

CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ SONG SONG

VẤN ĐỀ 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

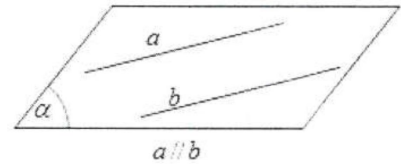
1. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng phân biệt

Định nghĩa:

- Hai đường thẳng gọi là **đồng phẳng** nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là **chéo nhau** nếu chúng không đồng phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là **song song** nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung

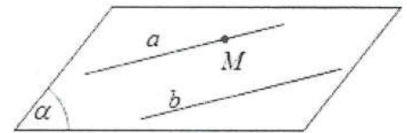
Như vậy: Hai đường thẳng a và b song song với nhau

xác định một mặt phẳng ký hiệu là $mp(a;b)$



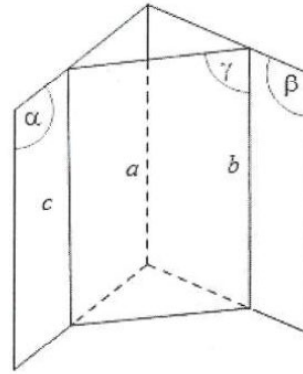
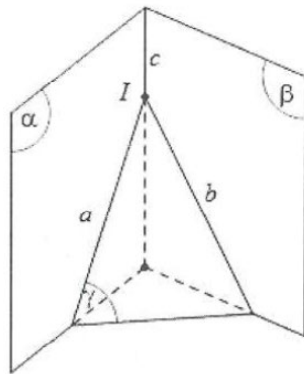
2. Hai đường thẳng song song

■ **Tính chất 1:** Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.



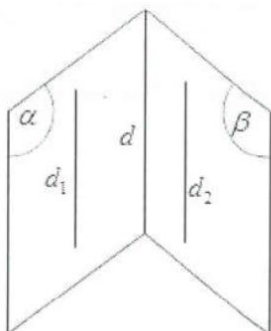
■ **Tính chất 2:** Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau:

■ **Định lý:** Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

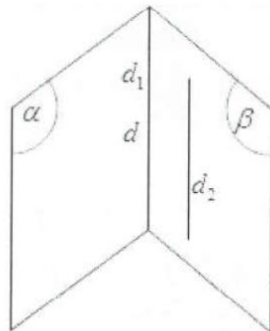


=> **Hệ quả:** Hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến (nếu có) của hai mặt phẳng nói trên sẽ song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

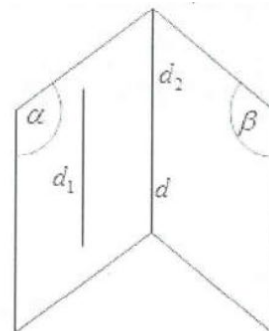
d d_1 d_2



$d // d_1 // d_2$



$d \equiv d_1$



$d \equiv d_2$

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình thang với đáy lớn AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB .

a) Chứng minh: $MN \parallel CD$.

b) Tìm giao điểm P của SC với (AND) . Kéo dài AN và DP cắt nhau tại I .

Chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$. Tứ giác $SIBA$ là hình gì? Vì sao?

Lời giải

a) Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAB

nên $MN \parallel AB$ mặt khác $AB \parallel CD$

$\Rightarrow MN \parallel CD$.

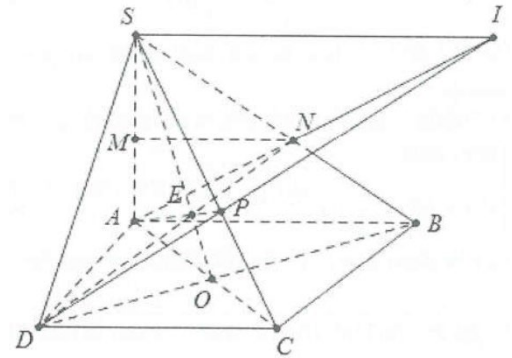
b) Gọi $O = AC \cap BD$ và $E = SO \cap ND$ khi đó SE cắt SC tại P .

Xét 3 mặt phẳng $(SAB); (SCD)$ và $(ABCD)$ có các giao tuyến chung là SI, AB và CD song song hoặc đồng quy.

Do $AB \parallel CD$ nên $SI \parallel AB \parallel CD$.

Ta có: $SI \parallel AB \Rightarrow \frac{NS}{NB} = \frac{NI}{NA} = \frac{SI}{AB} = 1$.

Khi đó: $\begin{cases} SI \parallel AB \\ SI = AB \end{cases} \Rightarrow SIBA$ là hình bình hành.

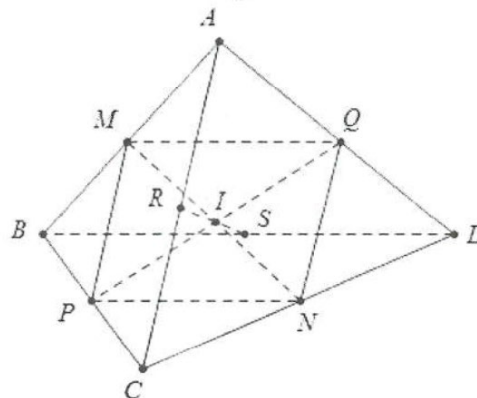


Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD .

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Từ đó suy ra ba đoạn MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

Lời giải



a) Vì MQ là đường trung bình của tam giác ABC nên ta có $\begin{cases} MQ \parallel BC \\ MQ = \frac{1}{2} BC \end{cases}$.

$$\text{Tương tự ta cũng có: } \begin{cases} NP // BD \\ NP = \frac{1}{2} BD \end{cases}$$

Do vậy MQNP là hình bình hành từ đó suy ra MN và PQ cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường.

b) Tương tự chứng minh trên ta cũng có tứ giác RNSM cũng là hình bình hành do có

$$\begin{cases} RN // MS \\ RN = MS = \frac{1}{2} AD \end{cases} \text{ suy ra RS và MN cũng cắt nhau tại trung điểm I của MN.}$$

Vậy ba đoạn MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đoạn.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành, gọi M, N, P, Q lần lượt nằm trên BC, SC, SD, AD sao cho $MN // SB$, $NP // CD$, $MQ // CD$.

a) Chứng minh rằng: $PQ // SA$.

b) Gọi K là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh rằng: $SK // AD // BC$.

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } MN // SB \Rightarrow \frac{CN}{SC} = \frac{CM}{CB} = \frac{DQ}{AD} \quad (1).$$

$$\text{Lại có: } NP // CD \Rightarrow \frac{CN}{CS} = \frac{DP}{DS} \quad (2).$$

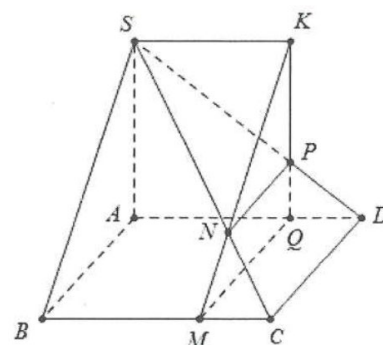
(Định lý Ta-let)

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{DP}{DS} = \frac{DQ}{AD} \Rightarrow SA // PQ.$$

b) Xét 3 mặt phẳng (SAD); (SBC) và (ABCD) cắt nhau theo các giao tuyến là SK, AD, BC.

Suy ra SK, AD, BC song song hoặc đồng quy.

Mặt khác $AD // BC \Rightarrow SK // AD // BC$.



Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành.

a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng (SAD) và (SBC); (SAB) và (SCD).

b) Lấy M thuộc SC. Tìm giao điểm N của SD và (ABM). Tứ giác ABMN là hình gì?

Lời giải

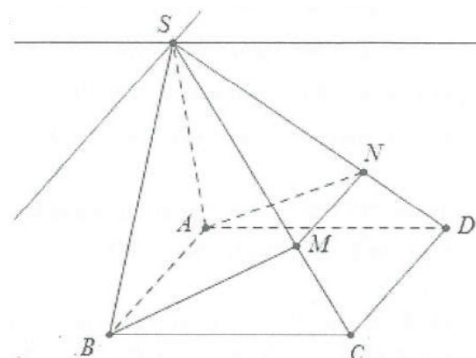
a) Trong (SAD) dựng đường thẳng d đi qua S và song song với AD.

Ta có: $d // AD$, $AD // BC \Rightarrow d // BC$.

Suy ra d thuộc (SBC).

Nên d là giao tuyến của (SAD) và (SBC).

Tương tự, trong (SAB) dựng đường thẳng d_1 đi qua S, song song với AB thì d_1 là giao tuyến của (SAB) với (SCD).



b) Giả sử $SD \cap (ABM) = N$

$$\Rightarrow (ABM) \cap (SCD) = MN.$$

Xét ba mặt phẳng (ABM) ; $(ABCD)$; (SCD) lần lượt cắt nhau theo 3 giao tuyến là AB , MN , CD nên chúng song song hoặc đồng quy.

Mà $AB // CD \Rightarrow AB // CD // MN \Rightarrow ABMN$ là hình thang.

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang (AB là đáy lớn). Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AD, BC, SB .

- Tìm giao tuyến (SAB) và (SCD) ; (SCD) và (IJK) .
- Tìm giao điểm M của SD và (IJK) .
- Tìm giao điểm N của SA và (IJK) .
- Xác định thiết diện của hình chóp và (IJK) . Thiết diện là hình gì?

Lời giải

a) Do $AB // CD \Rightarrow$ giao tuyến của (SAB) và (SCD) đi qua điểm S và song song với AB và CD .

Giả sử $(IJK) \cap (SAB) = KP$ với $P \in SA$.

Ba mặt phẳng (ABC) ; (IJK) và (SAB) lần lượt cắt nhau theo 3 giao tuyến là IJ , AB và PK nên chúng song song hoặc đồng quy.

Mặt khác $AB // IJ \Rightarrow PK // AB // IJ$.

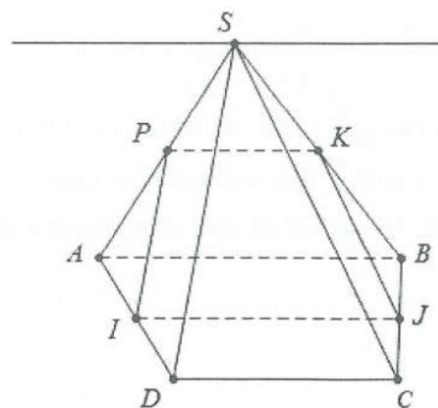
b) Do $PK // AB$ mà $KS = KB \Rightarrow P$ là trung điểm của SA . Khi đó PI là đường trung bình trong tam giác SAD

suy ra $PI // SD \Rightarrow SD$ không cắt $(IJKP)$.

c) Chứng minh ở câu b, ta có N trùng với P tức là N là trung điểm SA .

d) Ta có thiết diện hình chóp với mặt phẳng (IJK) là tứ giác $IPKJ$.

Có $KP // IJ$ (chứng minh trên) suy ra thiết diện $IPKJ$ là hình thang.



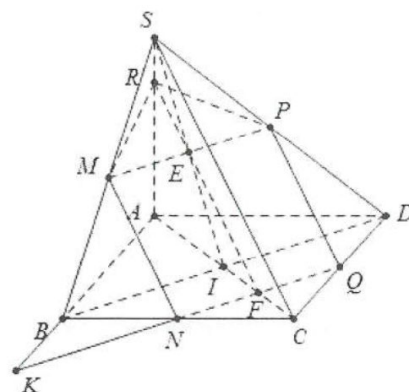
Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, SD .

- Tìm giao tuyến của (SCD) và (MNP) .
- Tìm giao điểm của CD và (MNP) .
- Tìm giao điểm của AB và (MNP) .
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (MNP) suy ra thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) .

Lời giải

a) Do $MN // SC$ (tính chất đường trung bình) nên giao tuyến của (SCD) và (MNP) phải là $d // MN // SC$.

Do đó d qua P và song song với SC nên d là đường trung bình tam giác SCD . Gọi Q là trung điểm CD thì PQ là giao tuyến cần tìm.



b) Ta có $Q \in CD, Q \in (MNP)$.

Suy ra Q là giao điểm của CD và (MNP).

c) Trong mp(ABCD), gọi K là giao điểm của NQ và AB.

Ta có $K \in AB, K \in NQ \subset (MNPQ) \Rightarrow K \in (MNP)$.

Vậy K là giao điểm của AB với (MNP).

d) Gọi I là giao điểm của AC và BD.

Trong mp(SCD) có MP là đường trung bình tam giác SBD.

Gọi $E = MP \cap SI \Rightarrow (SAC) \cap (MNP) = EF$.

Trong mp(SAC), gọi $R = EF \cap SA \Rightarrow$ thiết diện của mặt phẳng (MNP) với khối chóp là ngũ giác MNQPR.

