

NGUYỄN THANH TÙNG
(Giáo viên chuyên luyện thi THPT Quốc Gia)

10 bài toán trọng điểm

HÌNH HỌC PHẪNG OXY

TU DUY ĐỘT PHÁ - CHÌA KHÓA GIẢI NHANH

BIÊN SOẠN THEO CẤU TRÚC MỚI NHẤT CỦA BỘ GD&ĐT

- * Dành cho học sinh lớp 10, 11, 12 và luyện thi Quốc Gia
- * Sách tham khảo bổ ích cho giáo viên



NHÀ XUẤT BẢN TỔNG HỢP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

MỤC LỤC

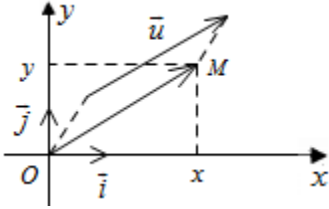
Phần 1: Tổng hợp các kiến thức cơ bản	3
Phần 2: Những bài toán cơ bản	12
Bài toán 1	12
Bài toán 2	14
Bài toán 3	15
Bài toán 4	16
Bài toán 5	17
Bài toán 6	18
Bài toán 7	19
Phần 3: 10 bài toán hình học OXY	21
Bài toán 1.....	21
Bài toán 2.....	108
Bài toán 3.....	117
Bài toán 4.....	139
Bài toán 5.....	152
Bài toán 6.....	184
Bài toán 7.....	253
Bài toán 8.....	269
Bài toán 9.....	297
Bài toán 10.....	317
Phần 4: Sáng tạo và phát triển từ các bài toán hình học phẳng thuần túy	331
Phần 5: Bài tập tổng hợp	362

PHẦN 1:

TỔNG HỢP KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

A. Hệ trục tọa độ Oxy hay $(O; \vec{i}; \vec{j})$ có
$$\begin{cases} O(0;0) \\ \vec{i} = (1;0) \\ \vec{j} = (0;1) \end{cases}$$



Ox : Trục hoành ; Oy : Trục tung

Chú ý:

Nếu nói tới tia Ox hay tia Oy được hiểu là phần hoành độ và tung độ không âm của các trục Ox , Oy tương ứng.

B. Vector :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \Leftrightarrow \vec{u} = (x; y)$$

Cho hai vector $\vec{a} = (x_1; y_1)$ và $\vec{b} = (x_2; y_2)$. Khi đó:

1. Hai vector bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$
2. Hai vector cùng phương: $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow x_1y_2 = x_2y_1$
3. Tổng, hiệu hai vector: $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2)$
4. Tích một số với một vector: $k\vec{a} = (kx_1; ky_1)$
5. Tích vô hướng của hai vector: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2$
6. Môđun của vector: $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$
7. Góc giữa hai vector: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$
8. Hai vector vuông góc: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

C. Điểm: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \Leftrightarrow M(x; y)$

* Cho ba điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$. Khi đó :

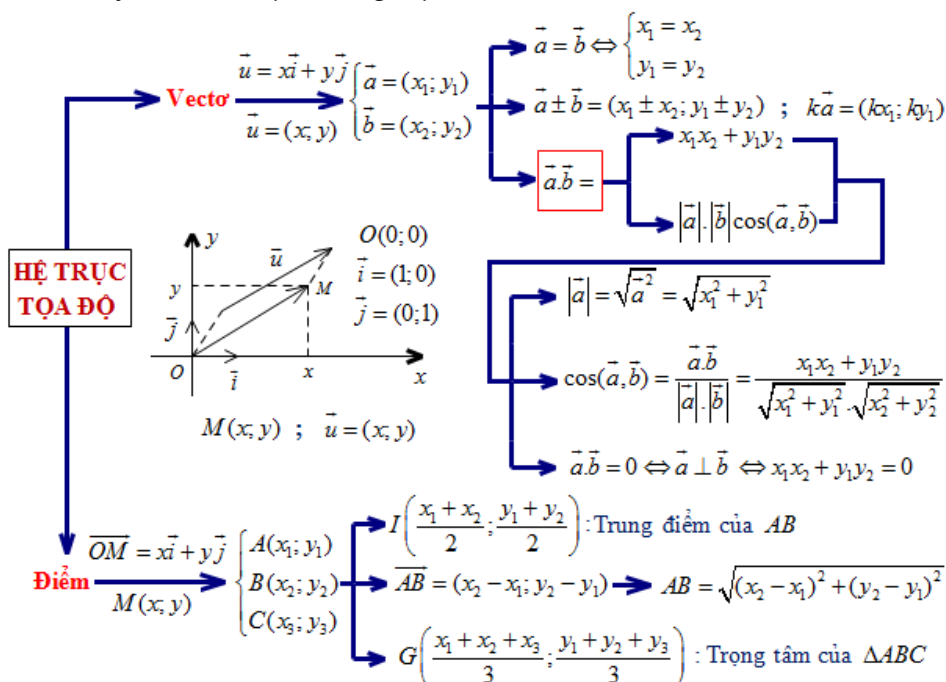
1. $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$

$$2. AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$3. \text{Trung điểm } I \text{ của } AB \text{ có tọa độ: } I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$4. \text{Trọng tâm } G \text{ của tam giác } ABC: G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

Sau đây là sơ đồ cho phân tổng hợp kiến thức trên:



II. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A. TRONG TAM GIÁC VUÔNG :

$$1. \text{Hệ thức Pitago: } a^2 = b^2 + c^2$$

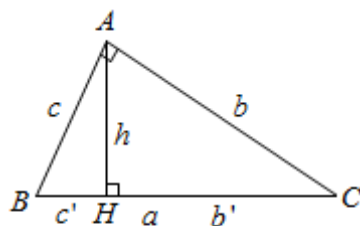
2. Mối quan hệ giữa cạnh, đường cao:

$$+ \begin{cases} b^2 = ab' \\ c^2 = ac' \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$+ h^2 = b'c'$$

$$+ bc = ah$$



$$a = BC, b = CA, c = AB$$

$$b' = HC, c' = HB, h = AH$$

3. Mối quan hệ giữa cạnh và góc:

$$b = a \sin B = a \cos C = c \tan B = c \cot C$$

B. TRONG TAM GIÁC BẤT KÌ :

1. Các định lý

* **Định lý côsin:** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$\Rightarrow$ Hệ quả:

+ Tính góc: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

+ Tính độ dài đường trung tuyến: $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$

* **Định lý sin:** $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

2. Các công thức tính diện tích tam giác

+ Đường cao và cạnh đối diện: $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$

+ Hai cạnh và sin góc xen giữa: $S = \frac{1}{2} ab \sin C$

+ Ba cạnh và bán kính đường tròn ngoại tiếp: $S = \frac{abc}{4R}$

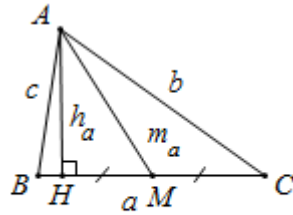
+ Nửa chu vi và bán kính đường tròn nội tiếp: $S = pr$

+ Hê – rông: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Trong đó: R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ;

r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ;

$p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác ABC .

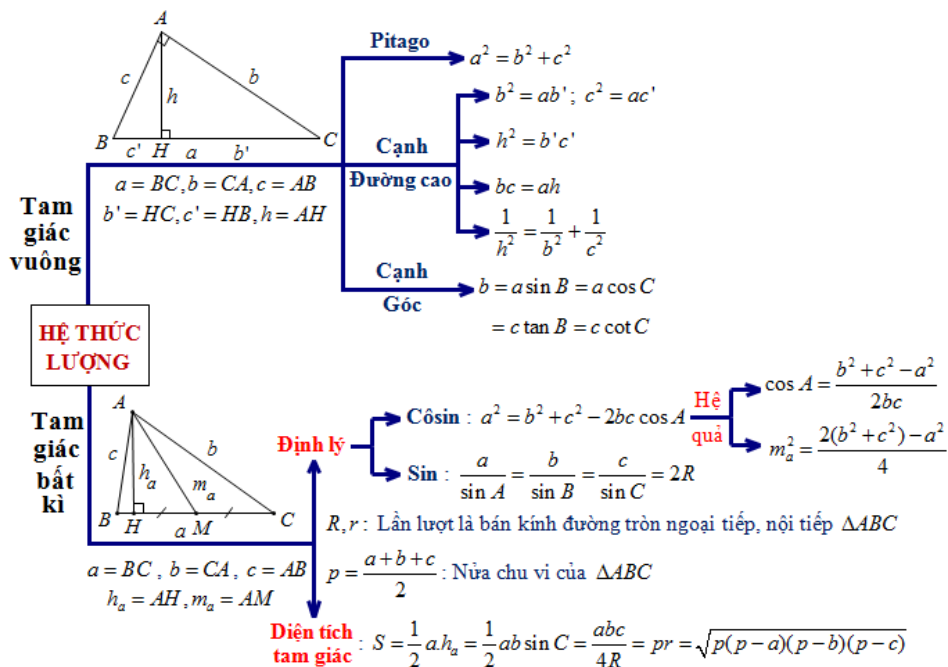


$$a = BC, b = CA, c = AB$$

$$h_a = AH, m_a = AM$$

Sau đây là sơ đồ cho phân tổng hợp kiến thức trên:

CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC



III. ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, ĐƯỜNG TRÒN VÀ ELIP

A. ĐIỂM

Các điểm đặc biệt của tam giác:

- + **Trực tâm** : Là giao 3 đường cao của tam giác.
- + **Trọng tâm** : Là giao 3 đường trung tuyến của tam giác.
- + **Tâm đường tròn ngoại tiếp** : Là giao 3 đường trung trực của tam giác.
- + **Tâm đường tròn nội tiếp** : Là giao của 3 đường phân giác trong.

Chú ý:

- + Do giao của các đường (cùng tên) đồng quy, nên khi vẽ hình ta chỉ cần xác định giao của hai đường, thậm chí là một đường nếu đó là trung tuyến (dựa vào tỉ lệ trọng tâm).
- + Tâm đường tròn bàng tiếp : Là giao của 2 đường phân giác ngoài của hai góc hoặc một phân giác ngoài của một góc và một phân giác trong của một góc. Như vậy một tam giác có 3 đường tròn bàng tiếp.

Nếu cho 3 điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$, ta có :

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) \text{ và } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$I \text{ là trung điểm của } AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_I = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

$$G \text{ là trọng tâm của } \Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases}$$

$$A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \exists k \neq 0 : \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$$

Đặc biệt $\leftarrow$

- Trục tâm: Giao 3 đường cao
- Trọng tâm: Giao 3 đường trung tuyến
- Tâm đường tròn ngoại tiếp: Giao 3 đường trung trực
- Tâm đường tròn nội tiếp: Giao 3 đường phân giác trong

ĐIỂM

- $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1); AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$: Trung điểm của AB
- $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$: Trọng tâm tam giác ABC
- $\exists k \neq 0 : \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow A, B, C \text{ thẳng hàng}$

B. ĐƯỜNG THẲNG

1. Đường thẳng

* Đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có :

+ hệ số góc k có phương trình: $y = k(x - x_0) + y_0$.

+ vectơ pháp tuyến (vpt) $\vec{n} = (a; b)$ có phương trình:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

+ vectơ chỉ phương (vtcp) $\vec{n} = (a, b)$ có phương trình dạng tham số là:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \text{ hoặc phương trình dạng chính tắc là: } \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad (\text{với}$$

$$ab \neq 0).$$

Cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm $A(a; 0), B(0; b)$ có phương trình dạng đoạn chắn:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (\text{với } ab \neq 0).$$

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Xét hai đường thẳng $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Tọa độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình :

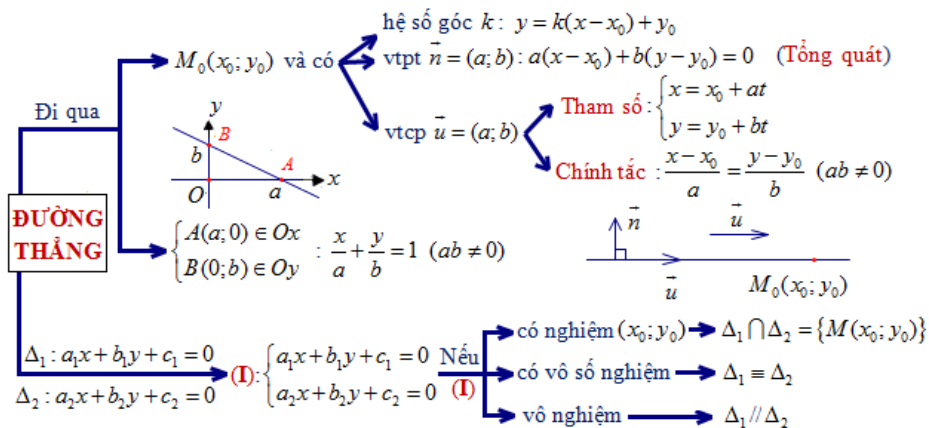
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{I})$$

- * Hệ (I) có một nghiệm $(x_0; y_0)$, khi đó Δ_1 cắt Δ_2 tại điểm $M(x_0; y_0)$.
- * Hệ (I) có vô số nghiệm, khi đó $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.
- * Hệ (I) vô nghiệm, khi đó $\Delta_1 // \Delta_2$.

3. Một vài chú ý

- * Trục hoành (Ox) có phương trình: $y = 0$; Trục tung (Oy) có phương trình: $x = 0$.
- * Đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt:
 $+ A(a; y_1), B(a; y_2)$ có phương trình: $x = a$ (song song với trục Oy nếu $a \neq 0$)
 $+ A(x_1; b), B(x_2; b)$ có phương trình: $y = b$ (song song với trục Ox nếu $b \neq 0$)
- * Phương trình đường thẳng có dạng tổng quát

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} = (a; b) \\ \vec{u} = (b; -a) \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \vec{u} = (-b; a)$$



C. ĐƯỜNG TRÒN

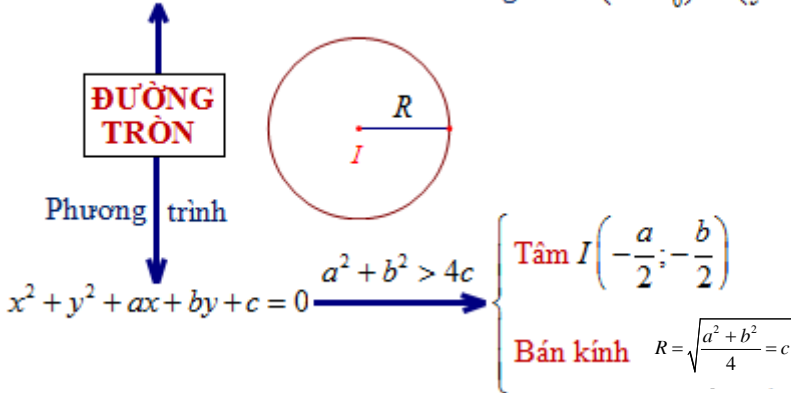
- * Đường tròn có tọa độ tâm $I(x_0; y_0)$ và bán kính R có phương trình:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

- * Nếu đường tròn (C) có phương trình dạng: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ với $a^2 + b^2 > 4c$ thì (C) có:

tâm $I\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ và bán kính $R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4} - c}$.

Tâm $I(x_0; y_0)$ và Bán kính $R \rightarrow$ Phương trình: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$



2. Phương trình chính tắc của elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ trong đó $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$

- * (E) nhận Ox, Oy làm các trục đối xứng và có tâm đối xứng là gốc tọa độ O .

* Nếu $M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \\ MF_1 + MF_2 = 2a \end{cases}$

- * Elip (E) có:

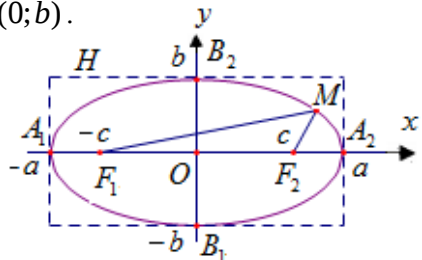
+ Tiêu điểm trái $F_1(-c; 0)$, tiêu điểm phải $F_2(c; 0)$.

+ Các đỉnh: $A_1(-a; 0), A_2(a; 0), B_1(0; -b), B_2(0; b)$.

+ Trục lớn: $A_1A_2 = 2a$, nằm trên trục Ox

Trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b$, nằm trên trục Oy .

+ Tâm sai: $e = \frac{c}{a} < 1$.



+ Đường chuẩn: $x = -\frac{a}{e}$ ứng với tiêu điểm $F_1(-c; 0)$ và $x = \frac{a}{e}$ ứng với tiêu điểm $F_2(c; 0)$.

+ Hình chữ nhật cơ sở tạo bởi các đường $\begin{cases} x = \pm a \\ y = \pm b \end{cases}$ có chiều dài $2a$, chiều rộng $2b$.

+ Bán kính qua tiêu của điểm $M(x_0; y_0) \in (E)$ là:

$$\begin{cases} MF_1 = a + ex_0 = a + \frac{c}{a} x_0 \\ MF_2 = a - ex_0 = a - \frac{c}{a} x_0 \end{cases}.$$

IV. CÁC CÔNG THỨC ĐỊNH LƯỢNG

1. KHOẢNG CÁCH

* Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

* Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ là:

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

* Nếu $\Delta' // \Delta$ và $M \in \Delta'$ thì khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ' và Δ là:
 $d(\Delta', \Delta) = d(M, \Delta)$.

2. GÓC

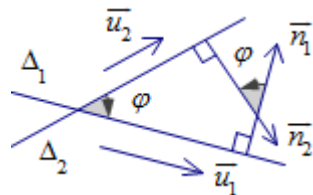
* Góc giữa hai vector $\vec{a} = (x_1; y_1)$ và $\vec{b} = (x_2; y_2)$ xác định bởi:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

* φ là góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1 :

$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ và $\Delta_2: a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ xác định bởi

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right|$$



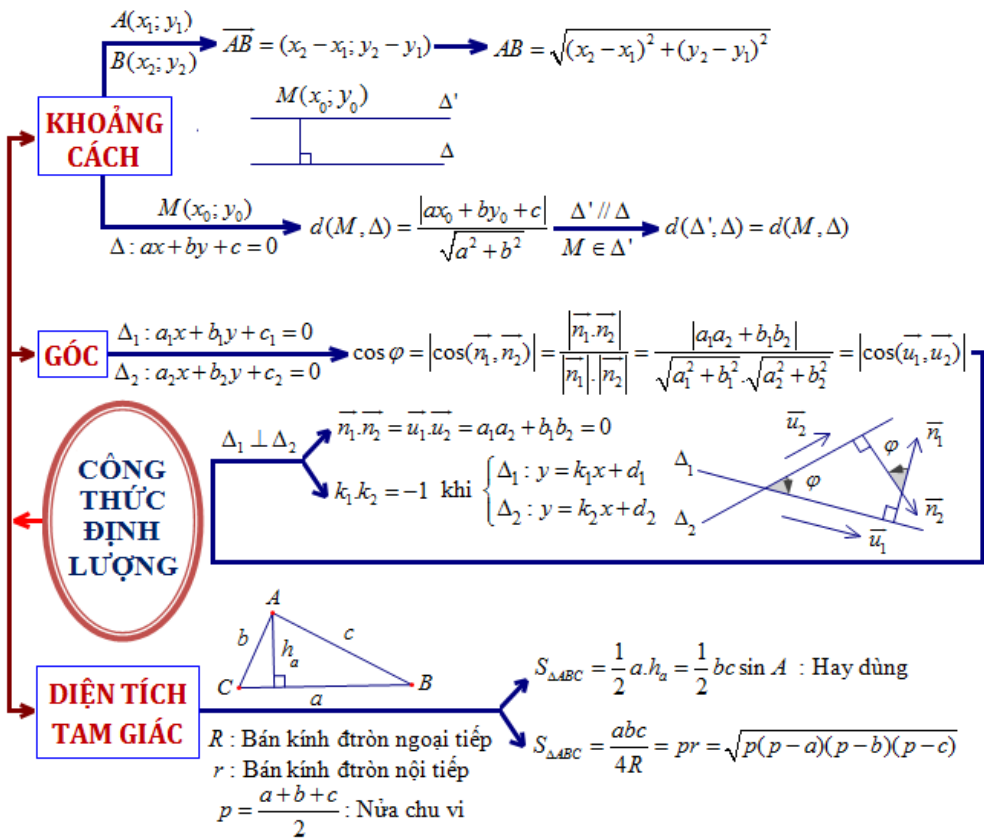
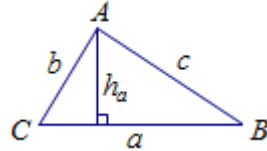
Nếu $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ hay $k_1 k_2 = -1$ nếu $\begin{cases} \Delta_1 : y = k_1 x + d_1 \\ \Delta_2 : y = k_2 x + d_2 \end{cases}$

3. DIỆN TÍCH TAM GIÁC

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Trong đó: R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp ΔABC

$$p = \frac{a+b+c}{2} : \text{nửa chu vi của } \Delta ABC$$



PHẦN 2:

NHỮNG BÀI TOÁN CƠ BẢN

1. BÀI TOÁN 1

Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng cắt nhau.

Ví dụ: Tìm tọa độ giao điểm M của các cặp đường thẳng cắt nhau sau:

a) $x + y - 4 = 0$ và $2x - y - 5 = 0$

b) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + t \end{cases}$

c) $x - y + 3 = 0$ và $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 7 - 2t \end{cases}$

d) $2x + 3y - 7 = 0$ và $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{-5}$

Giải:

a) Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(3;1)$

b) **Cách 1:**

Xét hệ $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ x = 2 - 3t' \\ y = -1 + t' \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + 2t = 2 - 3t' \\ 3 - t = -1 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3t' = 1 \\ t + t' = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 11 \\ t' = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 23 \\ y = -8 \end{cases} \Rightarrow M(23; -8)$$

Cách 2:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases} \Rightarrow x + 2y - 7 = 0 \quad (\text{khử } t \text{ hoặc đường thẳng đi qua } A(1;3) \text{ và}$$

vecto pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2)$)

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + t \end{cases} \Rightarrow x + 3y + 1 = 0 \quad (\text{khử } t \text{ hoặc đường thẳng đi qua } B(2; -1) \text{ và}$$

vecto pháp tuyến $\vec{n} = (1; 3)$)

Khi đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 23 \\ y = -8 \end{cases} \Rightarrow M(23; -8)$$

c) Gọi $M(x; y)$, khi đó x, y thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x = 1 + t \\ y = 7 - 2t \end{cases} \Rightarrow 1 + t - (7 - 2t) + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow M(2; 5)$$

d) Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0 \\ \frac{x - 5}{3} = \frac{y + 4}{-5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0 \\ 5x + 3y - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(2; 1)$$

Nhận xét:

Do phương trình đường thẳng trong mặt phẳng có thể xuất hiện dưới 3 dạng (tổng quát, tham số, chính tắc). Song ta dễ dàng có thể luân chuyển 3 dạng này cho nhau nên trong các trường hợp, ta có thể chuyển các phương trình về dạng phương trình tổng quát để tạo sự quen thuộc. Vì các bạn cũng nhận thấy trong hình học giải tích Oxy đề bài gần như luôn cho phương trình dưới dạng tổng quát.

CÁCH GIẢI TỔNG QUÁT:

$$d_1 \cap d_2 = \{M\} \xrightarrow{\begin{matrix} d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{matrix}} \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases} \longrightarrow M(x_0; y_0)$$

Chú ý:

Do trong các bài toán tìm điểm, ta chỉ gặp hai đường thẳng chắc chắn cắt nhau nên ta không đề cập các quan hệ song song và trùng nhau ở đây (vì thực chất việc giải hệ cũng cho ta biết được các mối quan hệ này – khi hệ có nghiệm duy nhất, vô nghiệm, vô số nghiệm tương ứng hai đường thẳng cắt nhau, song song và trùng nhau).

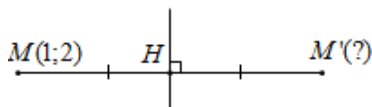
2. BÀI TOÁN 2

Tìm điểm đối xứng của một điểm qua một đường thẳng

Ví dụ: Tìm điểm M' đối xứng với điểm $M(1;2)$ qua đường thẳng $\Delta: x-3y-5=0$

Giải:

$$\Delta: x-3y-5=0$$



Cách trình bày 1:

Gọi $H(x; y)$ là hình chiếu vuông góc của M trên Δ

Ta có vectơ chỉ phương của Δ là: $\vec{u}_{\Delta} = (3;1)$ và $\overrightarrow{MH} = (x-1; y-2)$

Khi đó:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_{\Delta} = 0 \\ H \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-1) + (y-2) = 0 \\ x-3y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=5 \\ x-3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow H(2; -1)$$

M' đối xứng với M qua Δ nên suy ra H là trung điểm của MM'

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \\ y_{M'} = 2y_H - y_M = 2 \cdot (-1) - 2 = -4 \end{cases} \Rightarrow M'(3; -4)$$

Cách trình bày 2:

Gọi Δ' đi qua M và vuông góc với Δ , khi đó Δ' có phương trình:

$$3x + y - 5 = 0$$

Khi đó tọa độ giao điểm H của Δ' và Δ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ x - 3y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow H(2; -1)$$

M' đối xứng với M qua Δ nên suy ra H là trung điểm của MM'

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \\ y_{M'} = 2y_H - y_M = 2 \cdot (-1) - 2 = -4 \end{cases} \Rightarrow M'(3; -4)$$

Cách trình bày 3:

Gọi $M'(x; y)$ là điểm đối xứng với M qua Δ và $MM' \cap \Delta = \{H\}$

Vecto chỉ phương của Δ là: $\vec{u}_{\Delta} = (3;1)$ và H là trung điểm của MM' ,

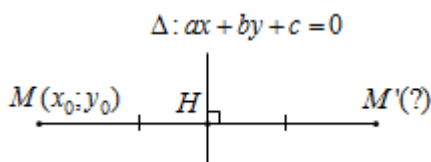
$$\text{suy ra } \begin{cases} \overline{MM'} = (x-1; y-2) \\ H\left(\frac{x+1}{2}; \frac{y+2}{2}\right) \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{cases} \overline{MH} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \\ H \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-1) + (y-2) = 0 \\ \frac{x+1}{2} - 3 \cdot \frac{y+2}{2} - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow M'(3; -4)$$

CÁCH GIẢI TỔNG QUÁT:

Để tìm tọa độ M' là điểm đối xứng với $M(x_0; y_0)$ qua $\Delta: ax + by + c = 0$ ta có thể trình bày theo các cách sau đây:



C1: Gọi $H(x; y)$ là hình chiếu của M lên Δ $\xrightarrow{\overline{MH} \cdot \vec{u}_\Delta = 0}$ $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} x = ? \\ y = ? \end{cases} \xrightarrow{H \text{ là trung điểm của } MM'} M'$

C2: Lập pt Δ' đi qua M $\xrightarrow{\Delta' \perp \Delta}$ $\Delta': a'x + b'y + c' = 0$ $\xrightarrow{\Delta' \cap \Delta = \{H\}}$ $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \xrightarrow{(*)} M'$

C3: Gọi $M'(x; y)$ là hình chiếu của M lên Δ $\xrightarrow{\overline{MM'} \cdot \vec{u}_\Delta = 0}$ $\begin{cases} \overline{MM'} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \\ H \in \Delta \end{cases} \xrightarrow{\begin{cases} f_1(x; y) = 0 \\ f_2(x; y) = 0 \end{cases}} \begin{cases} x = ? \\ y = ? \end{cases} \xrightarrow{M'}$

3. BÀI TOÁN 3

Kiểm tra tính cùng phía, khác phía của hai điểm với một đường thẳng.

Ví dụ: Cho đường thẳng $\Delta: x - 3y + 5 = 0$. Xét vị trí cùng phía, khác phía của các cặp điểm sau với đường thẳng Δ .

a) $A(1; -2)$ và $B(-1; -3)$

b) $C(2; 3)$ và $D(-2; -1)$

Giải:

Xét $f(x; y) = x - 3y + 5$

a) Với $A(1; -2)$ và $B(-1; -3)$, ta có:

$$f(1; -2) \cdot f(-1; -3) = [1 - 3 \cdot (-2) + 5][1 - 3 \cdot (-3) + 5] = 12 \cdot 13 = 156 > 0$$

Suy ra A, B nằm cùng phía so với đường thẳng Δ .

b) Với $C(2; 3)$ và $D(-2; -1)$, ta có:

$$f(2; 3) \cdot f(-2; -1) = (2 - 3 \cdot 3 + 5)[-2 - 3 \cdot (-1) + 5] = (-2) \cdot 6 = -12 < 0$$

Suy ra C, D nằm khác phía so với đường thẳng Δ .

CÁCH GIẢI TỔNG QUÁT:

$$\begin{array}{l} \text{Vi} \quad M_1(x_1; y_1) \cdot M_2(x_2; y_2) \\ \text{trí} \quad \Delta: ax + by + c = 0 \end{array} \rightarrow \text{Xét: } (ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c) = h \begin{cases} h > 0: M_1, M_2 \text{ cùng phía với } \Delta \\ h < 0: M_1, M_2 \text{ khác phía với } \Delta \\ h = 0: M_1 \in \Delta \text{ hoặc } M_2 \in \Delta \end{cases}$$

4. BÀI TOÁN 4

Viết phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau.

Ví dụ: Cho hai đường thẳng $\Delta_1: 3x - 4y + 1 = 0$ và $\Delta_2: 5x + 12y - 2 = 0$.
Viết phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường Δ_1 và Δ_2 .

Giải:

Do tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng cắt nhau là đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng đó. Nên phương trình đường phân giác của góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 thỏa mãn:

$$\begin{aligned} \frac{|3x - 4y + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} &= \frac{|5x + 12y - 2|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \Leftrightarrow \frac{|3x - 4y + 1|}{5} = \frac{|5x + 12y - 2|}{13} \\ \Leftrightarrow 13 \cdot |3x - 4y + 1| &= 5 \cdot |5x + 12y - 2| \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 13(3x - 4y + 1) = 5(5x + 12y - 2) \\ 13(3x - 4y + 1) = -5(5x + 12y - 2) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 14x - 112y + 23 = 0 \\ 64x + 8y - 3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đường phân giác cần lập là $14x - 112y + 23 = 0$ hoặc $64x + 8y - 3 = 0$.

CÁCH GIẢI TỔNG QUÁT:

Đường phân giác tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau:

$$\frac{\Delta_1 + a_1x + b_1y + c_1 = 0}{\Delta_2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0} \rightarrow \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \rightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

5. BÀI TOÁN 5

Viết phương trình đường phân giác trong, phân giác ngoài của góc trong tam giác.

Ví dụ: Cho tam giác ABC với $A(3;0), B(1;1), C(-1;8)$. Viết phương trình đường phân giác trong, phân giác ngoài của góc A .

Giải:

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2;1) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}} = (1;2) \\ \overrightarrow{AC} = (-4;8) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AC}} = (2;1) \end{cases}$, khi đó:

Phương trình đường thẳng $AB: x + 2y - 3 = 0$; đường thẳng $AC: 2x + y - 6 = 0$.

Khi đó phương trình đường phân giác của góc A thỏa mãn:

$$\frac{|x + 2y - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|2x + y - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \Leftrightarrow |x + 2y - 3| = |2x + y - 6| \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Xét phương trình $\Delta: x - y - 3 = 0$. Đặt $f(x; y) = x - y - 3$

Với $B(1;1), C(-1;8)$ ta có: $f(1;1) \cdot f(-1;8) = (1 - 1 - 3) \cdot (-1 - 8 - 3) = 36 > 0$

Suy ra B, C cùng phía với đường thẳng Δ , khi đó:

$x - y - 3 = 0$ là phân giác ngoài của góc A và $x + y - 3 = 0$ là phân giác trong của góc A .

CÁCH GIẢI TỔNG QUÁT:

Bước 1: $\Delta ABC \xrightarrow{AB: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad AC: a_2x + b_2y + c_2 = 0} \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \rightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (\Delta_1) \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (\Delta_2) \end{cases}$

Bước 2: Xét Δ_1 **Bài toán cơ bản 3** $\begin{cases} B, C \text{ cùng phía } \Delta_1 \rightarrow \begin{cases} \Delta_1: \text{Phân giác ngoài của góc } A \\ \Delta_2: \text{Phân giác trong của góc } A \end{cases} \\ B, C \text{ khác phía } \Delta_1 \rightarrow \begin{cases} \Delta_1: \text{Phân giác trong của góc } A \\ \Delta_2: \text{Phân giác ngoài của góc } A \end{cases} \end{cases}$

Chú ý:

Ngoài cách tìm ở bài toán trên, các bạn có thể viết phương trình đường phân giác trong, phân giác ngoài của góc trong tam giác bằng cách tìm chân đường phân giác trong, phân giác ngoài. Đó cũng chính là nội dung của bài toán tiếp theo các bạn sẽ tìm hiểu.

6. BÀI TOÁN 6

Tìm chân đường phân giác trong, ngoài của góc trong tam giác.

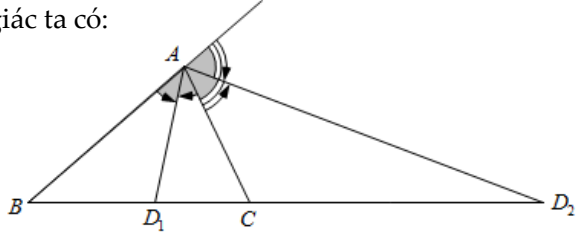
Ví dụ: Cho tam giác ABC với $A(1;5), B(-4;-5), C(4;-1)$. Xác định tọa độ chân đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc A .

Giải:

Gọi $D(x; y)$ là chân đường phân giác của góc A .

Theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\begin{aligned}\frac{DB}{DC} &= \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{5^2 + 10^2}}{\sqrt{3^2 + 6^2}} \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{5}{3} \Rightarrow DB = \frac{5}{3}DC\end{aligned}$$



+ Nếu D là phân giác trong của góc A thì D nằm giữa B và C nên ta có:

$$\overrightarrow{DB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 - x = -\frac{5}{3}(4 - x) \\ -5 - y = -\frac{5}{3}(-1 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow D\left(1; -\frac{5}{2}\right)$$

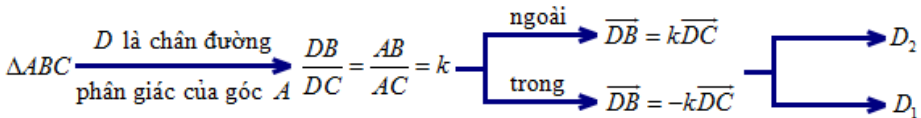
+ Nếu D là phân giác ngoài của góc A thì D nằm ngoài đoạn BC nên ta có:

$$\overrightarrow{DB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 - x = \frac{5}{3}(4 - x) \\ -5 - y = \frac{5}{3}(-1 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow D(16; 5)$$

Vậy chân đường phân giác trong, ngoài của góc A lần lượt là $D_1\left(1; -\frac{5}{2}\right)$

và $D_2(16; 5)$.

CÁCH GIẢI TỔNG QUÁT:

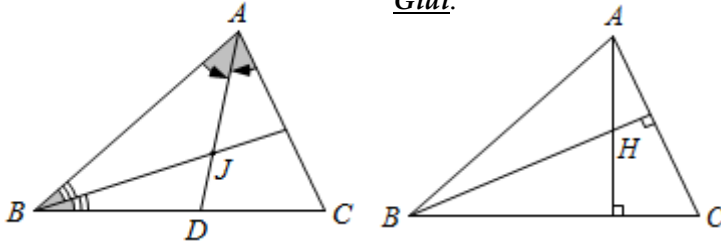


7. BÀI TOÁN 7

*Tìm trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp,
tâm đường tròn nội tiếp tam giác.*

Ví dụ: Cho tam giác ABC với $A(2;6), B(-3;-4), C(5;0)$. Tìm trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Giải:



Gọi G, H, I, J lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Khi đó ta có:

$$+ \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2 - 3 + 5}{3} = \frac{4}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{6 - 4 + 0}{3} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

$$+ \text{ Gọi } H(x; y) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} = (x - 2; y - 6) \\ \overrightarrow{BH} = (x + 3; y + 4) \end{cases} \text{ với } \begin{cases} \overrightarrow{BC} = (8; 4) = 4(2; 1) \\ \overrightarrow{AC} = (3; -6) = 3(1; -2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x - 2) + y - 6 = 0 \\ x + 3 - 2(y + 4) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 10 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow H(5; 0) \end{aligned}$$

$$+ \text{ Gọi } I(a; b), \text{ khi đó } IA = IB = IC = R \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a - 2)^2 + (b - 6)^2 = (a + 3)^2 + (b + 4)^2 \\ (a - 2)^2 + (b - 6)^2 = (a - 5)^2 + b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 2a - 4b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$$

- + Gọi $D(x_0; y_0)$ là chân đường phân giác trong của góc A .

Theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{5^2 + 10^2}}{\sqrt{3^2 + 6^2}} = \frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{5}{3} \Rightarrow DB = \frac{5}{3}DC$$

Do D là phân giác trong của góc A nên D nằm giữa B và C . Do đó:

$$\overline{DB} = -\frac{5}{3}\overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x_0 = -\frac{5}{3}(5 - x_0) \\ -4 - y_0 = -\frac{5}{3}(0 - y_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow D\left(2; -\frac{3}{2}\right)$$

Trong tam giác ABD , J là chân đường phân giác trong của góc B . Nên ta có:

$$\frac{JA}{JD} = \frac{BA}{BD} = \frac{\sqrt{5^2 + 10^2}}{\sqrt{5^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2}} = 2$$

$$\Rightarrow \overline{JA} = -2\overline{JD} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x_J = -2(2 - x_J) \\ 6 - y_J = -2\left(-\frac{3}{2} - y_J\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J = 2 \\ y_J = 1 \end{cases} \Rightarrow J(2; 1)$$

Chú ý:

Việc tìm điểm H, I, J trong ví dụ trên, các bạn có thể giải theo cách sau:

- + Với H : Viết phương trình hai đường cao và tìm giao điểm hai đường cao này.
+ Với I : Gọi phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$(T): x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

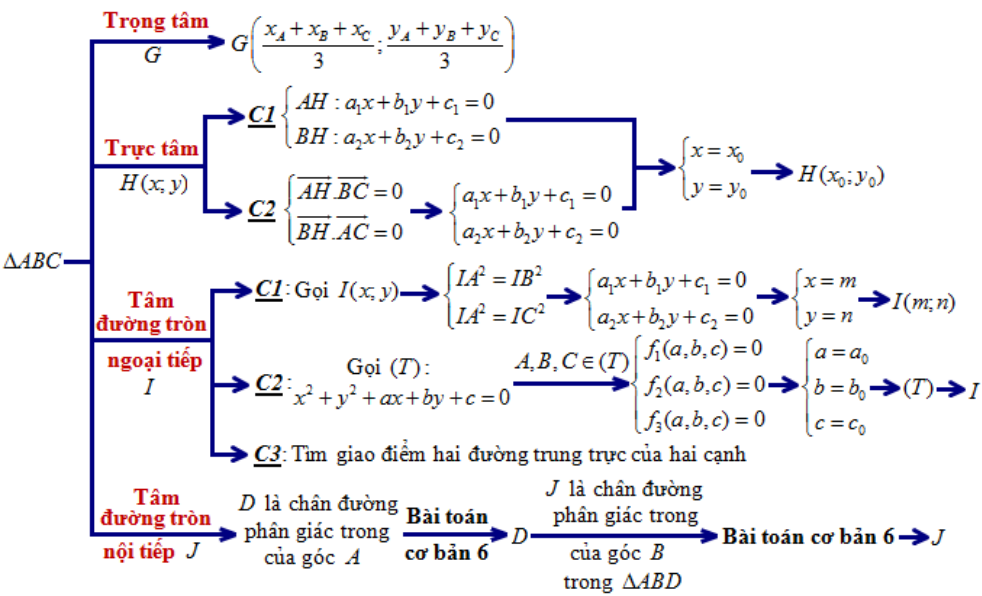
Với $A, B, C \in (T)$ cho ta hệ ba phương trình 3 ẩn a, b, c giải hệ ta sẽ viết được

(T) và suy ra tọa độ $I\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$. Hoặc viết phương trình hai đường trung

trực của hai cạnh và giao điểm của hai đường trung trực này chính là tâm I .

- + Với J : Viết phương trình hai đường phân giác trong và tìm giao điểm hai đường này.

CÁCH GIẢI TỔNG QUÁT:



PHẦN 3:
10 BÀI TOÁN HÌNH HỌC OXY

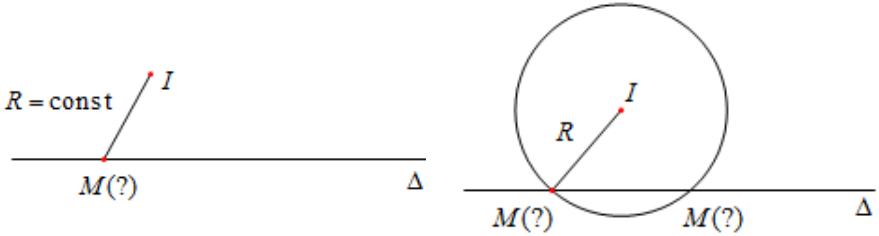
1. BÀI TOÁN 1

A. NỘI DUNG BÀI TOÁN 1

Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ đã biết phương trình và cách điểm I cho trước một khoảng không đổi ($MI = R = \text{const}$).

B. CÁCH GIẢI CHUNG

Có thể trình bày lời giải bài toán này theo 2 cách (bản chất là một).



Cách 1 (C1): Gọi $M(t) \in \Delta \xrightarrow{MI=R} f(t) = 0 \Leftrightarrow t = ? \rightarrow M$

Cách 2 (C2): Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \Delta \\ (C) \end{cases}$

(ở đây (C) là đường tròn tâm I bán kính R)

Giải thích chi tiết:

Nghĩa là khi gặp bài toán có nội dung như **Bài toán 1** thì ta có thể tìm điểm theo 2 cách trình bày sau:

1) (C1):

* Do M thuộc đường thẳng Δ đã biết phương trình nên ta sẽ tham số hóa điểm M theo ẩn t . Cụ thể nếu đề bài cho đường thẳng Δ dưới dạng:

+ Tham số: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ hoặc chính tắc: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$ thì ta sẽ gọi

$M(x_0 + at; y_0 + bt)$

Ví như: M thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ thì ta sẽ gọi $M(1 - t; -2 + 3t)$

+ Tổng quát $ax + by + c = 0$, khi đó để việc gọi điểm M đơn giản và tránh tọa độ viết dưới dạng phân số ta nên gọi như sau:

Nếu $a = 1$ hay $\Delta: x + by + c = 0$ thì ta gọi $M(-c - bt; t)$.

Ví như $\Delta: x + 3y - 5 = 0$ thì gọi $M(5 - 3t; t)$.

Nếu $b = 1$ hay $\Delta: ax + y + c = 0$ thì ta gọi $M(t; -c - at)$.

Ví như $\Delta: 2x - y + 1 = 0$ thì gọi $M(t; 1 + 2t)$.

(với $a = -1$ hoặc $b = -1$ ta làm tương tự)

Nếu $\begin{cases} a \neq 1 \\ b \neq 1 \end{cases}$ (ở đây $(a, b, c) = 1$) thì ta chuyển về dạng tham số để gọi M .

Ví như $\Delta: 2x - 3y - 3 = 0$

$(\overline{u_\Delta} = (3; 2), \Delta \text{ đi qua } M_0(0; -1)) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \Rightarrow M(3t; -1 + 2t)$

(Đây là chỉ là những “tiểu tiết” nhỏ - song nếu tạo cho mình một thói quen thì việc tính toán sẽ giảm nhẹ và hạn chế khả năng sai sót trong các bước tính toán).

* Khi đó việc sử dụng dữ kiện $MI = R$ sẽ giúp ta thiết lập được một phương trình chứa t ($f(t) = 0$), từ đây giải phương trình tìm t và suy ra được tọa độ điểm M .

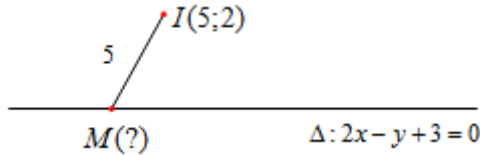
2) (C2):

Do $MI = R$ nên M thuộc đường tròn (C) tâm I , bán kính R . Khi đó tọa độ điểm M chính là nghiệm của hệ phương trình (một phương trình Δ và một phương trình đường tròn (C)):
$$\begin{cases} \Delta \\ (C) \end{cases}$$

C. VÍ DỤ GỐC

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $I(5;2)$ và đường thẳng $\Delta: 2x - y + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MI = 5$.

Giải:



Cách 1:

+ Vì $M \in \Delta$ nên gọi $M(t; 2t+3)$

+ Ta có: $MI = 5 \Leftrightarrow MI^2 = 25 \Leftrightarrow (t-5)^2 + (2t+1)^2 = 25 \Leftrightarrow 5t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{5} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} M(1;5) \\ M\left(\frac{1}{5}; \frac{17}{5}\right) \end{cases}$$

Cách 2:

+ Có: $MI = 5$ nên M thuộc đường tròn (C) tâm I và $R = 5$ có phương trình: $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 25$

+ $M \in \Delta$ nên tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ (x-5)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{17}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(1;5) \\ M\left(\frac{1}{5}; \frac{17}{5}\right) \end{cases}$$

Nhận xét:

- * Với **C1** chúng ta không cần quan tâm tới bài toán về sự tương giao giữa đường thẳng và đường tròn (đề cập ở **C2**) và giải theo phương pháp đại số thông thường.
- * Với **C2** ta thấy rõ hơn bản chất của bài toán (điểm cần tìm là giao của đường thẳng và đường tròn).
- * **C1** và **C2** là hai cách trình bày khác nhau của cùng một phương pháp thế trong giải hệ phương trình.
- * Nếu tìm được duy nhất một điểm M khi đó $IM \perp \Delta$ (hay đường tròn $(I; R)$ tiếp xúc với Δ tại M).
- * Tùy vào dữ kiện của bài toán, có thể linh hoạt trình bày theo **C1** hoặc **C2** (**C2** “mạnh” hơn **C1** khi đề cập tới những điểm có cùng vai trò – các bạn sẽ thấy rõ điều này qua các ví dụ minh họa ở phần sau).

D. CÁC VÍ DỤ MỞ RỘNG

Như vậy để chuyển các bài toán về **Bài toán 1**, ta cần chỉ ra được 2 điều:

- + Điểm cần tìm đang thuộc một đường thẳng đã biết phương trình.
- + Điểm cần tìm cách một điểm đã biết tọa độ một khoảng không đổi.

Vì vậy để có được điều này các bạn cần trả lời các câu hỏi:

Chùm câu hỏi 1: Điểm cần tìm thuộc đường nào? Đường đó đã biết phương trình chưa? Nếu chưa thì có viết được không? Viết bằng cách nào?

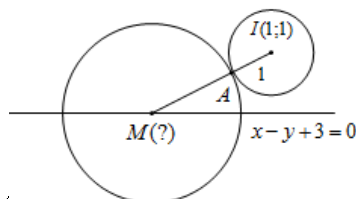
Chùm câu hỏi 2: Điểm cần tìm cách một điểm cho trước (đã biết tọa độ) một khoảng bằng bao nhiêu?

Cắt nghĩa dữ kiện của bài toán như thế nào để tính được khoảng cách đó?

Và các hỏi trên được “thiết kế” qua các cách ra đề sau:

1. CÁCH RA ĐỀ 1: Cho biết M thuộc đường thẳng Δ và điểm I cho trước, độ dài IM đề bài không cho. Cần “cắt nghĩa” các dữ kiện của bài toán để tính độ dài đoạn IM .

Ví dụ 1 (D – 2006). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và đường thẳng $d: x - y + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên d sao cho đường tròn tâm M , có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C) , tiếp xúc ngoài với đường tròn (C) .



Phân tích :

* $M \in d : x - y + 3 = 0$

* $(C) : \begin{cases} I(1;1) \\ R=1 \end{cases}$ và khai thác dữ kiện suy ra $MI = 3R = 3 \rightarrow$ chuyển về **Bài toán 1**.

Giải

+ Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=1$

+ Gọi A là điểm tiếp xúc ngoài của đường tròn tâm M và đường tròn (C) .

Suy ra : $MI = MA + AI = 2R + R = 3R = 3$

+ Gọi $M(t; t+3) \in d$

Khi đó: $MI = 3 \Leftrightarrow MI^2 = 9 \Leftrightarrow (t-1)^2 + (t+2)^2 = 9 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(1;4) \\ M(-2;1) \end{cases}$$

+ Vậy $M(1;4)$ hoặc $M(-2;1)$.

Ví dụ 2 (A – 2011). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta : x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C) , M là điểm thuộc Δ . Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A, B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M , biết tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng 10.

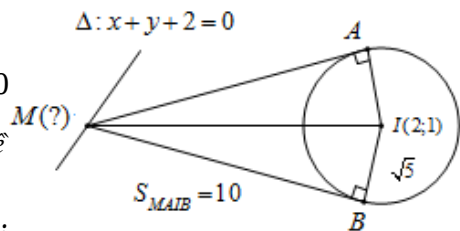
Phân tích:

* $M \in d : x - y + 3 = 0$

* $S_{MAIB} = 2S_{MBI} = BI \cdot MB = \sqrt{5} \cdot MB = 10$

$\Rightarrow MB = 2\sqrt{5} \Rightarrow MI = 5 \rightarrow$ chuyển về

Bài toán 1.



Giải

+ Ta có $(C) : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} I(2;1) \\ R = IB = \sqrt{5} \end{cases}$

+ Vì MA và MB là các tiếp tuyến (A và B là các tiếp điểm)

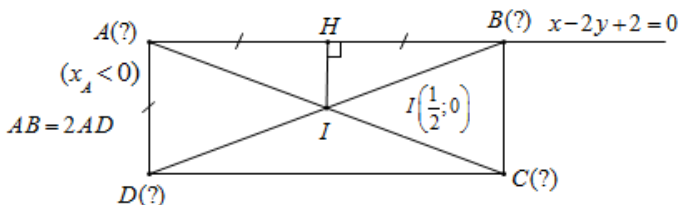
$\Rightarrow S_{MAIB} = 2S_{MBI} = IB \cdot MB = \sqrt{5} \cdot MB = 10 \Rightarrow MB = 2\sqrt{5} \Rightarrow MI = \sqrt{MB^2 + IB^2} = 5$

+ Gọi $M(t; -t-2) \in \Delta$

+ Khi đó : $MI = 5 \Leftrightarrow MI^2 = 25 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (-t-3)^2 = 25 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2;-4) \\ M(-3;1) \end{cases}$$

Ví dụ 3 (B – 2002). Cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, phương trình đường thẳng AB là $x - 2y + 2 = 0$ và $AB = 2AD$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C, D biết rằng A có hoành độ âm.



Phân tích hướng giải:

- * Có $A \in AB: x - 2y + 2 = 0$
- * $AD = 2d(I, AB) \rightarrow AB = ? \rightarrow AI = ? \rightarrow$ chuyển về Bài toán 1 $\rightarrow$ tọa độ điểm A $\rightarrow$ tọa độ B, C, D.

Giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB.

$$\text{Khi đó } IH = d(I, AB) = \frac{\left| \frac{1}{2} + 2 \right|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Suy ra : } AH = \frac{AB}{2} = AD = 2IH = \sqrt{5} \Rightarrow IB = IA = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{5}{4} + 5} = \frac{5}{2}$$

Do đó A, B là các giao điểm của đường thẳng AB với đường tròn tròn tâm I, bán kính $R = \frac{5}{2}$.

$$\text{Vậy tọa độ A, B là nghiệm của hệ : } \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Suy ra $A(-2;0), B(2,0)$ (Vì $x_A < 0$)

Mặt khác I là trung điểm của AC và BD nên suy ra $C(3;0), D(-1;-2)$

Vậy $A(-2;0), B(2,0), C(3;0), D(-1;-2)$.

Nhận xét :

Khi bài toán yêu cầu tìm từ hai điểm trở lên, mà các điểm có vai trò như nhau (trong bài trên A, B có vai trò như nhau) thì các bạn nên trình bày theo C2 để từ điểm này ta suy ra được điểm kia.

Ví dụ 4 (B – 2009 – NC). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(-1;4)$ và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng $\Delta: x - y - 4 = 0$. Xác định tọa độ các điểm B và C, biết diện tích tam giác ABC bằng 18.

Phân tích hướng giải :

* Có $B, C \in \Delta: x - y - 4 = 0$

* $S_{ABC} = 18 \Rightarrow BC = \frac{2S_{ABC}}{d(A, \Delta)}$

$$\Rightarrow BH \Rightarrow AB = AC = \sqrt{AH^2 + BH^2}$$

→ chuyển về Bài toán 1

Giải

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ .

Khi đó H là trung điểm của BC và :

$$AH = d(A, \Delta) = \frac{|-1 - 4 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{2S_{ABC}}{AH} = \frac{2 \cdot 18}{\frac{9}{\sqrt{2}}} = 4\sqrt{2} \Rightarrow BH = CH = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{\frac{81}{2} + 8} = \sqrt{\frac{97}{2}}$$

+ Vậy $AB = AC = \sqrt{\frac{97}{2}}$, suy ra B, C thuộc đường tròn tâm $A(-1;4)$ và bán

kính $R = \sqrt{\frac{97}{2}}$ có phương trình : $(x+1)^2 + (y-4)^2 = \frac{97}{2}$

+ Khi đó tọa độ B, C là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ (x+1)^2 + (y-4)^2 = \frac{97}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 4 \\ 4x^2 - 28x + 33 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

+ Vậy $B\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right), C\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right)$ hoặc $B\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right), C\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$.

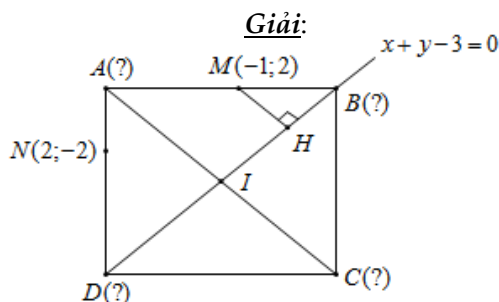
Ví dụ 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, có BD nằm trên đường thẳng có phương trình $x + y - 3 = 0$, điểm $M(-1; 2)$ thuộc đường thẳng AB , điểm $N(2; -2)$ thuộc đường thẳng AD . Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết điểm B có hoành độ dương.

Phân tích hướng giải:

* Trong các dữ kiện của bài toán ta nhận thấy điểm có “lợi” để ta khai thác đầu tiên chính là điểm B , bởi B thuộc BD đã biết phương trình và B có hoành độ dương.

* Ta đã biết tọa độ hai điểm $M(-1; 2)$ và $N(2; -2)$ nên nếu tính được độ dài đoạn BM hoặc BN ta sẽ tìm ra được tọa độ điểm B nhờ **Bài toán 1**. Nghĩa là ta đang cần yếu tố về định lượng, điều này gợi ý ta đi tính $d(M, BD)$ hoặc $d(N, BD)$. Trong hai đại lượng này, đại lượng $d(M, BD)$ sẽ giúp ta dễ dàng tìm được độ dài BM (do $\widehat{MBH} = 90^\circ$), từ đó “tháo” được điểm B theo góc nhìn của **Bài toán 1**.

* Khi tìm được tọa độ điểm B ta sẽ tìm được tọa độ các điểm còn lại nhờ viết được phương trình AB, AD và tính chất trung điểm của hai đường chéo. Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:



+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên

$$BD \Rightarrow MH = d(M, BD) = \frac{|-1 + 2 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

Do MHB là tam giác vuông cân tại $H \Rightarrow BM = \sqrt{2}MH = 2$

+ Gọi $B(t; 3-t)$ với $t > 0$, khi đó :

$$BM^2 = 4 \Leftrightarrow (t+1)^2 + (t-1)^2 = 4 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -1 \text{ (loại)}$$

$$\Rightarrow B(1; 2)$$

+ AB đi qua B và M nên có phương trình $y = 2$

AD đi qua N và vuông góc với AB nên có phương trình $x = 2$

Suy ra $A(2; 2)$

+ Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} x = 2 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow D(2; 1)$$

Gọi I là trung điểm của $BD \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow C(1; 1)$ (do I là trung điểm của AC)

(Có thể tìm C qua hệ thức $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$)

Vậy $A(2; 2), B(1; 2), C(1; 1), D(2; 1)$

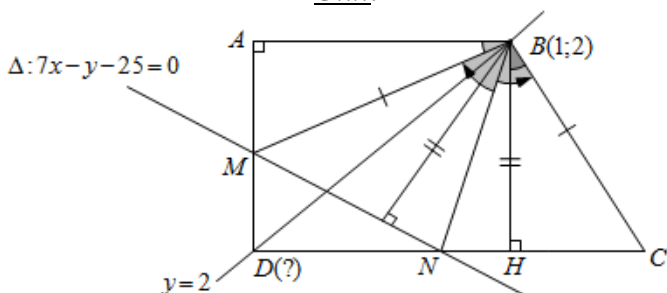
Ví dụ 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D , có $AB = AD < CD$, điểm $B(1; 2)$, đường thẳng BD có phương trình $y = 2$. Biết đường thẳng $\Delta: 7x - y - 25 = 0$ cắt các đoạn thẳng AD, CD lần lượt tại hai điểm M, N sao cho BM vuông góc với BC và tia BN là tia phân giác trong của $\widehat{MBC}$. Tìm tọa độ điểm D biết D có hoành độ dương.

