC = c$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên BC . Chứng minh rằng khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng khoảng cách từ O đến AK và $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

✍️ Lời giải

Ta có $AO \perp (OBC)$.

Suy ra $OA \perp BC$. Vậy:

$$\begin{cases} BC \perp OK \subset (AOK) \\ BC \perp OA \subset (AOK) \\ OK \cap OA = O \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AOK).$$

Mà $BC \subset (ABC)$ nên $(ABC) \perp (AOK)$.

Ta có:

$$\begin{cases} (ABC) \perp (AOK) \\ (ABC) \cap (AOK) = AK \\ OH \subset (AOK), OH \perp AK \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC).$$

Do đó $d(O, (ABC)) = OH = d(O, AK)$. Ta có:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Lưu ý. Kết quả bài toán 4 này được sử dụng nhiều.

Dạng 18. Dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b . Khoảng cách giữa hai đường thẳng.

Phương pháp.

Cách 1 (Sử dụng cho trường hợp $a \perp b$).

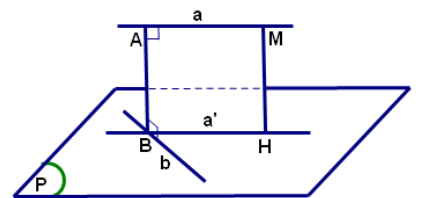
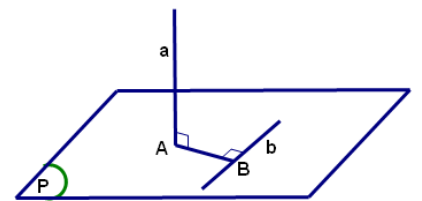
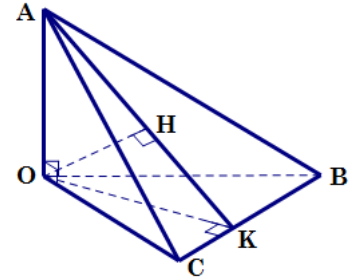
- ☑ Dựng (P) chứa b và vuông góc với a tại A .
- ☑ Dựng AB vuông góc với b tại B . Khi đó đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b .

Cách 2.

- ☑ Dựng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng b và song song với đường thẳng a .
- ☑ Dựng a' là hình chiếu của a trên mặt phẳng (P) như sau:
 - Chọn M trên a , dựng $MH \perp (P)$ tại H .
 - Từ H , dựng đường thẳng $a' \parallel a$, cắt đường thẳng b tại điểm B .
- ☑ Từ B , dựng đường thẳng song song với MH , cắt a tại A .

Khi đó đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b .

Chú ý 10. Từ cách 2 thấy rằng: $d(a; b) = AB = MH = d(a; (P))$.

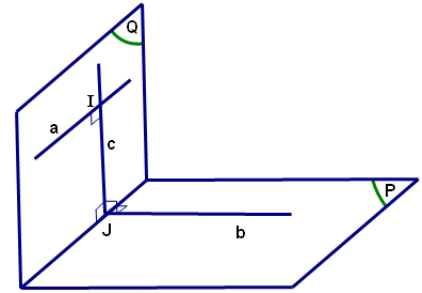


- ☑ Do đó nếu bài toán chỉ yêu cầu tính $d(a; b)$ thì ta có thể tính $d(a; (P))$, với (P) là mặt phẳng chứa b và song song với a .
- ☑ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó, chứa đường thẳng còn lại. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

Như vậy, nếu dùng chú ý 10 thì ta có thể tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau một cách gián tiếp mà không cần dựng đoạn vuông góc chung.

Cách 3.

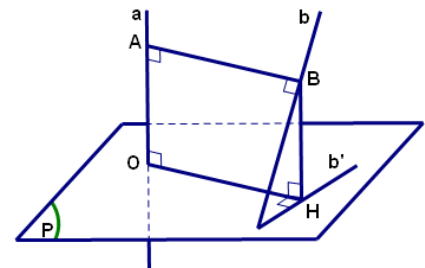
- ☑ Dựng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng b và song song với a .
- ☑ Dựng mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với (P) . Xác định $J = (Q) \cap b$.
- ☑ Từ J , dựng đường thẳng $c \perp (P)$, khi đó $c \subset (Q)$ và c cắt a tại I .



Khi đó đoạn IJ là đoạn vuông góc chung của a và b .

Cách 4.

- ☑ Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng a tại điểm O .
- ☑ Dựng hình chiếu b' của b trên (P) .
- ☑ Dựng hình chiếu H của O trên b' .
- ☑ Từ H , dựng đường thẳng song song với a , cắt b tại B .
- ☑ Từ B , dựng đường thẳng song song với OH , cắt a tại A .



Khi đó đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b .

Bài 5. Cho tứ diện $OABC$, trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm BC . Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:

- ① OA và BC ;
- ② IA và OC .

Lời giải

- ① Ta có $OA \perp BC$. Mặt phẳng (OBC) chứa BC và vuông góc với OA tại O . Kẻ OI vuông góc với BC tại I , khi đó I là trung điểm BC . Vì OI vuông góc với OA và BC lần lượt tại O và I nên OI là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng OA và BC . Ta có

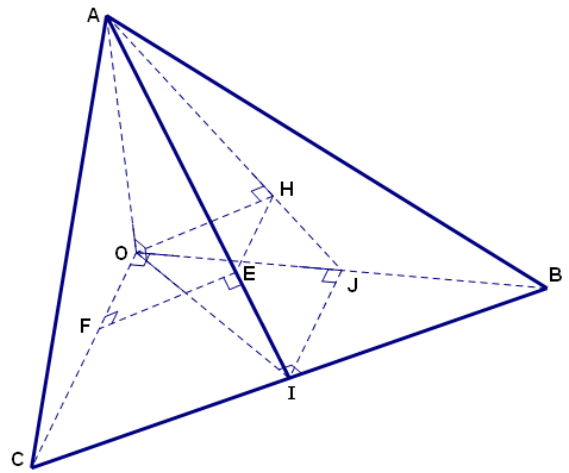
$$OI = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{OC^2 + OB^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

- ②

Ta có $(OAB) \perp OC$ (tại O). Kẻ IJ vuông góc với OB tại J , khi đó J là trung điểm OB và $IJ \perp (OAB)$ tại J . Vậy AJ là hình chiếu của AI trên (OBC) . Chiều vuông góc O trên AJ thành H . Dựng $HE \parallel OC$ ($E \in AI$). Dựng $EF \parallel OH$ ($F \in OC$). Khi đó EF là đoạn vuông góc chung của AI và OC và $EF = OH$. Trong tam giác vuông AOJ ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{OH^2} &= \frac{1}{OJ^2} + \frac{1}{OA^2} \\ &= \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{a^2}.\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } OH^2 = \frac{a^2}{5} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}. \text{ Vậy } EF = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$



Lưu ý. Đối với câu b), hình chiếu của AI trên mặt phẳng (OBC) chứa OC là OI , mà OI không vuông góc với OC nên AI không vuông góc với OC . Do đó ta không sử dụng cách 1 mà phải dựng đoạn vuông góc chung trong trường hợp tổng quát (cách 4). Cũng có thể dựng đoạn vuông góc chung theo cách 2 như sau:

- ☑ Dựng mặt phẳng chứa AI và song song với OC là (AIJ) .
- ☑ Trên OC chọn điểm O , khi đó hình chiếu của O trên (AIJ) chính là hình chiếu H của O trên AJ .
- ☑ Vẽ $HE \parallel OC$, E thuộc AI . Vẽ $EF \parallel OH$, F thuộc OC . Khi đó EF là đoạn vuông góc chung.

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi I, M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, SD, SB và giả sử $SI \perp (ABCD)$. Hãy dựng đoạn vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AP .

Lời giải

Gọi J là trung điểm SA . Khi đó JN và BM cùng song song và bằng một nửa AD nên $BMNJ$ là hình bình hành, do đó:

$MN \parallel BJ \subset (SAB)$, suy ra $MN \parallel (SAB)$. Vậy mp(SAB) chứa AP và song song với MN . Vì

$$\begin{cases} BC \perp BA \subset (SAB) \\ BC \perp SI \subset (SAB) \\ BA \cap SI = I \end{cases}$$

nên $BC \perp (SAB)$. Gọi $G = AP \cap BJ$. Vẽ đường thẳng qua G , song song với BM , cắt MN tại Q . Ta có:

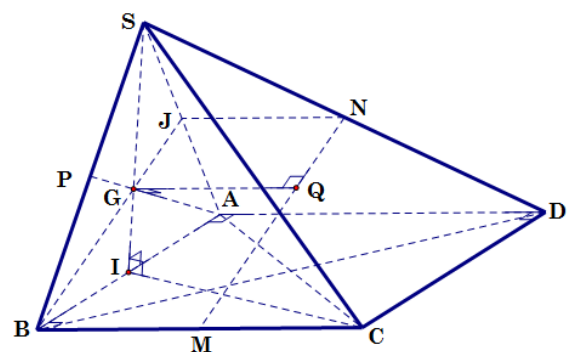
$$\begin{cases} BC \perp (SAB) \\ GQ \parallel BC \end{cases} \Rightarrow GQ \perp (SAB).$$

Mà $AP \subset (SAB)$ nên $GQ \perp AP$. Lại có $\begin{cases} MN \parallel (SAB) \\ GQ \perp (SAB) \end{cases} \Rightarrow GQ \perp MN$. Vậy GQ là đoạn vuông

góc chung của AP và MN . Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AP bằng $GQ = \frac{a}{2}$.

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = a$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hãy dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AC và SB và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng này.

Lời giải



Phân tích. Hình chiếu của SB trên mặt phẳng (ABC) chứa AC là AB , mà AB không vuông góc với AC nên SB không vuông góc với AC . Do đó ta không sử dụng cách 1 mà phải dựng đoạn vuông góc chung trong trường hợp tổng quát (cách 4).

Giải.

• Dựng mặt phẳng vuông góc với AC . Gọi D là trung điểm AC , khi đó $BD \perp AC$. Vẽ đường thẳng Ax qua A và song song với BD . Khi đó: $\begin{cases} Ax \parallel BD \\ AC \perp BD \end{cases}$
Suy ra $AC \perp Ax$.

Như vậy $\begin{cases} AC \perp Ax \\ AC \perp AS. \end{cases}$

Suy ra AC vuông góc với $mp(S, Ax)$ tại A .

• Dựng hình chiếu của SB trên $mp(S, Ax)$.
Ta có $mp(S, Ax)$ cắt SB tại S . Vẽ đường thẳng qua B song song với AC , cắt Ax tại E . Khi đó $BE \perp mp(S, Ax)$, suy ra hình chiếu của SB trên $mp(S, Ax)$ là SE và $mp(S, Ax) \equiv mp(SAE)$.

• Dựng F là hình chiếu của A trên SE .

• Vẽ đường thẳng qua F song song với BE cắt SB tại H .

• Qua H vẽ đường thẳng song song với AF cắt AC tại K .

Ta có KH vuông góc với AC tại K và vuông góc với SB tại H nên HK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AC và SB .

Ta có $AFHK$ là hình chữ nhật nên $HK = AF$. Mặt khác AF là đường cao của tam giác vuông SAE nên:

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{BD^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}.$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC là:

$$d(SB, AC) = HK = AF = a\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Lưu ý. Nếu dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AC và SB theo cách 2 thì ta tiến hành như sau:

☑ Mặt phẳng chứa SB và song song với AC là (SBE) .

☑ Hình chiếu của AC trên (SBE) được dựng như sau:

- Trên AC chọn điểm A . Hình chiếu của A trên (SBE) là F .
- Từ F vẽ đường thẳng song song với AC cắt SB tại H .
- Khi đó FH là hình chiếu của AC trên (SBE) .

☑ Từ H vẽ đường thẳng song song với AF cắt AC tại K .

☑ Khi đó HK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AC và SB .

Cách khác (sử dụng vectơ). Giả sử HK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AC và SB , với H thuộc SB , K thuộc AC . Ta sẽ biểu diễn $\overrightarrow{KH}$ theo ba vectơ không cùng phương $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}$.

$$\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SH} = x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AS} + y\overrightarrow{SB}$$

$$= x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AS} + y(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AS}) = x\overrightarrow{AC} + (1-y)\overrightarrow{AS} + y\overrightarrow{AB}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KH} \perp \overrightarrow{AC} &\Leftrightarrow \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ &\Leftrightarrow [x\overrightarrow{AC} + (1-y)\overrightarrow{AS} + y\overrightarrow{AB}] \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ &\Leftrightarrow x\overrightarrow{AC}^2 + y\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ &\Leftrightarrow xAC^2 + yAB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2x + \frac{1}{2}a^2y = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + y = 0.\end{aligned}$$

Lại có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KH} \perp \overrightarrow{SB} &\Leftrightarrow \overrightarrow{KH} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AS}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AS}) \cdot [x\overrightarrow{AC} + (1-y)\overrightarrow{AS} + y\overrightarrow{AB}] = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}a^2x + ya^2 - (1-y)a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 2y - 2(1-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 4y = 2.\end{aligned}$$

Ta có hệ: $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(-\frac{2}{7}; \frac{4}{7}\right).$

Như vậy: $\overrightarrow{KH} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AS} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}.$

Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AC và SB là HK với H thuộc SB , K thuộc AC và $\overrightarrow{KH} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AS} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}.$ Do đó:

$$\begin{aligned}7\overrightarrow{KH} &= 3\overrightarrow{AS} + 4\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow 49\overrightarrow{KH}^2 = (3\overrightarrow{AS} + 4\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})^2 \\ &\Leftrightarrow 49KH^2 = 9AS^2 + 16AB^2 + 4AC^2 - 16\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow 49KH^2 = 9a^2 + 16a^2 + 4a^2 - 8a^2 \\ &\Leftrightarrow KH^2 = \frac{21a^2}{49}.\end{aligned}$$

Độ dài đoạn vuông góc chung là: $KH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$

Bài 8 (THPT Quốc gia năm 2015). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC .

 **Lời giải**

Do SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ là AC , do đó góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa hai đường thẳng CS và CA , tức là góc $\widehat{SCA} = 45^\circ$. Trong tam giác vuông SAC , ta có: $SA = AC \tan 45^\circ$. Hay $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là điểm đối xứng của D qua A , khi đó:

$$\begin{cases} AC \not\subset (SBE) \\ AC \parallel BE \subset (SBE) \end{cases} \Rightarrow AC \parallel (SBE).$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC là:

$$\begin{aligned} d(AC, SB) &= d(AC, (SBE)) \\ &= d(A, (SBE)). \end{aligned}$$

Kẻ $AH \perp BE$ tại H , kẻ $AK \perp SH$ tại K . Khi đó:

$$\left\{ \begin{array}{l} AK \perp SH \\ AK \perp BE \end{array} \right. \Rightarrow AK \perp (SBE) \Rightarrow d(A, (SBE)) = AK.$$

Do AK là đường cao của tam giác vuông SAH nên: $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AH^2}$.

Do AH là đường cao của tam giác vuông ABE nên:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow AK^2 = \frac{2a^2}{5} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC là: $AK = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Bài 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và DC' .

 Lời giải

Gọi I là tâm hình vuông $ADD'A'$. Vì $AC \parallel A'C'$ mà $A'C'$ nằm trong $(A'C'D)$ nên $AC \parallel (A'C'D)$. Vậy

$$d(AC; DC') = d(AC; (A'C'D)) = d(A; (A'C'D)).$$

Vì giao điểm của AD' và $(A'C'D)$ là I nên ta có:

$$\frac{d(A; (A'C'D))}{d(D'; (A'C'D))} = \frac{IA}{ID'} = 1.$$

Từ đây ta suy ra

$$d(A; (A'C'D)) = d(D'; (A'C'D)).$$

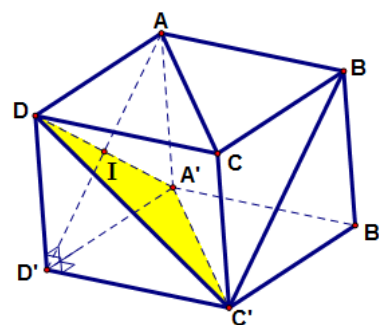
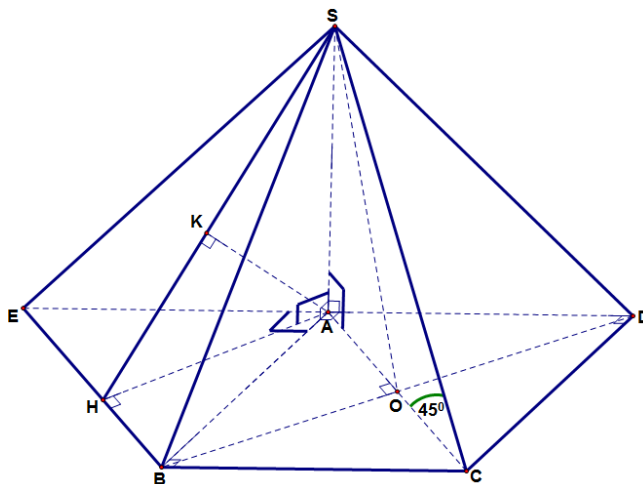
Do tứ diện $D'A'C'D$ có ba cạnh $D'A'$, $D'C'$, $D'D$ vuông góc với nhau đôi một nên theo bài toán 4 ở trang 137 ta có:

$$\frac{1}{[d(D';(A'C'DD))]}^2 = \frac{1}{D'A'^2} + \frac{1}{D'C'^2} + \frac{1}{D'D^2} = \frac{3}{a^2}.$$

$$\text{Vậy } d(AC; DC') = d(D'; (A'C'D)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Lưu ý. Một trong các cách tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là ta dựng mp(P) chứa b và $(P) \parallel a$. Khi đó

$$d(a; b) = d(a; (P)).$$



Bài 10. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông và $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

Lời giải

Gọi N là trung điểm BB' .

Khi đó $MN \parallel CB' \Rightarrow CB' \parallel (AMN)$.

Như thế ta có:

$$d(AM; B'C) = d(B'C; (AMN)) = d(B'; (AMN)).$$

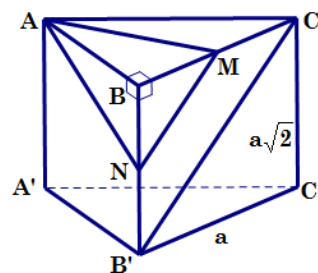
Vì đường thẳng BB' cắt mặt phẳng (AMN) tại điểm N nên

$$\frac{d(B'; (AMN))}{d(B; (AMN))} = \frac{B'N}{BN} = 1.$$

Suy ra $d(AM; B'C) = d(B'C; (AMN)) = d(B; (AMN))$. Vì tứ diện $BAMN$ có BA, BM, BN đôi một vuông góc nên theo bài tập 4 ở trang 137, ta có:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{7}{a^2}.$$

$$\text{Vậy } d(AM; B'C) = d = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$



Bài 11. Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau nhận AB làm đoạn vuông góc chung ($A \in a, B \in b$). Các điểm M, N lần lượt thay đổi trên a và b sao cho $AM \cdot BN = c$ không đổi. Tìm vị trí của M, N sao cho MN nhỏ nhất.

Lời giải

Phân tích. Ta cần tính MN theo AB, AM, BN . Một suy nghĩ rất tự nhiên là sẽ tạo ra một đoạn thẳng xuất phát từ M hoặc N và có độ dài bằng AB . Như vậy ta sẽ vẽ đường thẳng c đi qua M và song song với AB . Đến đây sẽ nảy sinh nhu cầu cần phải vẽ đường thẳng qua B và song song với AM , cắt c tại P . Khi đó $MP = AB$. Đến đây ta đã có thể tính MN theo AB, AM, BN và góc $\widehat{PBN}$, sau đó đưa ra những đánh giá bất đẳng thức để tìm giá trị nhỏ nhất của MN .

Giải. Kẻ đường thẳng a' qua B và song song với a . Khi đó AB vuông góc với b và vuông góc với a' nên AB vuông góc với mặt phẳng (b, a') . Lấy P thuộc a' sao cho $MP \parallel AB$. Gọi φ là góc tạo bởi hai đường thẳng a và b . Ta có:

$$\begin{aligned} MN^2 &= MP^2 + NP^2 \\ &= AB^2 + BP^2 + BN^2 - 2BP \cdot BN \cos \widehat{PBN} \\ &= AB^2 + AM^2 + BN^2 - 2AM \cdot BN \cos \widehat{PBN} \\ &\geq AB^2 + AM^2 + BN^2 - 2AM \cdot BN \cos \varphi \\ &\geq AB^2 + 2AM \cdot BN - 2AM \cdot BN \cos \varphi \\ &= AB^2 + 2c - 2c \cos \varphi = AB^2 + 2c(1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$AM = BN = \sqrt{c}, \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}) = \widehat{PBN} = \varphi.$$

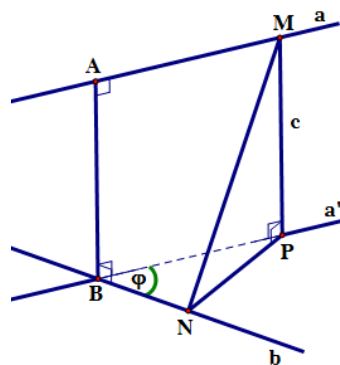
Vậy đoạn thẳng MN nhỏ nhất là bằng $\sqrt{AB^2 + 2c(1 - \cos \varphi)}$, đạt được khi $AM = BN = \sqrt{c}$ và $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}) = \varphi$.

Cách khác (dùng vector). Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \Rightarrow \overrightarrow{MN}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN})^2.$$

Như vậy:

$$MN^2 = MA^2 + AB^2 + BN^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BN}$$



$$\begin{aligned}
&= AB^2 + MA^2 + BN^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BN} \\
&= AB^2 + MA^2 + BN^2 + 2MA \cdot BN \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BN}) \\
&\geq AB^2 + (MA^2 + BN^2) - 2MA \cdot BN \cos(\widehat{a, b}) \quad (1) \\
&\geq AB^2 + 2MA \cdot BN - 2MA \cdot BN \cos(\widehat{a, b}) \quad (2) \\
&= AB^2 + 2MA \cdot BN [1 - \cos(\widehat{a, b})] \\
&= AB^2 + 2c [1 - \cos(\widehat{a, b})].
\end{aligned}$$

Do đó $MN \geq \sqrt{AB^2 + 2c [1 - \cos(\widehat{a, b})]}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi dấu "=" ở (1) và (2) cùng xảy ra hay:

$$\begin{cases} \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BN}) = -\cos(\widehat{a, b}) \\ AM = BN = \sqrt{c}. \end{cases}$$

Vậy MN bé nhất là bằng $\sqrt{AB^2 + 2c [1 - \cos(\widehat{a, b})]}$, đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BN}) = -\cos(\widehat{a, b}) \\ AM = BN = \sqrt{c}. \end{cases}$$

C. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1. Đề bài

Bài 12. Cho tứ diện $OABC$ có $OA \perp (OBC)$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên BC . Chứng minh rằng khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng khoảng cách từ O đến AK .

Bài 13. Cho tứ diện $OABC$ có $OA \perp (OBC)$, $CO \perp CB$. Chứng minh rằng khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng khoảng cách từ O đến AC .

Bài 14. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh $AB = a$ và đường cao hạ từ S bằng h . Tính khoảng cách từ A đến (SBC) .

Bài 15. Cho hai điểm A, B nằm cùng phía với mặt phẳng (P) . Trên đoạn AB lấy điểm M sao cho $\frac{MA}{MB} = 3$. Tính khoảng cách từ M đến (P) , biết khoảng cách từ A và B đến (P) tương ứng là a và b .

Bài 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Đáy là tam giác vuông tại B và có $AB = a$; M là trung điểm AB . Tính khoảng cách giữa SM và BC .

Bài 17. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = BC = AD = BD = a$, $AB = c$, $CD = c'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .

Bài 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác cân tại S và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$, cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy góc α . Tính:

- Chiều cao của hình chóp $S.ABCD$.
- Khoảng cách từ chân đường cao hình chóp đến mặt phẳng (SCD) .
- Diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng trung trực của cạnh BC .

Bài 19. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{A} = 60^\circ$, góc giữa đường chéo $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng 60° .

- Tính đường cao của hình hộp đó.
- Tìm đường vuông góc chung của $A'C$ và BB' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.

Bài 20. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ thuộc đường thẳng $B'C'$.

- Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.
- Chứng minh rằng hai đường thẳng AA' và $B'C'$ vuông góc, tính khoảng cách giữa chúng.
- Tính góc giữa đường thẳng BC và AC' .
- Tính góc giữa $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$.

Bài 21. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có

$$AB = AA' = a, AC' = 2a.$$

- Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD') .
- Tìm đường vuông góc chung của các đường thẳng AC' và CD' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng ấy.

Bài 22. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình chữ nhật và $AB = 2a, BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$.

- Tính khoảng cách từ S đến $(ABCD)$.
- Gọi F, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD , K là điểm bất kì thuộc đường thẳng AD . Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào vị trí của K trên đường thẳng AD . Hãy tính khoảng cách đó theo a .

Bài 23. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = SA = a$. Gọi M là trung điểm của SC . Kí hiệu (P) là mặt phẳng đi qua AM và song song với BD . Tính khoảng cách từ S đến (P) .

Bài 24. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $AB, B'C'$. Xác định đoạn vuông góc chung của AN và DM .

Bài 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là nửa lục giác đều, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $AB = BC = CD = a$. Xác định đoạn vuông góc chung của BD và SC . Tính độ dài đoạn vuông góc chung đó.

2. Lời giải, hướng dẫn

Câu 12.

Ta có $AO \perp (OBC)$, suy ra $OA \perp BC$.

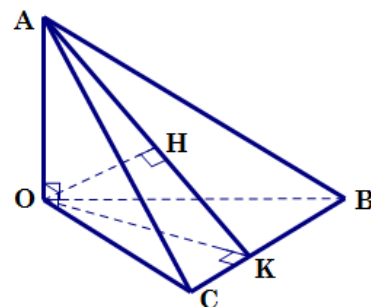
$$\text{Vậy } \begin{cases} BC \perp OK \subset (AOK) \\ BC \perp OA \subset (AOK) \\ OK \cap OA = O \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AOK).$$

Mà $BC \subset (ABC)$ nên $(ABC) \perp (AOK)$.

Ta có:

$$\begin{cases} (ABC) \perp (AOK) \\ (ABC) \cap (AOK) = AK \\ OH \subset (AOK), OH \perp AK \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC).$$

Do đó $d(O; (ABC)) = OH = d(O; AK)$.



Câu 13.

Ta có $AO \perp (OBC)$, suy ra $OA \perp BC$.

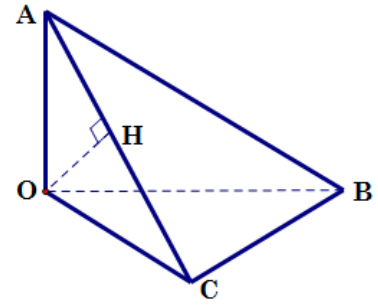
$$\text{Vậy } \begin{cases} BC \perp CO \subset (AOK) \\ BC \perp OA \subset (AOK) \\ OC \cap OA = O \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AOC).$$

Mà $BC \subset (ABC)$ nên $(ABC) \perp (AOC)$.

Ta có:

$$\begin{cases} (ABC) \perp (AOC) \\ (ABC) \cap (AOC) = AC \\ OH \subset (AOC), OH \perp AC \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC).$$

Do đó $d(O; (ABC)) = OH = d(O; AC)$.

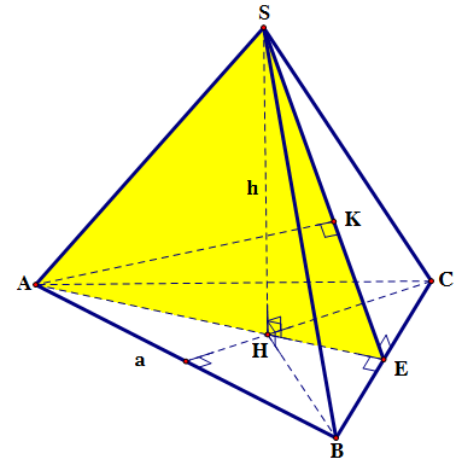


Câu 14. Phân tích. Đề bài cho hình chóp tam giác đều thì ta phải chú ý đến tính chất: trong hình chóp đều, chân đường cao trùng với tâm của đáy; trong tam giác đều thì tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm trùng nhau. Còn việc xác định hình chiếu của A trên (SBC) , bạn đọc xem lại dạng 17 ở trang 135 và định lý 3 ở trang 93.

Giải. Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC) . Khi đó HA, HB, HC là hình chiếu của SA, SB, SC trên (ABC) , mà $SA = SB = SC$ nên $HA = HB = HC$. Từ đây kết hợp với giả thiết tam giác ABC đều suy ra H là tâm của tam giác ABC . Gọi E là trung điểm BC . Khi đó:

$$\begin{cases} BC \perp AE \subset (SAE) \\ BC \perp SE \subset (SAE) \\ AE \cap SE = E. \end{cases}$$

Suy ra $BC \perp (SAE)$. Do đó $(SBC) \perp (SAE)$. Như vậy (SBC) vuông góc với (SAE) theo giao tuyến SE nên từ A vẽ AK vuông góc với giao tuyến SE , ta sẽ có:



$$AK \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AK.$$

Ta có: $2S_{SAE} = SH \cdot AE = AK \cdot SE \Rightarrow AK = \frac{SH \cdot AE}{SE}$. Trong đó:

$$SH = h, AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$SE = \sqrt{SH^2 + HE^2} = \sqrt{h^2 + \frac{AE^2}{4}} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}} = \sqrt{\frac{12h^2 + a^2}{12}}.$$

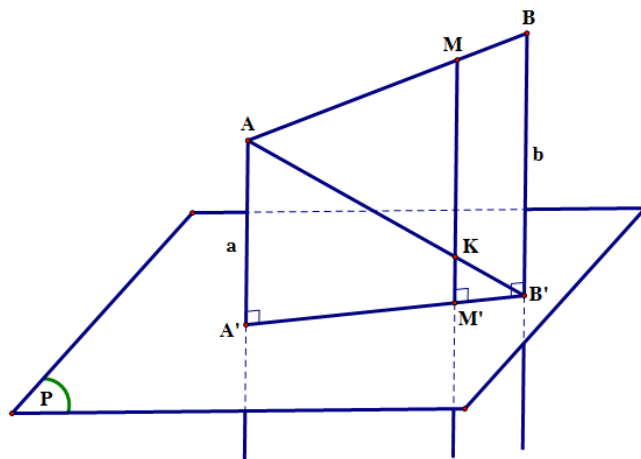
Vậy khoảng cách từ A đến (SBC) là:

$$d(A, (SBC)) = AK = \frac{ha\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{12h^2 + a^2}} = \frac{3ah}{\sqrt{12h^2 + a^2}}.$$

Câu 15.

Phân tích. Từ giả thiết thấy rằng cần phải vẽ các đường thẳng lần lượt đi qua A, B, M vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt (P) tương ứng tại A', B', M' . Khi đó $AA' = a, BB' = b$.

Giải. Gọi A', B', M' lần lượt là hình chiếu của A, B, M trên mặt phẳng (P) . Khi đó do ba điểm A, B, M thẳng hàng nên A', B', M' thẳng hàng; AA', BB', MM' là ba đường thẳng song song với nhau và cùng nằm trong mặt phẳng vuông góc với (P) . Như vậy tứ giác $AA'B'B$ là hình thang vuông tại A' và B' . Gọi K là giao điểm của AB' và MM' . Ta cần tính MM' theo a và b .



$$\begin{aligned}\frac{MK}{BB'} &= \frac{AM}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow MK = \frac{3BB'}{4} = \frac{3b}{4}. \\ \frac{KM'}{AA'} &= \frac{B'K}{B'A} = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{4} \Rightarrow KM' = \frac{AA'}{4} \Rightarrow KM' = \frac{a}{4}. \\ MM' &= MK + KM' = \frac{3b}{4} + \frac{a}{4} = \frac{3b+a}{4}.\end{aligned}$$

Vậy khoảng cách từ M đến (P) là: $MM' = \frac{3b+a}{4}$.

Câu 16. Phân tích. Do $SA \perp (ABC)$ nên hình chiếu của SM trên (ABC) là AM , mà BC vuông góc với AM nên theo định lý ba đường vuông góc suy ra BC vuông góc với SM . Như vậy bài toán này rơi vào trường hợp đặc biệt nên việc dựng đoạn vuông góc chung là dễ dàng. Ta cần xác định mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.

Giải. Ta có:

$$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC.$$

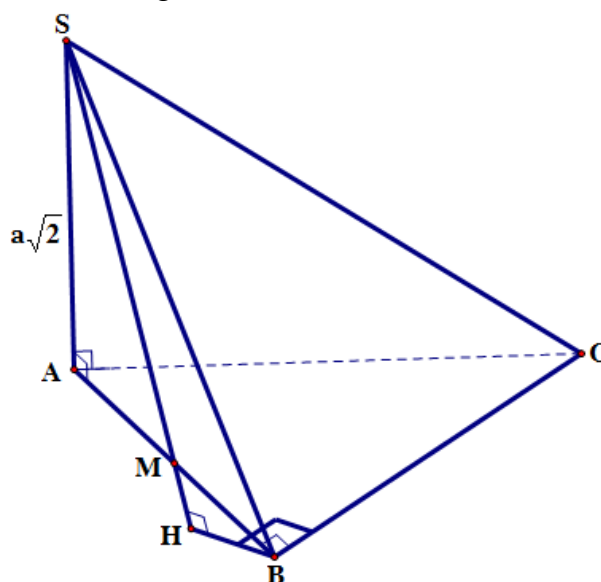
Như vậy:

$$\begin{cases} BC \perp BA \subset (SAB) \\ BC \perp SA \subset (SAB) \\ BA \cap SA = A. \end{cases}$$

Suy ra:

$$BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SM.$$

Ta có (SAB) là mặt phẳng chứa SM và vuông góc với BC tại B . Từ B vẽ BH vuông góc với SM tại H . Do $BC \perp (SAB)$ mà BH nằm trong (SAB) nên $BC \perp BH$. Như vậy BH cùng vuông góc và cắt hai đường thẳng SM và BC nên BH là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng này. Ta có:



$$S_{ABS} = \frac{1}{2}SA \cdot AB = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot a = \frac{a^2}{\sqrt{2}}.$$

Do M là trung điểm AB nên:

$$S_{MBS} = \frac{1}{2}S_{ABS} = \frac{a^2}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{SM \cdot HB}{2} = \frac{a^2}{2\sqrt{2}} \Rightarrow HB = \frac{a^2\sqrt{2}}{2SM}.$$

Lại có:

$$SM^2 = AM^2 + AS^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2}{4} \Rightarrow SM = \frac{3a}{2} \Rightarrow HB = \frac{\sqrt{2}a}{3}.$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC là:

$$d(SM, BC) = HB = \frac{\sqrt{2}a}{3}.$$

Câu 17.