Ví dụ 7: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm tam giác SAB.

a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJG).

b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJG). Thiết diện là hình gì? Tìm điều kiện đối với AB và CD để thiết diện là hình bình hành.

Lời giải

a) Giả sử $(SAB) \cap (IJG) = MN$ với $M \in SB$ và $N \in SA$. Ba mặt phẳng (SAB); (IJG) và (ABCD) cắt nhau theo ba giao tuyến là các đường thẳng MN, AB và IJ nên chúng song song hoặc đồng quy.

Mặt khác $AB \parallel IJ \Rightarrow MN \parallel AB \parallel IJ$.

Do vậy $(SAB) \cap (IJG) = MN$ với MN là đường thẳng qua G và song song với AB.

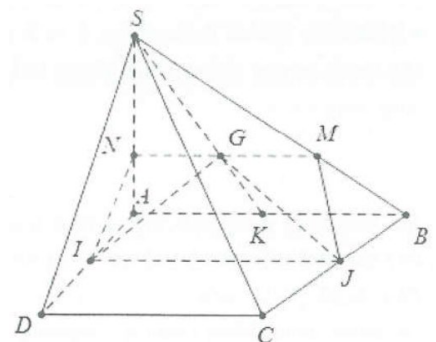
b) Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJG) là tứ giác MNIJ.

Ta có: MNIJ là hình bình hành khi $MN = IJ$.

$$\text{Lại có: } \frac{MN}{AB} = \frac{SN}{SA} = \frac{SG}{SK} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{2}{3} AB; IJ = \frac{AB+CD}{2}$$

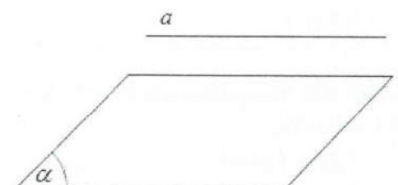
$$\text{Do đó } MN = IJ \Leftrightarrow \frac{2AB}{3} = \frac{AB+CD}{2} \Leftrightarrow AB = 3CD.$$

Vậy $AB = 3CD$ thì thiết diện là hình bình hành.



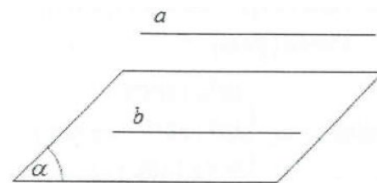
VẤN ĐỀ 2. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG

■ **Định nghĩa:** Một đường thẳng được gọi là song song với một mặt phẳng nếu chúng không có điểm chung.

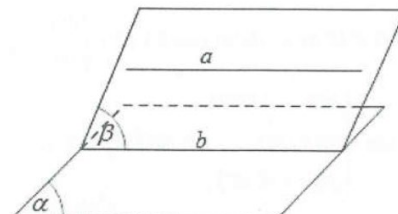


Hình bên ta có: $a // (\alpha)$.

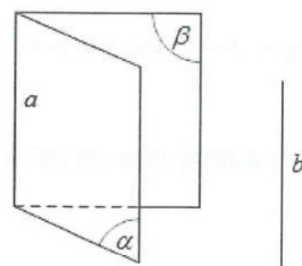
■ **Định lý 1 :** Nếu một đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (α) và song song với một đường thẳng b nằm trên (α) thì a song song với (α) .



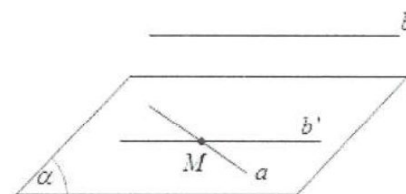
■ **Định lý 2:** Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Khi đó nếu một mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì a song song với b .



⇒ **Hệ quả:** Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) cùng song song với một đường thẳng b thì giao tuyến (nếu có) của chúng cũng song song với b .



■ **Định lý 3:** Với hai đường thẳng a và b chéo nhau cho trước, có duy nhất một mặt phẳng (α) chứa a và song song với b .



Với hai đường thẳng phân biệt a và b không song song với nhau, và một điểm O cho trước, có duy nhất một mặt phẳng (α) qua O và song song với (hoặc chứa) a và b .

Phương pháp giải toán:

Để chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) ta sẽ chứng minh đường thẳng d không nằm trong (P) đồng thời song song với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) .

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD .

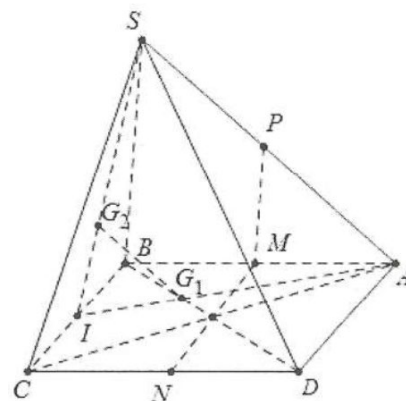
- Chứng minh MN song song với các mặt phẳng $(SBC), (SAD)$.
- Gọi P là trung điểm của SA . Chứng minh SB, SC đều song song với (MNP) .
- Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, SBC . Chứng minh rằng: $G_1G_2 // (SAC)$.

Lời giải

a) Vì M, N là trung điểm của AB, CD nên $MN // AD // BC$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AD \in (SAD) \\ MN // AD \\ MN \notin (SAD) \end{cases} \Rightarrow MN // (SAD).$$

$$\text{Tương tự ta có: } \begin{cases} BC \in (SBC) \\ MN // BC \\ MN \notin (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN // (SBC).$$



b) Vì P là trung điểm của SA nên $\begin{cases} MP // SB \\ NP // SC \end{cases}$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MP \in (MNP) \\ SB // MP \\ SB \notin (MNP) \end{cases} \Rightarrow SB // (MNP).$$

$$\text{Tương tự chứng minh trên ta có: } \begin{cases} NP \in (MNP) \\ SC // NP \\ SC \notin (MNP) \end{cases} \Rightarrow SC // (MNP).$$

$$\text{c) Gọi I là trung điểm của BC} \Rightarrow \begin{cases} G_1 \in AI \\ G_2 \in BC \end{cases} \text{ và } \frac{IG_1}{IA} = \frac{IG_2}{IS} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 // SA \Rightarrow G_1G_2 // (SAC).$$

Ví dụ 2: Cho tứ diện ABCD. G là trọng tâm của $\triangle ABD$, M là một điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng: $MG // (ACD)$.

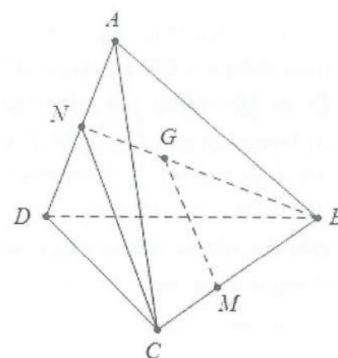
Lời giải

Gọi N là trung điểm của AD

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $BG = 2GN$

$$\text{Mà } MB = 2MC \text{ nên } \frac{BG}{GN} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow MG // NC.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} NC \in (ACD) \\ MG // NC \\ MG \notin (ACD) \end{cases} \Rightarrow MG // (ACD).$$



Ví dụ 3: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN.

a) Tìm giao điểm A' của đường thẳng AG với $mp(BCD)$.

b) Qua M kẻ đường thẳng Mx song song với AA' và Mx cắt (BCD) tại M' . Chứng minh B, M' , A' thẳng hàng và $BM' = M'A' = A'N$.

c) Chứng minh rằng: $GA = 3GA'$.

Lời giải

a) Trong mp(ABN): Gọi $A' = AG \cap BN$

$$\Rightarrow A' = AG \cap (BCD).$$

b) Xét trong mp(ABN): Kẻ $MM' // AA'$ cắt BN tại $M' \Rightarrow M' \in BN$.

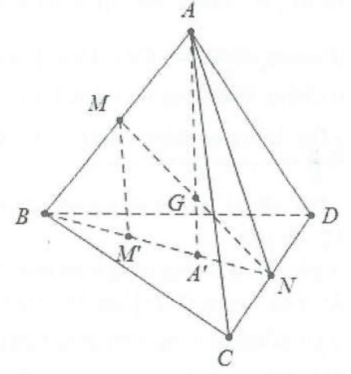
Do M là trung điểm của AB nên MM' là đường trung bình trong $\triangle ABA' \Rightarrow M'B = M'A$.

Do G là trung điểm của MN mà $GA' // MM'$ nên GA' là đường trung bình trong $\triangle MNM'$ suy ra A' là trung điểm của $M'N$ hay $M'A' = NA'$.

Suy ra $BM' = M'A' = A'N$.

$$\text{c) Ta có: } \begin{cases} \frac{MM'}{A'A} = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2} \\ \frac{GA'}{MM'} = \frac{A'N}{M'N} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AA' = 2MM' \\ MM' = 2GA' \end{cases}$$

$$\Rightarrow A'A = 2MM' = 4GA' \Leftrightarrow AG = 3GA'.$$



Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, CD, SA.

a) Chứng minh rằng $MN // (SBC)$, $MN // (SAD)$.

b) Chứng minh rằng $SB // (MNP)$, $SC // (MNP)$.

c) Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC.

Chứng minh rằng: $IJ // (SAB)$, $IJ // (SAD)$ và $IJ // (SAC)$.

Lời giải

a) Ta có: ABCD là hình bình hành và M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $MN // AD // BC$.

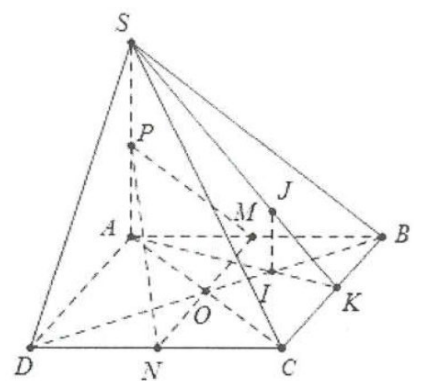
Do đó $MN // (SBC)$ và $MN // (SAD)$.

b) Trong tam giác SAB có M, P lần lượt là trung điểm của AB và SA nên MP là đường trung bình suy ra

$$MP // SP \Rightarrow SP // (MNP).$$

Để thấy AMCN là hình bình hành nên giao điểm O của chúng là trung điểm của AC và MN $\Rightarrow O \in (MNP)$.

Trong mặt phẳng (SAC) có PO là đường trung bình của $\triangle SAC$ nên $PO // SC \Rightarrow SC // (MNP)$.



$$\text{c) Gọi K trung điểm của BC} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AI}{AK} = \frac{2}{3} \\ \frac{SJ}{SK} = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ (tính chất trọng tâm tam giác)}$$

Do đó $IJ // SA \Rightarrow IJ // (SAB), IJ // (SAD)$ và $IJ // (SAC)$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, SC , và K là điểm trên SD cho $SK = \frac{1}{2}KD$.

- Chứng minh rằng $OJ // (SAC)$ và $OJ // (SAB)$.
- Chứng minh rằng $OI // (SCD)$ và $IJ // (SBD)$.
- Gọi M là giao điểm của AI và BD . Chứng minh rằng $MK // (SBC)$.

Lời giải

a) Do $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm của AC và BD .
Ta có: OJ là đường trung bình trong tam giác SAC nên $OJ // SA$ suy ra $OJ // (SAC)$ và $OJ // (SAB)$.

b) OI là đường trung bình trong tam giác ABC nên $OI // AB \Rightarrow OI // CD \Rightarrow OI // (SCD)$.

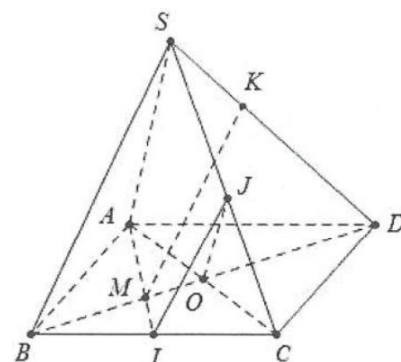
Tương tự IJ là đường trung bình trong tam giác SBC nên $IJ // SB \Rightarrow IJ // (SBD)$.

c) Do $M = AI \cap BO$ nên M là trọng tâm $\triangle ABC$

$$\Rightarrow BM = \frac{2}{3}BO = \frac{BD}{3}$$

$$\text{Lại có: } SK = \frac{1}{2}KD \Leftrightarrow SK = \frac{1}{2}SD \text{ hay } \frac{SK}{SD} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Do đó } \frac{SK}{SD} = \frac{BM}{BD} = \frac{1}{3} \Rightarrow MK // SB \Rightarrow MK // (SBC).$$



Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SO, OD .