Phân tích hướng giải:

* Với dữ kiện bài toán ta có $D \in BD: y = 2$ và điểm $B(1; 2)$, nên nếu tính được độ dài đoạn BD ta sẽ nhìn thấy luôn **Bài toán 1** và việc tìm ra điểm D không có gì là khó khăn. Nghĩa là ta đang cần có yếu tố về “định lượng”. Lúc này đường thẳng Δ đã biết phương trình nên ta nghĩ tới việc tính khoảng cách từ B tới Δ và tạo mối liên hệ gắn kết với độ dài BD .

* Với dữ kiện còn lại của bài toán và bằng phương pháp hình học thuần túy ta dễ dàng chỉ ra được $BH = d(B, CD) = d(B, \Delta)$, khi đó ta sẽ tính được độ dài BD và đưa ra lời giải đầy đủ cho bài toán. Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

Giải:



+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên CD , khi đó $ABHD$ là hình vuông.

Suy ra $\widehat{CBH} = \widehat{MBA}$ (hai góc cùng phụ với $\widehat{MBH}$)

Từ đây ta có được $\triangle CBH = \triangle MBA$ (g.c.g)

$\Rightarrow CB = MB \Rightarrow \triangle CBN = \triangle MBN$ (c.g.c)

$$\text{Khi đó } BH = d(B, CN) = d(B, MN) = \frac{|7 - 2 - 25|}{\sqrt{50}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

Mà tam giác DHB vuông cân tại H nên $BD = \sqrt{2}BH = 4$

+ Gọi $D(t; 2) \in BD$ với $t > 0$, khi đó:

$$BD^2 = 16 \Leftrightarrow (t - 1)^2 = 16 \Leftrightarrow t = 5 \text{ hoặc } t = -3 \text{ (loại)} \Rightarrow D(5; 2)$$

Vậy $D(5; 2)$.

Ví dụ 7 (A, A1 – 2012 – CB). Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC , N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và AN có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm A .

Phân tích hướng giải :

* $A \in AN : 2x - y - 3 = 0$

* Điểm M biết tọa độ nên nếu tính được đoạn AM thì coi như điểm A sẽ “tháo” được nhờ **Bài toán 1**. Lúc này ta sẽ gắn AM vào tam giác vuông AMH với cạnh $MH = d(M, AN)$ ta dễ dàng tính được. Như vậy nếu biết thêm một yếu tố về cạnh hoặc về góc trong tam giác vuông này thì ta sẽ tính được độ dài AM . Do các cạnh của tam giác AMH đều có thể biểu diễn thông qua độ dài cạnh hình vuông nên ta sẽ nghĩ ngay tới việc tính góc A nhờ định lý cosin trong tam giác. Do đó ta sẽ có lời giải cụ thể như sau :

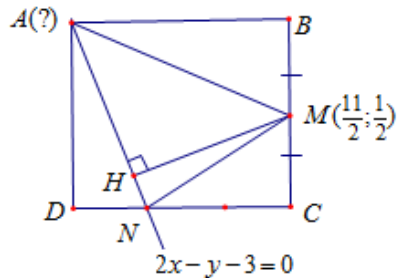
Giải

+ Gọi H là hình chiếu của M lên AN

$$\Rightarrow MH = d(M, AN) = \frac{\left| 2 \cdot \frac{11}{2} - \frac{1}{2} - 3 \right|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Đặt } AB = 6a \Rightarrow \begin{cases} ND = 2a; & NC = 4a \\ MB = MC = 3a \end{cases}$$

(vì $ABCD$ là hình vuông và $CN = 2ND$)



(Các bạn có thể đặt $AB = a$, ở đây ta đặt $AB = 6a$ để việc biểu diễn các độ dài khác được đơn giản).

Khi đó áp dụng định lý Pitago, ta được: $AM = 3\sqrt{5}a$; $MN = 5a$ và $AN = 2\sqrt{10}a$

Trong ΔAMN ta có:

$$\cos \angle MAN = \frac{AM^2 + AN^2 - MN^2}{2AM \cdot AN} = \frac{45a^2 + 40a^2 - 25a^2}{2 \cdot 3\sqrt{5}a \cdot 2\sqrt{10}a} = \frac{60a^2}{60\sqrt{2}a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \angle MAN = 45^\circ \Rightarrow \Delta MAH \text{ cân tại } H$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{2}MH = \sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \quad (*)$$

$$+ \text{ Gọi } A(t; 2t-3) \in AN$$

$$+ \text{ Ta có } AM^2 = \frac{45}{2} \text{ (theo (*))}$$

$$\Leftrightarrow \left(t - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(2t - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{45}{2} \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1; -1) \\ A(4; 5) \end{cases}$$

$$+ \text{ Vậy } A(1; -1) \text{ hoặc } A(4; 5).$$

Nhận xét:

* Khi muốn chuyển việc tìm điểm về **Bài toán 1** mà yếu tố độ dài MI chưa biết (trong bài toán này AM chưa biết) thì thường ta hay “cắt nghĩa” thông qua dữ kiện về định lượng. Nếu không có điều này thì trong đề bài thường ẩn chứa những yếu tố bất biến như góc (ví như trong bài toán này góc $\widehat{MAH}$ ta luôn tính được), khoảng cách (trong ví dụ này $d(M, AN)$ cũng là một đại lượng không đổi)... Từ đây việc tìm độ dài MI (trong bài toán trên là AM) sẽ khá đơn giản và bài toán gốc sẽ xuất hiện đúng như nội dung của **Bài toán 1**.

* Ngoài cách tìm ra được $AM = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ như ở ví dụ trên, các bạn có thể tham khảo

việc tìm AM theo cách sau:

$$\text{Đặt } AB = a \Rightarrow S_{AMN} = S_{ABCD} - (S_{ADN} + S_{CNM} + S_{BAM}) = \frac{5a^2}{12} \text{ và } AN = \frac{a\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{Khi đó: } d(M, AN) = \frac{2S_{AMN}}{AN} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{2 \cdot \frac{5a^2}{12}}{\frac{a\sqrt{10}}{3}} \Rightarrow a = 3\sqrt{2} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta_1: 3x + y + 5 = 0$, $\Delta_2: x - 2y - 3 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$. Gọi M

là một điểm thuộc đường tròn (C) và N là điểm thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho M và N đối xứng nhau qua Δ_2 . Tìm tọa độ điểm N .

Phân tích hướng giải :

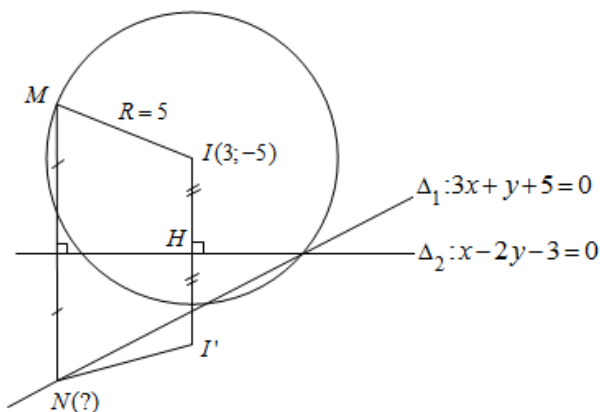
Điểm N thuộc đường thẳng Δ_1 đã biết phương trình, do đó để tìm tọa độ điểm N ta cần thêm một yếu tố liên quan tới N . Lúc này ta sẽ quan tâm tới các điểm đã biết tọa độ trong dữ kiện của bài toán. Ở đây đường tròn (C) có tâm $I(3;-5)$, nếu tính được độ dài NI ta chuyển luôn được về **Bài toán 1**. Song bài toán này việc tìm NI sẽ khá phức tạp. Vì vậy sẽ cần một điểm khác mà việc tính khoảng cách từ N tới điểm đó đơn giản. Trong bài toán có chứa yếu tố đối xứng (M và N đối xứng nhau qua Δ_2), điều đó khiến ta nghĩ tới điểm I' đối xứng với I qua Δ_2 . Và điểm này hoàn toàn xác định được, từ đây suy ra được $NI' = IM = R = 5$. Như vậy lúc này ta đã nhìn thấy **Bài toán 1** để tìm tọa độ điểm N . Cụ thể:

* $N \in \Delta_1 : 3x + y + 5 = 0$

* N cách điểm I' đã biết tọa độ một khoảng $NI' = 5$.

(Thực ra ở chương trình lớp 11 các bạn được học phép đối xứng trục và khi đó ta sẽ trả lời được câu hỏi vì sao lại đi xác định thêm điểm I' như thế – song ở cách giải dưới đây tác giả đã trình bày theo cách mà để ngay cả các bạn học lớp 10 cũng có thể hiểu được).

Giải



+ Đường tròn (C) có tâm $I(3;-5)$ và bán kính $R = 5$.

+ Gọi I' là điểm đối xứng với I qua Δ_2 , suy ra II' đi qua I và vuông góc với Δ_2 nên có phương trình: $2x + y - 1 = 0$

Gọi $II' \cap \Delta_2 = \{H\}$, khi đó tọa độ điểm H là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow H(1; -1) \Rightarrow I'(-1; 3) \text{ (vì } H \text{ là trung điểm của } II') \text{}$$

+ Gọi $N(t; -3t - 5) \in \Delta_1$, khi đó do N, I' lần lượt là hai điểm đối xứng của M, I qua Δ_2 nên :

$$NI' = IM = R = 5 \Leftrightarrow NI'^2 = 25 \Leftrightarrow (t + 1)^2 + (3t + 8)^2 = 25 \Leftrightarrow t^2 + 5t + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(-1; -2) \\ N(-4; 7) \end{cases}. \text{ Vậy } N(-1; -2) \text{ hoặc } N(-4; 7).$$

Nhận xét :

Khi đi tìm tọa độ của một điểm nghĩa là bài toán đang chứa hai ẩn (tung độ và hoành độ của điểm đó), vì vậy việc giải những lớp bài toán như thế này thực chất là việc chúng ta đi cắt nghĩa số liệu của bài toán để được hai phương trình (hai dấu "="). Dữ kiện điểm thuộc đường luôn giúp ta có được một phương trình và các dữ kiện chưa khai thác sẽ giúp ta cắt nghĩa để tìm thêm một dấu "=" còn lại. Kinh nghiệm làm những bài toán tìm điểm cho ta biết được xác suất rơi vào **Bài toán 1** thường khá cao (có lẽ đó cũng là lý do và lý do để tác giả giới thiệu **Bài toán 1** đầu tiên tới các bạn). Vì vậy trong các ví dụ cụ thể, nếu điểm đã thuộc một đường thẳng cho trước thì hướng tư duy đầu tiên ta ưu tiên nghĩ đến là chỉ ra một điểm cố định và khoảng cách từ điểm cần tìm tới điểm đó xác định được.

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC vuông tại $A(1; -\sqrt{3})$ có góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$, đường thẳng $\Delta: x - y + 2 = 0$ là tiếp tuyến tại B của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tìm tọa độ các điểm B và C , biết B có hoành độ là một số hữu tỉ.

Phân tích hướng giải:

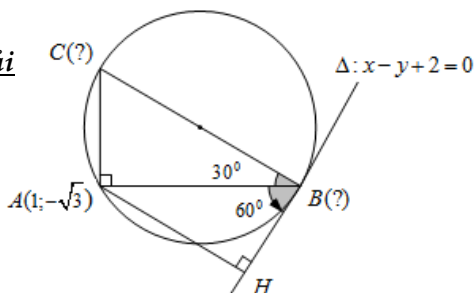
* Ở đây, B đang thuộc đường thẳng Δ và A là điểm đã biết tọa độ. Do đó, nếu tính được độ dài đoạn AB ta sẽ chuyển được về **Bài toán 1**. Lúc này ta sẽ cắt nghĩa dữ kiện của bài toán để làm điều này (các bạn xem việc cắt nghĩa ở phần lời giải chi tiết).

* Khi đã tìm được điểm B ta dễ dàng viết được phương trình của BC và AC và suy ra tọa độ điểm C .

Giải

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d , suy ra:

$$AH = d(A, \Delta) = \frac{|1 + \sqrt{3} + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$



Tam giác ABC vuông tại A nên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nhận BC là đường kính.

Mặt khác: Δ là tiếp tuyến tại B của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $\Delta \perp BC$.

Khi đó: $\widehat{ABH} = 60^\circ$ và xét tam giác vuông AHB ta có:

$$AB = \frac{AH}{\sin 60^\circ} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

+ Gọi $B(t; t+2)$ với $t \in \mathbb{Q}$, khi đó:

$$AB^2 = 8 + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow (t-1)^2 + (t+2+\sqrt{3})^2 = 8 + 4\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow t^2 + (1+\sqrt{3})t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = -1 - \sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \text{ (loại)}$$

Suy ra $B(0; 2)$.

+ Khi đó BC đi qua $B(0; 2)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{BC}} = \overrightarrow{u_\Delta} = (1; 1)$ nên có phương trình: $x + y - 2 = 0$

AC đi qua $A(1; -\sqrt{3})$, có $\overrightarrow{n_{AC}} = \overrightarrow{BA} = (1; -2 - \sqrt{3})$ có phương trình:

$$x - (2 + \sqrt{3})y - 4 - 2\sqrt{3} = 0$$

+ Vì $BC \cap AC = \{C\}$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - (2 + \sqrt{3})y - 4 - 2\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \\ y = -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow C\left(2 + \frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

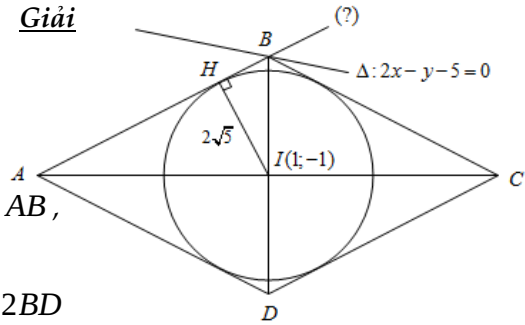
Ví dụ 10. Cho hình thoi $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 18 = 0$. Biết $AC = 2BD$, điểm B có hoành độ dương và thuộc đường thẳng $\Delta: 2x - y - 5 = 0$. Viết phương trình cạnh AB .

Phân tích hướng giải:

* Ở đây B thuộc đường thẳng Δ và I là tâm của đường tròn (C) đã biết tọa độ do đó nếu tính được độ dài đoạn BI ta sẽ chuyển được về **Bài toán 1**. Lúc này ta sẽ cắt nghĩa dữ kiện của bài toán để làm điều này (các bạn xem việc cắt nghĩa ở lời giải).

* Khi đã tìm được điểm B ta chuyển về bài toán viết phương trình đường thẳng AB đi qua điểm B đã biết tọa độ và cách điểm I cho trước một khoảng không đổi R nghĩa là ta chuyển bài toán về **Bài toán 6** (Các bạn sẽ được tìm hiểu kĩ bài **Bài toán 6** ở phần sau).

Giải



+ Đường tròn (C) có tâm $I(1; -1)$

và bán kính $R = 2\sqrt{5}$

Gọi H là hình chiếu của I trên AB ,

suy ra $IH = R = 2\sqrt{5}$

Vì $ABCD$ là hình thoi và $AC = 2BD$

nên $AI = 2BI$, khi đó xét tam giác vuông ABI ta có:

$$\frac{1}{AI^2} + \frac{1}{BI^2} = \frac{1}{IH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4BI^2} + \frac{1}{BI^2} = \frac{1}{(2\sqrt{5})^2} \Leftrightarrow BI = 5$$

+ Gọi $B(t; 2t - 5) \in \Delta$ với $t > 0$, khi đó :

$$BI = 5 \Leftrightarrow BI^2 = 25 \Leftrightarrow (t - 1)^2 + (2t - 4)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 - 18t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ hoặc } t = -\frac{2}{5} \text{ (loại)} \Rightarrow B(4; 3)$$

+ Gọi vectơ pháp tuyến của AB là $\overrightarrow{n_{AB}} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 > 0$, khi đó phương trình AB có dạng : $a(x - 4) + b(y - 3) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 4a - 3b = 0$

$$\text{Ta có : } d(I, AB) = R \Leftrightarrow \frac{|a - b - 4a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow (3a + 4b)^2 = 20(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 11a^2 - 24ab + 4b^2 = 0 \Leftrightarrow 11\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 24\left(\frac{a}{b}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 2 \text{ hoặc } \frac{a}{b} = \frac{2}{11}$$

+ Với $\frac{a}{b} = 2$ chọn $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$, khi đó phương trình AB là : $2x + y - 11 = 0$

Với $\frac{a}{b} = \frac{2}{11}$ chọn $\begin{cases} a = 2 \\ b = 11 \end{cases}$, khi đó phương trình AB là : $2x + 11y - 41 = 0$

Ví dụ 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có E, F lần lượt thuộc các đoạn AB, AD sao cho $EB = 2EA$, $FA = 3FD$, $F(2; 1)$ và tam giác CEF vuông tại F . Biết rằng đường thẳng $x - 3y - 9 = 0$ đi qua hai điểm C, E . Tìm tọa độ điểm C , biết C có hoành độ dương.

Phân tích hướng giải:

* $C \in CE$ đã biết phương trình và $F(2; 1)$. Điều đó gợi ý ta đi tính độ dài CF , nếu làm được điều này ta sẽ dễ dàng có được đáp số theo góc nhìn của **Bài toán 1**.

* Với dữ kiện $EB = 2EA$, $FA = 3FD$ và tam giác CEF vuông tại F ta sẽ tìm được mối liên hệ giữa hai cạnh của hình chữ nhật. Song ta vẫn đang thiếu một yếu tố về định lượng. Nếu trong đề bài không cho thì ta sẽ nghĩ ngay tới việc đi tính $d(F, CE)$ (yếu tố ẩn trong bài toán). Thông số này sẽ giúp ta có được độ dài đoạn CF . Do đó ta đi đến lời giải chi tiết sau:

Giải

+ Ta có $\widehat{F_1} = \widehat{C_1}$ (vì cùng phụ với $\widehat{F_2}$)

Và $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$,

suy ra $\triangle AEF \sim \triangle DFC$

$$\Rightarrow \frac{AE}{DF} = \frac{AF}{DC} = \frac{EF}{FC}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} EB = 2EA \\ FA = 3FD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AE = \frac{1}{3}AB \\ DF = \frac{1}{4}AD; \quad AF = \frac{3}{4}AD \end{cases}'$$

$$\text{suy ra } \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{1}{4}AD} = \frac{\frac{3}{4}AD}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = \frac{9}{16}AD^2 \Leftrightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Do đó } \frac{EF}{FC} = \frac{AE}{DF} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{1}{4}AD} = 1 \Rightarrow EF = FC, \text{ suy ra } \triangle FEC \text{ vuông cân tại } F$$

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của F trên EC .

$$\text{Khi đó: } CF = \sqrt{2}FH = \sqrt{2} \cdot d(F, CE) = \sqrt{2} \cdot \frac{|2-3-9|}{\sqrt{1^2+3^2}} = 2\sqrt{5}$$

+ Gọi $C(3t+9; t)$ với $t > -3$ (do $x_C > 0$).

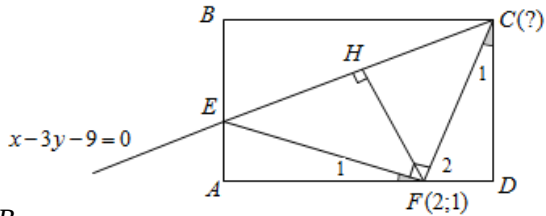
$$\text{Suy ra: } CF^2 = 20 \Leftrightarrow (3t+7)^2 + (t-1)^2 = 20 \Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \text{ hoặc } t = -3$$

(loại) $\Rightarrow C(6; -1)$

+ Vậy $C(6; -1)$.

Nhận xét:

Ở ví dụ trên việc tìm điểm C theo góc nhìn của **Bài toán 1** là khá “tự nhiên” khi C đang thuộc một đường thẳng biết phương trình và điểm $F(2;1)$ cố định. Song nếu câu hỏi bài toán không chỉ dừng lại ở việc tìm điểm C mà phải đi tìm tất cả các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ ta vẫn hoàn toàn có thể giải quyết triệt để bài toán. Cụ thể:



+ Khi tìm được điểm C ta sẽ viết được phương trình EF (đi qua F và vuông góc với CF) và suy ra được tọa độ điểm E (với $CE \cap EF = \{E\}$).

+ Việc chỉ ra $\frac{AB}{AD} = \frac{3}{4}$ và $FE = 2\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} AE = \sqrt{2} \\ AF = 3\sqrt{2} \end{cases}$

hay A là giao điểm của đường tròn $(E; \sqrt{2})$ và $(F; 3\sqrt{2}) \Rightarrow$ tọa độ điểm A (chú ý A, C khác phía EF để loại bớt 1 điểm A)

+ Từ $\begin{cases} \overline{AB} = 3\overline{AE} \\ \overline{AF} = 3\overline{FD} \end{cases}$ ta suy ra được tọa độ điểm B và D .

Ví dụ 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có đáy lớn CD và $\widehat{BCD} = 45^\circ$. Đường thẳng AD và BD lần lượt có phương trình $3x - y = 0$ và $x - 2y = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC biết diện tích hình thang bằng 15 và điểm B có tung độ dương.

Phân tích hướng giải :

* Với việc $B \in BD$ đã biết phương trình và điều kiện B có tung độ dương giúp ta nghĩ tới nên đi tìm tọa độ điểm B trước. Do $AD \cap BD = \{D\}$ ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm D , khi đó $B \in BD$ và nếu cắt nghĩa được dữ kiện của bài toán để tính độ dài BD ta sẽ tìm được tọa độ điểm B theo **Bài toán 1**. Ở đây có dữ kiện $S_{ABCD} = 15$ (*) mà S_{ABCD} phụ thuộc vào AB, AD và DC . Nghĩa là trong đẳng thức (*) chứa tới 3 ẩn. Nếu thế sẽ cần giảm số ẩn, điều này chỉ có thể làm được khi AB, AD và DC có mối liên hệ với nhau, hay nói cách khác sẽ có hai trong ba ẩn trên biểu diễn được theo ẩn còn lại. Vậy ta sẽ cần khai thác số liệu cụ thể của bài toán. Dữ kiện bài toán cho góc $\widehat{BCD} = 45^\circ$ và AD, BD đã biết phương trình, từ đây gợi ý ta nên đi tính

góc ADB (ta nháp $\cos(AD, BD) = \frac{|\overline{n_{AD}} \cdot \overline{n_{BD}}|}{|\overline{n_{AD}}| \cdot |\overline{n_{BD}}|} = \frac{|3+2|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{ADB} = 45^\circ$). Như

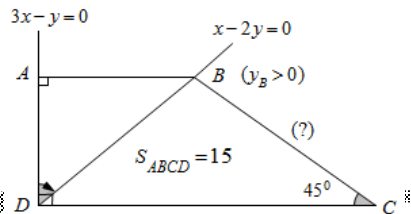
vậy tam giác ABD và DBC lần lượt vuông cân tại A và B . Lúc này ta sẽ biểu diễn được AD, BD theo AB ; từ (*) ta sẽ suy ra được AB và dễ dàng có được độ dài BD .

* Khi tìm được B suy ra được phương trình BC do $CB \perp BD$ (tam giác DBC vuông tại B).

Giải

+ Do $AD \cap BD = \{D\}$ nên tọa độ điểm

D là nghiệm của hệ :



KHANG

V I L E

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow D(0;0)$$

Ta có các vectơ pháp tuyến tương ứng của AD và BD là:

$$\overrightarrow{n_{AD}} = (3; -1), \overrightarrow{n_{BD}} = (1; -2)$$

$$\text{Suy ra: } \cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD}) = \frac{|\overrightarrow{n_{AD}} \cdot \overrightarrow{n_{BD}}|}{|\overrightarrow{n_{AD}}| \cdot |\overrightarrow{n_{BD}}|} = \frac{|3 + 2|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{ADB} = 45^\circ$$

Khi đó tam giác ABD và BDC lần lượt vuông cân tại A và B,

$$\text{suy ra: } AB = AD = \frac{DC}{2}$$

+ Ta có:

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + DC) \cdot AD}{2} = \frac{(AB + 2AB) \cdot AB}{2} = \frac{3}{2} AB^2 = 15$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{10} \Rightarrow BD = 2\sqrt{5}$$

+ Gọi B(2t; t) với t > 0

Khi đó: $BD = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow BD^2 = 20 \Leftrightarrow (2t)^2 + t^2 = 20 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = -2$ (loại) $\Rightarrow B(4; 2)$

+ Đường thẳng BC đi qua B(4; 2) và có vectơ pháp tuyến: $\overrightarrow{n_{BC}} = \overrightarrow{u_{BD}} = (2; 1)$ (vì tam giác BDC vuông tại B) nên ta có phương trình:

$$2(x - 4) + (y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 10 = 0$$

Ví dụ 13 (B – 2013 – CB). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau và $AD = 3BC$. Đường thẳng BD có phương trình $x + 2y - 6 = 0$ và tam giác ABD có trực tâm là H(-3; 2). Tìm tọa độ các đỉnh C và D.

Phân tích hướng giải:

Với yêu cầu của bài toán, ban đầu sẽ cho ta được chùm các câu hỏi và các hướng phân tích sau: “Với C và D ta ưu tiên tìm điểm nào trước? D đang thuộc đường thẳng BD đã biết phương trình, C thuộc đường thẳng AC mà ta hoàn toàn có thể viết được phương trình (AC đi qua H và vuông góc với BD). Khi đó giao điểm $\{I\} = BD \cap AC$ hoàn toàn xác định. Ta cần thêm những dữ kiện “có lợi” cho C và D”.

Do ABCD là hình thang cân nên $IB = IC \Rightarrow \widehat{BCI} = 45^\circ \Rightarrow BCH$ là tam giác cân tại B $\Rightarrow I$ là trung điểm của HC. Nghĩa là ta sẽ tìm được tọa độ điểm C trước. Lúc này các dữ kiện chưa được khai thác là $BC \parallel AD$ và $AD = 3BC$ từ đây ta nghĩ tới định lý Talet và suy ra được

$DI = 3BI = 3IH$. Khi đó việc tìm tọa độ điểm D được đưa về **Bài toán 1**. Cụ thể:

* $D \in BD: x + 2y - 6 = 0$

* $DI = 3IH$

Giải

+ Vì $AC \perp BD \Rightarrow \overrightarrow{n_{AC}} = \overrightarrow{u_{BD}} = (2; -1)$,

nên AC có phương trình là:

$$2(x + 3) - (y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 8 = 0$$

Gọi $BD \cap AC = \{I\}$.

Khi đó tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 2y - 6 = 0 \\ 2x - y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow I(-2; 4)$$

+ Do $ABCD$ là hình thang cân nên $IB = IC \Rightarrow \widehat{BCI} = 45^\circ \Rightarrow BCH$ là tam giác cân tại B .

Suy ra I là trung điểm của $HC \Rightarrow C(-1; 6)$

+ Áp dụng định lí Ta-lét với $AD \parallel BC$ ta có:

$$\frac{ID}{IB} = \frac{AD}{BC} = 3 \Rightarrow ID = 3IB = 3IH = 3\sqrt{5}$$

+ Gọi $D(6 - 2t; t) \in BD$, khi đó $ID = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow ID^2 = 45$

$$\Leftrightarrow (2t - 8)^2 + (t - 4)^2 = 45 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(4; 1) \\ D(-8; 7) \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} C(-1; 6) \\ D(4; 1) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} C(-1; 6) \\ D(-8; 7) \end{cases}$.

Nhận xét:

Khi bài toán yêu cầu tìm từ hai điểm trở lên thì thứ tự tìm điểm thường ưu tiên theo các dự kiện sau: Điểm cần tìm có liên quan tới hệ thức véc tơ (trong ví dụ trên I là trung điểm của HC cũng được hiểu là C liên hệ với H, I qua hệ thức vectơ $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{IC}$), điểm thuộc đường đã biết phương trình...

Ví dụ 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A , điểm $B(1; 1)$. Trên tia BC lấy điểm M sao cho $BM \cdot BC = 75$. Phương trình đường thẳng $AC: 4x + 3y - 32 = 0$. Tìm tọa độ điểm C biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MAC bằng $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Phân tích hướng giải :

* Ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm A là giao của AC và AB (AB đi qua B và vuông góc với AC).

* Khi bài toán có dữ kiện $BM \cdot BC = 75$ thường chúng ta nghĩ tới tam giác đồng dạng và tứ giác nội tiếp đường tròn (kiến thức hình lớp 9 hay đề cập tới điều này). Trong bài toán lại có yếu tố bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MAC , để khai thác được dữ kiện này gợi ý ta dựng thêm điểm D sao cho $ACMD$ nội tiếp đường tròn, việc này sẽ giúp ta cắt nghĩa được tất cả những thông số trên (Các bạn sẽ thấy rõ trong lời giải của bài toán).

* Sau khi dựng điểm D ta sẽ cắt nghĩa các số liệu của bài toán để đi tính độ dài đoạn AC , khi đó ta sẽ tìm được tọa độ của điểm C theo góc nhìn của **Bài toán 1**. Cụ thể:

+ $C \in AC : 4x + 3y - 32 = 0$

+ C cách A một khoảng xác định AC .

Giải

+ AB đi qua $B(1;1)$ và vuông góc

với AC ($\vec{u}_{AC} = (3; -4)$) nên có

phương trình: $3x - 4y + 1 = 0$

Do $AC \cap AB = \{A\}$ nên tọa độ

điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 32 = 0 \\ 3x - 4y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow A(5; 4)$$

+ Kẻ MD vuông góc với BC và cắt AB tại K , suy ra $ACMD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính CD (cũng chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác MAC), khi đó : $CD = 2R = 5\sqrt{5}$

Ta có $\triangle BMD \sim \triangle BAC$ (g.g)

$$\text{nên } \frac{BM}{BA} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow BD = \frac{BM \cdot BC}{BA} = \frac{75}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 15 > 5 = AB$$

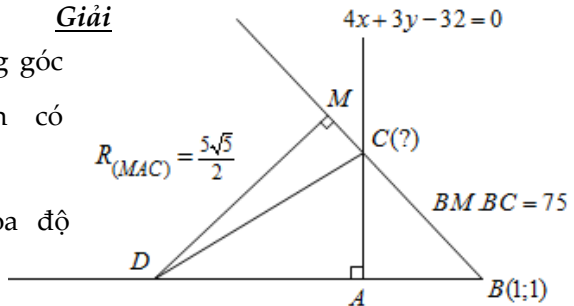
$\Rightarrow A$ nằm giữa B và D .

Khi đó $AD = BD - BA = 15 - 5 = 10$,

$$\text{Suy ra } AC = \sqrt{CD^2 - AD^2} = \sqrt{(5\sqrt{5})^2 - 10^2} = 5$$

+ Gọi $C(8+3t; -4t) \in AC$,

$$\text{Khi đó } AC = 5 \Leftrightarrow AC^2 = 25 \Leftrightarrow (3t+3)^2 + (4t+4)^2 = 25$$



$$\Leftrightarrow 25t^2 + 50t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(8;0) \\ C(2;8) \end{cases}$$

+ Vậy $C(8;0)$ hoặc $C(2;8)$.

Ví dụ 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(T): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ và đường thẳng $\Delta: x + y + 2 = 0$. Từ điểm A thuộc Δ kẻ hai đường thẳng lần lượt tiếp xúc với (T) tại B và C . Tìm tọa độ điểm A biết diện tích tam giác ABC bằng 8.

Phân tích hướng giải:

Khi đã được làm quen các ví dụ thuộc **Bài toán 1** trước đó, việc tiếp cận đề bài ở ví dụ này là khá đơn giản khi dữ kiện bài toán cho khá "lộ" – ta biết điểm $I(1;2)$ cố định là tâm của (T) , điểm A cần tìm thuộc đường thẳng $\Delta: x + y + 2 = 0$ đã biết phương trình. Như vậy ta nghĩ ngay tới việc đi tính độ dài đoạn IA để đưa về **Bài toán 1**. Dữ kiện diện tích tam giác ABC bằng 8 chắc chắn là để chúng ta làm điều này. Vấn đề là cắt nghĩa nó như thế nào để biểu thức diện tích ABC chỉ chứa ẩn IA . Câu trả lời sẽ có trong lời giải chi tiết sau:

Giải

+ Đường tròn (T) có tâm $I(1;2)$ và

bán kính $IB = R = \sqrt{5}$

Gọi H là giao điểm của BC và AI . Đặt $AI = a > 0$

Ta có :

$$\begin{cases} AH = \frac{AB^2}{AI} = \frac{AI^2 - IB^2}{AI} = \frac{a^2 - 5}{a} \\ IH = \frac{IB^2}{IA} = \frac{5}{a} \end{cases} \Rightarrow BH = \sqrt{AH \cdot IH} = \sqrt{\frac{a^2 - 5}{a} \cdot \frac{5}{a}} = \frac{\sqrt{5(a^2 - 5)}}{a}$$

$$+ S_{ABC} = AH \cdot BH = \frac{a^2 - 5}{a} \cdot \frac{\sqrt{5(a^2 - 5)}}{a} = 8 \Leftrightarrow 5(a^2 - 5)^3 = 64a^4$$

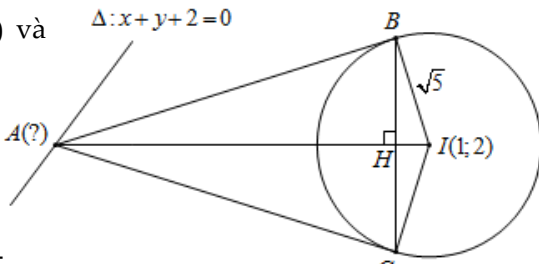
$$\Leftrightarrow 5a^6 - 139a^4 + 375a^2 - 625 = 0 \Leftrightarrow (a^2 - 25)(5a^4 - 14a + 25) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \pm 5 \xrightarrow{a > 0} a = 5 \Rightarrow AI = 5$$

+ Gọi $A(t; -t-2) \in \Delta$, khi đó:

$$AI^2 = 25 \Leftrightarrow (t-1)^2 + (t+4)^2 = 25 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1; -3) \\ A(-4; 2) \end{cases}$$

Vậy $A(1; -3)$ hoặc $A(-4; 2)$.



2. CÁCH RA ĐỀ 2: Cho biết M cách I (đã biết tọa độ) một khoảng không đổi. Cần dựa vào các dữ kiện của bài toán để viết phương trình đường thẳng chứa M .

Ví dụ 1 (B – 2005). Cho hai điểm $A(2;0)$ và $B(6;4)$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.

Phân tích hướng giải :

Muốn viết phương trình đường tròn (C) cần tìm tọa độ tâm I và bán kính $R = IA$.

- * I cách B một khoảng không đổi $IB = 5$
- * Đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A nên I thuộc đường thẳng đi qua A vuông góc với trục hoành (trục Ox).

Như vậy việc tìm điểm I đã được chuyển về **Bài toán 1**.

Giải

- + Đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A nên $IA \perp Ox$, suy ra phương trình $IA: x = 2$

- + Gọi $I(2;t) \in IA$, khi đó

$$IB = 5 \Rightarrow IB^2 = 25 \Leftrightarrow 4^2 + (t-4)^2 = 25 \Leftrightarrow (t-4)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(2;1) \\ I(2;7) \end{cases}$$

- + Với $I(2;1)$ thì bán kính $R = IA = 1$, suy ra phương trình đường tròn:

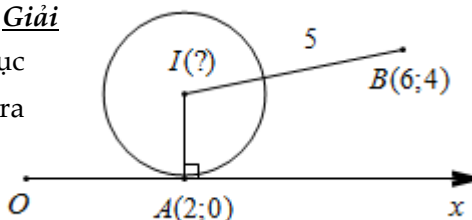
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$$

- + Với $I(2;7)$ thì bán kính $R = IA = 7$, suy ra phương trình đường tròn:

$$(x-2)^2 + (y-7)^2 = 49$$

Vậy phương trình đường tròn cần lập là $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

hoặc $(x-2)^2 + (y-7)^2 = 49$.



Ví dụ 2 (B – 2009 – CB). Cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: x-y=0$ và $\Delta_2: x-7y=0$. Xác định tọa độ tâm K và bán kính của đường tròn (C_1) ; biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và tâm K thuộc đường tròn (C) .

Phân tích hướng giải :

- * (C_1) tiếp xúc với $\Delta_1, \Delta_2 \Rightarrow K$ thuộc đường phân giác của góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 .

* $K \in (C) \Rightarrow IK = R = \frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow$ chuyển về Bài toán 1.

Giải

+ Đường tròn (C) có tâm $I(2;0)$ và bán kính $R = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

+ Ta có: (C_1) tiếp xúc với $\Delta_1, \Delta_2 \Rightarrow K$ thuộc đường phân giác của góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 .

Khi đó gọi $K(x; y) \Rightarrow d(K, \Delta_1) = d(K, \Delta_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} = \frac{|x-7y|}{5\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(x-y) = x-7y \\ 5(x-y) = 7y-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

+ Với đường phân giác $d_1: 2x+y=0$. Gọi $K(t; -2t) \in d_1$

$$\text{Vì } K \in (C) \Rightarrow IK = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow IK^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow (t-2)^2 + 4t^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 25t^2 - 20t + 16 = 0$$

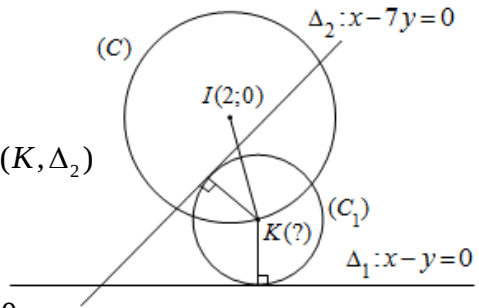
(vô nghiệm).

+ Với đường phân giác $d_2: x-2y=0$. Gọi $K(2t; t) \in d_2$

$$\text{Vì } K \in (C) \Rightarrow IK = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow IK^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow (t-2)^2 + 4t^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 25t^2 - 20t + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{4}{5} \Rightarrow K\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$$

$$\text{Khi đó bán kính của đường tròn } (C_1) : d(K, \Delta_1) = \frac{\left|\frac{8}{5} - \frac{4}{5}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$



Ví dụ 3 (B – 2012 – CB).

Cho đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 4$, $(C_2): x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0$ và đường thẳng $d: x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc (C_2) , tiếp xúc với d và cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho AB vuông góc với d .

Phân tích hướng giải:

Muốn viết phương trình đường tròn, ta cần:

- * Xác định tâm I bằng “góc nhìn” của **Bài toán 1**. Cụ thể:

Ta đi lập phương trình II_1 đi qua I_1 vuông góc với AB (tính chất đường nối tâm) hay song song với d . Khi đó:

- + $I \in II_1$ đã biết phương trình.
- + $I \in (C_2)$ hay $II_2 = R_2$

(Ta có thể làm theo **Cách 2** với $\{I\} = II_1 \cap (C_2) \rightarrow$ tọa độ I - cách trình bày khác của **Bài toán 1**).

- * Xác định bán kính R nhờ $R = d(I, d)$

Giải

Gọi I là tâm đường tròn (C) cần viết phương trình.

Ta có $(C_1): x^2 + y^2 = 4$

$\Rightarrow$ tâm của (C_1) là $I_1(0;0)$

Vì $\begin{cases} II_1 \perp AB \\ AB \perp d \end{cases} \Rightarrow II_1 \parallel d$

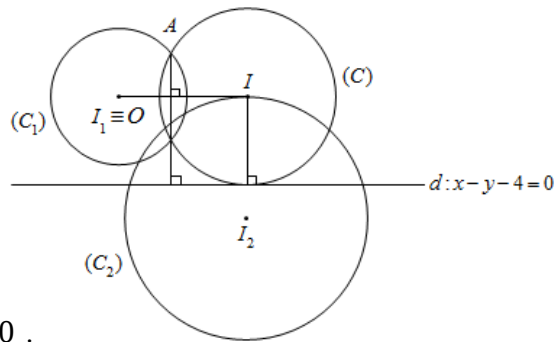
$\Rightarrow$ phương trình $II_1: x - y = 0$.

Gọi $I(t;t) \in II_1$ mà $I \in (C_2) \Rightarrow t^2 + t^2 - 12t + 18 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow I(3;3)$

Mà (C) tiếp xúc với $d \Rightarrow R = d(I, d) = \frac{|3-3+4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}$.

Vậy phương trình (C) là: $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$



Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (T) có tâm $I(0;5)$. Đường thẳng AI cắt đường tròn (T) tại điểm $M(5;0)$ với $M \neq A$. Đường cao từ đỉnh C cắt đường tròn (T) tại điểm $N\left(-\frac{17}{5}; -\frac{6}{5}\right)$ với $N \neq C$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết B có hoành độ dương.

Phân tích hướng giải:

* Vẫn một câu hỏi quen thuộc đầu tiên nên đặt ra “ Với dữ kiện của bài toán, thứ tự các điểm sẽ được tìm như thế nào ? ” . Ở đây chúng ta dễ dàng trả lời được câu hỏi này bằng việc tìm được tọa độ điểm A đầu tiên (do I là trung điểm của AM). Tiếp đến sẽ là điểm B (dữ kiện B có hoành độ dương gợi ý điều này)

* $IB = IM = 5\sqrt{2}$, ta cần thêm một dữ kiện liên quan tới điểm B . Lúc này cần tạo ra mối liên hệ điểm B với các số liệu đã biết của bài toán. Ta có

$M(5;0), N\left(-\frac{17}{5}; -\frac{6}{5}\right)$ đã biết tọa độ và bằng việc vẽ hình chính xác ta có thể suy

đoán $IB \perp MN$. Nếu có được điều này ta sẽ dễ dàng viết được phương trình IB và việc tìm điểm B là không khó khi ta đã nhìn thấy **Bài toán 1**.

* Bằng kiến thức hình học sơ cấp (kiến thức hình học cấp 2) ta dễ dàng chứng minh được $IB \perp MN$.

* Sau khi tìm được tọa độ điểm B ta sẽ suy ra được tọa độ điểm C (do C đối xứng với B qua AM).

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

Giải

+ Vì I là trung điểm của AM nên $A(-5;10)$

+ Ta có $\widehat{NCB} = \widehat{MAB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)
 $\Rightarrow BN = BM$ (tính chất góc nội tiếp)

Suy ra IB là đường trung trực của MN , khi đó IB đi qua I vuông góc với MN nên có phương trình:

$$7x + y - 5 = 0 \quad \left(\text{với } \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{42}{5}; -\frac{6}{5} \right) = -\frac{6}{5}(7;1) \right)$$

+ Gọi $B(t; 5-7t)$ với $t > 0$, khi đó :

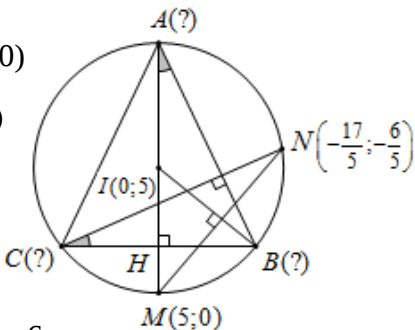
$$IB^2 = IM^2 \Leftrightarrow t^2 + (7t)^2 = 50 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\text{hoặc } t = -1 \text{ (loại)} \Rightarrow B(1; -2)$$

+ Phương trình $AM : x + y - 5 = 0$, suy ra BC đi qua B vuông góc AM có phương trình: $x - y - 3 = 0$

Gọi $AM \cap BC = \{H\}$, suy ra tọa độ điểm H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow H(4;1)$$



Do H là trung điểm của $BC \Rightarrow C(7;4)$

Vậy $A(-5;10)$, $B(1;-2)$, $C(7;4)$.

Ví dụ 5 (A – 2012 – NC). Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) , biết rằng (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm phân biệt tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông.

Phân tích hướng giải:

- * Phương trình $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ như vậy ta cần tìm $a; b$
- * (E) có độ dài trục lớn bằng 8 $\Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$
- * Dữ kiện (E) cắt (C) tại bốn điểm phân biệt tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông nên 4 đỉnh nằm trên hai đường phân giác thuộc góc phần tư thứ nhất và thứ hai. Ta giả sử có đỉnh A thuộc đường phân giác $\Delta: y = x$. Vậy việc tìm tọa độ điểm A quay về **Bài toán 1** nhờ:
 - + $A \in \Delta: y = x$
 - + $AO = R = 2\sqrt{2}$ (hay $A \in (C)$)
 - * Mà $A \in (E) \Rightarrow b \rightarrow$ phương trình (E) .

Giải

Gọi phương trình chính tắc của

elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- + (E) có độ dài trục lớn bằng 8
 $\Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$
- + (E) cắt (C) tại bốn điểm phân biệt tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông nên 4 đỉnh nằm trên hai đường phân giác thuộc góc phần tư thứ nhất và thứ hai.

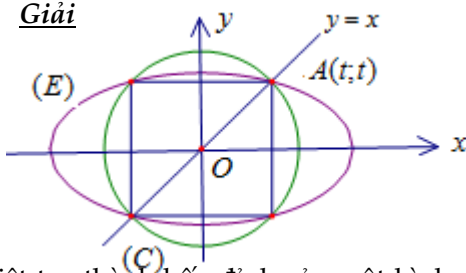
Ta giả sử A là một giao điểm của (E) và (C) thuộc đường phân giác $\Delta: y = x$.

- + Gọi $A(t;t) \in \Delta$ ($t > 0$).

Ta có: $A \in (C) \Rightarrow t^2 + t^2 = 8 \Leftrightarrow t = 2$ (vì $t > 0$) $\Rightarrow A(2;2)$

- + Mà $A \in (E) \Rightarrow \frac{2^2}{4^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{16}{3}$.

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1$



Ví dụ 6 (D – 2013 – NC). Cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ và đường thẳng $\Delta: y-3=0$. Tam giác MNP có trực tâm trùng với tâm của (C) , các đỉnh N và P thuộc Δ , đỉnh M và trung điểm của cạnh MN thuộc (C) . Tìm tọa độ điểm P .

Phân tích hướng giải:

* Với dữ kiện của bài toán ra dễ dàng tìm được tọa độ điểm M qua góc nhìn của **Bài toán 1**. Cụ thể:

+ M thuộc đường thẳng đi qua I vuông góc với Δ .

+ $MI = R = 2$ ($M \in (C)$)

* Khi tìm được điểm M ta sẽ tìm điểm N thông qua điểm K và tiếp tục sử dụng **Bài toán 1**. Cụ thể:

+ $N(t) \in \Delta: y-3=0 \Rightarrow K(t)$ (do K là trung điểm của MN).

+ $KI = R = 2$.

* Việc tìm điểm P được vận dụng nhờ **Bài toán 3** (các bạn sẽ được tìm hiểu kĩ thông qua **Bài toán 3** ở phần sau).

Giải

+ Đường tròn (C) có tâm

$I(1;1)$ và bán kính $R = 2$.

$$\text{Do đó } d(I; \Delta) = \frac{|1-3|}{1} = 2 = R$$

$\Rightarrow \Delta$ tiếp xúc với (C) .

Khi đó $IM \perp \Delta$, suy ra phương trình IM là: $x = 1$

+ Gọi $M(1;t) \in IM$. Mà $M \in (C) \Rightarrow (1-1)^2 + (t-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}$

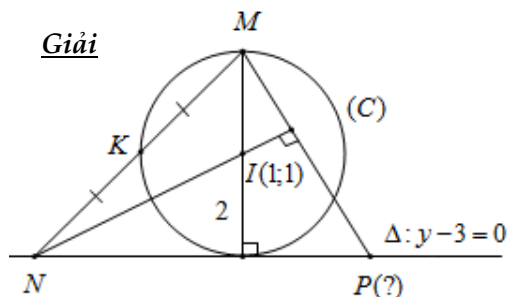
$\Rightarrow M(1;-1)$ hoặc $M(1;3)$ (loại vì $M \notin \Delta$)

+ Với $M(1;-1)$, khi đó gọi $N(a;3) \in \Delta \Rightarrow K\left(\frac{a+1}{2}; 1\right)$ là trung điểm của MN .

$$\text{Do } K \in (C) \Rightarrow \left(\frac{a+1}{2} - 1\right)^2 + (1-1)^2 = 4 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(5;3) \\ N(-3;3) \end{cases}$$

+ Gọi $P(m;3) \in \Delta$, khi đó với:

$$* N(5;3) \Rightarrow \begin{cases} \overline{IN} = (4;2) \\ \overline{MP} = (m-1;4) \end{cases},$$



$$\text{từ } \overline{IN} \cdot \overline{MP} = 0 \Leftrightarrow 4(m-1) + 2.4 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \Rightarrow P(-1; 3)$$

$$* \quad N(-3; 3) \Rightarrow \begin{cases} \overline{IN} = (-4; 2) \\ \overline{MP} = (m-1; 4) \end{cases},$$

$$\text{từ } \overline{IN} \cdot \overline{MP} = 0 \Leftrightarrow -4(m-1) + 2.4 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \Rightarrow P(3; 3)$$

Ví dụ 7. Cho hai đường tròn $(C): x^2 + (y-1)^2 = 2$ và

$(C'): (x-4)^2 + (y-5)^2 = 8$. Cho AB là một đường kính thay đổi của đường tròn (C') và M là một điểm di động trên đường tròn (C) . Tìm tọa độ các điểm M, A, B sao cho diện tích của tam giác MAB lớn nhất

Phân tích hướng giải:

* Đường tròn (C) có tâm $I(0;1)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$, (C') có tâm $I'(4;5)$ và bán kính $R' = 2\sqrt{2}$

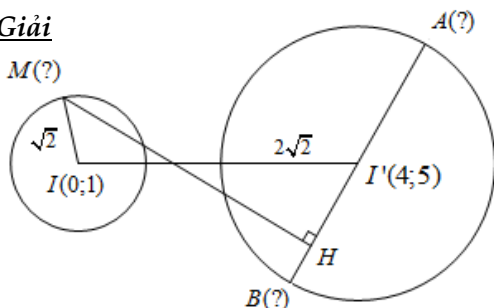
Vì $M \in (C)$ nên ta có: $MI = R = \sqrt{2}$. Vậy nếu ta chỉ ra được M đang thuộc một đường thẳng đã biết phương trình thì việc tìm điểm M sẽ quay về **Bài toán 1**.

* Ta sẽ cắt nghĩa dữ kiện tam giác MAB có diện tích lớn nhất (khớp dấu "=") để chỉ ra được điều này

Các bạn tham khảo phân cắt nghĩa ở lời giải chi tiết sau đây:

Giải

+ Đường tròn (C) có tâm $I(0;1)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$, (C') có tâm $I'(4;5)$ và bán kính $R' = 2\sqrt{2}$.



Khi đó $II' = 4\sqrt{2} > 3\sqrt{2} = R + R'$ nên (C) và (C') ngoài nhau.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên AB . Khi đó:

$$S_{MAB} = \frac{1}{2} MH \cdot AB = \frac{1}{2} MH \cdot 2R' = \sqrt{2} MH$$

$$\text{Ta có: } MH \leq MI' \leq MI + II' = \sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó: } S_{MAB} = \sqrt{2} MH \leq \sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 10$$

+ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv I'$ và $II' \cap (C) = \{M\}$ với I nằm giữa M và I' và $AB \perp II'$

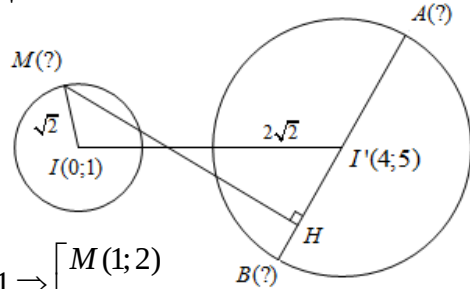
Ta có $\overline{II'} = (4; 4) = 4.(1; 1)$ nên II'

có phương trình : $\begin{cases} x = t \\ y = 1+t \end{cases}$

Gọi $M(t; 1+t) \in II'$,

khi đó $M \in (C)$

$$\text{nên } t^2 + t^2 = 2 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} M(1; 2) \\ M(-1; 0) \end{cases}$$



+ Với $M(1; 2)$, khi đó $MI' = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} = II' \Rightarrow M$ nằm giữa I và I' (loại).

Với $M(-1; 0)$, khi đó $MI' = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} > II' \Rightarrow I$ nằm giữa M và I' (thỏa mãn).

+ AB vuông góc với II' và đi qua I' nên có phương trình: $x + y - 9 = 0$

Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 - x \\ (x - 4)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = 7 \\ x = 6; y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2; 7), B(6; 3) \\ A(6; 3), B(2; 7) \end{cases}$$

Vậy $M(-1; 0), A(2; 7), B(6; 3)$ hoặc $M(-1; 0), A(6; 3), B(2; 7)$

3. CÁCH RA ĐỀ 3: (Kết hợp từ Cách ra đề 1 và Cách ra đề 2).

Dựa vào các dữ kiện của bài toán cần:

- + Tính được độ dài đoạn MI (với I đã biết tọa độ).
- + Viết phương trình đi qua điểm M .

Ví dụ 1: Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ và điểm $A(4; 2)$.

Gọi d là tiếp tuyến tại A của (C) . Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua tâm I của (C) và Δ cắt d tại M sao cho tam giác AIM có diện tích bằng 25 và M có hoành độ dương.

Phân tích hướng giải:

Muốn viết được phương trình Δ trong bài toán trên ta cần tìm được tọa độ của điểm M .

* Ta viết được phương trình d đi qua A và vuông góc với IA , khi đó $M \in d$: đã biết phương trình.

$$* S_{AIM} = 25 \Rightarrow MA = \frac{2S_{AIM}}{AI} \rightarrow \text{chuyển về Bài toán 1.}$$

Giải

+ Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$

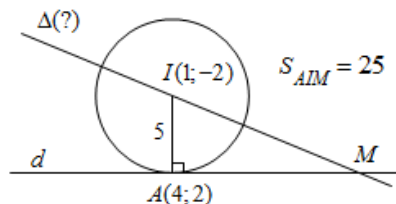
KHANG VIET

và bán kính $R = 5$.

Vì d là tiếp tuyến tại A của (C)

nên $\vec{n}_d = \vec{IA} = (3; 4) \Rightarrow \vec{u}_d = (4; -3)$,

suy ra phương trình $d: \begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$



+ Ta có: $S_{AIM} = 25 \Leftrightarrow \frac{1}{2} MA \cdot IA = 25 \Leftrightarrow MA = 10$ (với $IA = R = 5$)

+ Gọi $M(4 + 4t; 2 - 3t) \in d$, khi đó

$$MA = 10 \Leftrightarrow \sqrt{16t^2 + 9t^2} = 10 \Leftrightarrow 5|t| = 10 \Leftrightarrow t = \pm 2$$

$$\Rightarrow M(10; -4) \text{ hoặc } M(-4; 8) \text{ (loại)}$$

+ Khi đó $\vec{IM} = (9; -2)$, suy ra phương trình $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 9t \\ y = -2 - 2t \end{cases}$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 2, đường thẳng đi qua A và B có phương trình $x - y = 0$. Tìm tọa độ trung điểm M của AC biết $I(2; 1)$ là trung điểm của BC .