Gọi J là trung điểm của CD . Vì $\triangle ACD$ cân tại A nên $AJ \perp CD$. Vì $\triangle CBD$ cân tại B nên $BJ \perp CD$. Vậy mặt phẳng (ABJ) vuông góc với CD tại J . Từ đây suy ra $CD \perp AB$ và (ABJ) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với CD tại J . Kẻ JI vuông góc với AB tại I . Khi đó IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD . Ta có

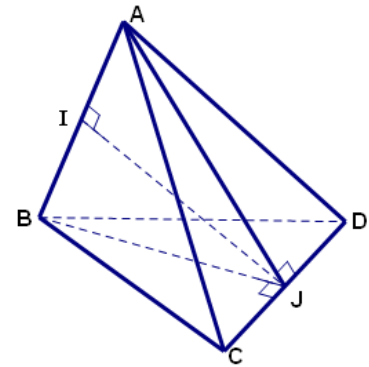
$$AJ = \sqrt{AD^2 - DJ^2} = \sqrt{a^2 - \frac{c'^2}{4}}$$

$$BJ = \sqrt{BC^2 - CJ^2} = \sqrt{a^2 - \frac{c'^2}{4}}.$$

Vậy $\triangle BJA$ cân tại J , suy ra I là trung điểm AB . Do đó

$$IJ = \sqrt{AJ^2 - AI^2} = \sqrt{a^2 - \frac{c'^2}{4} - \frac{c^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 - (c'^2 + c^2)}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(AB; CD) = \frac{\sqrt{4a^2 - (c'^2 + c^2)}}{2} \text{ (với điều kiện } 4a^2 > c'^2 + c^2).$$



Câu 18.

a) Gọi H là trung điểm AB , khi đó $SH \perp AB$, suy ra $SH \perp (ABCD)$. Vậy khoảng cách từ S đến $(ABCD)$ là SH , do đó SH là chiều cao của hình chóp. Vì hình chiếu của đường thẳng SC trên $(ABCD)$ là HC nên $\widehat{SCH} = \alpha$. Trong $\triangle SCH$, ta có:

$SH = HC \tan \alpha$. Mặt khác:

$$HC^2 = BH^2 + BC^2 = \frac{5a^2}{4}.$$

$$\text{Suy ra } HC = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Vậy } SH = \frac{a\sqrt{5}}{2} \tan \alpha.$$

b) Gọi K là trung điểm của CD . Khi đó

$$\begin{cases} CD \perp HK \subset (SHK) \\ CD \perp SH \subset (SHK) \\ HK \cap SH = H \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK).$$

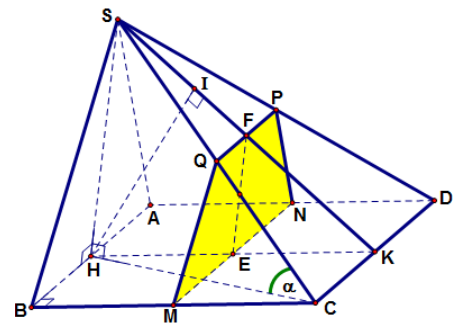
Suy ra $(SCD) \perp (SHK)$. Vì $(SCD) \cap (SHK) = SK$ nên nếu kẻ đường cao HI của $\triangle SHK$ thì HI vuông góc với (SCD) tại I , do đó khoảng cách từ H đến (SCD) là HI . Ta có

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{5a^2 \tan^2 \alpha} + \frac{1}{a^2} = \frac{4 + 5 \tan^2 \alpha}{5a^2 \tan^2 \alpha}.$$

$$\text{Suy ra } HI = \frac{\sqrt{5}a \tan \alpha}{\sqrt{4 + 5 \tan^2 \alpha}}.$$

c) Vì SH và CD cùng vuông góc với BC nên SH và CD cùng song song với mặt phẳng trung trực (R) của BC . Khi đó $(R) \cap (ABCD) = MN$, với $MN \parallel CD$ và M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD . $(R) \cap (SHK) = EF$, với $EF \parallel SH$ và E là trung điểm của HK . $(R) \cap (SCD) = PQ$, với PQ đi qua điểm F và $PQ \parallel CD$. Thiết diện là hình thang $MNPQ$. Ta có

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2} (MN + PQ) \cdot EF = \frac{1}{2} \left(a + \frac{a}{2} \right) \frac{a\sqrt{5}}{4} \tan \alpha = \frac{3a^2 \sqrt{5}}{16} \tan \alpha.$$



Câu 19.

a) Vì AC là hình chiếu của $A'C$ trên $(ABCD)$ nên $\widehat{A'CA} = 60^\circ$.
Do $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{A} = 60^\circ$ nên $AC = 2AO = \sqrt{3}$. Đường cao của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ chính là AA' .
Mặt khác: $AA' = AC \tan \widehat{A'CA}$.

Vậy $AA' = a\sqrt{3} \tan 60^\circ = 3a$.

b) Ta có $\begin{cases} BB' \not\subset (A'AC) \\ BB' \parallel A'A \subset (A'AC) \end{cases}$. Suy ra $BB' \parallel (A'AC)$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Khi đó

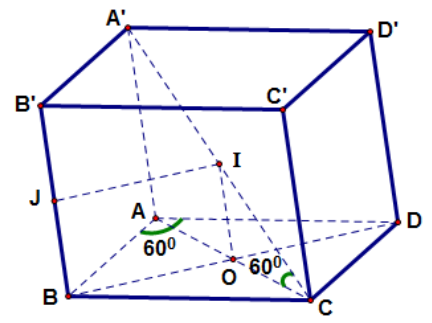
$$\begin{cases} BO \perp AC \subset (A'AC) \\ BO \perp AA' \subset (A'AC) \\ AA' \cap AC = A \end{cases} \Rightarrow BO \perp (A'AC).$$

Kẻ $OI \parallel AA'$ ($I \in A'C$) và kẻ $IJ \parallel BO$ ($J \in BB'$). Khi đó $IJ \perp (AA'C)$ (do $IJ \parallel BO, BO \perp (A'AC)$), mà theo trên thì

$$J \in BB', BB' \parallel (A'AC), A'C \subset (A'AC).$$

Do đó IJ chính là đoạn vuông góc chung của BB' và $A'C$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và $A'C$ là

$$IJ = BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}.$$



Câu 20.

Do $AH \perp (A'B'C')$ nên $\widehat{AA'H}$ chính là góc giữa AA' và mp($A'B'C'$). Theo giả thiết thì $\widehat{AA'H} = 30^\circ$.

a) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy là

$$AH = AA' \sin 30^\circ = \frac{a}{2}.$$

b) Ta có $A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2}$.

$$\text{Vậy } A'H = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Do $\Delta A'B'C'$ đều cạnh a , điểm $H \in B'C'$ mà $A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $A'H$ là đường cao của $\Delta A'B'C'$ và H là trung điểm $B'C'$. Mặt khác $AH \perp B'C'$ nên $B'C'$ vuông góc với AA' . Ta có $(AA'H)$ là mặt phẳng chứa AA' và vuông góc với $B'C'$ tại H . Kẻ đường cao HK của $\Delta AA'H$, khi đó HK chính là khoảng cách giữa AA' và $B'C'$. Do $AA'.HK = HA'.HA$ nên

$$HK = \frac{AH.A'H}{A'A} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

c) Vì $BC \parallel B'C'$ nên góc giữa BC và AC' bằng góc giữa $C'A$ và $C'B'$, tức là góc $\widehat{AC'H}$. Ta có

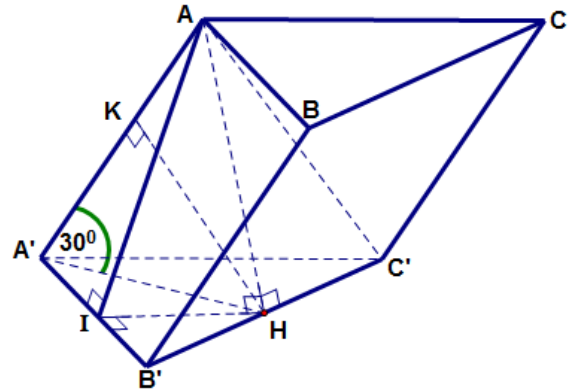
$$\tan \widehat{AC'H} = \frac{AH}{HC'} = \left(\frac{a}{2} : \frac{a}{2} \right) = 1 \Rightarrow \widehat{AC'H} = 45^\circ.$$

d) Ta có $(ABB'A') \cap (A'B'C') = A'B'$. Trong $(ABB'A')$ kẻ AI vuông góc với $A'B'$ tại I . Khi đó

$$\begin{cases} A'B' \perp AI \\ A'B' \perp AH \end{cases} \Rightarrow A'B' \perp IH.$$

Vậy góc giữa $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$ là góc giữa IA và IH . Ta có

$$IH = B'H \sin \widehat{IB'H} = \frac{a\sqrt{3}}{4}, \tan \widehat{AIH} = \frac{AH}{HI} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{AIH} \approx 49^\circ 6'.$$



Câu 21.

a) Gọi H là hình chiếu của D trên (ACD') . Xét tứ diện $DACD'$ có $DA \perp DC$, $DC \perp DD'$, $DD' \perp DA$, vậy theo bài tập 19 ở trang 72 ta có:

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DD'^2}.$$

Ta có $DC = a$, $DD' = a$.

Theo định lý Pitago ta được:

$$DA^2 = CA^2 - CD^2, \text{ vì thế suy ra:}$$

$$DA^2 = (AC'^2 - CC'^2) - a^2 = 2a^2.$$

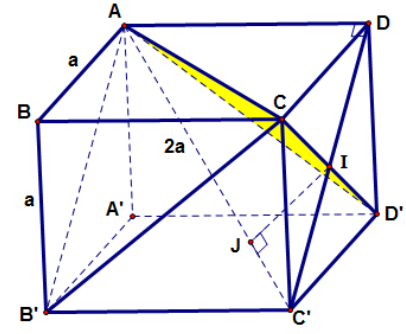
$$\text{Vậy } \frac{1}{DH^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{2a^2}.$$

Khoảng cách từ điểm D đến (ACD') là $DH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

b) Vì $CD = DD' = a$ nên $CD' \perp C'D$. Mặt khác $AD \perp (CDD'C')$ nên $CD' \perp DA$, suy ra $CD' \perp AC'$ và $(AC'D)$ là mặt phẳng chứa AC' , vuông góc với CD' tại $I = CD' \cap C'D$. Trong $(AC'D)$, kẻ $IJ \perp AC'$ tại J . Khi đó IJ là đoạn vuông góc chung của AC' và CD' . Vì $\triangle C'JI$ đồng dạng với $\triangle C'DA$ nên

$$\frac{IJ}{AD} = \frac{IC'}{AC'} \Rightarrow IJ = AD \cdot \frac{C'D}{2AC'}.$$

$$\text{Mà } C'D = a\sqrt{2} \text{ nên } IJ = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2 \cdot 2a} = \frac{a}{2}.$$



Câu 22.

a) Gọi H là hình chiếu của S trên $(ABCD)$.

$$\text{Vì } SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$$

nên $\triangle SHA = \triangle SHB = \triangle SHC = \triangle SHD$.

Suy ra $HA = HB = HC = HD$, mà $ABCD$ là hình chữ nhật nên H là giao điểm của AB và CD . Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $ABCD$ là SH . Ta có:

$$SH^2 = SA^2 - AH^2 = SA^2 - \frac{AC^2}{4}$$

$$= SA^2 - \frac{AB^2 + BC^2}{4}$$

$$= 2a^2 - \frac{4a^2 + a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

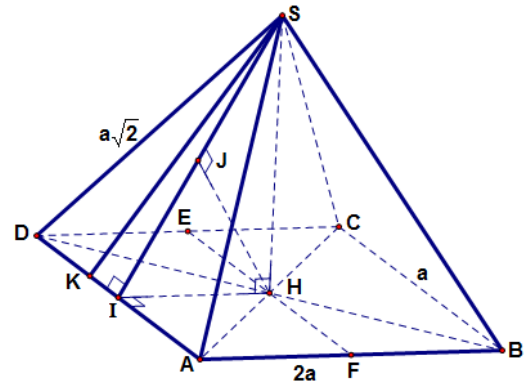
$$\text{Vậy } SH = \frac{3a^2}{4}.$$

b) Vì $EF \parallel AD \subset (SAD)$ nên $EF \parallel (SAD)$, mặt khác SK nằm trong (SAD) nên khoảng cách giữa EF và SK chính là khoảng cách giữa EF và (SAD) , đó cũng chính là khoảng cách từ H đến (SAD) . Vậy khoảng cách giữa EF và SK không phụ thuộc vào vị trí của K trên đường thẳng AD . Tiếp theo ta tính $d(EF; SK)$. Gọi I là trung điểm AD . Kẻ đường cao HJ của tam giác vuông SHI , khi đó $HJ \perp (SAD)$. Do đó $d(H; (SAD)) = HJ$. Ta có

$$HJ \cdot SI = SH \cdot HI, \quad SI^2 = SA^2 - AI^2 = 2a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}.$$

$$\text{Từ đó } HJ = \frac{SH \cdot HI}{SI} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \right) : \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Như vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào vị trí của K trên đường thẳng AD và bằng $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.



Câu 23.

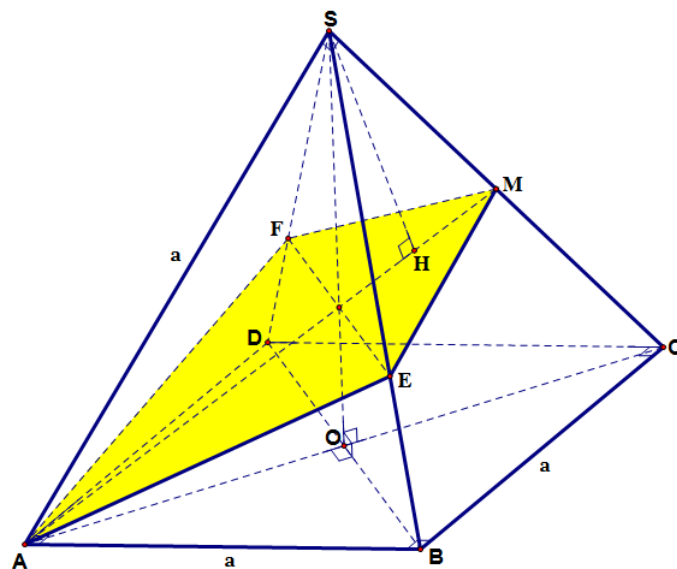
Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên hình chiếu của S trên $(ABCD)$ trùng với tâm O của hình vuông $ABCD$. Ta có:

$$\begin{cases} BD \perp AC \subset (SAC) \\ BD \perp SO \subset (SAC) \\ AC \cap SO = O. \end{cases}$$

Suy ra BD vuông góc với mặt phẳng (SAC) . Như vậy:

$$\begin{cases} BD \perp (SAC) \\ (P) \parallel BD. \end{cases}$$

Suy ra (P) vuông góc với (SAC) theo giao tuyến AM . Do đó hình chiếu của S trên (P) chính là hình chiếu H của S trên giao tuyến AM . Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (P) là $d(S, (P)) = SH$.



☑ Ta có: $2S_{\Delta SAM} = SH.AM$.

☑ Mặt khác do AM là trung tuyến của ΔSAC nên $2S_{\Delta SAM} = S_{\Delta SAC}$ (do hai tam giác này có cùng đường cao kẻ từ A và $SC = 2SM$).

☑ Ta có: $SA^2 + SC^2 = 2a^2 = AC^2$, suy ra tam giác SAC vuông cân tại S , do đó

$$S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}SA.SC = \frac{a^2}{2}.$$

☑ ΔSAM vuông tại A nên theo định lý Pitago, ta có:

$$AM^2 = SA^2 + SM^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}.$$

Như vậy:

$$SH.AM = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow SH \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \sqrt{5}SH = a \Leftrightarrow SH = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Khoảng cách từ S đến (P) là: $d(S, (P)) = SH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

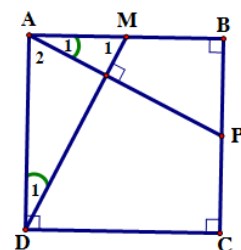
Lưu ý. Có thể tính SH như sau:

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 24.

Phân tích. Trước hết ta cần xét xem hai đường thẳng AN và DM có vuông góc với nhau hay không. Bạn đọc cần nhớ lại một kết quả quen thuộc ở hình học THCS đó là $DM \perp AP$, với P là trung điểm BC . Khi đó ta dễ dàng chứng minh được DM vuông góc với (ANP) , do đó $DM \perp AN$ và ta sẽ sử dụng cách 1 để dựng đoạn vuông góc chung.

Kết quả $DM \perp AP$ được chứng minh đơn giản như sau:



Ta có $\triangle ABP$ bằng $\triangle DAM$.

Suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{A_1}$. Do đó:

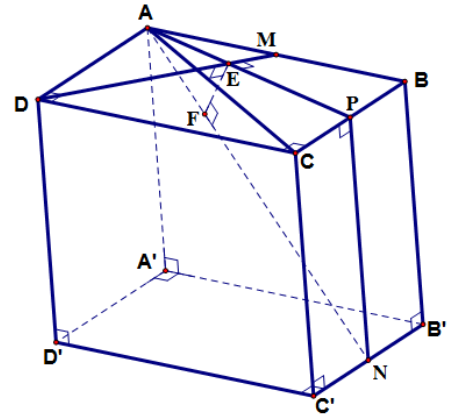
$$\widehat{A_1} + \widehat{M_1} = \widehat{D_1} + \widehat{M_1} = 90^\circ.$$

Suy ra $DM \perp AP$.

Giải. Gọi P là trung điểm của đoạn thẳng BC . Khi đó:

$$\begin{cases} DM \perp AP \subset (APN) \\ DM \perp PN \subset (APN) \\ AP \cap PN = P. \end{cases}$$

Suy ra $DM \perp (APN)$, do đó $DM \perp AN$. Gọi E là giao điểm của DM với AP . Vẽ EF vuông góc với AN tại F . Khi đó, do DM vuông góc với (APN) , mà EF nằm trong (APN) nên DM vuông góc với EF . Như vậy EF là đoạn vuông góc chung của DM và AN .



Câu 25. Phân tích. Đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nên AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$, $AD = 2a$. Để ý rằng $DB \perp BA$. Hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$ chứa BD là AC . Do AC không vuông góc với BD nên SC không vuông góc với BD , như vậy để dựng đoạn vuông góc chung ta không sử dụng cách 1 mà sử dụng cách 2, 3, 4.

Do $ABCD$ là nửa lục giác đều nên $\widehat{DBA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Ta có:

$$\begin{cases} BD \perp BA \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAB).$$

Vẽ đường thẳng qua C song song với BD , cắt AB tại K , khi đó CK vuông góc với (SAB) . Hình chiếu của SC trên (SAB) là SK . Vẽ BH vuông góc với SK tại H . Vẽ HJ song song với BD (J thuộc SC). Vẽ IJ song song với BH (I thuộc BD). Khi đó IJ là đoạn vuông góc chung của BD và SC . Tiếp theo ta tính độ dài IJ . Do $BHJI$ là hình chữ nhật nên $IJ = BH$. Ta có tam giác ADB đồng dạng với tam giác BCK và $AD = 2a = 2BC$, suy ra

$$AB = 2BK \Rightarrow BK = \frac{a}{2}. \text{ Tam giác } KHB \text{ đồng dạng}$$

$$\text{với tam giác } KAS, \text{ suy ra: } \frac{BH}{SA} = \frac{KB}{KS} \Rightarrow BH = \frac{SA \cdot KB}{KS}.$$

$$\text{Ta có: } SA = a, KS = \sqrt{SA^2 + KA^2} = \sqrt{a^2 + \frac{9a^2}{4}} = \sqrt{\frac{13a^2}{4}}.$$

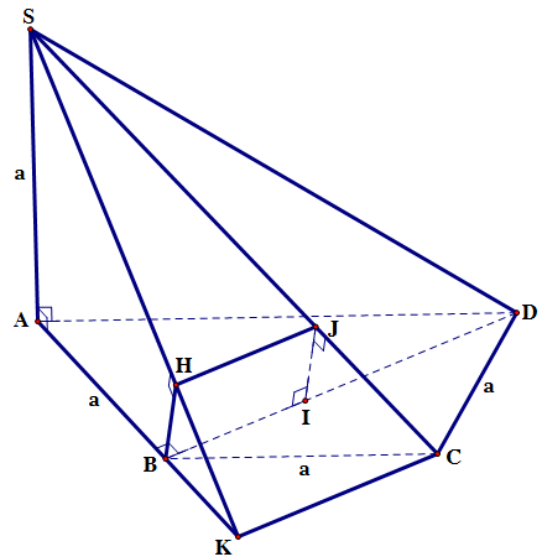
$$\text{Như vậy: } IJ = BH = \frac{SA \cdot KB}{KS} = a \cdot \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{13}}{2} = \frac{a}{\sqrt{13}}.$$

Lưu ý. Nếu sử dụng cách 2 thì ta tiến hành như sau:

☑ Mặt phẳng chứa SC và song song với BD là (SCK) .

☑ Ta xác định hình chiếu của BD trên (SCK) như sau:

- Trên BD chọn điểm B .
- Ta có (SCK) vuông góc với (SAK) theo giao tuyến SK nên chỉ cần vẽ đường thẳng đi qua B và vuông góc với giao tuyến SK thì sẽ có BH vuông góc với mặt phẳng (SCK) tại H hay H là hình chiếu của B trên (SCK) .
- Vẽ đường thẳng qua H song song với BD cắt SC tại J .



Khi đó hình chiếu của BD trên (SCK) là HJ và $HJ \cap SC = J$.

- ☑ Vẽ đường thẳng qua J song song với BH cắt BD tại I .
- ☑ Khi đó IJ cùng vuông góc với BD và SC nên là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng này.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

Câu 1. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

- A. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì nằm trong mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.
- B. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.
- C. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó vuông góc với cả hai đường thẳng đó.
- D. Các mệnh đề trên đều sai.

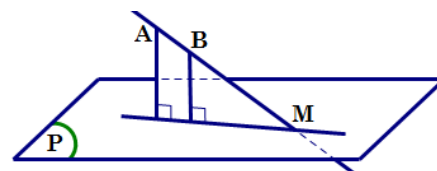
Câu 2. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm A bất kì trên a đến (P) .
- B. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm M bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.
- C. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là khoảng cách từ một điểm M thuộc mặt phẳng (P) chứa a và song song với b đến một điểm N bất kì trên b .
- D. Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau và vuông góc với nhau thì đường vuông góc chung của chúng nằm trong mặt phẳng (P) chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

Câu 3. Giả sử đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (P) tại M .

Trên Δ lấy hai điểm A và B . Khi đó $\frac{d(A; (P))}{d(B; (P))}$ bằng

- A. $\frac{2AM}{BM}$.
- B. $\frac{AM}{2BM}$.
- C. $\frac{AM}{BM}$.
- D. $\frac{2AM}{3BM}$.



Câu 4. Hình tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = 3$ và AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Diện tích của tam giác BCD bằng:

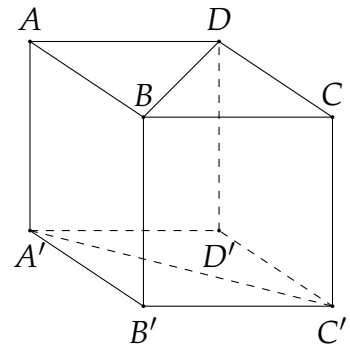
- A. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.
- B. $\frac{9\sqrt{2}}{3}$.
- C. 27.
- D. $\frac{27}{2}$.

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Chiều cao của hình chóp bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.
- B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.
- D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 6 (Câu 21, đề tham khảo lần 1 bộ GD-ĐT, 2018).

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng



- A. $\sqrt{3}a$. B. a . C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. D. $\sqrt{2}a$.

Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$ có BCD là tam giác đều cạnh a , $AB \perp (BCD)$ và $AB = a$. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$ có BCD là tam giác đều cạnh a , $AB \perp (BCD)$ và $AB = a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ADC) .

- A. $a\sqrt{\frac{7}{3}}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 9 (HK2 khối 11, Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên, 2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm B đến (SAC) .

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 10. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh a . Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 11 (Thi thử THPT-Lần 7 năm 2018).

Số mặt phẳng cách đều tất cả các đỉnh của một hình lăng trụ tam giác là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $\triangle SAB$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ACD) .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a}{2}$.

Câu 13. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh a . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) .

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

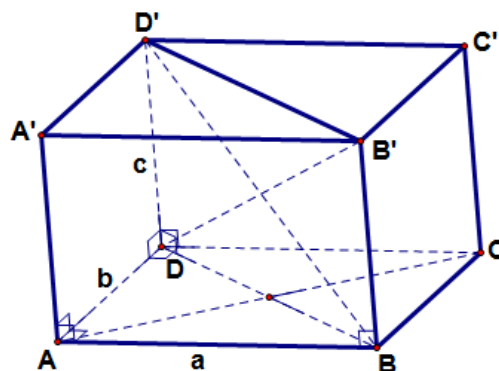
Câu 14 (Đề HK2 khối 11, 2017 - 2018 Sở GD & ĐT Hà Nam).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Biết SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. $d(S, (ABCD)) = d(A, (SBC))$. B. $BD \perp (SAC)$.
C. Góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng 45° . D. $AC \perp (SBD)$.

Câu 15. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Trong các kết quả sau, kết quả nào sai?

- A. $BD' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
 B. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC' bằng b .
 C. Khoảng cách từ A đến $(BB'D')$ bằng $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
 D. Khoảng cách từ A đến $(BB'D'D)$ bằng $\frac{abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.



Câu 16. Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$ và các cạnh đều bằng a . Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$.

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{12}}$. D. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 90^\circ$. Tính chiều cao của hình chóp theo a .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{2a}{3}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD .

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{8}$. D. $\frac{a}{2}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $\triangle SAB$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .

- A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. B. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. C. $\frac{a\sqrt{7}}{21}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 20 (HK2 khối 11, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai 2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với mặt đáy. Biết $SA = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

- A. $a\sqrt{2}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{a}{2}$.

Câu 21 (Đề TT-THPTQG, Chuyên Biên Hòa, Hà Nam 2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của SD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM .

- A. $\frac{3a}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 22. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy là hình vuông cạnh a , chiều cao $AA_1 = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến (BDD_1B_1) .

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 23. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy là hình vuông cạnh a , chiều cao $AA_1 = 2a$. Tính khoảng cách từ D_1 đến (DA_1C_1) .

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{2a}{3}$. D. $\frac{3a}{2}$.

Câu 24. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy là hình vuông cạnh a , chiều cao $AA_1 = 2a$. Tính khoảng cách từ B đến A_1C .

- A. $\frac{a\sqrt{30}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{30}}{6}$. C. $\frac{a\sqrt{30}}{12}$. D. $\frac{a\sqrt{10}}{6}$.

Câu 25 (HK2 khối 11, Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên, 2018).

Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 120^\circ$ và $AC' = a\sqrt{5}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BD là

- A. $\frac{6a}{\sqrt{17}}$. B. $\frac{8a}{\sqrt{17}}$. C. $\frac{2a}{\sqrt{17}}$. D. $\frac{10a}{\sqrt{17}}$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $SD = a\sqrt{7}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB . Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (MND) .

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 27 (Đề KSCL Toán 12 lần 2 năm 2017 - 2018, Phan Chu Trinh, Đắk Lắk).

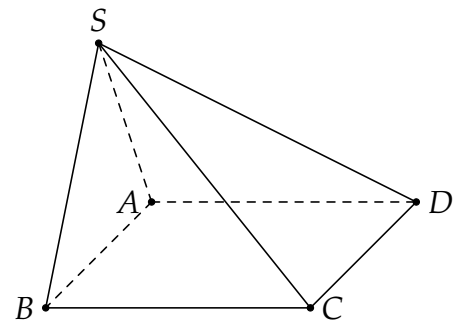
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB .

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. C. $2a$. D. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 28 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 104).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{28}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$.



Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy, $\widehat{BAD} = 120^\circ$, M là trung điểm của cạnh BC và $\widehat{SMA} = 45^\circ$. Tính theo a khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC) .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A . Mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và (SBC) vuông góc với mặt đáy. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = h$. Gọi M là trung điểm của SD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM theo a và h .

- A. $\frac{h.a}{\sqrt{a+h}}$. B. $\frac{h.a}{\sqrt{a^2+h^2}}$. C. $\frac{2h.a}{\sqrt{a^2+h^2}}$. D. $\frac{2h.a}{\sqrt{a+h}}$.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 B	5 D	9 A	13 B	17 B	21 B	25 C	29 B
2 C	6 B	10 C	14 A	18 A	22 D	26 C	
3 C	7 C	11 D	15 D	19 A	23 C	27 B	30 C
4 A	8 D	12 B	16 A	20 C	24 B	28 C	31 B

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Xem lại dạng 18 ở trang 137 (cách 2) thấy rằng mệnh đề B đúng.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 2. Xem lại dạng 18 ở trang 137 (cách 2) thấy rằng mệnh đề C sai. Xem lại dạng 18 ở trang 137 (cách 1) thấy rằng mệnh đề D đúng. Để thấy các mệnh đề A, B là những mệnh đề đúng.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 3.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 4. Do $\triangle BCD$ là tam giác đều cạnh $\sqrt{18}$ nên có diện tích là

$$S_{\triangle BCD} = \frac{18\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

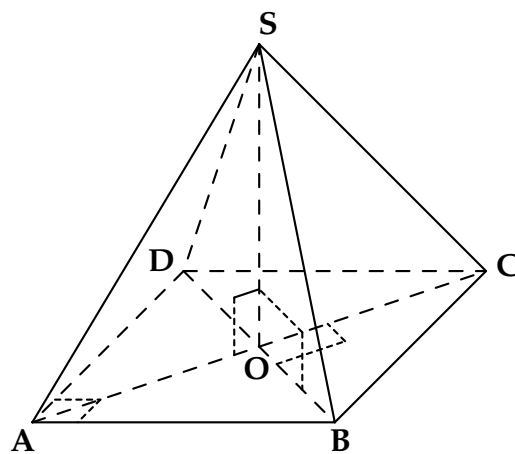
Chọn đáp án **(A)**

Câu 5.

Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau. Gọi O là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$. Khi đó các tam giác SOA, SOB, SOC, SOD bằng nhau nên bốn đoạn thẳng OA, OB, OC, OD bằng nhau. Suy ra O trùng với tâm của hình vuông $ABCD$, hay O là giao điểm của AC và BD . Vậy chiều cao của hình chóp là:

$$\begin{aligned} SO &= \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**

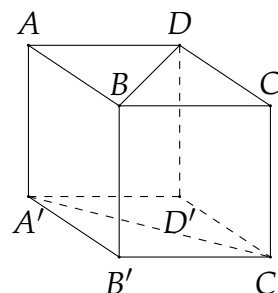


Câu 6.

Do BD và $A'C'$ lần lượt nằm trên hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ song song với nhau nên $d(A'C', BD) = d((ABCD), (A'B'C'D'))$.

Mà $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên ta có $d((ABCD), (A'B'C'D')) = AA' = a$.

Vậy $d(A'C', BD) = a$.



Chọn đáp án **(B)**

Câu 7.

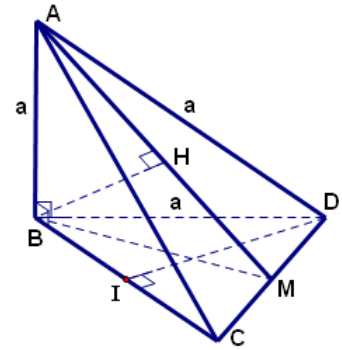
Gọi I là trung điểm BC . Ta có:

$$\begin{cases} DI \perp BC \\ DI \perp BA \end{cases}$$

Suy ra $DI \perp (ABC)$.

Do đó:

$$d(D; (ABC)) = DI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Chọn đáp án **C**

Câu 8.

Gọi M là trung điểm DC .

$$\begin{cases} CD \perp BM \\ CD \perp AB \end{cases}$$

Suy ra $CD \perp (ABM) \Rightarrow (ABM) \perp (ACD)$.

Lại có $(ABM) \cap (ACD) = AM$.

Kẻ $BH \perp AM$ tại H . Khi đó $BH \perp (ACD)$.

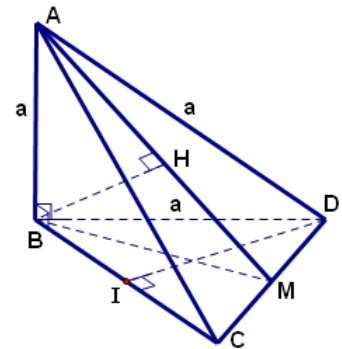
Bởi vậy: $d(B; (ACD)) = BH$.

Trong tam giác vuông ABM , ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{BH^2} &= \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } d(B; (ACD)) = BH = a \cdot \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Chọn đáp án **D**



Câu 9.

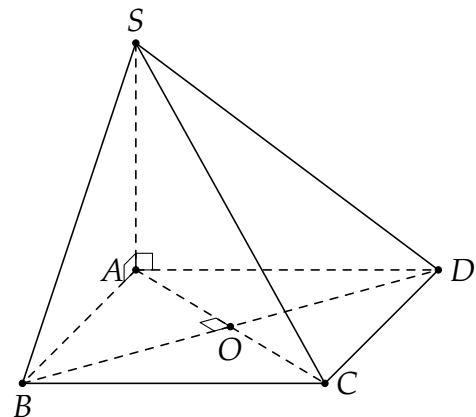
Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BD$.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$.

Do đó, $BD \perp (SAC)$.

$$\text{Vậy, } d(B, (SAC)) = BO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

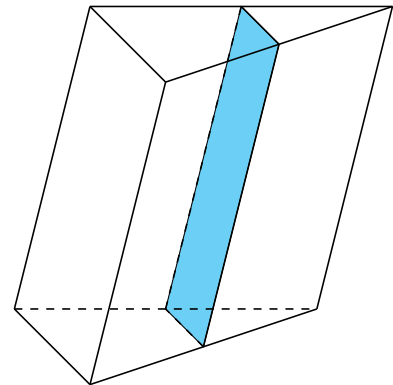
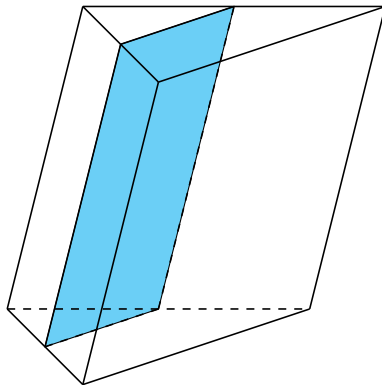
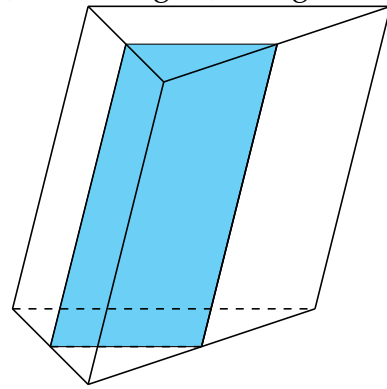
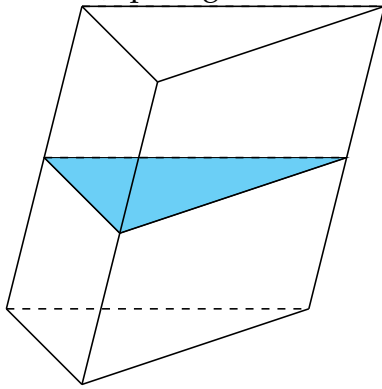


Chọn đáp án **A**

Câu 10. Trong mặt phẳng (ABC) , hạ AM vuông góc với BC ($M \in BC$). Khoảng cách từ A đến BC là $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án **C**

Câu 11. Có 4 mặt phẳng cách đều tất cả các đỉnh của một hình lăng trụ tam giác.



Chọn đáp án **(D)**

Câu 12. Gọi H là trung điểm của AB . Do tam giác SAB đều cạnh a nên $SH \perp AB$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, mà (SAB) vuông góc với $(ABCD)$ theo giao tuyến AB nên $SH \perp (ABCD)$. Vậy khoảng cách từ S đến $(ABCD)$ là $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 13.