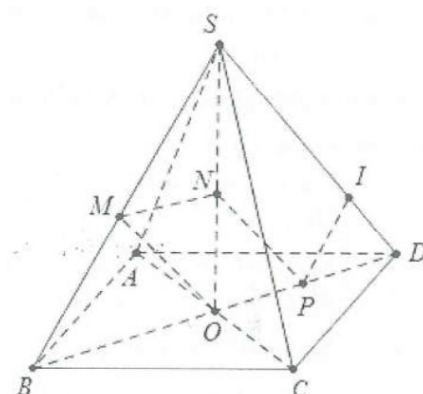
- Chứng minh rằng $MN // (ABCD)$, $MO // (SCD)$.
- Chứng minh rằng $NP // (SAC)$, tứ giác $NPOM$ là hình gì?
- Gọi I là điểm thuộc SD sao cho $SD = 4ID$. Chứng minh rằng $PI // (SBC)$, $PI // (SAC)$.

Lời giải

a) Do M, N lần lượt là trung điểm của SB, SO .

Do đó MN là đường trung bình của tam giác SBO nên

$$MN // BO \Rightarrow MN // (ABCD).$$



Thiết diện là tứ giác MNPQ.

Ta có: $\begin{cases} MN // AO \\ MQ // SB \Rightarrow MN \perp MQ \Rightarrow \text{thiết diện là hình thang vuông tại M và N.} \\ SB \perp OA \end{cases}$

b) Áp dụng định lý Talet ta có: $BM = x \Rightarrow MA = a - x \Rightarrow \frac{MQ}{SB} = \frac{MQ}{a} = \frac{MA}{AB} = \frac{a - x}{a} \Rightarrow MQ = a - x$

$$BC = 2a \Rightarrow OA = \frac{1}{2}BC = a \Rightarrow \frac{MN}{OA} = \frac{MN}{a} = \frac{BM}{AB} = \frac{x}{a} \Rightarrow MN = x$$

$$\frac{BN}{BO} = \frac{MN}{OA} \Rightarrow BN = MN = x \Rightarrow NC = 2a - x \Rightarrow \frac{NP}{SB} = \frac{NP}{a} = \frac{NC}{BC} = \frac{2a - x}{2a} \Rightarrow NP = \frac{2a - x}{2}$$

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}MN(MQ + NP) = \frac{1}{2}x \cdot \left(a - x + \frac{2a - x}{2} \right) = \frac{x(4a - 3x)}{4}$$

Do đó áp dụng bất đẳng thức $uv \leq \left(\frac{u + v}{2} \right)^2$ ta có:

$$S_{MNPQ} = \frac{x(4a - 3x)}{4} = \frac{3x(4a - 3x)}{12} \leq \frac{(3x + 4a - 3x)^2}{12 \cdot 4} = \frac{1}{3}a^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $3x = 4a - 3x \Leftrightarrow 6x = 4a \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3}$.

Ví dụ 9: Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M, N là hai điểm bất kì trên SB, CD. Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC.

a) Tìm các giao tuyến của (P) với các mặt phẳng (SBC), (SCD), (SAC).

b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P).

Lời giải

a) Trong mặt phẳng (SBC), từ M kẻ đường thẳng song song với SC cắt BC tại Q.

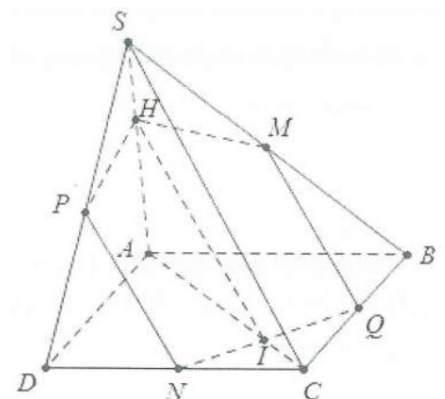
Trong mặt phẳng (SCD), từ N kẻ đường thẳng song song với SC cắt SD tại P.

Khi đó giao tuyến của (P) với (SBC) và (SCD) lần lượt là MQ và NP.

Gọi $I = AC \cap NQ$. Từ I kẻ đường thẳng song song với SC cắt SA tại H.

Khi đó $(P) \cap (SAC) = IH$.

b) Thiết diện của mặt phẳng (P) với khối chóp là ngũ giác MQNPH.



Ví dụ 10: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mặt phẳng (P) đi qua một điểm M trên đoạn IJ và song song với AB và CD.

a) Tìm giao tuyến của (P) với (ICD).

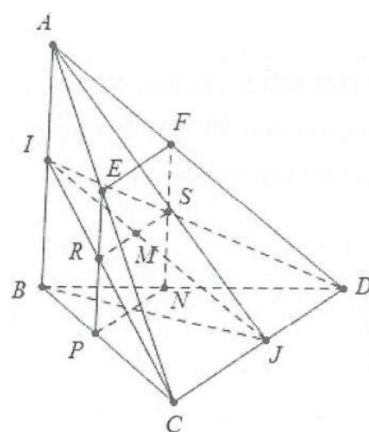
b) Xác định thiết diện của tứ diện ABCD với (P).
--

Lời giải

a) Mặt phẳng (P) qua M và song song với CD nên giao tuyến của (P) và (ICD) cũng song song với CD.

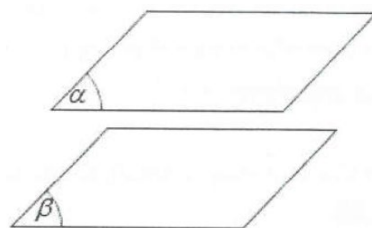
Trong mặt phẳng (ICD), qua M kẻ đường thẳng $d // CD$ cắt IC và ID lần lượt tại R và S khi đó giao tuyến của (P) với (ICD) là RS.

b) Qua R và (S) lần lượt kẻ các đường thẳng song song với SA cắt các cạnh bên AC, BC, BD, AD lần lượt tại E, P, N, F khi đó thiết diện của tứ diện ABCD với (P) là tứ giác EFNP.

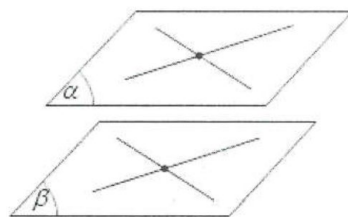


VẤN ĐỀ 3. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

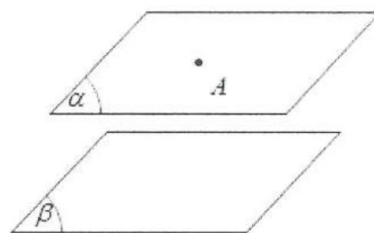
■ **Định nghĩa:** Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.



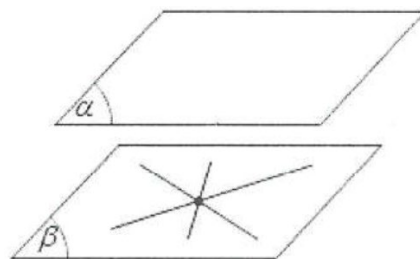
■ **Định lý:** Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng a và b cắt nhau và cùng song song với (β) thì (α) song song với (β) .



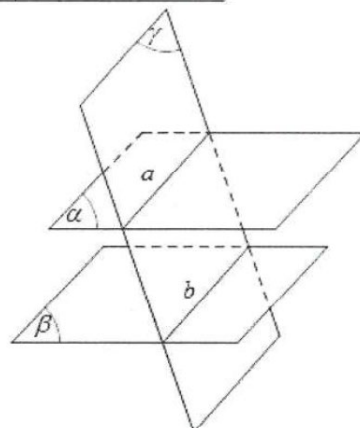
■ **Tính chất 1:** Qua một điểm A nằm ngoài mặt phẳng (β) cho trước, có duy nhất một mặt phẳng (α) song song với (β).



$\Rightarrow$ **Hệ quả:** Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) . Khi đó các đường thẳng đi qua A và song song với (α) cùng nằm trên mặt phẳng (β) đi qua A và song song với (α) .



■ **Tính chất 2:** Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau. Khi đó một mặt phẳng nếu cắt (α) và (β) lần lượt theo các giao tuyến a, b thì a song song với b.



Phương pháp giải toán:

Để chứng minh hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau ta chứng minh hai đường thẳng a và b cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P) song song với lần lượt hai đường thẳng a' và b' cắt nhau nằm trong mặt phẳng (Q).

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD.

a) Chứng minh $(OMN) // (SBC)$.

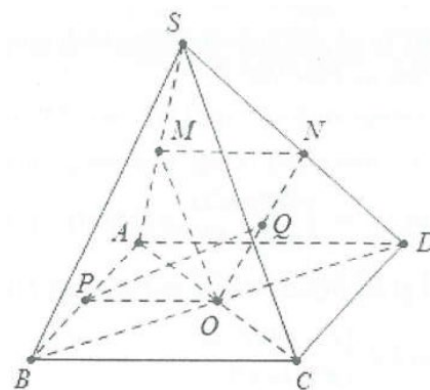
b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB, ON. Chứng minh $PQ // (SBC)$.

Lời giải

a) Ta có MO là đường trung bình trong tam giác SAC $\Rightarrow MO // AC$.

Mặt khác N và O lần lượt là trung điểm của SD và BD nên NO là đường trung bình trong $\triangle SBD \Rightarrow NO // SB$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MO // SC \\ NO // SB \\ MO \cap NO = O \\ SC \cap SB = S \end{cases} \Rightarrow (OMN) // (SBC).$$



b) Do P và O lần lượt là trung điểm của AB và AC nên $OP // AD // BC \Rightarrow OP // (SBC)$.

Lại có $ON // SB \Rightarrow OQ // (SBC)$.

Do vậy $(OPQ) // (SBC) \Rightarrow PQ // (SBC)$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

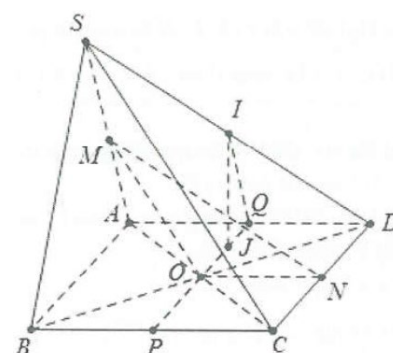
a) Chứng minh rằng $(OMN) // (SBC)$.

b) Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên (ABCD) và cách đều AB, CD. Chứng minh rằng $IJ // (SAB)$.

Lời giải

a) Ta có N và O lần lượt là trung điểm của CD và AC nên NO là đường trung bình trong $\triangle ACD \Rightarrow NO // AD$.

Tương tự MO là đường trung bình trong tam giác SAC nên $MO // SC$.



$$\text{Lại có: } \begin{cases} NO // BC \\ MO // SC \\ OM \cap ON = O \\ BC \cap SC = S \end{cases} \Rightarrow (OMN) // (SBC)$$

b) Ta có P và Q lần lượt là trung điểm của BC và AD thì PQ là đường thẳng cách đều AB và CD do vậy điểm $J \in PQ$. Do IQ là đường trung bình của $\triangle SAD$ nên $IQ // SA$.

Ta có: $PQ // (SAB); IQ // (SAB) \Rightarrow (IPQ) // (SAB)$

Mặt khác $IJ \subset (IPQ) \Rightarrow IJ // (SAB)$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q là trung điểm của BC, AB, SB và AD.

a) Chứng minh rằng: $(MNP) // (SAC)$.

b) Chứng minh rằng: $PQ // (SCD)$.

c) Gọi I là giao điểm của AM và BD; J là điểm thuộc SA sao cho $AJ = 2JS$.

Chứng minh $IJ // (SBC)$.

Lời giải

a) Ta có PN là đường trung bình trong $\triangle SAB$

Suy ra $PN // SA$.

Tương tự ta có: $MP // SC \Rightarrow (MNP) // (SAC)$.

(hai mặt phẳng có cặp cạnh song song cắt nhau).

b) Ta có: $\begin{cases} MQ // CD \\ MP // SC \end{cases} \Rightarrow (MPQ) // (SCD)$

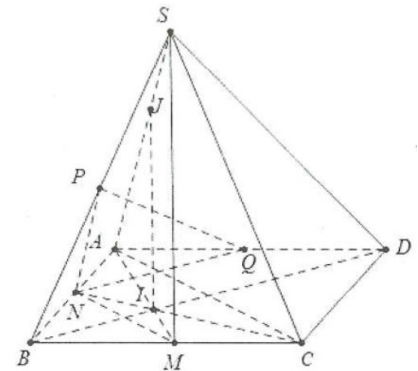
Lại có $PQ \subset (MNQ) \Rightarrow PQ // (SCD)$.

c) Do $\begin{cases} I = AM \cap BD \\ BM // AD \end{cases}$

Theo định lý Talet ta có: $\frac{MI}{IA} = \frac{BM}{AD} = \frac{1}{2}$

Mặt khác: $\frac{SJ}{JA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MI}{IA} = \frac{SJ}{JA} \Rightarrow IJ // SM$.

Do $SM \subset (SBC)$ suy ra $IJ // (SBC)$.



Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N là trung điểm của SA, CD.

a) Chứng minh rằng $(OMN) // (SBC)$.

b) Tìm giao điểm I của ON và (SAB).

c) Gọi $G = SI \cap BM$, H là trọng tâm của ΔSCD . Chứng minh rằng $GH // (SAD)$.

d) Gọi J là trung điểm AD , $E \in MJ$. Chứng minh rằng $OE // (SCD)$.

Lời giải

a) Ta có: OM là đường trung bình trong tam giác SAC suy ra $OM // SC$.

Lại có: ON là đường trung bình trong tam giác BCD nên $ON // BC$.

Do vậy $(OMN) // (SBC)$.

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $I = ON \cap AB$ khi đó I chính là giao điểm của ON và (SAB) .

c) Dễ thấy G, H lần lượt là trọng tâm tam giác SAB và SCD do đó

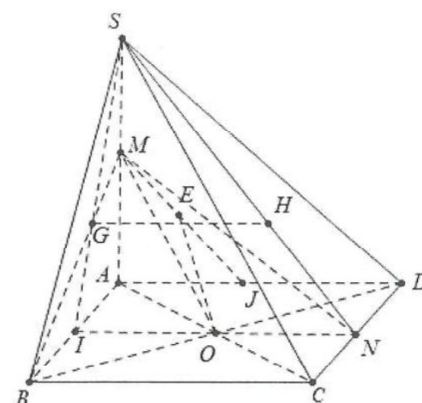
$$\frac{SG}{SI} = \frac{SH}{SN} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow GH // IN // AD \Rightarrow GH // (SAD)$.

d) Do O và J lần lượt là trung điểm của AC và AD nên $OJ // CD$ (tính chất đường trung bình).

Mặt khác O và M lần lượt là trung điểm của AC và SA nên $OM // SC$.

Do vậy $(OMJ) // (SCD) \Rightarrow OE // (SCD)$.



Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC ; lấy điểm $P \in SA$.

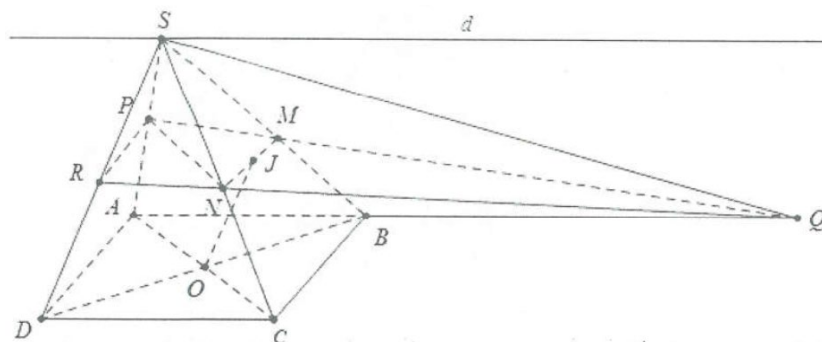
a) Tìm giao tuyến (SAB) và (SCD) .

b) Tìm giao điểm SD và (MNP) .

c) Tìm thiết diện hình chóp và mặt phẳng (MNP) . Thiết diện là hình gì?

d) Gọi $J \in MN$. Chứng minh rằng $OJ // (SAD)$.

Lời giải



a) Do AB song song với CD nên giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB và CD .

b) Trong mặt phẳng (SAB), kéo dài PM cắt AB tại Q, trong mặt phẳng (PMQR), kéo dài QN cắt SD tại R, giao điểm của SD và (MNP) là R.

c) Thiết diện hình chóp và mặt phẳng (MNP) là tứ giác MPRN.

Do 3 mặt phẳng (MNP); (ABC); (SAD) cắt nhau theo 3 giao tuyến là PR; MN; AD nên chúng song song hoặc đồng quy.

Mặt khác $MN // AD \Rightarrow MN // AD // PR \Rightarrow MPRN$ là hình thang.

d) Ta có: OM là đường trung bình trong tam giác SBD $\Rightarrow OM // SD$.

Tương tự ta có: $ON // SA \Rightarrow (OMN) // (SAD)$.

Mặt khác $OJ \subset (OMN) \Rightarrow OJ // (SAD)$ (điều phải chứng minh).

Ví dụ 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi I, J, G, P, Q là trung điểm của DC, AB, SB, BG, BI.

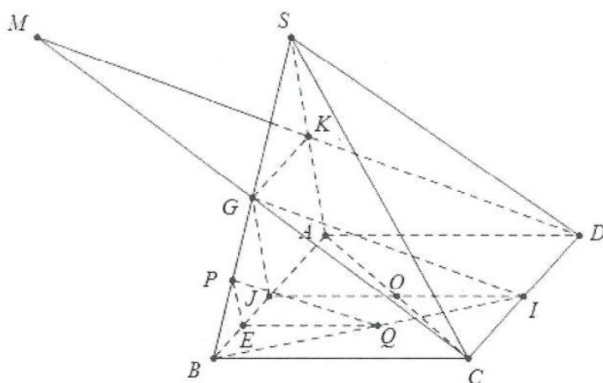
a) Chứng minh rằng $(IJG) // (SAD)$.

b) Chứng minh rằng $PQ // (SAD)$.

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (IJG).

d) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ACG) và (SAD).

Lời giải



a) Ta có IJ là đường trung bình của hình bình hành ABCD nên $IJ // AD$ (1).

Lại có JG là đường trung bình tam giác SAB $\Rightarrow JG // SA$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(IJG) // (SAD)$.

b) Gọi E là trung điểm của JB thì $\frac{BE}{BA} = \frac{BP}{BS} = \frac{1}{4} \Rightarrow EP // AS$.

Mặt khác EQ là đường trung bình của tam giác BIJ nên $EQ // IJ \Rightarrow EQ // AD$.

Ta có: $\begin{cases} EP // SA \\ EQ // AD \end{cases} \Rightarrow (EPQ) // (SAD)$.

c) Trong mặt phẳng (ABC) gọi $O = IJ \cap AC$.

Ta có: $SA // JG$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (IJG) song song với SA

Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (IJG) là đường thẳng đi qua O và song song với SA.

d) Gọi K là trung điểm của SA thì $GK // AB$ (tính chất đường trung bình)

Suy ra $GK // CD \Rightarrow G, K, C, D$ đồng phẳng.

Trong mặt phẳng (GKCD) gọi $M = DK \cap CG \Rightarrow \begin{cases} M \in (ACG) \\ M \in (SAD) \end{cases}$.

Do đó giao tuyến của hai mặt phẳng (ACG) và (SAD) là AM.

Ví dụ 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, SC.

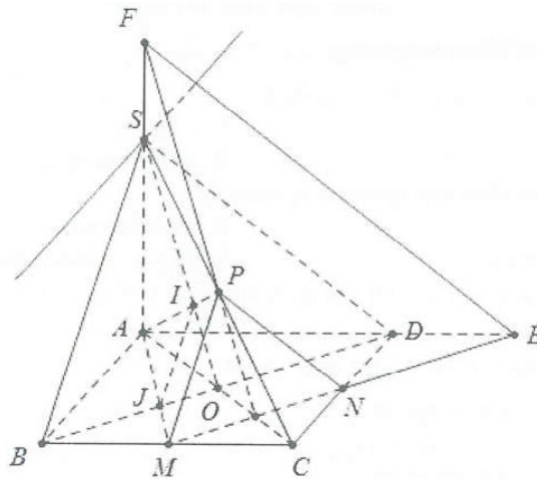
a) Chứng minh rằng $(MNP) // (SBD)$.

b) Tìm giao tuyến (SAB) và (SCD).

c) Tìm giao tuyến của (MNP) và (SAD). Suy ra giao điểm của SA và (MNP).

d) Gọi $I = AP \cap SO$, $J = AM \cap BD$ Chứng minh rằng $IJ // (MNP)$.

Lời giải



a) Ta có MN là đường trung bình trong tam giác BCD nên $MN // BD$.

Tương tự NP là đường trung bình trong tam giác SCD nên $NP // SD$.

Do vậy $(MNP) // (SBD)$.

b) Do $AB // CD$ nên giao tuyến của (SAB) và (SCD) đi qua S và song song với AB và CD.

c) Gọi $E = MN \cap AD$.

Do $NP // SD$ nên giao tuyến Δ của (MNP) và (SAD) đi qua E và song song với SD.

Trong mặt phẳng (SAD) gọi $F = \Delta \cap SA \Rightarrow F = SA \cap (MNP)$.

d) Ta có: $J = AM \cap BO$; $J = SO \cap AP$ do đó I, J lần lượt là trọng tâm tam giác SAC và ABC

Khi đó $\frac{AI}{AP} = \frac{AJ}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ // MP \Rightarrow IJ // (MNP)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

🦋 Vấn đề 1: Hai đường thẳng song song

Câu 1: Hai đường thẳng không có điểm chung thì

- A. chéo nhau.
- B. song song.
- C. cắt nhau.
- D. chéo nhau hoặc song song.

Câu 2: Hai đường thẳng phân biệt không song song thì

- A. chéo nhau.
- B. có điểm chung.
- C. cắt nhau hoặc chéo nhau.
- D. không có điểm chung.

Câu 3: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d. Đường thẳng a nằm trên (P) và đường thẳng b nằm trên (Q). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Nếu a cắt (Q) tại điểm I thì I phải nằm trên d.
- B. Nếu b cắt (P) thì b phải trùng với d.
- C. Nếu a và b có điểm chung thì a trùng với b.
- D. Nếu b cắt (P) thì b phải trùng với a.

Câu 4: Cho đường thẳng a cắt mặt phẳng (P) tại điểm A. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Mọi đường thẳng nằm trong (P) đều chéo với a.
- B. Mọi đường thẳng nằm trong (P) đều cắt a.
- C. Mọi đường thẳng nằm trong (P) hoặc chéo với a, hoặc cắt a.
- D. Mọi đường thẳng nằm trong (P) đều không cắt a.

Câu 5: Cho hai đường thẳng song song a, b và mặt phẳng (P). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Nếu $a \parallel (P)$ thì $b \parallel (P)$.
- B. Nếu a cắt (P) thì b cắt (P).
- C. Nếu a nằm trên (P) thì $b \parallel (P)$.
- D. Nếu a nằm trên (P) thì b nằm trên (P).

Câu 6: Cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c trong đó $a \parallel b$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Nếu $c \parallel a$ thì $c \parallel b$.
- B. Nếu c cắt a thì c cắt b.
- C. Nếu c và a chéo nhau thì c và b chéo nhau.
- D. Nếu c cắt a thì c và b chéo nhau.

Câu 7: Cho tứ diện MNPQ. Mệnh đề nào trong các mệnh đề dưới đây là đúng?

- A. $MN \parallel PQ$.
- B. MN cắt PQ.
- C. MN và PQ đồng phẳng.
- D. MN và PQ chéo nhau.

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM = 2MC$, N là giao điểm của SD và (MAB). Xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng CD và MN.

- A. Cắt nhau.
- B. Chéo nhau.
- C. Song song.
- D. Có hai điểm chung.

Câu 9: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM = 3MC$, N là giao điểm của SD và (MAB). Khi đó tứ giác ABMN là hình gì?

- A. Tứ giác không có cặp cạnh nào song song.
- B. Hình vuông.
- C. Hình thang.
- D. Hình bình hành.

Câu 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang $AB \parallel CD$. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (ASB) và (SCD). Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $d \parallel AB$. B. d cắt AB . C. d cắt AD . D. d cắt CD .

Câu 11: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Lấy A, B thuộc a và C, D thuộc b . Khẳng định nào dưới đây đúng khi nói về hai đường thẳng AB và CD ?

- A. Song song nhau. B. Có thể song song hoặc cắt nhau.
C. Chéo nhau. D. Cắt nhau.

Câu 12: Cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c trong đó $a \parallel b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Nếu $c \parallel a$ thì $c \parallel b$. B. Nếu c cắt a thì c cắt b .
C. Nếu c và a chéo nhau thì c và b chéo nhau. D. Nếu c cắt a thì c và b chéo nhau.