Phân tích hướng giải:

* Vì I là trung điểm của BC nên $S_{ABI} = \frac{1}{2} S_{ABC} = 1$

$$\text{Khi đó ta dễ dàng tính được độ dài đoạn } AB = \frac{2S_{ABI}}{d(I, AB)}.$$

* Lúc này ta sẽ nhìn thấy tọa độ điểm M “lộ diện” qua góc nhìn của **Bài toán**

1. Do MI là đường trung bình của tam giác ABC nên:

+ $M \in MI$: là đường thẳng đi qua I song song với AB

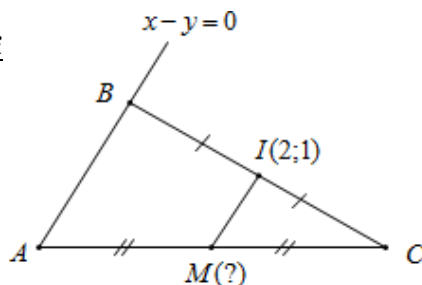
$$+ MI = \frac{AB}{2}$$

$$+ \text{Ta có } d(I, AB) = \frac{|2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

+ Do I là trung điểm của BC

$$\text{nên } S_{ABI} = \frac{1}{2} S_{ABC} = 1$$

Giải



$$\text{Khi đó } AB = \frac{2S_{ABI}}{d(I, AB)} = \frac{2 \cdot 1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}.$$

+ Mặt khác MI là đường trung bình của tam giác ABC nên IM đi qua I song song với AB có phương trình:

$$x - y - 1 = 0 \text{ và } MI = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

+ Gọi $M(t; t-1) \in MI$, khi đó

$$MI = \sqrt{2} \Leftrightarrow MI^2 = 2 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (t-2)^2 = 2 \Leftrightarrow (t-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(3; 2) \\ M(1; 0) \end{cases}$$

Ví dụ 3 (B – 2003). Cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Biết $M(1; -1)$ là trung điểm cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ là trọng tâm của tam giác ABC . Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C .

Phân tích hướng giải:

- * Do G là trọng tâm nên $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM} \Rightarrow$ tọa độ điểm A .
 Khi đó B, C thuộc đường thẳng đi qua M vuông góc với AM .
- * $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $MB = MC = MA$ (B, C thuộc đường tròn tâm M bán kính MA) $\rightarrow$ chuyển về **Bài toán 1**.

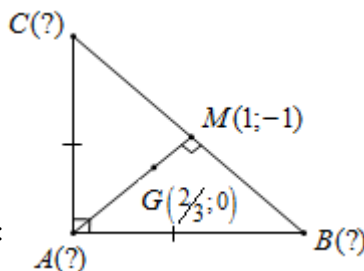
Giải

+ Do G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM} = (1; -3)$.

$$\text{Gọi } A(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1-x; -1-y)$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} 1-x=1 \\ -1-y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow A(0; 2).$$

+ BC đi qua $M(1; -1)$ và nhận $\overrightarrow{AM} = (1; -3)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình:
 $(x-1) - 3(y+1) = 0$ hay $x - 3y - 4 = 0$.



+ $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $MB = MC = MA = \sqrt{10}$, suy ra B, C thuộc đường tròn $(M; \sqrt{10})$ có phương trình: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$

+ Vậy tọa độ hai điểm B, C là nghiệm của hệ:

K H A N G V I E T

$$\begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 4 \\ 10(y + 1)^2 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 4 \\ y = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ x = -2 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(4; 0) \\ C(-2; -2) \\ B(-2; -2) \\ C(4; 0) \end{cases}$$

Vậy $A(0; 2), B(4; 0), C(-2; -2)$ hoặc $A(0; 2), B(-2; -2), C(4; 0)$.

Ví dụ 4 (D – 2013 – CB). Cho tam giác ABC có điểm $M\left(-\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của cạnh AB , điểm $H(-2; 4)$ và điểm $I(-1; 1)$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tìm tọa độ điểm C .

Phân tích hướng giải :

* Nếu ta biết được tọa độ điểm A , thì ta sẽ tìm được tọa độ điểm C theo góc nhìn của **Bài toán 1**.

Cụ thể: + $C \in AH$: là đường thẳng đi qua hai điểm H, A đã biết tọa độ.

+ $CI = AI$ (C cách I một khoảng không đổi là IA).

* Như vậy vấn đề là phải đi tìm điểm A . Lúc này **Bài toán 1** tiếp tục là sự lựa chọn để ta đi tìm điểm A .

Cụ thể: + $A \in AB$: là đường thẳng đi qua M và vuông góc với MI .

+ $AM = MH$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông).

Giải

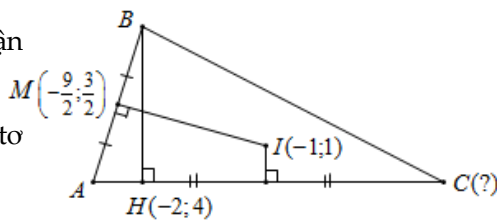
+ AB đi qua $M\left(-\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và nhận

$\overrightarrow{MI} = \left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(7; -1)$ làm vectơ

pháp tuyến nên có phương trình:

$$7\left(x + \frac{9}{2}\right) - \left(y - \frac{3}{2}\right) = 0 \text{ hay } 7x - y + 33 = 0.$$

+ Gọi $A(t; 7t + 33) \in AB$, khi đó theo tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông ta có: $AM = MH \Leftrightarrow AM^2 = MH^2$



$$\Leftrightarrow \left(t + \frac{9}{2}\right)^2 + \left(7t + 33 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{2} - 2\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 9t + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-4; 5) \\ A(-5; -2) \end{cases}$$

+ Với $A(-4; 5)$, khi đó AC đi qua $A(-4; 5)$ và $H(-2; 4)$ nên có phương trình:

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y-5}{-1} \Leftrightarrow x+2y-6=0$$

Gọi $C(6-2c; c) \in AC$, khi đó:

$$CI = AI \Leftrightarrow CI^2 = AI^2 \Leftrightarrow (2c-7)^2 + (c-1)^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow c^2 - 6c + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ c=5 \end{cases} \Rightarrow C(4; 1) \text{ hoặc } C(-4; 5) \text{ (loại vì } C \equiv A)$$

+ Với $A(-5; -2)$, khi đó AC đi qua $A(-5; -2)$ và $H(-2; 4)$ nên có phương

trình: $\frac{x+5}{3} = \frac{y+2}{6} \Leftrightarrow 2x-y+8=0$

Gọi $C(m; 2m+8) \in AC$, khi đó: $CI = AI \Leftrightarrow CI^2 = AI^2$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 + (2m+7)^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=-5 \end{cases} \Rightarrow C(-1; 6) \text{ hoặc } C(-5; 2) \text{ (loại vì } C \equiv A)$$

+ Vậy $C(-1; 6)$.

Ví dụ 5. Cho các điểm $A(10; 5)$, $B(15; -5)$ và $D(-20; 0)$ là các đỉnh của hình thang cân $ABCD$ trong đó AB song song với CD . Tìm tọa độ đỉnh C .

Phân tích hướng giải:

Ở ví dụ này ta có thể tìm tọa độ điểm C theo hai cách:

Cách 1: Ta sẽ tìm C theo góc nhìn của **Bài toán 1**. Cụ thể:

* C thuộc đường thẳng đi qua D và song song với AB nên dễ dàng viết được phương trình CD .

* $ABCD$ là hình thang cân nên ta có điều kiện cân: $CB = AB = 5\sqrt{37}$.

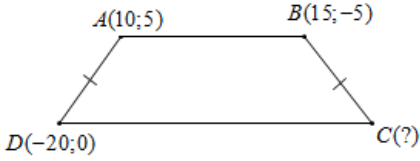
Sau khi tìm được C ta sẽ kiểm tra điều kiện đủ BC không song song AD và kết luận được tọa độ điểm C cần tìm.

Cách 2: Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , khi đó:

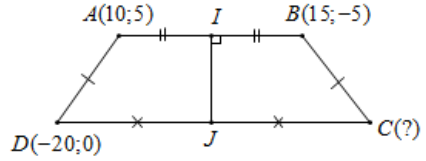
* Ta dễ dàng viết được phương trình IJ và tìm ra được tọa độ điểm J .

* J là trung điểm của CD (vì $ABCD$ là hình thang cân) nên ta suy ra được tọa độ điểm C .

Giải



Cách 1



Cách 2

Cách 1 :

- + Có $\overrightarrow{AB} = (5; -10) = 5 \cdot (1; -2)$, khi đó $CD \parallel AB$ nên CD có phương trình:

$$\begin{cases} x = -20 + t \\ y = -2t \end{cases}$$

- + Gọi $C(-20 + t; -2t) \in CD$, khi đó $ABCD$ là hình thang cân nên ta có:

$$AD = BC \Leftrightarrow AD^2 = BC^2 \Leftrightarrow 30^2 + 5^2 = (t - 35)^2 + (2t - 5)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 18t + 65 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(-15; -10) \\ C(-7; -26) \end{cases}$$

- + Với $C(-15; -10) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (-30; -5) = \overrightarrow{AD} \Rightarrow BC \parallel AD$ (không thỏa mãn vì $ABCD$ là hình thang cân)
- + Với $C(-7; -26) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (-22; -21)$, khi đó $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$ không cùng phương (thỏa mãn). Vậy $C(-7; -26)$.

Cách 2:

- + Có $\overrightarrow{AB} = (5; -10) = 5 \cdot (1; -2)$, khi đó $CD \parallel AB \Rightarrow \overrightarrow{n_{CD}} = \overrightarrow{n_{AB}} = (2; 1)$ và CD đi qua $D(-20; 0)$ nên có phương trình: $2(x + 20) + y = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 40 = 0$

- + Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , khi đó $I\left(\frac{25}{2}; 0\right)$ và

$IJ \perp AB$ (do $ABCD$ là hình thang cân) nên IJ có phương trình:

$$1 \cdot \left(x - \frac{25}{2}\right) - 2 \cdot y = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y - 25 = 0$$

- + Vì $IJ \cap CD = \{J\}$ nên tọa độ điểm J là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y + 40 = 0 \\ 2x - 4y - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{27}{2} \\ y = -13 \end{cases} \Rightarrow J\left(-\frac{27}{2}; -13\right)$$

- + Do J là trung điểm của CD nên suy ra $C(-7; -26)$.

Ví dụ 6. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(3;3)$ và $AC = 2BD$. Điểm $M\left(2; \frac{4}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB , điểm $N\left(3; \frac{13}{3}\right)$ thuộc đường thẳng CD . Viết phương trình đường chéo BD biết đỉnh B có tung độ nguyên.

Phân tích hướng giải :

Nếu tìm được tọa độ điểm B ta sẽ dễ dàng viết được phương trình BD (đi qua I và B). Việc tìm tọa độ điểm B sẽ được chuyển về **Bài toán 1**. Cụ thể:

* Lúc này khai thác tính đối xứng của hình thoi ta sẽ tìm được tọa độ điểm N' thuộc AB đối xứng với N qua I và khi đó ta sẽ viết được phương trình AB đi qua hai điểm M, N' đã biết tọa độ. Như vậy điểm B thuộc đường thẳng AB đã biết phương trình.

* Ta sẽ khai thác dữ kiện cuối cùng của bài toán là $AC = 2BD$ để tính độ dài đoạn IB (chi tiết xem ở phần lời giải)

Giải

+ Gọi N' là điểm đối xứng với N qua I (hay I là trung điểm của NN') suy ra $N'\left(3; \frac{5}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB

khi đó AB nhận $\overrightarrow{MN'} = \left(1; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(3;1)$

làm vectơ chỉ phương, suy ra $\overrightarrow{n_{AB}} = (1; -3)$

Phương trình $AB: x - 3y + 2 = 0$

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB nên

$$IH = d(I, AB) = \frac{|3 - 9 + 2|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

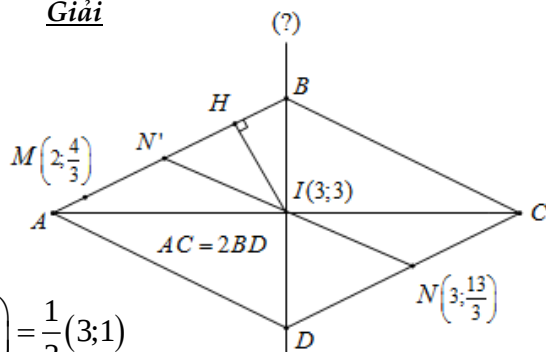
Mặt khác $AC = 2BD \Rightarrow AI = 2IB$. Khi đó xét tam giác IBA ta có :

$$\frac{1}{IB^2} + \frac{1}{IA^2} = \frac{1}{IH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{IB^2} + \frac{1}{4IB^2} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow IB^2 = 2 \Leftrightarrow IB = \sqrt{2}$$

+ Gọi $B(3t - 2; t) \in AB$ với $t \in \mathbb{Z}$,

$$\text{khi đó : } IB^2 = 2 \Leftrightarrow (3t - 5)^2 + (t - 3)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 - 18t + 16 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ hoặc } t = \frac{8}{5} \text{ (loại).}$$



+ Vậy $B(4;2)$, khi đó đường chéo BD đi qua hai điểm $B(4;2)$ và $I(3;3)$ nên có phương trình: $\frac{x-3}{4-3} = \frac{y-3}{2-3}$ hay $x+y-6=0$

Nhận xét: Vì hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật và hình vuông nhận giao điểm hai đường chéo là tâm đối xứng của hình đó. Nên nếu trong đề bài cho một điểm thuộc một cạnh thì các bạn nên nghĩ tới việc tìm điểm đối xứng của điểm đó qua tâm của hình chứa nó (ở đây tâm đã biết tọa độ).

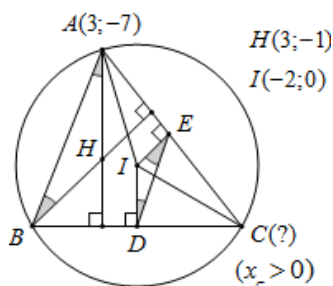
Ví dụ 7 (Đ – 2010 – CB): Cho tam giác ABC có đỉnh $A(3;-7)$, trực tâm là $H(3;-1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2;0)$. Xác định tọa độ đỉnh C , biết C có hoành độ dương.

Phân tích hướng giải: Ta cần tìm tọa độ điểm C . Với:

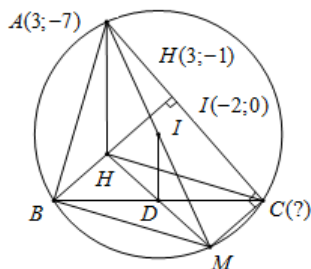
* $CI = IA = \sqrt{74}$.

* Nếu viết được phương trình cạnh BC ta sẽ chuyển bài toán về **Bài toán 1**. Lúc này việc viết phương trình BC ta chỉ cần tìm thêm tọa độ một điểm thuộc BC . Ở đây ta có thể tìm được hình chiếu D của I xuống BC hoặc chân đường cao K của A xuống BC (khi đó bài toán được giải quyết triệt để) qua các cách giải cụ thể sau:

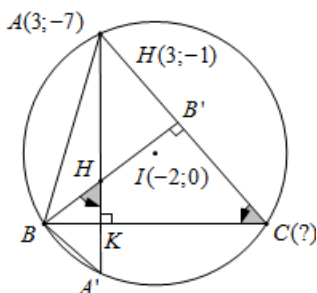
Giải



Cách 1.1



Cách 1.2



Cách 2

Cách 1: Ta sẽ đi tìm tọa độ hình chiếu D của I trên BC (hay chính là trung điểm của BC) qua 2 cách sau:

Cách 1.1

- + Gọi D, E lần lượt là trung điểm của BC và AC .

Khi đó : $\widehat{HAB} = \widehat{IDE}$ và $\widehat{HBA} = \widehat{IED}$ (góc có cạnh tương ứng song song)

Suy ra $\Delta HAB \sim \Delta IDE$ nên $\frac{HA}{ID} = \frac{AB}{DE} = 2 \Rightarrow \overline{AH} = 2\overline{ID}$ (*)

- + Có : $\overline{AH} = (0; 6)$. Gọi $D(x; y) \Rightarrow \overline{ID} = (x + 2; y)$,

$$\text{khi đó từ (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2(x + 2) \\ 6 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow D(-2; 3)$$

Cách 1.2

- + Kéo dài AI cắt đường tròn tại điểm M (khác A), khi đó I là trung điểm của AM nên suy ra $M(-7; 7)$

Mặt khác : $BH \parallel MC$ (cùng vuông góc với AC) và $CH \parallel MB$ (cùng vuông góc với AB), suy ra $MBHC$ là hình bình hành, khi đó D cũng là trung điểm của HM nên suy ra $D(-2; 3)$

(Trong Cách 1.2 ta có thể chỉ ra luôn được $\overline{AH} = 2\overline{ID}$ (*), sau khi có được D là trung điểm của HM).

Cách 2: Ta sẽ đi tìm tọa độ chân đường cao K của A xuống BC .

- + Ta có $A(3; -7)$ và $H(3; -1)$ nên đường thẳng AH có phương trình : $x = 3$

Kéo dài AH cắt đường tròn tại điểm H' (khác A). Gọi $H'(3; t) \in AH$ với $t \neq -7$, khi đó :

$$\begin{aligned} IH'^2 &= IA^2 = R^2 \Leftrightarrow 5^2 + t^2 = 5^2 + 7^2 \Leftrightarrow t = 7 \text{ hoặc } t = -7 \text{ (loại)} \\ &\Rightarrow H'(3; 7) \end{aligned}$$

- + Gọi $AH \cap BC = \{K\}$ và $BH \cap AC = \{B'\}$, suy ra $KHB'C$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{BHK}$ (cùng bù với $\widehat{B'HK}$).

Mặt khác: $\widehat{C} = \widehat{BH'A}$ (cùng chắn cung AB).

Suy ra $\widehat{BHK} = \widehat{BH'A}$ hay tam giác HBH' cân tại $B \Rightarrow K$ là trung điểm của $HH' \Rightarrow K(3; 3)$

(Như vậy khi biết tọa độ điểm D hoặc điểm K thì ta dễ dàng viết được phương trình BC . Ở phần trình bày tiếp theo ta lấy số liệu của điểm D (điểm K tương tự)).

- + BC đi qua D và có véc tơ pháp tuyến $\overline{AH} = (0; 6)$ nên phương trình BC là : $6(y - 3) = 0$ hay $y = 3$

- + Gọi $C(t; 3) \in BC$ (với $t > 0$), khi đó :

$$CI = IA = \sqrt{74} \Leftrightarrow CI^2 = 74 \Leftrightarrow (t+2)^2 + 3^2 = 74 \Leftrightarrow (t+2)^2 = 65$$

$$\Leftrightarrow t = -2 + \sqrt{65} \text{ hoặc } t = -2 - \sqrt{65} \text{ (loại)}$$

Vậy $C(-2 + \sqrt{65}; 3)$

Nhận xét:

Ví dụ này còn khá nhiều cách giải, trong đó có cả cách giải của Bộ Giáo Dục, các bạn có thể tham khảo ở tài liệu khác.

Ví dụ 8. Cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(4; 3)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\widehat{MAB} = 135^\circ$ và khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Phân tích hướng giải :

* Vì MA đi qua A , hợp với đường thẳng AB góc 45° (bù với góc 135°) nên ta sẽ viết được phương trình MA (các bạn sẽ được tìm hiểu kĩ ở **Bài toán 6**).

* Do $d(M, AB) = \frac{\sqrt{10}}{2}$ nên ta dễ dàng tính được độ dài đoạn $MA = \sqrt{5}$.

Như vậy điểm M đã được “lộ diện” theo góc nhìn của **Bài toán 1**. Cụ thể:

+ $M \in MA$: đã biết phương trình.

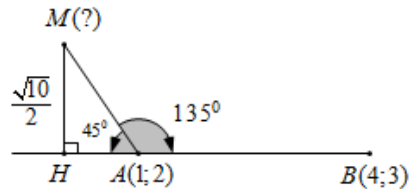
+ $MA = \sqrt{5}$

Giải

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của M

trên AB , khi đó: $MH = d(M, AB) = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \widehat{MAH} &= 180^\circ - \widehat{MAB} \\ &= 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ, \end{aligned}$$



suy ra tam giác MHA cân tại H , khi đó: $MA = \sqrt{2}MH = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{5}$

+ Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 1)$ nên $\overrightarrow{n_{AB}} = (1; -3)$, khi đó phương trình AB là:

$$x - 1 - 3 \cdot (y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 5 = 0$$

Gọi $\overrightarrow{n_{MA}} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$, khi đó

$$\cos(MA, AB) = \frac{|a - 3b|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow (a-3b)^2 = 5(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 2a^2 + 3ab - 2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2.\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 3.\frac{a}{b} - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = -2 \\ \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vì $\widehat{MAB} = 135^\circ$ nên $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB \cdot \cos 135^\circ < 0$

+ Với $\frac{a}{b} = -2$ chọn $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_{MA}} = (2; -1),$

khi đó AM có phương trình : $2x - y = 0$

Gọi $M(t; 2t) \in AM$, khi đó $MA = \sqrt{5} \Leftrightarrow MA^2 = 5$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2 + (2t-2)^2 = 5 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(0; 0) \\ M(2; 4) \end{cases}$$

Với $M(2; 4) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 5 > 0$ (loại)

Với $M(0; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-1; -2) \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -5 < 0$ (thỏa mãn).

+ Với $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_{MA}} = (1; 2),$

khi đó AM có phương trình : $x + 2y - 5 = 0$

Gọi $M(5-2t; t) \in AM$, khi đó :

$$MA = \sqrt{5} \Leftrightarrow MA^2 = 5 \Leftrightarrow (2t-4)^2 + (t-2)^2 = 5 \Leftrightarrow (t-2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M(3; 1) \\ M(-1; 3) \end{cases}$$

Với $M(3; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2; -1) \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 5 > 0$ (loại)

Với $M(-1; 3) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-2; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -5 < 0$ (thỏa mãn).

Vậy $M(0; 0)$ hoặc $M(-1; 3)$.

Chú ý: Ngoài cách giải ở ví dụ trên, các bạn có thể tham khảo thêm cách giải sau:

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên AB , khi đó :

$$MH = d(M, AB) = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Ta có $\widehat{MAH} = 180^\circ - \widehat{MAB} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$, suy ra tam giác MHA cân tại H , khi đó: $MA = \sqrt{2}MH = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{5}$

+ Gọi $M(x; y)$, suy ra $\overrightarrow{AM} = (x-1; y-2)$ với $\overrightarrow{AB} = (3; 1)$ khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 135^\circ \\ MA^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3 \cdot (x-1) + (y-2)}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} = \cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-1) + (y-2) = -5 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \end{cases}$$

+ Đặt $\begin{cases} a = x-1 \\ b = y-2 \end{cases}$, khi đó hệ có dạng: $\begin{cases} 3a + b = -5 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 - 3a \\ a^2 + 3a + 2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0; 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow M(-1; 3)$$

+ Vậy $M(0; 0)$ hoặc $M(-1; 3)$.

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có các cạnh AB và AD tiếp xúc với đường tròn (T) có phương trình $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$. Đường chéo AC cắt đường tròn (T) tại hai điểm M, N . Biết $M\left(-\frac{16}{5}; \frac{23}{5}\right)$, trục tung chứa điểm N và không song song với AD ; diện tích tam giác ADI bằng 10 và điểm A có hoành độ âm và nhỏ hơn hoành độ của D . Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.

Phân tích hướng giải:

* Với dữ kiện A có hoành độ âm gợi ý ta nên đi tìm điểm A trước. Nghĩa là ta sẽ cần tìm và khai thác các dữ kiện "có lợi" cho điểm A .

* Ta nhận thấy $Oy \cap (T) = \{N\} \Rightarrow$ tọa độ điểm N

+ Suy ra phương trình AC (đi qua hai điểm M, N đã biết tọa độ)

+ Do AB, AD tiếp xúc với đường tròn $(T) \Rightarrow AI = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Như vậy ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm A theo góc nhìn của **Bài toán 1**.

* Dữ kiện $S_{ADI} = 10$ và trục tung không vuông góc AD gợi ý điểm tiếp theo ta đi tìm sẽ là điểm D .

+ AD đi qua A và cách I một khoảng $R = 2 \Rightarrow$ phương trình AD (sẽ được tìm hiểu kĩ ở **Bài toán 6**)

$$+ AD = \frac{2S_{ADI}}{d(I, AD)} = 10$$

Như vậy điểm D tiếp tục được “tháo” theo góc nhìn **Bài toán 1**.

* Khi đã tìm được hai điểm A, D thì việc chỉ ra được tọa độ C, B là khá đơn giản. Sau đây là lời giải chi tiết:

Giải

+ Đường tròn (T) có tâm $I(-2;3)$

và bán kính $R = 2$.

+ Do $Oy \cap (T) = \{N\}$ nên tọa độ

điểm N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 0 \\ (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow N(0;3)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(\frac{16}{5}; -\frac{8}{5} \right) = \frac{8}{5}(2; -1) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AC}} = (1; 2)$$

Khi đó AC (đi qua M, N) có phương trình: $x + 2y - 6 = 0$

+ Gọi (T) tiếp xúc với AB, AD lần lượt tại P, Q (P, Q là các tiếp điểm)

Suy ra $APIQ$ là hình vuông nên $AI = IP\sqrt{2} = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

+ Gọi $A(6-2t; t)$ với $t > 3$ (do $x_A > 0$)

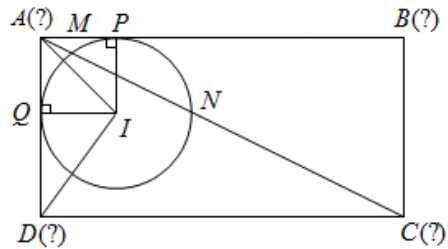
$$\text{Khi đó } AI^2 = 8 \Leftrightarrow (2t-8)^2 + (t-3)^2 = 8 \Leftrightarrow 5t^2 - 38t + 65 = 0 \Leftrightarrow t = 5$$

$$\text{hoặc } t = \frac{13}{5} \text{ (loại)} \Rightarrow A(-4; 5)$$

+ Gọi vectơ pháp tuyến của AD là $\overrightarrow{n_{AD}} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$; $b \neq 0$ (AD không song song với Oy)

$$\text{Suy ra phương trình } AD: a(x+4) + b(y-5) = 0 \Leftrightarrow ax + by + 4a - 5b = 0$$

$$IQ = d(I, AD) \Leftrightarrow 2 = \frac{|-2a + 3b + 4a - 5b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



$$\Leftrightarrow |a-b| = \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 2ab=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ hoặc } b=0 \text{ (loại)}$$

Với $a=0$, chọn $b=1$ ta được phương trình $AD: y-5=0$

$$+ S_{ADI} = \frac{1}{2} IQ \cdot AD \Leftrightarrow AD = \frac{2S_{ADI}}{IQ} = \frac{2 \cdot 10}{2} = 10$$

Gọi $D(m;5) \in AD$ với $m > -4$ khi đó:

$$AD^2 = 100 \Leftrightarrow (m+4)^2 = 100 \Leftrightarrow m=6 \text{ hoặc } m=-14 \text{ (loại)} \Rightarrow D(6;5)$$

+ Khi đó DC đi qua $D(6;5)$ và vuông góc với AD nên có phương trình:
 $x-6=0$

Khi đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-6=0 \\ x+2y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow C(6;0)$$

$$+ \text{ Ta có } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} x_B+4=0 \\ y_B-5=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=-4 \\ y_B=0 \end{cases} \Rightarrow B(-4;0)$$

Vậy $A(-4;5), B(-4;0), C(6;0), D(6;5)$.

Nhận xét:

Qua ví dụ trên ta nhận thấy, khi xem xét một bài toán ta cần đặt ra các câu hỏi “với dữ kiện bài toán những điểm nào có thể tìm được luôn tọa độ? , những đường thẳng nào cần thiết có thể viết được? “. Sau đó cần đặt tiếp câu hỏi “điểm nào nên tìm trước?”. Để trả lời cho câu hỏi này thì một kinh nghiệm là những điểm đề bài cho điều kiện (như hoành độ dương, tọa độ là các số nguyên...) hoặc đang nằm trên một đường thẳng đã biết phương trình (hoặc dễ dàng viết được) cùng với các dữ kiện “có lợi” cho nó về yếu tố định lượng như diện tích, khoảng cách...

Ví dụ 10 (Khối A, A1 – 2014). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có điểm M là trung điểm của đoạn AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $AN = 3NC$. Viết phương trình đường thẳng CD , biết rằng $M(1;2)$ và $N(2;-1)$.

Phân tích hướng giải:

* Yêu cầu bài toán viết phương trình CD , giúp ta hướng tới việc gắn kết các dữ kiện để tìm các yếu tố liên quan tới đường thẳng CD . Việc bài toán cho biết tọa độ hai điểm $M(1;2)$ và $N(2;-1)$ cùng với dữ kiện $AN = 3NC$, hướng ta nghĩ đến việc tìm tọa độ điểm E (với $MN \cap CD = \{E\}$). Điều này hoàn toàn có thể làm được

nhờ vào **Bài toán 5.1** khi ta suy luận được $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{NE}$ (các bạn sẽ được tìm hiểu ở phần sau trong **Bài toán 5.1**)

* Lúc này nếu tìm thêm được một điểm trên CD thì coi như bài toán giải quyết xong. Nhờ **Bài toán 1** ta sẽ nghĩ tới việc tìm điểm D . Cụ thể với kiến thức hình học sơ cấp ta sẽ chỉ ra được tam giác MND vuông cân tại N nên D thuộc đường thẳng ND (viết được phương trình) và cách N một khoảng không đổi MN ($DN = MN$). Như vậy bài toán đã chuyển về đúng nội dung **Bài toán 1** nên ta có lời giải sau:

Giải

+ Gọi $MN \cap CD = \{E\}$ và H là hình chiếu vuông góc của M trên CD .

Khi đó theo Talet ta có:

$$\frac{MN}{NE} = \frac{AN}{NC} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{NE} \quad (*)$$

+ Gọi $E(x; y)$ suy ra $\overrightarrow{NE} = (x-2; y+1)$ và với $\overrightarrow{MN} = (1; -3)$, nên:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3(x-2) \\ -3 = 3(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{7}{3}; -2\right)$$

+ Gọi d là đường thẳng đi qua N vuông góc với AB , cắt AB, CD lần lượt là I, J .

$$\text{Khi đó } \triangle MIN = \triangle NJD \Rightarrow \begin{cases} \widehat{INM} = \widehat{JDN} \Rightarrow \widehat{MND} = 90^\circ \\ DN = MN \Rightarrow DN^2 = 10 \end{cases} \quad (*),$$

suy ra $\overrightarrow{n_{DN}} = \overrightarrow{MN} = (1; -3)$.

Khi đó phương trình ND : $x - 3y - 5 = 0$

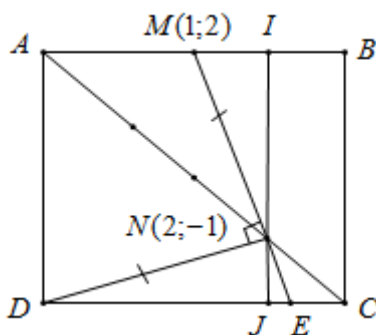
+ Do $D \in ND$ nên gọi $D(3t+5; t)$. Khi đó (*)

$$\Leftrightarrow (3t+3)^2 + (t+1)^2 = 10 \Leftrightarrow (t+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(5; 0) \\ D(-1; -2) \end{cases}$$

Đường thẳng CD đi qua $E\left(\frac{7}{3}; -2\right)$ và D nên với:

+ $D(5; 0)$ suy ra CD có phương trình: $3x - 4y - 15 = 0$

+ $D(-1; -2)$ suy ra CD có phương trình: $y = -2$ hay $y + 2 = 0$



4. CÁCH RA ĐỀ 4: Tìm điểm M gián tiếp thông qua một điểm khác thuộc **Bài toán 1** (nếu biết điểm thuộc **Bài toán 1** ta sẽ suy ra được tọa độ điểm M)

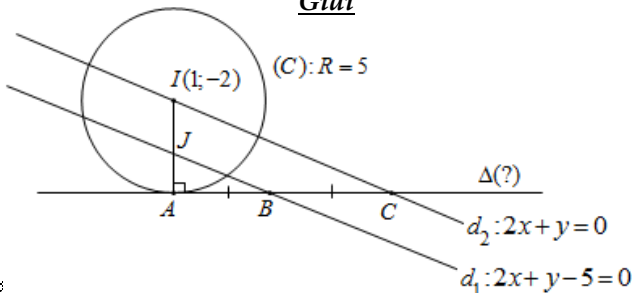
Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: 2x + y - 5 = 0$, $d_2: 2x + y = 0$. Lập phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C) tại A cắt d_1, d_2 lần lượt tại B và C sao cho B là trung điểm của đoạn thẳng AC.

Phân tích hướng giải:

* Như cách tư duy thông thường để viết đường thẳng Δ , ta sẽ nghĩ đến việc tìm một điểm mà Δ đi qua cùng với vecto pháp tuyến hoặc chỉ phương của nó. Lúc này có ba sự lựa chọn là điểm A, B hoặc C. Song cả ba điểm trên đều chưa biết tọa độ. Vậy câu hỏi lúc này là nên tìm tọa độ điểm nào? Ta nhận thấy hai điểm B, C có lợi thế là đều đang thuộc các đường thẳng đã biết phương trình, nhưng gần như đó là dữ kiện có lợi duy nhất cho B và C. Nghĩa là việc tìm tọa độ B, C là gặp "khó khăn". Chỉ còn một sự lựa chọn là điểm A. Có vẻ hợp lý, vì nếu tìm được tọa độ điểm A, ta sẽ tìm được vecto pháp tuyến của Δ là $\overrightarrow{IA}$ và suy ra phương trình Δ . Thế tìm điểm A bằng cách nào? Với dữ kiện bài toán ta chỉ có được $IA = R = 5$. Vậy việc tìm điểm A trực tiếp lúc này lại gặp trở ngại. Khi đứng trước những tình huống bí bách kiểu này, một kinh nghiệm là ta hãy chú ý tới những thông số, dữ kiện của đề bài và rất có thể trong đó đang ẩn chứa những yếu tố đặc biệt sẽ giúp ta tháo gỡ được "nút thắt" của bài toán. Nhận thấy, có hai yếu tố về số liệu khá đặc biệt là tâm I của (C) thuộc d_2 và $d_1 \parallel d_2$. Nghĩa là JB là đường trung bình trong tam giác IAC với $d_1 \cap IA = \{J\}$, suy ra J là trung điểm của IA. Nếu tìm được tọa độ điểm J ta sẽ suy ra tọa độ điểm A và viết được phương trình Δ . Vậy thay vì đi tìm A ta sẽ tìm gián tiếp thông qua điểm J.

*Ta nhận thấy: $J \in d_1$ và $JI = \frac{IA}{2} = \frac{R}{2}$. Như vậy lúc này đã "lộ diện" **Bài toán 1**, có nghĩa là ta sẽ tìm được tọa độ điểm J nhờ **Bài toán 1**.

Giải



+ Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$ thuộc d_2 và bán kính $R = 5$.

Gọi $d_1 \cap IA = \{J\}$.

Do $d_1 \parallel d_2$ nên JB là đường trung bình trong tam giác IAC , suy ra J là trung điểm của IA .

+ Gọi $J(t; 5 - 2t) \in d_1$, khi đó :

$$JI = \frac{IA}{2} = \frac{R}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow JI^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow (t-1)^2 + (2t-7)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(5t^2 - 30t + 50) = 25 \Leftrightarrow 4t^2 - 24t + 35 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \text{ hoặc } t = \frac{7}{2}$$

Do J là trung điểm của IA nên :

+ Với $t = \frac{5}{2} \Rightarrow J\left(\frac{5}{2}; 0\right) \Rightarrow A(4; 2)$, khi đó Δ đi qua $A(4; 2)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IA} = (3; 4)$

nên có phương trình : $3(x - 4) + 4(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 20 = 0$.

+ Với $t = \frac{7}{2} \Rightarrow J\left(\frac{7}{2}; -2\right) \Rightarrow A(6; -2)$, khi đó Δ đi qua $A(6; -2)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IA} = (5; 0)$ nên có phương trình : $5(x - 4) + 0.(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy Δ có phương trình : $3x + 4y - 20 = 0$ hoặc $x = 4$.

Nhận xét :

Ví dụ trên là kiểu bài toán không mẫu mực, nghĩa là với các cách tư duy thông thường (chưa để ý tới những số liệu cụ thể) ta khó có thể đưa ra được lời giải cho nó. Khi đó giải pháp cho những lớp bài toán trên là khai thác triệt để số liệu đặc biệt của đề bài, và chính số liệu này mới là "chìa khóa" giúp ta đi đến đáp số của bài toán. Các bạn sẽ tiếp tục tìm hiểu các lớp bài toán này qua các ví dụ tiếp theo.

Chú ý :

Ngoài cách giải theo góc nhìn của **Bài toán 1** ở trên, các bạn có tìm trực tiếp điểm A bằng cách sau :

+ Do $d_1 \parallel d_2$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng này bằng 5.

Do đó A sẽ thuộc đường thẳng d song song với d_1 và cách d_1 một khoảng bằng 5.

Suy ra đường thẳng $d : 2x + y - 10 = 0$ hoặc $d : 2x + y = 0$ (loại vì $d \equiv d_2$)

+ Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ x = 6 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(4; 2) \\ A(6; -2) \end{cases}$$

Ví dụ 2 (A – 2010 – CB). Cho hai đường thẳng $d_1: \sqrt{3}x + y = 0$ và $d_2: \sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A , cắt d_2 tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B . Viết phương trình của (T) , biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

Phân tích hướng giải :

* Như ta đã biết để viết phương trình của một đường tròn ta luôn cần hai yếu tố là tọa độ tâm và bán kính. Song với bài toán này nếu xác định được tọa độ tâm I của (T) thì ta sẽ tính được bán kính vì $R = d(I, d_1)$ và suy ra được phương trình (T) .

Vậy tìm I như thế nào ? I thuộc AC song chưa biết phương trình. Như vậy việc tìm trực tiếp điểm I là không khả thi. Lúc này ta sẽ nghĩ tới việc tìm điểm I gián tiếp thông qua các điểm có mối liên hệ với nó. Với dữ kiện ABC vuông tại B , suy ra AC là đường kính (I là trung điểm của AC). Vì vậy nếu biết tọa độ điểm A ta sẽ tìm được tọa độ điểm C (Vì khi đó ta viết được phương trình AC và $d_2 \cap AC = \{C\}$), từ đó ta suy ra được tọa độ điểm I .

* Xác định tọa độ điểm A nhờ **Bài toán 1**. Cụ thể:

+ $A \in d_1: \sqrt{3}x + y = 0$.

+ Có $d_1 \cap d_2 = \{O\}$ với $O(0;0)$ và khai thác dữ kiện $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ để tính $OA = ?$

Giải

+ Xét hệ: $\begin{cases} \sqrt{3}x + y = 0 \\ \sqrt{3}x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow O(0;0)$

là giao điểm của d_1 và d_2 .

Véc tơ pháp tuyến của d_1, d_2 lần lượt là: $\vec{n}_1 = (\sqrt{3}; 1), \vec{n}_2 = (\sqrt{3}; -1)$,

$$\text{suy ra : } \cos(d_1, d_2) = \frac{|\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{3+1} \cdot \sqrt{3+1}} = \frac{1}{2}$$

Mặt khác tam giác ABC vuông tại B ,
do đó $\angle AOB = 60^\circ \Rightarrow \angle BAC = 60^\circ$.

$$+ \text{ Xét tam giác } AOB \text{ và } AOC \text{ ta có: } \begin{cases} AB = OA \sin 60^\circ = \frac{OA\sqrt{3}}{2} \\ AC = OA \tan 60^\circ = OA\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{OA\sqrt{3}}{2} \cdot OA\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} OA^2.$$

$$\text{Do đó } S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

+ Gọi $A(t; -\sqrt{3}t)$ với $t > 0$, khi đó:

$$OA = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow OA^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow t^2 + 3t^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ hoặc } t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(\text{loại}) \Rightarrow A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -1\right)$$

Suy ra AC qua A , vuông góc d_1 có phương trình:

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{3}(y + 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 3y - 4 = 0$$

Khi đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - 3y - 4 = 0 \\ \sqrt{3}x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{\sqrt{3}} \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}; -2\right)$$

+ Vì tam giác ABC vuông tại B nên AC là đường kính.

Do đó đường tròn (T) cần viết có:

$$\text{Tâm } I\left(\frac{-1}{2\sqrt{3}}; -\frac{3}{2}\right) \text{ và bán kính } R = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}}{2} = 1$$

$$\text{Suy ra phương trình đường tròn } (T): \left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1.$$

Ví dụ 3 (B – 2011 – NC). Cho tam giác ABC có đỉnh $B\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D, E, F . Cho $D(3; 1)$ và đường thẳng EF có phương trình $y - 3 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A , biết A có tung độ dương.

Phân tích hướng giải:

Ta nhận thấy A đang nằm trên các đường AB, AD, AC . Như vậy lúc này việc tìm điểm A có thể đi theo những hướng sau: “Hướng 1: nếu viết được phương trình của một trong 3 đường trên và tính được độ dài đoạn AB (hoặc AD) thì ta sẽ chuyển nó về **Bài toán 1**” hoặc “Hướng 2: nếu biết được phương trình của hai trong 3 đường trên ta cũng suy ra được tọa độ điểm A ”. Để chọn hướng đi thích hợp ta cần khai thác các dữ kiện của bài toán. Với các số liệu của bài toán cho ta thấy Hướng 1 có vẻ không mấy khả thi, vì việc tính được độ dài AB (hoặc AD) sẽ gặp trở ngại. Lúc này ta nghĩ tới giải pháp thứ 2. Điểm B và D đều đã biết tọa độ nên ta sẽ nghĩ tới việc viết phương trình AB và AD . Ta sẽ phân tích chi tiết số liệu bài toán:

$$\begin{cases} B\left(\frac{1}{2}; 1\right) \\ D(3; 1) \end{cases} \Rightarrow \text{phương trình } BD: y = 1 \text{ song song với đường thẳng } EF: y - 3 = 0.$$

Khi đó ta sẽ chứng minh được tam giác ABC cân tại A . Do đó $AD \perp BC$. Như vậy ta viết được phương trình AD . Lúc này việc viết phương trình AB sẽ cần sự “trợ giúp” của điểm F . Và ta nhận thấy **Bài toán 1** sẽ cho ta được tọa độ điểm F . Cụ thể:

$$^* \quad F \in EF : y-3=0$$

$$* \quad FB = BD = \frac{5}{2}$$

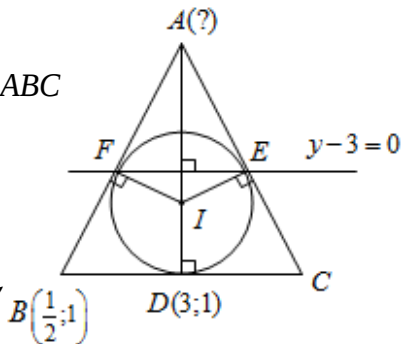
Sau đây là lời giải chi tiết của bài toán.

Giải

+ Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Khi đó $\begin{cases} ID \perp BC \\ IA \perp EF \end{cases} \quad (1)$

Với $\begin{cases} B\left(\frac{1}{2};1\right) \\ D(3;1) \end{cases} \Rightarrow$ phương trình $BD: y = 1$,



suy ra $BD \parallel EF$ hay $BC \parallel EF$ (2) (vì phương trình $EF: y-3=0$)

Từ (1) và (2) suy ra A, I, D thẳng hàng hay $AD \perp BC$, nên phương trình AD là: $x = 3$

+ Gọi $F(t; 3) \in EF$, khi đó theo tính chất tiếp tuyến ta có:

$$\begin{aligned} BF = BD &\Leftrightarrow BF^2 = BD^2 \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(-1; 3) \\ F(2; 3) \end{cases} \end{aligned}$$

+ Với $F(-1; 3) \Rightarrow \overrightarrow{BF} = \left(-\frac{3}{2}; 2\right) \Rightarrow \overrightarrow{u_{BF}} = (4; 3)$, khi đó phương trình BF là:

$$4(x+1) + 3(y-3) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 5 = 0$$

Do $BF \cap AD = \{A\}$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{7}{3} < 0 \end{cases} \text{ (loại)}$$

+ Với $F(2; 3) \Rightarrow \overrightarrow{BF} = \left(\frac{3}{2}; 2\right) \Rightarrow \overrightarrow{u_{BF}} = (4; -3)$, khi đó phương trình BF là:

$$4(x-2) - 3(y-3) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y + 1 = 0$$

Do $BF \cap AD = \{A\}$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x - 3y + 1 = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(3; \frac{13}{3}\right) \text{ Vậy } A\left(3; \frac{13}{3}\right)$$

Bình luận sau Bài Toán 1:

Như vậy trong các đề thi Quốc Gia, nhiệm vụ của người ra đề là sẽ làm “mờ” bài toán gốc của chúng ta, bằng các dữ kiện và số liệu đi kèm. Nhiệm vụ của các bạn là dùng các kiến thức cơ bản để cắt nghĩa bài toán, làm cho bài toán gốc “hiện nguyên hình”. Qua **Bài Toán 1** các bạn thấy phần nào tầm “quan trọng” và tính hiệu quả của nó trong việc giải quyết các bài toán tìm điểm và các bài toán liên quan khác... Nó giúp các bạn biết cách đặt ra các câu hỏi hướng vào các đối tượng và dữ kiện của đề bài mà ta đang cần và có được định hướng để tư duy và tháo gỡ bài toán. Nếu biết cách “làm chủ” **Bài toán 1** có nghĩa là các bạn đang có trong tay một công cụ đơn giản nhưng khá hiệu quả và việc đưa ra đáp số chính xác cho các bài toán không có gì khó khăn với các bạn. Chúng ta còn khá nhiều công cụ hữu hiệu khác. Các bạn sẽ tiếp tục đi tìm hiểu thông qua 9 bài toán tiếp theo.

E. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường tròn (C') có diện tích gấp bốn lần diện tích đường tròn (C) và (C') đồng tâm với (C) . Biết đường thẳng $d: 2x - y + 3 = 0$ đi qua điểm M .

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $C(2; -5)$, đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 4 = 0$. Tìm trên đường thẳng Δ hai điểm A và B đối xứng nhau qua điểm $I\left(2; \frac{5}{2}\right)$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 15.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có phương trình cạnh $AB: 4x + 3y - 24 = 0$ và $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$ là giao điểm hai đường chéo. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết đỉnh A có hoành độ dương.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ biết phương trình của một đường chéo là $3x + y - 7 = 0$, điểm $B(0; -3)$, diện tích hình thoi bằng 20. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thoi.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(0; 5)$, $B(2; 3)$ và có bán kính $R = \sqrt{10}$.

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ và $M(0; 1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết M là trung điểm của cạnh AB và A có hoành độ dương.

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC đều, biết điểm $A(2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$ và đường thẳng $BC: x - y = 0$. Tìm tọa độ B và C .

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(-1; 2)$ và đường thẳng $\Delta: x - 2y + 3 = 0$. Trên đường thẳng Δ lấy hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại C và $AC = 3BC$. Tìm tọa độ đỉnh B .

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x - y - 3 = 0$ và điểm $A(2; 6)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết rằng hai điểm B, C thuộc đường thẳng d , tam giác ABC vuông tại A và có diện tích bằng $\frac{35}{\sqrt{2}}$.

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ và $A(-1; 2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và DC , E là giao điểm của BN và CM . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác BME biết BN nằm trên đường thẳng $2x + y - 8 = 0$ và B có hoành độ lớn hơn 2.

Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(-1; 3)$ và đường thẳng Δ có phương trình $x - 2y + 2 = 0$. Dựng hình vuông $ABCD$ sao cho hai đỉnh B, C nằm trên Δ . Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D biết C có tung độ dương.

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 12, tâm của hình chữ nhật là điểm $I\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và điểm $M(3; 0)$ là trung điểm của cạnh AD . Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật, biết A có tung độ dương.

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình $AD: 2x + y - 1 = 0$, điểm $I(-3; 2)$ thuộc đoạn BD sao cho $IB = 2ID$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết D có hoành độ dương và $AD = 2AB$.

Bài 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh $A(0; 5)$ và một đường chéo nằm trên đường thẳng có phương trình $2x - y = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông, biết B có hoành độ lớn hơn 2.

Bài 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có đáy lớn CD . Biết $BC = 2AB = 2AD$, trung điểm của BC là điểm $M(1; 0)$, đường thẳng AD có phương trình $x - \sqrt{3}y + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm A biết A có tung độ nguyên.

Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A , biết $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $M(1; 2)$ là trung điểm của cạnh AC . Đường thẳng BC có phương trình $x - y + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm A biết điểm C có hoành độ dương.

Bài 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ và đường thẳng $d: 2x + y - 3 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh hình vuông $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (C) biết A nằm trên d và có hoành độ nguyên.

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: x - 2y + 5 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$. Qua điểm M thuộc Δ , kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (A, B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M , biết độ dài đoạn $AB = 2\sqrt{5}$.

Bài 19. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') tiếp xúc với hai trục tọa độ, đồng thời tiếp xúc ngoài với đường tròn (C) . Biết tâm của (C') có hoành độ và tung độ cùng dấu.

Bài 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 12 và có tâm I là giao điểm của hai đường thẳng $d_1: x - y - 3 = 0$ và $d_2: x + 3y - 9 = 0$. Trung điểm của cạnh AD là giao điểm của d_1 với trục hoành. Xác định tọa độ bốn đỉnh của hình chữ nhật, biết A có tung độ dương.

Bài 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trung điểm cạnh AB là $M(-1; 2)$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là $I(2; -1)$. Đường cao của tam giác kẻ từ A có phương trình $\Delta: 2x + y + 1 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C .

Bài 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: x + y + 3 = 0$, $d_2: x - y + 1 = 0$ và điểm $M(1; 2)$. Viết phương trình đường tròn đi qua M , cắt d_1 tại hai điểm A và B sao cho $AB = 8\sqrt{2}$ và đồng thời tiếp xúc với d_2 .

Bài 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có $AB: 4x - 3y - 4 = 0$, $CD: 4x - 3y - 18 = 0$ và tâm I thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông biết A có hoành độ nhỏ hơn 1.

Bài 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn (C_1) có phương trình $x^2 + y^2 = 25$, điểm $M(1; -2)$. Đường tròn (C_2) có bán kính bằng $2\sqrt{10}$. Tìm tọa độ tâm của đường tròn (C_2) , sao cho (C_2) cắt (C_1) theo một dây cung qua M có độ dài nhỏ nhất.

Bài 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là điểm $I(4; 0)$ và phương trình hai đường thẳng lần lượt chứa đường cao và đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác là $d_1: x + y - 2 = 0$ và $d_2: x + 2y - 3 = 0$. Viết phương trình các đường thẳng chứa cạnh của tam giác ABC biết B có tung độ dương.

Bài 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có $A(1;0)$, $B(3;2)$ và $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Xác định tọa độ hai đỉnh C và D , biết D có tung độ dương.

Bài 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(2;1)$ và $AC = 2BD$. Điểm $M\left(0; \frac{1}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB , điểm $N(0;7)$ thuộc đường thẳng CD . Tìm tọa độ đỉnh B biết B có hoành độ dương.

Bài 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y+2)^2 = \frac{27}{2}$ có tâm I và đường thẳng $d: x+y+5=0$. Từ điểm M thuộc d kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) (A, B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M sao cho diện tích tam giác IAB bằng $\frac{27\sqrt{3}}{8}$ và độ dài đoạn AB nhỏ nhất.

Bài 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường $(C): x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$ và các điểm $A(2;-3)$, $B(4;1)$. Tìm tọa độ điểm M trên đường tròn sao cho tam giác MAB cân tại M và có diện tích lớn nhất.

Bài 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $OABC$ có đỉnh $A(3;4)$ và điểm B có hoành độ âm. Gọi E, F theo thứ tự là các giao điểm của đường tròn (C) ngoại tiếp hình vuông $OABC$ với trục hoành và trục tung (E và F khác gốc tọa độ O). Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho tam giác MEF có diện tích lớn nhất.

Bài 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(0;2)$ và đường thẳng $\Delta: x-2y+2=0$. Tìm trên Δ hai điểm M, N sao cho tam giác AMN vuông tại A và $AM = 2AN$, biết điểm N có tung độ là số nguyên.

Bài 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A , có đỉnh $C(-4;1)$, phân giác trong góc A có phương trình $x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng BC , biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.

Bài 33. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ và điểm $A(-1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của còn lại của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong (C) và có diện tích bằng 10.

Bài 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn và $CB = CD$. Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DE = AB$. Phương trình cạnh $BC: x - 3y + 13 = 0$, phương trình $AC: x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A, B biết A có hoành độ nhỏ hơn 3 và $E(14; 1)$.

Bài 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(T): x^2 + y^2 - 4y - 4 = 0$ và cạnh AB có trung điểm M thuộc đường thẳng $d: 2x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết điểm M có hoành độ không lớn hơn 1.

Bài 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có diện tích bằng 4 với $A(3; -2), B(1; 0)$. Tìm tọa độ đỉnh C biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác bằng 2 và C có tung độ dương.

Bài 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trực tâm $H(2; 1)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp $I(1; 0)$. Trung điểm BC nằm trên đường thẳng có phương trình $x - 2y - 1 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh B, C biết rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC đi qua điểm $E(6; -1)$ và hoành độ điểm B nhỏ hơn 4.

Bài 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(1; 1), B(2; 3)$ và C thuộc đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$. Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC , biết diện tích tam giác ABC bằng 0,5 và điểm C có hoành độ là một số nguyên.

Bài 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: 2x - y - 1 = 0$ và $d_2: 2x + y - 3 = 0$. Gọi I là giao điểm của d_1 và d_2 ; A là điểm thuộc d_1 có hoành độ dương. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua A , cắt d_2 tại B sao cho diện tích tam giác IAB bằng 6 và $IB = 3IA$.

Bài 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có phương trình đường cao kẻ từ đỉnh A là $3x - y + 5 = 0$, trực tâm $H(-2; -1)$ và $M\left(\frac{1}{2}; 4\right)$ là trung điểm của cạnh AB . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết $BC = \sqrt{10}$ và B có hoành độ nhỏ hơn hoành độ của C .

Bài 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $\Delta_1: x - y + 15 = 0$ và $\Delta_2: 3x - y - 10 = 0$. Các đường tròn (C_1) và (C_2) có bán kính bằng nhau, đều có tâm nằm trên Δ_1 và cắt nhau tại hai điểm $A(10; 20)$ và B . Đường thẳng Δ cắt (C_1) và (C_2) lần lượt tại C và D (khác A). Tìm tọa độ các đỉnh

của tam giác BCD , biết diện tích tam giác BCD bằng 120 và tâm của đường tròn (C_1) có hoành độ không dương.

Bài 42. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: \sqrt{3}x - y = 0$. Lập phương trình đường tròn tiếp xúc với Δ tại A , cắt trục tung tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại A và có chu vi bằng $3 + \sqrt{3}$.

Bài 43. Cho hai điểm $A(0;1)$, $B(2;-1)$ và hai đường thẳng $d_1: (m-1)x + (m-2)y + 2 - m = 0$, $d_2: (2-m)x + (m-1)y + 3m - 5 = 0$. Gọi P là giao điểm của d_1 và d_2 . Tìm m sao cho $PA + PB$ lớn nhất.

Bài 44. Cho tam giác nhọn ABC . Đường thẳng chứa trung tuyến kẻ từ đỉnh A và đường thẳng BC lần lượt có phương trình là $3x + 5y - 8 = 0$ và $x - y - 4 = 0$. Đường thẳng qua A vuông góc với đường thẳng BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là $D(4;-2)$. Viết phương trình các đường thẳng AB, AC biết rằng hoành độ của điểm B không lớn hơn 3.

Bài 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 25$, đường thẳng AC đi qua điểm $K(2;1)$. Gọi M, N lần lượt là chân đường cao kẻ từ đỉnh B và C . Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC , biết phương trình đường thẳng MN là $4x - 3y + 10 = 0$ và điểm A có hoành độ âm.

Bài 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(-1;-3)$. Biết rằng trục tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt là $H(1;-1)$ và $I(2;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC .

Bài 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD . Biết tọa độ $B(3;3), C(5;-3)$. Giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x + y - 3 = 0$. Xác định tọa độ còn lại của hình thang $ABCD$ để $CI = 2BI$, tam giác ABC có diện tích bằng 12, điểm I có hoành độ dương và điểm A có hoành độ âm.

F. GIẢI BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1.

+ Đường tròn (C) có tâm $I(2;3)$ và bán kính $R=5$.