Gọi M là trung điểm BC . Gọi O là hình chiếu của A trên (BCD) . Do $AB=AC=AD$ nên $\triangle AOB = \triangle AOC = \triangle AOD$ (c-g-c). Suy ra $OB=OC=OD$, suy ra O là tâm của $\triangle BCD$. Do $\triangle BCD$ đều nên O cũng là trọng tâm của $\triangle BCD$, suy ra $O \in DM$. Khoảng cách từ A đến (BCD) là OA . Vì $\triangle BCD$ đều cạnh a nên:

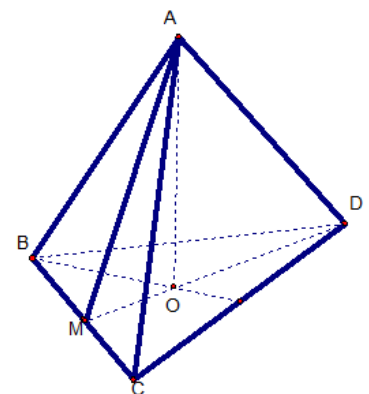
$$DM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OD = \frac{2}{3}DM = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Sử dụng định lý Pitago cho tam giác vuông OAD có

$$OA^2 = AD^2 - OD^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $d(A, (BCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án **(B)**



Câu 14.

Gọi H là trung điểm của AB . Vì tam giác (SAB) đều nên $SH \perp AB$. Vì $\begin{cases} SH \perp AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \end{cases}$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Gọi K là trung điểm của SB . Vì $\triangle SAB$ đều nên $AK \perp SB$ và $AK = SH$. Ta có

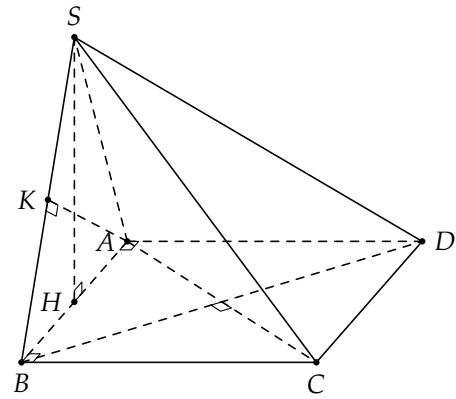
$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AK.$$

Suy ra $AK \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AK.$ (1)

Mặt khác $SH \perp (ABCD) \Rightarrow d(S, (ABCD)) = SH.$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d(S, (ABCD)) = d(A, (SBC)).$

Chọn đáp án **A**



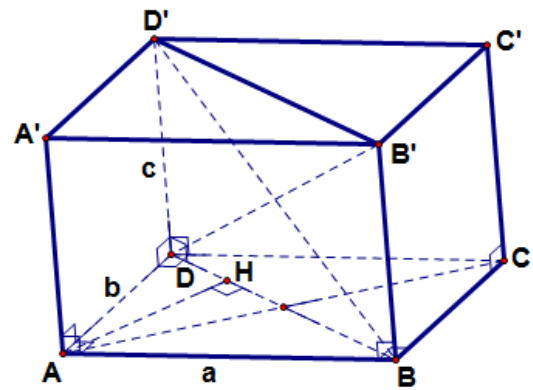
Câu 15.

Khẳng định A đúng, đây là công thức tính độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC' bằng độ dài đoạn vuông góc chung $BC = b$, do đó B đúng. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BD , khi đó dễ chứng minh được BH vuông góc với $(BB'D'D)$. Tam giác ABD vuông tại A với đường cao AH , ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}.$$

Vậy khoảng cách từ A đến $(BB'D'D)$ là:

$$d(A, (BB'D'D)) = AH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



Như thế khẳng định C đúng. Do $(BB'D) \equiv (BB'D'D)$ nên khẳng định D sai. Ta chọn D.

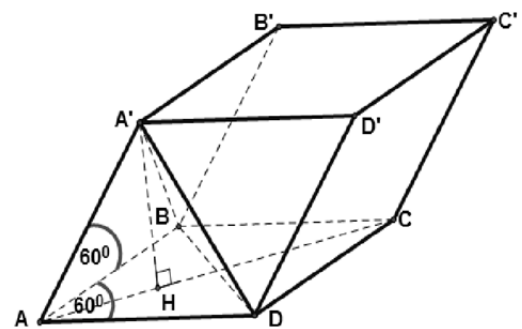
Chọn đáp án **D**

Câu 16.

Lưu ý rằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia. Từ giả thiết ta suy ra các tam giác $A'AD$, BAD , $A'AB$ là các tam giác cân cùng có góc ở đỉnh bằng 60° nên chúng là các tam giác đều. Vậy tứ diện $A'ABD$ có các cạnh cùng bằng a , hay $A'ABD$ là tứ diện đều. Khi đó hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ chính là trọng tâm H của tam giác đều ABD . Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ chính là độ dài $A'H$. Ta có:

$$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}. \text{ Vậy } A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn đáp án **A**

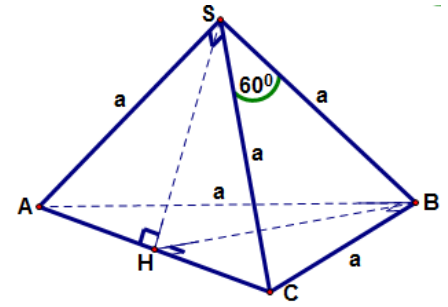


Câu 17.

Vì $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 60^\circ$ nên $\triangle SAB$, $\triangle SBC$ là các tam giác đều, suy ra $AB = BC = a$. Vì $SA \perp SC$ nên $AC^2 = SA^2 + SC^2 = 2a^2$, suy ra $AC^2 = BA^2 + BC^2$, do đó $\triangle ABC$ vuông tại B . Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC) . Khi đó HA, HB, HC lần lượt là hình chiếu của SA, SB, SC trên (ABC) , mà $SA = SB = SC$ nên $HA = HB = HC$, hay H là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Vì $\triangle ABC$ vuông tại B nên H chính là trung điểm của AC . Vậy chiều cao của hình chóp là

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án (B)



Câu 18.

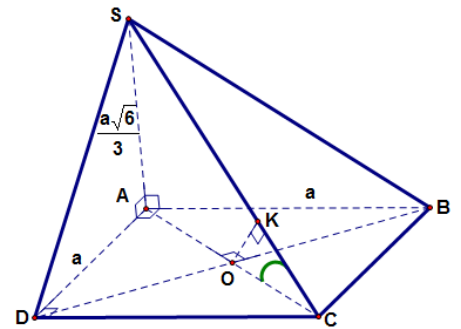
Ta có (SAC) là mặt phẳng chứa SC và vuông góc với BD . Gọi O là giao điểm của AC và BD . Trong (SAC) , từ O , kẻ $OK \perp SC$ tại K . Vì $BD \perp (SAC)$ mà $OK \subset (SAC)$ nên $BD \perp OK$. Vậy OK là đoạn vuông góc chung của SC và BD . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng độ dài của đoạn vuông góc chung OK . Ta có:

$$\begin{aligned} SC &= \sqrt{AS^2 + AC^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{3} + 2a^2} \\ &= \sqrt{\frac{8a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{8}{3}}. \end{aligned}$$

Vì $\triangle CKO$ đồng dạng với $\triangle CAS$ nên

$$\frac{CO}{SC} = \frac{OK}{SA} \Rightarrow OK = \frac{CO \cdot SA}{SC} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{6}}{2 \cdot 3 \cdot SC} = \frac{a^2 \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{6 \cdot 2 \sqrt{2} a} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Chọn đáp án (A)



Câu 19.

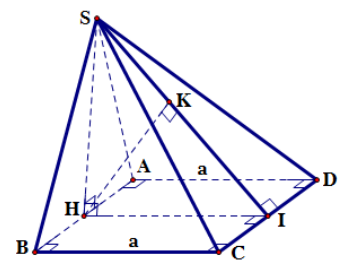
Gọi H, I lần lượt là trung điểm của AB và CD . Do tam giác SAB đều cạnh a nên $SH \perp AB$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, mà (SAB) vuông góc với $(ABCD)$ theo giao tuyến AB nên $SH \perp (ABCD)$. Ta có $CD \perp IH$ và $CD \perp SH$, suy ra $CD \perp (SHI)$, mà CD nằm trong (SCD) nên $(SCD) \perp (SHI)$. Trong $\triangle SHI$, kẻ HK vuông góc với SI tại K , khi đó vì (SHI) vuông góc với (SCD) theo giao tuyến SI nên $HK \perp (SCD)$. Ta có $AB \parallel CD \subset (SCD)$, suy ra $AB \parallel (SCD)$, do đó:

$$d(A, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HK.$$

Trong tam giác vuông SHI , ta có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}$.

Do đó: $d(A, (SCD)) = HK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án (A)



Câu 20.

Ta có $AB \parallel (SCD)$ nên

$$d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)).$$

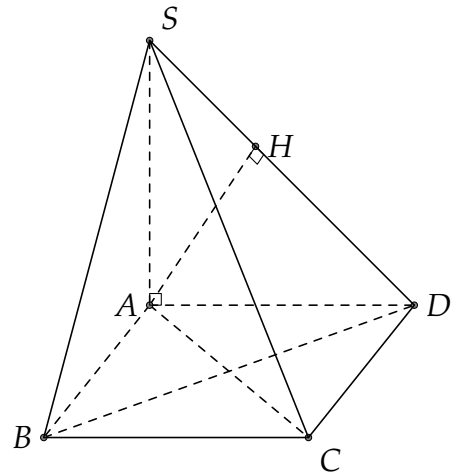
Kẻ $AH \perp SD$ tại H . Ta có

$$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH.$$

Suy ra $AH \perp (SCD)$ nên $d(A, (SCD)) = AH$.

$$AH = \frac{AS \cdot AD}{\sqrt{AH^2 + AD^2}} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy } d(AB, SC) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$



Chọn đáp án **C**

Câu 21.

Kẻ $AH \perp SD$ tại H .

Khi đó $AH \perp (SCD)$.

Vì $AB \parallel CD$ nên $AH \parallel (SCD)$.

Do đó

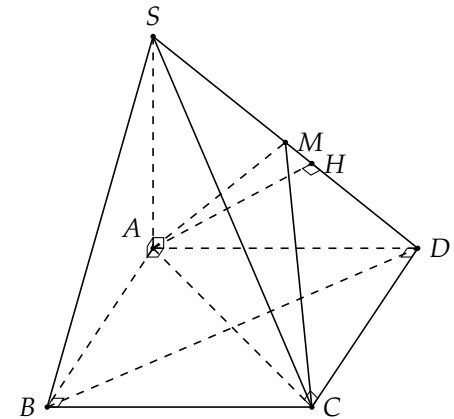
$$\begin{aligned} d(AB; CM) &= d(AB; (SCD)) \\ &= d(A; (SCD)) = AH. \end{aligned}$$

Xét tam giác SAD vuông tại A có

$SA = a\sqrt{3}$, $AD = a$. Suy ra:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2}.$$

$$\text{Do đó } AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Chọn đáp án **B**

Câu 22.

Trong $(ABCD)$ ta có $OA \perp BD$ ($O \in BD$). Vì AO cùng vuông góc với BD và OO_1 nên $OA \perp (BDD_1B_1)$, suy ra:

$$d(A, (BDD_1B_1)) = OA.$$

Tam giác vuông cân ABD cho ta

$$AO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án **D**

Câu 23.

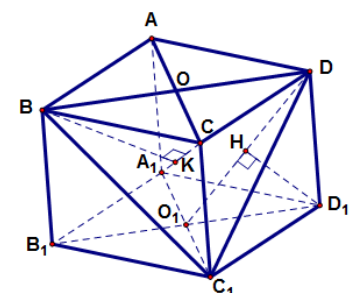
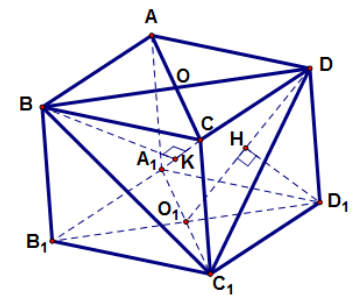
Gọi O_1 là tâm của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$. Vì $A_1D = C_1D = a\sqrt{2}$ nên tam giác DA_1C_1 cân tại D . Từ đó $A_1C_1 \perp O_1D$. Trong tam giác O_1D_1D , hạ $D_1H \perp O_1D$ ($H \in O_1D$). Ta có:

$$\begin{cases} D_1H \perp O_1D \\ D_1H \perp A_1C_1 \end{cases} \Rightarrow D_1H \perp (DA_1C_1).$$

Như thế $d(D_1; (DA_1C_1)) = D_1H$.

Tam giác O_1D_1D vuông tại D_1 nên:

$$\frac{1}{D_1H^2} = \frac{1}{D_1D^2} + \frac{1}{D_1O_1^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{\frac{a^2}{2}} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow D_1H = \frac{2a}{3}.$$



Chọn đáp án **C**

Câu 24.

Hạ $BK \perp A_1C$ ($K \in A_1C$).

Khi đó $d(B; A_1C) = BK$.

Ta có:

$$\begin{aligned} A_1B^2 &= A_1A^2 + AB^2 \\ &= 4a^2 + a^2 = 5a^2. \end{aligned}$$

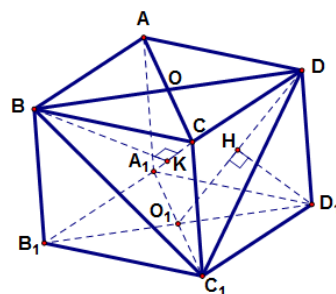
Chú ý rằng tam giác BCA_1 vuông tại B .

Từ đó:

$$\begin{aligned} \frac{1}{BK^2} &= \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BA_1^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{5a^2} = \frac{6}{5a^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } BK = \frac{a\sqrt{30}}{6}.$$

Chọn đáp án **B**



Câu 25. Gọi O, O' lần lượt là tâm của các hình $ABCD, A'B'C'D'$. Dựng $OK \perp AO'$ ($K \in AO'$).

Vì $ABCD$ là hình thoi và $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên

$$BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp OK.$$

Ta lại có $BD \parallel B'D' \Rightarrow OK \perp (AB'D')$.

Ta có $BD \parallel (AB'D')$ nên

$$d(BD, AB') = d(BD, (AB'D')) = OK.$$

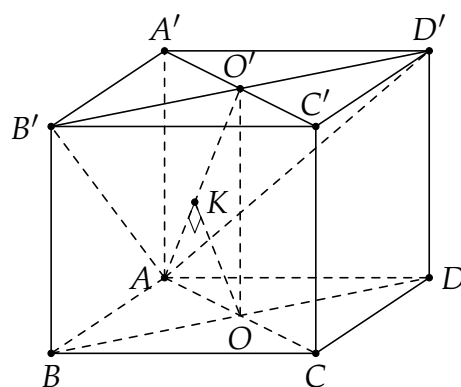
Do $ABCD$ là hình thoi và $\widehat{BAD} = 120^\circ$ nên $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a . Ta có

$$\begin{aligned} O'O &= C'C = \sqrt{C'A^2 - AC^2} \\ &= \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a. \end{aligned}$$

Xét hai tam giác đồng dạng $\triangle OKA$ và $\triangle O'OA$ ta có tỉ số

$$\begin{aligned} \frac{OK}{O'O} &= \frac{OA}{O'A} \text{ nên} \\ OK &= \frac{OA \cdot O'O}{O'A} = \frac{OA \cdot O'O}{\sqrt{OA^2 + O'O^2}} \\ &= \frac{\frac{a}{2} \cdot 2a}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (2a)^2}} = \frac{2a}{\sqrt{17}}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**



Câu 26.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD).$$

Mà $MN \parallel AB$ nên $MN \perp (SAD)$.

Kẻ $SH \perp DM$ tại H . Vì $(MND) \perp (SAD)$,

$$(MND) \cap (SAD) = DM, SH \perp DM$$

nên $SH \perp (MND)$, do đó:

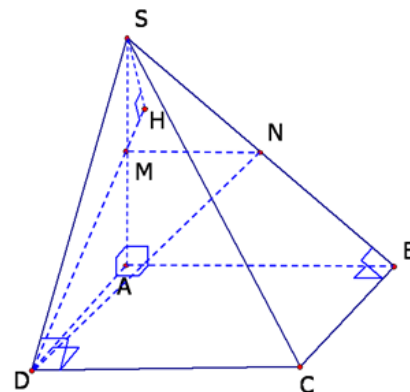
$$d(S, (MND)) = SH. \text{ Ta có:}$$

$$SA^2 = SD^2 - AD^2 = 7a^2 - 3a^2 = 4a^2.$$

$$\text{Suy ra } MA = \frac{SA}{2} = a.$$

Do đó:

$$\tan \widehat{SMH} = \frac{AD}{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$



Như vậy $\widehat{SMH} = 60^\circ$. Tam giác SHM có $\widehat{SHM} = 90^\circ \Rightarrow SH = SM \cdot \sin \widehat{SMH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án **C**

Câu 27.

Vì $SA \perp (ABC)$ nên A là hình chiếu của S xuống mặt phẳng (ABC) . Do đó góc SB và (ABC) là góc giữa SB và AB bằng $\widehat{ABS} = 60^\circ$. Ta có $SA = AB \tan \widehat{ABS} = a\sqrt{3}$. Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBD$. Ta có $AC \parallel BD$ nên $AC \parallel (SBD)$. Do đó $d(AC, SB) = d(AC, (SBD)) = d(A, (SBD))$. Gọi M là trung điểm BD và H là hình chiếu của A lên SM . Vì $\triangle ABC$ đều nên ABD cũng là tam giác đều. Ta có

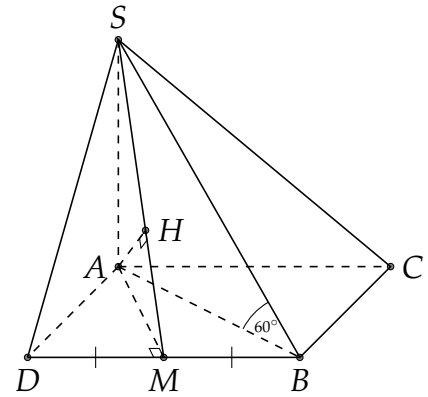
$$\begin{cases} BD \perp AM \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAM) \Rightarrow BD \perp AH.$$

Lại có $AH \perp SM$. Cho nên $AH \perp (SBD)$.

Vậy $d(AC, SB) = d(A, (SBD)) = AH$.

$$\text{Ta có } AH = \sqrt{\frac{SA^2 \cdot AM^2}{SA^2 + AM^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}. \text{ Vậy } d(AC, SB) = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Chọn đáp án **B**



Câu 28.

Gọi H và I lần lượt là trung điểm AB và AD . Ta có $HI \perp AC$ tại M . Ta có $\triangle SAB$ đều nên

$$SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; HM = \frac{BD}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Kẻ $HK \perp SM$ ta có $d(H, (SAC)) = HK$.

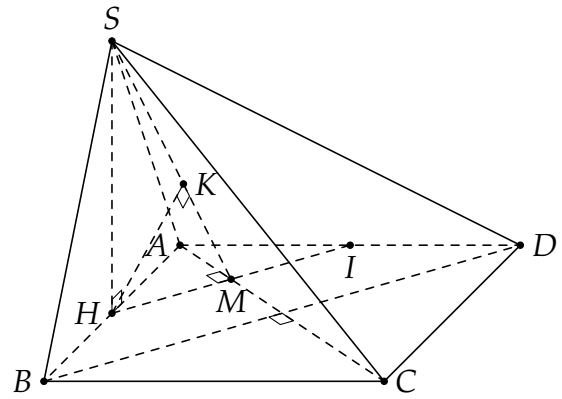
Ta có $d(B, (SAC)) = 2d(H, (SAC)) = 2HK$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{\frac{3}{4}a^2} + \frac{1}{\frac{a^2}{8}} = \frac{28}{3a^2}.$$

$$\text{Suy ra } HK = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

$$\text{Vậy } d(B, (SAC)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Chọn đáp án **C**



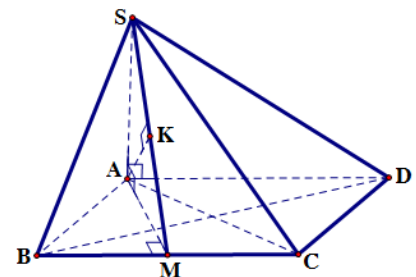
Câu 29.

Ta có $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a , tam giác SMA vuông cân tại A , $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SA$. Ta có $AD \parallel BC$, mà đường thẳng BC nằm trong mặt phẳng (SBC) , suy ra $AD \parallel (SBC)$, do đó: $d(D, (SBC)) = d(A, (SBC))$.

Vì BC vuông góc với AS và AM nên $BC \perp (SAM)$, dẫn tới (SAM) vuông góc với (SBC) theo giao tuyến SM . Như vậy $d(A, (SBC)) = AK$, với K là hình chiếu của A trên SM . Tóm lại:

$$d(D, (SBC)) = AK = \frac{1}{2}SM = \frac{\sqrt{AS^2 + AM^2}}{2} = \frac{\sqrt{3a^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Chọn đáp án **B**



Câu 30.

Gọi H là trung điểm BC .

Khi đó: $SH \perp BC$, $AH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.

Ta có (SBC) vuông góc với (ABC) theo giao tuyến BC , đường thẳng SH nằm trong (SBC) và vuông góc với giao tuyến BC nên SH vuông góc với (ABC) . Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SA . Khi đó $KH \perp SA$.

Ta có:

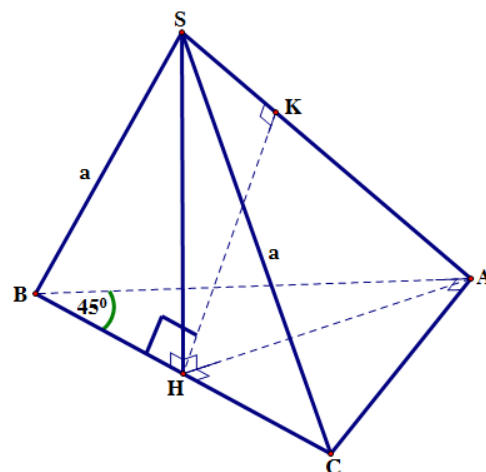
$$\begin{cases} BC \perp SH \subset (SHA) \\ BC \perp AH \subset (SHA) \\ SH \cap AH = H \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHA) \Rightarrow BC \perp HK.$$

Như vậy HK là đường vuông góc chung của BC và SA , do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là $d(SA, BC) = HK$. Trong tam giác vuông SHA , ta có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HA^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Như vậy: $d(SA, BC) = HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án **C**

**Câu 31.**

Ta có:

$$\begin{cases} AB \not\subset (SCD) \\ AB \parallel CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow AB \parallel (SCD).$$

Như vậy (SCD) là mặt phẳng chứa MC và song song với AB nên:

$$d(AB, CM) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)).$$

Vẽ AH vuông góc với SD tại H . Khi đó CD vuông góc với DA mà DA là hình chiếu của AH trên $(ABCD)$ nên $CD \perp AH$. Ta có:

$$\begin{cases} AH \perp CD \subset (SCD) \\ AH \perp SD \subset (SCD) \\ CD \cap SD = D \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD).$$

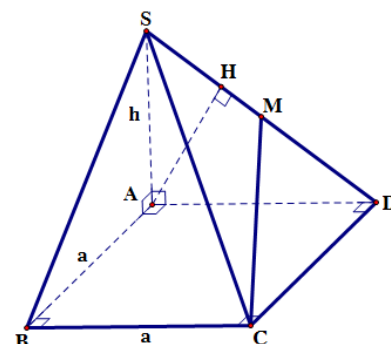
Như vậy: $d(A, (SCD)) = AH$. Trong tam giác vuông SAD , ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{h^2 + a^2}{h^2 a^2} \Rightarrow AH = \frac{h.a}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

$$\text{Tóm lại: } d(AB, CM) = \frac{h.a}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

Lưu ý. Để thấy rằng (SDC) vuông góc với (SDA) theo giao tuyến SD nên vận dụng định lí 3 (ở trang 93), ta chỉ cần vẽ đường thẳng qua A và vuông góc với giao tuyến SD tại H là có ngay $AH \perp (SCD)$.

Chọn đáp án **B**



ÔN TẬP CHƯƠNG

A. BỘ ĐỀ SỐ 1

1. Đề bài

Câu 1 (Hàm Rồng - Thanh Hóa, Lần 1, 2018).

Cho a, b, c là các đường thẳng. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Nếu $a \perp b$ và mặt phẳng (α) chứa a , mặt phẳng β chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.
- B. Cho $a \perp b$. Mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a .
- C. Cho $a \perp b, a \subset (\alpha)$. Mọi mặt phẳng (β) chứa b và vuông góc a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.
- D. Cho $a \parallel b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c , trong đó $c \perp a, c \perp b$ thì đều vuông góc với mặt phẳng (a, b) .

Câu 2 (Đề HK2, Sở GD và ĐT, Thái Bình, 2018).

Trong không gian, mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Côsin của góc giữa hai đường thẳng trong không gian có thể là một số âm.
- B. Góc giữa hai đường thẳng thuộc khoảng $(0^\circ; 90^\circ)$.
- C. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
- D. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và một đường thẳng nằm trong mặt phẳng.

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b là một đường thẳng d vừa vuông góc với a vừa vuông góc với b .
- B. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn nối hai điểm bất kì lần lượt thuộc hai đường thẳng ấy.
- C. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b luôn luôn nằm trong mặt phẳng vuông góc với a và chứa đường thẳng b .
- D. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b là một đường thẳng d vừa vuông góc với a vừa cắt b .

Câu 4. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến a . Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) phải là góc nào sau đây?

- A. Góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
- B. Góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng đó và cắt đường thẳng a .
- C. Góc giữa hai đường thẳng b và b' , trong đó b nằm trong (P) , vuông góc với a , còn b' là hình chiếu vuông góc của b trên mặt phẳng (Q) .
- D. Góc giữa đường thẳng b vuông góc với (P) và hình chiếu của b trên mặt phẳng (Q) .

Câu 5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{BC'}$ theo các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

- | | |
|---|--|
| A. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. | B. $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$. |
| C. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$. | D. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$. |

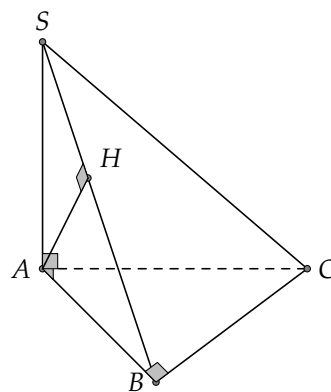
Câu 6. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Đường thẳng nào vuông góc với a thì vuông góc với (P) .
- B. Đường thẳng song song với a thì song song với (P) .
- C. Đường thẳng nào vuông góc với (P) thì vuông góc với a .
- D. Đường thẳng nào vuông góc với (P) thì cắt a .

Câu 7 (Đề HK2, Sở GD và ĐT, Thái Bình, 2018).

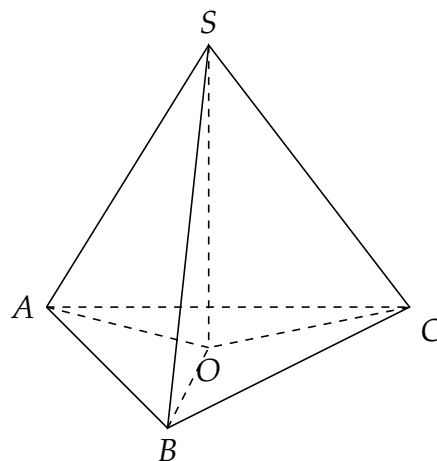
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy (ABC) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.
- B. $AH \parallel BC$.
- C. $AH \perp SC$.
- D. Tam giác SBC vuông.



Câu 8. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính tan của góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy của hình chóp.

- A. $2\sqrt{2}$.
- B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- C. $\sqrt{2}$.
- D. $\sqrt{3}$.

**Câu 9 (HK2 năm học 2016-2017, Chuyên Hà Nội - Amsterdam, Hà Nội).**

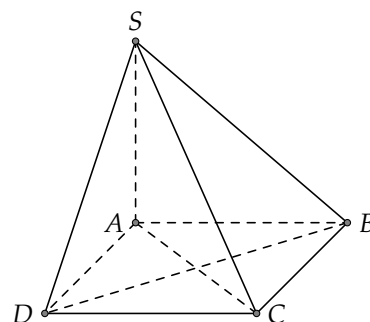
Cho tứ diện $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Gọi AH là đường cao của tam giác SAB . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $AH \perp SC$.
- B. $AH \perp BC$.
- C. $SA \perp BC$.
- D. $AB \perp SC$.

Câu 10 (Đề HK2, Sở GD và ĐT, Thái Bình, 2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy; $SA = AB = a$. Gọi φ là góc giữa SB và mặt phẳng $mp(SAC)$, tính φ ?

- A. $\varphi = 60^\circ$.
- B. $\varphi = 30^\circ$.
- C. $\varphi = 45^\circ$.
- D. Đáp án khác.

**Câu 11 (Đề thi HK2 khối 11, Lương Phú, Thái Nguyên 2017).**

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ S tới mặt phẳng đáy là

- A. a .
- B. $\frac{3a}{2}$.
- C. $2a$.
- D. $\frac{2a}{3}$.

Câu 12 (Hàm Rồng - Thanh Hóa, Lần 1, 2018).

Tính số đo góc giữa hai đường thẳng AC và BD của tứ diện đều $ABCD$.

- A. 90° .
- B. 30° .
- C. 60° .
- D. 45° .

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm BD , G là trọng tâm tam giác ABC . Vẽ hình bình hành $ADCE$. Đẳng thức nào sau đây là **đúng**?

- A. $\vec{IE} = 3\vec{IG}$.
- B. $\vec{IG} = 3\vec{IE}$.
- C. $\vec{IE} = 2\vec{IG}$.
- D. $\vec{IG} = 2\vec{IE}$.

Câu 14. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Khoảng cách từ tâm O của đáy đến một mặt bên là:

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 15 (Đề Toán PEN I, đề 01). Cho tứ diện đều $ABCD$ có khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng a . Cạnh của tứ diện có độ dài bằng?

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 16 (Hàm Rồng - Thanh Hóa, Lần 1, 2018).

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B , AH là đường cao của tam giác SAB . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $AH \perp BC$. B. $AH \perp AC$. C. $AH \perp SC$. D. $SA \perp BC$.

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Câu 18 (Chuyên Bắc Ninh, Lần 2, 2018).

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông C . Gọi H hình chiếu của S lên (ABC) . Xác định vị trí của H .

- A. H là trung điểm của AB . B. H là trọng tâm tam giác ABC .
C. H là trực tâm tam giác ABC . D. H là trung điểm cạnh AC .

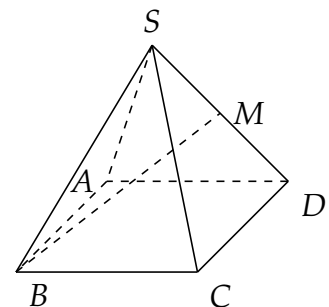
Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = BC = BD$, Gọi M và N là trung điểm của AB và CD . Khi đó CD vuông góc với mặt phẳng

- A. (ABD) . B. (ABC) . C. (ABN) . D. (CMD) .

Câu 20 (Câu 25, đề tham khảo lần 1 bộ GD-ĐT, 2018).

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên). Tính tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.



Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = \frac{a}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) .

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó $SA = AB = BC = 1$ và SA, AB, BC đôi một vuông góc. Khoảng cách giữa 2 điểm S và C nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

- A. $\sqrt{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. 2. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Tính giá trị của

$$T = \left| \frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC} + \frac{\vec{AD}}{AD} \right| \text{ bằng}$$

- A. $T = 3$. B. $T = \sqrt{3}$. C. $T = 1$. D. $T = \sqrt{2}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $\triangle SAB$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ trung điểm H của AB đến mặt phẳng (SCD) .

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

B. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

C. $\frac{a\sqrt{7}}{21}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm AD và BC ; M, N lần lượt nằm trên AB và DC sao cho $AM = 2MB$; $DN = 2NC$. Biết biểu diễn $\vec{EF} = m\vec{EM} + n\vec{EN}$ là duy nhất. Tính $m + n$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{1}{4}$.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 C	4 A	7 B	10 B	13 A	16 B	19 C	22 B	25 B
2 C	5 D	8 A	11 A	14 A	17 A	20 D	23 B	
3 B	6 C	9 D	12 A	15 B	18 A	21 A	24 A	

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Chọn đáp án **C**

Câu 2. Theo định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng.

Chọn đáp án **C**

Câu 3.

Chọn đáp án **B**

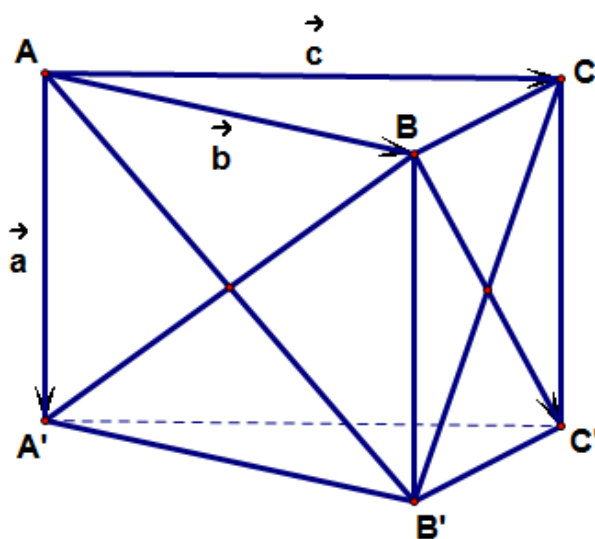
Câu 4. Dễ thấy C, D sai trong trường hợp (P) và (Q) vuông góc với nhau.

Chọn đáp án **A**

Câu 5.

Ta có:

$$\begin{aligned}\vec{BC'} &= \vec{BB'} + \vec{BC} \\ &= \vec{a} + \vec{AC} - \vec{AB} \\ &= \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án **D**

Câu 6.

Chọn đáp án **C**

Câu 7. Theo giả thiết ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$. Vậy khẳng định “ $AH \parallel BC$ ” là sai.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 8.

Gọi M là trung điểm BC . Khi đó BC vuông góc với MA và vuông góc với MS nên góc giữa mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (SBC) là $\widehat{SMO}$. Ta có:

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

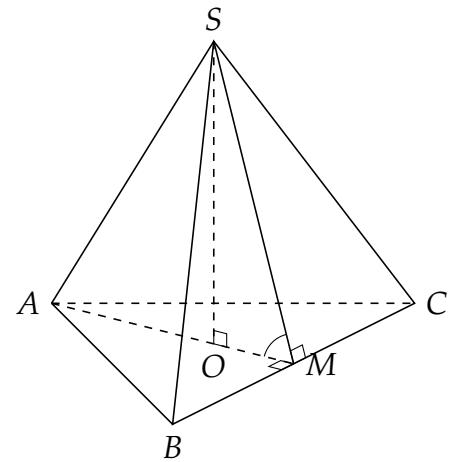
$$OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}, SO = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Vậy } \tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{MO}.$$

$$\text{Hay } \tan \widehat{SMO} = a\sqrt{\frac{2}{3}} : \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Hay } \tan \widehat{SMO} = 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **(A)**



Câu 9.

$BC \perp SA$ do $SA \perp (ABC)$.

Vậy $SA \perp BC$ đúng.

$\triangle ABC$ vuông tại $B \Rightarrow BC \perp AB$.

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

Suy ra $BC \perp AH$.