Câu 13: Cho hai đường thẳng song song a, b . Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

- A. Nếu mặt phẳng (α) cắt a thì cũng cắt b
B. Nếu mặt phẳng (α) song song với a thì mặt phẳng (α) cũng song song với b
C. Nếu mặt phẳng (α) song song với a thì mặt phẳng (α) cũng song song với b hoặc chứa b
D. Nếu mặt phẳng (α) chứa đường thẳng a thì cũng có thể chứa đường thẳng b

Câu 14: Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

- A. a và b đồng phẳng
B. Nếu đường thẳng a cắt đường thẳng c thì b cũng cắt c
C. Nếu mặt phẳng (α) cắt a thì mặt phẳng (α) cũng cắt b
D. $a \cap b = \emptyset$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Qua S kẻ Sx, Sy lần lượt song song với AB, AD . Gọi O là giao điểm của AC và BD . Khi đó khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Giao tuyến của (SAC) và (SBD) là đường thẳng Sx
B. Giao tuyến của (SBD) và (SAC) là đường thẳng Sy
C. Giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng Sx
D. Giao tuyến của (SAD) và (SBC) là đường thẳng Sx

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi G, E lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SCD . Lấy M, N lần lượt là trung điểm AB, BC . Khi đó, khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. GE và MN trùng nhau B. GE và MN chéo nhau C. $GE \parallel MN$ D. GE cắt BC

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là trọng tâm của tam giác ABC và ACD . Khi đó, khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. MN cắt AD B. $MN \parallel CD$ C. MN cắt BC D. $MN \parallel BD$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) qua AB và cắt cạnh SC tại M ở giữa S và C . Xác định giao tuyến d giữa mặt phẳng (α) và (SCD)

- A. Đường thẳng d qua M song song với AC B. Đường thẳng d qua M song song với CD

C. Đường thẳng d trùng MA

D. Đường thẳng d trùng MD

Câu 19: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thang ($BC // AD$). Điểm M thuộc cạnh SD sao cho $2SM = MD$; N là giao điểm của SA và (MBC). Khi đó xác định điểm N bằng cách nào sau đây?

A. N là giao điểm của SA với đường thẳng qua M song song với AD

B. N là giao điểm của SA với đường thẳng qua M song song với AC

C. N là giao điểm của SA với đường thẳng qua M song song với DB

D. N là điểm bất kì trên SA

Câu 20: Trong không gian cho ba đường thẳng a, b, c. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu a, b cùng chéo với c thì a, b chéo nhau

B. Nếu a, b cùng song song với c thì a, b song song với nhau

C. Nếu $a // b$, b và c chéo nhau thì a, c chéo nhau hoặc cắt nhau

D. Nếu a, b cắt nhau, b, c cắt nhau thì a, c cắt nhau hoặc song song

Câu 21: Cho tứ diện ABCD, I là trung điểm của AB và G là trọng tâm của tam giác ACD. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua I, G và song song với BC. Khi đó giao tuyến của (P) và (BCD) là

A. Đường thẳng đi qua G và song song với BC

B. Đường thẳng đi qua I và song song với BC

C. Đường thẳng đi qua D và song song với BC

D. Đường thẳng DI

Câu 22: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Giả sử M thuộc đoạn SB (M không trùng với S và B), khi đó mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì?

A. Hình bình hành

B. Tam giác

C. Hình thang

D. Hình chữ nhật

Câu 23: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đường thẳng AB cắt (B'CD') tại điểm I. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $AB = \frac{1}{2} AI$

B. $AB = \frac{1}{3} AI$

C. $AB = \frac{2}{3} AI$

D. $AB = 2AI$

Câu 24: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có M, N lần lượt là trung điểm của AB và B'C'. Mặt phẳng đi qua ba điểm M, N, C cắt cạnh A'B' tại điểm P. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $B'P = \frac{1}{2} A'B'$

B. $B'P = \frac{1}{3} A'B'$

C. $B'P = \frac{1}{4} A'B'$

D. $B'P = \frac{2}{3} A'B'$

Câu 25: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có điểm M là trung điểm của đoạn AB. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với hai đường thẳng B'C, AA' cắt cạnh AC tại I. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $IC = IA$

B. $IC = \frac{1}{3} IA$

C. $IC = \frac{2}{3} IA$

D. $IC = \frac{1}{4} IA$

Câu 26: Cho hình bình hành ABCD. Gọi Bx, Cy, Dz là các nửa đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua B, C, D và nằm về một phía của mặt phẳng (ABCD) đồng thời không nằm trong mặt phẳng (ABCD).

Một mặt phẳng đi qua A và cắt Bx, Cy, Dz lần lượt tại B', C', D'. Biết $BB' = 2$, $DD' = 4$. Tính độ dài đoạn thẳng CC'

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Vấn đề 2: Đường thẳng song song với mặt phẳng

Câu 27: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
B. Nếu đường thẳng a nằm trong (P) và $(P) // \Delta$ thì $a // \Delta$.
C. Nếu đường thẳng $\Delta // (P)$ và (P) cắt đường thẳng a thì hai đường thẳng a và Δ cắt nhau.
D. Đường thẳng $\Delta // (P)$ thì tồn tại đường thẳng Δ' nằm trong (P) để $\Delta // \Delta'$.

Câu 28: Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng a, b với a song song (P). Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. Nếu b nằm trong (P) thì $a // b$.
B. Nếu b nằm trong (P) thì a và b chéo nhau.
C. Nếu b nằm trong (P) thì a và b cắt nhau.
D. Nếu b nằm trong (P) thì a và b không có điểm chung.

Câu 29: Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau và mặt phẳng (P). Xét các mệnh đề sau

- (I) Nếu $(P) // a$ thì $(P) // b$.
(II) Nếu $(P) // a$ thì (P) chứa đường thẳng b.
(III) Nếu (P) cắt a thì (P) cắt b.
(IV) Nếu $(P) // a$ thì (P) song song hoặc chứa đường thẳng b.

Số mệnh đề **sai** trong các mệnh đề trên là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 30: Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và đường thẳng b không nằm trong (α) . Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. Nếu $b // (\alpha)$ thì $b // a$.
B. Nếu b cắt (α) thì b cắt a.
C. Nếu $b // a$ thì $b // (\alpha)$.
D. Nếu b cắt (α) và mặt phẳng (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) cắt cả a và b.

Câu 31: Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (α) . Điều kiện cần để đường thẳng $a // (\alpha)$ là

- A. $a // b$ và $b // (\alpha)$. B. $a // b$ và $b \subset (\alpha)$. C. $a \cap (\alpha) = \emptyset$. D. $a // b$ và $b \cap (\alpha) = \emptyset$.

Câu 32: Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2 . Tìm số mặt phẳng chứa d_1 và song song với d_2 .

A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Câu 33: Chọn đường thẳng a và hai mặt phẳng (P) , (Q) có giao tuyến là đường thẳng b . Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

- A. Nếu $a // (Q)$ thì $a // (P)$. B. Nếu $a \subset (Q)$ và $a // b$ thì $a // (P)$.
C. Nếu $a \subset (Q)$ và $a // (P)$ thì $a // b$. D. Có thể xảy ra trường hợp $a // (P)$ và $a // (Q)$.

Câu 34: Xét các phát biểu sau:

- (I) Đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì a luôn song song với mọi đường thẳng nằm trong (P) .
(II) Cho a và b là hai đường thẳng chéo nhau. Khi đó, có duy nhất một mặt phẳng đi qua a và song song với b .
(III) Cho a và b là hai đường thẳng chéo nhau. Khi đó, có vô số mặt phẳng đi qua a và song song với b .
Số phát biểu đúng là

A. 0. B. 1. C. 3 D. 2.

Câu 35: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có M , N lần lượt là trung điểm của SA , SB . Tìm khẳng định đúng.

- A. $MN // (ABCD)$. B. $MN // (SAB)$. C. $MN // (SCD)$. D. $MN // (SBC)$.

Câu 36: Cho tứ diện $ABCD$ có I , J lần lượt là trung điểm của BC , BD . Giao tuyến của mặt phẳng (AIJ) và (ACD) là

- A. đường thẳng d đi qua A và song song với BC . B. đường thẳng d đi qua A và song song với BD .
C. đường thẳng d đi qua A và song song với CD . D. đường thẳng AB .

Câu 37: Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trên một mặt phẳng có tâm lần lượt là O và O' . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. $OO' // (ABCD)$. B. $OO' // (ABEF)$. C. $OO' // (BDE)$. D. $OO' // (ADF)$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I , J lần lượt là trọng tâm tam giác SAB và SAD . Gọi E , F lần lượt là trung điểm của AB , AD . Tìm mệnh đề đúng.

- A. $IJ // (SBD)$. B. $IJ // (SEF)$. C. $IJ // (SAB)$. D. $IJ // (SAD)$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi A' , B' , C' , D' lần lượt là trung điểm của SA , SB , SC , SD . Tìm số mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- (I): $A'B' // (SAD)$. (II): $A'C' // BD$. (III): $A'D' // (SBC)$. (IV): $A'C' // (BCD)$.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 40: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB , AC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. MN nằm trong (BCD) . B. MN không song song (BCD) .
C. $MN // (BCD)$. D. MN cắt (BCD) .

Câu 41: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Mặt phẳng (α) qua AB và cắt cạnh SC tại điểm M nằm giữa S và C. Khi đó, mặt phẳng (α) song song với

- A. BD. B. AC. C. SC. D. CD.

Câu 42: Cho tứ diện ABCD có G là trọng tâm tam giác ABD. Gọi M là một điểm trên đoạn BC sao cho $MB = 2MC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $MG \parallel (BCD)$. B. $MG \parallel (ABD)$. C. $MG \parallel (ABC)$. D. $MG \parallel (ACD)$.

Câu 43: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $AD \parallel (BEF)$. B. $FD \parallel (BEC)$. C. $CF \parallel (ABD)$. D. $EC \parallel (ABF)$.

Câu 44: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O. Gọi M là trung điểm của OC, mặt phẳng (α) đi qua M và song song với SA và BD. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) là hình gì?

- A. Hình thang cân. B. Hình bình hành. C. Hình tam giác. D. Hình chữ nhật.

Câu 45: Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M, N lần lượt là các điểm nằm trên hai cạnh AB và CD với M, N không trùng với các điểm A, B, C, D. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua MN và song song với SA. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) là hình gì?

- A. Ngũ giác. B. Tam giác. C. Tứ diện. D. Tứ giác.

Câu 46: Cho tứ diện ABCD có G là trọng tâm của tam giác BCD. Gọi O là điểm tùy ý nằm trong đoạn thẳng AG. Thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng đi qua O, song song với DG và BC là hình gì?

- A. Tam giác. B. Hình thang cân. C. Hình bình hành. D. Ngũ giác.

Câu 47: Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC và DB. Giao tuyến của hai mặt phẳng (EFG) và (ACD) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

- A. CD. B. AD. C. AB. D. DB.

Câu 48: Cho tứ diện ABCD. Gọi M là điểm thuộc miền trong của tam giác ABC. Mặt phẳng (α) qua M và song song với AB và CD. Thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?

- A. Tam giác. B. Hình chữ nhật. C. Hình vuông. D. Hình bình hành.

Câu 49: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Lấy M là điểm lấy trên SA với M không trùng với S và A. Mặt phẳng (MBC) cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì?

- A. Tam giác. B. Hình thang. C. Hình bình hành. D. Hình chữ nhật.

Câu 50: Cho tứ diện ABCD. Gọi M là điểm nằm trên cạnh BC với M không trùng với B và C. Mặt phẳng (α) qua M và song song với AB và CD. Thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?

- A. Hình bình hành. B. Hình vuông. C. Hình thoi. D. Hình chữ nhật.

Câu 51: Cho tứ diện ABCD có $AB = CD$. Mặt phẳng (α) qua trung điểm của cạnh AC, song song với AB và CD. Thiết diện của tứ diện ABCD cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?

- A. Tam giác. B. Hình vuông. C. Hình thoi. D. Hình chữ nhật.

Câu 52: Cho tứ diện ABCD có G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và BCD. Gọi I là trung điểm của BC. Xét các mệnh đề sau:

- (I): $G_1G_2 // (AID)$. (II): $G_1G_2 // (ABD)$. (III): $G_1G_2 // (ACD)$ (IV): $G_1G_2 // (BCD)$.

Số mệnh đề đúng là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 53: Cho hình chóp S.ABCD. Gọi G, E lần lượt là trọng tâm của tam giác SAD và tam giác SCD. Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Xét các mệnh đề

- (1): $MN // (GAC)$. (2): $MN // (DAC)$. (3): $GE // (AMN)$. (4): $GE \equiv MN$.

- (5): $GE // MN$.

Số mệnh đề sai là

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 54: Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $G_1G_2 = \frac{2}{3}AB$. B. G_1G_2 song song (ABC).
C. BG_1, AG_2, CD đồng quy. D. G_1G_2 song song (ABD).

Câu 55: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi I là trung điểm của BC, điểm K thuộc cạnh SD sao cho $SK = \frac{1}{2}KD$. Gọi M là giao điểm của AI và BD. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề dưới đây.

- A. $MK // (SBC)$. B. $MK // (SBD)$. C. $MK // (ABCD)$. D. $MK // (SCD)$.

Câu 56: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi P là trung điểm của OD, điểm I thuộc cạnh SD. Xác định tỉ số $k = \frac{SD}{ID}$ để $PI // (SBC)$.

- A. $k = 3$. B. $k = 4$. C. $k = \frac{5}{2}$. D. $k = \frac{1}{2}$.

Câu 57: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF (các đỉnh lấy theo thứ tự đó) và không đồng phẳng. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABF và ABD. Khi đó IJ không song song với mặt phẳng nào dưới đây?

- A. (EBC). B. (EAD). C. (DCEF). D. (BDF).