Vì (C') có diện tích gấp bốn lần diện tích đường tròn (C) và (C') đồng tâm với (C) nên (C') có tâm $I(2;3)$ và bán kính với

$$\pi R'^2 = 4\pi R^2 \Leftrightarrow R' = 2R = 10$$

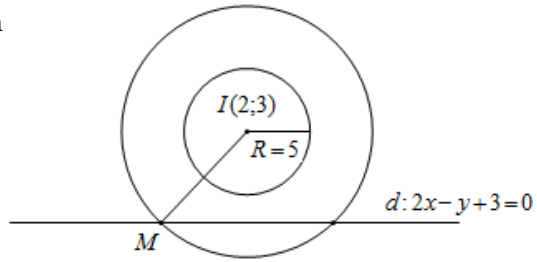
Suy ra $IM = R' = 10$

+ Gọi $M(t; 2t+3) \in d$, khi đó:

$$IM = 10 \Leftrightarrow IM^2 = 100 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (2t)^2 = 100 \Leftrightarrow 5t^2 - 4t - 96 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = \frac{24}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(-4; -5) \\ M\left(\frac{24}{5}; \frac{63}{5}\right) \end{cases}$$

+ Vậy $M(-4; -5)$ hoặc $M\left(\frac{24}{5}; \frac{63}{5}\right)$



Bài 2.

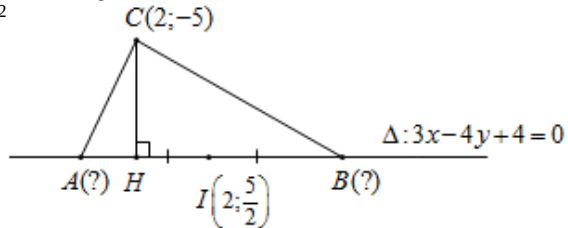
+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên Δ , khi đó:

$$CH = d(C, \Delta) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot (-5) + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 6$$

+ Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} CH \cdot AB$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{2S_{ABC}}{CH} = \frac{2 \cdot 15}{6} = 5$$

$$\Rightarrow AI = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2} \text{ (do } I \text{ là trung điểm của } AB \text{)}$$



+ Gọi $A(4t; 1+3t) \in \Delta$, khi đó:

$$AI^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow (4t-2)^2 + \left(3t - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow 25t^2 - 25t = 0$$

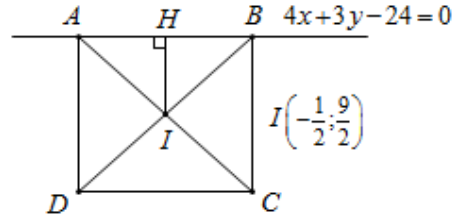
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0;1) \Rightarrow B(4;4) \\ A(4;4) \Rightarrow B(0;1) \end{cases}$$

+ Vậy $A(0;1), B(4;4)$ hoặc $A(4;4), B(0;1)$

Bài 3.

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB ta có:

$$IH = d(I, AB) = \frac{\left| -2 + \frac{27}{2} - 24 \right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{5}{2}$$



+ Tam giác AHI vuông cân tại H nên $AI = \sqrt{2}IH = \frac{5\sqrt{2}}{2} = BI$

Suy ra A, B thuộc đường tròn:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 9y + 8 = 0$$

+ Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

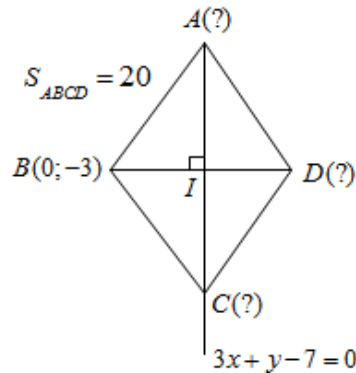
$$\begin{cases} 4x + 3y - 24 = 0 \\ x^2 + y^2 + x - 9y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ x = 0 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(3; 4) \\ B(0; 8) \end{cases} \quad (\text{vì } x_A > 0)$$

+ Do I là trung điểm của AC và BD nên suy ra $C(-4; 5), D(-1; 1)$.

Bài 4.

+ Vì $B(0; -3)$ không thuộc đường chéo $3x + y - 7 = 0$ nên $3x + y - 7 = 0$ là phương trình của AC .

+ Khi đó BD có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{BD} = \vec{u}_{AC} = (1; -3)$ đi qua $B(0; -3)$ nên có BD phương trình: $x - 3y - 9 = 0$



Gọi $AC \cap BD = \{I\}$ nên tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x + y - 7 = 0 \\ x - 3y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow I(3; -2) \Rightarrow D(6; -1)$$

+ Ta có:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = BI \cdot AC \Rightarrow AC = \frac{S_{ABCD}}{BI} = \frac{20}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = 2\sqrt{10} \Rightarrow AI = \sqrt{10}$$

Gọi $A(t; 7-3t) \in AC$, khi đó: $AI^2 = 10 \Leftrightarrow (t-3)^2 + (9-3t)^2 = 10$.

$$\Leftrightarrow (t-3)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t=4 \\ t=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(4; -5) \Rightarrow C(2; 1) \\ A(2; 1) \Rightarrow C(4; -5) \end{cases}$$

(vì I là trung điểm AC)

+ Vậy $A(4; -5), C(2; 1), D(6; -1)$ hoặc $A(2; 1), C(4; -5), D(6; -1)$.

Bài 5.

+ Ta có $\overline{AB} = (2; -2) = 2(1; -1)$ và $M(1; 4)$ là trung điểm của AB

Khi đó phương trình đường trung trực của AB là $\Delta: x - y + 3 = 0$

+ Do (C) đi qua hai điểm $A(0; 5), B(2; 3)$ nên $IA = IB \Leftrightarrow I \in \Delta \Rightarrow I(t; t+3)$

+ Khi đó: $IA = R \Leftrightarrow IA^2 = R^2 \Leftrightarrow t^2 + (t-2)^2 = 10$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(-1; 2) \\ I(3; 6) \end{cases}$$

+ Vậy phương trình đường tròn (C) là:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10 \text{ hoặc } (x-3)^2 + (y-6)^2 = 10.$$

Chú ý: có thể tìm I bằng việc gọi $I(x; y)$ và giải hệ: $\begin{cases} IA = R \\ IB = R \end{cases}$.

Bài 6.

+ Đường tròn (C) có tâm

$I(-1; 2)$ và bán kính

$$R = IA = 2$$

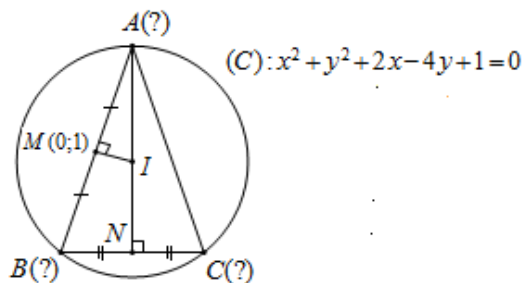
Do đó AB đi qua $M(0; 1)$

và nhận $\overline{IM} = (1; -1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $x - y + 1 = 0$

+ Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 2 \\ x = -1; y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1; 2) \\ B(-1; 0) \end{cases}$$

(do $x_A > 0$)



+ Ta có $\overline{IA} = (2; 0) = 2(1; 0)$ nên phương trình $AI : y - 2 = 0$ và phương trình $BC : x + 1 = 0$

Gọi $IA \cap BC = \{N\}$, suy ra tọa độ điểm N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y - 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow N(-1; 2)$$

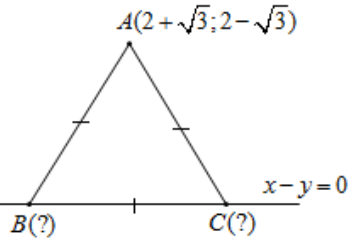
Do $\triangle ABC$ cân tại A nên N là trung điểm của $BC \Rightarrow C(-1; 4)$

+ Vậy $A(1; 2), B(-1; 0), C(-1; 4)$.

Bài 7.

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC , khi đó:

$$AH = d(A, BC) = \frac{|2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}|}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$



+ Do tam giác ABC đều nên $AB = AC = \frac{AH}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{2}$

Suy ra B, C thuộc đường tròn tâm A bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Khi đó tọa độ B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x - 2 - \sqrt{3})^2 + (y - 2 + \sqrt{3})^2 = 8 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^2 - 4x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = -1 \\ x = y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-1; -1), C(3; 3) \\ B(3; 3), C(-1; -1) \end{cases}$$

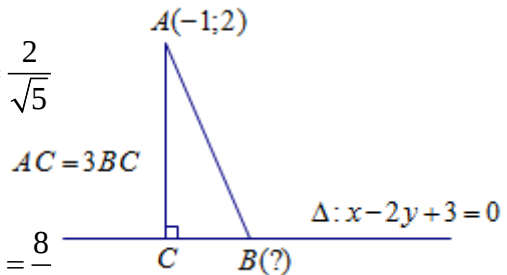
+ Vậy $B(-1; -1), C(3; 3)$ hoặc $B(3; 3), C(-1; -1)$.

Bài 8.

+ Ta có $AC = d(A, \Delta) = \frac{|-1 - 4 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow CB = \frac{AC}{3} = \frac{2}{3\sqrt{5}}$$

+ Suy ra $AB^2 = AC^2 + CB^2 = \frac{4}{5} + \frac{4}{45} = \frac{8}{9}$



+ Gọi $B(2t - 3; t) \in \Delta$, khi đó :

$$AB^2 = \frac{8}{9} \Leftrightarrow (2t-2)^2 + (t-2)^2 = \frac{8}{9} \Leftrightarrow 45t^2 - 108t + 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{3} \\ t = \frac{16}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right) \\ B\left(-\frac{13}{15}; \frac{16}{15}\right) \end{cases}$$

Vậy $B\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ hoặc $B\left(-\frac{13}{15}; \frac{16}{15}\right)$.

Bài 9.

+ Gọi (T) là đường tròn cần lập có tâm I và bán kính R .

+ Vì tam giác ABC vuông tại A nên I là trung điểm của BC

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC

$$\Rightarrow AH = d(A, BC) = \frac{|2-6-3|}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Suy ra } BC = \frac{2S_{ABC}}{IH} = \frac{2 \cdot \frac{35}{\sqrt{2}}}{\frac{7}{\sqrt{2}}} = 10 \Rightarrow R = \frac{BC}{2} = 5 = IA$$

+ Gọi $I(t; t-3) \in d$, khi đó

$$IA^2 = 25 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (t-9)^2 = 25 \Leftrightarrow t^2 - 11t + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(5; 2) \\ I(6; 3) \end{cases}$$

+ Vậy đường tròn (T) cần lập là: $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 25$

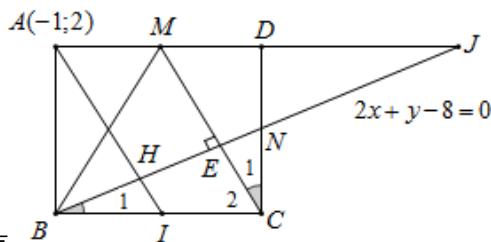
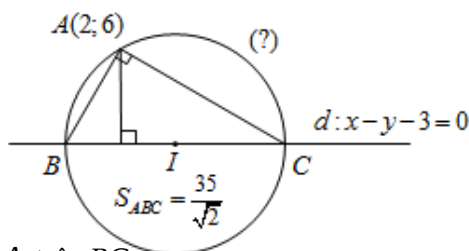
$$\text{hoặc } (x-6)^2 + (y-3)^2 = 25.$$

Bài 10.

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BN , khi đó:

$$AH = d(A, BN) = \frac{|-2+2-8|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

Gọi $AH \cap BC = \{I\}$, suy ra I là trung điểm của BC



$$\text{Đặt } AB = a \Rightarrow AI = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Ta có } AB^2 = AH \cdot AI \Leftrightarrow a^2 = \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow a = 4 \text{ hay } AB = 4$$

+ Gọi $B(t; 8-2t) \in BN$ với $t > 2$, khi đó:

$$AB^2 = 16 \Leftrightarrow (t+1)^2 + (6-2t)^2 = 4 \Leftrightarrow 5t^2 - 22t + 21 = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

$$\text{hoặc } t = \frac{7}{5} \text{ (loại)} \Rightarrow B(3; 2)$$

+ AD đi qua A vuông góc với AB nên có phương trình: $x = -1$

Gọi $AD \cap BN = \{J\}$, suy ra tọa độ điểm J là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = -1 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow J(-1; 10)$$

Mặt khác D là trung điểm của $AJ \Rightarrow D(-1; 6) \Rightarrow M(-1; 4)$ (do M là trung điểm của AD)

+) Do $ABCD$ là hình vuông và M, N lần lượt là trung điểm của $AD, DC \Rightarrow \triangle BCN = \triangle CDM \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{B}_1$

Mà $\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{C}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CEB} = 90^\circ$ hay tam giác BME vuông tại E , nên tâm đường tròn ngoại tiếp K là trung điểm của BM

$$\text{Suy ra } \begin{cases} K(1; 3) \\ R = KB = \sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác BME là: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$

Bài 11.

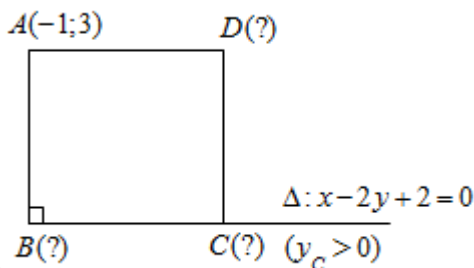
+ AB đi qua $A(-1; 3)$ và vuông góc với Δ nên có phương trình: $2x + y - 1 = 0$

Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow B(0; 1)$$

+ Gọi $C(2t-2; t) \in \Delta$ (với $t > 0$) khi đó:

$$BC^2 = AB^2 \Leftrightarrow (2t-2)^2 + (t-1)^2 = 1^2 + 2^2 \Leftrightarrow t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 2$$



hoặc $t = 0$ (loại) $\Rightarrow C(2; 2)$

+ Vì $ABCD$ là hình vuông nên:

$$\overline{CD} = \overline{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 2 = -1 \\ y_D - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 4 \end{cases} \Rightarrow D(1; 4)$$

+ Vậy $B(0; 1), C(2, 2)$ và $D(1; 4)$.

Bài 12.

+ Ta có $AB = 2MI$

$$= 2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{S_{ABCD}}{AB} = \frac{12}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow AM = \frac{AD}{2} = \sqrt{2}$$

+ AD và vuông góc với MI nên có phương trình: $x + y - 3 = 0$

+ Gọi $A(t; 3-t) \in AD$ với $t < 3$, khi đó:

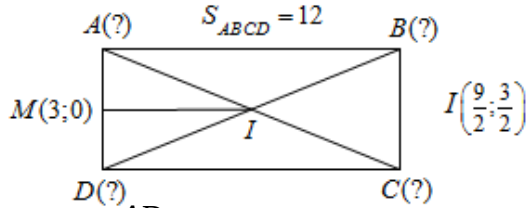
$$AM^2 = 2 \Leftrightarrow (t-3)^2 + (t-3)^2 = 2 \Leftrightarrow (t-3)^2 = 1 \Leftrightarrow t = 2$$

hoặc $t = 4$ (loại) $\Rightarrow A(2; 1)$

+ Do M là trung điểm của $AD \Rightarrow D(4; -1)$

+ I lần lượt là trung điểm của AC và BD nên suy ra $C(7; 2)$ và $B(5; 4)$

Vậy $A(2; 1), B(5; 4), C(7; 2)$ và $D(4; -1)$.



Bài 13.

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AD , khi đó:

$$IH = d(I, AD) = \frac{|2 \cdot (-3) + 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$$

Vì $IH \parallel BA$ nên theo định lý Ta - let ta có:

$$\frac{HD}{HI} = \frac{AD}{AB} = 2 \Rightarrow HD = 2HI = 2\sqrt{5}$$

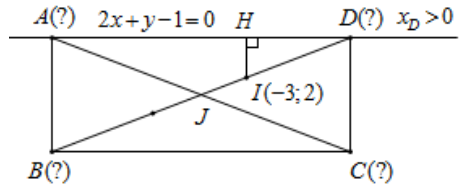
+ Xét tam giác IHD : $DI^2 = IH^2 + HD^2 = 5 + 20 = 25$ (*)

Gọi $D(t; 1-2t)$ với $t > 0$, khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow (t+3)^2 + (2t+1)^2 = 25 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

hoặc $t = -3$ (loại) $\Rightarrow D(1; -1)$

+ Gọi $B(a; b) \Rightarrow \overline{IB} = (a+3; b-2)$. Ta có $\overline{IB} = 2\overline{DI}$ (với $\overline{DI} = (-4; 3)$)



$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3=-8 \\ b-2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-11 \\ b=8 \end{cases} \Rightarrow B(-11;8)$$

AB đi qua $B(-11;8)$ nhận $\overrightarrow{u_{AD}} = (1;-2)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $x - 2y + 27 = 0$

+ Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 27 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 11 \end{cases} \Rightarrow A(-5;11)$$

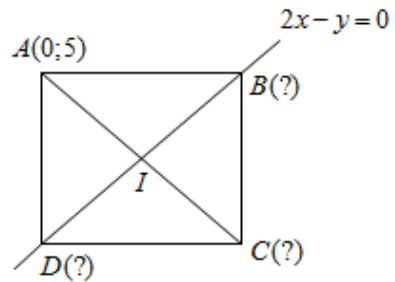
+ Gọi J là trung điểm của $BD \Rightarrow J\left(-5; \frac{7}{2}\right) \Rightarrow C(-5; -4)$ (vì J cũng là trung điểm của AC).

Vậy $A(-5;11), B(-11;8), C(-5; -4), D(1; -1)$.

Bài 14.

+ Vì $A(0;5)$ không thuộc đường thẳng $2x - y = 0$ nên BD có phương trình $2x - y = 0$

+ AC đi qua A vuông góc với BD nên có phương trình $x + 2y - 10 = 0$



Gọi $AC \cap BD = \{I\}$ nên tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 2y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow I(2;4)$$

Suy ra $C(4;3)$ (do I là trung điểm của AC)

+ Gọi $B(t; 2t) \in BD$ với $t > 2$, khi đó :

$$IB^2 = IA^2 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (2t-4)^2 = 5 \Leftrightarrow (t-2)^2 = 1 \Leftrightarrow t = 3$$

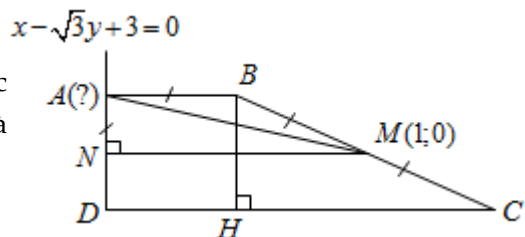
hoặc $t = 1$ (loại) $\Rightarrow B(3;6)$

Do I là trung điểm của BD nên $D(1;2)$.

+ Vậy $B(3;6), C(4;3), D(1;2)$.

Bài 15.

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên DC , khi đó $ABHD$ là hình vuông.



$$\text{Đặt } AB = BH = HD = AD = a \Rightarrow BC = 2a \Rightarrow HC = \sqrt{BC^2 - BH^2} = a\sqrt{3} \\ \Rightarrow DC = a + a\sqrt{3}$$

+ Gọi N là hình chiếu vuông góc của M trên AD , suy ra N là trung điểm của AD và $MN = d(M, AD) = \frac{|4|}{2} = 2$

Mặt khác MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên:

$$AB + DC = 2MN \Leftrightarrow a + a + a\sqrt{3} = 4 \Leftrightarrow a = \frac{4}{2 + \sqrt{3}} = 8 - 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AN = \frac{a}{2} = 4 - 2\sqrt{3}$$

+ Xét tam giác vuông AMN ta có:

$$AM = \sqrt{AN^2 + MN^2} = \sqrt{(4 - 2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{32 - 16\sqrt{3}}$$

+ Gọi $A(\sqrt{3}t - 3; t) \in AD$ với $t \in \mathbb{Z}$, khi đó:

$$AM^2 = 32 - 16\sqrt{3} \Leftrightarrow (\sqrt{3}t - 4)^2 + t^2 = 32 - 16\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{3}t - 4 + 4\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ hoặc } t = 2\sqrt{3} - 2 \text{ (loại)}$$

Vậy $A(2\sqrt{3} - 3; 2)$.

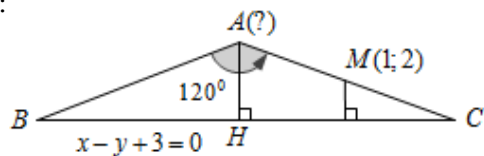
Bài 16.

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC

Do M là trung điểm của AC nên:

$$AH = d(A, BC) = 2d(M, BC)$$

$$= 2 \cdot \frac{|1 - 2 + 3|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$



+ Vì ABC cân tại A nên $\widehat{HAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = 60^\circ$.

$$\text{Xét tam giác vuông } AHC \text{ ta có: } AC = \frac{AH}{\cos 60^\circ} = 4\sqrt{2} \Rightarrow MC = \frac{AC}{2} = 2\sqrt{2}$$

+ Gọi $C(t; t+3) \in BC$ với $t > 0$, khi đó:

$$MC^2 = 8 \Leftrightarrow (t-1)^2 + (t+1)^2 = 8 \Leftrightarrow t^2 = 3 \Leftrightarrow t = \sqrt{3}$$

$$\text{hoặc } t = -\sqrt{3} \text{ (loại)} \Rightarrow C(\sqrt{3}; 3 + \sqrt{3})$$

+ Mặt khác M là trung điểm của AC nên suy ra $A(2-\sqrt{3}; 1-\sqrt{3})$.

Bài 17.

+ Đường tròn (C) có tâm $I(4; -3)$ và bán kính $R = 2$. $d: 2x + y - 3 = 0$

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB , suy ra tam giác IHA vuông cân tại H nên:

$$AI = IH\sqrt{2} = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

+ Gọi $A(t; 3-2t) \in d$, khi đó:

$$AI^2 = 8 \Leftrightarrow (t-4)^2 + (2t-6)^2 = 8 \Leftrightarrow 5t^2 - 32t + 44 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

$$\text{hoặc } t = \frac{22}{5} \text{ (loại)} \Rightarrow A(2; -1)$$

Vì I là trung điểm của AC nên $C(6; -5)$.

+ BD đi qua $I(4; -3)$, nhận $\overrightarrow{AC} = (4; -4) = 4(1; -1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $x - y - 7 = 0$

Mà $IB = ID = IA = 2\sqrt{2}$ nên B, D thuộc đường tròn có phương trình:

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 8$$

Khi đó tọa độ B, D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 7 = 0 \\ (x-4)^2 + (y+3)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 7 \\ (x-4)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ x = 6 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(2; -5), D(6; -1) \\ B(6; -1), D(2; -5) \end{cases}$$

Vậy $A(2; -1), B(2; -5), C(6; -5), D(6; -1)$

hoặc $A(2; -1), B(6; -1), C(6; -5), D(2; -5)$.

Bài 18.

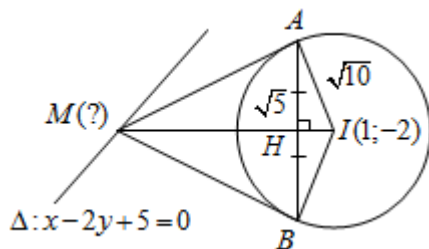
+ Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$

và bán kính $R = \sqrt{10}$.

+ Gọi $AB \cap MI = \{H\}$,

$$\text{khi đó } AH = \frac{AB}{2} = \sqrt{5}$$

$$\text{và } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{10} \Leftrightarrow AM^2 = 10$$



Suy ra $MI^2 = AM^2 + IA^2 = 10 + 10 = 20$ hay $MI^2 = 20$ (*)

+ Gọi $M(2t-5; t) \in \Delta$, khi đó :

$$(*) \Leftrightarrow (2t-6)^2 + (t+2)^2 = 20 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow M(-1; 2)$$

+ Vậy $M(-1; 2)$.

Bài 19.

+ Đường tròn (C) có tâm $I(6; 2)$ và bán kính $R = 2$.

+ Gọi đường tròn (C') có tâm I' và bán kính R'

Do (C') tiếp xúc với hai trục tọa độ nên I' thuộc đường thẳng $y = x$ hoặc $y = -x$ (loại)

+ Gọi $I'(t; t)$, khi đó $R' = |t|$. Vì (C') tiếp xúc ngoài với (C) nên:

$$II' = R + R' \Leftrightarrow \sqrt{(t-6)^2 + (t-2)^2} = 2 + |t| \Leftrightarrow 2t^2 - 16t + 40 = t^2 + 4|t| + 4$$

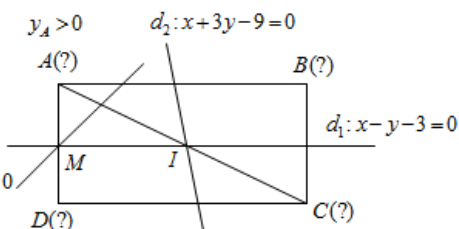
$$\Leftrightarrow t^2 - 16t - 4|t| + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 - 20t + 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I'(2; 2) \\ R' = 2 \\ I'(18; 18) \\ R' = 18 \end{cases}$$

+ Vậy phương trình đường tròn (C') là: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ hoặc $(x-18)^2 + (y-18)^2 = 324$.

Bài 20.

+ Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + 3y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$$



+ Gọi M là trung điểm của AD , khi đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(3; 0)$$

$$\text{Suy ra } AB = 2MI = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$$

+ Theo giả thiết

$$S_{ABCD} = 12 \Leftrightarrow AB \cdot AD = 12 \Leftrightarrow AD = \frac{12}{AB} = \frac{12}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow MA = \sqrt{2}$$

+ Do d_1 đi qua M và I nên $AD \perp d_1$, suy ra phương trình $AD: x + y - 3 = 0$

+ Gọi $A(3-t; t)$ với $t > 0$, khi đó $MA^2 = 2 \Leftrightarrow t^2 + t^2 = 2 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -1$ (loại)

Suy ra $A(2; 1)$. Do M là trung điểm của $AD \Rightarrow D(4; -1)$

Ta có I lần lượt là trung điểm của AC và BD nên suy ra $\begin{cases} C(7; 2) \\ B(5; 4) \end{cases}$

Vậy $A(2; 1), B(5; 4), C(7; 2)$ và $D(4; -1)$.

Bài 21.

+ Ta có $IM \perp AB$ nên AB đi qua

M nhận $\overrightarrow{IM} = (-3; 3) = -3(1; -1)$ làm vecto pháp tuyến nên có phương trình: $x - y + 3 = 0$

+ Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

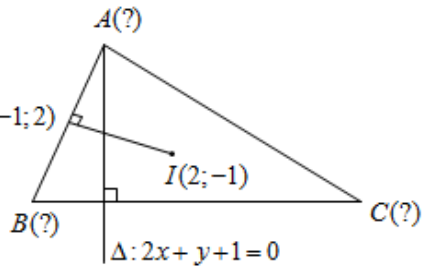
$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$$

Suy ra $B\left(-\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$ (vì M là trung điểm của AB)

+ Đường thẳng BC đi qua B nhận $\overrightarrow{n}_\Delta = (2; 1)$ làm vecto chỉ phương nên có

phương trình: $\begin{cases} x = -\frac{2}{3} + 2t \\ y = \frac{7}{3} + t \end{cases}$. Gọi $C\left(-\frac{2}{3} + 2t; \frac{7}{3} + t\right)$

+ Mặt khác: $IC = IB \Leftrightarrow IC^2 = IB^2 \Leftrightarrow \left(2t - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(t + \frac{10}{3}\right)^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2$



$$\Leftrightarrow 5t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C\left(-\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right) \equiv B \\ C\left(\frac{14}{15}; \frac{47}{15}\right) \end{cases}$$

+ Vậy $C\left(\frac{14}{15}; \frac{47}{15}\right)$.

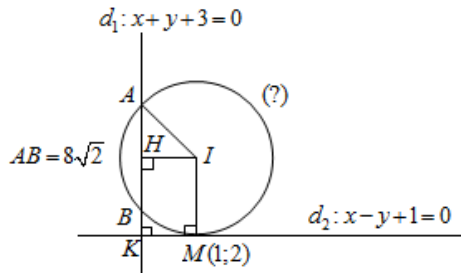
Bài 22.

+ Gọi I là tâm và R là bán kính của đường tròn (T) cần lập

Gọi $d_1 \cap d_2 = \{K\}$ và H là hình chiếu vuông góc của I trên

$$d_1 \Rightarrow HA = \frac{AB}{2} = 4\sqrt{2}$$

Vì $M \in d_2$ và $M \in (T)$ nên M là tiếp điểm của d_2 và (T)



Do đó đường thẳng IM đi qua $M(1;2)$ nhận $\vec{u}_{d_2} = (1;1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $x-1+y-2=0 \Leftrightarrow x+y-3=0$

+ Do $\vec{n}_{d_1} \cdot \vec{n}_{d_2} = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2 \Rightarrow IHKM$ là hình chữ nhật, khi đó :

$$IH = MK = d(M, d_1) = \frac{|1+2+3|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Suy ra } R^2 = IM^2 = IA^2 = IH^2 + AH^2 = (3\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 = 50 \quad (*)$$

+ Gọi $I(t;3-t) \in IM$, khi đó :

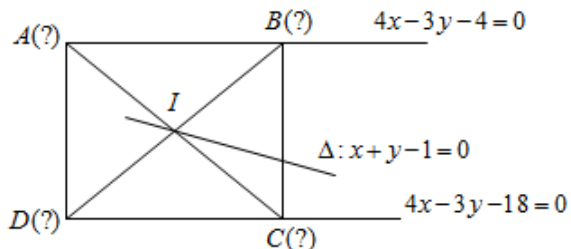
$$(*) \Leftrightarrow (t-1)^2 + (t-1)^2 = 50 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(6;-3) \\ I(-4;7) \end{cases}$$

+ Vậy đường tròn (T) cần lập có phương trình là: $(x-6)^2 + (y+3)^2 = 50$ hoặc $(x+4)^2 + (y-7)^2 = 50$.

Bài 23.

+ Gọi $I(t;1-t) \in \Delta$.

$$\text{Ta có: } d(I, AB) = d(I, CD)$$



$$\Leftrightarrow \frac{|4t - 3(1-t) - 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|4t - 3(1-t) - 18|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \Leftrightarrow |7t - 7| = |7t - 21|$$

$$\Leftrightarrow 7t - 7 = 21 - 7t \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow I(2; -1)$$

+ Chọn $M(1; 0) \in AB$, khi đó $AD = d(M, CD) = \frac{|4 - 18|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{14}{5}$

+ Vì $ABCD$ là hình vuông nên:

$$AC = \sqrt{2}AD = \frac{14\sqrt{2}}{5} \Rightarrow AI = \frac{AC}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{5} = BI$$

Suy ra A, B thuộc đường tròn tâm I bán kính $\frac{7\sqrt{2}}{5}$ có phương trình:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{98}{25}$$

+ Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{98}{25} \\ 4x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{25}{9}x^2 - \frac{44}{9}x + \frac{43}{225} = 0 \\ y = \frac{4x-4}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{25} \\ y = -\frac{32}{25} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{43}{25} \\ y = \frac{24}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\left(\frac{1}{25}; -\frac{32}{25}\right) \\ B\left(\frac{43}{25}; \frac{24}{25}\right) \end{cases} \text{ (vì } x_A < 1)$$

+ Do I là trung điểm của AC và BD nên $C\left(\frac{99}{25}; \frac{18}{25}\right)$ và $D\left(\frac{57}{25}; -\frac{74}{25}\right)$

$$\text{Vậy } A\left(\frac{1}{25}; -\frac{32}{25}\right), B\left(\frac{43}{25}; \frac{24}{25}\right), C\left(\frac{99}{25}; \frac{18}{25}\right), D\left(\frac{57}{25}; -\frac{74}{25}\right).$$

Bài 24.

+ Đường tròn (C_1) có tâm $O(0; 0)$ và bán kính $R_1 = 5$.

+ Gọi (C_2) cắt (C_1) tại A và B , Gọi I là tâm của đường tròn (C_2) và $OI \cap AB = \{H\}$.

$$\text{Khi đó } AB = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{25 - OH^2}.$$

Suy ra AB nhỏ nhất khi OH lớn nhất.

Mặt khác $OH \leq OM$

nên $OH_{\max} = OM \Leftrightarrow M \equiv H$.

- + AB đi qua M và vuông góc với OM nên AB có phương trình:
 $x - 2y - 5 = 0$

Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 5 \\ y^2 + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}$$

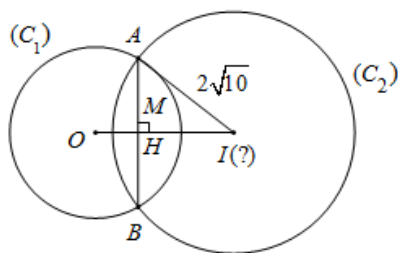
Không mất tính tổng quát giả sử $A(5; 0)$ và $B(-3; -4)$.

- + Phương trình $OM : 2x + y = 0$. Gọi $I(t; -2t) \in OM$, khi đó:

$$IA = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow IA^2 = 40 \Leftrightarrow (t - 5)^2 + 4t^2 = 40$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(-1; 2) \\ I(3; -6) \end{cases}$$

Vậy tâm của đường tròn (C_2) là $I(-1; 2)$ hoặc $I(3; -6)$.

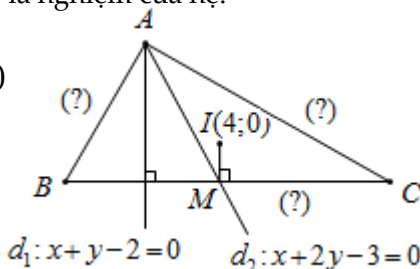


Bài 25.

- + Do $d_1 \cap d_2 = \{A\}$, nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1)$$

- + Gọi M là trung điểm của BC ,
 khi đó $M \in d_2$ và $IM \parallel d_1$ nên IM
 có phương trình: $x + y - 4 = 0$



Suy ra tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow M(5; -1)$$

- + BC đi qua M và nhận $\vec{u}_{d_1} = (1; -1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $x - y - 6 = 0$
 + Gọi $B(t + 6; t) \in BC$ với $t > 0$, khi đó:

$$IB = IA \Leftrightarrow IB^2 = IA^2 \Leftrightarrow (t + 2)^2 + t^2 = 10 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

hoặc $t = -3$ (loại) $\Rightarrow B(7; 1)$

Suy ra $C(3; -3)$ (do M là trung điểm của BC)

Suy ra phương trình $AB: y = 1$; Phương trình $AC: 2x + y - 3$

Bài 26.

+ Do $ABCD$ là hình thoi và $\widehat{ABC} = 120^\circ$ nên ABD là tam giác đều

Gọi M là trung điểm của

$AB \Rightarrow M(2; 1)$ nên DM đi qua M

nhận $\overrightarrow{AB} = (2; 2) = 2(1; 1)$ làm vectơ

pháp tuyến có phương trình:

$x + y - 3 = 0 \Rightarrow D(3 - t; t)$ với $t > 0$. Khi đó:

$$DB = AB \Leftrightarrow DB^2 = AB^2 \Leftrightarrow t^2 + (t - 2)^2 = 8 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 + \sqrt{3}$$

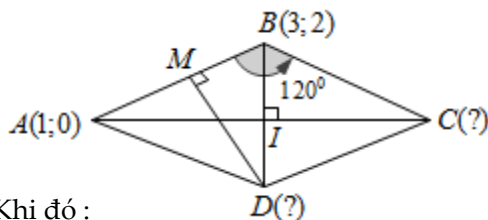
hoặc $t = 1 - \sqrt{3}$ (loại).

Suy ra $D(2 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$

+ Gọi $AC \cap BD = \{I\} \Rightarrow I\left(\frac{5 - \sqrt{3}}{2}; \frac{3 + \sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow C(4 - \sqrt{3}; 3 + \sqrt{3})$

(Vì I là trung điểm của AC và BD)

Vậy $C(4 - \sqrt{3}; 3 + \sqrt{3})$ và $D(2 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$.



Bài 27.

+ Gọi N' là điểm đối xứng với N qua I (hay I là trung điểm của NN')

Suy ra $N'(4; -5)$ thuộc đường

thẳng AB khi đó AB nhận

$$\overrightarrow{MN'} = \left(4; -\frac{16}{3}\right) = \frac{4}{3}(3; -4) \text{ làm}$$

véc tơ chỉ phương,

suy ra $\overrightarrow{n_{AB}} = (4; 3)$

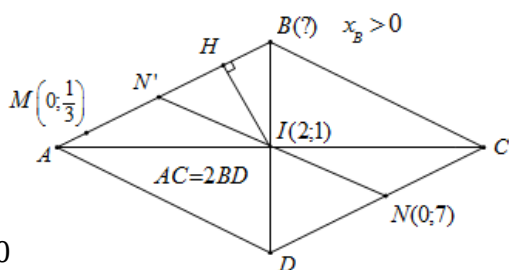
Phương trình $AB: 4x + 3y - 1 = 0$

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB nên:

$$IH = d(I, AB) = \frac{|8 + 3 - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$$

Mặt khác $AC = 2BD \Rightarrow AI = 2IB$. Khi đó xét tam giác IBA ta có:

$$\frac{1}{IB^2} + \frac{1}{IA^2} = \frac{1}{IH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{IB^2} + \frac{1}{4IB^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow IB^2 = 5$$



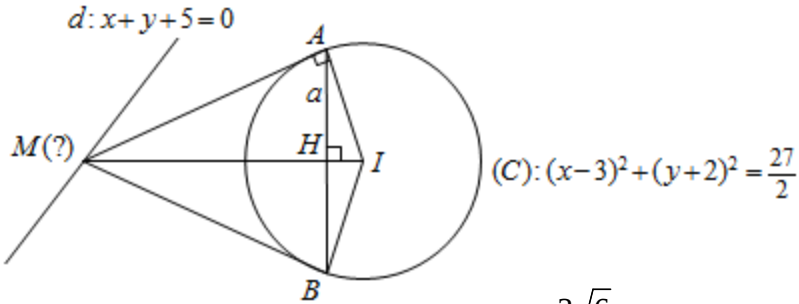
+ Gọi $B(4+3t; -5-4t) \in AB$ với $t > -\frac{4}{3}$, khi đó:

$$IB^2 = 5 \Leftrightarrow (3t+2)^2 + (4t+6)^2 = 5 \Leftrightarrow 5t^2 + 12t + 7 = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

$$\text{hoặc } t = -\frac{7}{5} \text{ (loại)} \Rightarrow B(1; -1)$$

+ Vậy $B(1; -1)$.

Bài 28.



+ Đường tròn (C) có tâm $I(3; -2)$ và bán kính $R = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

+ Gọi $MI \cap AB = \{H\}$ và đặt $AH = a \Rightarrow IH = \sqrt{R^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{27}{2} - a^2}$

$$\text{Khi đó } S_{IAB} = \frac{27\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow AH \cdot IH = \frac{27\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow a \cdot \sqrt{\frac{27}{2} - a^2} = \frac{27\sqrt{3}}{8}$$

$$\Leftrightarrow a^4 - \frac{27}{2}a^2 + \frac{2187}{64} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{27}{8} \\ a^2 = \frac{81}{8} \end{cases} \Rightarrow a^2 = \frac{27}{8} \text{ (vì } AB_{\min} \Leftrightarrow AH_{\min} \Leftrightarrow a_{\min} \text{)}$$

$$\text{Suy ra } IH = \sqrt{\frac{27}{2} - \frac{27}{8}} = \frac{9\sqrt{2}}{4} \Rightarrow IM = \frac{IA^2}{IH} = \frac{27}{2} : \frac{9\sqrt{2}}{4} = 3\sqrt{2}$$

+ Gọi $M(t; -t-5) \in d$, khi đó

$$IM^2 = 18 \Leftrightarrow (t-3)^2 + (t+3)^2 = 18 \Leftrightarrow 2t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow M(0; 5)$$

+ Vậy $M(0; 5)$.

Bài 29.

+ Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3; -1)$.

Khi đó trung trực d của AB đi qua I nhận $\overrightarrow{AB} = (2; 4) = 2(1; 2)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình:
 $x - 3 + 2(y + 1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 1 = 0$.

Tam giác MAB cân tại $M \Rightarrow MA = MB \Rightarrow M \in d$.

Mặt khác $M \in (C)$ nên tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y \\ 5y^2 - 18y + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

hoặc $\begin{cases} x = -\frac{21}{5} \\ y = \frac{13}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(-1; 1) \\ M\left(-\frac{21}{5}; \frac{13}{5}\right) \end{cases}$

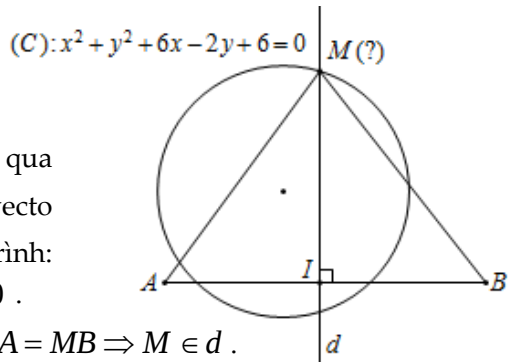
+ Ta có $S_{MAB} = \frac{1}{2} d(M, AB) \cdot AB \Rightarrow S_{MAB}$ lớn nhất khi $d(M, AB)$ lớn nhất

Phương trình đường thẳng $AB: 2x - y - 7 = 0$

+ Với $M(-1; 1) \Rightarrow d(M, AB) = \frac{|-2 - 1 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2\sqrt{5}$

$$M\left(-\frac{21}{5}; \frac{13}{5}\right) \Rightarrow d(M, AB) = \frac{\left|-\frac{42}{5} - \frac{13}{5} - 7\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{16}{\sqrt{5}}$$

Do $2\sqrt{5} < \frac{16}{\sqrt{5}}$ nên $M\left(-\frac{21}{5}; \frac{13}{5}\right)$ là điểm thỏa mãn bài toán.



Bài 30.

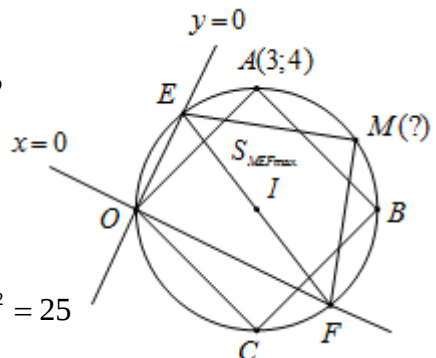
+ AB đi qua $A(3; 4)$ và có vectơ pháp

tuyến $\overrightarrow{OA} = (3; 4)$ nên có phương trình:

$$3x + 4y - 25 = 0$$

Gọi $B(3 + 4t; 4 - 3t)$, khi đó:

$$AB = OA \Leftrightarrow AB^2 = OA^2 \Leftrightarrow (4t)^2 + (3t)^2 = 25$$



$$\Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 7) \text{ hoặc } B(7; 1) \text{ (loại)}$$

+ Đường tròn (C) ngoại tiếp OABC có tâm I là trung điểm của OB

$\Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$ và bán kính $R = OI = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ nên (C) có phương trình:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

+ Do $\begin{cases} Ox \cap (C) = \{E\} \neq \{O\} \\ Oy \cap (C) = \{F\} \neq \{O\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(-1; 0) \\ F(0; 7) \end{cases}$

+ EF là đường kính nên $\triangle MEF$ vuông tại M.

$$\text{Ta có: } S_{\triangle MEF} = \frac{ME \cdot MF}{2} \leq \frac{ME^2 + MF^2}{4} = \frac{EF^2}{4} = \frac{25}{4}$$

Vậy diện tích $\triangle MEF$ lớn nhất bằng $\frac{25}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi: $ME = MF$ hay M thuộc đường trung trực của EF.

Đường trung trực của EF đi qua $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$ nhận $\overrightarrow{EF} = (1; 7)$ là vectơ

pháp tuyến nên có phương trình: $\left(x + \frac{1}{2}\right) + 7\left(y - \frac{7}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x + 7y - 24 = 0$

Gọi $M(24 - 7t; t)$, khi đó:

$$MI = R = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow MI^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \left(7t - \frac{49}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 7t + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(3; 3) \\ M(-4; 4) \end{cases} \text{ (có thể trình bày bằng cách thay}$$

tọa độ điểm M vào phương trình (C) do $M \in (C)$)

+ Vậy $M(3; 3)$ hoặc $M(-4; 4)$ thì tam giác MEF có diện tích lớn nhất.

Bài 31.

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ , khi đó:

$$AH = d(A, \Delta) = \frac{|-4+2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

+ Đặt $AN = a \Rightarrow AM = 2a$.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2} \Leftrightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} \Leftrightarrow a^2 = 1 \text{ hay } AN^2 = 1$$

+ Gọi $N(2t-2; t)$ với $t \in \mathbb{Z}$, khi đó:

$$AN^2 = 1 \Leftrightarrow (2t-2)^2 + (t-2)^2 = 1 \Leftrightarrow 5t^2 - 12t + 7 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

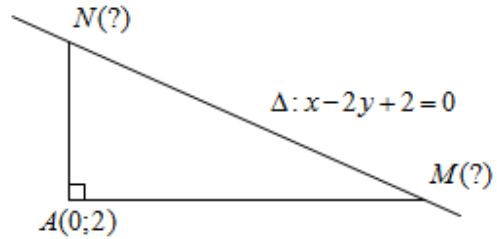
$$\text{hoặc } t = \frac{7}{5} \text{ (loại)} \Rightarrow N(0;1)$$

+ Khi đó phương trình AN là $x = 0$, suy ra phương trình $AM : y = 2$

Suy ra tọa độ điểm M là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x-2y+2=0 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow M(2;2)$$

Vậy $M(2;2), N(0;1)$.

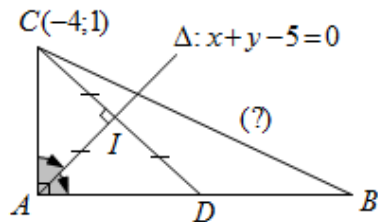


Bài 32.

+ Gọi Δ là phân giác trong của góc A

Gọi D là điểm đối xứng của C qua Δ , khi đó $D \in AB$

CD đi qua $C(-4;1)$ và vuông góc với Δ nên có phương trình :
 $x - y + 5 = 0$



Khi đó tọa độ giao điểm I của CD và Δ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x-y+5=0 \\ x+y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow I(0;5)$$

Do I là trung điểm của $CD \Rightarrow D(4;9)$

+ Gọi $A(a;5-a) \in \Delta$ ($a > 0$), khi đó :

$$AI = CI \Leftrightarrow AI^2 = CI^2 \Leftrightarrow a^2 + a^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow a = 4$$

hoặc $a = -4$ (loại) $\Rightarrow A(4;1)$

Suy ra $AC = 8$ và AB đi qua $A(4;1)$ và $D(4;9)$ nên có phương trình $x = 4$

$$+ \text{ Gọi } B(4;b) \in AB, \text{ khi đó : } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.AC \Leftrightarrow AB = \frac{2S_{ABC}}{AC} = \frac{2.24}{8} = 6$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 36 \Leftrightarrow (b-1)^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(4;-5) \\ B(4;7) \end{cases}$$

+ Với $B(4;-5)$, ta nhận thấy B, C nằm cùng phía so với Δ (loại).

Với $B(4;7)$, ta có B, C nằm khác phía so với Δ (thỏa mãn).

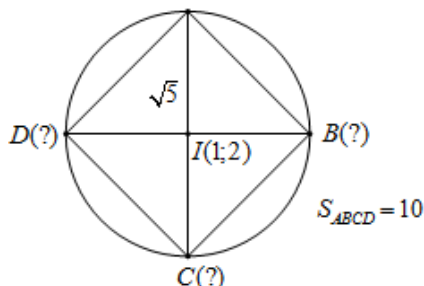
Khi đó BC có phương trình : $3x - 4y - 16 = 0$. $A(-1;3)$

Bài 33.

+ Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$

và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nội tiếp trong (C) nên I là trung điểm của $AC \Rightarrow C(3;1)$



+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của B xuống AC , khi đó :

$$S_{ABCD} = 2S_{ACB} = AC.BH \Rightarrow BH = \frac{S_{ABCD}}{AC} = \frac{10}{2\sqrt{5}} = \sqrt{5} = R = BI \Rightarrow H \equiv I$$

Suy ra $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow BD \perp AC$

Do đó BD đi qua I và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AC} = (4;-2) = 2(2,-1)$ nên có phương trình : $2x - y = 0$

+ Khi đó tọa độ B, D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 10x = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

+ Vậy $B(0;0), C(3;1), D(2;4)$ hoặc $B(2;4), C(3;1), D(0;0)$.

Nhận xét:

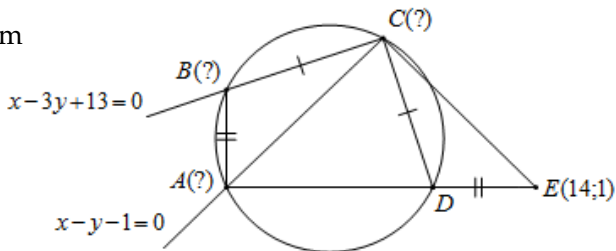
Ở bài toán trên ta đã khai thác số liệu đặc biệt của bài toán để chỉ ra được $ABCD$ là hình vuông và viết được phương trình đường chéo $BD \perp AC$. Nếu số liệu không giúp ta có được điều này ($ABCD$ không là hình vuông mà là hình chữ nhật thật sự) thì ta sẽ giải quyết bài toán như thế nào? Câu trả lời trong tình huống này là : “ khi tính được khoảng cách BH , ta suy ra B thuộc đường thẳng song song với AC và cách AC một khoảng bằng BH . Khi đó giao điểm của đường thẳng vừa lập và đường tròn giúp ta tìm được tọa độ điểm B và từ đây suy ra tọa độ điểm D ”.

Bài 34.

+ Tọa độ điểm C là nghiệm

của hệ:
$$\begin{cases} x-3y+13=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow C(8;7)$$



+ Ta có $\widehat{CBA} = \widehat{CDE}$ (cùng bù với $\widehat{CDA}$)

suy ra $\triangle ABC = \triangle EDC$ (c.g.c) $\Rightarrow CA = CE$

Gọi $A(a; a-1)$ với $a < 3$, khi đó:

$$CA = CE \Leftrightarrow CA^2 = CE^2 \Leftrightarrow (a-8)^2 + (a-8)^2 = 72 \Leftrightarrow a = 2$$

hoặc $a = 14$ (loại) $\Rightarrow A(2;1)$

$$+ \text{ Ta có } \begin{cases} \overline{CE} = (6; -6) \\ \overline{CA} = (-6; -6) \end{cases} \Rightarrow \overline{CE} \cdot \overline{CA} = 0 \Rightarrow \widehat{ACE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ$$

hay $AB \perp AE$

Khi đó AB đi qua $A(2;1)$ và nhận $\overrightarrow{AE} = (12;0)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $x - 2 = 0$

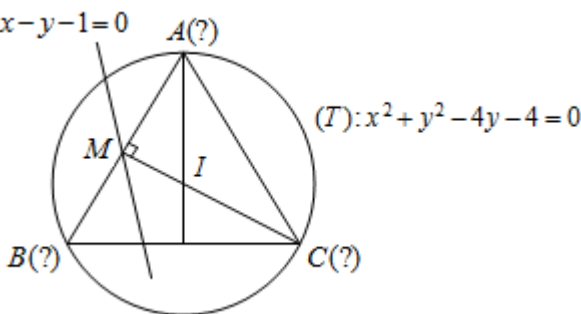
+ Suy ra tọa độ điểm B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x-2=0 \\ x-3y+13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow B(2;5)$$

Vậy $A(2;1), B(2;5)$.

Bài 35.

$$d: 2x - y - 1 = 0$$



+ Đường tròn (T) có tâm $I(0;2)$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$

+ Do tam giác ABC đều nên $IM = \frac{IC}{2} = \frac{R}{2} = \sqrt{2}$.

Gọi $M(t; 2t-1) \in d$ với $t \leq 1$, khi đó:

$$IM^2 = 2 \Leftrightarrow t^2 + (2t - 3)^2 = 2 \Leftrightarrow 5t^2 - 12t + 7 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\text{hoặc } t = \frac{7}{5} \text{ (loại)} \Rightarrow M(1;1)$$

$$+ \text{ Gọi } C(x; y). \text{ Ta có } \begin{cases} \overline{IC} = (x; y-2) \\ \overline{MI} = (-1; 1) \end{cases},$$

$$\text{khi đó } \overline{IC} = 2\overline{MI} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y-2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow C(-2; 4)$$

+ AB đi qua $M(1;1)$ và nhận $\overline{IM} = (1; -1)$ là vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $x - y = 0$

Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x = 1 + \sqrt{3} \\ y = x = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $A(1+\sqrt{3}; 1+\sqrt{3})$, $B(1-\sqrt{3}; 1-\sqrt{3})$, $C(-2; 4)$ hoặc $A(1-\sqrt{3}; 1-\sqrt{3})$,

$B(1+\sqrt{3}; 1+\sqrt{3})$, $C(-2; 4)$.

Bài 36.

+ Phương trình cạnh $AB: x + y - 1 = 0$

Gọi M là trung điểm của AB , suy ra $M(2; -1)$

Khi đó phương trình đường trung trực của AB là $\Delta: x - y - 3 = 0$

+ Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ,

suy ra $I \in \Delta \Rightarrow I(t; t-3)$

Ta có: $IA = R = 2 \Leftrightarrow IA^2 = 4 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (x-1)^2 = 4$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(1; -2) \\ I(3; 0) \end{cases}$$

Gọi $C(a; b)$ với $b > 0$

+ Với $I(1; -2)$, ta có phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$(T): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

Khi đó: $C \in (T) \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b+2)^2 = 4$ (vô nghiệm - vì $b > 0$)

+ Với $I(3; 0)$, ta có phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$(T'): (x-3)^2 + y^2 = 4$$

Khi đó $C \in (T') \Leftrightarrow (a-3)^2 + b^2 = 4$ (*)

$$\text{Mặt khác ta có: } d(C, AB) = \frac{2S_{ABC}}{AB} \Leftrightarrow \frac{|a+b-1|}{\sqrt{2}} = \frac{8}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ a+b=-3 \end{cases}$$

Với $a+b=5$, kết hợp với (*) ta được hệ:

$$\begin{cases} (a-3)^2 + b^2 = 4 \\ a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=5 \\ b=0 \end{cases} \text{ (loại)} \Rightarrow C(3;2)$$

$$\text{Với } a+b=-3, \text{ kết hợp với (*) ta được hệ: } \begin{cases} (a-3)^2 + b^2 = 4 \\ a+b=-3 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy $C(3;2)$.

Bài 37.

+ Gọi M là trung điểm của BC và

J là điểm đối xứng của I qua BC

Khi đó $AH = 2IM = IJ$

$\Rightarrow AHJI$ là hình bình hành

$\Rightarrow JB = JC = JH$

Suy ra J là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC .

+ Gọi $M(2t+1; t) \Rightarrow J(4t+1; 2t)$.

Do E thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC nên ta có:

$$JH^2 = JE^2 \Leftrightarrow (4t-1)^2 + (2t-1)^2 = (4t-5)^2 + (2t+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 24t = 24 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(3;1) \Rightarrow J(5;2)$$

Khi đó BC đi qua M nhận $\overrightarrow{IM} = (2;1)$ làm vectơ pháp tuyến nên BC có phương trình: $2x + y - 7 = 0$

+ Gọi $B(b; 7-2b) \in BC$ với $b < 4$, khi đó:

$$JB^2 = JE^2 \Leftrightarrow (b-5)^2 + (5-2b)^2 = 10 \Leftrightarrow b^2 - 6b + 8 = 0 \Leftrightarrow b = 2$$

hoặc $b = 4$ (loại) $\Rightarrow B(2;3)$

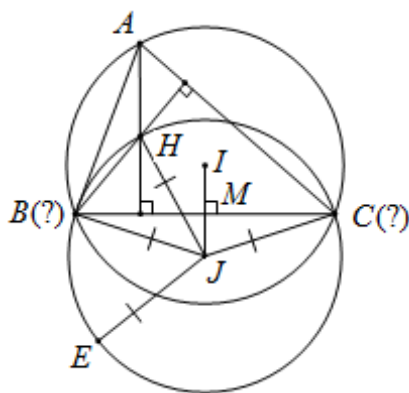
+ Do M là trung điểm của BC nên suy ra $C(4;-1)$

Vậy $B(2;3), C(4;-1)$.

Bài 38.