Vậy $AH \perp BC$ đúng.

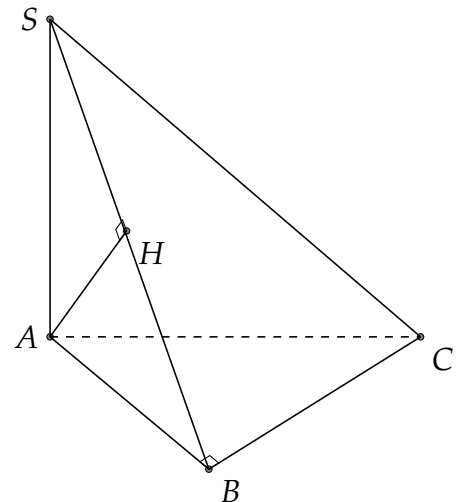
$$\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC).$$

Suy ra $AH \perp SC$.

Vậy $AH \perp SC$ đúng.

Do đó $AB \perp SC$ sai.

Chọn đáp án **(D)**



Câu 10.

Gọi $O = AC \cap BD$. Theo giả thiết, ta có $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$. Do đó, góc giữa SB và (SAC) là góc $\widehat{BSO}$. Xét tam giác BSO có

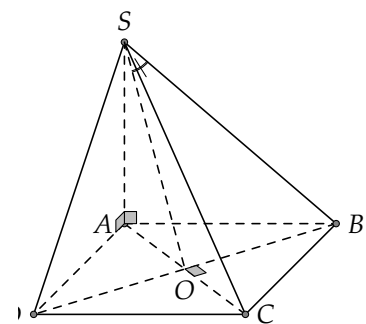
$$OB = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Xét tam giác SAB có

$$SB^2 = SA^2 + AB^2 = 2a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó, } \sin \varphi = \frac{OB}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ.$$

Chọn đáp án **(B)**

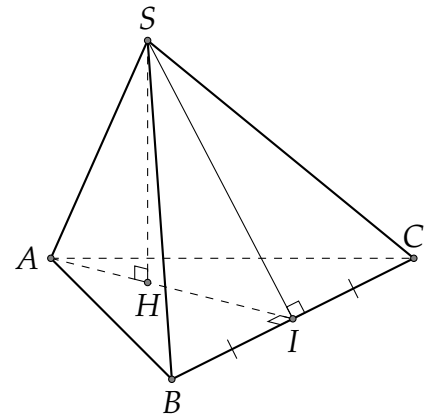


Câu 11.

Gọi I là trung điểm cạnh BC , H là hình chiếu của S trên (ABC) . Khi đó $SH \perp (ABC)$. Ta có

$$AI = \frac{3a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}AI = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } SH = d(S; (ABC)) = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a.$$



Chọn đáp án **A**

Câu 12.

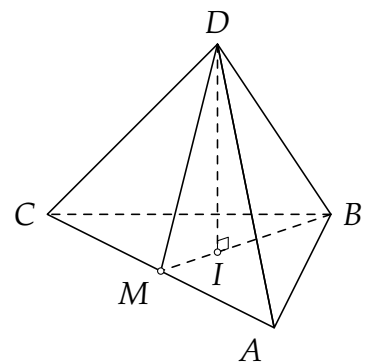
Gọi I là tâm của tam giác đều ABC .

Khi đó $DI \perp (ABC)$. Gọi M là trung điểm AC . Ta có

$$\begin{cases} AC \perp BM \\ AC \perp DI \text{ (do } DI \perp (ABC)) \end{cases}$$

Suy ra $AC \perp (MBD) \Rightarrow AC \perp BD$.

Vậy $(AC, BD) = 90^\circ$.



Chọn đáp án **A**

Câu 13.

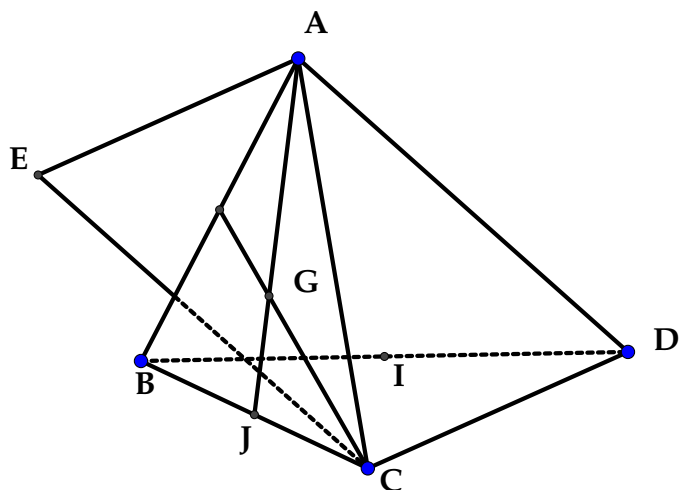
Ta có

$$\vec{IG} = \frac{1}{3}(\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}).$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} \vec{IE} &= \vec{ID} + \vec{DE} \\ &= -\vec{IB} + \vec{DC} + \vec{DA} \\ &= -\vec{IB} + \vec{IC} - \vec{ID} + \vec{IA} - \vec{ID} \\ &= \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = 3\vec{IG}. \end{aligned}$$

Như vậy $\vec{IE} = 3\vec{IG}$.



Chọn đáp án **A**

Câu 14.

Chọn đáp án **A**

Câu 15.

Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC , suy ra $GA \perp (BCD)$.

Gọi M là trung điểm của BD . Đặt $AC = x$ thì

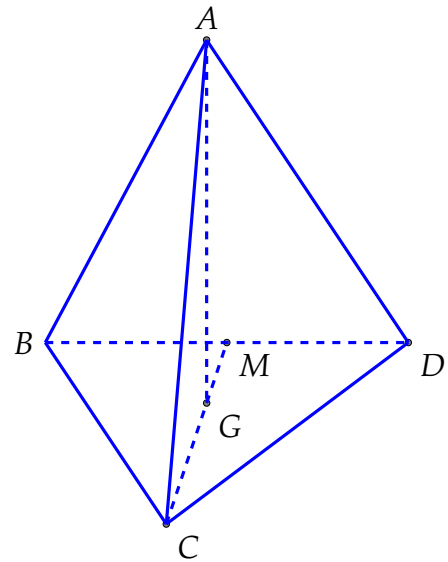
$$GC = \frac{2}{3}CM = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

Ta lại có $AC^2 - GC^2 = GA^2$.

Suy ra

$$x^2 - \frac{x^2}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{3a^2}{2}.$$

$$\text{Do đó } x = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$



Chọn đáp án **B**

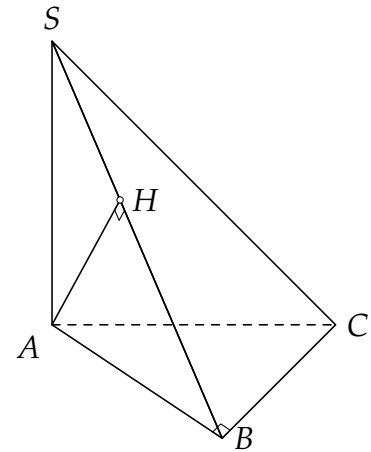
Câu 16.

Ta có $AH \perp (SBC)$.

Suy ra $AH \perp BC$ và $AH \perp SC$.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Vậy khẳng định **sai** là $AH \perp AC$.



Chọn đáp án **B**

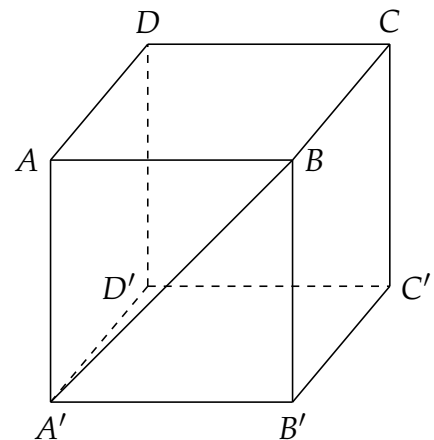
Câu 17.

Do $CD \parallel AB$ nên

$$(BA', CD) = (BA', AB).$$

Do $ABB'A'$ là hình vuông

$$\text{nên } (BA', AB) = 45^\circ.$$



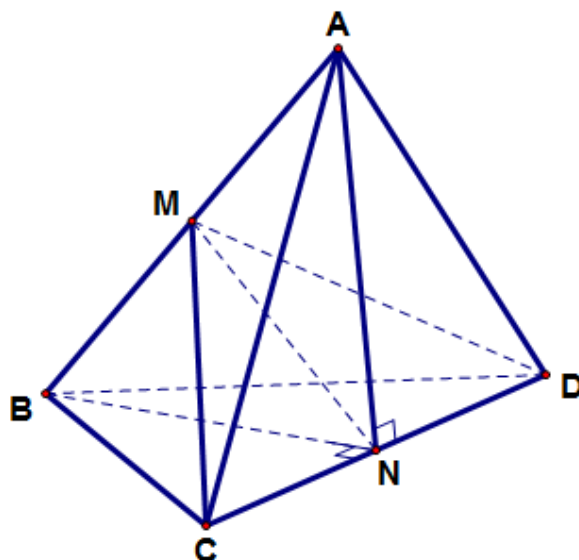
Chọn đáp án **A**

Câu 18. Vì $SA = SB = SC$ nên hình chiếu của S lên (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Hơn nữa, tam giác ABC là tam giác vuông tại C nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC chính là trung điểm của cạnh AB . Hay H là trung điểm của AB .

Chọn đáp án **A**

Câu 19.

Hai tam giác BCD và ACD đều là tam giác cân có đáy BC nên $CD \perp BN$ và $CD \perp AN$, suy ra $CD \perp (ABN)$. Do $CD \perp (ABN)$ nên (A) và (B) sai. Do $CD \subset (CMD)$ nên (D) sai.



Chọn đáp án (C)

Câu 20.

Gọi $O = AC \cap BD$ và H là trung điểm OD . Ta có $SO \perp (ABCD)$ và $MH \parallel SO$. Suy ra:

$MH \perp (ABCD)$

$(BM, (ABCD)) = \widehat{MBH}$.

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

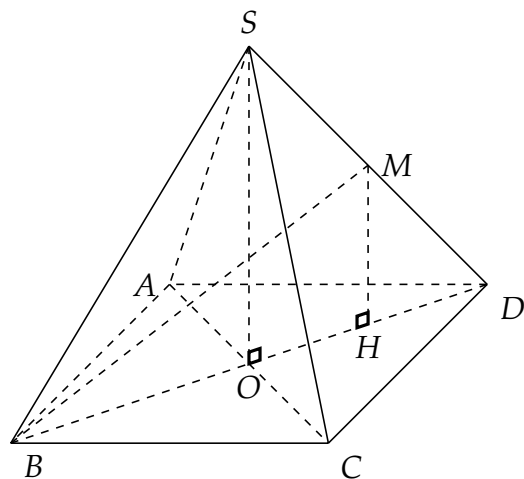
$$MH = \frac{SO}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$BH = \frac{3}{4}BD = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Vậy } \tan \widehat{MBH} = \frac{MH}{BH}.$$

$$\text{Hay } \tan \widehat{MBH} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án (D)

**Câu 21.**

Gọi H là trung điểm của cạnh BC . Ta có $BC \perp AH$. (1)

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAH)$ nên $BC \perp SH$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng $\widehat{SHA}$.

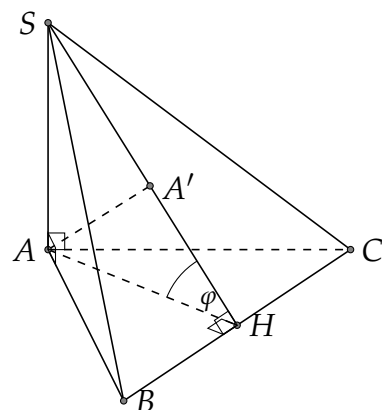
Đặt $\varphi = \widehat{SHA}$, ta có

$$\tan \varphi = \frac{SA}{AH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

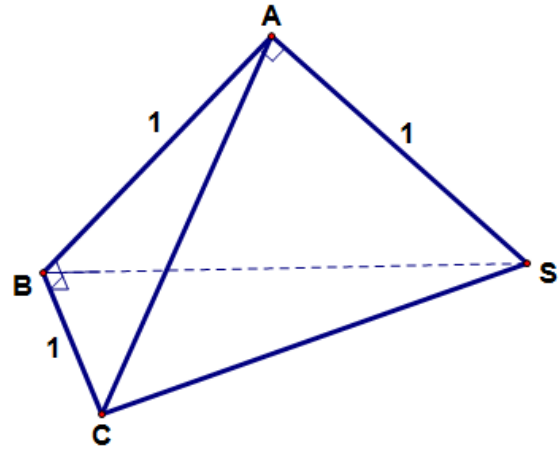
Ta suy ra $\varphi = 30^\circ$.

Vậy góc giữa (ABC) và (SBC) bằng 30° .

Chọn đáp án (A)

**Câu 22.**

Ta có $CB \perp AB$, $CB \perp AS$ suy ra $CB \perp (ABS)$. Do đó $CB \perp SB$. Như thế
 $SC = \sqrt{SB^2 + BC^2}$
 $= \sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2}$
 $= \sqrt{3}$.



Chọn đáp án **B**

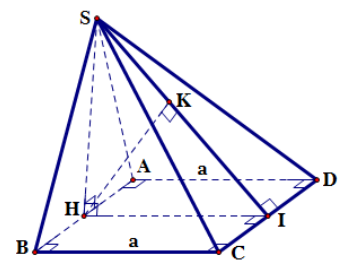
Câu 23. Vì các vectơ $\frac{\vec{AB}}{AB}$, $\frac{\vec{AC}}{AC}$, $\frac{\vec{AD}}{AD}$ có độ dài bằng 1 và đôi một vuông góc với nhau nên:

$$\left(\frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC} + \frac{\vec{AD}}{AD} \right)^2 = 3 \Leftrightarrow \left| \frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC} + \frac{\vec{AD}}{AD} \right| = \sqrt{3}.$$

Chọn đáp án **B**

Câu 24.

Gọi H , I lần lượt là trung điểm của AB và CD . Do tam giác SAB đều cạnh a nên $SH \perp AB$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, mà (SAB) vuông góc với $(ABCD)$ theo giao tuyến AB nên $SH \perp (ABCD)$. Ta có $CD \perp IH$ và $CD \perp SH$, suy ra $CD \perp (SHI)$, mà CD nằm trong (SCD) nên $(SCD) \perp (SHI)$. Trong ΔSHI , kẻ HK vuông góc với SI tại K , khi đó vì (SHI) vuông góc với (SCD) theo giao tuyến SI nên $HK \perp (SCD)$. Trong tam giác vuông SHI , ta có:



$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}.$$

Do đó: $d(H, (SCD)) = HK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án **A**

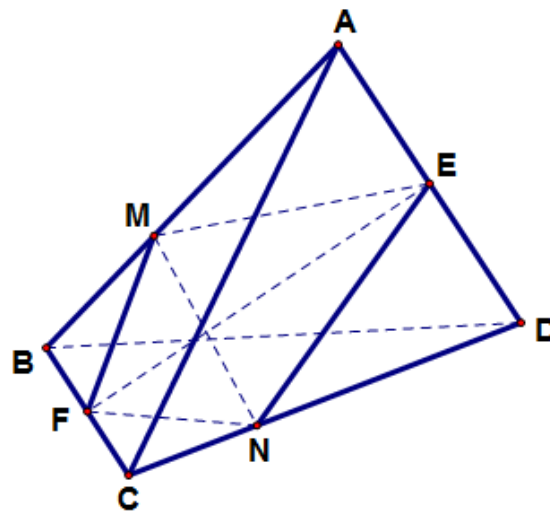
Câu 25.

Ta có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EF} &= \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}}{2} \\
&= \frac{\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{NC}}{2} \\
&= \frac{\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{NC}}{2} \\
&= \frac{\overrightarrow{EM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EN} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}}{2} \\
&= \frac{\overrightarrow{EM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{EN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DN}}{2} \\
&= \frac{\overrightarrow{EM} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM}) + \overrightarrow{EN} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EN})}{2} \\
&= \frac{\frac{3}{2}\overrightarrow{EM} + \frac{3}{2}\overrightarrow{EN}}{2} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EM} + \frac{3}{4}\overrightarrow{EN}.
\end{aligned}$$

Như vậy $m = \frac{3}{4}, n = \frac{3}{4}$, suy ra $m + n = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(B)**



B. BỘ ĐỀ SỐ 2

1. Đề bài

Câu 1. Chỉ ra mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

- A. Ba vectơ đồng phẳng là ba vectơ cùng nằm trong một mặt phẳng.
- B. Nếu ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng thì có $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ với m, n là các số duy nhất.
- C. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, khi đó với $\vec{d}$ là vectơ bất kì, luôn tồn tại các số m, n, p sao cho $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.
- D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Câu 2 (HK2 chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai, 2017).

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- | | |
|---|--|
| <p>A. $\begin{cases} (\alpha) \neq (\beta) \\ (\alpha) \perp (P) \\ (\beta) \perp (P) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$</p> | <p>B. $\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ (P) \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (\beta).$</p> |
| <p>C. $\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ a \subset (\alpha) \\ b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow a \perp b.$</p> | <p>D. $\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta).$</p> |

Câu 3. Cho một hình chóp đều. Xét các tính chất sau:

- 1) Khoảng cách từ đỉnh đến mỗi cạnh đáy của hình chóp bằng nhau.
- 2) Các mặt bên hợp với đáy những góc bằng nhau.
- 3) Hình chiếu của đỉnh xuống đáy là trọng tâm của đáy.
- 4) Nếu đáy của hình chóp là tam giác thì hình chóp là tứ diện đều.
- 5) Đáy của hình chóp là một đa giác nội tiếp được.
- 6) Góc ở đáy của mặt bên là góc hợp bởi mặt bên và mặt đáy.

Số tính chất đúng trong các tính chất trên là:

- A. 6. B. 5. C. 4. D. 3.

Câu 4 (Đề HK2 T11, Long Thạnh, Kiên Giang 2018).

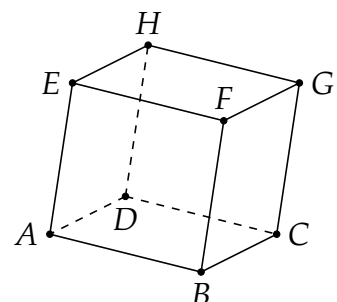
Cho đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ khác d . Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

- | | |
|---|---|
| A. Đường thẳng $\Delta \parallel d$ thì $\Delta \perp (\alpha)$. | B. Đường thẳng $\Delta \parallel d$ thì $\Delta \parallel (\alpha)$. |
| C. Đường thẳng $\Delta \parallel (\alpha)$ thì $\Delta \perp d$. | D. Đường thẳng $\Delta \perp (\alpha)$ thì $\Delta \parallel d$. |

Câu 5 (Đề HK2 T11, Long Thạnh, Kiên Giang 2018).

Cho hình hộp $ABCD.EFGH$ (tham khảo hình vẽ). Tính tổng của ba vectơ $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$.

- A. $\vec{AG}$. B. $\vec{AH}$. C. $\vec{AF}$. D. $\vec{AC}$.



Câu 6 (Thi HK2, THPT Đông Hà, Quảng Trị, 2018).

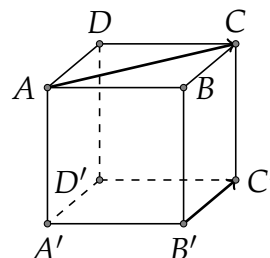
Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC cân tại A , H là trung điểm cạnh BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $BC \perp SB$. B. $BC \perp SC$. C. $SB \perp AH$. D. $BC \perp SH$.

Câu 7 (Đề HK2, năm học 2016-2017, Sở Giáo dục & Đào tạo Bình Phước).

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\vec{AC} \cdot \vec{B'C'}$.

- A. $\vec{AC} \cdot \vec{B'C'} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. B. $\vec{AC} \cdot \vec{B'C'} = a^2$.
C. $\vec{AC} \cdot \vec{B'C'} = \sqrt{2}a^2$. D. $\vec{AC} \cdot \vec{B'C'} = 2a^2$.



Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Góc giữa cặp vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{EG}$ là

- A. 30° . B. 90° . C. 45° . D. 60° .

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là β . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\beta = \widehat{SBA}$. B. $\beta = \widehat{CSA}$. C. $\beta = \pi - \widehat{SCA}$. D. $\beta = \widehat{SCA}$.

Câu 10 (HK2-Lop11-LientruongTPVinh-NgheAn-2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khi đó

- A. $AB \perp (SAC)$. B. $AB \perp (SBC)$. C. $AB \perp (SCD)$. D. $AB \perp (SAD)$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông tại C . Hãy xác định góc α giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) .

- A. $\alpha = \widehat{SBA}$. B. $\alpha = \widehat{BCA}$. C. $\alpha = \widehat{SCA}$. D. $\alpha = \widehat{SBC}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $SD = a\sqrt{7}$ và $SA \perp (ABCD)$. Góc hợp bởi các mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ gần nhất với kết quả nào sau đây?

- A. 50° . B. 49° . C. 51° . D. 48° .

Câu 13. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Phân tích nào sau đây là đúng?

- A. $\vec{AE} = \frac{1}{2}(\vec{AF} + \vec{AH} - \vec{AC})$. B. $\vec{AE} = \frac{1}{4}(\vec{AF} - \vec{AH} - \vec{AC})$.
C. $\vec{AE} = \vec{AF} + \vec{AH} - \vec{AC}$. D. $\vec{AE} = \frac{1}{2}(\vec{AF} - \vec{AH} - \vec{AC})$.

Câu 14. Cho một tứ diện đều $ABCD$ với trọng tâm G . Góc giữa đường thẳng GB và mp (BCD) có cosin bằng

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

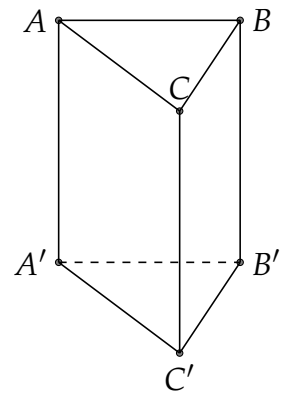
Câu 15. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ có cosin bằng

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 16 (Đề KSCL HK2 Toán 11 năm học 2016-2017, Chuyên Biên Hòa, Hà Nam).

Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a . Tính góc giữa mặt phẳng $(AB'C')$ và mặt phẳng $(A'B'C')$.

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$.



Câu 17. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) có cosin bằng

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 18 (HK2-Lop11-LientruongTPVinh-NgheAn-2018).

Khoảng cách từ một đỉnh đến mặt đối diện của một tứ diện đều cạnh a là

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = \frac{a}{2}$. Tính diện tích tam giác SBC .

- A. $\frac{a^2}{3}$. B. $\frac{a^2}{2}$. C. a^2 . D. $\frac{3a^2}{2}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy, $\widehat{BAD} = 120^\circ$, M là trung điểm của cạnh BC và $\widehat{SMA} = 45^\circ$. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng SM .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 21 (HK2-Lop11-LientruongTPVinh-NgheAn-2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $SA = AB = a$, $AC = 2a$. Góc giữa SD và mặt phẳng (SAB) là

- A. 90° . B. 45° . C. 30° . D. 60° .

Câu 22 (HK2-Lop11-LientruongTPVinh-NgheAn-2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau góc 60° .

- A. $\frac{a}{2}$. B. $2a$. C. $\frac{3a}{2}$. D. a .

Câu 23 (Toán Học Tuổi Trẻ-Lần 6-2018).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$, $AB = BC = a$. Gọi M là điểm thuộc AB sao cho $AM = \frac{2a}{3}$. Tính khoảng cách d từ S đến đường thẳng CM .

- A. $d = \frac{2a\sqrt{110}}{5}$. B. $d = \frac{a\sqrt{10}}{5}$. C. $d = \frac{a\sqrt{110}}{5}$. D. $d = \frac{2a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A . Mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và (SBC) vuông góc với mặt đáy. Gọi H là trung điểm BC . Tính theo a khoảng cách từ điểm H đến đường thẳng SA .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Cho điểm M thay đổi trong không gian. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{3}MA + MB + MC + MD$ là

- A. $AB + AC + AD$. B. $\sqrt{3}AB + AC + AD$.
C. $AB + \sqrt{3}AC + AD$. D. $AB + AC + \sqrt{3}AD$.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 D	4 B	7 B	10 D	13 A	16 A	19 B	22 D	25 A
2 B	5 A	8 C	11 C	14 A	17 C	20 B	23 C	
3 C	6 D	9 D	12 B	15 B	18 D	21 D	24 B	

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Dễ thấy (A) sai. Mệnh đề (B) sai khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương còn $\vec{c}$ không cùng phương với $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Mệnh đề (C) sai khi $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{AC}$, $\vec{c} = \vec{AD}$, $\vec{d} = \vec{AA'}$, với $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương.

Chọn đáp án (D)

Câu 2. Một mặt phẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì sẽ vuông góc với mặt phẳng còn lại.

Chọn đáp án (B)

Câu 3. Tính chất 1), 2), 3), 5) đúng; tính chất 4), 6) sai. Do đó chọn C.

Chọn đáp án (C)

Câu 4. Mệnh đề sai là “Đường thẳng $\Delta \parallel d$ thì $\Delta \parallel (\alpha)$ ”.

Chọn đáp án (B)

Câu 5. Theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}, \quad \vec{AC} + \vec{AE} = \vec{AG}$$

nên $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = \vec{AG}$.

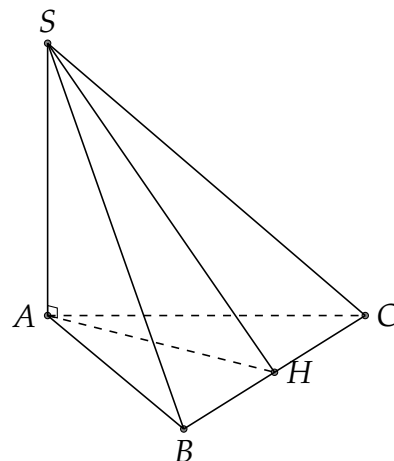
Chọn đáp án (A)

Câu 6.

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$.

Tam giác ABC cân tại A có AH là trung tuyến nên AH là đường cao. Do đó $BC \perp AH$.

Vì $BC \perp SA$ và $BC \perp AH$ nên $BC \perp (SAH)$. Do đó $BC \perp SH$.



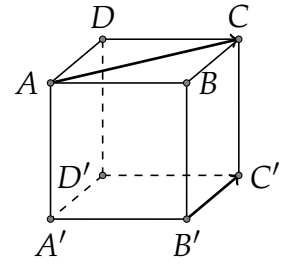
Chọn đáp án (D)

Câu 7.

Do $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B'C'}$ nên
 $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'C'}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{CAD} = 45^\circ$.

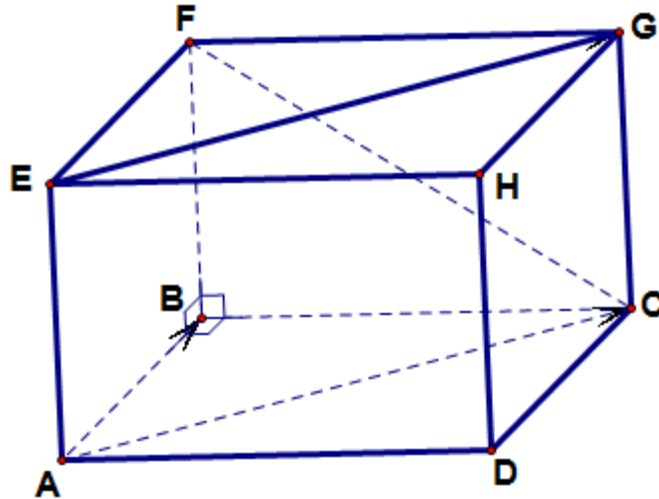
Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'C'} &= |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{B'C'}| \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'C'}) \\ &= a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ = a^2.\end{aligned}$$



Chọn đáp án **B**

Câu 8. Ta có $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$.



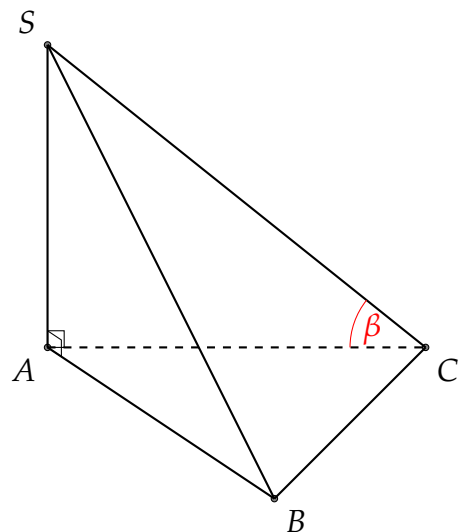
Như thế góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$ là:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ.$$

Chọn đáp án **C**

Câu 9.

Ta có đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên hình chiếu của đường thẳng SC trên mặt phẳng (ABC) là đường thẳng AC. Ta biết góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng góc SC và hình chiếu của nó trên (ABC), tức là góc giữa hai đường thẳng SC và AC. Vậy $\beta = \widehat{SCA}$.



Chọn đáp án **D**

Câu 10.

Ta có sự tương đương:

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC})$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CH}$$

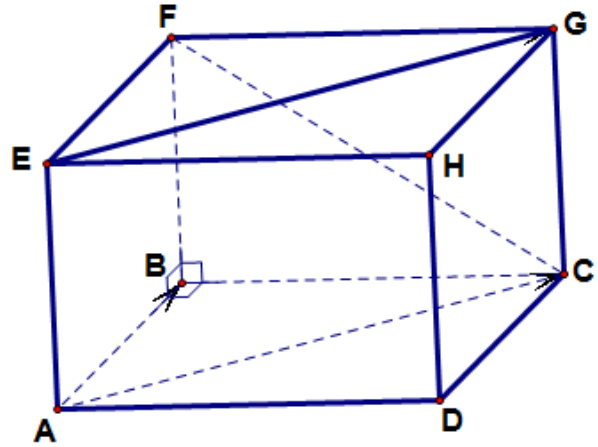
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} + (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF}) = \overrightarrow{CH}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CH}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CH}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CH} \text{ (đúng).}$$

Vậy chọn **A**.



Chọn đáp án **A**

Câu 14.

Gọi O là tâm của tam giác đều BCD . Khi đó $AO \perp (BCD)$ và trọng tâm của tứ diện chính là giao điểm của AO với MN , hơn nữa G là trung điểm MN . Giả sử cạnh tứ diện đều có độ dài là a . Ta có:

$$AO = \sqrt{MA^2 - MO^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{1}{9} \cdot \frac{3a^2}{4}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Do đó:

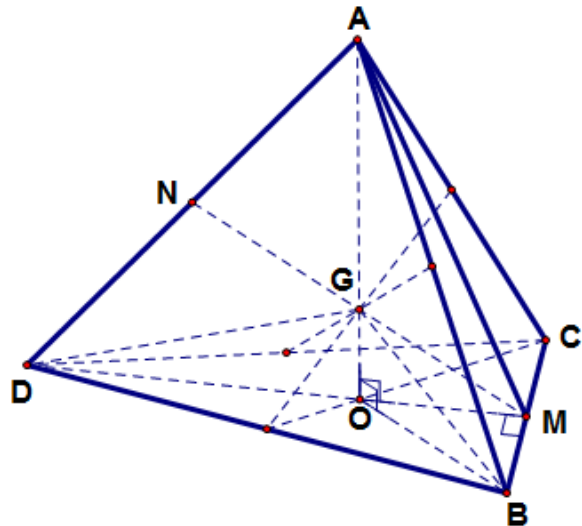
$$GO = \frac{1}{4}AO = \frac{a\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{6}};$$

$$OB = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

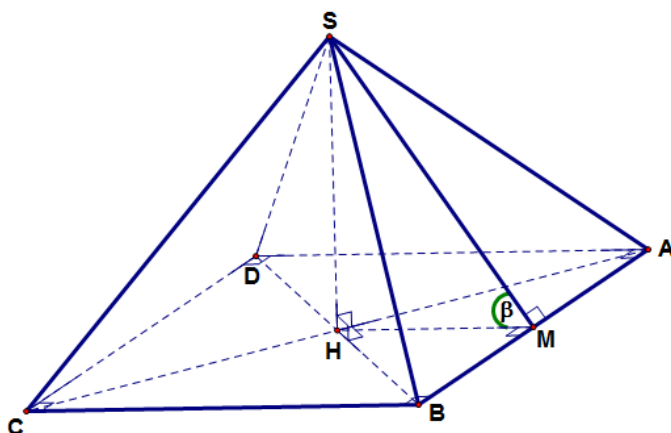
Vậy $\tan \widehat{GBO} = \frac{GO}{OB} = \frac{a}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Ta có hình chiếu của BG trên (BCD) là BO . Do đó góc giữa đường thẳng BG và $mp(BCD)$ có cosin bằng

$$\cos \widehat{GBO} = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \widehat{GBO}}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{8}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Chọn đáp án **A**



Câu 15. Gọi a là độ dài cạnh đáy.

Cách 1.

Gọi M là trung điểm AB , gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh S của hình chóp và β là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ thì

$$\cos \beta = \cos \widehat{SMH} = \frac{HM}{SM} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Cách 2 (không cần dựng góc). Do hình chiếu của ΔSAB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là ΔHAB nên

$$S_{\Delta HAB} = S_{\Delta SAB} \cdot \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{a^2}{4} : \frac{4}{a^2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án **(B)**

Câu 16.

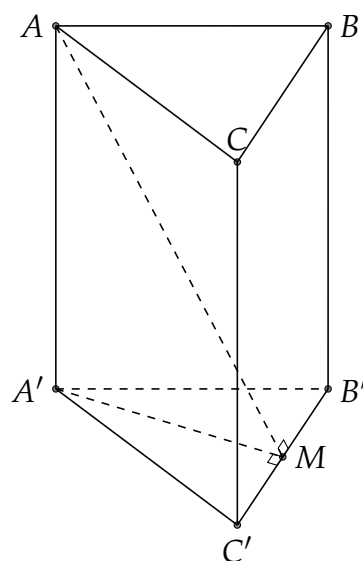
Gọi M là trung điểm của $B'C'$. Ta có

$$\begin{cases} B'C' \perp A'M \\ B'C' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp AM.$$

Vậy góc giữa mặt phẳng $(AB'C')$ và mặt phẳng $(A'B'C')$ chính là góc giữa hai đường thẳng $A'M$ và AM bằng $\widehat{AMA'}$. Ta lại có

$$\tan \widehat{AMA'} = \frac{AA'}{A'M} = \frac{a}{\frac{2a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra $\widehat{AMA'} = \frac{\pi}{6}$. Vậy góc giữa mặt phẳng $(AB'C')$ và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng $\frac{\pi}{6}$.



Chọn đáp án **(A)**

Câu 17.