Câu 58: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, AD song song BC và $AD = 2BC$. Gọi M là trung điểm SA. Đường thẳng nào sau đây là giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD)?

A. MN với N là điểm thuộc đoạn SD sao cho $SN = 2ND$.

B. MP với P là trung điểm SD.

C. MK với K là trọng tâm tam giác SCD.

D. MH với H là điểm thuộc đoạn SD sao cho $SH = \frac{1}{2}HD$.

Câu 59: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB. Điểm M bất kì thuộc cạnh BC. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (MEF) là hình gì?

A. Tam giác

B. Ngũ giác

C. Lục giác

D. Hình thang

Câu 60: Cho tứ diện ABCD, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD. Thiết diện tạo bởi tứ diện và mặt phẳng (MNP) là hình gì?

A. Tam giác

B. Hình bình hành

C. Hình ngũ giác

D. Tam giác cân

Câu 61: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, $SA = SB$, $SC = SD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm SA, SB. Điểm M thuộc cạnh BC. Thiết diện tạo bởi hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MEF) là hình gì?

A. Tam giác

B. Hình bình hành

C. Hình thang cân

D. Hình vuông

Câu 62: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, AB song song với CD; $AB > CD$. Gọi M là trung điểm CD, (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với SA, BC. Thiết diện của (α) và hình chóp S.ABCD là hình gì?

A. Tam giác

B. Hình thang

C. Hình bình hành

D. Tam giác cân

Câu 63: Cho tứ diện ABCD, M là trung điểm cạnh AB và N là một điểm nằm trong đoạn CD. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với BC. Thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện ABCD là hình bình hành khi

A. $CN = 3DN$

B. $DN = 2CN$

C. $CN = 2DN$

D. $CN = DN$

Câu 64: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, cạnh $SC = a$. Gọi M điểm di động trên cạnh SC. Mặt phẳng (P) đi qua M, song song với SA và BD. Đặt $SM = x (x \in \mathbb{R})$. Tìm tất cả các giá trị của x để (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.

A. $x = \frac{a}{2}$

B. $x = \frac{3a}{4}$

C. $0 < x < \frac{a}{2}$

D. $\frac{a}{2} \leq x \leq a$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau hoặc song song. **Chọn D.**

Câu 2: Hai đường thẳng phân biệt không song song thì cắt nhau hoặc chéo nhau. **Chọn C.**

Câu 3: Nếu a cắt (Q) tại điểm I thì I phải nằm trên d . **Chọn A.**

Câu 4: Mọi đường thẳng nằm trong (P) hoặc chéo với a , hoặc cắt a . **Chọn C.**

Câu 5: Nếu $a \parallel (P)$ thì $b \parallel (P)$. **Chọn A.**

Câu 6: Nếu $c \parallel a$ thì $c \parallel b$. **Chọn A.**

Câu 7: Hai đường thẳng MN và PQ chéo nhau. **Chọn D.**

Câu 8: Do $AB \parallel CD$ nên qua M kẻ đường thẳng song song với CD cắt SD tại $N \Rightarrow N$ là giao điểm của SD và (MAB) . Ta thấy $MN \parallel CD$. **Chọn C.**

Câu 9: Do $AB \parallel CD$ nên qua M kẻ đường thẳng song song với CD cắt SD tại $N \Rightarrow N$ là giao điểm của SD và (MAB) . Ta thấy $MN \parallel CD \Rightarrow ABMN$ là hình thang. **Chọn C.**

Câu 10: Giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng qua S song song với AB . **Chọn A.**

Câu 11: Hai đường thẳng AB và CD chéo nhau. **Chọn C.**

Câu 12: Nếu $c \parallel a$ thì $c \parallel b$. **Chọn A.**

Câu 13: Ta có ngay A đúng, B sai vì có thể $b \subset (\alpha)$, C đúng, D đúng (mặt phẳng (α) khi đó chính là mặt phẳng tạo bởi 2 đường thẳng song song a, b). **Chọn B.**

Câu 14: A đúng, mặt phẳng khi đó chính là mặt phẳng tạo bởi 2 đường thẳng song song a, b .

B sai vì b và c có thể chéo nhau.

Hiển nhiên C đúng, D đúng. **Chọn B.**

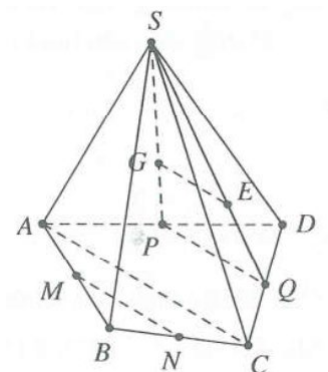
Câu 15: Vì $AB \parallel CD$ suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là Sx . **Chọn C.**

Câu 16: Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD, CD .

Suy ra $PQ \parallel AC$ và $\frac{SG}{SP} = \frac{SE}{SQ} = \frac{2}{3} \Rightarrow GE \parallel PQ$.

Xét $\triangle ABC$ có MN là đường trung bình $\triangle ABC$

$\Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow MN \parallel PQ \parallel GE$. **Chọn C.**

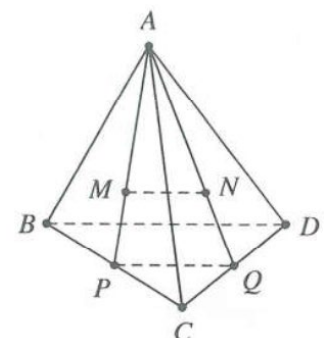


Câu 17: Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BC, CD .

Ta có $\frac{AM}{AP} = \frac{AN}{AQ} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel PQ$ (định lý Thales)

Xét $\triangle BCD$ có PQ là đường trung bình $\Rightarrow PQ \parallel BD$.

Do đó $MN \parallel PQ \parallel BD$. **Chọn D.**



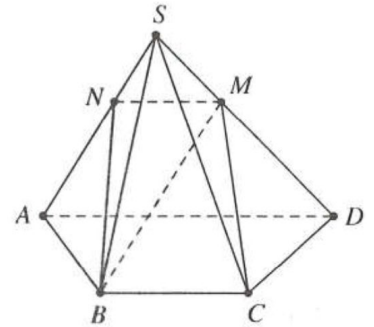
Câu 18: Vì $AB // CD \Rightarrow$ Giao tuyến là đường thẳng d qua M song song với CD . **Chọn B.**

Câu 19: Qua M kẻ đường thẳng $d // AD$, cắt SA tại N .

Suy ra $BC // MN \Rightarrow B, C, M, N$ đồng phẳng

Do đó N là giao điểm của SA với đường thẳng qua M song song với AD .

Chọn A.

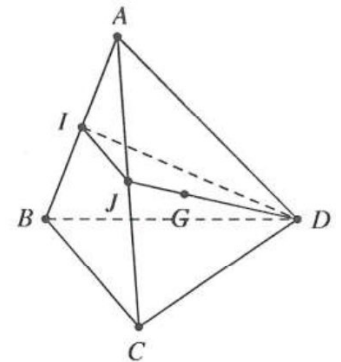


Câu 20: Nếu $a // b$, b và c chéo nhau thì a, c chéo nhau hoặc cắt nhau. **Chọn C.**

Câu 21: Gọi J là trung điểm của $AC \Rightarrow IJ // BC$.

Do đó mặt phẳng (P) chính là mặt phẳng (IJD) .

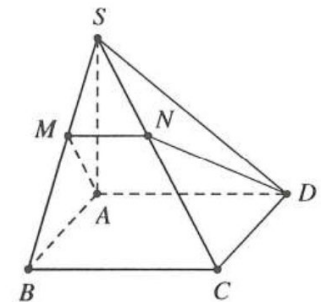
Vậy giao tuyến cần tìm của hai mặt phẳng (P) và (BCD) là đường thẳng đi qua D và song song với BC . **Chọn C.**



Câu 22: Qua M kẻ đường thẳng $d // BC$, cắt SC tại N

Suy ra $MN // BC$ mà $AD // BC \Rightarrow MN // AD$.

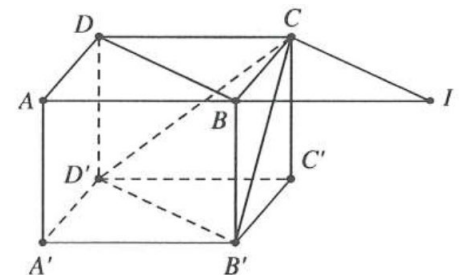
Do đó thiết diện cần tìm là hình thang $MNDA$. **Chọn C.**



Câu 23: Kẻ hình bình hành $BICD \Rightarrow BD // IC$.

Mà $BD // B'D' \Rightarrow IC // B'D' \Rightarrow I = AB \cap (B'CD')$

Do đó $CD = IB$ mà $AB = CD \Rightarrow AB = BI$. **Chọn A.**

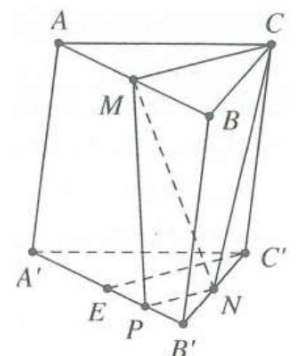


Câu 24: Gọi E là trung điểm của $A'B' \Rightarrow MC // EC'$.

Từ N kẻ đường thẳng $d // EC'$ và cắt $A'B'$ tại P .

Suy ra $MC // NP \Rightarrow P \in (MNC)$. Do đó $B'P = \frac{1}{2}B'E = \frac{1}{4}A'B'$.

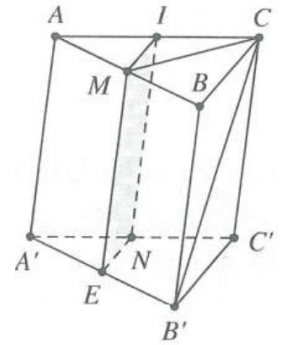
Chọn C.



Câu 25: Gọi I, N, E lần lượt là trung điểm của AC, A'C', A'B'.

Suy ra $ME // AA'$, $(MINE) // (BCC'B') \Rightarrow (P) \equiv (MINE)$.

Do đó (P) cắt AC tại trung điểm N của AC. **Chọn A.**



Câu 26: Ta có $\begin{cases} BC // AD \\ Bx // Dz \end{cases} \Rightarrow (Bx; Cy) // (AD; Dz)$

Do đó $AD' // B'C'$. Chứng minh tương tự $\Rightarrow AB' // C'D'$.

Suy ra $AB'C'D'$ là hình bình hành.

Gọi O, O' lần lượt là tâm hình bình hành ABCD, A'B'C'D'

Suy ra OO' là đường trung bình hình thang BB'D'D, $\Delta ACC'$.

Khi đó $OO' = \frac{BB' + DD'}{2} = \frac{CC'}{2} \Rightarrow CC' = BB' + DD' = 6$.

Chọn D.

Câu 27: Đường thẳng $\Delta // (P)$ thì tồn tại đường thẳng Δ' nằm trong (P) để $\Delta // \Delta'$. **Chọn D.**

Câu 28: Nếu b nằm trong (P) thì a và b không có điểm chung. **Chọn D.**

Câu 29: (II) Mệnh đề này sai do nếu $(P) // a$ thì (P) không nhất thiết phải chứa đường thẳng b

(III) Mệnh đề này sai do nếu (P) cắt a thì ta vẫn chưa kết luận được (P) cắt b

Các mệnh đề (I), (IV) đúng. **Chọn C.**

Câu 30: Nếu $b // a$ thì $b // (\alpha)$. **Chọn C.**

Câu 31: Điều kiện cần để đường thẳng $a // (\alpha)$ là $a // b$ và $b \subset (\alpha)$. **Chọn B.**

Câu 32: Có duy nhất 1 mặt phẳng chứa d_1 và song song với d_2 . **Chọn A.**

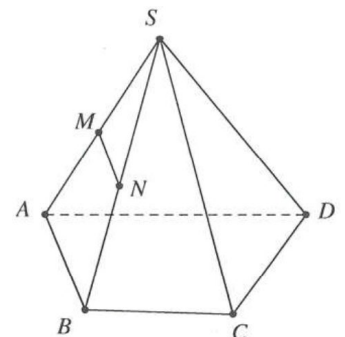
Câu 33: Nếu $a // (Q)$ thì $a // (P)$ là sai. **Chọn A.**

Câu 34: (I) Mệnh đề sai do đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì a song song với một đường thẳng nào đó nằm trong (P).