+ Ta có phương trình AB là: $2x - y - 1 = 0$ và $AB = \sqrt{5}$, khi đó:

$$d(C, AB) = \frac{2S_{ABC}}{AB} = \frac{2.0,5}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



$\Rightarrow C$ thuộc đường thẳng $\Delta // AB$ và cách AB một khoảng bằng $\frac{1}{\sqrt{5}}$

+ $\Delta // AB$ nên phương trình Δ có dạng: $2x - y + m = 0$

$$\text{Ta có : } d(A, \Delta) = d(C, AB) \Leftrightarrow \frac{|m+1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-2 \end{cases}$$

+ Với $m=0 \Rightarrow \Delta: 2x - y = 0$, khi đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 5x^2 - 14x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = \frac{18}{5} \end{cases} \text{ (loại)} \Rightarrow C(1; 2)$$

Suy ra trọng tâm $G\left(\frac{4}{3}; 2\right)$

+ Với $m=-2 \Rightarrow \Delta: 2x - y - 2 = 0$, khi đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ 5x^2 - 22x + 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases}$$

(loại) $\Rightarrow C(3; 4)$

Suy ra trọng tâm $G\left(2; \frac{8}{3}\right)$

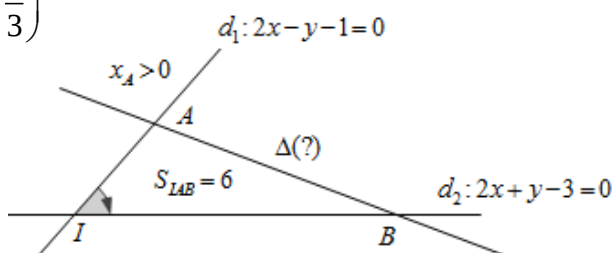
Vậy $G\left(\frac{4}{3}; 2\right)$ hoặc $G\left(2; \frac{8}{3}\right)$

Bài 39.

+ Vì $d_1 \cap d_2 = \{I\}$ nên tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow I(1; 1)$$

+ Đặt $\widehat{AIB} = \alpha$ (với $0 < \alpha < 180^\circ$).



Ta có: $|\cos \alpha| = \frac{|\vec{n}_{d_1} \cdot \vec{n}_{d_2}|}{|\vec{n}_{d_1}| \cdot |\vec{n}_{d_2}|} = \frac{|2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$

+ Ta có $S_{IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \sin \alpha = \frac{1}{2} IA \cdot 3IA \cdot \sin \alpha \Rightarrow IA^2 = \frac{2S_{IAB}}{3 \sin \alpha} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot \frac{4}{5}} = 5$.

Vậy $IA^2 = 5$ (*) và $IB^2 = (3IA)^2 = 45$ (2*)

+ Gọi $A(a; 2a-1)$ với $a > 0$, khi đó :

(*) $\Leftrightarrow (a-1)^2 + (2a-2)^2 = 5 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 1 \Leftrightarrow a = 2$ hoặc $a = 0$ (loại)
 $\Rightarrow A(2; 3)$

+ Gọi $B(b; 3-2b)$, khi đó :

(2*) $\Leftrightarrow (b-1)^2 + (2-2b)^2 = 45 \Leftrightarrow (b-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(4; -5) \\ B(-2; 7) \end{cases}$

Với $\begin{cases} A(2; 3) \\ B(4; -5) \end{cases}$, suy ra Δ đi qua A, B có phương trình : $4x + y - 11 = 0$

Với $\begin{cases} A(2; 3) \\ B(-2; 7) \end{cases}$, suy ra Δ đi qua A, B có phương trình : $x + y - 5 = 0$.

Bài 40.

+ Gọi N là trung điểm của AC ,
 khi đó MN là đường trung bình của

$\Delta ABC \Rightarrow MN = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

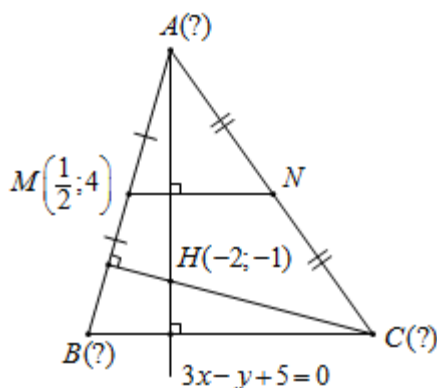
MN đi qua $M\left(\frac{1}{2}; 4\right)$ và vuông

góc với AH nên có phương trình:

$2x + 6y - 25 = 0$

Gọi $N\left(t; \frac{25-2t}{6}\right) \in MN$, khi đó:

$MN^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-2t}{6}\right)^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N\left(-1; \frac{9}{2}\right) \\ N\left(2; \frac{7}{2}\right) \end{cases}$



Gọi $A(a; 3a+5) \in AH \Rightarrow B(1-a; 3-3a)$ (do M là trung điểm của AB)

+ Với $N\left(-1; \frac{9}{2}\right) \Rightarrow C(-2-a; 4-3a)$ (do N là trung điểm của AC)

Nhận thấy $-2-a < 1-a \Rightarrow x_C < x_B$ (không thỏa mãn)

+ Với $N\left(2; \frac{7}{2}\right) \Rightarrow C(4-a; 2-3a)$ (do N là trung điểm của AC)

Khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1-2a; -2-6a) \\ \overrightarrow{CH} = (a-6; 3a-3) \end{cases}$ nên ta có:

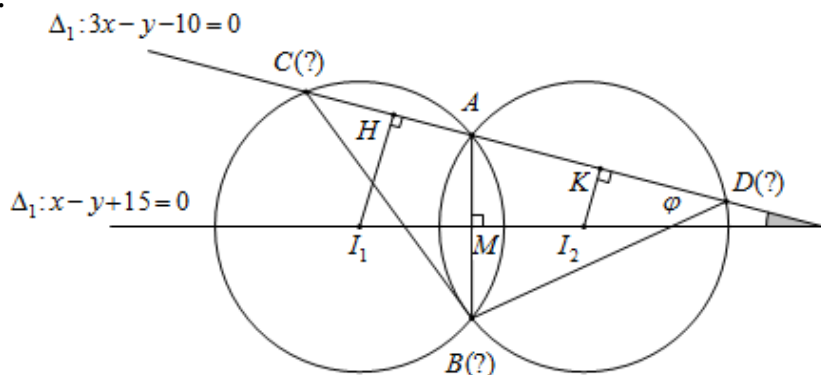
$$AB \perp CH \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 5a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Khi $a = 0 \Rightarrow A(0; 5), B(1; 3), C(4; 2)$

Khi $a = \frac{5}{4} \Rightarrow A\left(\frac{5}{4}; \frac{35}{4}\right), B\left(\frac{-1}{4}; \frac{-3}{4}\right), C\left(\frac{11}{4}; -\frac{7}{4}\right)$

Vậy $A(0; 5), B(1; 3), C(4; 2)$ hoặc $A\left(\frac{5}{4}; \frac{35}{4}\right), B\left(\frac{-1}{4}; \frac{-3}{4}\right), C\left(\frac{11}{4}; -\frac{7}{4}\right)$

Bài 41.



+ Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm của đường tròn $(C_1), (C_2)$ và gọi $AB \cap I_1 I_2 = \{M\}$

Khi đó AB đi qua $A(10; 20)$ và vuông góc với $I_1 I_2$ (hay Δ_1) nên có phương trình: $x + y - 30 = 0$

Suy ra tọa độ điểm M là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x+y-30=0 \\ x-y+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{15}{2} \\ x=\frac{45}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{15}{2}; \frac{45}{2}\right)$$

Do M là trung điểm của AB nên suy ra $B(5; 25)$.

+ Kẻ I_1H, I_2K cùng vuông góc với CD , khi đó $HK = \frac{CD}{2}$

$$\text{Ta có } d(B, CD) = \frac{|3.5 - 25 - 10|}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow CD = \frac{2S_{BCD}}{d(B, CD)} = \frac{2.120}{2\sqrt{10}} = 12\sqrt{10} \Rightarrow HK = 6\sqrt{10}$$

+ Gọi φ là góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 , khi đó: $|\cos \varphi| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|3+1|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Do HK là hình chiếu của I_1I_2 trên Δ_2 nên ta có:

$$HK = I_1I_2 \cos \varphi \Rightarrow I_1I_2 = \frac{HK}{\cos \varphi} = 15\sqrt{2} \Rightarrow I_1M = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

+ Gọi $I_1(t; t+15) \in \Delta_1$ với $t \leq 0$, khi đó:

$$I_1M^2 = \frac{225}{2} \Leftrightarrow 2\left(t - \frac{15}{2}\right)^2 = \frac{225}{2} \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = 15 \text{ (loại)}$$

$$\Rightarrow I_1(0; 15) \Rightarrow I_2(15; 30)$$

+ Gọi $\begin{cases} C(c; 3c-10) \in \Delta_2 \\ D(d; 3d-10) \in \Delta_2 \end{cases}$, khi đó: $\begin{cases} I_1C = I_1A \\ I_2D = I_2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 + (3c-25)^2 = 125 \\ (d-15)^2 + (3d-40)^2 = 125 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=10 \\ c=5 \\ d=10 \\ d=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(10; 20) \equiv A \\ C(5; 5) \\ D(10; 20) \equiv A \\ D(17; 41) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(5; 5) \\ (17; 41) \end{cases}$$

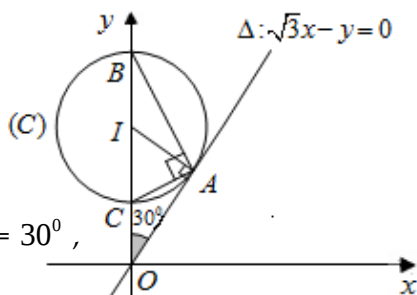
Vậy $B(5; 25), C(5; 5), D(17; 41)$.

Bài 42.

+ Gọi (C) là đường tròn cần lập có tâm I và bán kính R .

+ Ta có $\Delta \cap Oy = \{O\}$ với $O(0; 0)$ và $\widehat{AOB} = 30^\circ$,

suy ra $\widehat{ACB} = 60^\circ$



$$\text{Khi đó } \begin{cases} AB = BC \sin 60^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}R \\ AC = BC \cos 60^\circ = 2R \cdot \frac{1}{2} = R \end{cases}$$

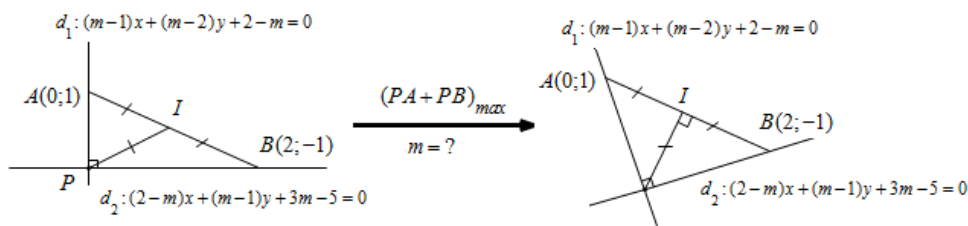
$$+ \text{ Chu vi } \triangle ABC : AB + BC + CA = 3 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}R + 2R + R = 3 + \sqrt{3} \Leftrightarrow R = 1$$

$$+ \text{ Ta có } \triangle OAI \text{ vuông tại } A \text{ và } IA = R \Rightarrow OI = 2R = 2$$

$$\text{Gọi } I(0; t) \in Oy, \text{ khi đó } OI^2 = 4 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow t = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} I(0; 2) \\ I(0; -2) \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn (C) cần lập là: $x^2 + (y-2)^2 = 1$ hoặc $x^2 + (y+2)^2 = 1$

Bài 43.



Đường thẳng d_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{d_1} = (m-1; m-2)$ và d_2 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{d_2} = (2-m; m-1)$

Để thấy $\vec{n}_{d_1} \cdot \vec{n}_{d_2} = (m-1)(2-m) + (m-2)(m-1) = 0$ với $\forall m$ nên $d_1 \perp d_2$ và lại có $A \in d_1$; $B \in d_2$, khi đó:

$$+ \text{ Nếu } P \equiv A \text{ hoặc } P \equiv B \text{ thì } PA + PB = AB = 2\sqrt{2}$$

$$+ \text{ Nếu } \exists \triangle ABP, \text{ khi đó } \triangle ABP \text{ vuông tại } P \text{ nên } PI = \frac{AB}{2} = \sqrt{2} \text{ với } I(1; 0)$$

là trung điểm của AB .

$$+ \text{ Ta luôn có: } PA^2 + PB^2 \geq 2PA \cdot PB$$

$$\Leftrightarrow 2(PA^2 + PB^2) \geq PA^2 + PB^2 + 2PA \cdot PB$$

$$\Leftrightarrow 2AB^2 \geq (PA + PB)^2 \Rightarrow PA + PB \leq \sqrt{2} \cdot AB = 4,$$

$$\text{suy ra } (PA + PB)_{\max} = 4$$

Dấu "=" xảy ra khi $PA = PB$ hay $\triangle ABP$ vuông cân tại P

Khi đó $PI \perp AB$ nên PI có vectơ pháp tuyến $\vec{AB} = (2-0) = 2(1; -1)$

Bài 46.

+ Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tâm $I(2;-2)$ bán kính

$IA = \sqrt{10}$ có phương trình:

$$(T): (x-2)^2 + (y+2)^2 = 10$$

+ Phương trình $AH: x - y - 2 = 0$

Gọi D là giao điểm thứ hai của AH với đường tròn (T) .

Khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+2)^2 = 10 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3; y = 1 \\ x = -1; y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(3;1) \\ D(-1;-3) \equiv A \end{cases} \Rightarrow D(3;1)$$

+ Gọi M là giao điểm của BC và AD

Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ (cùng chắn cung $\widehat{DC}$) và $\widehat{B_2} = \widehat{A_1}$ (cùng phụ với góc $\widehat{C}$)

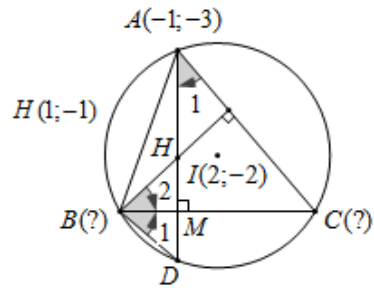
Suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{B_2} \Rightarrow \triangle BHD$ cân tại $B \Rightarrow M$ là trung điểm của $HD \Rightarrow M(2;0)$

+ Khi đó BC đi qua M vuông góc với AH nên có phương trình:
 $x + y - 2 = 0$

Suy ra tọa độ B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+2)^2 = 10 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 1 \\ x = 5; y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(1;1), C(5;-3) \\ B(5;-3), C(1;1) \end{cases}$$

Vậy $B(1;1), C(5;-3)$ hoặc $B(5;-3), C(1;1)$.



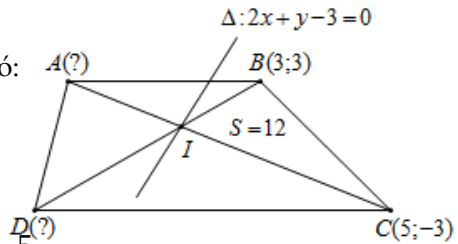
Bài 47.

+ Gọi $I(t; 3-2t) \in \Delta$ (với $t > 0$), khi đó:

$$CI = 2BI \Leftrightarrow (t-5)^2 + (2t-6)^2$$

$$= 4[(t-3)^2 + 4t^2]$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 + 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -\frac{5}{3} \text{ (loại)} \Rightarrow I(1;1)$$



+ Khi đó ta có phương trình AC đi qua I, C có phương trình: $x + y - 2 = 0$

Phương trình BD đi qua I, B có phương trình: $x - y = 0$

+ Ta có $d(B, AC) = \frac{|3+3-2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

$$\text{Khi đó: } AC = \frac{2S_{ABC}}{d(B, AC)} = \frac{2 \cdot 12}{2\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

Gọi $A(a; 2-a) \in AC$ (với $a < 0$), khi đó :

$$AC^2 = 72 \Leftrightarrow 2(a-5)^2 = 72 \Leftrightarrow a = -1 \text{ hoặc } a = 11 \text{ (loại)} \Rightarrow A(-1; 3).$$

+ Phương trình đường thẳng CD đi qua C và song song với AB có phương trình: $y+3=0$

Khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-3 \Rightarrow D(-3; -3)$$

Vậy $A(-1; 3), D(-3; -3)$.

2. BÀI TOÁN 2

A. NỘI DUNG BÀI TOÁN 2

Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ và cách một đường thẳng Δ' cho trước (đã biết phương trình) một khoảng không đổi.

B. CÁCH GIẢI CHUNG

$$\text{Gọi } M(t) \in \Delta \xrightarrow{d(I, \Delta')=h} f(t)=0 \Leftrightarrow t=? \Rightarrow M$$

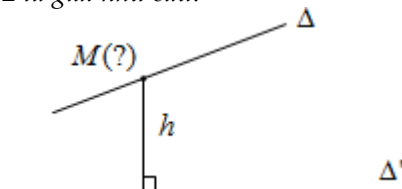
Giải thích chi tiết:

Khi gặp bài toán có nội dung như **Bài toán 2** ta giải như sau:

+ Tham số hóa điểm M theo t (do $M \in \Delta$) bằng cách gọi $M(t)$

+ Cắt nghĩa dữ kiện $d(I, \Delta') = h$ giúp ta có được phương trình chứa t là $f(t) = 0$

+ Giải phương trình tìm t giúp ta suy ra được tọa độ điểm M .



C. VÍ DỤ GỐC

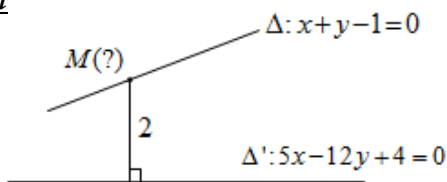
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: x+y-1=0$ và đường thẳng $\Delta': 5x-12y+2=0$

Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho M cách Δ' một khoảng bằng 2.

Giải

+ Gọi $M(t; 1-t) \in \Delta$, khi đó :

$$d(M, \Delta') = 2 \Leftrightarrow \frac{|5t - 12(1-t) + 4|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = 2$$



$$\Leftrightarrow |17t - 8| = 26 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{18}{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2; -1) \\ M\left(-\frac{18}{17}; \frac{35}{17}\right) \end{cases}$$

+ Vậy $M(2; -1)$ hoặc $M\left(-\frac{18}{17}; \frac{35}{17}\right)$.

D. CÁC VÍ DỤ MỞ RỘNG

Ví dụ 1 (B – 2004). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;1)$, $B(4;-3)$. Tìm điểm C thuộc đường thẳng $x - 2y - 1 = 0$ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

Phân tích hướng giải:

Do $A(1;1)$, $B(4;-3)$ ta hoàn toàn suy ra được phương trình AB . Khi đó bài toán được phát biểu theo đúng nội dung **Bài toán 2** nên ta dễ dàng suy ra được tọa độ điểm C . Sau đây là lời giải chi tiết:

Giải

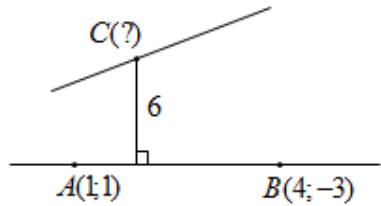
+ Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -4)$, suy ra phương trình $AB: 4x + 3y - 7 = 0$

+ Vì C thuộc đường thẳng $x - 2y - 1 = 0$ nên gọi $C(2t + 1; t)$, khi đó :

$$d(C, AB) = 6 \Leftrightarrow \frac{|4(2t + 1) + 3t - 7|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 6$$

$$\Leftrightarrow |11t - 3| = 30 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -\frac{27}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(7; 3) \\ C\left(-\frac{43}{11}; -\frac{27}{11}\right) \end{cases}$$

+ Vậy $C(7; 3)$ hoặc $C\left(-\frac{43}{11}; -\frac{27}{11}\right)$.



Ví dụ 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích bằng 4. Biết $A(1;0)$, $B(0;2)$ và giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng $y = x$. Tìm tọa độ đỉnh C, D .

Phân tích hướng giải:

* Với dữ kiện I nằm trên đường thẳng $y = x$ gọi ý ta nên đi tìm tọa độ điểm I . Cũng hợp lý khi biết điểm I ta sẽ dễ dàng suy ra được tọa độ đỉnh C và D (do I là trung điểm của AC và BD).

* Lúc này ta còn một dữ kiện chưa khai thác là diện tích bình hành $ABCD$ bằng 4. Song ta cần có điểm I tham gia vào dữ kiện này.

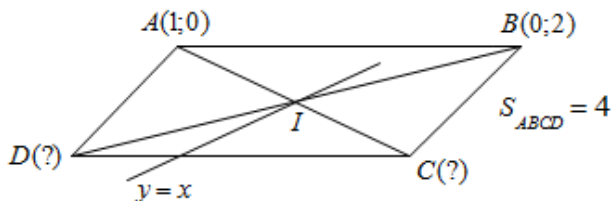
Do đó ta nghĩ tới việc chuyển :

$$S_{ABCD} = 4S_{IAB} = 4 \cdot \frac{1}{2} d(I, AB) \cdot AB \Rightarrow d(I, AB) = \frac{S_{ABCD}}{2AB} = \frac{4}{2\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

* Như vậy việc tìm điểm I đã được "lộ diện" theo nội dung **Bài toán 2**.

Vì vậy ta có lời giải chi tiết sau:

Giải



+ Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}} = (2; 1)$ nên AB có phương trình: $2x + y - 2 = 0$

+ Ta có: $S_{ABCD} = 4S_{IAB} = 4 \cdot \frac{1}{2} d(I, AB) \cdot AB \Rightarrow d(I, AB) = \frac{S_{ABCD}}{2AB} = \frac{4}{2\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

+ Gọi $I(t; t)$, khi đó :

$$d(I, AB) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|2t + t - 2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |3t - 2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{3} \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \\ I(0; 0) \end{cases}$$

+ Vì I lần lượt là trung điểm của AC, BD nên :

$$\text{Với } I\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \Rightarrow C\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right) \text{ và } D\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right);$$

$$\text{Với } I(0; 0) \Rightarrow C(-1; 0) \text{ và } D(0; -2).$$

$$\text{Vậy } C\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right), D\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right) \text{ hoặc } C(-1; 0), D(0; -2).$$

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có phương trình đường thẳng chứa các cạnh AB và CD lần lượt là $x - y + 4 = 0$ và $x - y - 4 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông biết tâm của hình vuông thuộc đường thẳng $\Delta: 2x - y - 1 = 0$.

Phân tích hướng giải:

* Ở ví dụ này $AB \parallel CD$ và đều đã biết phương trình, vì vậy ta hoàn toàn có thể tính được độ dài một cạnh của hình vuông (khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và

CD). Khi đó khoảng cách từ I tới AB hoặc CD là hoàn toàn tính được. Nghĩa là ta sẽ tìm được tọa độ điểm I theo góc nhìn của **Bài toán 2**. Song ở bài toán này, để tránh không phải loại bớt nghiệm ta có thể sử dụng luôn hệ thức $d(I, AB) = d(I, CD)$ để tìm điểm I .

* Khi tìm được điểm I ta sẽ dễ dàng viết được phương trình đường thẳng AD theo góc nhìn của **Bài toán 6.1** (các bạn sẽ được tìm hiểu ở phần sau) và việc tìm ra các điểm A, C, B, D trở nên đơn giản.

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

Giải

Gọi $I(t; 2t-1) \in \Delta$ là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có: $d(I, AB) = d(I, CD)$

$$\Leftrightarrow \frac{|t - (2t-1) + 4|}{\sqrt{2}} = \frac{|t - (2t-1) - 4|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow |t-5| = |t+3| \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow I(1;1)$$

Vì $AD \perp AB$, nên phương trình AD có dạng: $x + y + m = 0$

$$\text{Ta có: } d(I, AD) = d(I, AB) \Leftrightarrow \frac{|m+2|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD: x+y+2=0 \\ AD: x+y-6=0 \end{cases}$$

+ Với $AD: x + y + 2 = 0$, khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow A(-3;1)$$

Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow D(1;-3)$

Do $I(1;1)$ là trung điểm của AC, BD nên suy ra: $C(5;1), B(1;5)$

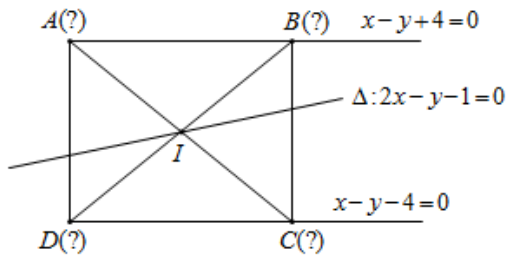
+ Với $AD: x + y - 6 = 0$, khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y-6=0 \\ x-y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow A(1;5)$$

Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y-6=0 \\ x-y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow D(5;1)$

Do $I(1;1)$ là trung điểm của AC, BD nên suy ra: $C(1;-3), B(-3;1)$

Vậy $A(-3;1), B(1;5), C(5;1), D(1;-3)$ hoặc $A(1;5), B(-3;1), C(1;-3), D(5;1)$.



Nhận xét:

Nếu bài toán trên việc tìm I ta sử dụng đẳng thức $d(I, AB) = 2\sqrt{2}$ (trước đó ta đi tính $d(AB, CD) = d(M, CD) = 4\sqrt{2}$, với $M \in AB$) sẽ cho ra hai điểm I , khi đó ta phải có bước thử lại $d(I, CD) = 2\sqrt{2}$. Song ở bài toán trên thay vì làm thế, ta sử dụng đẳng thức: $d(I, AB) = d(I, CD)$ giúp ta tìm được duy nhất được điểm I thỏa mãn bài toán. Như vậy **Bài toán 2** có thể được phát biểu tổng quát hơn là: “Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ và liên hệ với một (hoặc 2) đường thẳng khác qua hệ thức có yếu tố khoảng cách”.

Ví dụ 4 (A, A1 – 2013 – NC). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x - y = 0$. Đường tròn (C) có bán kính $R = \sqrt{10}$ cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy. Viết phương trình đường tròn (C).

Phân tích hướng giải:

* Ta nhận thấy để giải quyết được yêu cầu bài toán, ta cần tìm tọa độ tâm I của đường tròn (C).

* Vẫn một tư duy quen thuộc khi đi tìm điểm, ta sẽ cần tìm ra các yếu tố định tính (điểm I nằm trên đường thẳng nào đã biết phương trình?) và yếu tố định lượng liên quan tới điểm I (điểm I có cách một điểm cố định nào đó một khoảng tính được không? Có cách một đường thẳng cho trước một khoảng không đổi không?). Để có được điều này ta cần khai thác các dữ kiện mà bài toán cho.

* Nếu gọi H là giao điểm của IM và Δ (với M là giao của hai tiếp tuyến) ta sẽ dễ dàng tính được $IH = \sqrt{2}$ hay $d(I, \Delta) = \sqrt{2}$.

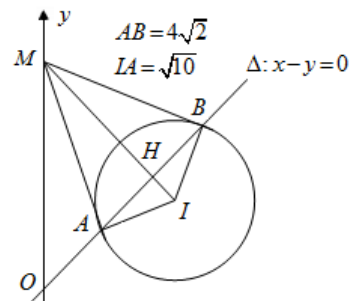
* $IM \perp \Delta$, nếu biết thêm tọa độ một điểm thuộc IM ta sẽ viết được phương trình IM và sẽ tìm được điểm M nhờ vào **Bài toán 2**. Lúc này với dữ kiện M thuộc tia Oy, định hướng ta đi tìm tọa độ điểm M .

* Với số liệu $R = \sqrt{10}$ và $AB = 4\sqrt{2}$ giúp ta tính được $MH = 4\sqrt{2}$ hay $d(M, \Delta) = 4\sqrt{2}$. Như vậy điểm M sẽ được “tháo” theo góc nhìn của **Bài toán 2**. Sau đây là lời giải chi tiết:

Giải

+ Gọi I là tâm của đường tròn (C);

M là giao điểm của tiếp tuyến tại A và B của (C), H là giao điểm của AB và IM .



Do M thuộc tia Oy nên gọi $M(0; m)$ với $m \geq 0$ và H là trung điểm của $AB \Rightarrow AH = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{2}$

+ Xét tam giác IAM , ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{40} \Leftrightarrow AM = 2\sqrt{10}$$

$$\text{Suy ra } MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Mà } MH = d(M, \Delta) \Leftrightarrow 4\sqrt{2} = \frac{|m|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = 8 \text{ hoặc } m = -8 \text{ (loại)}.$$

Do đó $M(0; 8)$.

+ Đường thẳng IM qua M và vuông góc với Δ nên có phương trình:

$$x + y - 8 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } I(t; 8-t), \text{ suy ra: } IH &= \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow d(I, \Delta) = \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{|t - (8-t)|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(5; 3) \\ I(3; 5) \end{cases} \end{aligned}$$

Kiểm tra điều kiện $IM = \sqrt{IA^2 + AM^2} = 5\sqrt{2}$, ta được $I(5; 3)$

Vậy đường tròn (C) có phương trình $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 10$.

Nhận xét:

* Như vậy ở bài toán trên, việc tìm điểm M và I đều được áp dụng theo nội dung **Bài toán 2**.

* Ở bài toán này đã có rất nhiều bạn tìm ra hai điểm M , do không chú ý tới dữ kiện M thuộc tia Oy được hiểu là $M(0; m)$ với $m \geq 0$.

* Ở bài toán trên ngoài cách tìm điểm I theo góc nhìn của **Bài toán 2**. Các bạn có thể tìm I theo góc nhìn của **Bài toán 5.1** (sẽ được đề cập chi tiết ở phần sau). Cụ thể:

+ Đường thẳng IM qua M và vuông góc với Δ nên có phương trình:

$$x + y - 8 = 0$$

$$\text{Do đó tọa độ điểm } H \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow H(4; 4)$$

$$+ \text{ Ta có } IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{2} = \frac{1}{4}HM \Rightarrow \overline{IH} = \frac{1}{4}\overline{HM}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x_I = \frac{1}{4} \cdot (-4) \\ 4 - y_I = \frac{1}{4} \cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 5 \\ y_I = 3 \end{cases} \Rightarrow I(5;3)$$

E. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ với $A(1;1)$, $B(4;5)$. Tâm I của hình bình hành thuộc đường thẳng $x + y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh C, D biết rằng diện tích hình bình hành $ABCD$ bằng 9.

Bài 2 (D – 2007). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và đường thẳng $d: 3x - 4y + m = 0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác PAB đều.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A với $BC = 4\sqrt{2}$. Các đường thẳng AB và AC lần lượt đi qua các điểm $M\left(1; -\frac{5}{3}\right)$ và $N\left(0; \frac{18}{7}\right)$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết đường cao AH có phương trình $x + y - 2 = 0$ và điểm B có hoành độ dương.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có giao điểm hai đường chéo là I . Trung điểm của AB là điểm $M(0; -7)$ và trọng tâm $G(5; 3)$ của tam giác ICD . Biết diện tích ABD bằng 12 và A thuộc đường thẳng $\Delta: x - y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành $ABCD$.

F. GIẢI BÀI TẬP VẬN DỤNG

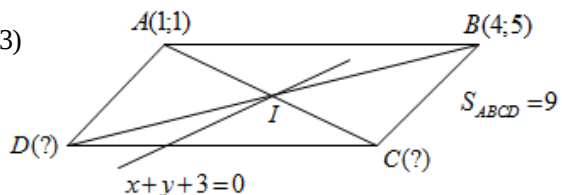
Bài 1.

+ Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 4) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}} = (4; -3)$

nên AB có phương trình:

$$4x - 3y - 1 = 0$$

+ Ta có



$$S_{ABCD} = 4S_{IAB} = 4 \cdot \frac{1}{2} d(I, AB) \cdot AB \Rightarrow d(I, AB) = \frac{S_{ABCD}}{2AB} = \frac{9}{2\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{9}{10}$$

$$+ \text{ Gọi } I(t; -t-3), \text{ khi đó: } d(I, AB) = \frac{9}{10} \Leftrightarrow \frac{|4t - 3(-t-3) - 1|}{5} = \frac{9}{10}$$

$$\Leftrightarrow |7t+8| = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{25}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right) \\ I\left(-\frac{25}{14}; -\frac{17}{14}\right) \end{cases}$$

+ Vì I lần lượt là trung điểm của AC, BD nên :

Với $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow C(-2; -6)$ và $D(-5; -10)$

Với $I\left(-\frac{25}{14}; -\frac{17}{14}\right) \Rightarrow C\left(-\frac{32}{7}; -\frac{24}{7}\right)$ và $D\left(-\frac{53}{7}; -\frac{52}{7}\right)$.

Vậy $C(-2; -6), D(-5; -10)$ hoặc $C\left(-\frac{32}{7}; -\frac{24}{7}\right), D\left(-\frac{53}{7}; -\frac{52}{7}\right)$.

Bài 2.

+ Đường tròn (C) có tâm

$I(1; -2)$ và bán kính $R = 3$

+ Tam giác PAB đều nên $\angle API = 30^\circ$.

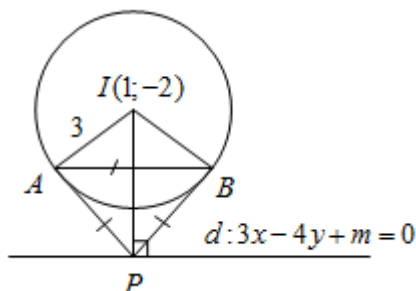
Xét tam giác vuông IAP có :

$$IP = \frac{IA}{\sin \angle API} = \frac{3}{\sin 30^\circ} = 6$$

+ Với $P \in d$; $IP = 6$ và có duy nhất một điểm P thỏa mãn, suy ra $IP \perp d$

hay : $d(I, d) = IP \Leftrightarrow \frac{|11+m|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 6 \Leftrightarrow |m+11| = 30 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 19 \\ m = -41 \end{cases}$

+ Vậy $m = 19$ hoặc $m = -41$.



Bài 3.

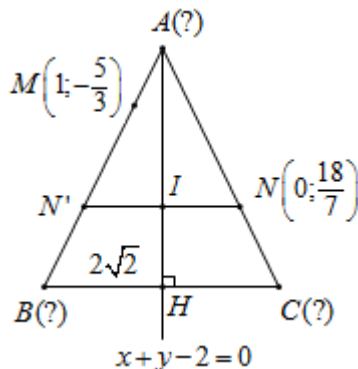
+ Gọi N' đối xứng với $N\left(0; \frac{18}{7}\right)$ qua AH ,

suy ra $N' \in AB$

NN' đi qua $N\left(0; \frac{18}{7}\right)$ và vuông góc với AH

nên có phương trình : $x - y + \frac{18}{7} = 0$

Khi đó tọa độ giao điểm I của NN' và AH là nghiệm của hệ :



$$\begin{cases} x - y + \frac{18}{7} = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{7} \\ y = \frac{16}{7} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{2}{7}; \frac{16}{7}\right)$$

Do I là trung điểm của $NN' \Rightarrow N'\left(-\frac{4}{7}; 2\right)$

+ Khi đó AB đi qua $M\left(1; -\frac{5}{3}\right)$ và $N'\left(-\frac{4}{7}; 2\right)$ nên có phương trình:

$$7x + 3y - 2 = 0$$

Suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 7x + 3y - 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 3)$$

+ Gọi $B(-1 + 3t; 3 - 7t) \in AB$ với $t > \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta có : } d(B, AH) &= \frac{BC}{2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|-1 + 3t + 3 - 7t - 2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow |4t| = 4 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -1 \text{ (loại)} \end{aligned}$$

Suy ra $B(2; -4)$

+ BC đi qua $B(2; -4)$ và vuông góc với AH nên có phương trình:

$$x - y - 6 = 0$$

Khi đó tọa độ điểm H là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow H(4; -2) \Rightarrow C(6; 0) \text{ (do } H \text{ là trung điểm của } BC)$$

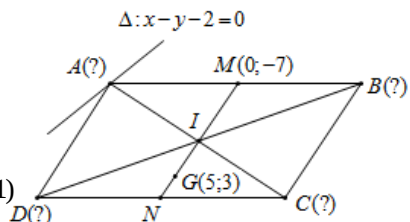
Vậy $A(-1; 3), B(2; -4), C(6; 0)$.

Bài 4.

+ Gọi N là trung điểm của CD , khi đó :

$$IG = \frac{2}{3}IN = \frac{2}{3}IM \Rightarrow \overline{IG} = \frac{2}{3}\overline{IM}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x_I = \frac{2}{3}(0 - x_I) \\ 3 - y_I = \frac{2}{3}(-7 - y_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 3 \\ y_I = -1 \end{cases} \Rightarrow I(3; -1)$$



+ Ta có $S_{ABD} = 4S_{AMI} = 12 \Rightarrow S_{AMI} = 3$

$$\text{Mặt khác } MI = 3\sqrt{5} \Rightarrow d(A, MI) = \frac{2S_{AMI}}{MI} = \frac{2.3}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

+ Ta có phương trình đường thẳng $MI : 2x - y - 7 = 0$

Gọi $A(a; a - 2) \in \Delta$, khi đó:

$$d(A, MI) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|2a - (a - 2) - 7|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |a - 5| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(3; 1) \\ A(7; 0) \end{cases}$$

Do M là trung điểm của AB và I là trung điểm của AC, BD nên:

+ Với $A(3; 1) \Rightarrow B(-3; -15), C(3; -3), D(9; 13)$

Với $A(7; 0) \Rightarrow B(-7; -1), C(13; 12), D(-1; -2)$

Vậy $A(3; 1), B(-3; -15), C(9; 13), D(3; -3)$

hoặc $A(7; 0), B(-7; -1), C(13; 12), D(-1; -2)$.

3. BÀI TOÁN 3

A. NỘI DUNG BÀI TOÁN 3

Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ (cho biết phương trình Δ - hay M tham số hóa được theo một ẩn) sao cho MAB là tam giác đặc biệt (vuông; cân; hai cạnh có mối liên hệ về độ dài,...)

B. CÁCH GIẢI CHUNG

Gọi $M(t) \in \Delta \xrightarrow{\text{từ dữ kiện tam giác } MAB \text{ đặc biệt}} f(t) = 0 \Leftrightarrow t = ? \Rightarrow M$

Giải thích chi tiết:

Do $M \in \Delta$, nên ta sẽ gọi $M(t)$ (tham số hóa điểm M dựa vào Δ). Sau đó khai thác dữ kiện MAB là tam giác đặc biệt sẽ giúp ta có được phương trình chứa ẩn t : $f(t) = 0$. Giải phương trình tìm t sẽ giúp ta tìm được tọa độ điểm M .

Chú ý:

+ M có thể được tham số hóa thông qua một điểm khác.

+ Hai điểm A, B hoặc đã biết tọa độ, hoặc một trong hai điểm có tọa độ phụ thuộc vào tọa độ điểm M

C. VÍ DỤ GỐC

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta : 2x - y - 5 = 0$ và hai điểm $A(-2; 3), B(4; 1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho tam giác MAB vuông tại M .

Giải

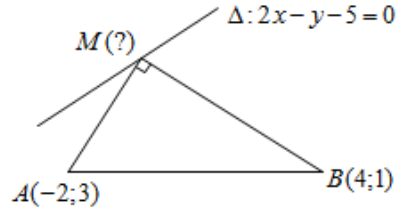
$$+ \text{ Gọi } M(t; 2t-5) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (t+2; 2t-8) \\ \overrightarrow{BM} = (t-4; 2t-6) \end{cases}$$

+ Khi đó tam giác MAB vuông tại M

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t-4) + (2t-8)(2t-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 - 30t + 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2; -1) \\ M(4; 3) \end{cases}$$

+ Vậy $M(2; -1)$ hoặc $M(4; 3)$.



Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác MAB cân tại A và đường thẳng $\Delta: x + 2y + 1 = 0$.

Biết $B(1; -4)$ và $I(2; -2)$ là trung điểm của AM . Tìm tọa độ hai điểm A và M biết Δ đi qua điểm M và M có hoành độ là số nguyên.

Giải

+ Gọi $M(-2t-1; t) \in \Delta$.

Vì $I(2; -2)$ là trung điểm của AM

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = 2x_I - x_M = 2t + 5 \\ y_A = 2y_I - y_M = -4 - t \end{cases}$$

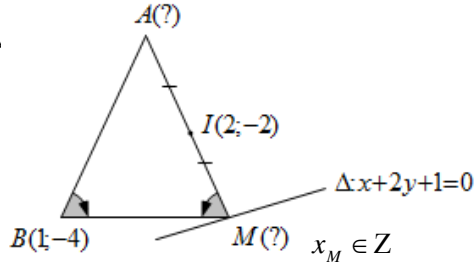
$$\Rightarrow A(2t+5; -4-t)$$

+ Tam giác MAB cân tại A

$$\Leftrightarrow AM = AB \Leftrightarrow AM^2 = AB^2 \Leftrightarrow (4t+6)^2 + (2t+4)^2 = (2t+4)^2 + t^2$$

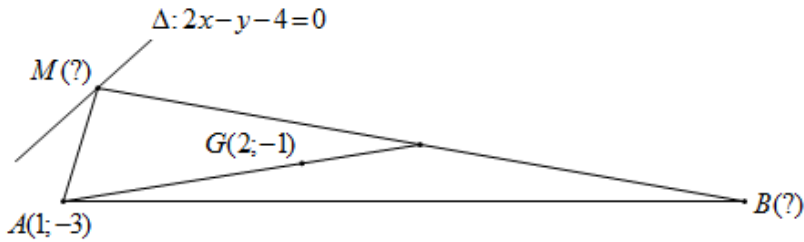
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4t+6 = t \\ 4t+6 = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -\frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow M(3; -2) \text{ hoặc } M\left(\frac{7}{5}; -\frac{6}{5}\right) \text{ (loại)}$$

+ Với $M(3; -2) \Rightarrow A(1; -2)$. Vậy $A(1; -2)$ và $M(3; -2)$.



Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác MAB có trọng tâm $G(2; -1)$ và $A(1; -3)$. Đường thẳng $\Delta: 2x - y - 4 = 0$ đi qua M . Tìm tọa độ điểm M và B biết $MB = 5MA$ và M có hoành độ dương.

Bài giải



+ Gọi $M(t; 2t - 4) \in \Delta$ với $t > 0$. Vì $G(2; -1)$ là trọng tâm của tam giác MAB nên:

$$\begin{cases} x_B = 3x_G - x_A - x_M = 5 - t \\ y_B = 3y_G - y_A - y_M = 4 - 2t \end{cases} \Rightarrow B(5 - t; 4 - 2t)$$

+ Khi đó

$$MB = 5MA \Leftrightarrow MB^2 = 25MA^2 \Leftrightarrow (2t - 5)^2 + (4t - 8)^2 = 25[(t - 1)^2 + (2t - 1)^2]$$

$$\Leftrightarrow 105t^2 - 66t - 39 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -\frac{13}{35} \text{ (loại)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M(1; -2) \\ B(4; 2) \end{cases}$$

D. CÁC VÍ DỤ MỞ RỘNG

Ví dụ 1 (D – 2004). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có các đỉnh $A(-1; 0)$, $B(4; 0)$, $C(0; m)$ với $m \neq 0$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC theo m. Xác định m để tam giác GAB vuông tại G.

Phân tích hướng giải:

* Do G là trọng tâm tam giác nên ta dễ dàng suy ra được $G\left(1; \frac{m}{3}\right)$.

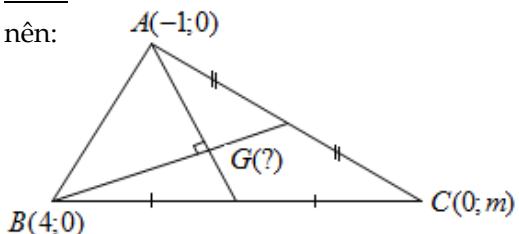
* Khi tọa độ điểm G phụ thuộc theo m, thì dữ kiện tam giác GAB vuông tại G sẽ giúp chúng ta suy ra được m theo góc nhìn của **Bài toán 3**.

Sau đây là lời giải chi tiết cho Ví dụ 1:

Giải

+ Do G là trọng tâm tam giác ABC nên:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-1 + 4 + 0}{3} = 1 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{0 + 0 + m}{3} = \frac{m}{3} \end{cases}$$



$$\Rightarrow G\left(1; \frac{m}{3}\right) \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$+ \text{ Suy ra } \begin{cases} \overrightarrow{GA} = \left(-2; -\frac{m}{3}\right) \\ \overrightarrow{GB} = \left(3; -\frac{m}{3}\right) \end{cases}, \text{ khi đó tam giác } GAB \text{ vuông tại } G$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{m^2}{9} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3\sqrt{6}$$

Vậy $G\left(1; \frac{m}{3}\right)$ với $m = \pm 3\sqrt{6}$.

Ví dụ 2 (A, A1 – 2013 – CB). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x + y + 5 = 0$ và $A(-4; 8)$. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C , N là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng MD . Tìm tọa độ các điểm B và C , biết rằng $N(5; -4)$.

Phân tích hướng giải:

* Do C thuộc đường thẳng d nên ta nghĩ ngay tới việc tìm điểm C trước bằng cách tham số hóa tọa độ điểm $C(t; -2t - 5) \in d$

* Lúc này ta cần thiết lập một phương trình $f(t) = 0$. Trong bài toán có 2 yếu tố điểm tường minh là $A(-4; 8)$ và $N(5; -4)$. Khi đó ta nghĩ ngay tới việc gắn kết các điểm C, A, N để tạo mối liên hệ. Ta sẽ đặt câu hỏi: “tam giác CAN có gì đặc biệt?”. Bằng kiến thức hình học phẳng ta dễ dàng trả lời được câu hỏi bằng việc chứng minh tam giác CAN vuông tại $N \rightarrow$ chuyển về **Bài toán 3** và khi đã “tháo” được điểm C thì việc tìm tọa độ điểm B tiếp theo sẽ khá đơn giản. Sau đây là lời giải chi tiết:

Giải

+ Gọi $AC \cap BN = \{H\}$.

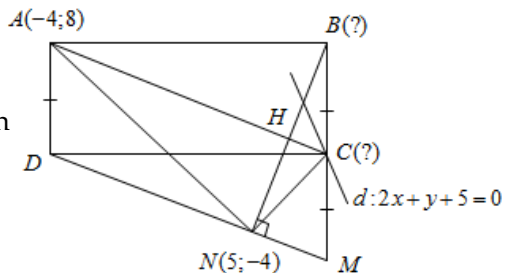
Do $ACMD$ là hình bình hành nên $AC \parallel DM$ hay $CH \parallel MN$

Suy ra CH là đường trung bình

$$\text{trong } \triangle BNM \Rightarrow \begin{cases} CH \perp BN \\ HB = HN \end{cases} \Rightarrow B$$

đối xứng với N qua AC

Khi đó $\widehat{ANC} = \widehat{ABC} = 90^\circ$ hay $AN \perp NC$ (*)



+ Gọi $C(t; -2t - 5) \in d \Rightarrow \overline{NC} = (t - 5; -2t - 1)$ và ta có $\overline{AN} = (9; -12)$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow \overline{NC} \cdot \overline{AN} = 0 \Leftrightarrow 9(t - 5) - 12(-2t - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 33t - 33 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow C(1; -7).$$

+ Ta có $\overline{AC} = (5; -15) = 5(1; -3)$, suy ra phương trình $AC: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -7 - 3t \end{cases}$

Gọi $H(1 + m; -7 - 3m) \in AC \Rightarrow \overline{NH} = (m - 4; -3m - 3)$.

Do $NH \perp AC \Leftrightarrow \overline{NH} \perp \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow m - 4 - 3(-3m - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \Rightarrow H\left(\frac{1}{2}; -\frac{11}{2}\right)$$

+ H là trung điểm của BN nên suy ra $\begin{cases} x_B = 2x_H - x_N = -4 \\ y_B = 2y_H - y_N = -7 \end{cases} \Rightarrow B(-4; -7)$

Nhận xét:

Khi bài toán tìm điểm $M(t)$ đang thiếu đi một yếu tố (cần để lập phương trình chứa t) thì ta sẽ cần khai thác các dữ kiện còn lại của bài toán. Cụ thể: Nếu bài toán cho biết tọa độ một điểm, ta nghĩ tới việc tính khoảng cách từ M tới điểm đó (**Bài toán 1**). Nếu bài toán cho biết phương trình một đường thẳng, ta nên tìm cách tính khoảng từ M tới đường thẳng đó (**Bài toán 2**). Nếu bài toán cho biết tọa độ của hai điểm (như ví dụ trên) ta sẽ gắn kết M với hai điểm đó, bằng cách trả lời câu hỏi: “ba điểm này tạo thành tam giác có gì đặc biệt?” (**Bài toán 3**), “nếu ba điểm này thẳng hàng thì chúng có mối liên hệ gì qua hệ thức vectơ?” (các bạn sẽ tìm hiểu câu hỏi này ở **Bài toán 5**).

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(3; -4)$ và đường thẳng $d: x + y - 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với d .

Phân tích hướng giải:

* Nếu biết tọa độ tâm I của đường tròn (C) ta sẽ tìm được bán kính và suy ra được phương trình (C) .

Như vậy bài toán quay về việc tìm tọa độ điểm I .

* Do $A(1; 2) \in d$ nên (C) tiếp xúc với d tại $A \Rightarrow IA \perp d$. Khi đó ta viết được phương trình IA và lúc này I đang thuộc một đường thẳng đã biết phương trình. Mặt khác $IA = IB = R$ hay tam giác IAB cân tại I . Như vậy việc tìm điểm I được chuyển về **Bài toán 3**.

Sau đây là lời giải chi tiết:

Giải

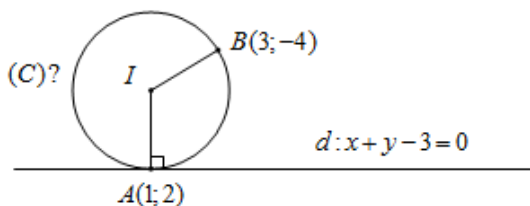
+ Gọi I là tâm của đường tròn (C) cần lập.

Do $A(1; 2) \in d$ nên (C) tiếp

xúc với d tại $A \Rightarrow IA \perp d$

+ Khi đó vectơ chỉ phương của đường thẳng IA là

$$\vec{u}_{IA} = \vec{n}_d = (1; -1)$$



Suy ra phương trình $IA: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \end{cases}$. Gọi $I(1+t; 2-t) \in IA$

+ Vì $\begin{cases} A \in (C) \\ B \in (C) \end{cases} \Rightarrow IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2$

$$\Leftrightarrow t^2 + t^2 = (t-2)^2 + (t-6)^2 \Leftrightarrow -16t + 40 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \Rightarrow I\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

+ Khi đó bán kính $R = IA = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, suy ra đường tròn (C) :

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}.$$

Nhận xét:

Với dữ kiện $IA = IB$, các bạn có thể suy ra điểm I thuộc đường trung trực của AB . Khi đó ta sẽ dễ dàng tìm được tọa độ điểm I . Do điểm I chính là giao điểm của đường thẳng IA và đường trung trực của AB (các phương trình này đều viết đơn giản).

Ví dụ 4 (A – 2009 – CB). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $I(6; 2)$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Điểm $M(1; 5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB .

Phân tích hướng giải:

* AB đi qua $M(1; 5)$. Do đó để viết được phương trình đường thẳng AB ta có thể nghĩ tới việc tìm thêm vectơ pháp tuyến hoặc chỉ phương của AB .

* Ta có $I(6; 2)$; $IE \perp AB$, cộng thêm E thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 5 = 0$. Dữ kiện này gợi ý ta đi tìm tọa độ điểm E bằng việc gọi $E(t; 5-t)$.

* Lúc này ta cần thiết lập một phương trình $f(t) = 0$. Trong bài toán có 2 yếu tố điểm cho trước là $I(6;2)$ và $M(1;5)$. Khi đó ta nghĩ ngay tới việc gắn kết các điểm E, I, M để tạo mối liên hệ. Song ta nhận thấy tam giác EIM không có gì đặc biệt. Như vậy ta cần một điểm thay thế khác mà sự có mặt của nó sẽ giúp ta nhìn thấy **Bài toán 3**.

* Do I là tâm đối xứng của hình chữ nhật $ABCD$. Nên ta nghĩ tới việc tạo ra điểm F đối xứng với E qua tâm I . Khi đó tam giác MEF hay IFM vuông tại F . Nghĩa là ta sẽ tìm được tọa độ điểm E theo góc nhìn của **Bài toán 3** (ở đây các bạn có thể tìm điểm đối xứng với M qua tâm I – xem ở phần **nhận xét**). Sau đây là lời giải chi tiết:

Giải

+ Gọi $EI \cap AB = \{F\}$, suy ra I là trung điểm của EF .

+ Gọi $E(t; 5-t) \in \Delta$, khi đó:

$$\begin{cases} x_F = 2x_I - x_E = 12 - t \\ y_F = 2y_I - y_E = t - 1 \end{cases} \Rightarrow F(12-t; t-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{MF} = (11-t; t-6) \\ \overline{IE} = (t-6; 3-t) \end{cases}$$

+ Ta có $IE \perp AB$

$$\text{hay } IE \perp MF \Leftrightarrow \overline{IE} \cdot \overline{MF} = 0 \Leftrightarrow (11-t)(t-6) + (t-6)(3-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-6)(14-2t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(6; -1) \\ E(7; -2) \end{cases}$$

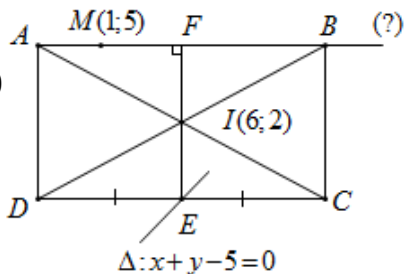
+ Với $E(6; -1)$, khi đó AB đi qua $M(1;5)$ nhận $\overline{EI} = (0;3) = 3(0;1)$ làm vectơ pháp tuyến nên AB có phương trình: $y - 5 = 0$.

Với $E(7; -2)$, khi đó AB đi qua $M(1;5)$ nhận $\overline{IE} = (1; -4)$ làm vectơ pháp tuyến nên AB có phương trình: $x - 1 - 4(y - 5) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + 19 = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng AB là $y - 5 = 0$ hoặc $x - 4y + 19 = 0$.

Nhận xét:

* Vì hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật và hình vuông nhận giao điểm hai đường chéo là tâm đối xứng của hình đó. Nên nếu trong đề bài cho một điểm thuộc một cạnh thì các bạn nên nghĩ tới việc tìm điểm đối xứng của điểm đó qua tâm của hình chứa nó (ở đây tâm đã biết tọa độ).



* Sau khi tìm được $t = 6$ hoặc $t = 7$ các bạn có thể suy ra được $F(6; 5)$ hoặc $F(5; 6)$, từ đó suy ra phương trình AB (đi qua hai điểm M, F đã biết tọa độ).

*) Ngoài cách giải ở ví dụ trên các bạn có thể tìm điểm E bằng cách xác định thêm điểm N đối xứng với M qua I , khi đó $N(11; -1)$ và thuộc CD . Sử dụng **Bài toán 3** với tam giác IEN vuông tại E , sẽ giúp ta có được đáp số của bài toán.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có $B(1; -2)$ và trọng tâm G của tam giác ABC nằm trên đường thẳng $d: 2x - y + 1 = 0$. Trung điểm của CD là điểm $N(-1; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, C, D . Biết G có hoành độ nhỏ nhất.

Phân tích hướng giải:

Trọng tâm G thuộc đường thẳng d nên ta nghĩ tới việc tham số hóa $G(t)$. Ta nhận thấy D có mối liên hệ với G qua hệ thức vectơ $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BG}$ và N là trung điểm của DC . Nghĩa là ta cũng suy ra được $\begin{cases} D(t) \\ C(t) \end{cases}$. Mà BCD là tam giác vuông tại C nên ta hoàn toàn “tháo” được C, D theo góc nhìn của **Bài toán 3**. Khi đó việc tìm điểm A sẽ trở nên đơn giản nhờ sử dụng hệ thức $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. Sau đây là lời giải chi tiết:

Giải

+ Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

Do $G \in d \Rightarrow G(t; 2t + 1)$

+ Ta có: $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BG}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_D - 1 = 3(t - 1) \\ y_D + 2 = 3(2t + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 3t - 2 \\ y_D = 6t + 7 \end{cases} \Rightarrow D(3t - 2; 6t + 7)$$

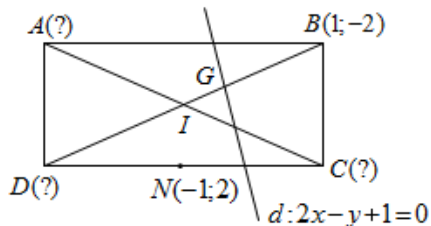
+ Do N là trung điểm của $DC \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2x_N - x_D = -2 - (3t - 2) = -3t \\ y_C = 2y_N - y_D = 4 - (6t + 7) = -3 - 6t \end{cases}$

$$\Rightarrow C(-3t; -3 - 6t) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CB} = (3t + 1; 6t + 1) \\ \overrightarrow{CD} = (6t - 2; 12t + 10) \end{cases}$$

Tam giác BCD vuông tại C nên

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow (3t + 1)(6t - 2) + (6t + 1)(12t + 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow 45t^2 + 36t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3} \text{ hoặc } t = -\frac{2}{25}$$



Do G có hoành độ nhỏ nhất nên $t = -\frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} D(-4;3) \\ C(2;1) \end{cases}$

$$+ \text{ Mặt khác } \overline{BA} = \overline{CD} \Rightarrow \begin{cases} x_A - 1 = -6 \\ y_A + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -5 \\ y_A = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-5;0)$$

Vậy $A(-5;0), C(2;1), D(-4;3)$.