Gọi I là trung điểm SA . Khi đó

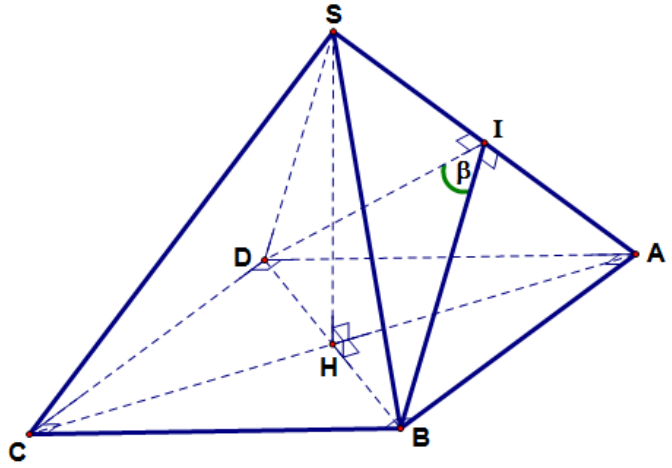
$$\begin{cases} (SAB) \cap (SAD) = SA \\ (DBI) \perp SA \\ (DBI) \cap (SAB) = IB \\ (DBI) \cap (SAD) = ID. \end{cases}$$

Như vậy góc β cần tính là góc giữa hai đường thẳng IB và ID . Ta có

$$\begin{aligned} \cos \widehat{DIB} &= \frac{IB^2 + ID^2 - DB^2}{2IB \cdot ID} \\ &= \frac{\frac{3a^2}{2} - 2a^2}{\frac{3a^2}{2}} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } \cos \beta = \frac{1}{3}.$$

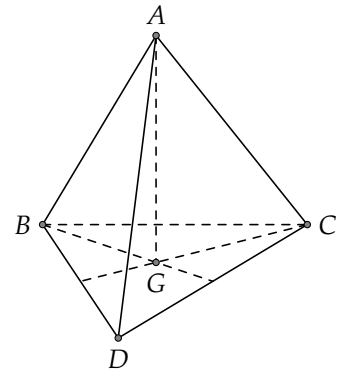
Chọn đáp án **C**



Câu 18.

Gọi G là trọng tâm tam giác BCD , ta có

$$\begin{aligned} d(A, (BCD)) &= AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} \\ &= \frac{a\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **D**

Câu 19.

Gọi H là trung điểm của cạnh BC . Ta có $BC \perp AH$. (1)

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAH)$ nên $BC \perp SH$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng $\widehat{SHA}$.

Đặt $\varphi = \widehat{SHA}$, ta có

$$\tan \varphi = \frac{SA}{AH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ta suy ra $\varphi = 30^\circ$.

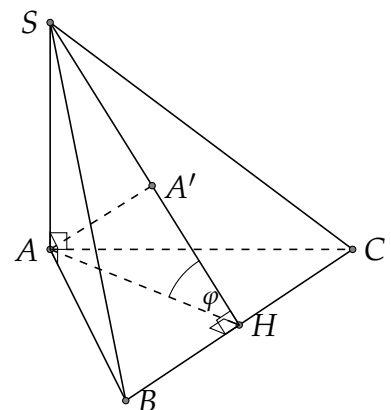
Vậy góc giữa (ABC) và (SBC) bằng 30° .

Vì $SA \perp (ABC)$ nên tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác SBC . Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của các giác SBC và ABC . Ta có:

$$S_2 = S_1 \cos \varphi \Rightarrow S_1 = \frac{S_2}{\cos \varphi} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

Chọn đáp án **B**

Câu 20.

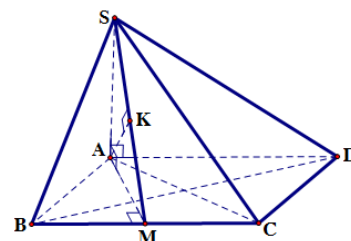


Ta có $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a , tam giác SMA vuông cân tại A , $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SA$. Gọi K là hình chiếu của A trên SM . Khi đó khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng SM là:

$$AK = \frac{1}{2}SM = \frac{\sqrt{AS^2 + AM^2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(A, SM) = \frac{\sqrt{3}a^2}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Chọn đáp án (B)



Câu 21.

Để thấy $AD \perp (SAB)$.

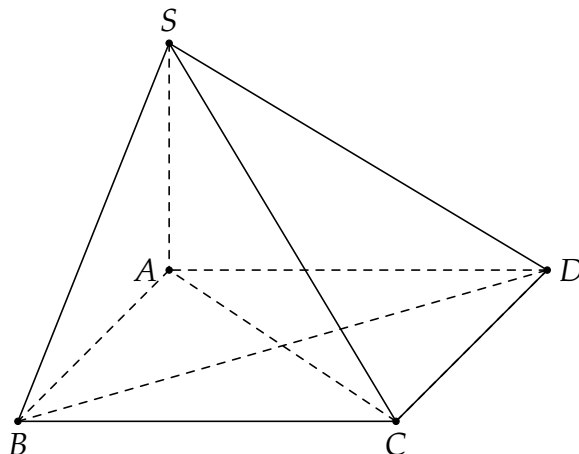
Suy ra $(SD, (SAB)) = \widehat{ASD}$.

Ta có

$$\tan \widehat{ASD} = \frac{AD}{AS} = \frac{\sqrt{AC^2 - AB^2}}{AS}$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$

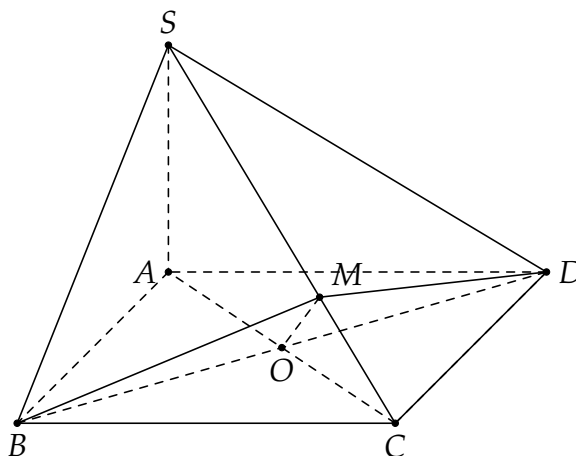
Vậy $(SD, (SAB)) = 60^\circ$.



Chọn đáp án (D)

Câu 22. Dựng $OM \perp SC$. Theo định lý ba đường vuông góc $SC \perp BD$, suy ra $SC \perp (MBD)$. Khi đó,

$$|\cos \widehat{BMD}| = \cos((SBC), (SCD)) = |2\cos^2 \widehat{BOM} - 1|$$



Suy ra $|2\cos^2 \widehat{BOM} - 1| = \frac{1}{2}$, mặt khác $\widehat{BOM}$ nhọn nên $\widehat{BOM} = 30^\circ$ hoặc $\widehat{BOM} = 60^\circ$.

Hai tam giác vuông OMC và SAC đồng dạng nên

$$\frac{OM}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OM = \frac{SA \cdot OC}{SC} = \frac{xa\sqrt{2}}{2\sqrt{x^2 + 2a^2}}.$$

$$\text{Ta có } \tan \widehat{MBO} = \frac{OM}{OB} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2a^2}}$$

- Với $\widehat{BOM} = 30^\circ$, $\tan \widehat{MBO} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2a^2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x^2 + 6a^2 = 0$ (không tồn tại x).

- Với $\widehat{BOM} = 60^\circ$, $\tan \widehat{MBO} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2a^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = a$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 23.

Trong (SMC) kẻ $SH \perp MC$ tại H .

Ta có $\begin{cases} MC \perp SH \\ MC \perp SA. \end{cases}$

Suy ra $MC \perp (SAH)$.

Do đó $MC \perp AH$.

Diện tích tam giác ABC là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2}{2}.$$

Diện tích tam giác MBC là

$$S_{MBC} = \frac{1}{2} MB \cdot BC = \frac{a^2}{6}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S_{AMC} &= S_{ABC} - S_{MBC} \\ &= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \frac{\sqrt{10}a}{3}.$$

$$\text{Độ dài cạnh } AH = \frac{2S_{AMC}}{MC} = \frac{2a\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{Xét } \triangle AHS \text{ có } SH = \sqrt{AH^2 + SH^2} = \frac{a\sqrt{110}}{5}.$$

Chọn đáp án **(C)**

Câu 24.

Ta có:

$$SH \perp BC, AH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}.$$

Ta có (SBC) vuông góc với (ABC) theo giao tuyến BC , đường thẳng SH nằm trong (SBC) và vuông góc với giao tuyến BC nên SH vuông góc với (ABC) . Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SA . Khi đó $d(H, SA) = HK$. Trong tam giác vuông SHA , ta có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HA^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{16}{3a^2}.$$

$$\text{Suy ra } HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Như vậy: } d(SA, BC) = HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

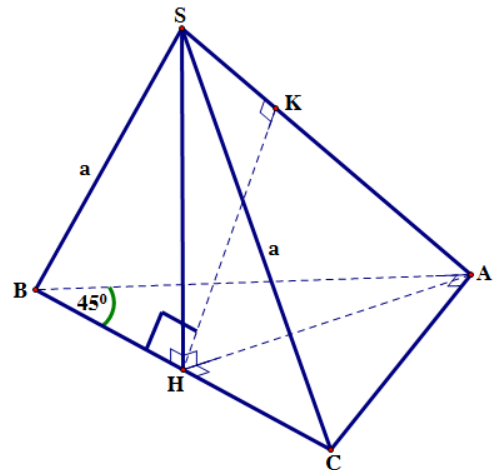
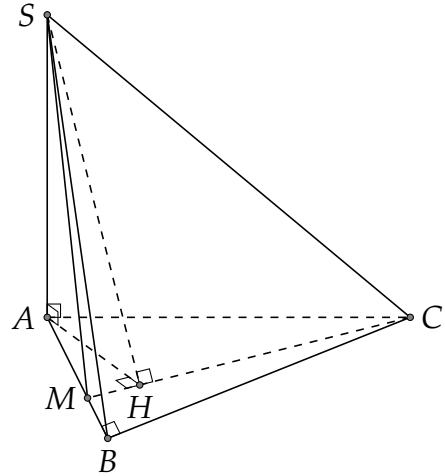
Chọn đáp án **(B)**

Câu 25. Vì các vectơ $\frac{\vec{AB}}{AB}, \frac{\vec{AC}}{AC}, \frac{\vec{AD}}{AD}$ có độ dài bằng 1 và đôi một vuông góc với nhau nên:

$$\left(\frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC} + \frac{\vec{AD}}{AD} \right)^2 = 3 \Leftrightarrow \left| \frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC} + \frac{\vec{AD}}{AD} \right| = \sqrt{3}.$$

Từ đó, với mọi điểm M , ta có:

$$P = \sqrt{3}MA + MB + MC + MD$$



$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} \right| |\overrightarrow{AM}| + \frac{MB \cdot AB}{AB} + \frac{MC \cdot AC}{AC} + \frac{MD \cdot AD}{AD} \\
&\geq \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} \right) \cdot \overrightarrow{AM} + \frac{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AD}}{AD} \\
&= \frac{(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD}) \cdot \overrightarrow{AD}}{AD} \\
&= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}}{AD} \\
&= \frac{\overrightarrow{AB}^2}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}^2}{AC} + \frac{\overrightarrow{AD}^2}{AD} \\
&= \frac{AB^2}{AB} + \frac{AC^2}{AC} + \frac{AD^2}{AD} \\
&= AB + AC + AD.
\end{aligned}$$

Vậy min $P = AB + AC + AD$, đạt được khi M trùng A .

Chọn đáp án 

C. BỘ ĐỀ SỐ 3

1. Đề bài

Câu 1. Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) và a là đường thẳng nào đó. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. Nếu $a \parallel (P)$ thì $a \parallel (Q)$.
 B. Nếu a nằm trong (P) thì $a \parallel (Q)$.
 C. Nếu a nằm trên (Q) thì $a \parallel (P)$.
 D. Nếu a cắt (P) thì a cắt (Q) .

Câu 2. Cho hai mặt phẳng song song và một mặt phẳng thứ ba cắt chúng. M là một điểm không nằm trên cả ba mặt phẳng. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua M và song song với cả ba mặt phẳng đã cho?

- A. Không có.
 B. Có duy nhất một.
 C. Có vô số.
 D. Không có hoặc có vô số.

Câu 3. Qua một phép chiếu song song, một đường thẳng sẽ song song với hình chiếu của nó nếu thỏa điều kiện:

- A. Đường thẳng đó song song với phương chiếu.
 B. Đường thẳng đó không song song với phương chiếu.
 C. Đường thẳng đó không song song với phương chiếu và cũng không song song với mặt phẳng chiếu.
 D. Đường thẳng đó không song song với phương chiếu nhưng song song với mặt phẳng chiếu.

Câu 4 (Đề thi HK2 khối 11, 2017-2018, THPT Lý Thánh Tông, Hà Nội).

Đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (P) khi nào?

- A. (d) vuông góc với ít nhất 2 đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) .
 B. (d) vuông góc với đúng 2 đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) .
 C. (d) vuông góc với 2 đường thẳng cắt nhau.
 D. (d) vuông góc 2 đường thẳng cắt nhau và nằm trong mặt phẳng (P) .

Câu 5 (Đề thi HK2 khối 11, 2017-2018, THPT Lý Thánh Tông, Hà Nội).

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng nào vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$?

- A. $(A'B'C'D')$.
 B. $(ABC'D')$.
 C. $(CDA'D')$.
 D. $(AA'C'C)$.

Câu 6 (Đề thi HK2 khối 11, 2017-2018, THPT Lý Thánh Tông, Hà Nội).

Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Hãy chỉ ra mệnh đề SAI?

- A. $\vec{SA} + \vec{SC} = 2\vec{SO}$.
 B. $\vec{SB} + \vec{SD} = 2\vec{SO}$.
 C. $\vec{SA} + \vec{SC} = \vec{SB} + \vec{SD}$.
 D. $\vec{SA} + \vec{SC} + \vec{SB} + \vec{SD} = \vec{0}$.

Câu 7 (Đề thi HK2 khối 11, 2017-2018, THPT Lý Thánh Tông, Hà Nội).

Hai vectơ $\vec{u}, \vec{u}'$ lần lượt là vectơ chỉ phương của hai đường thẳng d, d' . Khi đó $d \perp d'$ khi?

- A. $\vec{u}, \vec{u}'$ cùng phương.
 B. $\vec{u} = \vec{u}'$.
 C. $\cos(\vec{u}, \vec{u}') = 1$.
 D. $\cos(\vec{u}, \vec{u}') = 0$.

Câu 8 (Đề thi HK2 khối 11, 2017-2018, THPT Lý Thánh Tông, Hà Nội).

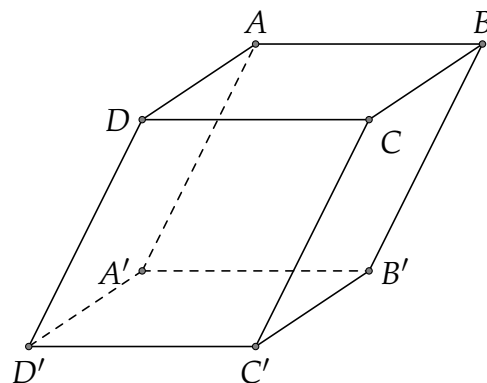
Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Chọn mệnh đề ĐÚNG trong các mệnh đề sau?

- A. $SC \perp (ABCD)$.
 B. $BC \perp (SCD)$.
 C. $DC \perp (SAD)$.
 D. $AC \perp (SBC)$.

Câu 9 (HK2-Lop11-LientruongTPVinh-NgheAn-2018).

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $A'C' \perp BD$.
C. $CC' \perp AB$.
B. $A'B' \perp BC$.
D. $BB' \perp BD$.



Câu 10 (Đề thi HK2 khối 11, 2017-2018, THPT Lý Thánh Tông, Hà Nội).

Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$; $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

- A. Ba vectơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng.
C. Hai vectơ $\vec{x}$, $\vec{b}$ cùng phương.
B. Hai vectơ $\vec{x}$, $\vec{a}$ cùng phương.
D. Ba vectơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đôi một cùng phương.

Câu 11 (Thi HK2, THPT Đông Hà, Quảng Trị, 2018).

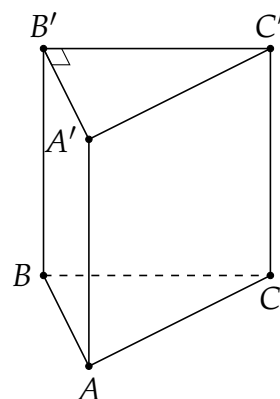
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C , $AC = BC = a\sqrt{10}$, mặt bên SAB là tam giác đều cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) .

- A. 30° .
B. 45° .
C. 90° .
D. 60° .

Câu 12 (Đề HK2 T11, Long Thành, Kiên Giang 2018).

Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'$ có đáy $\triangle A'B'C'$ vuông tại B' (xem hình vẽ). Hỏi đường thẳng $B'C'$ vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

- A. $(BB'A')$.
B. $(AA'C')$.
C. (ABC) .
D. (ACC') .



Câu 13 (Thi HK2, THPT Đông Hà, Quảng Trị, 2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$, $ABCD$ là hình thang vuông góc tại A và B , $AD = 2a$, $AB = BC = a$, $SA \perp (ABCD)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $CD \perp (SBC)$.
B. $BC \perp (SAB)$.
C. $CD \perp (SAC)$.
D. $AB \perp (SAD)$.

Câu 14 (HK2-Lop11-LientruongTPVinh-NgheAn-2018).

Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Trong $\triangle BCD$ vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau ở O . Gọi K là hình chiếu vuông góc của D trên AC . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $(ADC) \perp (ABE)$.
C. $(ADC) \perp (DFK)$.
B. $(BDC) \perp (ABE)$.
D. $(ADC) \perp (ABC)$.

Câu 15 (Thi HK2, Chuyên ĐHSPT Hà Nội, 2018).

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $d((ABC), (A'B'C')) = BB'$.
B. Các mặt bên của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đều là các hình chữ nhật.
C. $d(B, (ACC'A')) = d(B', (ACC'A'))$.
D. $d(A, (BCC'B')) = AB$.

Câu 16 (Thi HK2, Chuyên ĐHSPT Hà Nội, 2018).

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Hệ thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$.
 B. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AA'}$.
 C. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.
 D. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$.

Câu 17 (Thi HK2, Chuyên ĐHSPT Hà Nội, 2018).

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $BC \perp SH$.
 B. $BC \perp SC$.
 C. $AC \perp SH$.
 D. $AH \perp SC$.

Câu 18 (Thi HK2, Chuyên ĐHSPT Hà Nội, 2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và SA vuông góc với đáy. Khi đó số mặt bên của hình chóp là tam giác vuông bằng

- A. 4.
 B. 1.
 C. 2.
 D. 3.

Câu 19 (Đề thi HK2, Lương Thế Vinh, Hà Nội 2018).

Tứ diện $ABCD$ đều. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- A. Góc giữa đường thẳng AB và phẳng phẳng (BCD) là góc $\widehat{ABC}$.
 B. $AB \perp CD$.
 C. $AG \perp (BCD)$.
 D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Câu 20 (Đề thi HK2, Lương Thế Vinh, Hà Nội 2018).

Hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Cosin của góc giữa mặt bên với mặt đáy bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
 B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 D. $\frac{1}{2}$.

Câu 21 (Đề thi HK2, Lương Thế Vinh, Hà Nội 2018).

Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = a$, $SA \perp (ABCD)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng

- A. $2a$.
 B. a .
 C. $a\sqrt{2}$.
 D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 22 (Đề thi HK2, Lương Thế Vinh, Hà Nội 2018).

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng

- A. Độ dài đoạn thẳng nối một điểm của đường thẳng này với một điểm của đường thẳng kia.
 B. Độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.
 C. Khoảng cách từ một điểm của đường thẳng này tới mặt phẳng chứa đường thẳng kia.
 D. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

Câu 23 (Thi HK2, Chuyên ĐHSPT Hà Nội, 2018).

Cho tứ diện đều $ABCD$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

- A. 60° .
 B. 90° .
 C. 45° .
 D. 30° .

Câu 24 (Thi HK2, Chuyên ĐHSPT Hà Nội, 2018).

Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. Nếu $a \perp b$ và $a \perp (P)$ thì $b \parallel (P)$.
 B. Qua một điểm có vô số đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
 C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
 D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 25 (Thi HK2, Chuyên ĐHSPT Hà Nội, 2018).

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Tan của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. $\sqrt{2}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\sqrt{3}$.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

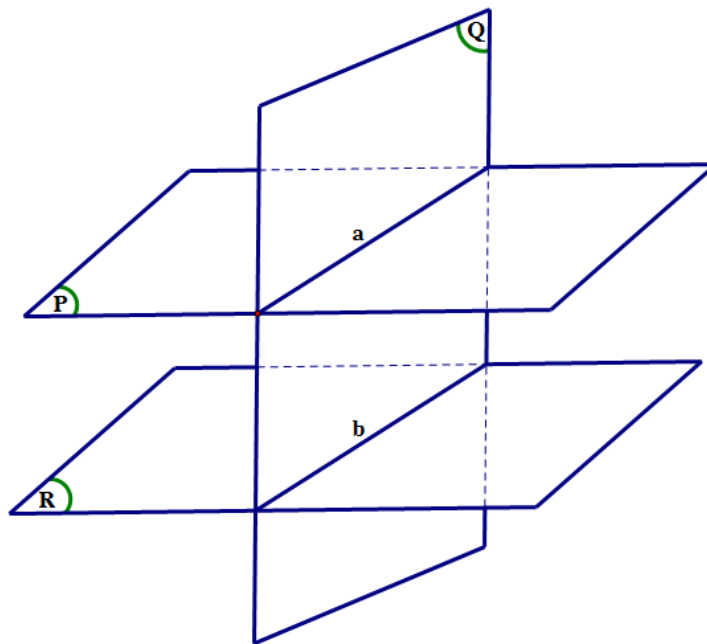
1 A	4 D	7 D	10 A	13 A	16 C	19 A	22 B	25 A
2 B	5 D	8 C	11 A	14 D	17 A	20 A	23 B	
3 D	6 D	9 A	12 A	15 D	18 A	21 D	24 C	

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Nếu đường thẳng a song song với (P) thì a vẫn có thể nằm trong (Q) . Như vậy chọn A.

Chọn đáp án **A**

Câu 2.



Đó là đường thẳng đi qua M và song song với giao tuyến a, b của các mặt phẳng đã cho.

Chọn đáp án **B**

Câu 3.

Chọn đáp án **D**

Câu 4. Nếu (d) vuông góc 2 đường thẳng cắt nhau và nằm trong mặt phẳng (P) thì $d \perp (P)$.

Chọn đáp án **D**

Câu 5. Mặt phẳng $(ABCD)$ là mặt đáy của hình lập phương nên sẽ vuông góc các mặt bên. Do đó $(ABCD) \perp (AA'C'C)$.

Chọn đáp án **D**

Câu 6. Do O là tâm của $ABCD$ nên $\vec{SA} + \vec{SC} = 2\vec{SO}$ và $\vec{SB} + \vec{SD} = 2\vec{SO}$.
Do đó $\vec{SA} + \vec{SC} + \vec{SB} + \vec{SD} = \vec{0} = 4\vec{SO} \neq \vec{0}$.

Chọn đáp án **D**

Câu 7. Do $d \perp d'$ nên $\vec{u} \perp \vec{u'} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u'} = 0 \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{u'}) = 0$.

Chọn đáp án **D**

Câu 8. Ta có $\begin{cases} SA \perp DC \\ AD \perp CD \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAD)$.

Chọn đáp án **C**

Câu 9. Do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$, mà $A'C' \parallel BD$ suy ra $A'C' \perp BD$.

Chọn đáp án **A**

Câu 10. Giả sử tồn tại hai số thực k, m để $\vec{x} = k\vec{y} + m\vec{z}$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} k = 2 \\ -k - 2m = 0 \\ -k - 3m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = -1. \end{cases}$$

Vậy $\vec{x} = 2\vec{y} - \vec{z}$ nên ba vectơ đồng phẳng.

Chọn đáp án **A**

Câu 11.

Gọi H là trung điểm của AB . Khi đó $SH \perp AB$. Ta có

$$\left. \begin{array}{l} AB = (SAB) \cap (ABC) \\ SH \perp AB \\ (SAB) \perp (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow SH \perp (ABC).$$

Suy ra $(SC, (ABC)) = (SC, HC) = \widehat{SCH}$. Áp dụng định lý Pytago vào $\triangle AHC$ vuông tại H , ta có

$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{10a^2 - a^2} = 3a.$$

Áp dụng định lý Pi-ta-go vào $\triangle SAH$ vuông tại H , ta có

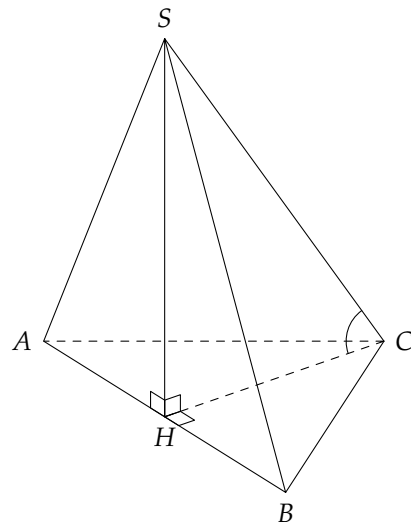
$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

Trong $\triangle SHC$ vuông tại H , ta có

$$\tan \widehat{SCH} = \frac{SH}{CH} = \frac{a\sqrt{3}}{3a} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra $\widehat{SCH} = 30^\circ$. Vậy $(SC, (ABC)) = 30^\circ$.

Chọn đáp án **A**



Câu 12. Ta có $B'C' \perp BB'$ vì $ABCD.A'B'C'$ là lăng trụ đứng. Mà $BB' \perp B'A'$ do $\triangle A'B'C'$ vuông tại B' . Từ đó suy ra $B'C' \perp (BB'A')$.

Chọn đáp án **A**

Câu 13.

Ta có

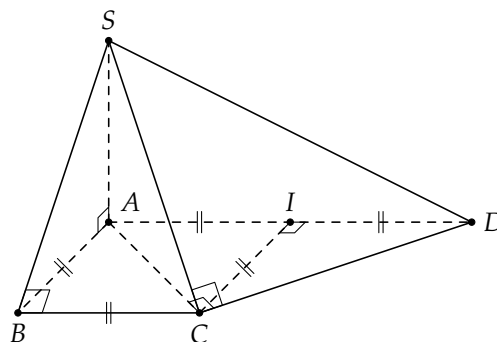
$$\checkmark \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

$$\checkmark \begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD).$$

$\checkmark$ Dựng hình vuông $ABCI$. Khi đó
 $CI = AI = ID = \frac{1}{2}AD$.
 Suy ra $\triangle ACD$ vuông tại C .

$$\checkmark \begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC).$$

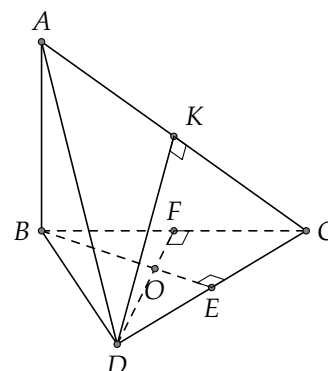
$\checkmark$ Vậy khẳng định **sai** là $CD \perp (SBC)$.



Chọn đáp án **A**

Câu 14.

Giả sử $(ADC) \perp (ABC)$, mà $DK \perp (AC)$ suy ra $DK \perp (ABC)$. Mặt khác dễ thấy $DF \perp (ABC)$, từ đó suy ra K trùng F (mâu thuẫn).



Chọn đáp án **D**

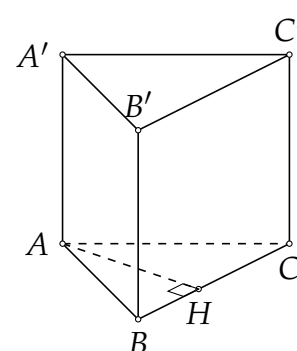
Câu 15.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên
 $d((ABC), (A'B'C')) = BB'$.

Các mặt bên của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đều là các hình chữ nhật.

Ta có $d(B, (ACC'A')) = d(B', (ACC'A'))$. Kẻ $AH \perp BC$ tại H , khi đó $AH \perp (BCC'B')$ nên $d(A, (BCC'B')) = AH$.

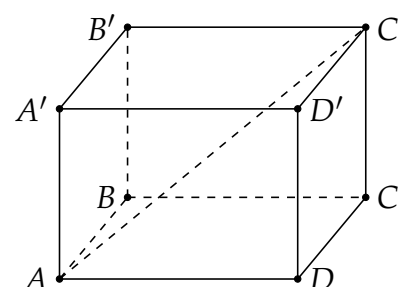
Vậy $d(A, (BCC'B')) = AB$ là mệnh đề sai.



Chọn đáp án **D**

Câu 16.

Theo qui tắc hình hộp, có
 $\vec{AC'} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}$.

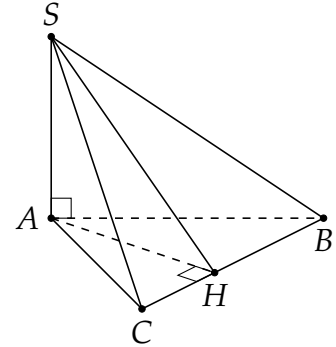


Chọn đáp án 

Câu 17.

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$.

$$\text{Do } \begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp SH.$$



Chọn đáp án 

Câu 18.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB$ và $SA \perp AD$, nên $\triangle SAB$ và $\triangle SAD$ vuông tại A.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp DC$

Lại có $ABCD$ là hình chữ nhật nên $CD \perp AD$

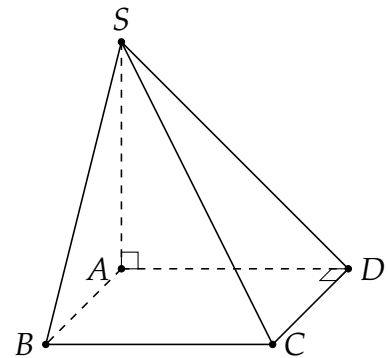
Từ (1) và (2) suy ra $CD \perp SD$, hay $\triangle SCD$ vuông tại D.

Chứng minh tương tự có $\triangle SBC$ vuông tại B.

Vậy hình chóp có 4 mặt bên là các tam giác vuông.

(1)

(2)



Chọn đáp án 

Câu 19.

Kẻ $AH \perp (BCD)$ tại H. Khi đó HB, HC, HD lần lượt là hình chiếu vuông góc của AB, AC, AD lên (BCD) . Mà $AB = AC = AD$ nên $HB = HC = HD$. Lại có $\triangle BCD$ đều nên H cũng là trọng tâm $\triangle BCD$. Suy ra $H \equiv G$ hay $AG \perp (BCD)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} CD \perp BG \\ CD \perp AG \end{cases}$$

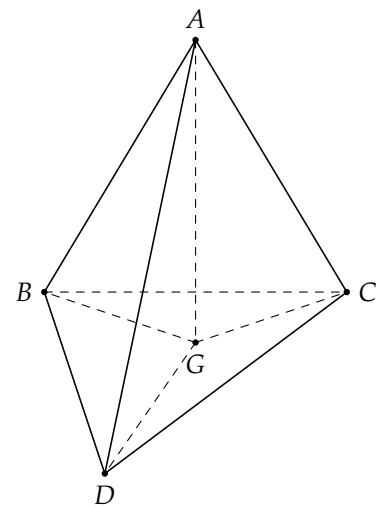
Suy ra $CD \perp (ABG) \Rightarrow AB \perp CD$.

Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên

$$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 3\vec{AG}.$$

Ta có BG là hình chiếu vuông góc của AB lên (BCD) nên

$(\widehat{AB, (BCD)}) = \widehat{ABG}$. Vậy mệnh đề sai là "Góc giữa đường thẳng AB và phẳng phẳng (BCD) là góc $\widehat{ABC}$ ".



Chọn đáp án 

Câu 20.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Khi đó $SO \perp (ABCD)$.

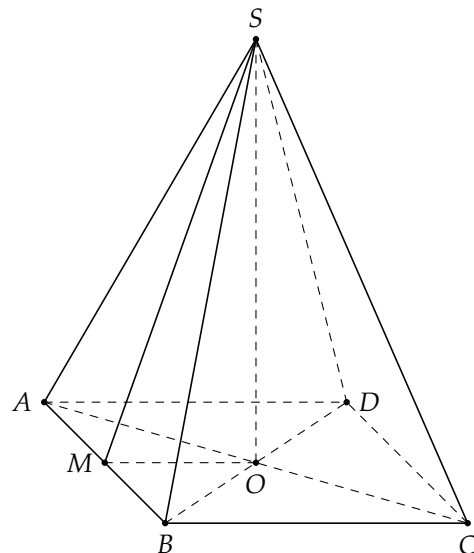
Gọi M là trung điểm của AB .

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SO \perp (ABCD) \\ OM \perp AB. \end{cases}$$

Suy ra $((SAB), (ABCD)) = \widehat{SMO}$.

$$\text{Đặt } AB = a. \text{ Ta có } \begin{cases} SM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ OM = \frac{a}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{SMO} = \frac{MO}{SM} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Chọn đáp án **A**

Câu 21.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD). \end{cases}$$

Suy ra $BD \perp (SAO)$.

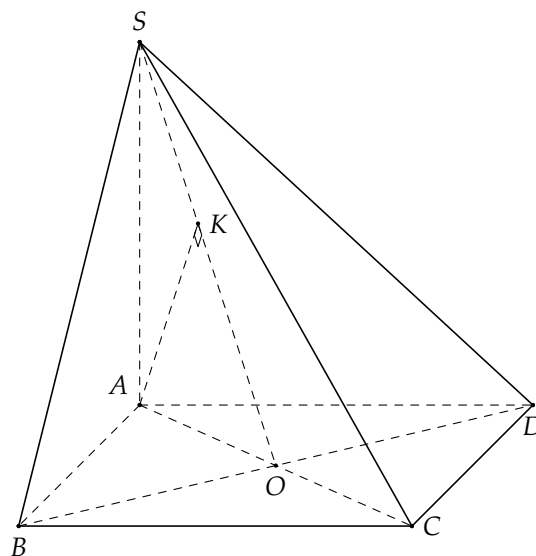
Vẽ $AK \perp SO$ tại K , ta có

$$\begin{cases} AK \perp SO \\ AK \perp BD \text{ (do } BD \perp (SAO). \end{cases}$$

Suy ra $AK \perp (SBD) \Rightarrow d(A, (SBD)) = AK$.

$\triangle SAO$ vuông tại A có $AK \perp SO$.

$$\text{Suy ra } AK = \frac{SA \cdot AO}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Chọn đáp án **D**

Câu 22. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Chọn đáp án **B**

Câu 23.

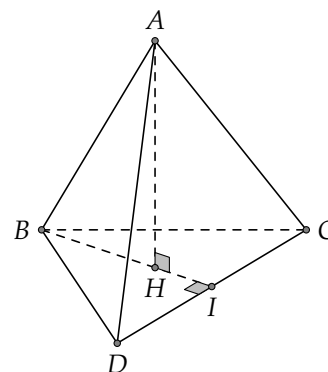
Gọi I là trung điểm của CD và H là trọng tâm tam giác đều BCD .

Ta có $AH \perp CD$ và $HB \perp CD$.

Suy ra $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ và $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Xét

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0.$$

Suy ra $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$. Do đó góc giữa AB và CD bằng 90° .

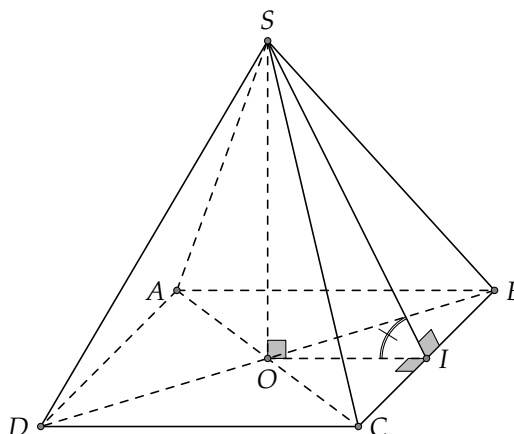


Chọn đáp án **B**

Câu 24.Chọn đáp án **C****Câu 25.**

Trong $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$ và I là trung điểm của BC . Ta có góc giữa mặt bên (SBC) và đáy $ABCD$ là $\widehat{SIO}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\tan \widehat{SIO} &= \frac{SO}{OI} = \frac{\sqrt{SI^2 - OI^2}}{OI} \\ &= \frac{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

D. BỘ ĐỀ SỐ 4

1. Đề bài

Câu 1 (Đề thi HK2 khối 11, THPT Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An 2008).