(II) Mệnh đề đúng

(III) Mệnh đề sai. **Chọn B.**

Câu 35: Do M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB $\Rightarrow MN$ là đường trung bình trong tam giác SAB $\Rightarrow MN // AB$

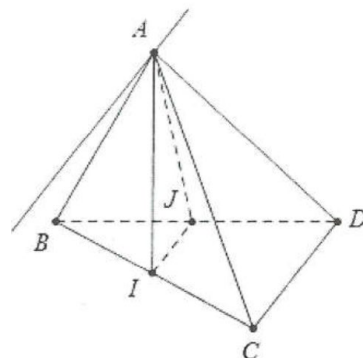


$\Rightarrow MN // (ABCD)$. **Chọn A.**

Câu 36: Do IJ là đường trung bình trong tam giác BCD nên

$$IJ // CD \Rightarrow (AIJ) \cap (ACD) = d \text{ thì } d // CD // IJ.$$

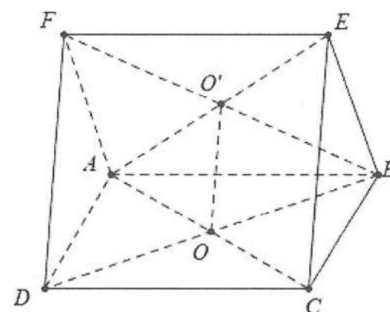
Do đó d đi qua điểm A và $d // IJ // CD$. **Chọn C.**



Câu 37: Do O, O' lần lượt là trung điểm của BD và $BF \Rightarrow OO'$ là đường trung bình trong $\triangle BDF$.

Khi đó $OO' // FD$, tương tự ta có $OO' // EC$.

Suy ra được $OO' // (ADF)$. **Chọn D.**



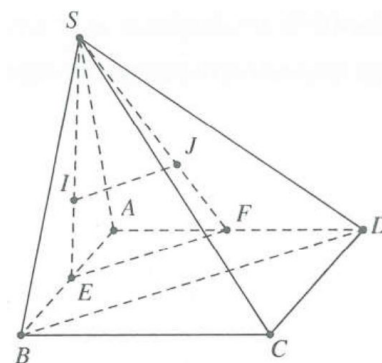
Câu 38: Do I, J lần lượt là trọng tâm tam giác SAB và

$$SAD \Rightarrow \frac{SI}{SE} = \frac{SJ}{SF} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ // EF.$$

Dễ thấy EF là đường trung bình trong tam giác ABD

Suy ra $EF // BD \Rightarrow IJ // EF // BD \Rightarrow IJ // (SBD)$.

Chọn A.



Câu 39: Do $A'B'$ là đường trung bình trong tam giác SAD

nên $A'B' // AB$, $A'B' \cap (SAD) = A' \Rightarrow$ (I) **sai**.

Tương tự $A'C' // AC$, AC cắt $BD \Rightarrow$ (II) **sai**.

Do $A'D' // AD // BC \Rightarrow A'D' // (SBC) \Rightarrow$ (III) **đúng**.

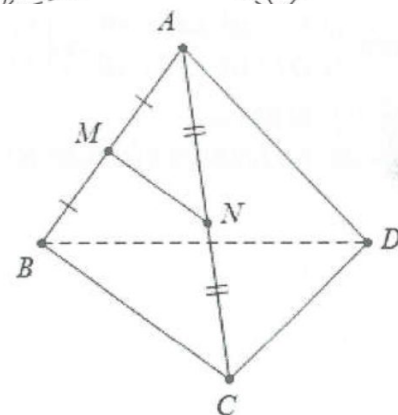
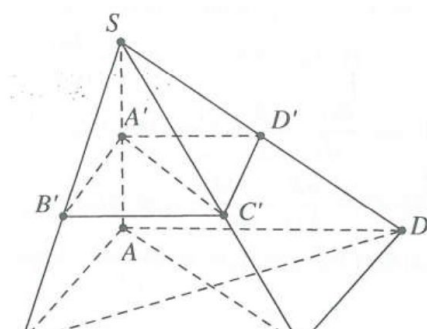
$A'C' // AC \Rightarrow A'C' // (ABCD) \Rightarrow A'C' // (BCD)$

$\Rightarrow$ (IV) **đúng**.

Số mệnh đề **đúng** là 2. **Chọn B.**

Câu 40: Do MN là đường trung bình trong tam giác ABC

nên $MN // BC$



Do MN không thuộc mặt phẳng (BCD) và $MN // BC$ nên $MN // (BCD)$. **Chọn C.**

Câu 41: Vì M nằm giữa S và C $\Rightarrow C \notin (\alpha)$.

Mặt khác $AB // CD \Rightarrow (\alpha) // CD$. **Chọn D.**

Câu 42: Gọi K là điểm thuộc cạnh BD sao cho $BK = 2KD$.

Gọi I là trung điểm của AD $\Rightarrow \frac{BG}{GI} = 2$ (tính chất trọng tâm)

Ta có: $\frac{BG}{GI} = \frac{BK}{KD} = 2 \Rightarrow GK // ID$

Mặt khác $\frac{BK}{KD} = \frac{BM}{MC} = 2 \Rightarrow MK // CD$

Do đó $(MGK) // (ACD) \Rightarrow MG // (ACD)$. **Chọn D.**

Câu 43: Do ABCD và ABEF là các hình bình hành

nên $\begin{cases} EF // AB; EF=AB \\ CD // AB; CD=AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} EF // CD \\ EF=CD \end{cases} \Rightarrow EFDC \text{ là hình bình hành.}$

Do đó $FD // EC \Rightarrow FD // (BCE)$. **Chọn B.**

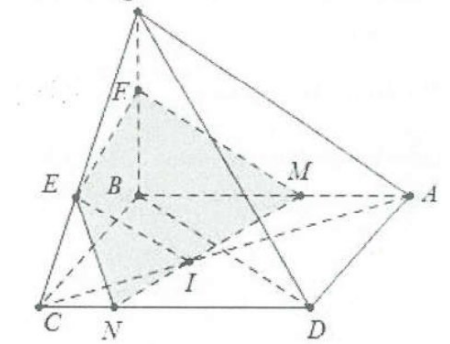
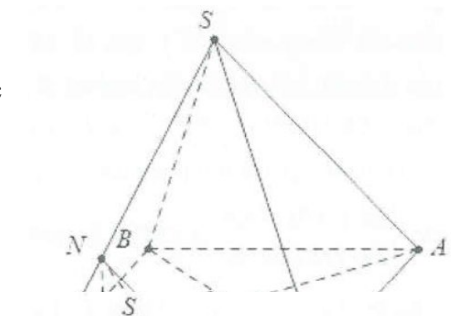
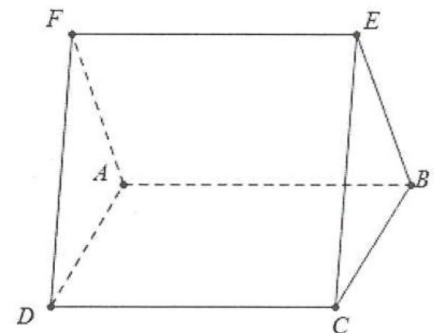
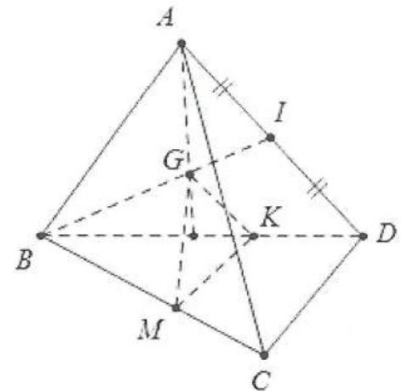
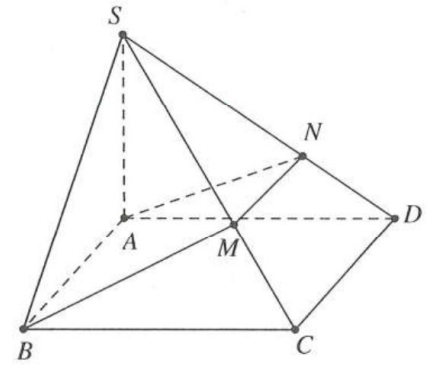
Câu 44: Trong mp(SAC), qua M dựng $MN // SA (N \in SC)$.

Trong mp(ABC), qua M dựng đường thẳng song song với BD cắt các cạnh BC và CD lần lượt tại E và F

Thiết diện cắt bởi mặt phẳng (α) là tam giác NEF.

Chọn C.

Câu 45: Trong mp(ABCD), gọi $I = MN \cap AC$.



Trong mp(SAB), qua M dựng $MF \parallel SA$ ($F \in SB$),

Trong mp(SAC), qua I dựng $IE \parallel SA$ ($E \in SC$).

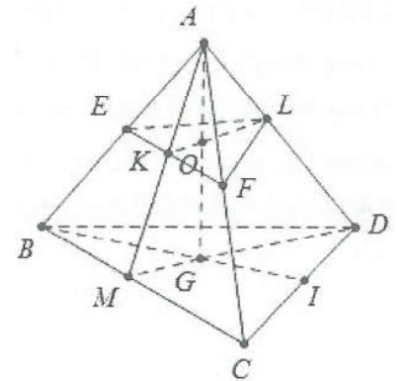
Khi đó mặt phẳng (P) cắt hình chóp theo thiết diện là tứ giác MNEF. **Chọn D.**

Câu 46: Gọi M là trung điểm của BC

Đường thẳng qua O song song với DG cắt AM, AD lần lượt tại K và L.

Trong mp(ABC), đường thẳng qua K song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại E và F.

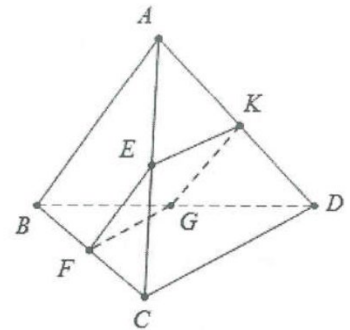
Thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng đã cho là tam giác LEF. **Chọn A.**



Câu 47: Giả sử (EFG) cắt (ACD) theo giao tuyến là EK với $K \in AD$.

Do $FG \parallel CD \Rightarrow (EFG) \cap (ACD) = EK$ thì $EK \parallel FG \parallel CD$.

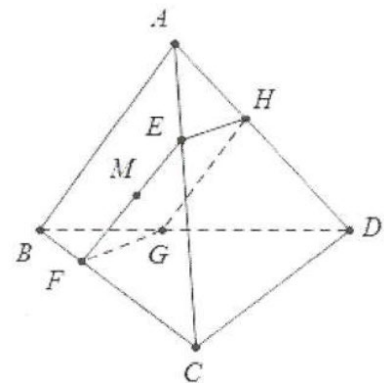
Vậy $EK \parallel CD$. **Chọn A.**



Câu 48: Trong mp(ABC), qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC và BC lần lượt tại E và F.

Dựng $FG \parallel CD$ ($G \in BD$) và $EH \parallel CD$ ($H \in AD$) $\Rightarrow$ thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác EFGH

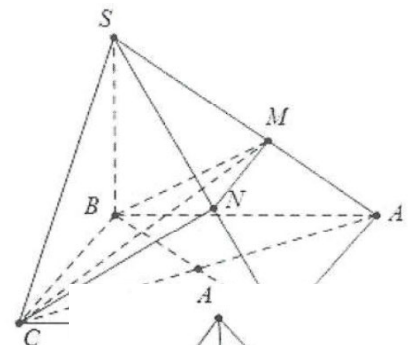
Do $\begin{cases} EF \parallel GH \parallel AB \\ EH \parallel FG \parallel CD \end{cases} \Rightarrow EFGH$ là hình bình hành. **Chọn D.**



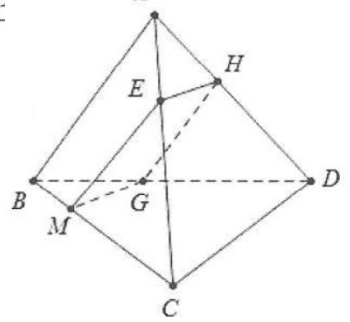
Câu 49: Do $BC \parallel AD \Rightarrow (MBC) \cap (SAD) = MN$

$\Rightarrow MN \parallel AD$ (với $N \in SD$).

Do $MN < AD$ suy ra $\begin{cases} MN < BC \\ MN \parallel BC \end{cases} \Rightarrow$ thiết diện của khối chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MBC) là hình thang MNCB. **Chọn B.**



Câu 50: Trong mặt phẳng (ABC) dựng $ME \parallel AB$ ($E \in AC$).



Trong mp(BCD), dựng $MG \parallel CD (G \in BD)$.

Dựng $EH \parallel CD (H \in AD) \Rightarrow$ thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác MGHE có các cặp cạnh đối song song

suy ra nó là hình bình hành. **Chọn A.**

Câu 51: Gọi E là trung điểm của AC. Dựng $EH \parallel CD$ và $EM \parallel AB$ với $H \in AD, M \in BC$.

Dựng $MG \parallel CD (G \in CD) \Rightarrow$ thiết diện của tứ diện ABCD cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác EMGH có các cặp cạnh đối song song suy ra nó là hình bình hành.