Nhận xét:

Khi chúng ta gặp bài toán tìm điểm, mà các điểm này chúng ta không chỉ ra được nó thuộc đường nào đã biết phương trình. Lúc đó giải pháp là tìm mối liên hệ thông qua các điểm có thể tham số hóa được (những điểm thuộc đường thẳng đề bài đã cho hoặc viết được phương trình). Cụ thể ở ví dụ trên ta có mối liên hệ giữa D và G ; C và D mà G tham số hóa được theo ẩn t do thuộc đường thẳng đề bài cho và tìm cách tạo ra phương trình chứa t nhờ **Bài toán 3**.

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trọng tâm $G(2;-3)$ và $B(1;1)$. Đường thẳng $\Delta: x - y - 4 = 0$ đi qua A và đường phân giác trong của góc A cắt BC tại điểm I sao cho diện tích tam giác IAB bằng $\frac{4}{5}$ diện tích tam giác IAC . Viết phương trình đường thẳng BC biết A có hoành độ dương.

Phân tích hướng giải:

Do tam giác ABC có trọng tâm $G(2;-3)$ và $B(1;1)$ nên nếu tìm được tọa độ điểm A ta sẽ tìm được tọa độ điểm C và dễ dàng viết được phương trình BC . Lúc này việc tìm điểm A sẽ đưa về **Bài toán 3** như sau:

* Điểm $A \in \Delta: x - y - 4 = 0$

* Do AI là phân giác nên $d(I, AB) = d(I, AC)$,

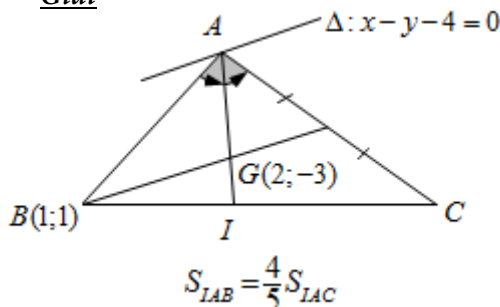
$$\text{khi đó } S_{IAB} = \frac{4}{5} S_{IAC} \Leftrightarrow AB = \frac{4}{5} AC$$

Giải

+ Gọi $A(t; t-4) \in \Delta$ với $t > 0$.

Do $G(2;-3)$ là trọng tâm tam giác ABC nên:

$$\begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B = 5 - t \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B = -6 - t \end{cases}$$



$$\Rightarrow C(5-t; -6-t)$$

+ Vì AI là phân giác trong của tam giác ABC nên $d(I, AB) = d(I, AC)$, khi

$$\text{đó: } S_{IAB} = \frac{4}{5} S_{IAC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot d(I, AB) \cdot AB = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot d(I, AC) \cdot AC$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{4}{5} AC \Leftrightarrow 25AB^2 = 16AC^2$$

$$\Leftrightarrow 25[(t-1)^2 + (t-5)^2] = 16[(2t-5)^2 + (2t+2)^2]$$

$$\Leftrightarrow 39t^2 + 54t - 93 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -\frac{31}{13} \text{ (loại)} \Rightarrow C(4; -7)$$

+ Khi đó BC đi qua $B(1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{BC} = (3; -8)$ nên có

$$\text{phương trình: } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 8t \end{cases}$$

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 18, đường chéo AC có phương trình $x + 2y - 9 = 0$, đường thẳng AB đi qua điểm $E(5;5)$, đường thẳng AD đi qua điểm $F(5;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, D của hình chữ nhật, biết điểm A có tung độ lớn hơn $\frac{3}{2}$ và điểm B có hoành độ lớn hơn 3.

Phân tích hướng giải:

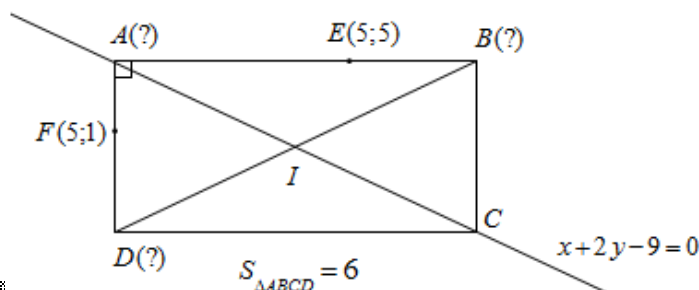
* Có $A \in AC: x + 2y - 9 = 0$

* Tam giác AEF vuông tại $A \rightarrow$ chuyển về **Bài toán 3**, khi đó ta sẽ tìm được tọa độ điểm A .

+ Sau khi tìm được điểm A ta dễ dàng viết được phương trình AB và AD và khi đó ta sẽ tiếp tục tìm được hai điểm B và D (các bạn sẽ được xem kỹ hơn ở **Bài toán 4**).

Sau đây là lời giải chi tiết:

Giải



+ Gọi $A(9-2t;t) \in AC$ với $t > \frac{3}{2}$, khi đó $\begin{cases} \overline{AE} = (4-2t;t-5) \\ \overline{AF} = (4-2t;t-1) \end{cases}$

+ Do tam giác AEF vuông tại A nên :

$$\overline{AE} \cdot \overline{AF} = 0 \Leftrightarrow (2t-4)^2 + (t-5)(t-1) = 0 \Leftrightarrow 5t^2 - 22t + 21 = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

hoặc $t = \frac{7}{5}$ (loại) $\Rightarrow A(3;3)$

+ Khi đó AB đi qua $A(3;3)$ và $E(5;5)$ có phương trình: $x - y = 0$

AD đi qua $A(3;3)$ và $E(5;1)$ có phương trình: $x + y - 6 = 0$

Gọi $\begin{cases} B(t_1;t_1) \in AB \\ D(t_2;6-t_2) \in AD \end{cases}$ với $t_1 > 3$

Gọi $AC \cap BD = \{I\}$, khi đó I là trung điểm của BD nên:

$$I\left(\frac{t_1+t_2}{2}; \frac{t_1-t_2+6}{2}\right).$$

Mặt khác:

$$I \in AC \Leftrightarrow \frac{t_1+t_2}{2} + 2 \cdot \frac{t_1-t_2+6}{2} - 9 = 0 \Leftrightarrow 3t_1 - t_2 - 6 = 0 \Leftrightarrow t_2 = 6 - 3t_1$$

$$\Rightarrow D(6-3t_1; 3t_1) \Rightarrow \begin{cases} \overline{AB} = (t_1-3; t_1-3) \\ \overline{AD} = (3-3t_1; 3t_1-3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{(t_1-3)^2 + (t_1-3)^2} = \sqrt{2} \cdot |t_1-3| = \sqrt{2}(t_1-3) \\ AD = \sqrt{(3t_1-3)^2 + (3t_1-3)^2} = 3\sqrt{2} \cdot |t_1-1| = 3\sqrt{2}(t_1-1) \end{cases}$$

+ Khi đó $S_{ABCD} = 18 \Leftrightarrow AB \cdot AD = 18 \Leftrightarrow \sqrt{2}(t_1-3) \cdot 3\sqrt{2}(t_1-1) = 18$

$$\Leftrightarrow t_1^2 - 4t_1 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ hoặc } t = 0 \text{ (loại)}$$

Suy ra $B(4;4)$ và $D(-6;12)$.

Chú ý :

Ngoài cách tìm tọa độ các điểm B, C, D ở lời giải trên các bạn có thể tham khảo thêm lời giải khác ở một bài tương tự (**Bài 2 trong phần Bài tập vận dụng**)

Ví dụ 8 (A – 2010 – NC). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(6;6)$; đường thẳng d đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình $x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C , biết điểm $E(1;-3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

Phân tích hướng giải :

* Khi tìm điểm câu hỏi đầu tiên chúng ta thường đặt ra : “điểm đó có thuộc một đường thẳng đã biết phương trình (hoặc có thể viết được) hay không”. Yêu cầu bài toán cần tìm tọa độ hai điểm B, C , giúp ta nghĩ tới việc nên đi viết phương trình BC .

* Dữ kiện tam giác ABC cân tại A và d đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC , cho ta biết được $BC \parallel d$ và đang đi qua điểm H là điểm đối xứng với A qua d . Như vậy ta hoàn toàn viết được phương trình BC .

* Nếu tìm được B ta sẽ suy ra được C (H là trung điểm của BC). Lúc này dữ kiện còn lại của bài toán “ $E(1; -3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác ABC ” sẽ giúp ta tìm được tọa độ điểm B theo góc nhìn của **Bài toán 3**. Do đó ta có lời giải chi tiết sau:

Giải

+ Từ A hạ đường cao AH ($H \in BC$) cắt d tại I .

Vì tam giác ABC cân tại A nên H, I

lần lượt là trung điểm của BC và AH .

Khi đó AH đi qua $A(6; 6)$

vuông góc với d nên có

phương trình : $x - y = 0$

Suy ra tọa độ điểm I là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2 \Rightarrow I(2; 2) \Rightarrow H(-2; -2)$$

+ Đường thẳng BC đi qua H và song song với d nên có phương trình :

$$x + y + 4 = 0$$

+ Gọi $B(t; -4 - t) \in BC \Rightarrow C(-4 - t; t)$ (do H là trung điểm của BC)

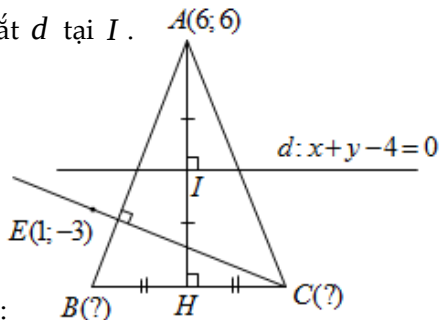
$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{AB} = (t - 6; -10 - t) \\ \overline{CE} = (t + 5; -3 - t) \end{cases}$$

Do $E(1; -3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác ABC , suy ra:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CE} = 0 \Leftrightarrow (t - 6)(t + 5) + (-10 - t)(-3 - t) = 0$$

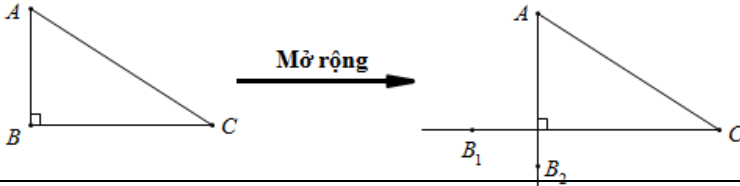
$$\Leftrightarrow t^2 + 6t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(0; -4) \\ C(-4; 0) \\ B(-6; 2) \\ C(2; -6) \end{cases}$$

+ Vậy $B(0; -4)$, $C(-4; 0)$ hoặc $B(-6; 2)$, $C(2; -6)$.



Nhận xét:

Ở bài toán này ta nhận thấy có sự mở rộng trong nội dung của **Bài toán 3**. Thay vì 3 điểm tạo thành tam giác vuông, ta có một liên hệ qua 4 điểm có yếu tố vuông (hình vẽ minh họa). Về bản chất hai dữ kiện này là như nhau, đều giúp ta “cắt nghĩa” yếu tố vuông để thiết lập được một phương trình chứa ẩn mà ta cần tìm.



Ví dụ 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác nhọn ABC có phương trình đường trung tuyến kẻ từ A và đường thẳng chứa cạnh BC lần lượt là $3x + 5y - 2 = 0$ và $x - y - 2 = 0$. Đường thẳng qua A , vuông góc với BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là $D(2; -2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết đỉnh B có hoành độ không lớn hơn 1.

Phân tích hướng giải:

* Khi đứng trước bài toán hình học Oxy , câu hỏi đầu tiên thường hay đặt ra “Với những dữ kiện ban đầu, ta có thể tìm được ngay tọa độ của những điểm nào?”. Trong bài toán này câu trả lời dành cho 2 điểm M và A . Bởi M là giao của hai đường thẳng đã biết phương trình (BC và AM), còn A là giao của AM (đã biết phương trình) và AD (viết được do đi qua D vuông góc với BC).

* Lúc này ta nghĩ tới việc tìm tọa độ điểm B bởi có những dữ kiện “gợi ý” như B có hoành độ không lớn hơn 1 và cộng thêm việc biết tọa độ điểm B ta sẽ suy ra tọa độ điểm C (do M là trung điểm của BC).

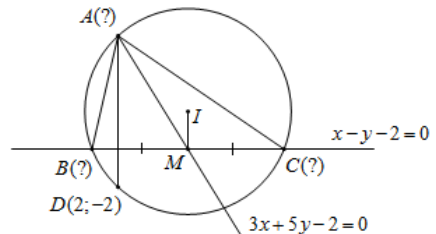
* $B \in BC$, như vậy nếu biết tọa độ điểm I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta sẽ dễ dàng suy ra được tọa độ điểm B theo góc nhìn của **Bài toán 1** ($B \in BC$ và $BI = IA$).

* Tam giác IAD cân tại I , phương trình IM hoàn toàn viết được. Nghĩa là ta đã thấy nội dung của **Bài toán 3**. Điều đó giúp ta tìm được tọa độ điểm I . Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Sau đây phân lời giải chi tiết:

Giải

+ Gọi M là trung điểm của BC và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC



Suy ra tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 3x + 5y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

AD đi qua $D(2; -2)$ và vuông góc với BC nên có phương trình: $x + y = 0$

Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 5y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 1)$$

+ IM đi qua M và vuông góc với BC nên có phương trình: $x + y - 1 = 0$

Gọi $I(t; 1-t) \in IM$, khi đó ΔIAD cân tại I nên:

$$\begin{aligned} IA^2 = ID^2 &\Leftrightarrow (t+1)^2 + t^2 = (t-2)^2 + (t-3)^2 \\ &\Leftrightarrow 2t+1 = -10t+13 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow I(1; 0) \end{aligned}$$

+ Gọi $B(b; b-2) \in BC$ với $b \leq 1$, khi đó:

$$\begin{aligned} IB^2 = IA^2 &\Leftrightarrow (b-1)^2 + (b-2)^2 = 5 \Leftrightarrow b^2 - 3b = 0 \Leftrightarrow b = 0 \text{ hoặc } b = 3 \text{ (loại)} \\ &\Rightarrow B(0; -2) \end{aligned}$$

+ Vì M là trung điểm của $BC \Rightarrow C(3; 1)$

Vậy $A(-1; 1)$, $B(0; -2)$, $C(3; 1)$.

Nhận xét:

- + Với việc tìm điểm B theo hai dữ kiện $B \in BC$ và $BI = IA$ ngoài cách nhìn theo **Bài toán 1**, cũng có thể coi đó là **Bài toán 3** (bởi tam giác IAB vuông tại I).
- + Ở bài toán trên các bạn có thể tìm tọa độ B, C bằng cách viết phương trình đường

tròn $(I; ID)$: $(x-1)^2 + y^2 = 5$ và giải hệ: $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 5 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{ và với điều kiện } x_B \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} B(0; -2) \\ C(3; 1) \end{cases}$$

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD . Biết tọa độ $B(3; 3), C(5; -3)$. Giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x + y - 3 = 0$. Xác định tọa độ còn lại của hình thang $ABCD$ để $CI = 2BI$, tam giác ABC có diện tích bằng 12, điểm I có hoành độ dương và điểm A có hoành độ âm.

Giải

+ Gọi $I(t; 3-2t) \in \Delta$ (với $t > 0$), khi đó:

$$CI = 2BI \Leftrightarrow (t-5)^2 + (2t-6)^2 = 4[(t-3)^2 + 4t^2]$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 + 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

hoặc $t = -\frac{5}{3}$ (loại) $\Rightarrow I(1;1)$

+ Khi đó ta có phương trình AC đi qua I, C có phương trình: $x + y - 2 = 0$

Phương trình BD đi qua I, B có phương trình: $x - y = 0$

+ Ta có $d(B, AC) = \frac{|3+3-2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Khi đó: $AC = \frac{2S_{ABC}}{d(B, AC)} = \frac{2 \cdot 12}{2\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$

Gọi $A(a; 2-a) \in AC$ (với $a < 0$), khi đó:

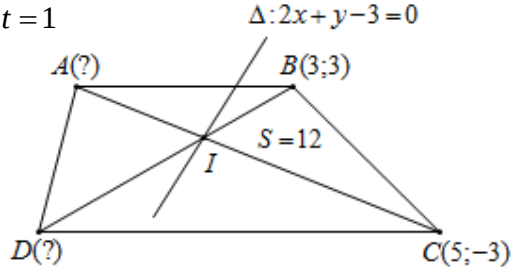
$$AC^2 = 72 \Leftrightarrow 2(a-5)^2 = 72 \Leftrightarrow a = -1 \text{ hoặc } a = 11 \text{ (loại)} \Rightarrow A(-1; 3).$$

+ Phương trình đường thẳng CD đi qua C và song song với AB có phương trình: $y + 3 = 0$

Khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -3 \Rightarrow D(-3; -3)$$

Vậy $A(-1; 3), D(-3; -3)$.



E. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(3; 4)$, trọng tâm

$G(2; 2)$, trực tâm $H\left(\frac{23}{9}; \frac{26}{9}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC .

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 30, đường chéo AC có phương trình $7x + 4y - 13 = 0$, đường thẳng AB đi qua điểm $M(1; 4)$, đường thẳng AD đi qua điểm $N(-4; -1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$, biết hai điểm A, D đều có hoành độ âm.

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có tọa độ trực tâm $H(2; 1)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp $I(1; 0)$. Trung điểm của BC nằm trên đường thẳng có phương trình $x - 2y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C .

Biết rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC đi qua điểm $M(6;-1)$ và hoành độ điểm B nhỏ hơn 4.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có phương trình đường cao kẻ từ đỉnh A là $3x - y + 5 = 0$, trực tâm $H(-2;-1)$ và $M\left(\frac{1}{2}; 4\right)$ là trung điểm của cạnh AB . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết $BC = \sqrt{10}$ và B có hoành độ nhỏ hơn hoành độ của C .

Bài 5. Cho tam giác nhọn ABC . Đường thẳng chứa trung tuyến kẻ từ đỉnh A và đường thẳng BC lần lượt có phương trình là $3x + 5y - 8 = 0$ và $x - y - 4 = 0$. Đường thẳng qua A vuông góc với đường thẳng BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là $D(4;-2)$. Viết phương trình các đường thẳng AB, AC biết rằng hoành độ của điểm B không lớn hơn 3.

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác nhọn ABC có phương trình trung tuyến kẻ từ A và đường thẳng chứa cạnh BC lần lượt là $3x + 5y - 2 = 0$ và $x - y - 2 = 0$. Đường thẳng qua A vuông góc với BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là $D(2;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết B có tung độ âm.

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(T): (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ và hai điểm $A(0;-4), B(4;0)$. Tìm tọa độ hai điểm C, D sao cho $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$) và đường tròn (T) nội tiếp hình thang đó.

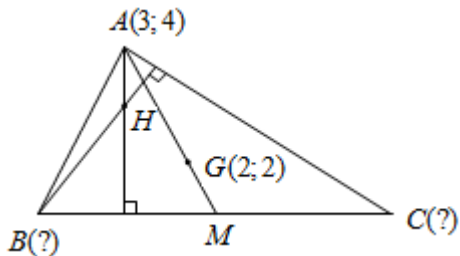
F. GIẢI BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1.

+ Gọi $M(x; y)$ là trung điểm của BC , khi đó

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3 = 2(x - 2) \\ 2 - 4 = 2(y - 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; 1\right)$$



+ BC đi qua $M\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ và vuông góc với AH nên nhận

$$\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{4}{9}; -\frac{10}{9}\right) = -\frac{2}{9}(2; 5) \text{ làm vectơ pháp tuyến.}$$

$$\text{Do đó } BC \text{ có phương trình: } 2\left(x - \frac{3}{2}\right) + 5(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 5y - 8 = 0$$

+ Gọi $B(4+5t; -2t) \in BC \Rightarrow C(-1-5t; 2+2t)$ (do $M\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ là trung điểm của BC).

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \overrightarrow{HB} = \left(\frac{13+45t}{9}; -\frac{18t+26}{9}\right) \\ \overrightarrow{CA} = (5t+4; 2-2t) \end{cases}, \text{ khi đó } H \text{ là trực tâm của tam giác}$$

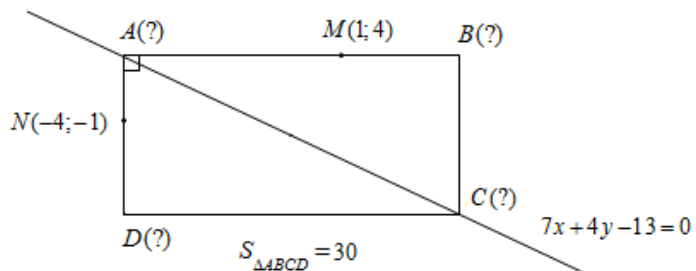
$$ABC \text{ nên ta có: } \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \Leftrightarrow (5t+4) \cdot \frac{13+45t}{9} + (2t-2) \cdot \frac{18t+26}{9} = 0.$$

$$\Leftrightarrow t^2 + t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -1 \end{cases}$$

+ Với $t = 0 \Rightarrow B(4; 0), C(-1; 2)$; với $t = -1 \Rightarrow B(-1; 2), C(4; 0)$

Vậy $B(4; 0), C(-1; 2)$ hoặc $B(-1; 2), C(4; 0)$.

Bài 2.



$$\text{Gọi } A(-1+4a; 5-7a) \in AC \text{ với } a > \frac{1}{4}$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{MA} = (4a-2; 1-7a); \overrightarrow{NA} = (4a+3; 6-7a)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{NA} = 0 \Leftrightarrow (4a-2)(4a+3) + (1-7a)(6-7a) = 0$$

$$\Leftrightarrow 65a^2 - 45a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ hoặc } a = \frac{9}{13} \text{ (loại)}, \text{ suy ra } A(-1; 5)$$

$$\text{Khi đó ta có phương trình } AB: x + 2y - 9 = 0 \text{ và } AD: 2x - y + 7 = 0$$

Gọi $C(-1+4c; 5-7c) \in AC$, khi đó:

$$S_{ABCD} = 30 \Leftrightarrow d(C, AB) \cdot d(C, AD) = 30 \Leftrightarrow \frac{|10c|}{\sqrt{5}} \cdot \frac{|15c|}{\sqrt{5}} = 30$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 1 \Leftrightarrow c = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} C(3; -2) \\ C(-5; 12) \end{cases}$$

+ Với $C(3; -2)$, phương trình đường thẳng $CD: x + 2y + 1 = 0$.

Khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ 2x - y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow D(-3; 1)$$

Ta có $\overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow B(5; 2)$

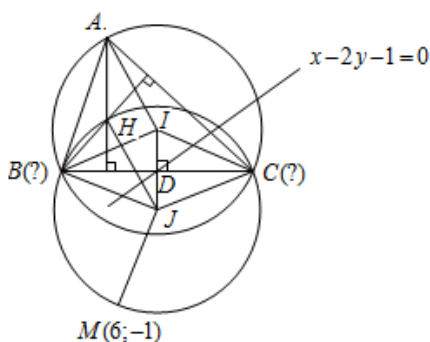
+ Với $C(-5; 12)$, phương trình đường thẳng $CD: x + 2y - 19 = 0$.

Khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 2y - 19 = 0 \\ 2x - y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow D(1; 9)$

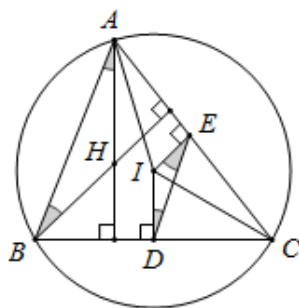
(loại).

Vậy $A(-1; 5), B(5; 2), C(3; -2), D(-3; 1)$.

Bài 3.



Hình 1



Hình 2

+ Gọi D là trung điểm của BC và J là điểm đối xứng với I qua D .

Ta sẽ chứng minh J là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC (**Hình 1**).

Thật vậy: $IBJC$ là hình thoi nên $JB = JC = IB = IC$ (1)

Gọi E là trung điểm của AC (**Hình 2**)

Khi đó: $\widehat{HAB} = \widehat{IDE}$ và $\widehat{HBA} = \widehat{IED}$ (góc có cạnh tương ứng song song)

Suy ra $\triangle HAB \sim \triangle IDE$ nên $\frac{HA}{ID} = \frac{AB}{DE} = 2 \Rightarrow \overline{AH} = 2\overline{ID} \Rightarrow \overline{AH} = \overline{IJ}$

$\Rightarrow AHJI$ là hình bình hành nên $JB = IA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra J là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC .

+ Vì D đường thẳng có phương trình $x-2y-1=0$ nên gọi $D(2t+1;t) \Rightarrow J(4t+1;2t)$

$$\text{Khi đó: } JH^2 = JM^2 \Leftrightarrow (4t-1)^2 + (2t-1)^2 = (4t-5)^2 + (2t+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 24t = 24 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \begin{cases} D(3;1) \\ J(5;2) \end{cases}$$

+ BC đi qua M và nhận $\overrightarrow{ID} = (2;1)$ làm vecto pháp tuyến nên có phương trình: $2x + y - 7 = 0$

Gọi $B(b;7-2b)$ với $b < 4$. Khi đó:

$$JB^2 = JM^2 \Leftrightarrow (b-5)^2 + (5-2b)^2 = 10 \Leftrightarrow b^2 - 6b + 8 = 0 \Leftrightarrow b = 2$$

hoặc $b = 4$ (loại)

Suy ra $B(2;3) \Rightarrow C(4;-1)$ (vì $D(3;1)$ là trung điểm của BC).

+ Vậy $B(2;3)$ và $C(4;-1)$.

Bài 4.

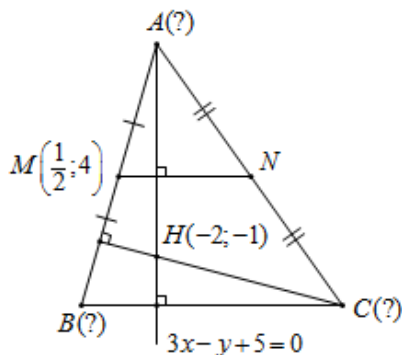
+ Gọi N là trung điểm của AC , khi đó MN là đường trung bình của

$$\triangle ABC \Rightarrow MN = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

MN đi qua $M\left(\frac{1}{2};4\right)$ và vuông

góc với AH nên có phương trình:

$$2x + 6y - 25 = 0$$



$$\text{Gọi } N\left(t; \frac{25-2t}{6}\right) \in MN, \text{ khi đó: } MN^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-2t}{6}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N\left(-1; \frac{9}{2}\right) \\ N\left(2; \frac{7}{2}\right) \end{cases}$$

Gọi $A(a;3a+5) \in AH \Rightarrow B(1-a;3-3a)$ (do M là trung điểm của AB)

+ Với $N\left(-1; \frac{9}{2}\right) \Rightarrow C(-2-a;4-3a)$ (do N là trung điểm của AC)

Nhận thấy $-2-a < 1-a \Rightarrow x_C < x_B$ (không thỏa mãn)

+ Với $N\left(2; \frac{7}{2}\right) \Rightarrow C(4-a; 2-3a)$ (do N là trung điểm của AC)

Khi đó $\begin{cases} \overline{AB} = (1-2a; -2-6a) \\ \overline{CH} = (a-6; 3a-3) \end{cases}$ nên ta có:

$$AB \perp CH \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CH} = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 5a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Khi $a = 0 \Rightarrow A(0; 5), B(1; 3), C(4; 2)$

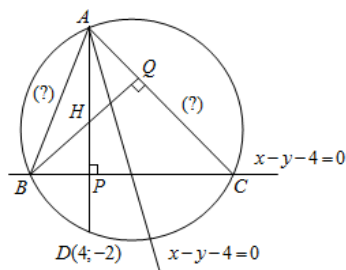
Khi $a = \frac{5}{4} \Rightarrow A\left(\frac{5}{4}; \frac{35}{4}\right), B\left(\frac{-1}{4}; \frac{-3}{4}\right), C\left(\frac{11}{4}; -\frac{7}{4}\right)$

Vậy $A(0; 5), B(1; 3), C(4; 2)$ hoặc $A\left(\frac{5}{4}; \frac{35}{4}\right), B\left(\frac{-1}{4}; \frac{-3}{4}\right), C\left(\frac{11}{4}; -\frac{7}{4}\right)$

Bài 5.

+ Gọi M là trung điểm của BC , khi đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x + 5y - 8 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$



+ Vì $AD \perp BC$, nên AD đi qua $D(4; -2)$ nhận $\overline{u}_{BC} = (1; 1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $x - 4 + y + 2 = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$

+ Do $AD \cap AM = \{A\}$, nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x + 5y - 8 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1)$$

Gọi $BC \cap AD = \{P\}$, nên tọa độ điểm P là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow P(3; -1)$$

+ Ta nhận thấy P là trung điểm của HD với H là trực tâm của $\triangle ABC$.

* Thật vậy: Tứ giác $PHQC$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{BHP} = \widehat{QCP}$.

Ta có $\widehat{BDA} = \widehat{QCP}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

$\Rightarrow \widehat{BHP} = \widehat{BDA} \Rightarrow BHD$ cân tại B , suy ra P là trung điểm của $HD \Rightarrow H(2;0)$

+ Gọi $B(t; t-4) \in BC$ với $t \leq 3 \Rightarrow C(7-t; 3-t) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BH} = (2-t; 4-t) \\ \overrightarrow{AC} = (6-t; 2-t) \end{cases}$

Do H là trực tâm của ΔABC nên :

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (2-t)(6-t) + (4-t)(2-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-t)(10-2t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ hoặc } t = 5 \text{ (loại)} \Rightarrow \begin{cases} B(2; -2) \\ C(5; 1) \end{cases}$$

+ Suy ra phương trình $AB: 3x + y - 4 = 0$ và $AC: y - 1 = 0$

Bài 6.

+ Ta có phương trình $AD: x + y = 0$

Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 5y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 1)$$

+ Gọi $AD \cap BC = \{K\}$ và M là

trung điểm của BC . Khi đó:

Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow K(1; -1)$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x + 5y - 2 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

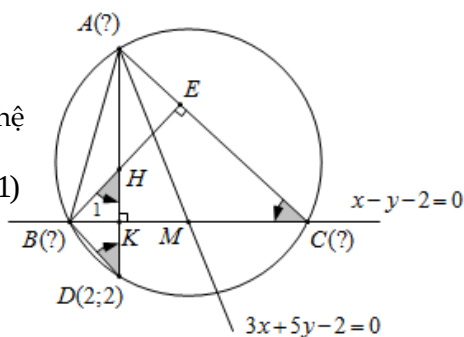
+ Gọi H là trực tâm tam giác ABC và $AC \cap BH = \{E\}$

Ta có $\widehat{H_1} = \widehat{C}$ (cùng phụ với $\widehat{HAC}$) và $\widehat{BDA} = \widehat{C}$ (cùng chắn $\widehat{AB}$)

Suy ra $\widehat{H_1} = \widehat{BDA} \Rightarrow \Delta BHD$ cân tại $B \Rightarrow K$ là trung điểm của $HD \Rightarrow H(0;0)$

+ Gọi $B(b; b-2) \in BC$ (với $b < 2$) $\Rightarrow C(3-b; 1-b)$ (do M là trung điểm của BC)

Suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{HB} = (b; b-2) \\ \overrightarrow{AC} = (4-b; -b) \end{cases}$



Khi đó: $HB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\Leftrightarrow b(4-b) - b(b-2) = 0 \Leftrightarrow b^2 - 3b = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

hoặc $b = 3$ (loại) $\Rightarrow B(0; -2)$

Vậy $A(-1; 1), B(0; -2), C(3; 1)$

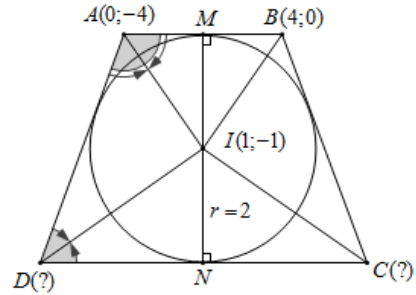
Bài 7.

+ Gọi M, N lần lượt là các tiếp điểm của AB, CD với đường tròn (T)

$$\text{Khi đó, ta có: } \begin{cases} AB = 4\sqrt{2} \\ MA = \sqrt{IA^2 - IM^2} = \sqrt{10 - 2} = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow AB = 2MA$$

Suy ra M là trung điểm của $AB \Rightarrow M(2; -2) \Rightarrow N(0; 0)$ (do I là trung điểm của MN)

+ Khi đó DC đi qua $N(0; 0)$ song song với AB nên có phương trình: $x - y = 0$



$$+ \text{ Do } \begin{cases} \widehat{A_1} = \frac{\widehat{DAB}}{2} \\ \widehat{D_1} = \frac{\widehat{ADC}}{2} \end{cases} \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{D_1} = \frac{\widehat{DAB} + \widehat{ADC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow ID \perp IA$$

Gọi $D(t; t) \in DC \Rightarrow \overrightarrow{ID} = (t-1; t+1)$. Ta có: $\overrightarrow{AI} = (1; 3)$

$$\text{Khi đó } ID \perp IA \Leftrightarrow \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \Leftrightarrow t-1 + 3(t+1) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow D\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

+ Mặt khác $\triangle IAB$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{CBA} \Rightarrow ABCD$ là hình thang cân

Suy ra tam giác IDC cân nên N là trung điểm của $DC \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Vậy $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và $D\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Chú ý:

Ngoài cách trình bày trên các bạn có thể tìm D bằng cách viết các phương trình ID, CD và giải hệ để tìm giao điểm D .

4. BÀI TOÁN 4

A. NỘI DUNG BÀI TOÁN 4

Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ (cho biết phương trình Δ - hay M tham số hóa được theo một ẩn) và thỏa mãn điều kiện (*) cho trước.
(Mở rộng của Bài toán 1,2 và 3)

B. CÁCH GIẢI CHUNG

Gọi $M(t) \in \Delta \xrightarrow{\text{cắt nghĩa điều kiện (*) cho trước}} f(t) = 0 \Leftrightarrow t = ? \Rightarrow M$

Giải thích chi tiết:

Do $M \in \Delta$, nên ta sẽ gọi $M(t)$ (tham số hóa điểm M dựa vào Δ). Sau đó cắt nghĩa dữ kiện (*) sẽ giúp ta có được phương trình chứa ẩn t : $f(t) = 0$. Giải phương trình tìm t giúp ta tìm được tọa độ điểm M .

Chú ý:

- + M có thể được tham số hóa thông qua một điểm khác.
- + **Bài toán 1, 2 và 3** là các trường hợp đặc biệt của **Bài toán 4** – khi các dữ kiện (*) tương ứng của chúng là $MI = R = \text{const}$, $d(M, \Delta) = h = \text{const}$, tam giác IAB đặc biệt (vuông, cân...).

C. VÍ DỤ GỐC

Ví dụ (A – 2006). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các đường thẳng: $d_1: x + y + 3 = 0$, $d_2: x - y - 4 = 0$, $d_3: x - 2y = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_1 bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2 .

Giải

- + Gọi $M(2t; t) \in d_3$, khi đó:

$$\begin{aligned} d(M, d_1) &= 2d(M, d_2) \Leftrightarrow \frac{|2t + t + 3|}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{|2t - t - 4|}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow |3t + 3| &= 2|t - 4| \Leftrightarrow \begin{cases} 3t + 3 = 2(t - 4) \\ 3t + 3 = -2(t - 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -11 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(-22; -11) \\ M(2; 1) \end{cases} \end{aligned}$$

- + Vậy $M(-22; -11)$ hoặc $M(2; 1)$.

D. CÁC VÍ DỤ MỞ RỘNG

Ví dụ 1 (D – 2013 – NC). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ và đường thẳng $\Delta: y-3=0$. Tam giác MNP có trực tâm trùng với tâm của (C) , các đỉnh N và P thuộc Δ , đỉnh M và trung điểm của cạnh MN thuộc (C) . Tìm tọa độ điểm P .

Phân tích hướng giải:

* Vẫn một câu hỏi quen thuộc khi đứng trước bài toán hình học Oxy : “Với những dữ kiện ban đầu, ta có thể tìm được ngay tọa độ của những điểm nào trước?”. Trong bài toán này câu trả lời là điểm M . Bởi ta nhìn thấy ngay điểm M theo góc nhìn của **Bài toán 1** (đã nghiên cứu ở phần trước) với $MI = R = 2$ và M thuộc đường thẳng đi qua I vuông góc với Δ .

* Nếu biết trung điểm K của MN ta sẽ suy ra được tọa độ điểm N và tìm được điểm P theo góc nhìn mở rộng của **Bài toán 3**. Cụ thể: $P \in \Delta$ và $NI \perp MP$. Như vậy lúc này ta cần tìm tọa độ điểm K .

* Điểm K tiếp tục được khai thác theo góc nhìn của **Bài toán 1** bởi $KI = R = 2$ và K thuộc đường thẳng đi qua I song song với Δ . Ta đã hoàn thiện xong hướng giải của bài toán.

Sau đây là lời giải chi tiết:

Giải

+ Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R = 2$.

Ta có MI đi $I(1;1)$ vuông góc với $\Delta: y-3=0$ nên MI có phương trình: $x-1=0$

Gọi $M(1; m)$, khi đó $MI^2 = R^2$

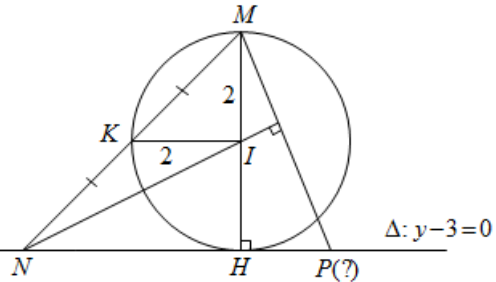
$$\Leftrightarrow (m-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow M(1; -1) \text{ hoặc } M(1; 3)$$

hoặc $M(1; -3)$ (loại vì $M \in \Delta$)

+ Gọi K là trung điểm của MN , do Δ tiếp xúc với (C) tại H nên IK là đường trung bình của tam giác $MNH \Rightarrow IK \parallel \Delta$, suy ra phương trình IK là: $y-1=0$

Gọi $K(t; 1) \in IK$, khi đó $KI^2 = R^2 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow K(-1; 1) \text{ hoặc } K(3; 1)$

+ Với $K(-1; 1) \Rightarrow N(-3; 3)$; $K(3; 1) \Rightarrow N(5; 3)$ (vì K là trung điểm của MN).



$$+ \text{ Gọi } P(a; 3) \in \Delta \Rightarrow \overrightarrow{MP} = (a-1; 4)$$

$$\text{Với } N(-3; 3) \Rightarrow \overrightarrow{NI} = (4; -2), \text{ khi đó}$$

$$\overrightarrow{NI} \perp \overrightarrow{MP} \Leftrightarrow 4(a-1) - 2.4 = 0 \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow P(3; 3)$$

$$\text{Với } N(5; 3) \Rightarrow \overrightarrow{NI} = (-4; -2), \text{ khi đó}$$

$$\overrightarrow{NI} \perp \overrightarrow{MP} \Leftrightarrow -4(a-1) - 2.4 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \Rightarrow P(-1; 3)$$

Vậy $P(3; 3)$ hoặc $P(-1; 3)$.

Chú ý:

Với dữ kiện đặc biệt của bài toán: Δ tiếp xúc với (C) tại H , khi đó ta có thể tìm M theo cách nhìn I là trung điểm của MH .

Ví dụ 2 (Đ – 2012 – NC). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 2x - y + 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn tâm thuộc d , cắt trục Ox tại A và B , cắt trục Oy tại C và D sao cho $AB = CD = 2$.

Phân tích hướng giải:

Muốn viết phương trình đường tròn ta cần:

* Xác định tâm I nhờ “góc nhìn” của **Bài toán 4**. Cụ thể:

$$+ \text{ Gọi } I(t) \in d: 2x - y + 3 = 0$$

+ Dữ kiện $AB = CD$ giúp ta thiết lập được phương trình:

$$f(t) = 0 \rightarrow t = ? \rightarrow \text{tọa độ điểm } I$$

* Xác định bán kính: R nhờ $R^2 = IA^2 = IH^2 + HA^2$ với $IH = d(I, Ox)$ và

$$HA = \frac{AB}{2} = 1$$

Giải

+ Gọi I là tâm đường tròn cần

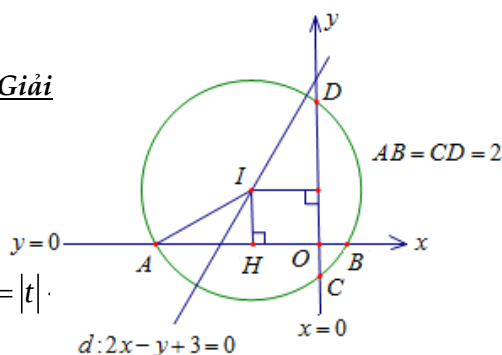
lập và gọi $I(t; 2t+3) \in d$

+ Ta có $AB = CD$

$$\Leftrightarrow d(I, Ox) = d(I, Oy) \Leftrightarrow |2t+3| = |t|.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t+3=t \\ 2t+3=-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-3 \\ t=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(-3; -3) \\ I(-1; 1) \end{cases}$$

+ Với $I(-3; -3) \Rightarrow IH = d(I, Ox) = |-3| = 3$ và ta có:



$$AH = \frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow R^2 = IA^2 = IH^2 + HA^2 = 10$$

Vậy phương trình đường tròn: $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 10$.

+ Với $I(-1;1) \Rightarrow IH = d(I, Ox) = |1| = 1$ và ta có:

$$AH = \frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow R^2 = IA^2 = IH^2 + HA^2 = 2$$

Vậy phương trình đường tròn: $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$.

Ví dụ 3 (A – 2002). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A , phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Phân tích hướng giải

* Ngoài dữ kiện G là trọng tâm tam giác ABC , ta không có thêm dữ kiện liên quan tới G . Vì vậy việc tìm tọa độ điểm G được chuyển về tìm tọa độ 3 đỉnh A, B, C của

$$\Delta ABC \quad \left(\text{do } G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right) \right)$$

* Ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm B do $BC \cap Ox = \{B\}$. Dữ kiện $A \in Ox$, $B \in BC: \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$ và ΔABC vuông tại A giúp ta có thể ràng buộc cả hai điểm A, C theo cùng một ẩn t . Lúc này dữ kiện cuối cùng $r = 2$ sẽ giúp ta thiết lập

được phương trình chứa t bằng việc sử dụng công thức $r = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB + BC + CA}$

* Giải phương trình tìm t sẽ suy ra được tọa độ hai điểm còn lại A, C và suy ra tọa độ trọng tâm G .

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

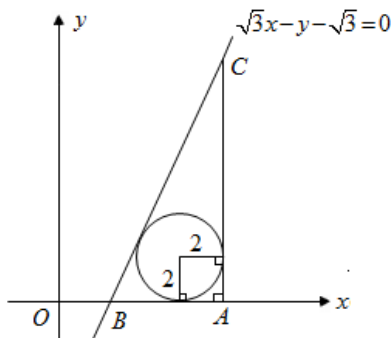
Giải

+ Do $BC \cap Ox = \{B\}$ nên tọa

độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1;0)$$

+ Gọi $A(t;0) \in Ox$, khi đó phương trình AC đi qua A vuông góc với Ox có dạng $x = t$



Suy ra tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0 \\ x = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3}t - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow C(t; \sqrt{3}t - \sqrt{3})$$

$$+ \text{ Suy ra } \begin{cases} AB = |t - 1| \\ AC = \sqrt{3}|t - 1| \\ BC = 2|t - 1| \end{cases} . \text{ Do đó : } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{\sqrt{3}(t - 1)^2}{2}$$

$$+ \text{ Ta có } r = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB + BC + CA} = \frac{\sqrt{3}(t - 1)^2}{3|t - 1| + \sqrt{3}|t - 1|} = \frac{|t - 1|}{\sqrt{3} + 1} = 2 \Rightarrow \begin{cases} t = 2\sqrt{3} + 3 \\ t = -2\sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2\sqrt{3} + 3 \Rightarrow \begin{cases} A(2\sqrt{3} + 3; 0) \\ C(2\sqrt{3} + 3; 6 + 2\sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\text{suy ra tọa độ trọng tâm } G\left(\frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}; \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\text{Với } t = -2\sqrt{3} - 1 \Rightarrow \begin{cases} A(-2\sqrt{3} - 1; 0) \\ C(-2\sqrt{3} - 1; -6 - 2\sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\text{suy ra tọa độ trọng tâm } G\left(\frac{-4\sqrt{3} - 1}{3}; \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Ví dụ 4 (B – 2007). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $A(2; 2)$ và các đường thẳng $d_1: x + y - 2 = 0$, $d_2: x + y - 8 = 0$. Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

Phân tích hướng giải:

* Với dữ kiện khá quan trọng $B \in d_1, C \in d_2$ giúp ta gọi $B(b; 2 - b)$ và $C(c; 8 - c)$. Như vậy để tìm tọa độ điểm B, C ta cần tạo ra hai phương trình chứa ẩn b, c .

* Dữ kiện tam giác ABC vuông cân tại A đủ để cho ta có được hai dấu “=”.

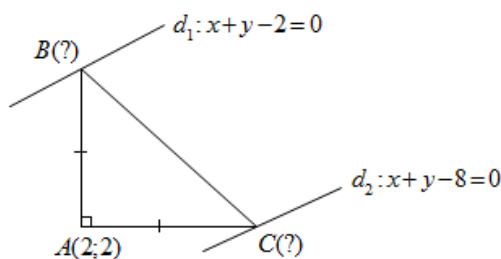
Cụ thể: $\begin{cases} \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \\ AB = AC \end{cases} (*)$. Giải hệ (*) ta được b, c và suy ra được tọa độ hai điểm

B, C cần tìm.

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

KHANG VIET

Giải



+ Gọi $\begin{cases} B(b; 2-b) \in d_1 \\ C(c; 8-c) \in d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (b-2; -b) \\ \overrightarrow{AC} = (c-2; 6-c) \end{cases}$

+ Do ΔABC vuông cân tại A nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ AB^2 = AC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-2)(c-2) + b(6-c) = 0 \\ (b-2)^2 + b^2 = (c-2)^2 + (6-c)^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} bc - 4b - c + 2 = 0 \\ b^2 - c^2 - 2b + 8c - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)(c-4) = 2 \\ (b-1)^2 - (c-4)^2 = 3 \end{cases}$$

+ Đặt $\begin{cases} u = b-1 \\ v = c-4 \end{cases}$, khi đó hệ có dạng :

$$\begin{cases} uv = 2 \\ u^2 - v^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{2}{u} \\ u^4 - 3u^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{2}{u} \\ u^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2; v = 1 \\ u = -2; v = -1 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} b = 3; c = 5 \\ b = -1; c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(3; -1), C(5; 3) \\ B(-1; 3), C(5; 3) \end{cases}$

Vậy $B(-1; 3), C(3; 5)$ hoặc $B(3; -1), C(5; 3)$.

Ví dụ 5 (D – 2012 – CB). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là $x + 3y = 0$ và $x - y + 4 = 0$; đường thẳng BD đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.

Phân tích hướng giải:

* Có $\{A\} = AC \cap AD \rightarrow$ tọa độ điểm A

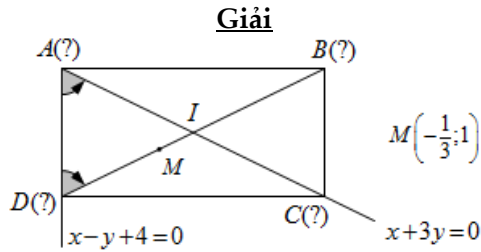
* Ta sẽ đi tìm tọa độ hai điểm B, D theo “góc nhìn” của **Bài toán 4**. Cụ thể:

+ $D \in AD, B \in AB$ nên ta gọi $D(t_1), B(t_2)$ (trước đó ta đi lập phương trình AB)

+ Gọi $\{I\} = AC \cap BD$ (I là trung điểm của AC và BD) $\Rightarrow I(t_1, t_2)$ mà $I \in AC \Rightarrow f_1(t_1, t_2) = 0$ (1)

Vì $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}$ cùng phương $\Rightarrow f_2(t_1, t_2) = 0$ (2)

+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} t_1 = ? \\ t_2 = ? \end{cases} \Rightarrow \text{tọa độ của } B, D, I \text{ và } C$



Vì $\{A\} = AC \cap AD$ nên xét hệ: $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(-3; 1)$

AB đi qua A và vuông góc với AD nên AB có phương trình:

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-1} \Leftrightarrow x + y + 2 = 0$$

Gọi $B(t_1; -t_1 - 2) \in AB$ và $D(t_2; t_2 + 4) \in AD$ ($t_1; t_2 \neq -3$)

$\Rightarrow I\left(\frac{t_2 + t_1}{2}; \frac{t_2 - t_1 + 2}{2}\right)$: là trung điểm của BD

Mà $I \in AC \Rightarrow \frac{t_2 + t_1}{2} + 3 \cdot \frac{t_2 - t_1 + 2}{2} = 0 \Leftrightarrow 2t_2 - t_1 + 3 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 2t_2 + 3$ (*)

$$\text{Có: } \overrightarrow{MB} = \left(t_1 + \frac{1}{3}; -t_1 - 3\right) = \left(2t_2 + \frac{10}{3}; -2t_2 - 6\right)$$

$$(\text{theo } (*)) \text{ và } \overrightarrow{MD} = \left(t_2 + \frac{1}{3}; t_2 + 3\right)$$

Mặt khác B, D, M thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}$ cùng phương

$$\Rightarrow \frac{6t_2 + 10}{3t_2 + 1} = \frac{-2t_2 - 6}{t_2 + 3} = -2 \Leftrightarrow t_2 = -1 \Rightarrow t_1 = 1$$

$\Rightarrow B(1; -3), D(-1; 3)$ và $I(0; 0) \Rightarrow C(3; -1)$ (vì I là trung điểm của AC)

Vậy $A(-3; 1), B(1; -3), C(3; -1), D(-1; 3)$.

Ví dụ 6 (B – 2012 – NC). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2BD$ và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2 + y^2 = 4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh A, B, C, D của hình thoi. Biết A thuộc Ox .

Phân tích hướng giải:

- * Phương trình (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) như vậy ta cần tìm $a; b$
- * Do (E) đi qua các đỉnh A, B, C, D và $A \in Ox$ nên gọi $A(a; 0) \in Ox$ và $B(0; b) \in Oy$. Như vậy lúc này cần tìm tọa độ hai điểm A và B , và việc tìm tọa độ hai điểm này sẽ được thực hiện theo “góc nhìn” của **Bài toán 4**. Cụ thể:
- + Khai thác dữ kiện: $AC = 2BD \rightarrow f_1(a, b) = 0$ (1)
- + Khai thác dữ kiện: đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ tiếp xúc với các cạnh của hình thoi $\rightarrow f_2(a, b) = 0$ (2)

Từ (1) và (2) $\rightarrow a^2 = ?$ và $b^2 = ? \rightarrow$ phương trình (E).

Giải

Gọi phương trình chính tắc của elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (với $a > b > 0$)

Vì (E) đi qua các đỉnh A, B, C, D và $A \in Ox$ nên không mất tính tổng quát, ta giả sử: $A(a; 0)$ và $B(0; b)$.

Mà hình thoi $ABCD$ có $AC = 2BD$

$$\Leftrightarrow 2OA = 4OB \Leftrightarrow OA = 2OB$$

$$\Leftrightarrow a = 2b \text{ (vì } a > b > 0 \text{) hay } A(2b; 0), B(0; b)$$

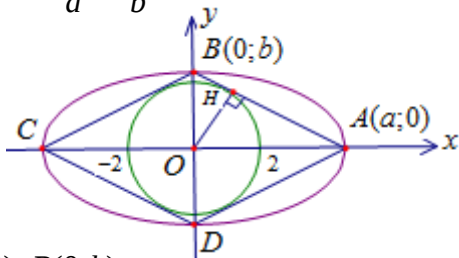
Gọi H là hình chiếu của O lên AB

$\Rightarrow OH = R = 2$ (vì đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ tiếp xúc với các cạnh của hình thoi)

$$\text{Xét tam giác } OAB \text{ ta có: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$

$$\text{hay } \frac{1}{4} = \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{b^2} \Leftrightarrow b^2 = 5 \Rightarrow a^2 = 4b^2 = 20$$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$



Ví dụ 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng chứa đường cao kẻ từ B là $x+3y-18=0$, phương trình đường trung trực của đoạn BC là $\Delta: 3x+19y-279=0$, đỉnh C thuộc đường thẳng $d: 2x-y+5=0$. Tìm tọa độ điểm A biết rằng $\widehat{BAC}=135^\circ$.

Phân tích hướng giải:

* Ở ví dụ này ta có điểm B, C đều đang thuộc các đường thẳng đã biết phương trình. Như vậy theo **Bài toán 4** ta cần khai thác dữ kiện để có được 2 dấu "=" (2 phương trình) giúp ta tìm được tọa độ hai điểm B và C . Bài toán cho đường trung trực của đoạn BC là $\Delta: 3x+19y-279=0$ vừa đủ để ta làm được điều này: cụ thể

$$\begin{cases} M \in \Delta \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 0 \end{cases} \quad (\text{với } M \text{ là trung điểm của } BC) \text{ để dàng ta có được 2 phương trình và}$$

suy ra tọa độ B, C .

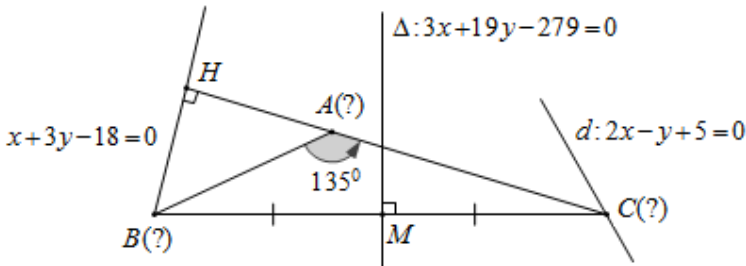
* Lúc này ta còn điểm A . Nếu tìm được tọa độ chân đường cao H của B trên AC ta sẽ dễ dàng "tháo" được điểm A theo góc nhìn của **Bài toán 1**. Cụ thể:

+ Do $\widehat{BAC}=135^\circ \Rightarrow AH = BH$

+ $A \in AC$: đi qua C và vuông góc với BH .

Việc tìm chân chiều cao H là một bài toán cơ bản. Vì vậy ta có lời giải chi tiết sau:

Giải



+ Gọi $\begin{cases} B(18-3b;b) \\ C(c;2c+5) \end{cases}$, suy ra $M\left(\frac{18-3b+c}{2}; \frac{b+2c+5}{2}\right)$ là trung điểm của BC

+ Khi đó $\begin{cases} M \in \Delta \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot \frac{18-3b+c}{2} + 19 \cdot \frac{b+2c+5}{2} - 279 = 0 \\ 19(c+3b-18) - 3(2c-b+5) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 41c+10b=409 \\ 13c+60b=357 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=9 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(9;23) \\ B(6;4) \end{cases}$$

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên AC

Khi đó AC đi qua C vuông góc với BH nên có phương trình: $3x - y - 4 = 0$

Suy ra tọa độ điểm H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - y - 4 = 0 \\ x + 3y - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow H(3;5)$$

+ Do $\widehat{BAC} = 135^\circ \Rightarrow \widehat{BAH} = 45^\circ$, suy ra tam giác BAH vuông cân tại H $\Rightarrow AH = BH = \sqrt{10}$

Gọi $A(a; 3a - 4) \in AC$, khi đó:

$$AH = \sqrt{10} \Leftrightarrow AH^2 = 10 \Leftrightarrow (a - 3)^2 + (3a - 9)^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow (a - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2;2) \\ A(4;8) \end{cases}$$

Do A nằm giữa H và C nên ta được $A(4;8)$ thỏa mãn

Vậy $A(4;8), B(6;4), C(9;23)$.

E. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1 (A – 2005). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1 : x - y = 0$ và $d_2 : 2x + y - 1 = 0$ tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết rằng đỉnh A thuộc d_1 , đỉnh C thuộc d_2 , và các đỉnh B, D thuộc trục hoành.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : x - 2y + 3 = 0$ và $\Delta_2 : x - y - 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm $M(2;5)$, có tâm nằm trên đường thẳng Δ_1 và cắt Δ_2 tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 4\sqrt{2}$.