Trong các mệnh đề sau. Hãy tìm mệnh đề đúng.

- A. Hình hộp có đáy là hình chữ nhật.
- B. Hình lăng trụ đều có đáy là tam giác đều.
- C. Hình lập phương có 6 mặt là hình vuông.
- D. Hình chóp đều có tất cả các cạnh bằng nhau.

Câu 2 (Đề thi HK2 khối 11, THPT Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An 2018).

Trong các mệnh đề sau. Hãy tìm mệnh đề sai.

- A. Trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì hai đường thẳng đó song song với nhau.
- B. Trong không gian một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng (P) thì đường thẳng đó vuông góc với mặt phẳng (P) .
- C. Trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng song song với nhau.
- D. Trong không gian hai mặt phẳng cắt nhau và vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

Câu 3 (Đề thi HK2 khối 11, THPT Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An 2018).

Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau

- A. Nếu ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì chúng thẳng hàng.
- B. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung.
- C. Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
- D. Hai mặt phẳng có hai điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

Câu 4 (HK2 khối 11, trường Chuyên THPT Phan Bội Châu, Nghệ An 2018).

Tứ diện $ABCD$ đều. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Trong các mệnh đề sau. Hãy tìm mệnh đề sai.

- A. Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) là góc $\widehat{ABC}$.
- B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.
- C. $AG \perp (BCD)$.
- D. $AB \perp CD$.

Câu 5 (HK2 khối 11, THPT Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An 2018).

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Đặt $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$. Độ dài $\vec{x}$ bằng

- A. $(1 + \sqrt{3})a$.
- B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.
- C. $a\sqrt{6}$.
- D. $a\sqrt{2}$.

Câu 6 (HK2 Toán 11, Đức Thọ, Hà Tĩnh 2018).

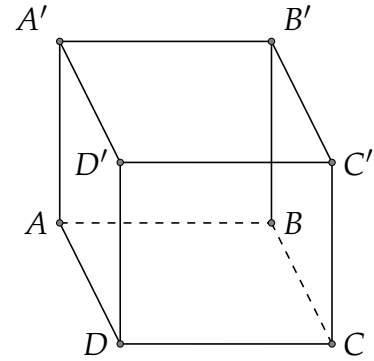
Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi tâm O và $SA = SC, SB = SD$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

- A. $AC \perp SA$.
- B. $SD \perp AC$.
- C. $SA \perp BD$.
- D. $AC \perp BD$.

Câu 7 (HK2 khối 11, trường Chuyên THPT Phan Bội Châu, Nghệ An 2018).

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC' biết $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$.

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Câu 8 (Đề thi HK2 khối 11, 2017 - 2018 trường THPT Phan Bội Châu, Tỉnh Nghệ An).

Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = a$, $SA \perp (ABCD)$. Khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $a\sqrt{2}$. B. a . C. $2a$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9 (Đề KT HK2 T111, Phan Bội Châu, Nghệ An 2018).

Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$, góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BG}$ là

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 120° .

Câu 10 (T11, Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An 2018).

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng 30° .

- A. $MN = \frac{a}{2}$. B. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $MN = \frac{a}{4}$.

Câu 11 (Đề HK2, Sở GD và ĐT, Thái Bình, 2018).

Cho tứ diện $ABCD$ đều, gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\cos \widehat{ABG} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $AB \perp CD$. C. $AG \perp (BCD)$. D. $\widehat{ABG} = 60^\circ$.

Câu 12 (Đề thi HK2, Lương Thế Vinh, Hà Nội, 2018).

Tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC$ và đôi một vuông góc. Tang của góc giữa đường thẳng OA và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. 1. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 13 (Đề thi HK2, Lương Thế Vinh, Hà Nội, 2018).

Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Gọi H là trung điểm của cạnh AC . Tìm mệnh đề **sai**?

- A. $(SAC) \perp (SBD)$. B. $SH \perp (ABCD)$.
C. $(SBD) \perp (ABCD)$. D. $CD \perp (SAD)$.

Câu 14 (Đề thi HK2, Lương Thế Vinh, Hà Nội 2018).

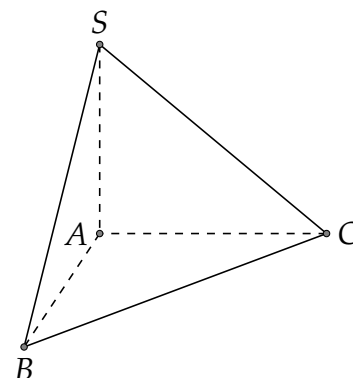
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng CD' và AC' bằng

- A. 30° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Câu 15 (Đề thi HK2 khối 11, 2017 - 2018 trường THPT Phan Bội Châu, Tỉnh Nghệ An).

Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , biết $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) ?

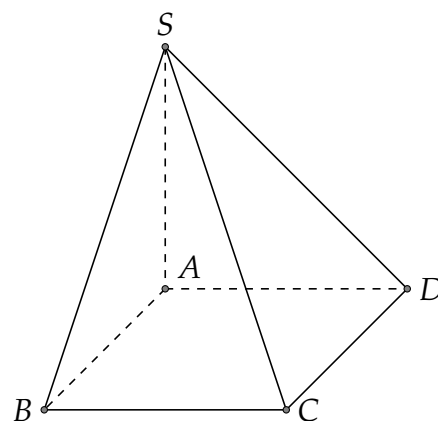
- A. 120° . B. 60° . C. 150° . D. 30° .



Câu 16 (HK2 khối 11, THPT Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An 2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm SB . Tính tan của góc giữa đường thẳng DM và $(ABCD)$

- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$.



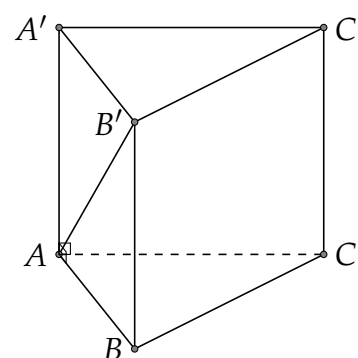
Câu 17 (Đề thi HK2, Lương Thế Vinh, Hà Nội, 2018).

Hình chóp đều $S.ABC$. G là trọng tâm tam giác ABC . Biết rằng $SG = AB = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và GC bằng

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a}{2}$. D. a .

Câu 18 (HK2 T11, Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An 2018).

Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$ cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC .

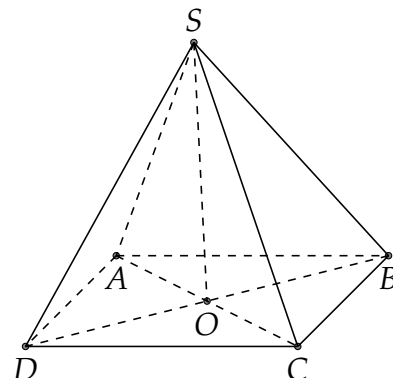


- A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 30° .

Câu 19 (HK2 T11, Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An 2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAC nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng SA bằng 4. Biết $AB = 3$, $BC = 4$. Cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng

- A. $\frac{5\sqrt{34}}{17}$. B. $\frac{3\sqrt{17}}{17}$. C. $\frac{2\sqrt{34}}{17}$. D. $\frac{3\sqrt{34}}{34}$.



2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

- 1 C 3 D 5 C 7 B 9 C 11 D 13 D 15 B 17 A 19 D
2 C 4 A 6 A 8 D 10 B 12 D 14 B 16 D 18 B

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Mệnh đề đúng là "Hình lập phương có 6 mặt là hình vuông".

Chọn đáp án **C**

Câu 2. Mệnh đề "Trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng song song với nhau" là sai.

Chọn đáp án **C**

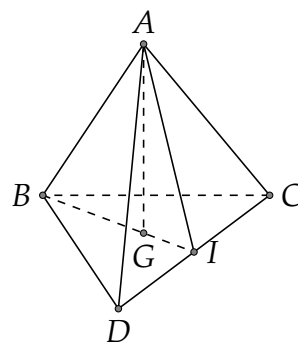
Câu 3. Mệnh đề sai là "Hai mặt phẳng có hai điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất". Xét trường hợp hai mặt phẳng trùng nhau thì chúng có vô số đường thẳng chung.

Chọn đáp án **D**

Câu 4.

Gọi I trung điểm BC .

Ta có $AG \perp (ABC)$ tại G nên
 $(AB, (ABC)) = \widehat{ABG} \neq \widehat{ABC}$.



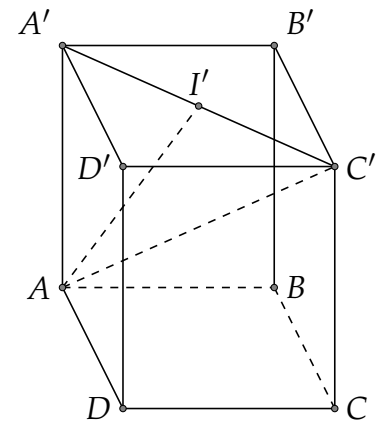
Chọn đáp án **A**

Câu 5.

Gọi I' là trung điểm của $A'C'$. Ta có $\vec{x} = 2\vec{AI'}$.

$$AI'^2 = AA'^2 + A'I'^2 = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow AI' = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

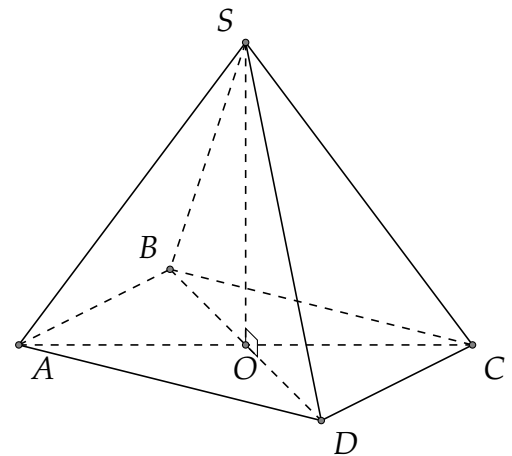
Vậy $|\vec{x}| = a\sqrt{6}$.



Chọn đáp án **C**

Câu 6.

$SA = SC$ nên tam giác SAC cân tại S , suy ra $SO \perp AC$ (Vì O là trung điểm AC). Ta có $SB = SD$ nên tam giác SBD cân tại S , suy ra $SO \perp BD$ (Vì O là trung điểm BD). Suy ra $SO \perp (ABCD)$. Mà $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$



Chọn đáp án **A**

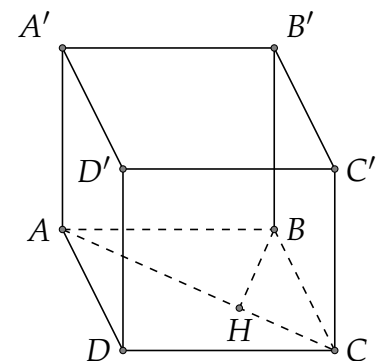
Câu 7.

Gọi H là hình chiếu của B lên AC .

Ta có $d(BB', AC') = d(BB', (ACC')) = BH$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{4}{3a^2}.$$

$$\text{Vậy } BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Chọn đáp án **B**

Câu 8.

Ta có $AD \parallel BC$ nên

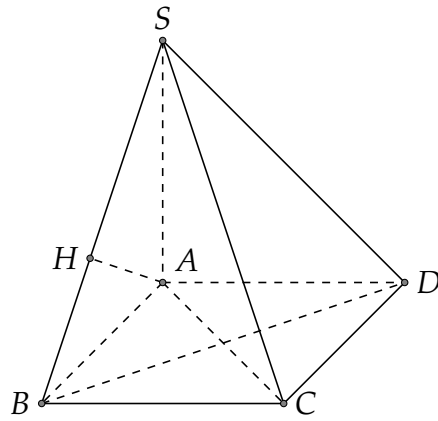
$d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)) = AH$,

với H là hình chiếu của A trên SB . Ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{2}{a^2}$$

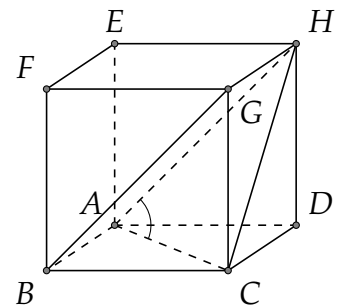
$$\Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Chọn đáp án **D**

Câu 9.

Ta có $(\vec{AC}, \vec{BG}) = (\vec{AC}, \vec{AH}) = \widehat{HAC} = 60^\circ$ (do tam giác AHC là tam giác đều).



Chọn đáp án **C**

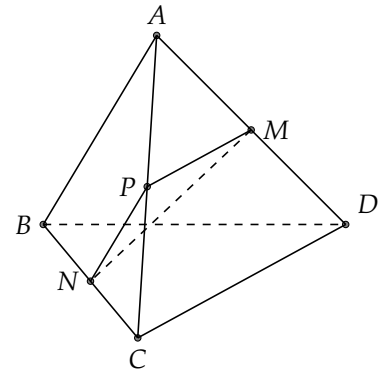
Câu 10.

Gọi P là trung điểm của AC ta có $NP \parallel AB$. Suy ra góc giữa hai đường thẳng AB và MN là $\widehat{PNM}$.

Ta có $PM^2 = NP^2 + MN^2 - 2NP \cdot MN \cos(\widehat{PNM})$.

Trong đó $PM = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$, $NP = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Suy ra $MN^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}MN = 0 \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án **B**

Câu 11.

Gọi I là trung điểm cạnh CD . Ta có:

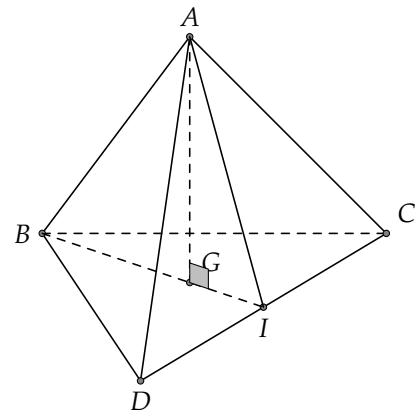
$CD \perp BI$; $CD \perp AG \Rightarrow CD \perp (ABI) \Rightarrow CD \perp AB$.

Theo giả thiết $AG \perp (BCD)$.

Giả sử tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1, suy ra trong tam

giác ABG có $BG = \frac{2}{3}BI = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\cos \widehat{ABG} = \frac{BG}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{ABG} \neq 60^\circ$.



Chọn đáp án **D**

Câu 12.

Kẻ $OK \perp BC$ ($K \in BC$).

Mà $BC \perp OA$ (do $OA \perp (OBC)$)

nên $BC \perp (OAK)$.

Kẻ $OH \perp AK$ ($H \in AK$).

Ta lại có $OH \perp BC$ (do $BC \perp (OAK)$).

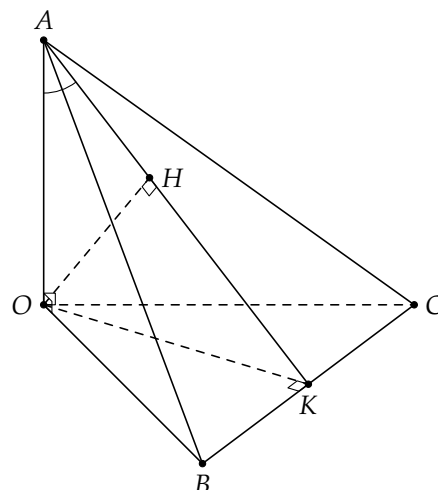
Vậy $OH \perp (ABC)$.

Khi đó góc giữa OA và mặt phẳng (ABC)

là góc $\widehat{OAH} = \widehat{OAK}$.

Ta có $OK = \frac{1}{2}BC = \frac{OA \cdot \sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\tan \widehat{OAK} = \frac{OK}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án **(D)**

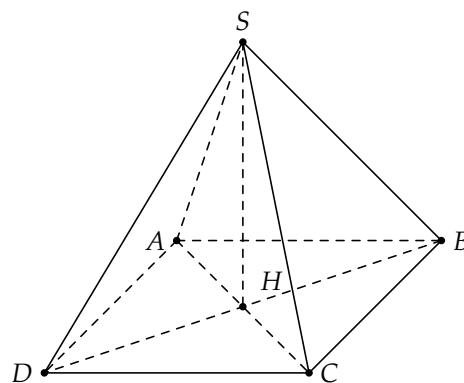
Câu 13.

Theo tính chất của hình chóp tứ giác đều, ta có SH vuông góc với $(ABCD)$. Mà SH thuộc (SBD) nên suy ra $(SBD) \perp (ABCD)$. Ta lại có

$$\begin{cases} AC \perp SH \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD).$$

Hay $(SAC) \perp (SBD)$.

Vậy mệnh đề $CD \perp (SAD)$ là sai.



Chọn đáp án **(D)**

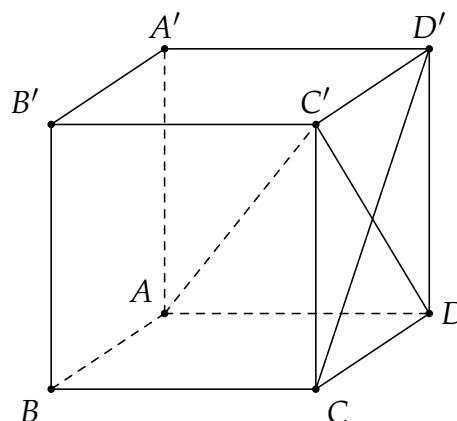
Câu 14.

Ta có $\begin{cases} CD' \perp C'D \\ CD' \perp AD \text{ (do } AD \perp (CDD'C')) \end{cases}$

$\Rightarrow CD' \perp (ADC')$

$\Rightarrow \underline{CD' \perp AC'}$.

Vậy $(CD', AC') = 90^\circ$.



Chọn đáp án **(B)**

Câu 15. Ta có

$$\begin{cases} SA = (SAB) \cap (SAC) \\ BA \perp SA, BA \subset (SAB) \Rightarrow ((SAB), (SAC)) = (AB, AC). \\ AC \perp SA, AC \subset (SAC) \end{cases}$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ.$$

Vậy $((SAB), (SAC)) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 16.

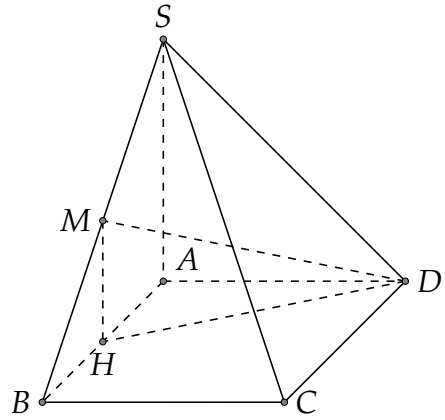
Gọi H là trung điểm của AB . Ta có $MH \perp (ANCD)$.

Vậy $(DM, (ABCD)) = \widehat{MDH}$. Ta có

$$\checkmark \quad MH = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\checkmark \quad DH^2 = AD^2 + AH^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DH = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\checkmark \quad \tan \widehat{MDH} = \frac{MH}{DH} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$



Chọn đáp án **(D)**

Câu 17.

Từ A kẻ đường thẳng song song với GC cắt BC tại F . Khi đó

$$d(SA; GC) = d(GC; (SAF)) = d(G; (SAF)).$$

Gọi M là trung điểm AB .

Từ G kẻ $GK \parallel AB$ ($K \in AF$), thế thì $GK \perp AF$.

Từ G kẻ $GH \perp SK$ ($H \in SK$).

Khi đó $AF \perp GK, AF \perp SG \Rightarrow AF \perp (SGK)$.

Mà $GH \perp SK, GH \perp AF$ (do $AF \perp (SGK)$),

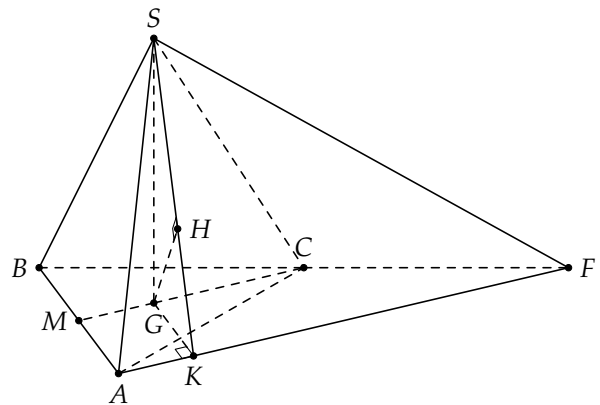
suy ra $GH \perp (SAF)$ hay $GH = d(G; (SAF))$.

Xét tam giác SGK vuông tại G ta có

$$GK = AM = \frac{1}{2}AB = a.$$

$$\text{Suy ra } GH = \frac{SG \cdot GK}{\sqrt{SG^2 + GK^2}} = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án **(A)**



Câu 18. Ta có

$$\cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC}}{AB' \cdot BC} = \frac{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) \cdot \overrightarrow{BC}}{AB' \cdot BC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BC}}{AB' \cdot BC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{AB' \cdot BC}.$$

Trong đó

$$BC = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos 120^\circ} = a\sqrt{3}.$$

$$AB' = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -AB \cdot BC \cdot \cos 30^\circ = -a \cdot a\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = \frac{-3a^2}{2}.$$

$$\text{Vậy } \cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ \Rightarrow (AB', BC) = 60^\circ.$$

Chọn đáp án **(B)**

Câu 19.

Kẻ $BH \perp AC$. Khi đó

$BH \perp (SAC)$ vì $(SAC) \perp (ABCD)$.

Kẻ $CK \perp SA$; $HE \perp SA$, (K, E thuộc SA).

Khi đó ta có: $\begin{cases} SA \perp HE \\ SA \perp BH (BH \perp (SAC)). \end{cases}$

Suy ra $SA \perp (BHE) \Rightarrow SA \perp BE$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) là góc $\widehat{HEB}$. Tính góc $\widehat{HEB}$:

Ta có: $BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{12}{5}$.

Vì $HE \parallel CK$ nên $\triangle AEH \sim \triangle AKC$.

Suy ra $\frac{AH}{HE} = \frac{AC}{CK}$. Do đó

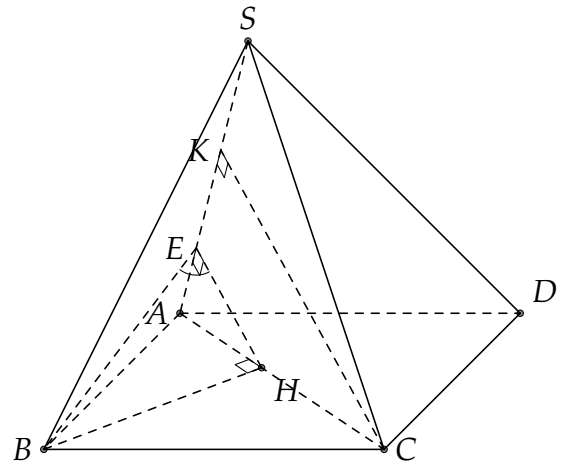
$$HE = \frac{AH \cdot CK}{AC} = \frac{\frac{9}{5} \cdot 4}{5} = \frac{36}{25}.$$

Ta có $\triangle BHE$ vuông tại H nên:

$$BE = \sqrt{BH^2 + HE^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{36}{25}\right)^2} = \frac{12\sqrt{34}}{25}.$$

$$\text{Vậy } \cos \widehat{HEB} = \frac{HE}{BE} = \frac{\frac{36}{25}}{\frac{12\sqrt{34}}{25}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}.$$

Chọn đáp án **D**



E. BỘ ĐỀ SỐ 5

1. Đề bài

Câu 1 (Đề HK2, Sở GD và ĐT, Thái Bình, 2018).

Trong không gian, cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Tồn tại một mặt phẳng chứa a và song song với b .
- B. Khoảng cách giữa a và b bằng độ dài đường vuông góc chung của a và b .
- C. Tồn tại một mặt phẳng chứa b và song song với a .
- D. Tồn tại duy nhất một cặp mặt phẳng lần lượt chứa a, b song song với nhau.

Câu 2 (Đề HK2, Sở GD và ĐT, Thái Bình, 2018).

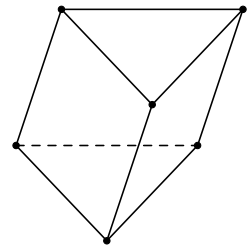
Trong không gian, cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) . Có bao nhiêu mặt phẳng chứa đường thẳng a và vuông góc với (P) ?

- A. Có duy nhất một.
- B. Có vô số.
- C. Có một hoặc vô số.
- D. Không có.

Câu 3 (Đề HK II, THPT Lê Hồng Phong, Khánh Hòa 2018).

Cho hình lăng trụ tam giác (xem hình bên), chọn khẳng định **sai**?

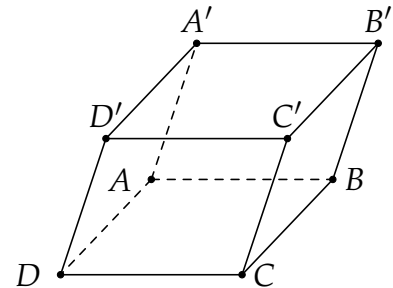
- A. Hai đáy nằm trên hai mặt phẳng song song.
- B. Các cạnh bên song song với nhau.
- C. Hai tam giác đáy bằng nhau.
- D. Các mặt bên là các hình chữ nhật.



Câu 4.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, tổng của $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'}$ là vectơ nào dưới đây?

- A. $\overrightarrow{DB'}$.
- B. $\overrightarrow{DB}$.
- C. $\overrightarrow{BD}$.
- D. $\overrightarrow{BD'}$.



Câu 5 (HK2 khối 11, THPT Lý Thánh Tông, Hà Nội 2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AB = 2a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm H của tam giác ABD . Khi đó BD vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- A. (SAB) .
- B. (SAC) .
- C. (SCD) .
- D. (SAD) .

Câu 6 (Thi HK2, THPT Đông Hà, Quảng Trị, 2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng SB và CD .

- A. 30° .
- B. 45° .
- C. 60° .
- D. 90° .

Câu 7 (Đề HK2, Sở GD và ĐT, Thái Bình, 2018).

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đều. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng.
- B. Các mặt bên của lăng trụ là hình chữ nhật.
- C. Hai mặt đáy của lăng trụ là các đa giác đều.
- D. Tam giác $B'AC$ đều.

Câu 8 (Đề HK2 khối 11, 2017 - 2018 Sở GD & ĐT Hà Nam).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. H là trung điểm của BC .
 B. H là trọng tâm tam giác ABC .
 C. H là trung điểm của AB .
 D. H là trực tâm tam giác ABC .

Câu 9 (Đề HK2 - THPT Nhữ Văn Lan, Hải Phòng, 2018).

Cho hình chóp $S.ABC$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\vec{SB}$ và $\vec{AC}$ biết rằng $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$.

- A. 45° .
 B. 90° .
 C. 60° .
 D. 120° .

Câu 10 (Đề HK2 - THPT Nhữ Văn Lan, Hải Phòng, 2018).

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?

- A. Góc SIA (I là trung điểm BC).
 B. Góc SCB .
 C. Góc SBA .
 D. Góc SCA .

Câu 11 (Đề HK2 khối 11, 2017 - 2018 Sở GD & ĐT Hà Nam).

Cho hình tứ diện $ABCD$ có đáy BCD là tam giác vuông cân tại C . Biết $BD = 2a$ và $AB \perp (BCD)$. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) bằng

- A. a .
 B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
 C. $2a$.
 D. $a\sqrt{2}$.

Câu 12 (Đề HK2 khối 11, 2017 - 2018 Sở GD & ĐT Hà Nam).

Cho hình tứ diện $ABCD$, đặt $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$, $\vec{AD} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của CD . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $\vec{BM} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a}$.
 B. $\vec{BM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) - \vec{b}$.
 C. $\vec{BM} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c}) - \vec{a}$.
 D. $\vec{BM} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a}) - \vec{c}$.

Câu 13 (Đề thi HK2, Lương Thế Vinh, Hà Nội, 2018).

Cho tứ diện đều $ABCD$. Thiết diện của tứ diện $ABCD$ và mặt phẳng trung trực của cạnh BC là

- A. Hình thang.
 B. Tam giác vuông.
 C. Hình bình hành.
 D. Tam giác cân.

Câu 14 (HK2 khối 11, THPT Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An 2018).

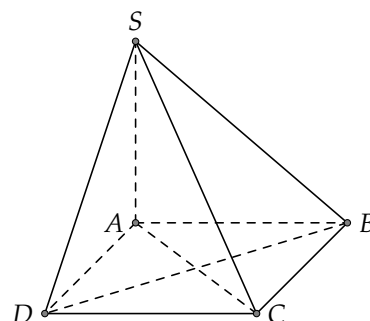
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , ($a > 0$) biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$

- A. 90° .
 B. 45° .
 C. 30° .
 D. 60° .

Câu 15 (Đề HK2, Sở GD và ĐT, Thái Bình, 2018).

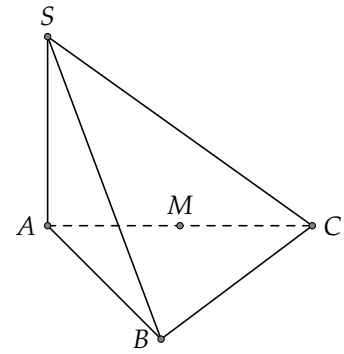
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = 2a$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $AC \perp SD$.
 B. Tam giác SBD cân.
 C. $(SB; CD) = \widehat{SBA}$.
 D. $SC \perp BD$.



Câu 16 (Đề HK2, Sở GD và ĐT, Thái Bình, 2018).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a\sqrt{3}$; gọi M là trung điểm AC . Tính khoảng cách từ M đến mp(SBC).



- A. $d(M, (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $d(M, (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.
C. $d(M, (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $d(M, (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 17 (Đề HK2, Sở Giáo dục & Đào tạo Bình Phước 2017).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $(SBD) \perp (SAC)$. B. $(SCD) \perp (SAD)$. C. $(SAC) \perp (ABC)$. D. $(SBC) \perp (SAB)$.

Câu 18 (Đề HK2, Sở Giáo dục & Đào tạo Bình Phước 2017).

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Biết $AB = CD = a$, $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tìm góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

- A. 60° . B. 90° . C. 30° . D. 120° .

Câu 19 (Đề HK II, THPT Lê Hồng Phong, Khánh Hòa 2018).

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều và chiều cao lăng trụ bằng a , mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy (ABC) góc 60° . Gọi S là diện tích tam giác ABC , giá trị của S bằng

- A. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. B. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. C. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 20 (Đề thi HK2, Lương Thế Vinh, Hà Nội, 2018).

Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' bằng $a\sqrt{3}$ và $AA' = a$. Tính diện tích của ΔABC .

- A. $a^2\sqrt{3}$. B. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. D. $2a^2\sqrt{3}$.

Câu 21 (Thi HK2, THPT Đông Hà, Quảng Trị, 2018).

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(AB'C)$.

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 22 (Thi HK2, THPT Đông Hà, Quảng Trị, 2018).

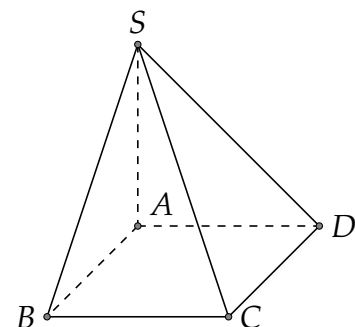
Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm cạnh AB , α là góc giữa hai đường thẳng BD và CM . Tính $\cos \alpha$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 23 (HK2 khối 11, THPT Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An 2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau một góc bằng 60° ?

- A. $x = \frac{a}{2}$. B. $x = a\sqrt{3}$. C. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $x = a$.



Câu 24 (Đề HK2, Sở GD và ĐT, Thái Bình, 2018).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông cân tại A , $AB = a\sqrt{2}$; tam giác SBC đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB .

- A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. B. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. C. $\frac{2a\sqrt{21}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$.

Câu 25 (Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An 2018).

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm của DD' . Khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a}{3}$. C. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 B	4 A	7 D	11 D	14 B	17 A	20 A	23 D
2 C	5 B	8 A	12 A	15 A	18 A	21 C	24 B
3 D	6 B	9 B	13 D	16 B	19 D	22 C	25 B

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Định lí: “Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia”.

- ☒ Khẳng định “Tồn tại một mặt phẳng chứa a và song song với b ” là đúng.
- ☒ Khẳng định “Tồn tại một mặt phẳng chứa b và song song với a ” là đúng.
- ☒ Khẳng định “Tồn tại duy nhất một cặp mặt phẳng lần lượt chứa a, b song song với nhau” là đúng.
- ☒ Vậy khẳng định là “Khoảng cách giữa a và b bằng độ dài đường vuông góc chung của a và b ” là sai.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 2. Nếu đường thẳng $a \perp (P)$ thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a đều vuông góc với mặt phẳng (P) . Nếu $a \parallel (P)$ hoặc $a \subset (P)$ hoặc a cắt và không vuông góc với (P) thì có duy nhất một mặt phẳng chứa a và vuông góc với (P) .

Chọn đáp án **(C)**

Câu 3. Theo định nghĩa hình lăng trụ thì các mặt bên là hình bình hành. Vậy khẳng định “Các mặt bên là hình chữ nhật” là sai.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 4. Theo quy tắc hình hộp thì $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DB'}$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 5. Do H là trọng tâm của tam giác ABD nên $H \in AC$. Ta có

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC).$$

Chọn đáp án **(B)**

Câu 6.

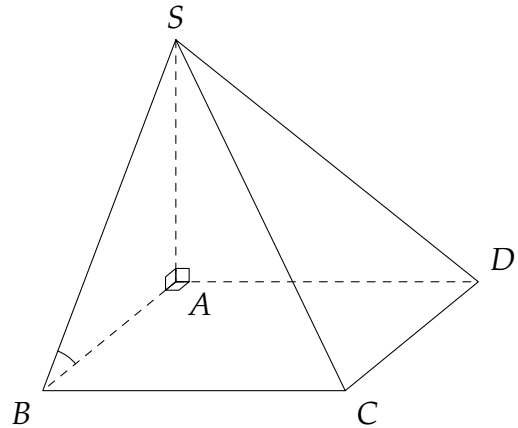
Ta có $CD \parallel AB$.

Suy ra $(SB, CD) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$.

Do $\triangle SAB$ vuông tại A có $SA = AB = a$
nên $\triangle SAB$ vuông cân tại A .

Suy ra $\widehat{SBA} = 45^\circ$.

Vậy $(SB, CD) = 45^\circ$.



Chọn đáp án **(B)**

Câu 7. Theo định nghĩa: Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều. Từ đó, suy ra "Tam giác $B'AC$ đều" là khẳng định sai.

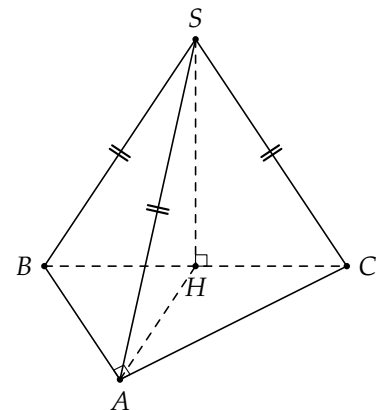
Chọn đáp án **(D)**

Câu 8.