Lại có: ME là đường trung bình trong $\triangle ABC \Rightarrow ME = \frac{1}{2} AB$

Tương tự ta có: $EH = \frac{1}{2} CD$, mà $AB = CD \Rightarrow EM = EH$.

Do đó thiết diện EMGH là hình thoi. **Chọn C.**

Câu 52: Do G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và BCD nên

$G_1 \in AI; G_2 \in DI$ và $\frac{IG_1}{IA} = \frac{IG_2}{ID} \Rightarrow G_1G_2 \parallel AD$ và $G_1G_2 \subset (AID) \Rightarrow$ khẳng

định (I) **sai**.

Do $G_1G_2 \parallel AD \Rightarrow G_1G_2 \parallel (ACD)$ và $G_1G_2 \parallel (ABD)$

Do đó khẳng định (II),(III) **đúng**

Đường thẳng G_1G_2 cắt (BCD) tại điểm $G_2 \Rightarrow$ (IV) **sai**.

Vậy có 2 khẳng định **đúng**. **Chọn B.**

Câu 53: Do MN là đường trung bình trong tam giác BAC $\Rightarrow MN \parallel AC$

Do MN không thuộc mp(GAC) và $MN \parallel AC$ nên $MN \parallel (GAC) \Rightarrow$ (1)

đúng.

$MN \subset (ABCD) \Rightarrow MN \subset (DAC) \Rightarrow$ (2) **sai**.

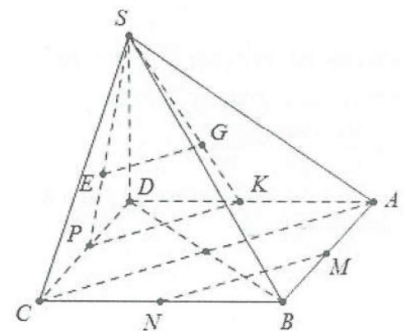
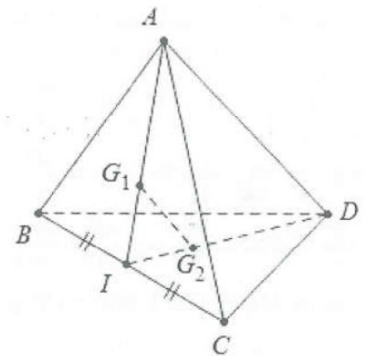
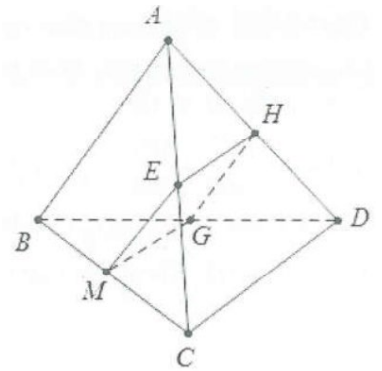
Gọi P, K lần lượt là trung điểm của CD và AD thì

$$\frac{SE}{SP} = \frac{SG}{SK} = \frac{2}{3} \Rightarrow GE \parallel PK.$$

Mặt khác $MN \parallel AC \parallel PK \Rightarrow MN \parallel GE$

$\Rightarrow GE \parallel (AMN) \Rightarrow$ (3) **đúng**.

Khẳng định (4) **sai**, khẳng định (5) **đúng**. Vậy có 2 khẳng định **sai**. **Chọn A.**

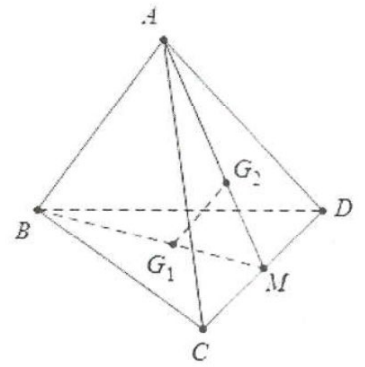


Câu 54: Gọi M là trung điểm của CD. Do G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD

$$\Rightarrow G_1 \in BM; G_2 \in AM$$

$$\text{Mặt khác } \frac{MG_1}{MB} = \frac{MG_2}{MA} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel AB \Rightarrow \frac{G_1G_2}{AB} = \frac{1}{3}.$$

$G_1G_2 \parallel (ABC); BG_1; AG_2, CD$ đồng quy tại M và $G_1G_2 \parallel (ABD)$. Khẳng định **sai** là **A. Chọn A.**



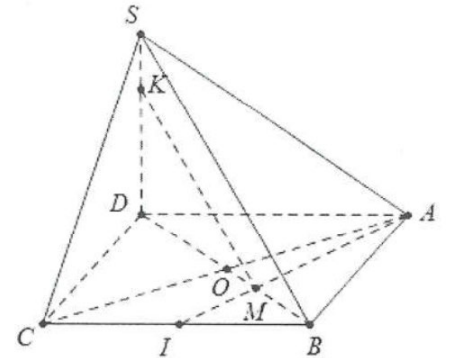
Câu 55: Do O là trung điểm của AC suy ra $M = BO \cap AI$ thì M là trọng tâm tam giác ABC

$$\Rightarrow BM = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}BD = \frac{BD}{3}.$$

$$\text{Lại có: } \Rightarrow SK = \frac{1}{2}KD \Rightarrow SK = \frac{SD}{3}$$

$$\text{Khi đó xét } \triangle SDB \text{ có: } \frac{SK}{SD} = \frac{BM}{BD} \Rightarrow KM \parallel SB$$

Suy ra $MK \parallel (SBC); MK \subset (SBD)$. **Chọn A.**

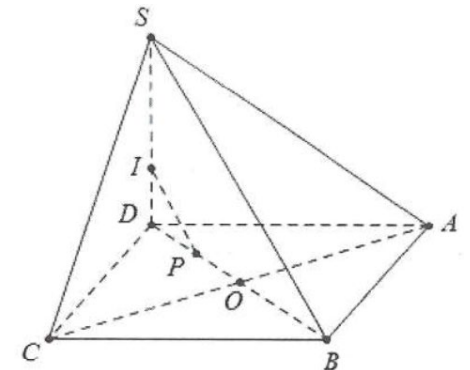


Câu 56: Để $PI \parallel (SBC) \Leftrightarrow PI \parallel SB$.

Xét tam giác DSB có $PI \parallel SB$

$$\Rightarrow \frac{SD}{ID} = \frac{BD}{PD} = \frac{2OD}{PD} = 4.$$

Do đó $k = 4$ thì $PI \parallel (SBC)$. **Chọn B.**



Câu 57: Gọi M là trung điểm của AB. Do I và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABF và ABD nên $I \in FM$ và $J \in DM$

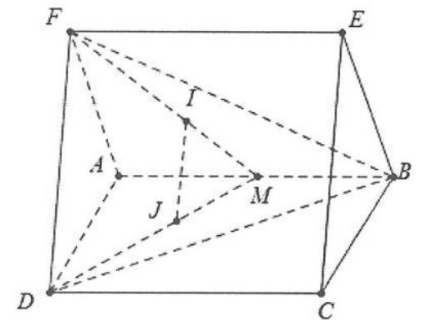
$$\text{Ta có: } \frac{MI}{MF} = \frac{MJ}{MD} = \frac{1}{3} \Rightarrow IJ \parallel FD.$$

Do ABCD và ABEF là các hình bình hành nên

$EF \parallel AB \parallel CD$ và $EF = AB = CD \Rightarrow EFDC$ là hình bình hành suy ra $IJ \parallel FD \parallel EC$.

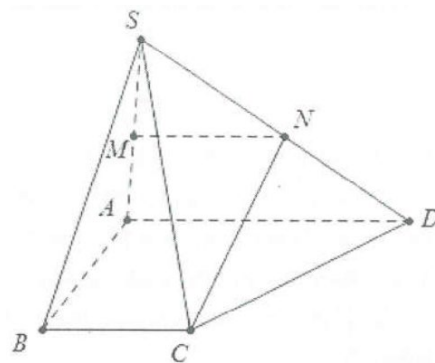
$$\text{Ta có } \begin{cases} IJ \parallel (EBC) \\ IJ \parallel (DFEC). \\ IJ \parallel (FDB) \end{cases}$$

IJ không song song với (EAD). **Chọn B.**



Câu 58: Do $AD // BC \Rightarrow (MBC) \cap (SAD) = MN$ thì
 $MN // BC // AD (N \in SD)$.

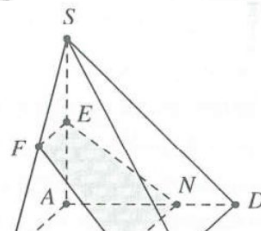
Do $\begin{cases} MS = MA \\ MN // AD \end{cases} \Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác $SAD \Rightarrow N$
 là trung điểm của SD . **Chọn B.**



Câu 59: Qua M kẻ đường thẳng $d // AB$, cắt AD tại N.

Ta có $MN // AB$ mà $EF // AB \Rightarrow MN // EF$.

Do đó thiết diện cần tìm là hình thang MNEF. **Chọn D.**



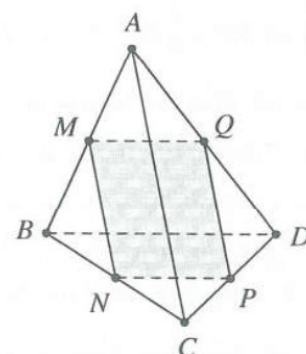
Câu 60: Xét $\triangle ABC$ có MN là đường trung bình $\Rightarrow MN // AC$.

Xét $\triangle BCD$ có NP là đường trung bình $\Rightarrow NP // BD$.

Qua P kẻ đường thẳng $d // AC$, cắt AD tại Q $\Rightarrow MN // PQ$.

Do đó thiết diện tạo bởi tứ diện và mặt phẳng (MNP) là $MNPQ$.

Ta có $MN // PQ$; $MN = \frac{1}{2}PQ \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.



Chọn B.

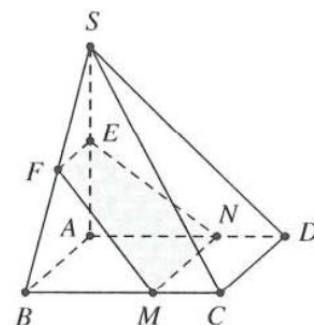
Câu 61: Qua M kẻ đường thẳng $d // AB$, cắt AD tại N.

Ta có $MN // AB$ mà $EF // AB \Rightarrow MN // EF$.

Do đó thiết diện cần tìm là hình thang MNEF.

Lại có $\begin{cases} SA = SB \\ SC = SD \end{cases} \Rightarrow \triangle SAD = \triangle SBC \Rightarrow EN = FM$.

Vậy MNEF là hình thang cân. **Chọn B.**



Câu 62: Qua M kẻ đường thẳng $d_1 // BC$, cắt AB tại N

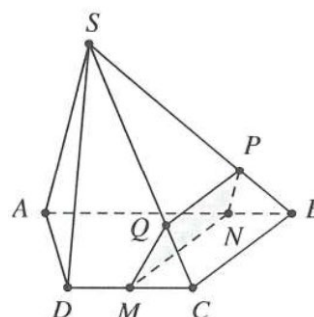
Qua N kẻ đường thẳng $d_2 // SA$, cắt SB tại P

Qua P kẻ đường thẳng $d_3 // BC$, cắt SC tại Q

Ta có $MN // BC$ mà $PQ // BC \Rightarrow MN // PQ$.

Do đó, thiết diện cần tìm là hình thang MNPQ.

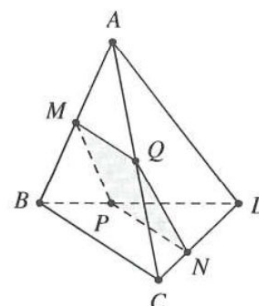
Chọn B.



Câu 63: Qua M kẻ đường thẳng $d_1 // BC$, cắt AC tại Q

Qua N kẻ đường thẳng $d_2 // BC$, cắt BD tại P

Ta có $MQ // BC$ mà $NP // BC \Rightarrow MQ // NP$.



Do đó, thiết diện cần tìm là hình thang MQNP.

Để MQNP là hình bình hành $\Leftrightarrow MQ = NP$

Mà MQ là đường trung bình $\Delta ABC \Rightarrow MQ = \frac{1}{2}BC$

Suy ra $NP = \frac{1}{2}BC \longrightarrow N$ là trung điểm của CD. **Chọn D.**

Câu 64: Qua M kẻ đường thẳng $d_1 // SA$, cắt AC tại I.

Qua I kẻ đường thẳng $d_2 // BD$, cắt AB, AD tại P, Q.

Qua P kẻ đường thẳng $d_3 // SA$, cắt SD tại N.

Qua Q kẻ đường thẳng $d_4 // SA$, cắt SB tại E.

Do đó thiết diện thu được là ngũ giác MNPQE.

Vậy để thiết diện là ngũ giác $\Leftrightarrow SM < \frac{SC}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{a}{2}$.

Chọn C.