Bài 3 (B – 2011 – CB). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta : x - y - 4 = 0$ và $d : 2x - y - 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm N thuộc đường thẳng d sao cho đường thẳng ON cắt đường thẳng Δ tại điểm M thỏa mãn $OM.ON = 8$.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;1)$, trực tâm $H(14;-7)$, đường trung tuyến kẻ từ đỉnh B có phương trình $9x - 5y - 7 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Hai điểm B, C thuộc trục tung. Phương trình đường chéo AC là $3x + 4y - 16 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật đã cho, biết bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ACD bằng 1.

F. GIẢI BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1.

+ Gọi $A(a; a) \in d_1$.

Do A, C đối xứng nhau qua BD và $B, D \in Ox$ nên $C(a; -a)$

+ Vì $C \in d_2 \Rightarrow 2a + a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow \begin{cases} A(1; 1) \\ C(1; -1) \end{cases}$

+ Gọi I là tâm của hình vuông, khi đó I là trung điểm của AC nên $I(1; 0)$

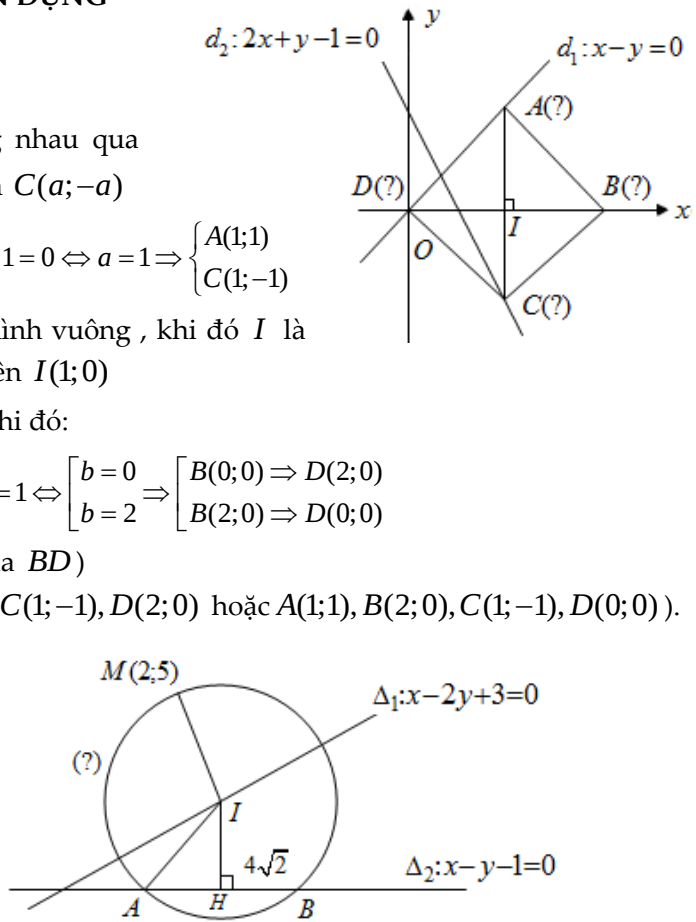
Gọi $B(b; 0) \in Ox$, khi đó:

$$IB^2 = IA^2 \Leftrightarrow (b-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(0; 0) \Rightarrow D(2; 0) \\ B(2; 0) \Rightarrow D(0; 0) \end{cases}$$

(vì I là trung điểm của BD)

Vậy $A(1; 1), B(0; 0), C(1; -1), D(2; 0)$ hoặc $A(1; 1), B(2; 0), C(1; -1), D(0; 0)$.

Bài 2.



+ Gọi $I(2t-3; t) \in \Delta_1$ là tâm của đường tròn cần lập.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB , suy ra $AH = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{2}$

+ Ta có: $R^2 = IM^2 = IA^2 \Leftrightarrow IM^2 = IH^2 + AH^2 \Leftrightarrow (2t-5)^2 + (t-5)^2 = \frac{(t-4)^2}{2} + 8$

$$\Leftrightarrow 9t^2 - 52t + 68 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=\frac{34}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(1; 2) \\ I\left(\frac{41}{9}; \frac{34}{9}\right) \end{cases}$$

+ Với $I(1; 2) \Rightarrow R^2 = IM^2 = 10$, khi đó phương trình đường tròn: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$

+ Với $I\left(\frac{41}{9}; \frac{34}{9}\right) \Rightarrow R^2 = IM^2 = \frac{650}{81}$, khi đó phương trình đường tròn:

$$\left(x - \frac{41}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{34}{9}\right)^2 = \frac{650}{81}$$

Vậy phương trình đường tròn cần lập là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$ hoặc

$$\left(x - \frac{41}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{34}{9}\right)^2 = \frac{650}{81}.$$

Bài 3

+ Gọi $\begin{cases} N(a; 2a-2) \in d \\ M(b; b-4) \in \Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{ON} = (a; 2a-2) \\ \overline{OM} = (b; b-4) \end{cases}$ $d: 2x-y-2=0$ $\Delta: x-y-4=0$
 $OM.ON=8$

+ Ta có O, M, N thẳng hàng nên

$$\overline{ON} = k\overline{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} a = kb \\ 2a-2 = k(b-4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a.k(b-4) = kb.(2a-2) \Rightarrow a(b-4) = b(2a-2)$$

$$(\text{Do } k=0 \text{ không là nghiệm của hệ}) \Leftrightarrow b(2-a) = 4a \Leftrightarrow b = \frac{4a}{2-a} \quad (1)$$

+ Ta có $OM.ON = 8 \Leftrightarrow OM^2.ON^2 = 64 \Leftrightarrow (5a^2 - 8a + 4).(2b^2 - 8b + 16) = 64 \quad (2)$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta được: } (5a^2 - 8a + 4). \frac{(80a^2 - 128b + 64)}{(2-a)^2} = 64$$

$$\Leftrightarrow (5a^2 - 8a + 4)^2 = 4(a-2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 - 8a + 4 = 2(a-2) \\ 5a^2 - 8a + 4 = -2(a-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 - 10a + 8 = 0 \\ 5a^2 - 6a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(0; -2) \\ N\left(\frac{6}{5}; \frac{2}{5}\right) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } N(0; -2) \text{ hoặc } N\left(\frac{6}{5}; \frac{2}{5}\right).$$

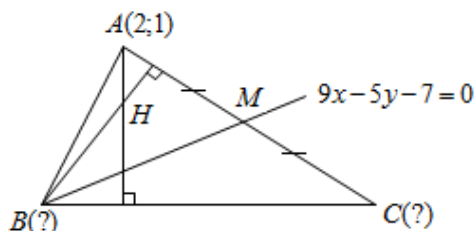
Bài 4.

+ Gọi M là trung điểm của BC

Do phương trình BM viết dưới

dạng tham số $\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = -5 + 9t \end{cases}$ nên gọi

$$\begin{cases} B(-2 + 5b; -5 + 9b) \\ M(-2 + 5m; -5 + 9m) \end{cases}$$



+ Do M là trung điểm của BC

$$\Rightarrow C(10m - 6; 18m - 11) \Rightarrow \overline{BC} = (10m - 5b - 4; 18m - 9b - 6)$$

Ta có $\overline{AH} = (12; -8) = 4(3; -2)$. Khi đó:

$$AH \perp BC \Leftrightarrow \overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0 \Leftrightarrow 3(10m - 5b - 4) - 2(18m - 9b - 6) = 0 \Leftrightarrow b = 2m$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} B(10m - 2; 18m - 5) \\ C(10m - 6; 18m - 11) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{HB} = (10m - 16; 18m + 2) \\ \overline{AC} = (10m - 8; 18m - 12) \end{cases}$$

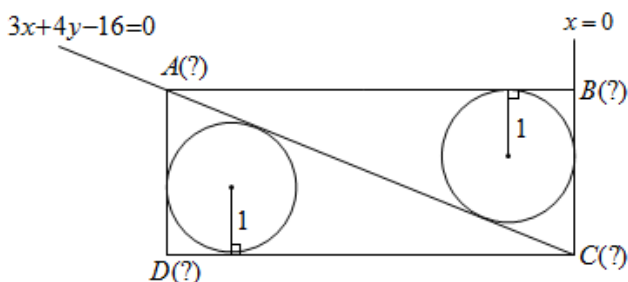
+ Do H là trực tâm tam giác ABC nên ta có:

$$\overline{HB} \cdot \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow (10m - 16) \cdot (10m - 8) + (18m + 2)(18m - 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow 106m^2 - 105m + 26 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{26}{53} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(3; 4), C(-1; -2) \\ B\left(\frac{154}{53}; \frac{203}{53}\right), C\left(-\frac{58}{53}; -\frac{115}{53}\right) \end{cases}$$

+ Vậy $B(3; 4), C(-1; -2)$ hoặc $B\left(\frac{154}{53}; \frac{203}{53}\right), C\left(-\frac{58}{53}; -\frac{115}{53}\right)$.

Bài 5.



+ $AC \cap BC = \{C\}$, nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + 4y - 16 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow C(0; 4)$$

+ Vì $\Delta ACD = \Delta CAB$ nên bán kính đường tròn nội tiếp ΔACD bằng 1, suy ra bán kính đường tròn nội tiếp ΔCAB cũng bằng 1.

Gọi $B(0; b) \in Oy$, khi đó AB đi qua B vuông góc với Oy nên có phương trình $y = b$.

Suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = b \\ 3x + 4y - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16 - 4b}{3} \\ y = b \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{16 - 4b}{3}; b\right)$$

+ Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC , ta có:

$$r = \frac{2.S_{ABC}}{AB + BC + CA} \Leftrightarrow 1 = \frac{|b-4| \cdot \left| \frac{16-4b}{3} \right|}{|b-4| + \left| \frac{16-4b}{3} \right| + \sqrt{(b-4)^2 + \left(\frac{16-4b}{3} \right)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{4}|b-4| \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ b=7 \end{cases}$$

+ Với $b=1$ ta có $A(4;1), B(0;1)$. Suy ra $D(4;4)$ (do $\overline{AB} = \overline{DC}$)

Với $b=7$ ta có $A(-4;7), B(0;7)$. Suy ra $D(-4;4)$ (do $\overline{AB} = \overline{DC}$)

Vậy $A(4;1), B(0;1), C(0;4), D(4;4)$ hoặc $A(-4;7), B(0;7), C(0;4), D(-4;4)$.

5. BÀI TOÁN 5:

Tìm điểm dựa vào hệ thức vectơ

Bài toán 5.1

A. NỘI DUNG BÀI TOÁN 5.1

Tìm tọa độ điểm M liên hệ với hai (ba) điểm cho trước qua một hệ thức vectơ

$\overline{MA} = k\overline{AB}$ (hay $\overline{MA} = k\overline{BC}$).

B. CÁCH GIẢI CHUNG

Gọi

$$M(x; y) \xrightarrow{\overline{MA}=k\overline{AB} \quad (\overline{MA}=k\overline{BC})} \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases} \Rightarrow M(x_0; y_0)$$

Giải thích chi tiết:

+ Ban đầu ta gọi $M(x; y)$

+ Sau đó cắt nghĩa dữ kiện $\overline{MA} = k\overline{AB}$ (hoặc $\overline{MA} = k\overline{BC}$) cho ta hệ phương trình hai

$$\text{ẩn } x, y: \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(y) = 0 \end{cases}$$

+ Giải hệ phương trình sẽ giúp ta tìm được nghiệm $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$ và suy ra được tọa độ

điểm $M(x_0; y_0)$.

C. VÍ DỤ GỐC

Ví dụ. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(1;2)$, $B(-3;4)$ và $C(-1;-3)$. Tìm tọa độ điểm M trong các trường hợp sau :

1) $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{AB}$

2) Tứ giác $ABCM$ là hình thang đáy AM và $MA = 2BC$.

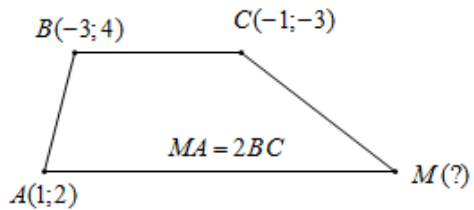
Giải

1) Gọi $M(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (1-x; 2-y)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; 2)$, khi đó

$$\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = 3.(-4) \\ 2-y = 3.2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow M(13; -4)$$



2) Ta có $\overrightarrow{BC} = (2; -7)$. Gọi $M(a; b) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (a-1; b-2)$

Do $ABCM$ là hình thang đáy AM và $MA = 2BC$ nên ta có:

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1 = 2.2 \\ b-2 = 2.(-7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -12 \end{cases} \Rightarrow M(5; -12)$$

D. CÁC VÍ DỤ MỞ RỘNG

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$ với hai đáy là AB, CD và $CD = 2AB$. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống AC và M là trung điểm của HC . Biết tọa độ đỉnh $B(5;6)$, phương trình đường thẳng $DH: 2x - y = 0$ và phương trình đường thẳng $DM: x - 3y + 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang $ABCD$.

Phân tích hướng giải :

* Với dữ kiện ban đầu ta tìm được tọa độ điểm D đầu tiên khi DH, DM đã biết phương trình.

* Ta cần “gắn kết” các dữ kiện $CD \parallel AB$, $CD = 2AB$, $B(5;6)$ cùng với điểm D vừa tìm được.

Sử dụng định lý Ta - lét ta sẽ chỉ ra được $\overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{IB}$ với $DB \cap AC = \{I\}$. Như vậy ta đã thấy **Bài toán 5.1** xuất hiện, do đó ta sẽ dễ dàng có được tọa độ điểm I . Khi đó chúng ta sẽ viết được phương trình AC đi qua I và vuông góc với DH . Từ đây ta sẽ suy ra được tọa độ H và M (lần lượt là giao điểm của AC với DH, DM).

Tiếp tục ta sẽ tìm được tọa độ điểm C khi M là trung điểm của HC .

* Lúc này **Bài toán 5.1** lại “lộ diện”, khi B, C, D đã biết tọa độ và ta có hệ thức vecto : $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BA}$. Từ đây ta sẽ tìm được tọa độ điểm A .

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

Giải

+ Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow D(1; 2)$$

+ Gọi $DB \cap AC = \{I\}$,

khi đó $CD \parallel AB$ nên theo định lý Ta - lét ta có:

$$\frac{DI}{IB} = \frac{CD}{AB} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I - 1 = 2(5 - x_I) \\ y_I - 2 = 2(6 - y_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{11}{3} \\ y_I = \frac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{11}{3}; \frac{14}{3}\right)$$

+ AC đi qua $I\left(\frac{11}{3}; \frac{14}{3}\right)$ và vuông góc với đường thẳng DH nên có phương trình: $x + 2y - 13 = 0$

Suy ra tọa độ điểm H là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + 2y - 13 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{5} \\ y = \frac{26}{5} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{13}{5}; \frac{26}{5}\right)$$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 2y - 13 = 0 \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{29}{5} \\ y = \frac{18}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{29}{5}; \frac{18}{5}\right)$$

Do M là trung điểm của HC nên suy ra $C(9; 2)$

+ Ta có $CD \parallel AB$, $CD = 2AB$

$$\text{nên suy ra } \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 9 = 2(x_A - 5) \\ 2 - 2 = 2(y_A - 6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 1 \\ y_A = 6 \end{cases} \Rightarrow A(1; 6)$$

Vậy $A(1; 6), C(9; 2), D(1; 2)$.

Ví dụ 2 (B – 2014). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$. Điểm $M(-3;0)$ là trung điểm của cạnh AB , điểm $H(0;-1)$ là hình chiếu vuông góc của B trên AD và điểm $G\left(\frac{4}{3};3\right)$ là trọng tâm của tam giác BCD . Tìm tọa độ các điểm B và D .

Phân tích hướng giải:

* Ở ví dụ trên có 3 điểm đã biết tọa độ là $M(-3;0)$, $H(0;-1)$, $G\left(\frac{4}{3};3\right)$ và đều là các điểm đặc biệt. Trong đó M đóng vai trò là trung điểm của AB , G là trọng tâm của tam giác BCD , nghĩa là chúng đều là các điểm liên quan tới yếu tố về tỉ lệ độ dài và mối liên hệ vectơ. Mặt khác trong bài toán việc tìm càng nhiều điểm càng có lợi, mà nhất lại là những điểm nằm trên các cạnh trong ví dụ này. Điều này gợi ý ta đi tìm giao điểm P, Q của HM, HG với BC . Việc tìm điểm P là đơn giản khi M là trung điểm của HP và nhờ ta – lét ta sẽ tìm hệ thức $\overline{HG} = 2\overline{GQ}$. Tức là ta đang đưa điểm Q về **Bài toán 5.1**, do đó việc “tháo” điểm Q là đơn giản.

*) Khi tìm được P, Q cũng có nghĩa là ta viết được phương trình BC . Có lẽ đây chính là “nút thắt” của bài toán. Vì vậy việc tìm ra đáp số theo yêu cầu bài toán lúc này trở nên “nhẹ nhàng”.

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

Giải

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của HM, HG với BC .

Khi đó $HA \parallel BC$ nên áp dụng định lí Ta – lét ta có:

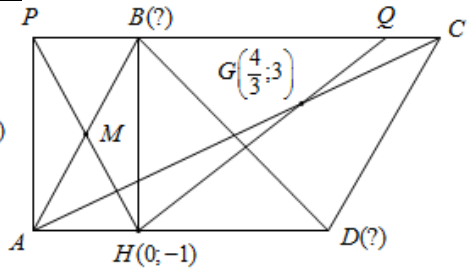
$$+ \frac{HM}{MP} = \frac{AM}{MB} = 1 \Rightarrow HM = ME$$

hay M là trung điểm của HP , suy ra $P(-6;1)$

$$+ \frac{HG}{GQ} = \frac{AG}{GC} = 2 \Rightarrow \overline{HG} = 2\overline{GQ} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} = 2\left(x_Q - \frac{4}{3}\right) \\ 3 - (-1) = 2(y_Q - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = 2 \\ y_Q = 5 \end{cases} \Rightarrow Q(2;5)$$

Khi đó BC đi qua $P(-6;1)$ và $Q(2;5)$ nên có phương trình: $x - 2y + 8 = 0$

BH đi qua $H(0;-1)$ và vuông góc với BC nên có phương trình:
 $2x + y + 1 = 0$



Suy ra tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y+8=0 \\ 2x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow B(-2;3)$

Do M là trung điểm của AB , suy ra $A(-4;-3)$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GC} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} - (-4) = 2\left(x_C - \frac{4}{3}\right) \\ 3 - (-3) = 2(y_C - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 4 \\ y_C = 6 \end{cases} \Rightarrow C(4;6)$$

Mặt khác G là trọng tâm tam giác BCD nên:

$$\begin{cases} \frac{-2+4+x_D}{3} = \frac{4}{3} \\ \frac{3+6+y_D}{3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 0 \end{cases} \Rightarrow D(2;0)$$

Vậy $B(-2;3)$ và $D(2;0)$.

Chú ý:

Ngoài cách giải theo góc nhìn của **Bài toán 5.1**, trong bài toán trên các bạn có thể tham khảo thêm cách giải sau đây:

+ Gọi $A(a;b) \Rightarrow B(-a-6;-b)$ (do $M(-3;0)$ là trung điểm của AB)

+ Mặt khác G là trọng tâm tam giác BCD nên:

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GC} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} - a = 2\left(x_C - \frac{4}{3}\right) \\ 3 - b = 2(y_C - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = \frac{4-a}{2} \\ y_C = \frac{9-b}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{4-a}{2}; \frac{9-b}{2}\right)$$

+ Suy ra $\overrightarrow{AH} = (-a; -1-b)$, $\overrightarrow{BH} = (a+6; b-1)$, $\overrightarrow{BC} = \left(\frac{a+16}{2}; \frac{b+9}{2}\right)$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a(a+6) - (b+1)(b-1) = 0 \\ \frac{(a+16)(a+6)}{2} + \frac{(b+9)(b-1)}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 6a - 1 = 0 \\ a^2 + b^2 + 22a + 8b + 87 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = -6 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow B(0; -1) \equiv H \\ \begin{cases} a = -4 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-4; -3) \\ B(-2; 3) \\ C(4; 6) \end{cases} \end{cases}$$

Mặt khác G là trọng tâm tam giác BCD nên:

$$\begin{cases} \frac{-2+4+x_D}{3} = \frac{4}{3} \\ \frac{3+6+y_D}{3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 0 \end{cases} \Rightarrow D(2;0)$$

Vậy $B(-2;3)$ và $D(2;0)$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có $A(-2;6)$, đỉnh B thuộc đường thẳng d có phương trình $x-2y+6=0$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh BC, CD sao cho $BM = CN$. Xác định tọa độ đỉnh C , biết rằng AM cắt BN tại điểm $I\left(\frac{2}{5}; \frac{14}{5}\right)$.

Phân tích hướng giải:

- * Với dữ kiện B thuộc đường thẳng có phương trình $x-2y+6=0$, gợi ý ta nên đi tìm tọa độ điểm B trước. Lúc này điểm đã biết tọa độ là $A(-2;6)$ và $I\left(\frac{2}{5}; \frac{14}{5}\right)$ nên ta sẽ cần “gắn kết” ba điểm A, B, I xem chúng có mối quan hệ như thế nào? Nếu có được điều này ta dễ dàng tìm được điểm B theo góc nhìn của **Bài toán 3**.
- * Dữ kiện $BM = CN$ giúp ta chứng minh được $\triangle ABM = \triangle BCN \Rightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ \Rightarrow$ tọa độ B (**Bài toán 3**)
- * Khi đó ta sẽ tính được độ dài đoạn $AM \Rightarrow$ hệ thức vectơ liên hệ bởi 3 điểm A, I, M (**Bài toán 5.1**) $\Rightarrow$ tọa độ điểm M .
- * Lúc này ta có được hệ thức vectơ liên hệ bởi 3 điểm B, M, C (**Bài toán 5.1**) $\Rightarrow$ tọa độ điểm C .

Giải

- * Tam giác vuông ABM và BCN có:

$$AB = BC \text{ và } BM = CN$$

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle BCN \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B_1}$$

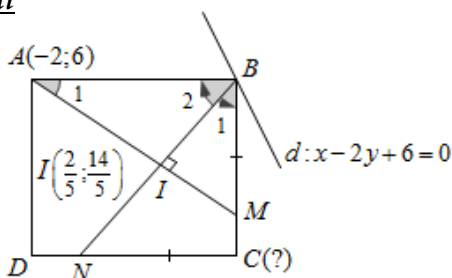
$$\text{Mà } \widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{B_2} = 90^\circ$$

$$\text{hay } \widehat{AIB} = 90^\circ$$

- * Ta có: $\overrightarrow{AI} = \left(\frac{12}{5}; -\frac{16}{5}\right)$. Gọi $B(2t-6; t) \in d \Rightarrow \overrightarrow{IB} = \left(2t - \frac{32}{5}; t - \frac{14}{5}\right)$, khi đó:

$$AI \perp IB \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow \frac{12}{5} \cdot \left(2t - \frac{32}{5}\right) - \frac{16}{5} \cdot \left(t - \frac{14}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4$$

$$\Rightarrow B(2;4)$$



$$* \text{ Ta có } AI = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2} = 4 \Rightarrow AM = \frac{AB^2}{AI} = \frac{4^2 + 2^2}{4} = 5 \Rightarrow \overline{AM} = \frac{5}{4} \overline{AI}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_M + 2 = \frac{5}{4} \cdot \frac{12}{5} \\ y_M - 6 = \frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{16}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = 2 \end{cases} \Rightarrow M(1; 2)$$

$$* \text{ Khi đó } \begin{cases} BM = \sqrt{5} \\ BC = AB = 2\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow M \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow C(0; 0)$$

Vậy $C(0; 0)$.

Nhận xét:

* Thực ra ở ví dụ trên M là trung điểm của BC tương đương với hệ thức vectơ $\overline{BM} = \overline{MC}$, song do hệ thức này đặc biệt nên ta trình bày là trung điểm để áp dụng luôn công thức và việc tìm điểm M được đơn giản hơn.

* Ngoài việc tìm tọa độ các điểm B, M, C theo cách ở trên các bạn còn có thể tìm theo cách sau:

+ Viết phương trình $BI : 3x - 4y + 10 = 0$, suy ra tọa độ điểm B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - 2y + 6 = 0 \\ 3x - 4y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow B(2; 4)$$

+ Phương trình $AI : 4x + 3y - 10 = 0$ và $BC : 2x - y = 0$, suy ra tọa độ điểm

$$M \text{ là nghiệm của hệ : } \begin{cases} 4x + 3y - 10 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow M(1; 2)$$

+ Ta tìm C theo góc nhìn **Bài toán 1**. Cụ thể:

Gọi $C(t; 2t) \in BC$, khi đó:

$$BC^2 = AB^2 \Leftrightarrow (t - 2)^2 + (2t - 4)^2 = 20 \Leftrightarrow (t - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(0; 0) \\ C(4; 8) \end{cases}$$

Do M nằm giữa B và C nên ta nhận được đáp số $C(0; 0)$.

Song một hạn chế ở cách trình bày thứ ba (tìm điểm C) ta sẽ tìm được hai điểm C và cần loại đi một điểm. Trong khi đó với cách làm ở trên ta sẽ tìm được chính xác một điểm C theo yêu cầu đề bài. Vì vậy trong rất nhiều bài toán, khi đi tìm điểm ta có rất nhiều cách tiếp cận, trong các cách tiếp cận này thì cách tìm điểm theo hệ thức vectơ, giao của hai đường thẳng sẽ luôn cho ta được điểm duy nhất (nếu dựa vào đặc thù của hình vẽ). Đó chính là ưu điểm của nó so với các hướng tiếp cận khác – mà ở đó việc tìm ra nhiều hơn một điểm, đôi khi khiến ta phải có thêm bước loại nghiệm.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp $I\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$, trực tâm $H\left(\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$ và trung điểm của cạnh BC là điểm $M(1;1)$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Phân tích hướng giải:

* Ở ví dụ trên với dữ kiện cho tâm đường tròn ngoại tiếp I và trực tâm H , khiến ta liên tưởng tới bài toán quen thuộc về đường thẳng $O - l$: $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI}$ (*) với G là trọng tâm của tam giác ABC . Nghĩa là ta có thể tìm được tọa độ trọng tâm G nhờ vào **Bài toán 5.1** hay chính là hệ thức (*).

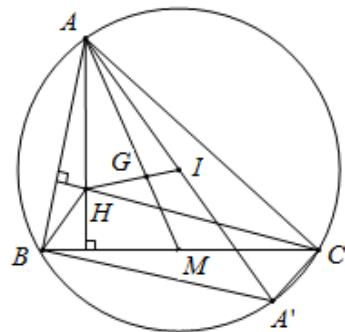
* Khi biết G ta lại thấy **Bài toán 5.1** tiếp tục xuất hiện khi $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$, nên ta sẽ tìm được tọa độ điểm A khá đơn giản.

* Lúc này ta sẽ dễ dàng viết được phương trình BC (đi qua M và vuông góc với AH), từ đó lấy giao điểm với đường tròn $(I; IA)$ ngoại tiếp tam giác ABC và tìm được tọa độ các đỉnh B, C .

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

Giải

+ Gọi A' là điểm đối xứng với A qua I , khi đó: $A'C \parallel BH$ (cùng vuông góc với AC) và $A'B \parallel CH$ (cùng vuông góc với AB)



Suy ra $BHCA'$ là hình bình hành, suy ra M là trung điểm của HA'

+ Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , khi đó G cũng là trọng tâm của tam giác AHA'

$$\text{Do đó ta có: } \overrightarrow{HI} = 3\overrightarrow{GI} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3} - x_G\right) \\ \frac{5}{3} - \frac{8}{3} = 3 \cdot \left(\frac{5}{3} - y_G\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 1 \\ y_G = 2 \end{cases} \Rightarrow G(1; 2)$$

$$+ \text{ Mặt khác ta có } \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_A = 2(1 - 1) \\ 2 - y_A = 2(1 - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 1 \\ y_A = 4 \end{cases} \Rightarrow A(1; 4)$$

Khi đó BC đi qua M vuông góc AH nên có phương trình: $x + 2y - 3 = 0$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $I\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$ và bán kính $IA = \frac{5\sqrt{2}}{3}$

Nên có phương trình: $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{50}{9}$

Suy ra tọa độ B, C là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{50}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(3;0), C(-1;2) \\ B(-1;2), C(3;0) \end{cases}$$

Vậy $A(1;4), B(3;0), C(-1;2)$ hoặc $A(1;4), B(-1;2), C(3;0)$.

Chú ý:

Việc tìm B, C trong bài toán trên các bạn có thể trình bày theo góc nhìn của **Bài toán 1** như sau:

$$\begin{aligned} \text{Gọi } B(3-2t; t) \in BC, \text{ khi đó: } IB = IA &\Leftrightarrow IB^2 = IA^2 \Leftrightarrow \left(2t - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(t - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{50}{9} \\ &\Leftrightarrow 5t^2 - 10t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(3;0) \\ B(-1;2) \end{cases} \end{aligned}$$

Do $M(1;1)$ là trung điểm của BC nên suy ra: $B(3;0), C(-1;2)$ hoặc $B(-1;2), C(3;0)$.

Bài toán 5.2

A. NỘI DUNG BÀI TOÁN 5.2

Tìm tọa độ hai điểm M, N lần lượt thuộc hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và liên hệ với điểm thứ ba (hoặc hai điểm) cho trước qua một hệ thức vectơ.

B. CÁCH GIẢI CHUNG

$$\text{Gọi } \begin{cases} M(t_1) \in \Delta_1 \\ N(t_2) \in \Delta_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{cắt nghĩa "hệ thức vectơ"}} \begin{cases} f_1(t_1, t_2) = 0 \\ f_2(t_1, t_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = ? \\ t_2 = ? \end{cases} \Rightarrow M, N$$

GIẢI THÍCH CHI TIẾT :

+ Do $\begin{cases} M \in \Delta_1 \\ N \in \Delta_2 \end{cases}$ nên ta sẽ tham số hóa tọa độ điểm M, N bằng cách gọi $\begin{cases} M(t_1) \in \Delta_1 \\ N(t_2) \in \Delta_2 \end{cases}$

+ Sau đó cắt nghĩa dữ kiện "hệ thức vectơ" cho ta hệ phương trình hai ẩn t_1, t_2 :

$$\begin{cases} f_1(t_1, t_2) = 0 \\ f_2(t_1, t_2) = 0 \end{cases}$$

+ Giải hệ phương trình sẽ giúp ta tìm được nghiệm $\begin{cases} t_1 = ? \\ t_2 = ? \end{cases}$ và từ đây suy ra được tọa độ điểm M, N .

Chú ý:

+ Ngoài cách trình bày ở phần cách giải chung các bạn có thể trình bày theo cách sau:

$$\begin{aligned} \text{Gọi } M(t) \in \Delta_1 &\xrightarrow{\text{dựa vào "hệ thức vectơ"}} N(t) \\ &\xrightarrow{N \in \Delta_2} f(t) = 0 \Leftrightarrow t = ? \Rightarrow M, N \quad (*) \end{aligned}$$

(Nghĩa là ta sẽ tham số hóa điểm M theo ẩn t ($M(t)$) nhờ $M \in \Delta_1$. Sau đó dựa vào hệ thức vectơ giúp ta ràng buộc được tọa độ điểm N theo t ($N(t)$). Sử dụng dữ kiện $N \in \Delta_2$ ta sẽ thiết lập được phương trình chứa t ($f(t) = 0$). Giải phương trình tìm t , từ đó sẽ suy ra được tọa độ điểm M, N).

+ Cách trình bày (*) thường được sử dụng khi bài toán có yếu tố trung điểm.

C. VÍ DỤ GỐC

Ví dụ. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta_1: x - y + 3 = 0$, $\Delta_2: 2x - y + 1 = 0$ và hai điểm $A(-1; 3), B(3; 2)$. Biết M thuộc Δ_1 và N thuộc Δ_2 . Tìm tọa độ điểm M, N trong các trường hợp sau:

1) $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AN}$.

2) $ABMN$ là hình bình hành.

Giải

$$\text{Gọi } \begin{cases} M(t_1; t_1 + 3) \in \Delta_1 \\ N(t_2; 2t_2 + 1) \in \Delta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (t_1 + 1; t_1) \\ \overrightarrow{AN} = (t_2 + 1; 2t_2 - 2) \\ \overrightarrow{BM} = (t_1 - 3; t_1 + 1) \end{cases}$$

$$1) \overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + 1 = -3(t_2 + 1) \\ t_1 = -3(2t_2 - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + 3t_2 = -4 \\ t_1 + 6t_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -14 \\ t_2 = \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(-14; -11) \\ N(\frac{10}{3}; \frac{23}{3}) \end{cases}$$

2) $ABMN$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 + 1 = t_1 - 3 \\ 2t_2 - 2 = t_1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - t_2 = 4 \\ t_1 - 2t_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 11 \\ t_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(11; 14) \\ N(7; 15) \end{cases}$$

D. CÁC VÍ DỤ MỞ RỘNG

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D , $CD = 2AB$, đỉnh $B(8;4)$. Đường chéo AC đi qua điểm $M(4;12)$ và đường thẳng chứa cạnh AD có phương trình $x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ A, C, D .

Phân tích hướng giải:

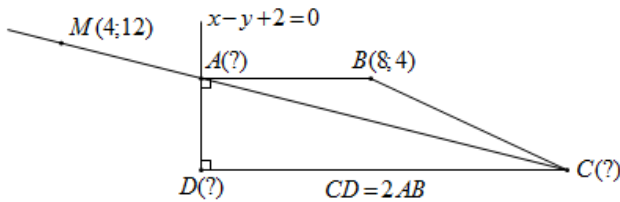
Câu hỏi đầu tiên ta vẫn thường đặt ra “Với những dữ kiện ban đầu cho phép ta viết được phương trình đường thẳng nào và có thể suy ra tọa độ của những điểm nào?”.

Cụ thể với ví dụ này:

* AB viết được phương trình vì đi qua B và vuông góc với AD . Khi đó trong ba điểm A, C, D ta nhận thấy ngay điểm A sẽ dễ dàng tìm được đầu tiên. Bởi $AD \cap AB = \{A\}$.

* Từ đây ta sẽ viết được phương trình AC đi qua A và M . Lúc này **Bài toán 5.2** đã xuất hiện. Cụ thể: $\begin{cases} D \in AD \\ C \in AC \end{cases}$ và $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$. Do đó ta sẽ tìm được tọa độ điểm C, D và có lời giải chi tiết sau:

Giải:



+ AB đi qua $B(8;4)$ và vuông góc với AD nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{AB}} = (1;1)$.

Do đó AB có phương trình: $x + y - 12 = 0$. Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + y - 12 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow A(5;7)$

+ AC đi qua $A(5;7)$ và $M(4;12)$ nên có phương trình: $5x + y - 32 = 0$

+ Gọi $\begin{cases} D(t_1; t_1 + 2) \in AD \\ C(t_2; -5t_2 + 32) \in AC \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (t_2 - t_1; -5t_2 - t_1 + 30)$

Do $CD = 2AB$ nên $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_2 - t_1 = 2.(8-5) \\ -5t_2 - t_1 + 30 = 2.(4-7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 - t_1 = 6 \\ 5t_2 + t_1 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = 7 \\ t_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(7;-3) \\ D(1;3) \end{cases}$$

+ Vậy $A(5;7), C(7;-3)$ và $D(1;3)$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trọng tâm thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 2 = 0$. Đường thẳng đi qua A và B có phương trình $x + 2y - 3 = 0$. Tìm tọa độ A và B biết $AB = \sqrt{5}$, $C(-1;-1)$ và hoành độ của A lớn hơn hoành độ của B .

Phân tích hướng giải:

Ở bài toán này, trọng tâm thuộc đường thẳng Δ và $C(-1;-1)$ nên việc tìm tọa độ trung điểm I của AB khá tự nhiên. Bởi nếu biết được I ta sẽ tìm được A, B theo góc nhìn của **Bài toán 1** ($A, B \in AB$ và $AI = BI = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$), lí do thứ hai là điểm I xuất hiện trong **Bài toán 5.2**. Cụ thể: I, G đều thuộc các đường thẳng đã biết phương trình và liên hệ với điểm $C(-1;-1)$ qua hệ thức vectơ $3\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{CI}$. Do đó ta có lời giải chi tiết sau:

Giải

+ Gọi I là trung điểm của AB .

Do $I \in AB$ nên $I(3-2m; m)$

và trọng tâm $G \in \Delta$ nên $G(n; 2-n)$

+ Suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{CG} = (n+1; 3-n) \\ \overrightarrow{CI} = (4-2m; m+1) \end{cases}$. Mặt khác G là trọng tâm tam giác ABC nên:

$$3\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{CI} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(n+1) = 2(4-2m) \\ 3(3-n) = 2(m+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n+4m=5 \\ 3n+2m=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(5;-1) \\ G(3;-1) \end{cases}$$

+ Khi đó A, B thuộc đường tròn tâm $I(5;-1)$ và bán kính $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Suy ra tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+2y-3=0 \\ (x-5)^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2y \\ (y+1)^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4; y=\frac{1}{2} \\ x=6; y=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\left(6; -\frac{3}{2}\right) \\ B\left(4; \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

+ Vậy $A\left(6; -\frac{3}{2}\right)$ và $B\left(4; \frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $A(5; -7)$, điểm C thuộc đường thẳng có phương trình $x - y + 4 = 0$. Đường thẳng đi qua D và trung điểm của đoạn thẳng AB có phương trình $3x - 4y - 23 = 0$. Tìm tọa độ của B và C , biết điểm B có tung độ dương.

Phân tích hướng giải:

Thứ tự ưu tiên để tìm tọa độ điểm nào trước, cũng luôn là câu hỏi được đặt ra khi bài toán yêu cầu tìm tọa độ của nhiều hơn một điểm. Câu trả lời cho thứ tự ưu tiên này thường là : điểm có mối liên hệ qua hệ thức vectơ – điểm thuộc đường thẳng – điểm có điều kiện về hoành độ (tung độ)...Như vậy với ví dụ cụ thể trên :

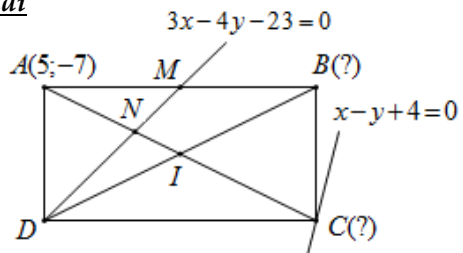
* Việc tìm tọa độ hai điểm B, C sẽ được ưu tiên cho điểm C trước. Lúc này ta cần gắn kết điểm C với những dữ kiện đã biết của bài toán là $A(5; -7)$ và đường thẳng $DM : 3x - 4y - 23 = 0$ (M là trung điểm của AB) bằng cách nối C với A và cắt DM tại N . Nhận thấy **Bài toán 5.2** sẽ “lộ diện” nếu ta tìm được mối liên hệ vectơ qua 3 điểm C, N, A - điều này là hoàn toàn làm được khi ta vận dụng kiến thức hình học sơ cấp để chỉ ra $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN}$. Vậy nhờ **Bài toán 5.2** ta đã tìm được tọa độ điểm C .

* Không có đường thẳng đã biết phương trình nào đi qua điểm B . Song thay vào đó ta có dữ kiện M là trung điểm của AB và thuộc đường thẳng $3x - 4y - 23 = 0$. Vì vậy ta hoàn toàn có thể tham số hóa điểm B theo một ẩn thông qua điểm M . Khi đó dữ kiện $\triangle ABC$ vuông tại B theo góc nhìn của **Bài toán 3** ta sẽ giúp ta suy ra được tọa độ điểm B .

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên :

Giải

+ Gọi M là trung điểm của AB và gọi I, N lần lượt là giao điểm của AC với BD, DM .



Khi đó N là trọng tâm của tam giác ABD

$$ABD \Rightarrow AN = \frac{2}{3} AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AC = \frac{1}{3} AC \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN} \quad (*)$$

+ Do C, N lần lượt thuộc các đường thẳng có phương trình $x - y + 4 = 0$ và $3x - 4y - 23 = 0$

$$\text{Nên gọi } \begin{cases} C(t_1; t_1 + 4) \\ N(1 + 4t_2; -5 + 3t_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (t_1 - 5; t_1 + 11) \\ \overrightarrow{AN} = (4t_2 - 4; 3t_2 + 2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - 5 = 3(4t_2 - 4) \\ t_1 + 11 = 3(3t_2 + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - 12t_2 = -7 \\ t_1 - 9t_2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow C(1; 5)$$

+ Gọi $M(1 + 4m; -5 + 3m) \in DM$. Do M là trung điểm của AB nên suy ra $B(8m - 3; 6m - 3)$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (8m - 8; 6m + 4) \\ \overrightarrow{CB} = (8m - 4; 6m - 8) \end{cases}.$$

Khi đó tam giác ABC vuông tại

$$B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (8m - 8)(8m - 4) + (6m + 4)(6m - 8) = 0$$

$$100m^2 - 120m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = \frac{6}{5}$$

+ Với $m = 0 \Rightarrow B(-3; -3)$ (loại). Với $m = \frac{6}{5} \Rightarrow B\left(\frac{33}{5}; \frac{21}{5}\right)$

Vậy $B = \left(\frac{33}{5}; \frac{21}{5}\right)$ và $C(1; 5)$.

Nhận xét:

Ở ví dụ trên nếu phải tìm thêm tọa độ điểm D thì ta cũng có thể giải quyết được trọn vẹn bài toán. Bởi khi đã tìm được tọa độ B, C ta sẽ dễ dàng viết được phương trình BD đi qua $B = \left(\frac{33}{5}; \frac{21}{5}\right)$ và trung điểm $I(3; -1)$ của AC . Và điểm D được xác định bởi giao của DM và DB .

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC biết $A(5; 2)$, phương trình đường trung trực BC , đường trung tuyến CD lần lượt có phương trình là $x - 3y + 1 = 0$ và $4x + 3y - 16 = 0$.

Phân tích hướng giải:

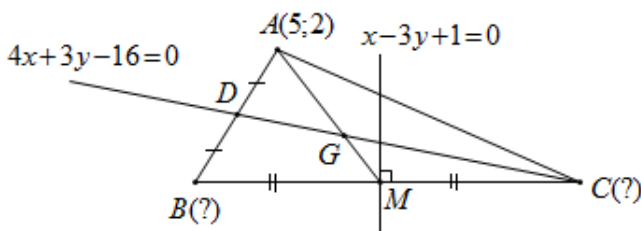
Trong ví dụ trên không có nhiều các dữ kiện "có lợi" cho B, C để ta có thể đi tìm trực tiếp. Vì vậy việc tìm tọa độ điểm B, C sẽ thông qua các điểm gián tiếp khác liên quan tới các dữ kiện bài toán cho.

* Ở bài toán này điểm $A(5; 2)$ đã biết tọa độ nên ta nghĩ tới việc liên kết nó với trung điểm M của BC khi mà đường trung trực của BC đi qua M đã biết

phương trình. Mà AM giao với CD tại trọng tâm G của tam giác ABC . Lúc này ta đã thấy sự “lộ diện” của **Bài toán 5.2**. Cụ thể: M, N lần lượt thuộc hai đường thẳng $x-3y+1=0$; $4x+3y-16=0$ và liên hệ với điểm $A(5;2)$ thông qua hệ thức $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$. Như vậy nhờ vào **Bài toán 5.2** ta sẽ tìm được tọa độ điểm M .

* Việc tìm được tọa độ điểm M coi như ta đã tháo được “nút thắt” của bài toán. Bởi khi đó ta sẽ viết được phương trình BC và suy ra được tọa độ của C ($BC \cap CD = \{C\}$) và B (M là trung điểm của BC). Sau đây là lời giải chi tiết của bài toán:

Giải



+ Gọi M là trung điểm của BC nên M thuộc đường thẳng $x-3y+1=0 \Rightarrow M(3t_1-1; t_1)$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , khi đó $G \in CD \Rightarrow G(4+3t_2; -4t_2)$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (3t_1-6; t_1-2) \\ \overrightarrow{AG} = (3t_2-1; -4t_2-2) \end{cases}$$

+ Khi đó

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t_1-6 = \frac{3}{2}(3t_2-1) \\ t_1-2 = \frac{3}{2}(-4t_2-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_1-3t_2=3 \\ t_1+6t_2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=1 \\ t_2=-\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow M(2;1)$$

+ BC đi qua $M(2;1)$ và vuông góc với đường thẳng $x-3y+1=0$ nên có phương trình: $3x+y-7=0$

Khi đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x+3y-16=0 \\ 3x+y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow C(1;4)$$

+ Do $M(2;1)$ là trung điểm của BC , suy ra $B(3;-2)$.

Vậy $C(1;4), B(3;-2)$.

Nhận xét :

Ngoài cách giải ở ví dụ trên các bạn có thể tham khảo cách giải thứ hai sau :

+ Gọi M là trung điểm của BC .

Do D, M lần lượt nằm trên các đường $4x + 3y - 16 = 0$ và $x - 3y + 1 = 0$ nên

$$\text{gọi } \begin{cases} D(4+3n; -4n) \\ M(3m-1; m) \end{cases} \Rightarrow B(6n+3; -8n-2) \Rightarrow C(6m-6n-5; 2m+8n+2)$$

+ Ta có:

$$C \in CD \Leftrightarrow 4(6m-6n-5) + 3(2m+8n+2) - 16 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow M(2; 1)$$

+ BC đi qua $M(2; 1)$ và vuông góc với đường thẳng $x - 3y + 1 = 0$ nên BC có phương trình: $3x + y - 7 = 0$

$$\text{Khi đó tọa độ điểm } C \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 3x + y - 7 = 0 \\ 4x + 3y - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow C(1; 4)$$

Do $M(2; 1)$ là trung điểm của BC nên suy ra $B(3; -2)$.

+ Vậy $B(3; -2), C(1; 4)$.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC . Biết trung tuyến kẻ từ A và đường cao kẻ từ B lần lượt có phương trình $x + 3y + 1 = 0$ và $x - y + 1 = 0$. Biết $M(-1; 2)$ là trung điểm của AB . Tìm tọa độ điểm C .

Phân tích hướng giải :

* Ở ví dụ này việc phát hiện ra **Bài toán 5.2** là khá đơn giản, bởi A, B lần lượt thuộc các đường thẳng $x + 3y + 1 = 0$; $x - y + 1 = 0$ và $M(-1; 2)$ là trung điểm của AB ($\overline{AM} = \overline{MB}$). Như vậy nhờ **Bài toán 5.2** ta tìm được tọa độ của A và B .

* Khi đó ta dễ dàng viết được phương trình AC . Lúc này **Bài toán 5.2** lại tiếp tục phát huy sẽ giúp ta xác định được tọa độ điểm C . Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên :

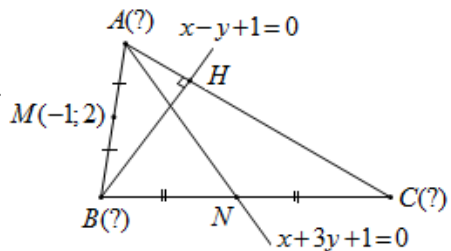
Giải

+ Gọi N là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của B trên AC .

Ta sẽ tìm tọa độ điểm A, B theo các cách trình bày sau :

Cách 1 :

Gọi $\begin{cases} A(-3a-1; a) \in AN \\ B(b; b+1) \in BH \end{cases}$, khi đó $M(-1; 2)$ là trung điểm của AB nên ta có :



$$\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a - 1 + b = -2 \\ a + b + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-4; 1) \\ B(2; 3) \end{cases}$$

Cách 2 :

Gọi $A(-3a-1; a) \in AN$, khi đó $M(-1; 2)$ là trung điểm của AB nên ta có :

$$\begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = 3a - 1 \\ y_B = 2y_M - y_A = 4 - a \end{cases} \Rightarrow B(3a - 1; 4 - a)$$

$$\text{Do } B \in BH \Rightarrow 3a - 1 - (4 - a) + 1 = 0 \Leftrightarrow 4a = 4 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow \begin{cases} A(-4; 1) \\ B(2; 3) \end{cases}$$

+ Việc tìm tọa độ điểm C ta có hai cách trình bày sau :

Cách 1 :

AC đi qua $A(-4; 1)$ và vuông góc với đường thẳng $BH : x - y + 1 = 0$ nên AC có phương trình : $x + y + 3 = 0$.

$$\text{Gọi } C(c; -c-3) \in AC \Rightarrow N\left(\frac{c+2}{2}; \frac{-c}{2}\right)$$

$$\text{Mặt khác } N \in AN \Rightarrow \frac{c+2}{2} + 3 \cdot \left(\frac{-c}{2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow c = 2 \Rightarrow C(2; -5)$$

Cách 2 :

$$\text{Gọi } N(-3t-1; t) \in AN \Rightarrow C(-6t-4; 2t-3) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (-6t; 2t-4)$$

Ta có $\overrightarrow{u_{BH}} = (1; 1)$, khi đó

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{u_{BH}} = 0 \Leftrightarrow -6t + 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow -4t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow C(2; -5)$$

Vậy $A(-4; 1), B(2; 3), C(2; -5)$.

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$, trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho $NC = 2ND$. Đỉnh $D(1; -3)$ và điểm A nằm trên đường thẳng $3x - y + 9 = 0$. Phương trình đường thẳng $MN : 4x - 3y - 3 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật $ABCD$.

Phân tích hướng giải :

* Trong ví dụ này những yếu tố liên quan tới giả thiết tường minh mà đề bài cho là : “ $D(1; -3)$, phương trình $MN : 4x - 3y - 3 = 0$ và A thuộc đường thẳng $3x - y + 9 = 0$ “. Như vậy lúc này chúng ta nghĩ tới việc cần “gắn kết” 3 yếu tố “điểm D, A cùng đường thẳng MN ” lại với nhau. **Bài toán 5.2** sẽ giúp ta làm được điều

này. Cụ thể: Gọi $AD \cap MN = \{E\}$, khi đó nếu chỉ ra được mối liên hệ về vị trí 3 điểm A, E, D thông qua hệ thức vectơ ta sẽ tìm được tọa độ điểm A và E . Điều này hoàn toàn làm được, khi dữ kiện M nằm trên cạnh BC thỏa mãn $MC = 2MB$ cùng với D là trung điểm của CN , giúp ta suy ra được $\overline{AD} = 3\overline{ED}$. Như vậy với **Bài toán 5.2** ta “tháo” được điểm A . Có lẽ đây cũng là “nút thắt” quan trọng nhất của bài toán mà ta đã gỡ được.

* Việc tìm điểm C, B lúc này trở nên đơn giản. Khi ta viết được phương trình CD (đi qua D vuông góc với AD) và suy ra được tọa độ điểm N (là giao của CD và MN). Nhờ D là trung điểm của CN suy ra tọa độ điểm C và việc tìm điểm B có thể trình bày theo góc nhìn của **Bài toán 5.1** thông qua hệ thức $\overline{CB} = \overline{DA}$.

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên.

Giải

+ Gọi E là giao điểm của MN và AD , khi đó:

$$\begin{aligned} ED &= \frac{1}{2}MC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BC \\ &= \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}AD \Rightarrow \overline{AD} = 3\overline{ED} \quad (*) \end{aligned}$$

+ Do A thuộc đường thẳng:

$$3x - y + 9 = 0 \Rightarrow A(a; 3a + 9)$$

Do E thuộc $MN: 4x - 3y - 3 = 0 \Rightarrow E(3b; -1 + 4b)$

Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a = 3(1 - 3b) \\ -3 - (3a + 9) = 3[-3 - (-1 + 4b)] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 9b = -2 \\ a - 4b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 3)$$

+ CN đi qua $D(1; -3)$ và vuông góc với AD nên có phương trình: $x - 2y - 7 = 0$

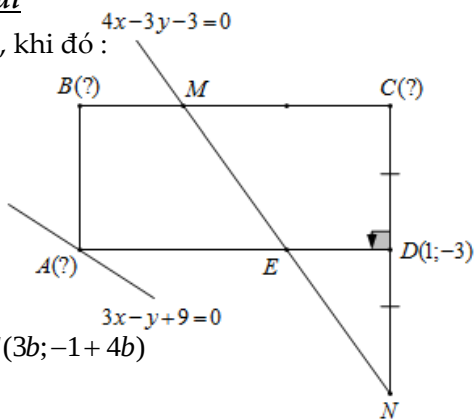
Khi đó tọa độ điểm N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y - 7 = 0 \\ 4x - 3y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow N(-3; -5)$$

Do D là trung điểm của CN nên suy ra $C(5; -1)$

+ Ta lại có $\overline{CB} = \overline{DA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 5 = -2 - 1 \\ y_B + 1 = 3 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2 \\ y_B = 5 \end{cases} \Rightarrow B(2; 5)$

Vậy $A(-2; 3), B(2; 5), C(5; -1)$.



Ví dụ 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác nhọn ABC , có đường cao AH ($H \in BC$) và $BC = 3BH$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH có phương trình $(T): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$, đường thẳng $AC: x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết A có hoành độ dương.

Phân tích hướng giải:

* Với dữ kiện $A \in (T)$, $A \in AC$ và $x_A > 0$ ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm A . Khi đó việc suy ra tọa độ điểm B là không khó, khi tâm $I(2;1)$ của (T) là trung điểm của AB .

* Lúc này việc tìm tọa độ điểm C có "bóng dáng" của **Bài toán 5.2**. Bởi $C \in AC$, $H \in (T)$ và C, H, B liên hệ với nhau qua hệ thức vectơ $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BH}$. Như vậy từ đây ta sẽ xác định được tọa độ điểm C .

Giải

+ Đường tròn (T) có tâm $I(2;1)$.

Do tam giác ABH vuông tại H nên $I(2;1)$ là trung điểm của AB

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \\ x - y + 2 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 - x = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(1;3)$$

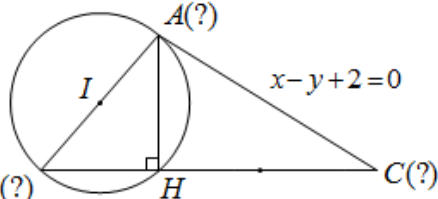
Do I là trung điểm của AB nên $B(3; -1)$

$$+ \text{ Gọi } \begin{cases} C(t; t+2) \in AC \\ H(x_0; y_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BC} = (t-3; t+3) \\ \overrightarrow{BH} = (x_0-3; y_0+1) \end{cases}$$

Tam giác ABC nhọn, đường cao AH ($H \in BC$) và $BC = 3BH$ nên $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BH}$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} t-3 = 3(x_0-3) \\ t+3 = 3(y_0+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{t}{3} + 2 \\ y_0 = \frac{t}{3} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{t}{3} + 2; \frac{t}{3}\right)$$

$$+ \text{ Do } H \in (T) \Rightarrow \left(\frac{t}{3} + 2\right)^2 + \left(\frac{t}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{t}{3} + 2\right) - 2 \cdot \frac{t}{3} = 0$$



$$\Leftrightarrow t^2 - 3t - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(6; 8) \\ C(-3; -1) \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } A(1; 3), B(3; -1), C(6; 8) \Rightarrow \begin{cases} AB^2 = 20 \\ AC^2 = 50 \Rightarrow \cos A < 0 \Leftrightarrow A > 90^\circ \text{ (loại)} \\ BC^2 = 90 \end{cases}$$

Với $A(1; 3), B(3; -1), C(-3; -1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB^2 = 20 \\ AC^2 = 32 \Rightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow C < B < A < 90^\circ \text{ (thỏa mãn)} \\ BC^2 = 36 \end{cases}$$

Vậy $A(1; 3), B(3; -1), C(-3; -1)$.

Nhận xét : Theo nội dung của **Bài toán 5.2** thì ta sẽ tìm được 2 điểm thuộc hai đường thẳng khi liên hệ với điểm thứ ba thông qua hệ thức vectơ. Song ở bài toán trên trong hai điểm có một điểm thuộc đường thẳng và một điểm thuộc đường tròn, ta vẫn có hướng giải quyết theo ý tưởng của **Bài toán 5.2**. Như vậy qua ví dụ trên ta có thể tổng quát **Bài toán 5.2** như sau: “**Tìm tọa độ hai điểm M, N lần lượt thuộc hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 (hoặc thay một đường thẳng bởi một đường cong như đường tròn, elip, parabol...) và liên hệ với điểm thứ ba (hoặc hai điểm) cho trước qua một hệ thức vectơ**”.

E. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC , $N\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là điểm trên cạnh AC sao cho

$$AN = \frac{1}{4}AC \text{ và giao điểm của } AC \text{ và } DM \text{ là } I\left(1; \frac{4}{3}\right). \text{ Xác định tọa độ các}$$

đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết B có hoành độ dương.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC , biết phương trình các đường thẳng AB, AC lần lượt là $x + y + 3 = 0$ và $2x - y - 2 = 0$. Biết trung điểm của cạnh BC là $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$. Hãy viết phương trình đường thẳng BC .