Vì $SA = SB = SC$ và $SH \perp (ABC)$ nên

$\triangle SHA = \triangle SHB = \triangle SHC$.

Do đó $HA = HB = HC$ hay H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên H là trung điểm của BC .

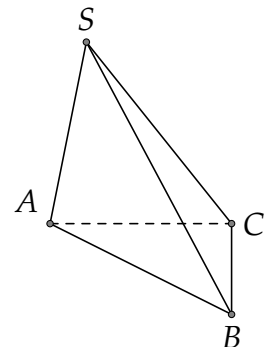


Chọn đáp án **(A)**

Câu 9.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \vec{SB} \cdot \vec{AC} &= \vec{SB}(\vec{SC} - \vec{SA}) \\ &= \vec{SB} \cdot \vec{SC} - \vec{SB} \cdot \vec{SA} \\ &= SB \cdot SC \cos \widehat{BSC} - SB \cdot SA \cos \widehat{ASB} = 0. \end{aligned}$$

Vậy $\vec{SB} \perp \vec{AC}$.



Chọn đáp án **(B)**

Câu 10.

Ta có $CB \perp (SAB)$ vì $(CB \perp BC$ và $CB \perp SA)$.

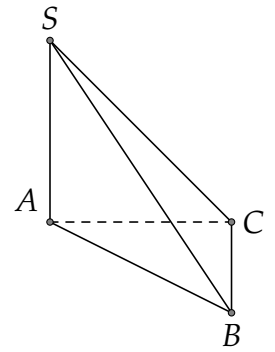
Mặt khác $(SBC) \cap (ABC) = BC$.

Trong mặt phẳng (SBC) có $SB \perp BC$.

Trong mặt phẳng (ABC) có $AB \perp BC$.

Suy ra, $((SBC), (ABC)) = (\overline{SB}, \overline{AB})$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc SBA .



Câu 11.

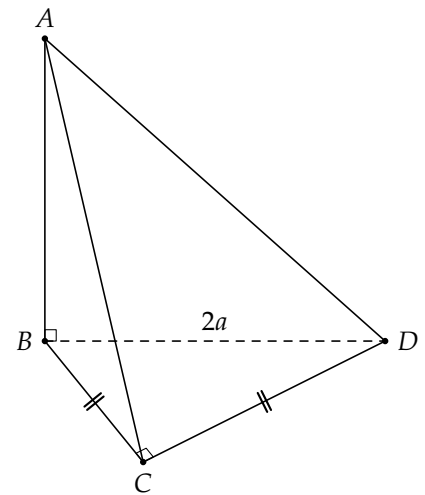
Ta có $\begin{cases} DC \perp BC \\ DC \perp AB \end{cases} \Rightarrow DC \perp (ABC)$.

Vậy $d(D, (ABC)) = DC$.

Vì $\triangle BCD$ vuông cân tại C nên

$$2CD^2 = BD^2 \Leftrightarrow 2CD^2 = 4a^2 \Leftrightarrow CD = a\sqrt{2}.$$

Như thế $d(D, (ABC)) = a\sqrt{2}$.

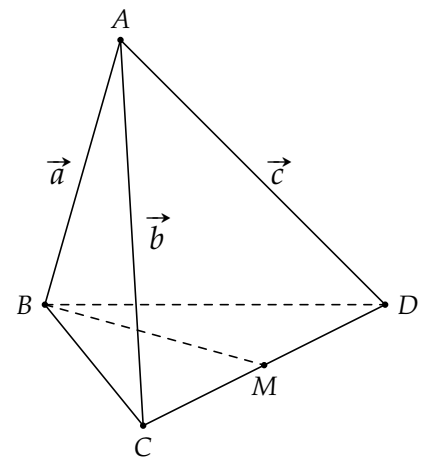


Chọn đáp án **D**

Câu 12.

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a}) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **A**

Câu 13.

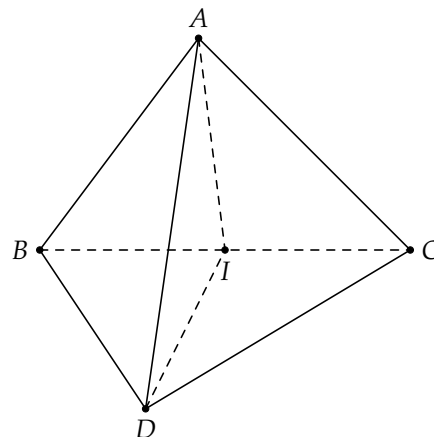
Gọi I là trung điểm của BC .

Ta có $\begin{cases} AI \perp BC \\ DI \perp BC \end{cases}$ nên $BC \perp (AID)$.

Vậy (ADI) chính là mặt trung trực của BC và thiết diện là tam giác ADI . Dễ thấy

$$IA = ID = \frac{AB\sqrt{3}}{2}.$$

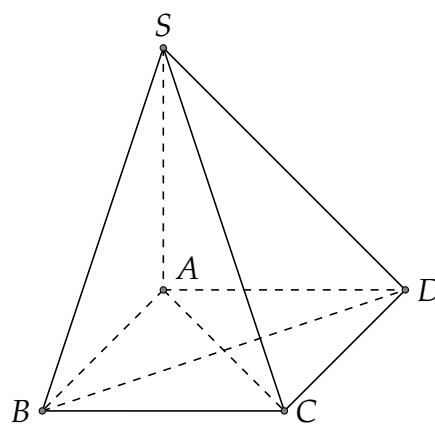
Vậy thiết diện là tam giác cân.



Chọn đáp án **D**

Câu 14.

Ta có $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCA} = 45^\circ$
 $(\triangle SAC \text{ vuông cân tại } A, SA = AC = a\sqrt{2})$



Chọn đáp án **B**

Câu 15.

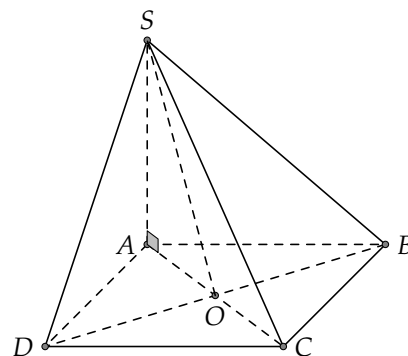
Gọi O là tâm của hình vuông.

Theo giả thiết, suy ra $BD \perp AC$.

Giả sử $AC \perp SD$, suy ra

$AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SO$.

Điều này mâu thuẫn vì tam giác SAO vuông tại A .



Chọn đáp án **A**

Câu 16.

Gọi I là trung điểm đoạn BC , H là hình chiếu vuông góc của A lên

SI . Ta có $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$.

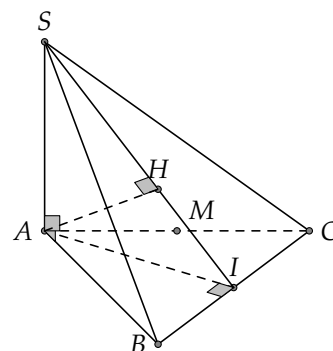
Suy ra, $d(M, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A, (SBC))$. Lại có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{2}{3a^2}.$$

$$\text{Suy ra } AH = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

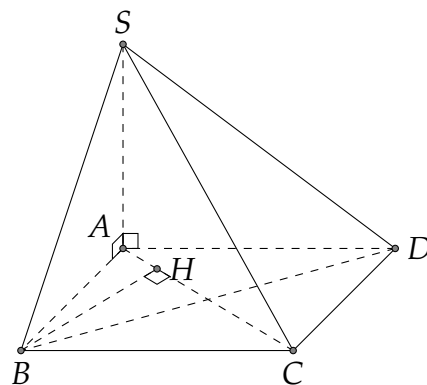
$$\text{Vậy } d(M, (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Chọn đáp án **B**



Câu 17.

Khẳng định **A** sai khi $ABCD$ không phải là hình vuông. Thật vậy, gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên AC (do $ABCD$ là hình chữ nhật và không là hình vuông nên H không trùng với tâm của hình chữ nhật $ABCD$). Khi đó $BH \perp (SAC)$, suy ra (SBH) vuông góc (SAC) . Vậy nếu $(SBD) \perp (SAC)$ thì giao tuyến của (SBD) và (SBH) là SB phải vuông góc với (SAC) . Điều này không xảy ra vì $S.ABCD$ là hình chóp. Vậy khẳng định $(SBD) \perp (SAC)$ là sai.



Chọn đáp án **A**

Câu 18.

Gọi I là trung điểm của AC .

Khi đó ta có

$$MI \parallel AB, MI = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$$

$$\text{và } NI \parallel CD, NI = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2}.$$

Suy ra $(AB, CD) = (MI, NI)$.

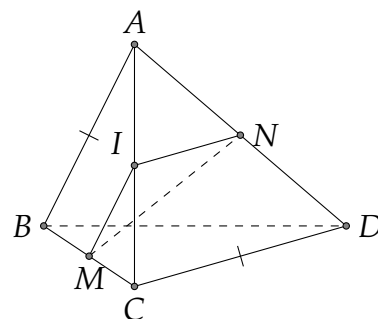
Trong $\triangle MNI$ có

$$\cos \widehat{MIN} = \frac{MI^2 + NI^2 - MN^2}{MI \cdot NI}.$$

$$\text{Hay } \cos \widehat{MIN} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MIN} = 120^\circ.$$

$$\text{Vậy } (AB, CB) = (MI, NI) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

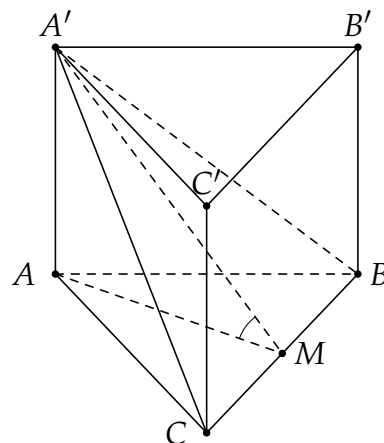
Chọn đáp án **A**

**Câu 19.**

Gọi M là trung điểm của BC . Tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$, lại có $BC \perp AA'$ nên $BC \perp A'M$. Từ đó suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là góc $\widehat{A'MA} = 60^\circ$. Tam giác $A'AM$ vuông tại A nên $AM = \frac{AA'}{\tan 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Gọi độ dài cạnh đáy là x , tam giác MAC vuông tại M nên

$$AM^2 = \frac{a^2}{3} = AC^2 - CM^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow x = \frac{2a}{3}.$$

$$\text{Vậy diện tích tam giác } ABC \text{ là } S = \frac{1}{2}BC \cdot AM = \frac{a^2\sqrt{3}}{9}.$$



Chọn đáp án **D**

Câu 20.

Ta có $CC' \parallel (ABB'A')$ nên
 $d(A'B, CC') = d(CC', (ABB'A'))$
 $= d(C, (ABB'A')) = a\sqrt{3}.$

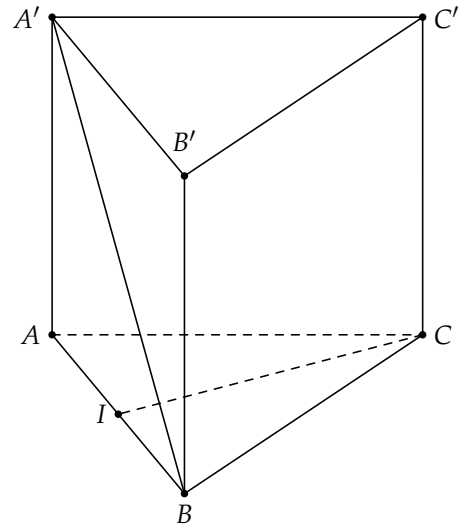
Gọi I là trung điểm của AB .

Ta có $\begin{cases} CI \perp AB \\ CI \perp AA' \end{cases} \Rightarrow CI \perp (ABB'A').$

Vậy $CI = a\sqrt{3}.$

Mà $CI = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$, nên $AB = 2a.$

Từ đó có $S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}.$



Chọn đáp án **A**

Câu 21.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Gọi K là hình chiếu của B lên OB' . Ta có

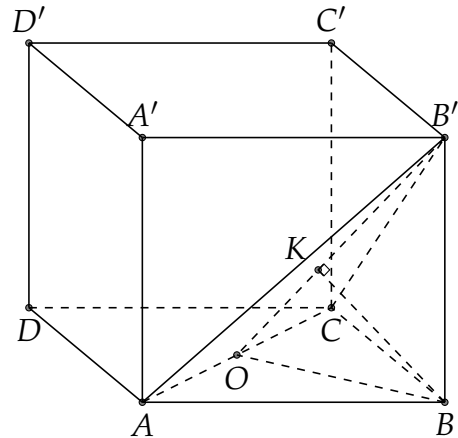
$\begin{cases} AC \perp OB \\ AC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (OBB') \Rightarrow AC \perp BK.$

Ta có $\begin{cases} BK \perp AC \\ BK \perp OB' \end{cases} \Rightarrow BK \perp (AB'C).$

Ta có $OB = \frac{1}{2} \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{AB^2 + AD^2}$

$OB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

Tam giác OBB' vuông tại B có BK là đường cao nên



$$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{BB'^2} \Rightarrow BK = \sqrt{\frac{OB^2 \cdot BB'^2}{OB^2 + BB'^2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}a^2 \cdot a^2}{\frac{1}{2}a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $d(B, (AB'C)) = BK = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

Chọn đáp án **C**

Câu 22.

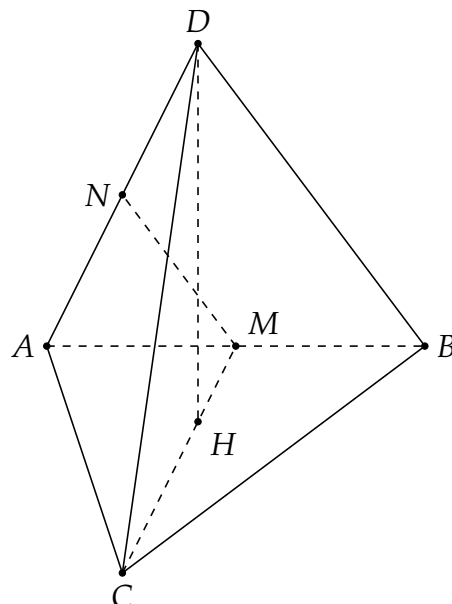
Gọi N là trung điểm AD . Khi đó MN là đường trung bình trong tam giác ABD do đó $MN \parallel BD$.

Vậy $\alpha = (\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{CM})$.

$$\text{Ta có } NM = \frac{BD}{2} = \frac{a}{2}, CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \cos \widehat{NMC} = \frac{MN^2 + MC^2 - NC^2}{2 \cdot MC \cdot MN} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Do đó } \alpha = \widehat{NMC}, \text{ và } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$



Chọn đáp án **C**

Câu 23.

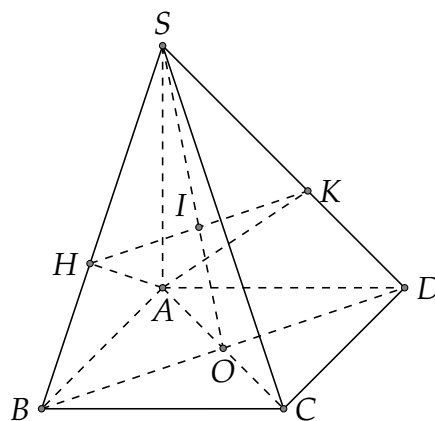
Kẻ $AH \perp SB$ tại H và $AK \perp SD$ tại K . khi đó ta có

$$\begin{cases} AH \perp (SBC) \\ AK \perp (SCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow ((SBC), (SCD)) = (AH, AK).$$

Khi đó ta có $\widehat{AH} = \widehat{AK}$ và $(SBC), (SCD) = \widehat{HAK}$.

Gọi $O = AC \cap BC, I = HK \cap SO$.



Ta có $AI \perp HK$ và

$$\checkmark \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{x^2 + a^2}{x^2 a^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{x^2 a^2}{x^2 + a^2}$$

$$\checkmark \triangle AHK \text{ đều nên } HK = AH \text{ nên } \frac{HK^2}{BD^2} = \frac{x^2}{2(x^2 + a^2)}.$$

$$\checkmark SB^2 = AS^2 + AB^2 = x^2 + a^2.$$

$$\text{Ta có } SA^2 = SH \cdot SB \Rightarrow SH^2 = \frac{x^4}{x^2 + a^2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{SH^2}{SB^2} = \frac{x^4}{(x^2 + a^2)^2}. \text{ Mặt khác } \frac{SH}{SB} = \frac{HK}{BD} \Rightarrow \frac{HK^2}{BD^2} = \frac{x^4}{(x^2 + a^2)^2}.$$

$$\text{Ta có phương trình } \frac{x^2}{2(x^2 + a^2)} = \frac{x^4}{(x^2 + a^2)^2} \Leftrightarrow 2x^2 = x^2 + a^2 \Leftrightarrow x = a.$$

Chọn đáp án **D**

Câu 24.

Gọi D là điểm thứ tư của hình vuông $ABDC$ và H là trung điểm cạnh BC . Khi đó $SH \perp (ABCD)$. Ta có
 $d(AC, SB) = d(AC, (SBD)) = d(A, (SBD))$
 $= 2d(H, (SBD)).$

Gọi K là trung điểm cạnh BD , kẻ $HI \perp SK$, suy ra
 $d(AC, SB) = 2d(H, (SBD)) = 2HI.$

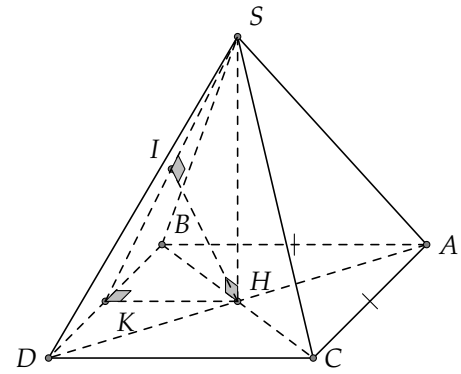
Xét tam giác SHK vuông tại H , ta có

$$HK = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SH = BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{KH^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Vậy } d(AC, SB) = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

Chọn đáp án **(B)**



Câu 25.

Gọi M là trung điểm BB' . Ta có $A'M \parallel KC$ nên
 $d(CK, A'D) = d(CK, (A'MD)) = d(K, (A'MD)).$

Đặt $d(CK, A'D) = x$. Ta có:

$$\begin{aligned} V_{A'MDK} &= V_{KA'MD} = \frac{1}{3} S_{A'MD} \cdot x \\ &= \frac{1}{3} S_{A'DK} \cdot d(M, (A'DK)) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\right) \cdot a = \frac{a^3}{12}. \end{aligned}$$

Do đó $S_{A'MD} \cdot x = \frac{a^3}{4}.$

Hạ DI vuông góc $A'M$.

Khi đó AI vuông góc $A'M$ nên

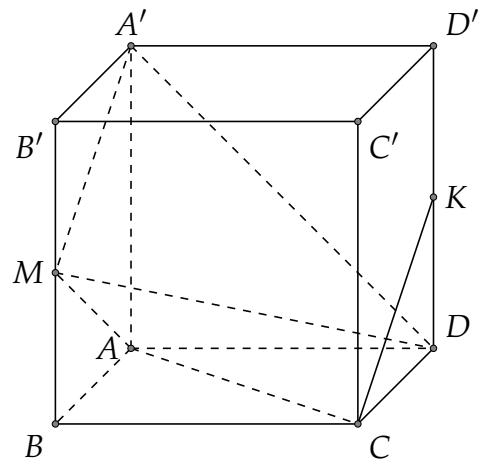
$$AI \cdot A'M = AA' \cdot d(M, AA') = a^2 \Rightarrow AI = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Do đó } DI^2 = DA^2 + AI^2 = a^2 + \frac{4a^2}{5} = \frac{9a^2}{5} \Rightarrow DI = \frac{3a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy } S_{A'MD} = \frac{1}{2} DI \cdot A'M = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{3a^2}{4}.$$

$$\text{Như thế } d(CK, A'D) = x = \frac{a}{3}.$$

Chọn đáp án **(B)**



F. BÀI TẬP TỰ LUẬN ÔN TẬP CHƯƠNG

1. Đề bài

Bài 1. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác đều ABC và

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA}.$$

Chứng minh rằng: $SA = SB = SC$.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$.

- Chứng minh $BD \perp SC$.
- Chứng minh $(SAB) \perp (SBC)$.
- Cho $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD .

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $SD = a\sqrt{7}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB .

- Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.
- Tính góc hợp bởi các mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.
- Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (MND) .

Bài 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, đường cao $SO = a\sqrt{3}$. Gọi I, M, N lần lượt là trung điểm của SO, CD, CB .

- Chứng minh rằng $O = AC \cap BD$, $CD \perp (SOM)$, $(SOM) \perp (SCD)$. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SCD) .
- Tính góc giữa các mặt phẳng (SBC) và (SCD) .
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD .

Bài 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SC .

- Chứng minh $AC \perp SD$.
- Chứng minh $MN \perp (SBD)$.
- Cho $AB = SA = a$. Tính cosin của góc giữa (SBC) và $(ABCD)$.

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng a , hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm H của ΔABC , $SH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

- Chứng minh rằng $SH \perp CD$ và $AC \perp (SBD)$.
- Tính góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$.
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC .

Bài 7 (ĐH-2004B). Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$). Tính tan góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$ theo β .

Bài 8 (HK2 khối 11, 2017 - 2018 Sở Giáo Dục Hà Nam).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$ và cạnh bên $SA \perp (ABCD)$. Gọi E là trung điểm BC .

- ① Chứng minh tam giác SCD là tam giác vuông.
- ② Chứng minh $(SAE) \perp (SDE)$.
- ③ Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SDE) bằng a . Chứng minh rằng tam giác SAE là tam giác cân.

Bài 9. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$.

- a) Tính khoảng cách từ S đến $(ABCD)$.
- b) Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và (SCD) .
- c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC .
- d) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC , hãy xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (P) . Tính diện tích thiết diện.
- e) Tính góc giữa đường thẳng AB và (P) .

Bài 10 (ĐH 2007A). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, CD . Chứng minh rằng $AM \perp BP$.

Bài 11 (ĐH-2011A-Phần Chung). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M là trung điểm của AB ; mặt phẳng qua SM và song song với BC , cắt AC tại N . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a .

Bài 12. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc.

- a) Chứng minh các mặt phẳng $(ABC), (ACD), (ADB)$ đôi một vuông góc.
- b) Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa (BCD) với các mặt phẳng $(ACD), (ADB), (ABC)$. Chứng minh rằng $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Bài 13. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = BC = a, AC = BD = b, AB = CD = c$.

- a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC .
- b) Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AC và BD . Tính $\cos \alpha$.

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a và $(SAB) \perp (ABCD)$.

- a) Chứng minh $\triangle SCD$ là tam giác cân.
- b) Tính số đo góc của hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.
- c) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung giữa AB và SC .

Bài 15. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 1, AC = 2, AD = 3$ và $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 60^\circ$. Tìm đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC .

Bài 16. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Cho điểm M thay đổi trong không gian. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{3}MA + MB + MC + MD$.

Bài 17. Cho tứ diện $S.ABC$ với $SA = SB = SC = 1$. Mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm G của tứ diện cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại D, E, F .

- a) Chứng minh rằng đường thẳng SG đi qua trọng tâm S' của tam giác ABC và $\overrightarrow{SG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SS'}$.
- b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{SD \cdot SE} + \frac{1}{SE \cdot SF} + \frac{1}{SF \cdot SD}.$$

Bài 18. Cho hình $S.ABC$ với $SA = a, SB = b, SC = c$. Mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm G của tứ diện cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{SA_1^2} + \frac{1}{SB_1^2} + \frac{1}{SC_1^2}.$$

Bài 19. Xét tứ diện $SABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc. Các mặt bên $(SBC), (SCA), (SAB)$ theo thứ tự hợp với mặt (ABC) những góc α, β, γ .

- a) Chứng minh rằng: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.
- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma + \cot^2 \alpha + \cot^2 \beta + \cot^2 \gamma.$$

2. Lời giải

Câu 1. Ta có: $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA})^2 = SB^2 - 2\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} + SA^2$.

Suy ra: $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \frac{SA^2 + SB^2 - AB^2}{2}$. Tương tự:

$$\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = \frac{SB^2 + SC^2 - BC^2}{2}, \quad \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA} = \frac{SC^2 + SA^2 - AC^2}{2}.$$

Sử dụng giả thiết: $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA}$, $AB = BC = CA$, ta được:

$$\begin{cases} SA^2 + SB^2 = SB^2 + SC^2 \\ SB^2 + SC^2 = SC^2 + SA^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SA^2 = SC^2 \\ SB^2 = SA^2 \end{cases} \Leftrightarrow SA = SB = SC.$$

Câu 2.

a) Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$ (1)

Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra $SA \perp BD$. (2)

Vì $SA \cap AC = A$ nên từ (1) và (2) suy ra $BD \perp (SAC)$, do đó $BD \perp SC$.

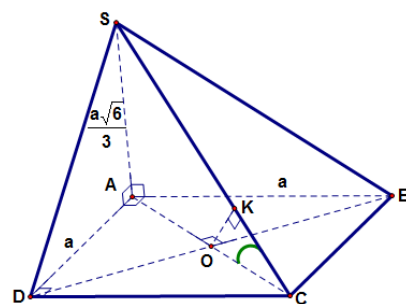
b) $BC \perp AB$ (do $ABCD$ là hình vuông). (3)

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$. (4)

Từ (3) và (4) $BC \perp (SAB)$ mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SAB) \perp (SBC)$.

c) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên suy ra hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ là AC . Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$. Ta có

$$\tan (SC, (ABCD)) = \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ.$$



Ta có (SAC) là mặt phẳng chứa SC và vuông góc với BD . Gọi $O = AC \cap BD$. Trong (SAC) , từ O , kẻ $OK \perp SC$ tại K . Vì $BD \perp (SAC)$ mà $OK \subset (SAC)$ nên $BD \perp OK$. Vậy OK là đoạn vuông góc chung của SC và BD . Ta có

$$SC = \sqrt{AS^2 + AC^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{3} + 2a^2} = \sqrt{\frac{8a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Vì $\triangle CKO$ đồng dạng với $\triangle CAS$ nên

$$\frac{CO}{SC} = \frac{OK}{SA} \Rightarrow OK = \frac{CO \cdot SA}{SC} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{6}}{2 \cdot 3 \cdot SC} = \frac{a^2 \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{6 \cdot 2\sqrt{2}a} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 3.

$$a) SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AD. \end{cases}$$

Suy ra các tam giác SAB, SAD vuông tại A .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA. \end{cases}$$

Suy ra $BC \perp SB$, do đó $\triangle SBC$ vuông tại B .

$$\text{Ta có } \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA. \end{cases}$$

Suy ra $CD \perp SD$, do đó $\triangle SDC$ vuông tại D .

b) Ta có $(SCD) \cap (ABCD) = CD$,
 $AD \subset (ABCD), AD \perp CD$,
 $SD \subset (SCD), SD \perp CD$.

$$\text{Vậy } ((SCD), (ABCD)) = \widehat{SDA}; \cos \widehat{SDA} = \frac{AD}{SD} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Suy ra $\cos \widehat{SDA} \approx 49^\circ 6'$.

$$c) \text{ Ta có: } \begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD). \text{ Mà } MN \parallel AB \text{ nên } MN \perp (SAD).$$

Kẻ $SH \perp DM$ tại H . Vì $(MND) \perp (SAD), (MND) \cap (SAD) = DM, SH \perp DM$ nên $SH \perp (MND)$, do đó $d(S, (MND)) = SH$. Ta có:

$$SA^2 = SD^2 - AD^2 = 7a^2 - 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow MA = \frac{SA}{2} = a.$$

$$\text{Suy ra } \tan \widehat{SMH} = \frac{AD}{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}. \text{ Do đó } \widehat{SMH} = 60^\circ.$$

$$\text{Tam giác } SHM \text{ có } \widehat{SHM} = 90^\circ \Rightarrow SH = SM \cdot \sin \widehat{SMH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 4.

a) Vì $SA = SB = SC = SD$ nên

$$\triangle SOA = \triangle SOB = \triangle SOC = \triangle SOD.$$

Suy ra $OA = OB = OC = OD$, mà $ABCD$ là hình vuông nên

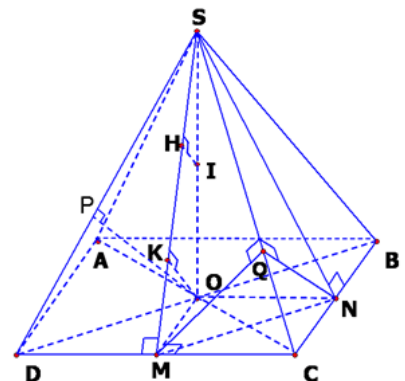
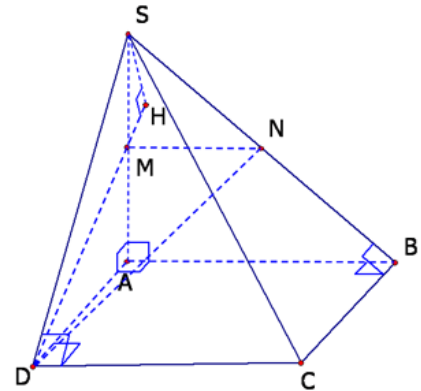
$O = AC \cap BD$. Ta có

$$\begin{cases} CD \perp OM \subset (SOM) \\ CD \perp OS \subset (SOM) \\ OM \cap OS = O \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM).$$

Mà $CD \subset (SCD)$ nên $(SCD) \perp (SOM)$. Gọi K là hình chiếu của

O trên SM , ta có

$$\begin{cases} OK \perp SM \subset (SCD) \\ OK \perp CD \subset (SCD) \\ SM \cap CD = M \end{cases} \Rightarrow OK \perp (SCD).$$



Gọi H là trung điểm SK , khi đó $IH \parallel OK$, do đó $IH \perp (SCD)$ và $IH = \frac{OK}{2}$. Vì OK là đường cao của tam giác vuông SOM nên

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d(I, (SCD)) = IH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

b) Kẻ $MQ \perp SC$ tại Q . Vì $\triangle SMC = \triangle SNC$ (c-c-c), nên từ $MQ \perp SC$ suy ra $NQ \perp SC$. Lại có $(SCD) \cap (SCB) = SC$, suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SCB) là góc giữa hai đường thẳng QM và QN . Ta có

$$\begin{aligned} SM^2 &= OM^2 + SO^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2. \\ \frac{1}{MQ^2} &= \frac{1}{MS^2} + \frac{1}{MC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow MQ^2 = \frac{4a^2}{5} \\ \Rightarrow \cos \widehat{MQN} &= \frac{MQ^2 + NQ^2 - MN^2}{2MQ \cdot NQ} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \widehat{MQN} = 104^\circ 29'. \end{aligned}$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SCB) bằng $75^\circ 31'$.

c) $AC \perp BD$, $AC \perp SO \subset (SBD)$ (do $SO \perp (ABCD)$), suy ra $AC \perp (SBD)$. Trong SOD hạ $OP \perp SD$ thì cũng có $OP \perp AC$.

$$\frac{1}{OP^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{5}{6a^2} \Rightarrow d(AC, BD) = OP = \frac{a\sqrt{30}}{5}.$$

Câu 5.

a) Gọi O là hình chiếu của S trên $(ABCD)$.

Vì $SA = SB = SC = SD$ nên

$$\triangle SOA = \triangle SOB = \triangle SOC = \triangle SOD.$$

Suy ra $OA = OB = OC = OD$, mà $ABCD$ là hình vuông nên

$O = AC \cap BD$. Ta có:

$$\begin{cases} AC \perp BD \subset (SBD) \\ AC \perp SO \subset (SBD) \Rightarrow AC \perp (SBD). \\ BD \cap SO = O \end{cases}$$

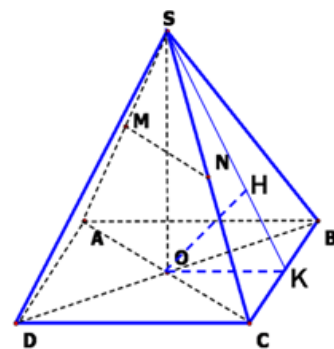
Mà $SD \subset (SBD)$ nên $AC \perp SD$.

b) Từ giả thiết M, N là trung điểm các cạnh SA, SC ta có $MN \parallel AC$.

Mà $AC \perp (SBD)$ nên $MN \perp (SBD)$.

c) Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều và $AB = SA = a$ nên $\triangle SBC$ đều cạnh a . Gọi K là trung điểm BC . Khi đó $OK \perp BC$ và $SK \perp BC$. Gọi ϕ là góc giữa (SBC) và $(ABCD)$. Ta có $\phi = \widehat{SKO}$. Tam giác vuông SOK có

$$OK = \frac{a}{2}, SK = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \cos \phi = \cos \widehat{SKO} = \frac{OK}{SK} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Câu 6.

a) Ta có $SH \perp (ABCD)$ (theo giả thiết) mà CD nằm trong $(ABCD)$ nên $SH \perp CD$.

Ta có $AC \perp BD$ (do $ABCD$ là hình vuông).

$AC \perp SH$ (vì $SH \perp (SACD)$).

AH, BD cắt nhau và chứa trong (SBD) .

Suy ra $AC \perp (SBD)$.

b) Do $SH \perp (ABCD)$ nên OH là hình chiếu của SO lên $(ABCD)$, suy ra góc giữa SO và $(ABCD)$ là $\widehat{SOH}$.

Ta có:

$$HO = \frac{1}{3}BO = \frac{1}{6}BD = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{Do đó: } \tan \widehat{SOH} = \frac{SH}{OH} = \frac{a\sqrt{6}}{6} : \frac{a\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{Hay } \tan \widehat{SOH} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SOH} = 60^\circ.$$

c) Kẻ $HI \perp CD$ tại I . Ta có $SH \perp CD$, suy ra $CD \perp (SHI)$ mà $CD \subset (SCD)$ nên $(SHI) \perp (SCD)$ theo giao tuyến SI . Từ H kẻ $HJ \perp SI$ tại J . Khi đó $HJ \perp (SCD)$ hay J là hình chiếu của H trên (SCD) . Ta có:

$$\begin{cases} AB \not\subset (SCD) \\ AB \parallel CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow AB \parallel (SCD).$$

Mà $SC \subset (SCD)$ nên khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC là

$$d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(B, (SCD)). \quad (1)$$

Do đường thẳng BH cắt (SCD) tại D nên:

$$\frac{d(B, (SCD))}{d(H, (SCD))} = \frac{BD}{HD} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(B, (SCD)) = \frac{3}{2}d(H, (SCD)). \quad (2)$$

Do J là hình chiếu của H trên (SCD) nên $d(H, (SCD)) = HJ$.

HJ là đường cao của tam giác vuông SHI nên:

$$\frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow \frac{1}{HJ^2} = \frac{6}{a^2} + \frac{9}{4a^2} \Rightarrow HJ = \frac{2a}{\sqrt{33}}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $d(AB, SC) = \frac{a\sqrt{33}}{11}$.

Câu 7.

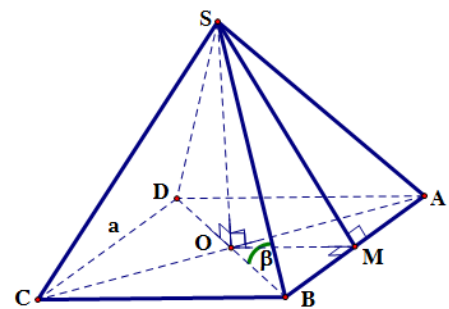
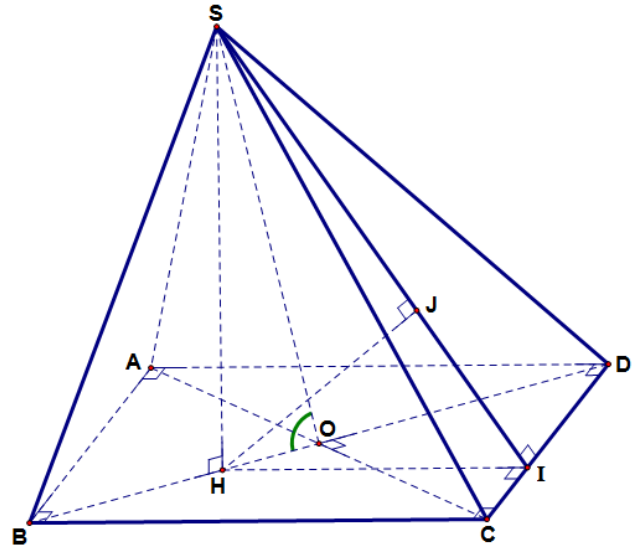
Gọi O là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Khi đó vì các tam giác SOA, SOB, SOC, SOD bằng nhau nên các cạnh OA, OB, OC, OD bằng nhau hay O là giao điểm của AC và BD . Hình chiếu của cạnh bên SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là OB , do đó $\widehat{SBO} = \beta$. Gọi M là trung điểm AB . Khi đó

$$\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ MS \subset (SAB), MS \perp AB \\ MO \subset (ABCD), MO \perp AB. \end{cases}$$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ là $\widehat{SMO}$.

Ta có

$$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{OB \tan \beta}{0,5a} = \frac{a\sqrt{2} \tan \beta}{a} = \sqrt{2} \tan \beta.$$



Câu 8.

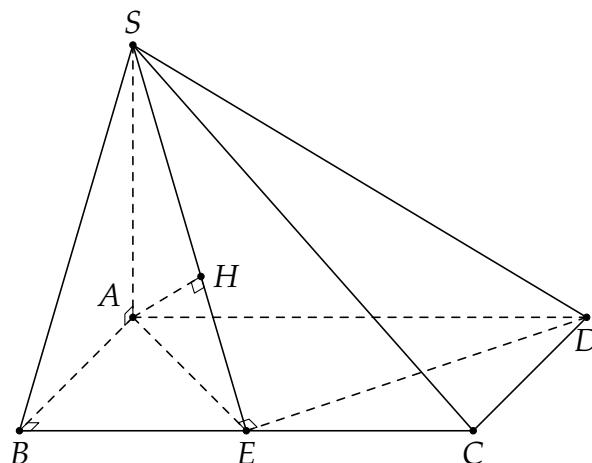
- ① Ta có $CD \perp AD$ và $CD \perp SA$ suy ra $CD \perp (SAD)$, do đó $CD \perp SD$. Vậy $\triangle SCD$ vuông tại D .

- ② Ta có
- $$\begin{aligned} AE^2 + DE^2 &= (AB^2 + BE^2) + (DC^2 + EC^2) \\ &= 2AB^2 + 2BE^2 = 4a^2 \\ &= AD^2. \end{aligned}$$

Do đó $DE \perp AE$.

Mà $DE \perp SA$ nên $DE \perp (SAE)$.

Suy ra $(SDE) \perp (SAE)$.



- ③ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SE .
Vì $DE \perp (SAE)$ nên $DE \perp AH$ (do $AH \subset (SAE)$).

Ta có $\begin{cases} AH \perp SE \\ AH \perp DE \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SDE)$. Vậy $d(A, (SDE)) = AH = a$. Xét $\triangle AHE$ ta có

$$\sin \widehat{AEH} = \frac{AH}{AE} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Do đó, $\widehat{AEH} = 45^\circ$. Mà $\triangle SAE$ vuông tại A do đó $\triangle SAE$ vuông cân tại A .

Câu 9.

Gọi H là hình chiếu của S trên $(ABCD)$.

Vì $SA = SB = SC = SD$ nên các tam giác $\triangle SHA$, $\triangle SHB$, $\triangle SHC$, $\triangle SHD$ bằng nhau. Suy ra $HA = HB = HC = HD$. Mà $ABCD$ là hình vuông nên H là giao điểm của AC và BD .

a) Khoảng cách từ S đến $(ABCD)$ là SH . Vì SH là đường cao của tam giác SAC đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên

$$SH = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD .

Vì $\begin{cases} AB \not\subset (SCD) \\ AB \parallel CD \subset (SCD) \end{cases}$ nên $AB \parallel (SCD)$. Vậy $d(AB; (SCD)) = d(E; (SCD))$. Trong $\triangle SEF$, gọi K là hình chiếu của E trên SF . Khi đó

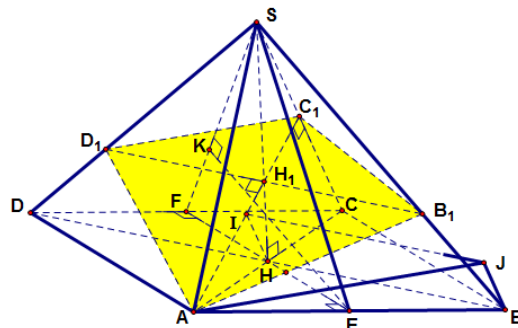
$$\begin{cases} EK \perp SF \subset (SCD) \\ EK \perp CD \subset (SCD) \\ SF \cap CD = F \end{cases} \Rightarrow EK \perp (SCD) \Rightarrow d(E; (SCD)) = EK.$$

Ta có $SF^2 = SD^2 - FD^2 = 2a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}$. Lại có

$$EK \cdot SF = SH \cdot EF \Rightarrow EK = \frac{SH \cdot EF}{SF} = \left(\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a \right) : \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

c) Vì AB và SC chéo nhau, $AB \parallel (SCD)$ nên

$$d(AB; SC) = d(AB; (SCD)) = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$



d) Gọi C_1 là trung điểm SC , do ΔSAC đều nên $AC_1 \perp SC$. Mặt khác $BD \perp SC$ nên (P) chính là mặt phẳng chứa AC_1 và song song với BD . Gọi H_1 là giao điểm của AC_1 và SH . Khi đó giao tuyến của (P) và (SBD) là B_1D_1 , trong đó B_1D_1 đi qua H_1 và song song với BD ($B_1 \in SB$, $D_1 \in SD$). Vậy thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi (P) là tứ giác $AB_1C_1D_1$. Ta có $BD \perp (SAC)$, $B_1D_1 \parallel BD$ nên $B_1D_1 \perp (SAC)$, suy ra $B_1D_1 \perp AC_1$. Từ đó

$$S_{AB_1C_1D_1} = \frac{1}{2} AC_1 \cdot B_1D_1,$$

với $AC_1 = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $B_1D_1 = \frac{2}{3}BD$ (do H_1 là trọng tâm ΔSAC). Vì vậy

$$S_{AB_1C_1D_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$

e) Trong (SAC) , kẻ HI song song với CC_1 cắt AC_1 tại I thì $HI \perp (P)$ (vì $SC \perp (P)$). Ta lấy điểm J sao cho $BHIJ$ là hình bình hành thì $BJ \perp (P)$, từ đó $\widehat{BAJ}$ là góc giữa BA và (P) . Ta có

$$\sin \widehat{BAJ} = \frac{BJ}{BA} = \frac{HI}{BA} = \frac{CC_1}{2BA} = \frac{SC}{4BA} = \frac{a\sqrt{2}}{4a} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \widehat{BAJ} \approx 20^\circ 42'.$$

Câu 10. Phân tích. Giả thiết cho (SAD) vuông góc với $(ABCD)$ theo giao tuyến AD nên ta sẽ sử dụng định lý 3 (ở trang 93) để suy ra $AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AS$. Ta sẽ biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BP}$ theo ba vectơ không cùng phương (cơ sở). Do $AB \perp AD$, $AB \perp AS$, $\widehat{SAD} = 60^\circ$ nên trong bài tập này cơ sở tốt nhất là ba vectơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AB}$.

Giải. Ta có (SAD) vuông góc với $(ABCD)$ theo giao tuyến AD và AB vuông góc với giao tuyến AD nên AB vuông góc với (SAD) , suy ra AB vuông góc với AS . Ta sẽ biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BP}$ theo ba vectơ không cùng phương $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AB}$.

Ta có:

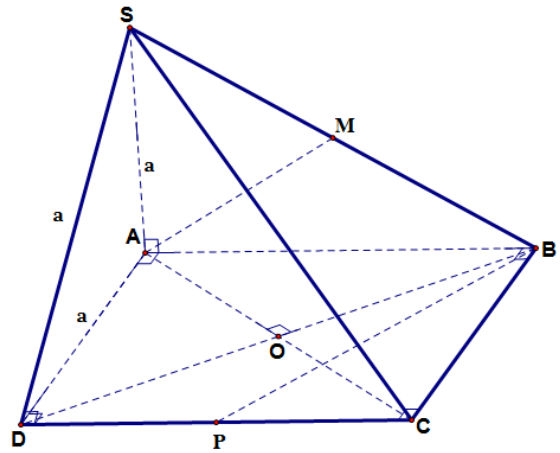
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB}).$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BP} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB}) \left(\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \right) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(AS \cdot AD \cdot \cos \widehat{SAD} - \frac{1}{2}AB^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(a^2 \cos 60^\circ - \frac{1}{2}a^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Như vậy: $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BP} \Rightarrow AM \perp BP$.



Câu 11. Phân tích. Giả thiết cho hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên ta sẽ sử dụng hệ quả 2 ở trang 93. Để xác định vị trí của điểm N cần xem lại định lý ?? ở trang ?? . Bài tập này yêu cầu tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a mà không yêu cầu dựng đoạn vuông góc chung nên ta có thể sử dụng chú ý 10 ở trang 137.

Giải.

Cách 1. Từ giả thiết suy ra $SA \perp (ABC)$. Ta có $BC \perp BA$ mà BA là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (ABC) nên $BC \perp BS$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BA \subset (ABC), BA \perp BC \\ SB \subset (SBC), SB \perp BC. \end{cases}$$

Từ đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

$$\text{Ta có } \tan 60^\circ = \frac{SA}{AB} \Rightarrow SA = AB \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}.$$

Từ giả thiết suy ra $MN \parallel BC$, do đó N là trung điểm AC .

Trong (ABC) , gọi d là đường thẳng qua N và $d \parallel AB$. Hạ AQ vuông góc với d tại Q . Ta có:

$$AB \parallel (SQN) \Rightarrow d(AB; SN) = d(AB; (SQN)) = d(A; (SQN)).$$

Hạ AH vuông góc với SQ tại H . Ta có

$$\begin{cases} NQ \perp QA \subset (SAQ) \\ NQ \perp SA \subset (SAQ) \\ QA \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow NQ \perp (SAQ) \Rightarrow (SQN) \perp (SAQ).$$

Từ đó

$$\begin{cases} (SQN) \perp (SAQ) \\ (SQN) \cap (SAQ) = SQ \\ AH \subset (SAQ), AH \perp SQ \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SQN) \Rightarrow d(A; (SQN)) = AH.$$

Trong tam giác vuông SAQ , ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AQ^2} = \frac{1}{12a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{13}{12a^2} \Rightarrow d(AB; SN) = AH = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

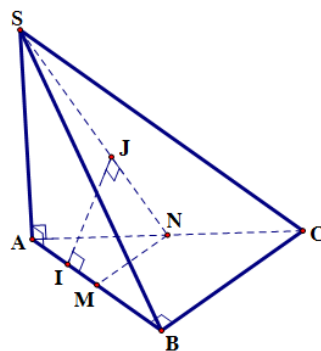
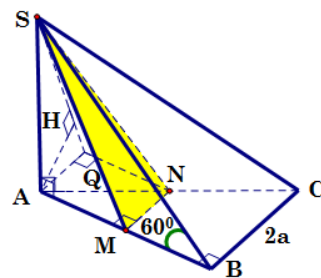
Cách 2. Gọi IJ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và SN (điểm I thuộc đường thẳng AB và điểm J thuộc đường thẳng SN). Ta sẽ biểu thị $\vec{IJ}$ qua ba vectơ không cùng phương $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AS}$.

$$\begin{aligned} \vec{IJ} &= \vec{IA} + \vec{AN} + \vec{NJ} \\ &= m\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} + p\vec{NS} \\ &= m\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} + p(\vec{NA} + \vec{AS}) \\ &= m\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} + p\vec{AS} - \frac{p}{2}\vec{AC} \\ &= m\vec{AB} + \frac{1-p}{2}\vec{AC} + p\vec{AS}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \vec{IJ} \perp \vec{AB} \\ \vec{IJ} \perp \vec{NS} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{IJ} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{IJ} \cdot \vec{NS} = 0 \end{cases}$$

Như vậy:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} [2m\vec{AB} + (1-p)\vec{AC} + 2p\vec{AS}] \cdot \vec{AB} = 0 \\ [2m\vec{AB} + (1-p)\vec{AC} + 2p\vec{AS}] \cdot \vec{NS} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2mAB^2 + (1-p)\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \\ [2m\vec{AB} + (1-p)\vec{AC} + 2p\vec{AS}] \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{AS}\right) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 8ma^2 + (1-p)2a \cdot 2\sqrt{2}a \cdot \cos 45^\circ = 0 \\ -m\vec{AB} \cdot \vec{AC} - \frac{(1-p)AC^2}{2} + 2pAS^2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} 8ma^2 + (1-p)4a^2 = 0 \\ -4ma^2 - 4(1-p)a^2 + 24pa^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + (1-p) = 0 \\ m + (1-p) - 6p = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - p = -1 \\ m - 7p = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (m; p) = \left(-\frac{6}{13}; \frac{1}{13}\right). \end{aligned}$$

Do đó: $\vec{IJ} = -\frac{6}{13}\vec{AB} + \frac{6}{13}\vec{AC} + \frac{1}{13}\vec{AS}$. Suy ra:

$$\begin{aligned} 169IJ^2 &= \left(6\vec{AC} - 6\vec{AB} + \vec{AS}\right)^2 \\ &= 36AC^2 + 36AB^2 + AS^2 - 72\vec{AB} \cdot \vec{AC} \\ &= 288a^2 + 144a^2 + 12a^2 - 288a^2 = 156a^2. \end{aligned}$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN là: $IJ = \sqrt{\frac{156}{169}a^2} = \frac{2\sqrt{39}a}{13}$.

Lưu ý. Khi lựa chọn bộ ba vectơ không cùng phương (lựa chọn cơ sở) ta nên chọn ba vectơ cùng gốc và giá của ba vectơ đó vuông góc với nhau. Trường hợp tốt nhất là giá của ba vectơ cơ sở đôi một vuông góc với nhau. Trong bài tập 11 này ta không có được cơ sở tốt nhất nhưng vẫn đủ để xử lý đó là $AS \perp AB$, $AS \perp AC$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

Câu 12.

a) Vì $BA \perp AC$, $BA \perp AD$ nên $BA \perp (ACD)$. Mặt khác BA là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) nên góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) bằng góc giữa hai đường thẳng AC và AD , mà $AC \perp AD$ nên $(ABC) \perp (ABD)$. Tương tự như trên ta cũng có $(ABC) \perp (ACD)$, $(ACD) \perp (ABD)$.

b) Kẻ đường cao AH của tam giác ACD , do $AB \perp (ACD)$ nên $AB \perp CD$, từ đó

$$\begin{cases} CD \perp AH \subset (ABH) \\ CD \perp AB \subset (ABH) \\ AH \cap AB = A \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp BH.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (BCD) \cap (ACD) = CD \\ AH \subset (ACD), AH \perp CD \\ BH \subset (BCD), BH \perp CD. \end{cases}$$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (BCD) và (ACD) là $\widehat{BHA} = \alpha$. Kí hiệu $AB = b$, $AC = c$, $AD = d$. Ta có

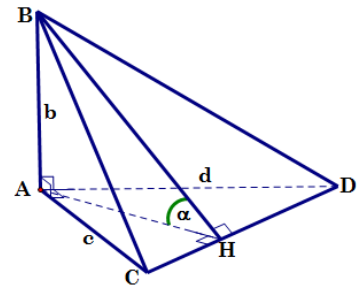
$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{b}{AH'} \cdot \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{b^2(c^2 + d^2)}{c^2 d^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} &= \frac{c^2 d^2}{b^2 c^2 + c^2 d^2 + d^2 b^2} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{c^2 d^2}{b^2 c^2 + c^2 d^2 + d^2 b^2}. \end{aligned}$$

Tương tự

$$\cos^2 \beta = \frac{b^2 d^2}{b^2 c^2 + c^2 d^2 + d^2 b^2}, \quad \cos^2 \gamma = \frac{b^2 c^2}{b^2 c^2 + c^2 d^2 + d^2 b^2}.$$

Từ đó $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Câu 13.



a) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC, AB . Ta có $\triangle ABC = \triangle DBC$ (c-c-c) suy ra $AN = DN$. Do đó $\triangle NAD$ cân tại N , suy ra $MN \perp AD$. Tương tự chứng minh được $MN \perp BC$, do đó MN là đoạn vuông góc chung của AD và BC . Sử dụng công thức đường trung tuyến cho tam giác ABC ta có:

$$AN^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} = \frac{2(c^2 + b^2) - a^2}{4}$$

$$MN^2 = AN^2 - AM^2 = \frac{2(c^2 + b^2) - a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$

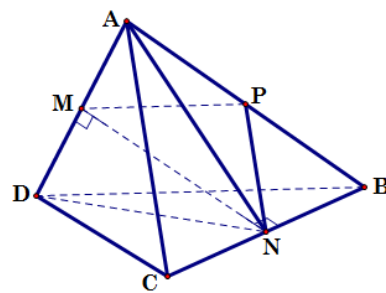
$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC bằng $MN = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}$.

b) Do $MP \parallel BD$ và $NP \parallel AC$ nên góc giữa hai đường thẳng AC, BD bằng góc giữa hai đường thẳng PM, PN , vậy:

$$\cos \alpha = \left| \cos \widehat{MPN} \right| = \frac{|PM^2 + PN^2 - MN^2|}{2PM \cdot PN}$$

$$= \frac{\left| \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \right|}{2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2}} = \frac{|c^2 - a^2|}{b^2}.$$



Câu 14.

Gọi I, M lần lượt là trung điểm của AB và CD .

a) Do $\triangle SAB$ đều nên SI vuông góc với AB . Ta có (SAB) vuông góc với $(ABCD)$ theo giao tuyến AB và SI nằm trong (SAB) , SI vuông góc với AB nên SI vuông góc với $(ABCD)$. Ta có hình chiếu của SC, SD trên $(ABCD)$ là IC, ID , mà $IC = ID$ nên $SC = SD$, do đó $\triangle SCD$ cân tại S .

b) Ta có:

$$\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ (SIM) \perp CD \\ (SIM) \cap (SCD) = SM \\ (SIM) \cap (ABCD) = IM \end{cases}$$

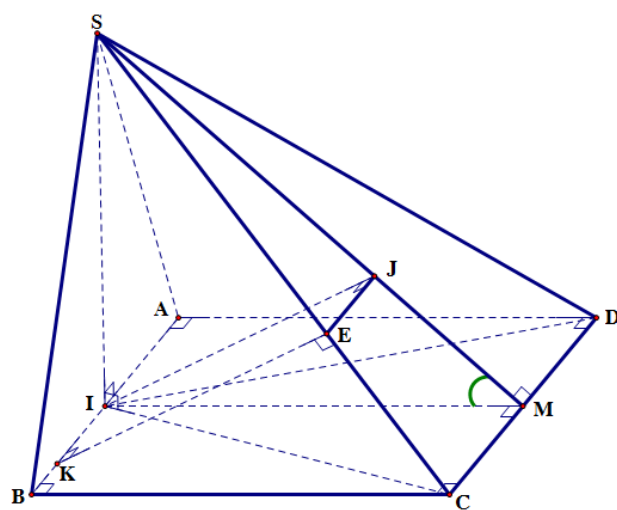
Suy ra $((SCD), (ABCD)) = (\widehat{SM, IM}) = \widehat{SMI}$.

Do $\triangle SMI$ vuông tại I nên $\tan \widehat{SMI} = \frac{SI}{IM} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng

(SCD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SMI} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 40^\circ 54'$.

c) Ta sẽ dựng đoạn vuông góc chung giữa AB và SC theo các bước như đã trình bày ở cách 4 của dạng 18 (ở trang 137):

- ☑ Mặt phẳng (SMI) vuông góc với AB tại I .
- ☑ Hình chiếu của SC trên (SMI) là SM (do $CM \perp (SMI)$).
- ☑ Kẻ $IJ \perp SM$ tại J .
- ☑ Vẽ $JE \parallel AB$, cắt SC tại E .



☑ Vẽ $EK \parallel JI$, cắt AB tại K .

Khi đó đường thẳng KE vuông góc với AB tại K và vuông góc với SC tại E nên KE là đoạn vuông góc chung của AB và SC . Ta có:

$$\frac{1}{IJ^2} = \frac{1}{IS^2} + \frac{1}{IM^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow IJ^2 = \frac{3a^2}{7}.$$

Vậy: $KE = IJ = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$

Câu 15.

Kí hiệu M, N tương ứng trên AD và BC sao cho MN vuông góc với AD và BC . Giả sử $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN} = y\overrightarrow{BC} = y(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$.

Khi đó:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -x\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC}.$$

Do $\begin{cases} MN \perp AD \\ MN \perp BC \end{cases}$ nên $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = 0. \end{cases}$

Vậy: $\begin{cases} (-x\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} - y\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ (-x\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} - y\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned} (-x\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} - y\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AD} &= -9x + 3 \cos 60^\circ + 6y \cos 60^\circ - 3y \cos 60^\circ \\ &= -9x + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}y. \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} &(-x\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} - y\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= -3x + 1 + 4y - y + \frac{3}{2}x - 1 - y + y = -\frac{3}{2}x + 3y. \end{aligned}$$

Vậy (*) tương đương với: $\begin{cases} -9x + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}y = 0 \\ -\frac{3}{2}x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{11} \\ y = \frac{1}{11}. \end{cases}$

Kết luận: đường vuông góc chung của AD và BC là MN với

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{11}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BN} = \frac{1}{11}\overrightarrow{BC}.$$

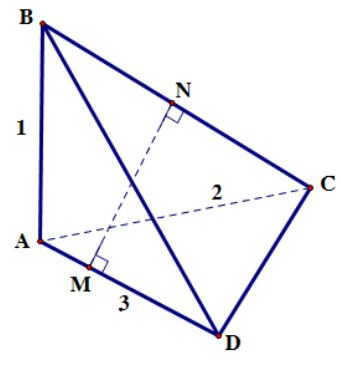
Lưu ý. Dựng đoạn vuông góc chung bằng phương pháp vectơ như trên đã được trình bày ở cách 2 của lời giải bài tập 11 (ở trang 218), bạn đọc hãy xem lại để củng cố phương pháp.

Câu 16. Vì các vectơ $\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}, \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}, \frac{\overrightarrow{AD}}{AD}$ có độ dài bằng 1 và đôi một vuông góc với nhau nên:

$$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} \right)^2 = 3 \Leftrightarrow \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} \right| = \sqrt{3}.$$

Từ đó, với mọi điểm M , ta có:

$$P = \sqrt{3}MA + MB + MC + MD$$



$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC} + \frac{\vec{AD}}{AD} \right| |\vec{AM}| + \frac{MB \cdot AB}{AB} + \frac{MC \cdot AC}{AC} + \frac{MD \cdot AD}{AD} \\
 &\geq \left(\frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC} + \frac{\vec{AD}}{AD} \right) \cdot \vec{AM} + \frac{\vec{MB} \cdot \vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{MC} \cdot \vec{AC}}{AC} + \frac{\vec{MD} \cdot \vec{AD}}{AD} \\
 &= \frac{(\vec{AM} + \vec{MB}) \cdot \vec{AB}}{AB} + \frac{(\vec{AM} + \vec{MC}) \cdot \vec{AC}}{AC} + \frac{(\vec{AM} + \vec{MD}) \cdot \vec{AD}}{AD} \\
 &= \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AC}}{AC} + \frac{\vec{AD} \cdot \vec{AD}}{AD} \\
 &= \frac{\vec{AB}^2}{AB} + \frac{\vec{AC}^2}{AC} + \frac{\vec{AD}^2}{AD} \\
 &= \frac{AB^2}{AB} + \frac{AC^2}{AC} + \frac{AD^2}{AD} \\
 &= AB + AC + AD.
 \end{aligned}$$

Vậy min $P = AB + AC + AD$, đạt được khi M trùng A .

Câu 17. Phân tích. Liên quan đến trọng tâm tứ diện và trọng tâm tam giác, ta có các hệ thức vectơ sau:

$$\begin{aligned}
 \vec{GS} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} &= \vec{0}, \\
 \vec{S'A} + \vec{S'B} + \vec{S'C} &= \vec{0}, \\
 \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} &= 3\vec{SS'}.
 \end{aligned}$$

Để tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{SD \cdot SE} + \frac{1}{SE \cdot SF} + \frac{1}{SF \cdot SD}$$

ta cần tính được giá trị của một biểu thức nào đó liên quan đến SD, SE, SF . Muốn vậy, bạn đọc hãy chú ý bài tập 14 (ở trang 11), sử dụng điều kiện $x + y + z = 1$ để suy ra đẳng thức mà ta cần.

Giải.

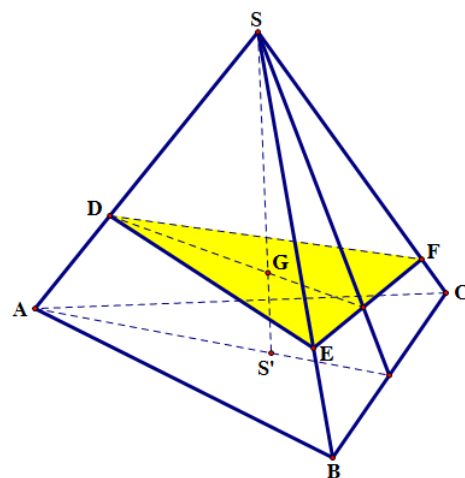
a) Do G là trọng tâm tứ diện $S.ABC$ nên:

$$\begin{aligned}
 \vec{GS} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow 4\vec{GS}' + \vec{S'S} + \vec{S'A} + \vec{S'B} + \vec{S'C} &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow 4\vec{GS}' + \vec{S'S} &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow 4\vec{GS} + 4\vec{SS}' + \vec{S'S} &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow 4\vec{GS} + 3\vec{SS}' &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow 4\vec{SG} &= 3\vec{SS}' \\
 \Leftrightarrow \vec{SG} &= \frac{3}{4}\vec{SS}'.
 \end{aligned}$$

Từ (2) suy ra ba điểm S, G, S' thẳng hàng và ta có điều phải chứng minh.

b) Theo (1), ta có:

$$\begin{aligned}
 4\vec{SG} &= \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} \\
 \Leftrightarrow 4\vec{SG} &= \frac{SA}{SD}\vec{SD} + \frac{SB}{SE}\vec{SE} + \frac{SC}{SF}\vec{SF}. \\
 \Leftrightarrow \vec{SG} &= \frac{SA}{4SD}\vec{SD} + \frac{SB}{4SE}\vec{SE} + \frac{SC}{4SF}\vec{SF}.
 \end{aligned} \tag{3}$$



Do điểm G thuộc mặt phẳng (DEF) nên từ (3), sử dụng bài tập 14 (ở trang 11) suy ra:

$$\frac{SA}{4SD} + \frac{SB}{4SE} + \frac{SC}{4SF} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{SD} + \frac{1}{SE} + \frac{1}{SF} = 4.$$

Sử dụng bất đẳng thức $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2$, ta được:

$$P = \frac{1}{SD \cdot SE} + \frac{1}{SE \cdot SF} + \frac{1}{SF \cdot SD} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{SD} + \frac{1}{SE} + \frac{1}{SF} \right)^2 = \frac{16}{3}.$$

Như vậy $\max P = \frac{16}{3}$, đạt được $\Leftrightarrow SD = SE = SF = \frac{3}{4} \Leftrightarrow (DEF) \parallel (ABC)$.

Câu 18.

Do G là trọng tâm tứ diện $S.ABC$ nên:

$$\begin{aligned} \vec{GS} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 4\vec{GS} + \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 4\vec{SG} &= \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} \\ \Leftrightarrow 4\vec{SG} &= \frac{SA}{SA_1} \vec{SA_1} + \frac{SB}{SB_1} \vec{SB_1} + \frac{SC}{SC_1} \vec{SC_1}. \\ \Leftrightarrow \vec{SG} &= \frac{SA}{4SA_1} \vec{SA_1} + \frac{SB}{4SB_1} \vec{SB_1} + \frac{SC}{4SC_1} \vec{SC_1}. \end{aligned}$$

Do điểm G thuộc mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ nên sử dụng bài tập 14 (ở trang 11) suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{SA}{4SA_1} + \frac{SB}{4SB_1} + \frac{SC}{4SC_1} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{a}{SA_1} + \frac{b}{SB_1} + \frac{c}{SC_1} &= 4. \end{aligned} \quad (1)$$

Ta chứng minh được bất đẳng thức: với $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ dương ta có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

Dấu "=" xảy ra $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$. Do đó:

$$\begin{aligned} 16 &= \left(\frac{a}{SA_1} + \frac{b}{SB_1} + \frac{c}{SC_1} \right)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{SA_1^2} + \frac{1}{SB_1^2} + \frac{1}{SC_1^2} \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{SA_1^2} + \frac{1}{SB_1^2} + \frac{1}{SC_1^2} &\geq \frac{16}{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

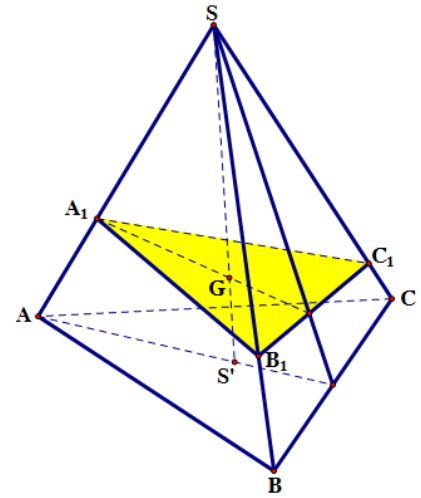
$$aSA_1 = bSB_1 = cSC_1 \Leftrightarrow 4aSA_1 = 4bSB_1 = 4cSC_1. \quad (2)$$

Từ (1), ta có:

$$a^2 + \frac{baSA_1}{SB_1} + \frac{caSA_1}{SC_1} = 4aSA_1 \stackrel{\text{do (2)}}{\Leftrightarrow} a^2 + b^2 + c^2 = 4aSA_1.$$

Vậy $4aSA_1 = 4bSB_1 = 4cSC_1 = a^2 + b^2 + c^2$. Do đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{16}{a^2 + b^2 + c^2}$, đạt được khi

$$SA_1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4a} < a, SB_1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4b} < b, SC_1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4c} < c.$$



Câu 19.

a) Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC) , gọi M là giao điểm của AH và BC . Tương tự như bài tập 19 (ở trang 72), ta chứng minh được H là trực tâm ΔABC , $BC \perp MS$, $BC \perp MA$ và $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}$. (1)

Ta có: $\alpha = \widehat{SMA} = \widehat{HSA}$. Do đó:

$$\cos \alpha = \frac{SH}{SA} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{SH^2}{SA^2}.$$

Tương tự, ta có:

$$\cos^2 \beta = \frac{SH^2}{SB^2}, \quad \cos^2 \gamma = \frac{SH^2}{SC^2}.$$

Như vậy:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = SH^2 \left(\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} \right)$$

$$\stackrel{\text{do (1)}}{=} 1.$$

Cách khác. Ta có: $\cos \alpha = \frac{SM}{AM} = \frac{SM \cdot BC}{AM \cdot BC} = \frac{S_{SBC}}{S_{ABC}}$.

Tương tự: $\cos \beta = \frac{S_{SCA}}{S_{ABC}}, \cos \gamma = \frac{S_{SAB}}{S_{ABC}}$. Do đó:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \frac{(S_{SBC})^2 + (S_{SCA})^2 + (S_{SAB})^2}{(S_{ABC})^2} \\ &= \frac{SB^2 \cdot SC^2 + SC^2 \cdot SA^2 + SA^2 \cdot SB^2}{4(S_{ABC})^2} \\ &= \frac{SB^2 \cdot SC^2 + SA^2 \cdot BC^2}{4(S_{ABC})^2} = \frac{SM^2 \cdot BC^2 + SA^2 \cdot BC^2}{4(S_{ABC})^2} \\ &= \frac{BC^2(SM^2 + SA^2)}{4(S_{ABC})^2} = \frac{BC^2 \cdot AM^2}{4(S_{ABC})^2} = 1. \end{aligned}$$

b) Đặt $a = \cos^2 \alpha \geq 0, b = \cos^2 \beta \geq 0, c = \cos^2 \gamma \geq 0$. Khi đó:

$$a + b + c = 1.$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1 - a}{a} = \frac{b + c}{a}.$$

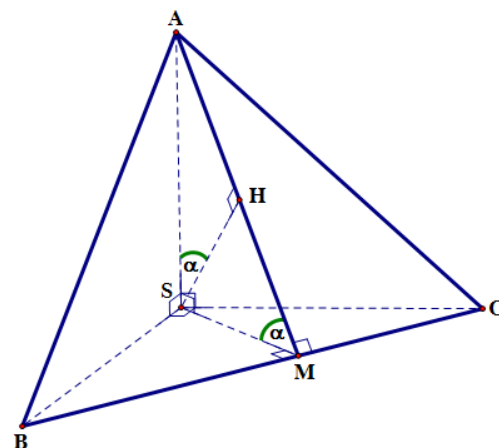
Tương tự: $\tan^2 \beta = \frac{c + a}{b}, \tan^2 \gamma = \frac{a + b}{c}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\begin{aligned} \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma &= \frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} + \frac{a + b}{c} \\ &= \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c} \right) \\ &\geq 2 + 2 + 2 = 6. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$. Mặt khác, ta chứng minh được:

$$\cot^2 \alpha + \cot^2 \beta + \cot^2 \gamma = \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}.$$



Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$. Như vậy:

$$\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma + \cot^2\alpha + \cot^2\beta + \cot^2\gamma \geq 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}.$$

Giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{15}{2}$, đạt được khi $a = b = c$ hay $SA = SB = SC$.

Lưu ý. Bất đẳng thức $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, \forall a, b, c > 0$ được gọi là bất đẳng thức Nesbitt, và được chứng minh như sau:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \left(\frac{a}{b+c} + 1 \right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1 \right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1 \right) - 3 \\ &= (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3 \\ &= \frac{1}{2} [(a+b) + (b+c) + (c+a)] \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3 \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot 3 \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}} - 3 \\ &= \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Sau đây là một lời giải khác cho câu b). Ta dễ dàng chứng minh được: với a, b, c dương thì

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c},$$

dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Ta có:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} &\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma + \cot^2\alpha + \cot^2\beta + \cot^2\gamma \\ &= \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\gamma} + \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - 6 \\ &\geq \frac{9}{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} + \frac{9}{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma} - 6 \\ &= 9 + \frac{9}{2} - 6 = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} \cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{15}{2}$, đạt được khi $\alpha = \beta = \gamma \approx 54^\circ 44'$.