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD , phương trình đường thẳng DG là $2x - y + 1 = 0$,

phương trình đường thẳng BD là $5x - 3y + 2 = 0$ và điểm $C(0; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành $ABCD$.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(-2; 3)$. Đường cao CH nằm trên đường thẳng $2x + y - 7 = 0$ và đường trung tuyến BM nằm trên đường thẳng $2x - y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC .

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: 3x - y - 5 = 0$, $d_2: x + y - 4 = 0$ và điểm $M(1; 1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho $2MA = 3MB$.

Bài 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, điểm $C(3; -3)$ và điểm A thuộc đường thẳng $d: 3x + y - 2 = 0$. Gọi M là trung điểm của BC , đường thẳng DM có phương trình $x - y - 2 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông $ABCD$.

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết trực tâm $H(1; 0)$, chân đường cao hạ từ đỉnh B là $K(0; 2)$, trung điểm cạnh AB là điểm $M(3; 1)$.

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có phương trình đường trung tuyến BN và đường cao AH lần lượt có phương trình $3x + 5y + 1 = 0$ và $8x - y - 5 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết $M\left(-1; -\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của cạnh BC .

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$. Phương trình các đường thẳng AC và DC lần lượt là $x + 2y = 0$ và $x - y - 3 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình thang $ABCD$ biết trung điểm cạnh AD là $M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(3; 3)$ và $I(2; 1)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp. Đường phân giác trong của góc nhọn A có phương trình $x - y = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC , biết $BC = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A , BM là đường trung tuyến. Kẻ đường thẳng qua A vuông góc với BM cắt BC tại $E(2;1)$, trọng tâm tam giác ABC là $G(2;2)$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$ với đáy lớn AD và $AD = 2BC$, đỉnh $B(4;0)$, phương trình đường chéo $AC: 2x - y - 3 = 0$, trung điểm E của AD thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y + 10 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang $ABCD$, biết $\cot \widehat{ADC} = 2$.

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ điểm

$M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M cắt E tại hai điểm A, B sao cho $MA = 2MB$.

Bài 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(5; -7)$, M là điểm sao cho $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$. Điểm C thuộc đường thẳng $d: x - y + 4 = 0$. Đường thẳng đi qua DM có phương trình $7x - 6y - 57 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác BCD biết điểm B có hoành độ âm.

Bài 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có giao điểm hai đường chéo là I . Trung điểm của AB là điểm $M(0; -7)$ và trọng tâm $G(5; 3)$ của tam giác ICD . Biết diện tích ABD bằng 12 và A thuộc đường thẳng $\Delta: x - y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành $ABCD$.

F. GIẢI BÀI TẬP VẬN DỤNG

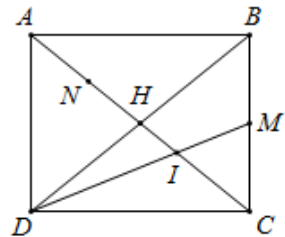
Bài 1.

+ Do $AD \parallel MC$ nên ta có:

$$\frac{AI}{IC} = \frac{AD}{MC} = 2 \Rightarrow AI = 2IC$$

$$\Rightarrow AI = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3} \cdot 4AN = \frac{8}{3}AN \text{ hay } AI = \frac{8}{5}NI$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AI} = \frac{8}{5}\overrightarrow{NI} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_A = \frac{8}{5}\left(1 + \frac{3}{2}\right) \\ \frac{4}{3} - y_A = \frac{8}{5}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -3 \\ y_A = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-3; 0)$$



+ Mặt khác ta lại có:

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} - (-3) = \frac{1}{4}(x_C + 3) \\ \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{4}(y_C - 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = 2 \end{cases} \Rightarrow C(3; 2)$$

+ Gọi $AC \cap BD = \{H\}$, khi đó H là trung điểm của AC nên suy ra $H(0; 1)$
 BD đi qua $H(0; 1)$ và nhận $\overrightarrow{AC} = (6; 2) = 2(3; 1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $3x + y - 1 = 0$

+ Gọi $B(t; 1-3t) \in BD$ với $t > 0$, khi đó: $BH = HA \Leftrightarrow BH^2 = HA^2$

$$\Leftrightarrow t^2 + 9t^2 = 3^2 + 1^2 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -1 \text{ (loại)}$$

Suy ra $B(1; -2) \Rightarrow D(-1; 4)$ (do H là trung điểm của BD).

Vậy $A(-3; 0), B(1; -2), C(3; 2), D(-1; 4)$

Bài 2.

Cách 1:

+ Gọi $\begin{cases} B(t_1; -t_1 - 3) \in AB \\ C(t_2; 2t_2 - 2) \in AC \end{cases}$.

Do $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ là trung điểm của

BC nên suy ra:

$$\begin{cases} x_B + x_C = 2x_M \\ y_B + y_C = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = -1 \\ -t_1 - 3 + 2t_2 - 2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = -1 \\ t_1 - 2t_2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -4 \\ t_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-4; 1) \\ C(3; 4) \end{cases}$$

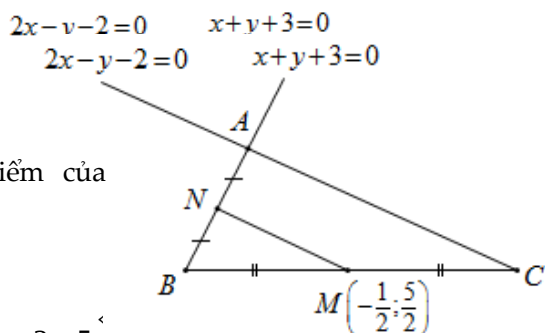
+ Khi đó BC đi qua B, C (hoặc M) có phương trình: $3x - 7y + 19 = 0$.

Cách 2:

+ Gọi $B(t; -t - 3) \in AB$, khi đó M là trung điểm của BC nên suy ra:

$$\begin{cases} x_C = 2x_M - x_B = -1 - t \\ y_C = 2y_M - y_B = t + 8 \end{cases} \Rightarrow C(-1 - t; t + 8)$$

+ Mặt khác $C \in AC$



$$\Rightarrow 2(-1-t) - (t+8) - 2 = 0 \Leftrightarrow 3t = -12 \Leftrightarrow t = -4 \Rightarrow \begin{cases} B(-4;1) \\ C(3;4) \end{cases}$$

+ Khi đó BC đi qua B, C (hoặc M) có phương trình : $3x - 7y + 19 = 0$.

Cách 3:

+ Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{3}; -\frac{8}{3}\right)$$

+ Gọi N là trung điểm của AB

Khi đó MN đi qua $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ và song song với AC nên có phương

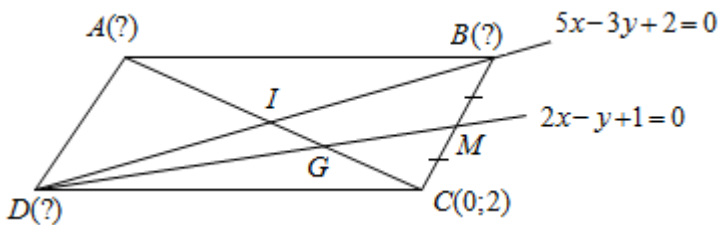
$$\text{trình : } 2x - y + \frac{7}{2} = 0$$

+ Tọa độ điểm N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y + \frac{7}{2} = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{13}{6} \\ y = -\frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow N\left(-\frac{13}{6}; -\frac{5}{6}\right) \Rightarrow B(-4;1)$$

+ Khi đó BC đi qua B, M có phương trình : $3x - 7y + 19 = 0$.

Bài 3.



+ Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 5x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow D(-1; -1)$

+ Gọi $DG \cap BC = \{M\}$, suy ra M là trung điểm của BC

$$\text{Do } M \in DG \Rightarrow M(m; 2m+1) \Rightarrow B(2m; 4m)$$

+ Mặt khác $B \in BD \Leftrightarrow 5.2m - 3.4m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow B(2; 4)$

Suy ra trung điểm của BD có tọa độ $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Do I cũng là trung điểm

của $AC \Rightarrow A(1;1)$ (có thể suy ra điểm A nhờ hệ thức $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$)

Bài 4.

+ AB đi qua $A(-2;3)$ và vuông góc

với CH nên nhận $\overrightarrow{u_{CH}} = (1; -2)$ làm

vecto pháp tuyến.

Do đó AB có phương trình :

$$x + 2 - 2(y - 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 8 = 0$$

+ Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y + 8 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(2;5)$$

+ Gọi $C(t; 7 - 2t) \in CH$.

Do M là trung điểm của AC nên suy ra $M\left(\frac{t-2}{2}; 5-t\right)$

+ Mặt khác $M \in BM \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{t-2}{2} - (5-t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow C(3;1)$

Vậy $B(2;5), C(3;1)$.

Bài 5.

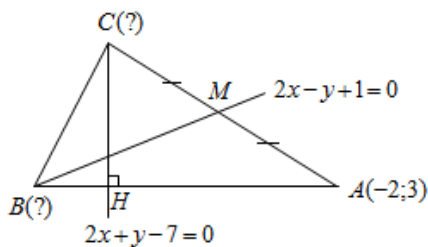
+ Ta có $\begin{cases} A \in d_1 \Rightarrow A(t_1; 3t_1 - 5) \\ B \in d_2 \Rightarrow B(t_2; 4 - t_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} = (t_1 - 1; 3t_1 - 6) \\ \overrightarrow{MB} = (t_2 - 1; 3 - t_2) \end{cases}$

Vì M, A, B thẳng hàng và $2MA = 3MB$, suy ra $2\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$ hoặc $2\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB}$.

+ Với $2\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(t_1 - 1) = 3(t_2 - 1) \\ 2(3t_1 - 6) = 3(3 - t_2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t_1 - 3t_2 = -1 \\ 2t_1 + t_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{5}{2} \\ t_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right) \\ B(2;2) \end{cases}$$

Khi đó phương trình đường thẳng d đi qua $M(1;1), B(2;2)$ có phương trình : $x - y = 0$



+ Với

$$2\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(t_1 - 1) = -3(t_2 - 1) \\ 2(3t_1 - 6) = -3(3 - t_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_1 + 3t_2 = 5 \\ 2t_1 - t_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1; -2) \\ B(1; 3) \end{cases}$$

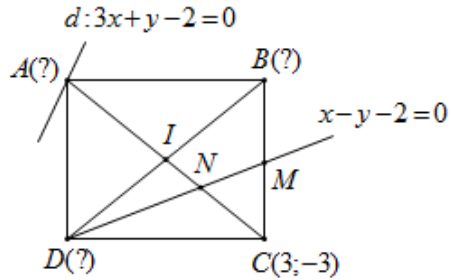
Khi đó phương trình đường thẳng d đi qua $M(1;1), B(1;3)$ có phương trình: $x - 1 = 0$.

Bài 6.

+ Gọi I, N lần lượt là giao điểm của AC với BD, DM .

Khi đó N là trọng tâm của tam giác

$$\begin{aligned} BCD \Rightarrow CN &= \frac{2}{3}CI = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}CA \\ &= \frac{1}{3}CA \Rightarrow \overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CN} (*) \end{aligned}$$



$$+ \text{ Gọi } \begin{cases} A(t_1; 2 - 3t_1) \in d \\ N(t_2; t_2 - 2) \in DM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CA} = (t_1 - 3; 5 - 3t_1) \\ \overrightarrow{CN} = (t_2 - 3; t_2 + 1) \end{cases}$$

$$\text{Từ } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - 3 = 3(t_2 - 3) \\ 5 - 3t_1 = 3(t_2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - 3t_2 = -6 \\ 3t_1 + 3t_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow A(-1; 5)$$

+ Do I là trung điểm của AB nên $I(1;1)$

Khi đó BD đi qua I và vuông góc với AC nên có phương trình: $x - 2y + 1 = 0$

$$\text{Vậy tọa độ điểm } D \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow D(5; 3)$$

Suy ra $B(-3; -1)$ (do $I(1;1)$ là trung điểm của BD)

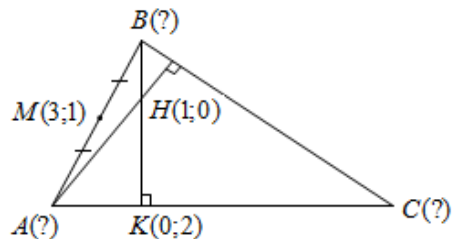
+ Vậy $A(-1; 5), B(-3; -1), D(5; 3)$.

Bài 7.

+ Ta có AC đi qua $K(0; 2)$ và vuông góc với HK nên nhận $\overrightarrow{KH} = (1; -2)$ làm vectơ pháp tuyến.

Do đó AC có phương trình:

$$x - 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0$$



+ BK đi qua $H(1;0)$ nhận $\overrightarrow{n_{KH}} = (2;1)$ làm vecto pháp tuyến nên có phương trình: $2(x-1) + y = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0$

+ Gọi $\begin{cases} A(2a-4; a) \in AC \\ B(b; 2-2b) \in BK \end{cases}$, khi đó $M(3;1)$ là trung điểm của AB nên ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-4+b=6 \\ a+2-2b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=10 \\ a-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(4;4) \\ B(2;-2) \end{cases}$$

+ Ta có BC đi qua $B(2;-2)$ nhận $\overrightarrow{HA} = (4;3)$ làm vecto pháp tuyến nên có phương trình: $4(x-2) + 3(y+2) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 2 = 0$

Khi đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-2y+4=0 \\ 4x+3y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{8}{11} \\ y=\frac{18}{11} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{8}{11}; \frac{18}{11}\right)$$

Vậy $A(4;4)$, $B(2;-2)$, $C\left(-\frac{8}{11}; \frac{18}{11}\right)$.

Bài 8.

+ BC đi qua $M\left(-1; -\frac{3}{2}\right)$ và vuông góc với AH nên nhận $\overrightarrow{u_{AH}} = (1;8)$ làm vecto chỉ phương.

Do đó BC có phương trình:

$$x+1+8\left(y+\frac{3}{2}\right)=0 \Leftrightarrow x+8y+13=0$$

+ Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ

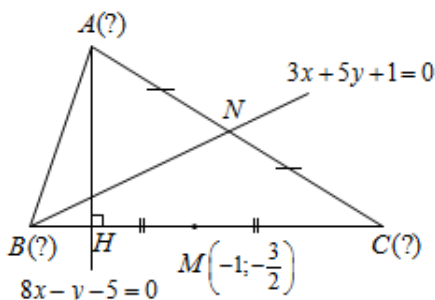
$$\begin{cases} x+8y+13=0 \\ 3x+5y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow B(3;-2)$$

+ Do M là trung điểm của BC nên suy ra $C(-5;-1)$

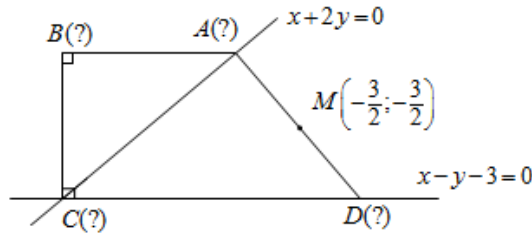
+ Gọi $A(a; 8a-5) \in AH \Rightarrow N\left(\frac{a-5}{2}; 4a-3\right)$: là trung điểm của AC .

$$\text{Ta có } N \in BN \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{a-5}{2} + 5 \cdot (4a-3) + 1 = 0 \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow A(1;3)$$

Vậy $A(1;3)$, $B(3;-2)$, $C(-5;-1)$.



Bài 9.



- + Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+2y=0 \\ x-y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow C(2;-1)$

Gọi $\begin{cases} A(-2a;a) \in AC \\ D(d;d-3) \in DC \end{cases}$. Do $M\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của AD nên ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_D = 2x_M \\ y_A + y_D = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + d = -3 \\ a + d - 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ d=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-2;1) \\ D(-1;-4) \end{cases}$$

- + Khi đó AB đi qua A và song song với CD nên có phương trình: $x-y+3=0$.
 BC đi qua C và vuông góc với CD nên có phương trình: $x+y-1=0$

Suy ra tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow B(-1;2)$$

Vậy $A(-2;1), B(-1;2), C(2;-1), D(-1;-4)$.

Bài 10.

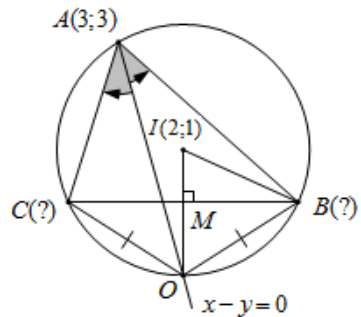
- + Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm I và bán kính $R=IA=\sqrt{5}$ nên có phương trình:

$$(T): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

- + Khi đó tọa độ giao điểm của đường phân giác trong góc A với (T) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=0 \\ x=y=3 \end{cases} \Rightarrow O(0;0) \text{ là giao điểm thứ hai.}$$

Do OA là phân giác trong của góc A nên OI vuông góc với BC tại trung điểm M của BC



$$\text{Khi đó: } IM = \sqrt{R^2 - CM^2} = \sqrt{5 - \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$FB = FE \Leftrightarrow (b-2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} b=4 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(4;3) \\ B(0;3) \end{cases}$$

+ Với $B(4;3)$.

Do G là trọng tâm tam giác ABC và $EG \parallel AC$ nên ta có:

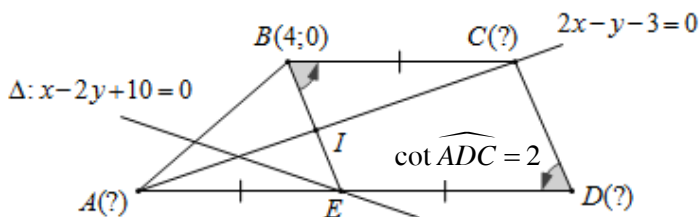
$$\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{EC} \Rightarrow \begin{cases} 2-4=2(x_C-2) \\ 1-3=2(y_C-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=1 \\ y_C=0 \end{cases} \Rightarrow C(1;0)$$

$$\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{EG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A-1=3(2-2) \\ y_A-0=3(2-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=1 \\ y_A=3 \end{cases} \Rightarrow A(1;3)$$

+ Với $B(0;3)$ tương tự ta được $C(3;0), A(3;3)$.

Vậy $A(1;3), B(4;3), C(1;0)$ hoặc $A(3;3), B(0;3), C(3;0)$

Bài 12.



+ Gọi $AE \cap AC = \{I\}$, do $AD = 2BC$ nên $ABCE$ là hình bình hành

$\Rightarrow I$ là trung điểm của BE

$$\text{Gọi } E(2t-10; t) \in \Delta \Rightarrow I\left(t-3; \frac{t}{2}\right).$$

$$\text{Mà } I \in AC \Rightarrow 2(t-3) - \frac{t}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 6 \Rightarrow \begin{cases} E(2;6) \\ I(3;3) \end{cases}$$

+ Mặt khác $BCDE$ là hình bình hành nên

Ta có $\overrightarrow{BE} = (-2; 6)$ và gọi $C(c; 2c-3) \in AC \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (c-4; 2c-3)$. Khi đó :

$$\cot \widehat{EBC} = \cot \widehat{ADC} = 2 \Rightarrow \cos^2 \widehat{EBC} = \frac{1}{1 + \tan^2 \widehat{EBC}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow |\cos \widehat{EBC}| = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BC}|}{BE \cdot BC} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|-2(c-4) + 6(2c-3)|}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{(c-4)^2 + (2c-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5|c-1|}{\sqrt{10(5c^2-20c+25)}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 3c^2 - 22c + 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c=5 \\ c=\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(5;7) \\ C\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right) \end{cases}$$

- + Với $C(5;7) \Rightarrow A(1;-1), D(3;13)$ (do I, E lần lượt là trung điểm của AC, AD)
- + Với $C\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right) \Rightarrow A\left(\frac{11}{3}; \frac{13}{3}\right), D\left(\frac{1}{3}; \frac{23}{3}\right)$ (do I, E lần lượt là trung điểm của AC, AD).

Vậy $A(1;-1), C(5;7), D(3;13)$ hoặc $A\left(\frac{11}{3}; \frac{13}{3}\right), C\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right), D\left(\frac{1}{3}; \frac{23}{3}\right)$.

Bài 13.

+ Gọi $B(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0^2 + 4y_0^2 - 4 = 0$ (1)

+ Do M nằm trong (E) nên từ $MA = 2MB$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - \frac{2}{3} = -2\left(x_0 - \frac{2}{3}\right) \\ y_A - \frac{2}{3} = -2\left(y_0 - \frac{2}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 2 - 2x_0 \\ y_A = 2 - 2y_0 \end{cases} \Rightarrow A(2 - 2x_0; 2 - 2y_0)$$

+ Mà $A \in (E) \Rightarrow \frac{(2 - 2x_0)^2}{4} + (2 - 2y_0)^2 = 1 \Leftrightarrow x_0^2 + 4y_0^2 - 2x_0 - 8y_0 + 4 = 0$ (2)

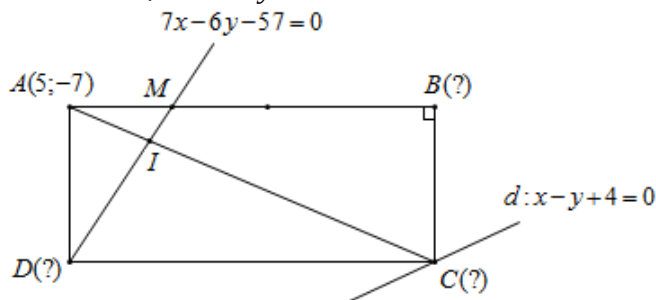
+ Từ (1) và (2) ta được hệ:

$$\begin{cases} x_0^2 + 4y_0^2 - 4 = 0 \\ x_0^2 + 4y_0^2 - 2x_0 - 8y_0 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0; y_0 = 1 \\ x_0 = \frac{8}{5}; y_0 = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(0;1) \\ B\left(\frac{8}{5}; \frac{3}{5}\right) \end{cases}$$

Với $B(0;1) \Rightarrow \Delta: x + 2y - 2 = 0$; Với $B\left(\frac{8}{5}; \frac{3}{5}\right) \Rightarrow \Delta: x + 14y - 10 = 0$

Vậy $x + 2y - 2 = 0$ hoặc $x + 14y - 10 = 0$.

Bài 14.



+ Gọi I là giao điểm của AC và DM . Do $AM \parallel DC$ nên áp dụng định lý

Ta - let ta được: $\frac{AI}{CI} = \frac{AM}{DC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{AI}{AC} = \frac{1}{5} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AI}$

$$+ \text{ Gọi } \begin{cases} C(c; c+4) \in d \\ I\left(a; \frac{7a-57}{6}\right) \in DM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AC} = (c-5; c+11) \\ \overline{AI} = \left(a-5; \frac{7a-15}{6}\right) \end{cases}$$

Khi đó

$$\overline{AC} = 5\overline{AI} \Leftrightarrow \begin{cases} c-5 = 5(a-5) \\ c+11 = 5 \cdot \frac{7a-15}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c-5a = -20 \\ 6c-35a = -141 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a=\frac{21}{5} \end{cases} \Rightarrow C(1;5)$$

$$+ \text{ Gọi } M\left(t; \frac{7t-57}{6}\right) \in DM \Rightarrow \overline{AM} = \left(t-5; \frac{7t-15}{6}\right). \text{ Khi đó:}$$

$$3\overline{MA} + \overline{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AB} = 4\overline{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 5 = 4 \cdot (t-5) \\ y_B + 7 = 4 \cdot \frac{7t-15}{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 4t - 15 \\ y_B = \frac{14t-51}{3} \end{cases} \Rightarrow B\left(4t-15; \frac{14t-51}{3}\right)$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \overline{AB} = \left(4t-20; \frac{14t-30}{3}\right) \\ \overline{CB} = \left(4t-16; \frac{14t-66}{3}\right) \end{cases}$$

+ Ta có:

$$AB \perp CB \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CB} = 0 \Leftrightarrow (4t-20)(4t-16) + \frac{(14t-30)(14t-66)}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow 17t^2 - 132t + 243 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=\frac{81}{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-3; -3) \\ B\left(\frac{69}{17}; \frac{89}{17}\right) \end{cases}$$

Do B có hoành độ âm nên ta được $B(-3; -3)$.

+ $ABCD$ là hình chữ nhật nên

$$\overline{CD} = \overline{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 1 = 5 - (-3) \\ y_D - 5 = -7 - (-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 9 \\ y_D = 1 \end{cases} \Rightarrow D(9;1)$$

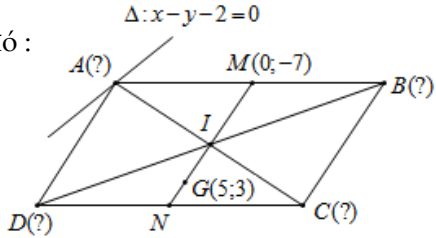
Vậy $B(-3; -3), C(1;5), D(9;1)$.

Bài 15.

+ Gọi N là trung điểm của CD , khi đó :

$$IG = \frac{2}{3}IN = \frac{2}{3}IM \Rightarrow \overline{IG} = \frac{2}{3}\overline{IM}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x_I = \frac{2}{3}(0 - x_I) \\ 3 - y_I = \frac{2}{3}(-7 - y_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 3 \\ y_I = -1 \end{cases} \Rightarrow I(3; -1)$$



+ Ta có $S_{ABD} = 4S_{AMI} = 12 \Rightarrow S_{AMI} = 3$

$$\text{Mặt khác } MI = 3\sqrt{5} \Rightarrow d(A, MI) = \frac{2S_{AMI}}{MI} = \frac{2 \cdot 3}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

+ Ta có phương trình đường thẳng $MI : 2x - y - 7 = 0$

Gọi $A(a; a - 2) \in \Delta$, khi đó:

$$d(A, MI) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|2a - (a - 2) - 7|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |a - 5| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(3; 1) \\ A(7; 0) \end{cases}$$

Do M là trung điểm của AB và I là trung điểm của AC, BD nên:

+ Với $A(3; 1) \Rightarrow B(-3; -15), C(3; -3), D(9; 13)$

Với $A(7; 0) \Rightarrow B(-7; -1), C(13; 12), D(-1; -2)$

Vậy $A(3; 1), B(-3; -15), C(9; 13), D(3; -3)$

hoặc $A(7; 0), B(-7; -1), C(13; 12), D(-1; -2)$.

6. BÀI TOÁN 6:

Viết phương trình đường thẳng

TRƯỜNG HỢP 1: Bài toán không cho vectơ pháp tuyến (hoặc vectơ chỉ phương)

Bài toán 6.1

A. NỘI DUNG BÀI TOÁN 6.1

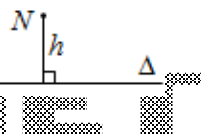
Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua một điểm, cách một điểm cho trước một khoảng không đổi.

B. CÁCH GIẢI CHUNG

Gọi vtpt

$$\vec{n}_{\Delta} = (a; b) \xrightarrow{a^2 + b^2 \neq 0; M \in \Delta} \Delta : ax + by + f(a, b) = 0$$

$$\xrightarrow{d(N, \Delta) = h = \text{const}} g(a, b) = 0, (*)$$



$$\text{Từ } (*) \Rightarrow a = kb \xrightarrow{\text{chọn}} \begin{cases} a = ? \\ b = ? \end{cases} \Rightarrow \text{phương trình } \Delta.$$

Giải thích chi tiết:

+ Gọi vectơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n}_\Delta = (a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$), do Δ đi qua M đã biết tọa độ nên ta viết được phương trình Δ có dạng: $ax + by + f(a, b) = 0$ (phụ thuộc vào 2 ẩn a, b).

+ Sử dụng dữ kiện Δ cách điểm N cho trước một khoảng không đổi ($d(N, \Delta) = h = \text{const}$) giúp ta thiết lập được phương trình đẳng cấp bậc hai $g(a, b) = 0$ (ẩn a, b). Từ đây ta sẽ rút ra được mối liên hệ $a = kb$. Sau đó bằng thao tác “chọn”, ta được bộ số $(a; b) \neq (0; 0)$ và suy ra được phương trình Δ .

Chú ý:

Ngoài cách giải trên các bạn có thể giải theo cách sau:

+ Gọi phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ có hệ số góc k có dạng:

$$y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow kx - y - kx_0 + y_0 = 0$$

$$\text{Khi đó } d(N, \Delta) = h \Leftrightarrow f(k) = 0 \Leftrightarrow k = ? \Rightarrow \text{phương trình } \Delta.$$

+ Phương trình Δ có dạng $x - a = 0$. Vì $M(x_0; y_0) \in \Delta$ nên suy ra phương trình $\Delta: x - x_0 = 0$

Kiểm tra điều kiện $d(N, \Delta) = h \Rightarrow$ kết luận.

Nhận xét:

Như vậy để chuyển các bài toán về nội dung **Bài toán 6.1**, ta cần khai thác các dữ kiện của bài toán để chỉ ra được 2 điều kiện:

- + Đường thẳng đó đi qua một điểm đã biết tọa độ.
- + Đường thẳng đó cách một điểm cho trước một khoảng tính được.

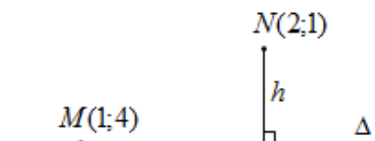
C. VÍ DỤ GỐC

Ví dụ. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $M(1; 4)$ và $N(2; 1)$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua M sao cho khoảng cách từ N tới đường thẳng Δ bằng 1.

Giải

Cách 1:

Gọi vectơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n}_\Delta = (a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$), do Δ đi qua $M(1; 4)$ nên có phương trình:



$$a(x-1)+b(y-4)=0 \Leftrightarrow ax+by-a-4b=0, \text{ khi đó:}$$

$$d(N, \Delta)=1 \Leftrightarrow \frac{|2a+b-a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1 \Leftrightarrow |a-3b|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow (a-3b)^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow 8b^2-6ab=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ 3a=4b \end{cases}$$

Với $b=0$, chọn $a=1$ ta được phương trình $\Delta: x-1=0$

Với $3a=4b$, chọn $\begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$, ta được phương trình $\Delta: 4x+3y-16=0$.

Cách 2:

+ Phương trình Δ đi qua $M(1;4)$ có hệ số góc k , có dạng: $y=k(x-1)+4$
hay $kx-y-k+4=0$

Khi đó

$$d(N, \Delta)=1 \Leftrightarrow \frac{|2k-1-k+4|}{\sqrt{k^2+1^2}}=1 \Leftrightarrow (k+3)^2=k^2+1 \Leftrightarrow 6k=-8 \Leftrightarrow k=-\frac{4}{3}$$

Suy ra phương trình $\Delta: -\frac{4}{3}x-y+\frac{4}{3}+4=0 \Leftrightarrow 4x+3y-16=0$

+ Phương trình Δ có dạng $x-a=0$. Vì $M(1;4) \in \Delta \Rightarrow 1-a=0 \Leftrightarrow a=1$ hay $\Delta: x-1=0$

$$\text{Khi đó } d(N, \Delta)=\frac{|2-1|}{1}=1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình Δ phải tìm là $4x+3y-16=0$ hoặc $x-1=0$.

D. CÁC VÍ DỤ MỞ RỘNG

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-8y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(5;2)$ và cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB=5\sqrt{2}$.

Phân tích hướng giải:

* Đường thẳng Δ cần viết đi qua điểm $M(5;2)$. Do vậy ta cần khai thác thêm các dữ kiện của bài toán để có được yếu tố "có lợi" liên quan tới Δ .

* Dữ kiện Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B với $AB=5\sqrt{2}$, cho ta biết được khoảng cách từ tâm $I(2;4)$ của (C) tới Δ . Cụ thể nếu gọi H là hình chiếu của

I trên Δ thì ta có $d(I, \Delta)=IH=\sqrt{IA^2-HA^2}$

Khi đó việc viết phương trình Δ được "tháo gỡ" theo góc nhìn của **Bài toán 6.1**.

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

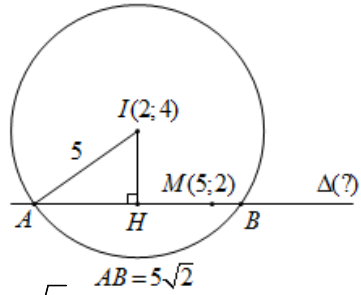
Giải

+ Đường tròn (C) có tâm $I(2;4)$

và bán kính $R = IA = 5$

Gọi H là hình chiếu vuông góc

của I trên $AB \Rightarrow AH = \frac{AB}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$



$$\text{Khi đó } IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

+ Gọi véctơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n}_\Delta = (a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$)

Do Δ đi qua $M(5;2)$ nên có phương trình:

$$a(x-5) + b(y-2) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 5a - 2b = 0, \text{ khi đó:}$$

$$d(I, \Delta) = IH \Leftrightarrow \frac{|2a + 4b - 5a - 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4(3a - 2b)^2 = 50(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 7a^2 + 24ab + 17b^2 = 0 \Leftrightarrow (a+b)(7a+17b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 7a = -17b \end{cases}$$

+ Với $a = -b$, chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ suy ra phương trình $\Delta: x - y - 3 = 0$

Với $7a = -17b$, chọn $\begin{cases} a = 17 \\ b = -7 \end{cases}$ suy ra phương trình $\Delta: 17x - 7y - 71 = 0$

Vậy phương trình đường thẳng Δ cần lập là: $x - y - 3 = 0$ hoặc $17x - 7y - 71 = 0$.

Ví dụ 2 (Khối A, A1 – 2014). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có điểm M là trung điểm của đoạn AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $AN = 3NC$. Viết phương trình đường thẳng CD , biết rằng $M(1;2)$ và $N(2;-1)$.

Phân tích hướng giải:

* Yêu cầu bài toán viết phương trình CD , giúp ta hướng tới việc gắn kết các dữ kiện để tìm các yếu tố liên quan tới đường thẳng CD . Bài toán cho biết tọa độ hai điểm $M(1;2)$ và $N(2;-1)$ cùng với dữ kiện $AN = 3NC$, khiến ta nghĩ tới việc tìm tọa độ điểm E (với $MN \cap CD = \{E\}$). Điều này hoàn toàn có thể làm được nhờ vào

Bài toán 5.1 (các bạn xem lại ở phần trước) khi ta suy luận được $\overline{MN} = 3\overline{NE}$

KHANG VIỆT

* Với $M(1;2)$, $N(2;-1)$ và điểm E vừa tìm được, cộng với các điểm đều xác định rõ vị trí, nên ta dễ dàng có được độ dài cạnh của hình vuông dựa vào độ dài MN (hoặc ME). Nghĩa là ta sẽ tính được khoảng cách từ M tới DC . Như vậy lúc này đã xuất hiện nội dung **Bài toán 6.1**, giúp ta viết được phương trình đường thẳng CD . Cụ thể CD đi qua điểm E đã biết tọa độ và cách điểm M một khoảng xác định.

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

Giải

+ Gọi $MN \cap CD = \{E\}$ và H là hình chiếu vuông góc của M trên CD .

Khi đó theo định lý Ta-let ta có

$$\frac{MN}{NE} = \frac{AN}{NC} = 3 \Rightarrow \overline{MN} = 3\overline{NE} \quad (*)$$

+ Gọi $E(x; y)$ suy ra $\overline{NE} = (x-2; y+1)$ và với $\overline{MN} = (1; -3)$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3(x-2) \\ -3 = 3(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{7}{3}; -2\right)$$

+ Do $EC = \frac{1}{3}AM \Rightarrow HE = \frac{2}{3}AM = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}MH$ nên ta đặt:

$$HE = m \Rightarrow MH = 3m.$$

$$\text{Khi đó } MH^2 + HE^2 = ME^2 \Leftrightarrow 10m^2 = \frac{160}{9} \Leftrightarrow m = \frac{4}{3} \Rightarrow MH = 4$$

+ Gọi $\overrightarrow{n_{CD}} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$

Khi đó phương trình CD có dạng:

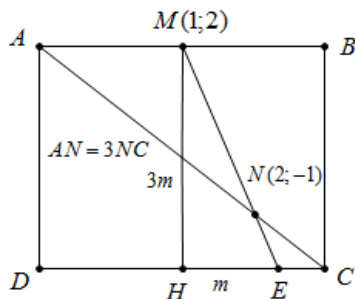
$$a\left(x - \frac{7}{3}\right) + b(y + 2) = 0 \Leftrightarrow 3ax + 3by - 7a + 6b = 0$$

$$\text{Ta có } d(M, CD) = MH \Leftrightarrow \frac{|3a + 6b - 7a + 6b|}{\sqrt{9a^2 + 9b^2}} = 4$$

$$\Leftrightarrow |3b - a| = \sqrt{9(a^2 + b^2)} \Leftrightarrow 8a^2 + 6ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 4a = -3b \end{cases}$$

Với $a = 0$ ta chọn $b = 1$, khi đó phương trình CD là: $y + 2 = 0$

Với $4a = -3b$ chọn $a = 3$ và $b = -4$, khi đó CD có phương trình:
 $3x - 4y - 15 = 0$



Chú ý:

Ngoài cách giải trên các bạn có thể tham khảo thêm các cách giải khác ở Ví dụ 10 trong cách ra đề 3 thuộc Bài toán 1 và ở Bài 3.2 trong Phần 3 – phát triển các bài toán.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (T): $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$, và điểm $A(1;3)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cắt (T) tại B và C sao cho $AB = BC$.

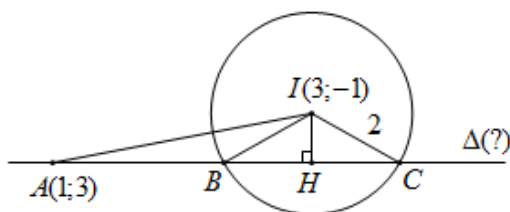
Phân tích hướng giải:

* Giống như Ví dụ 1, đường thẳng Δ cần viết đi qua điểm $A(1;3)$. Như vậy lúc này ta đang thiếu một dữ kiện liên quan tới Δ .

* Dữ kiện Δ đi qua A và cắt (T) tại B và C sao cho $AB = BC$, giúp ta tính được khoảng cách từ I tới Δ . Khi đó việc viết phương trình Δ được giải quyết theo góc nhìn của Bài toán 6.1.

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

Giải



+ Đường tròn (T) có tâm $I(3; -1)$ và bán kính $R = 2$

Ta có $IA = 2\sqrt{5} > R$, suy ra A nằm ngoài đường tròn.

Gọi Δ là đường thẳng cần lập và H là hình chiếu vuông góc của I trên Δ .

Lúc này ta sẽ đi tính IH theo hai cách sau:

Cách 1:

$$\text{Đặt } IH = a \Rightarrow BH = \sqrt{IA^2 - IH^2} = \sqrt{4 - a^2}.$$

$$\text{Do } AB = BC \Rightarrow AH = 3BH = 3\sqrt{4 - a^2}$$

$$\text{Khi đó } IH^2 + AH^2 = IA^2 \Leftrightarrow a^2 + 9(4 - a^2) = 20 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2} \text{ hay } IH = \sqrt{2}$$

Cách 2:

Phương tích của điểm A đối với đường tròn (T):

$$P_{A(T)} = AB.AC = AI^2 - R^2 \Leftrightarrow AB.2AB = 20 - 4$$

KHANG VIET

$$\Leftrightarrow AB^2 = 8 \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{2} = BC \Rightarrow BH = \sqrt{2}$$

$$\text{Suy ra } IH = \sqrt{IB^2 - BH^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$$

+ Gọi vectơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n}_\Delta = (a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$), do Δ đi qua $A(1; 3)$ nên có phương trình: $a(x-1) + b(y-3) = 0 \Leftrightarrow ax + by - a - 3b = 0$,

$$\text{khi đó: } d(I, \Delta) = IH \Leftrightarrow \frac{|3a - b - a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 4(a - 2b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 8ab + 7b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a - 7b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 7b \end{cases}$$

+ Với $a = b$, chọn $a = b = 1$ suy ra phương trình $\Delta: x + y - 4 = 0$

Với $a = 7b$, chọn $\begin{cases} a = 7 \\ b = 1 \end{cases}$ suy ra phương trình $\Delta: 7x + y - 10 = 0$

Vậy phương trình đường thẳng Δ cần lập là: $x + y - 4 = 0$ hoặc $7x + y - 10 = 0$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(T): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ ngoại tiếp tiếp tam giác đều ABC , . Đường thẳng BC đi qua điểm $M\left(\frac{7}{2}; 2\right)$. Hãy xác định tọa độ điểm A .

Phân tích hướng giải:

* Dĩ kiện đường thẳng BC đi qua điểm $M\left(\frac{7}{2}; 2\right)$ gợi ý ta nên đi viết phương trình BC . Mặt khác, nếu viết được phương trình BC ta sẽ viết được phương trình AI và suy ra được tọa độ hình chiếu H của I trên BC . Khi đó nhờ **Bài toán 5.1** (các bạn đã tìm hiểu phần trước) với hệ thức $\overline{AH} = 3\overline{IH}$ sẽ giúp ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm A .

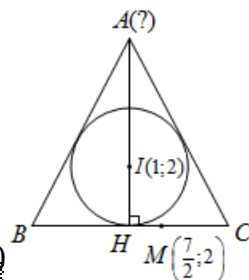
* **Bài toán 6.1** sẽ giúp ta viết được phương trình BC , khi BC đi qua điểm $M\left(\frac{7}{2}; 2\right)$ và $d(I, BC) = R$.

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

Giải

+ Đường tròn (T) có tâm $I(1; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

+ Gọi BC có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{BC} = (a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$)



Do BC đi qua $M\left(\frac{7}{2}; 2\right)$ nên có phương trình:

$$a\left(x - \frac{7}{2}\right) + b(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2ax + 2by - 7a - 4b = 0$$

Do BC tiếp xúc với (T) nên ta có:

$$d(I, BC) = R \Leftrightarrow \frac{|2a + 4b - 7a - 4b|}{\sqrt{4a^2 + 4b^2}} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 25a^2 = 20(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a^2 = 4b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = -2b \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu của I trên BC và gọi $A(m; n)$, khi đó $\overline{AH} = 3\overline{IH}$ (*)

+ Với $a = 2b$, chọn $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ ta được phương trình $BC: 2x + y - 9 = 0$

Suy ra phương trình $IH: x - 2y + 3 = 0$

Suy ra tọa độ điểm H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y - 9 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow H(3; 3) \Rightarrow \begin{cases} \overline{AH} = (3 - m; 3 - n) \\ \overline{IH} = (2; 1) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m = 6 \\ 3 - n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ n = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-3; 0)$$

+ Với $a = -2b$, chọn $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$ ta được phương trình $BC: 2x - y - 5 = 0$

Suy ra phương trình $IH: x + 2y - 5 = 0$

Suy ra tọa độ điểm H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow H(3; 1) \Rightarrow \begin{cases} \overline{AH} = (3 - m; 1 - n) \\ \overline{IH} = (2; -1) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m = 6 \\ 1 - n = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ n = 4 \end{cases} \Rightarrow A(-3; 4)$$

Vậy $A(-3; 0)$ hoặc $A(-3; 4)$.

Chú ý:

Ngoài cách giải trên các bạn có thể tham khảo thêm cách giải thứ hai qua một bài tương tự - **Bài 8** (phần bài tập áp dụng).

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có điểm $A(-2;3)$. Điểm $M(4;-1)$ nằm trên cạnh BC , đường thẳng AM cắt đường thẳng DC tại điểm $N(7;-3)$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông $ABCD$ biết C có tọa độ nguyên.

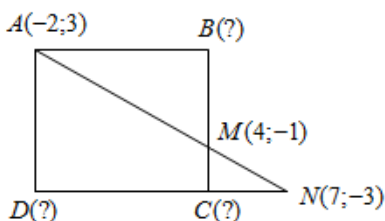
Giải

Cách 1:

Do $MC \parallel AD$ nên ta có:

$$\frac{NC}{ND} = \frac{NM}{NA} = \frac{\sqrt{3^2 + 2^2}}{\sqrt{9^2 + 6^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ND - CD}{ND} = \frac{1}{3} \Rightarrow ND = \frac{3}{2}CD = \frac{3}{2}AD$$



Khi đó xét tam giác AND ta được:

$$AD^2 + ND^2 = AN^2 \Leftrightarrow AD^2 + \frac{9}{4}AD^2 = 117 \Leftrightarrow AD^2 = 36 \Leftrightarrow AD = 6$$

Gọi $\vec{n} = (a; b)$ (với $a^2 + b^2 \neq 0$) là vectơ pháp tuyến của đường thẳng DC .

Vậy DC đi qua $N(7; -3)$ nên có phương trình:

$$a(x - 7) + b(y + 3) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 7a + 3b = 0$$

$$\text{Ta có: } d(A, DC) = DC \Leftrightarrow \frac{|-2a + 3b - 7a + 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 6$$

$$\Leftrightarrow |3a - 2b| = 2\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow 5a^2 - 12ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 5a = 12b \end{cases}$$

+ Với $a = 0$, chọn $b = 1$ ta được phương trình $DC : y + 3 = 0$

Khi đó BC đi qua $M(4; -1)$ và vuông góc với DC có phương trình:
 $x - 4 = 0$

$$\text{Suy ra tọa độ điểm } C \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} y + 3 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow C(4; -3)$$

Tương tự ta có phương trình $AD : x + 2 = 0 \Rightarrow D(-2; -3)$

Phương trình $AB : y = 3 \Rightarrow B(4; 3)$

+ Với $5a = 12b$, chọn $\begin{cases} a = 12 \\ b = 5 \end{cases}$ ta được phương trình $DC : 12x + 5y - 69 = 0$

Khi đó phương trình BC đi qua $M(4;-1)$ và vuông góc với DC có phương trình: $5x - 12y - 32 = 0$

Suy ra tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 12x + 5y - 69 = 0 \\ 5x - 12y - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{76}{13} \\ y = -\frac{3}{13} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{76}{13}; -\frac{3}{13}\right) \text{ (loại)}$$

Vậy $B(4;3), C(4;-3), D(-2;-3)$

Nhận xét:

* Ngoài cách giải trên các bạn có thể tham khảo thêm cách giải thứ 2 sau:

Cách 2:

Gọi $\vec{n} = (a; b)$ (với $a^2 + b^2 \neq 0$) là vectơ pháp tuyến của đường thẳng DC .

Vậy DC đi qua $N(7;-3)$ nên có phương trình:

$$a(x-7) + b(y+3) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 7a + 3b = 0$$

Khi đó AD đi qua $A(-2;3)$ và vuông góc với DC nên có phương trình: $bx - ay + 3a + 2b = 0$

Do $ABCD$ là hình vuông nên ta có:

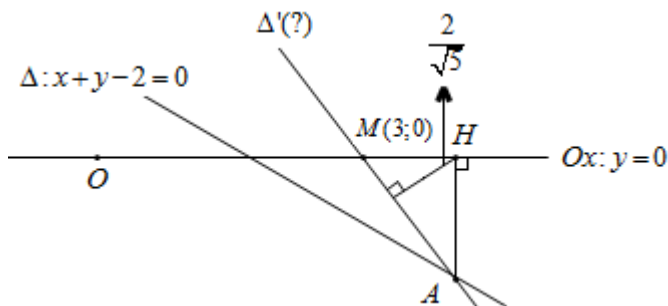
$$\begin{aligned} d(A, DC) = d(M, AD) &\Leftrightarrow \frac{|-2a + 3b - 7a + 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4b + a + 3a + 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &\Leftrightarrow |9a - 6b| = |4a + 6b| \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 5a = 12b \end{cases} \end{aligned}$$

Đến đây việc trình bày tiếp theo giống như Cách 1

* Nếu A, M, N không thẳng hàng (N vẫn thuộc DC) thì Cách 1 ở bài toán trên sẽ bị "vô hiệu", song Cách 2 vẫn phát huy tác dụng. Như vậy tùy vào dữ kiện và số liệu của đề bài chúng ta có thể "linh hoạt" trong việc chọn cách giải tối ưu cho bài toán.

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: x + y - 2 = 0$ và điểm $M(3;0)$. Đường thẳng Δ' qua M cắt đường thẳng Δ tại A . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox . Viết phương trình đường thẳng Δ' , biết khoảng cách từ H đến Δ' bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Giải



+ Gọi $\vec{n} = (a; b)$ (với $a^2 + b^2 \neq 0$) là vectơ pháp tuyến của Δ' , khi đó Δ' đi qua $M(3;0)$ nên có phương trình: $ax + by - 3a = 0$

+ Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} ax + by - 3a = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3a - 2b}{a - b} \\ y = -\frac{a}{a - b} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{3a - 2b}{a - b}; -\frac{a}{a - b}\right)$$

Do H là hình chiếu vuông góc của A trên $Ox \Rightarrow H\left(\frac{3a - 2b}{a - b}; 0\right)$

+ Ta có:

$$d(H, \Delta') = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{\left|a \cdot \frac{3a - 2b}{a - b} - 3a\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 5a^2b^2 = 4(a^2 + b^2)(a - b)^2$$

$$\Leftrightarrow (a - 2b)(2a - b)(2a^2 + ab + 2b^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 2a = b \end{cases} \text{ (vì } 2a^2 + ab + 2b^2 > 0 \text{)}$$

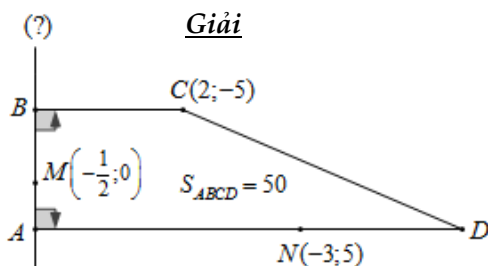
+ Với $a = 2b$, chọn $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ ta được phương trình $\Delta': 2x + y - 6 = 0$

Với $2a = b$ chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ ta được phương trình $\Delta': x + 2y - 3 = 0$

Vậy phương trình Δ' cần lập là: $2x + y - 6 = 0$ hoặc $x + 2y - 3 = 0$.

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$ vuông ở đỉnh A có diện tích bằng 50, đỉnh $C(2; -5)$, $\overline{AD} = 3\overline{BC}$. Biết đường thẳng AB đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, đường thẳng AD đi qua điểm $N(-3; 5)$.

Viết phương trình đường thẳng AB không song song với các trục tọa độ



+ Do $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC} \Rightarrow AD \parallel BC \Rightarrow \hat{D} = 90^\circ$ (do $\hat{A} = 90^\circ$)

Do AB không song song với các trục tọa độ nên ta gọi $\overrightarrow{n_{AB}} = (1; b)$ (với $b \neq 0$) là vectơ pháp tuyến của AB , suy ra vectơ pháp tuyến của AD là $\overrightarrow{n_{AD}} = (b; -1)$.

Khi đó AB đi qua $M\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ nên có phương trình: $x + by + \frac{1}{2} = 0$

AD đi qua $N(-3; 5)$ nên có phương trình: $bx - y + 3b + 5 = 0$

$$+ \text{ Ta có: } S_{ABCD} = \frac{(BC + AD) \cdot AB}{2} = \frac{[d(C, AB) + 3d(C, AB)] \cdot d(C, AD)}{2}$$

$$= 2d(C, AB) \cdot d(C, AD)$$

Mặt khác $S_{ABCD} = 50$, suy ra:

$$d(C, AB) \cdot d(C, AD) = 25 \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{5}{2} - 5b\right|}{\sqrt{b^2 + 1}} \cdot \frac{|5b + 10|}{\sqrt{b^2 + 1}} = 25$$

$$\Leftrightarrow |2b^2 + 3b - 2| = 2(1 + b^2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3b - 2 = 2 \\ 4b^2 + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{3} \\ b = 0 \text{ (loại)} \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Với $b = \frac{4}{3} \Rightarrow AB: x + \frac{4}{3}y + \frac{1}{2} = 0$ hay $AB: 6x + 8y + 3 = 0$;

Với $b = -\frac{3}{4} \Rightarrow AB: x - \frac{3}{4}y + \frac{1}{2} = 0$ hay $AB: 4x - 3y + 2 = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng AB cần lập là $6x + 8y + 3 = 0$ hoặc $4x - 3y + 2 = 0$.

Nhận xét:

Ở bài toán trên thay vì gọi vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$ theo 2 ẩn a, b như các bài toán quen thuộc chúng ta đã làm, thì trong bài toán này ta đã “linh hoạt” gọi $\vec{n}_{AB} = (1; b)$ theo một ẩn b nhờ dữ kiện đường thẳng AB không song song với các trục tọa độ.

Bài toán 6.2

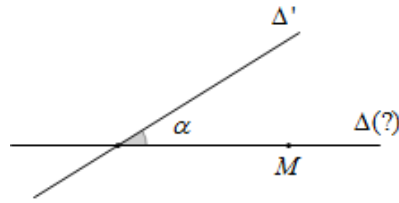
A. NỘI DUNG BÀI TOÁN 6.2

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua một điểm, tạo với đường thẳng cho trước một góc không đổi.

B. CÁCH GIẢI CHUNG

Gọi vptt :

$$\vec{n}_{\Delta} = (a; b) \xrightarrow{a^2 + b^2 \neq 0; M \in \Delta}$$



$$\Delta : ax + by + f(a, b) = 0 \xrightarrow{(\Delta, \Delta') = \alpha} \cos(\Delta, \Delta') = \cos \alpha \quad (*)$$

$$\text{Từ } (*) \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_{\Delta} \cdot \vec{n}_{\Delta'}|}{|\vec{n}_{\Delta}| \cdot |\vec{n}_{\Delta'}|} = \cos \alpha \Leftrightarrow g(a, b) = 0 \Rightarrow a = kb \xrightarrow{\text{chọn}} \begin{cases} a = ? \\ b = ? \end{cases} \Rightarrow \text{phương}$$

trình Δ .

Giải thích chi tiết:

+ Gọi vectơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n}_{\Delta} = (a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$), do Δ đi qua M đã biết tọa độ nên ta viết được phương trình Δ có dạng: $ax + by + f(a, b) = 0$ (phụ thuộc vào 2 ẩn a, b).

+ Sử dụng dữ kiện góc tạo bởi Δ và Δ' bằng α ($(\Delta, \Delta') = \alpha$) bằng cách áp dụng

$$\text{công thức } \cos(\Delta, \Delta') = \cos \alpha \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_{\Delta} \cdot \vec{n}_{\Delta'}|}{|\vec{n}_{\Delta}| \cdot |\vec{n}_{\Delta'}|} = \cos \alpha \Leftrightarrow \frac{|a \cdot a' + b \cdot b'|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2}} = \cos \alpha$$

giúp ta thiết lập được phương trình đẳng cấp bậc hai $g(a, b) = 0$ (ẩn a, b). Từ đây ta sẽ rút ra được mối liên hệ $a = kb$. Sau đó bằng thao tác “chọn”, ta được bộ số $(a; b) \neq (0; 0)$ và suy ra được phương trình Δ .

Chú ý

Ngoài cách giải trên các bạn có thể giải theo cách sau:

+ Gọi phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ có hệ số góc k có dạng:

$$y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow kx - y - kx_0 + y_0 = 0$$

$$\text{Khi đó } \cos(\Delta, \Delta') = \cos \alpha \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_\Delta \cdot \vec{n}_{\Delta'}|}{|\vec{n}_\Delta| \cdot |\vec{n}_{\Delta'}|} = \cos \alpha \Leftrightarrow f(k) = 0 \Leftrightarrow k = ? \Rightarrow \text{phương}$$

trình Δ .

+ Phương trình Δ có dạng $x - a = 0$. Vì $M(x_0; y_0) \in \Delta$ nên suy ra phương trình $\Delta: x - x_0 = 0$

Kiểm tra điều kiện $\cos(\Delta, \Delta') = \cos \alpha \Rightarrow$ kết luận.

Nhận xét:

Như vậy để chuyển các bài toán về nội dung **Bài toán 6.2** ta cần khai thác các dữ kiện của bài toán để chỉ ra được 2 điều kiện:

- + Đường thẳng đi qua một điểm đã biết tọa độ.
- + Đường thẳng tạo với đường thẳng cho trước một góc xác định (không đổi).

C. VÍ DỤ GỐC

Ví dụ. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng Δ' có phương trình $2x + 3y + 1 = 0$ và điểm $M(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và tạo với đường thẳng Δ' một góc 45° .

Giải:

Cách 1:

+ Gọi vectơ pháp tuyến của Δ là

$\vec{n}_\Delta = (a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$), do Δ đi

qua $M(1;1)$ nên có phương trình:

$$a(x-1) + b(y-1) = 0 \Leftrightarrow ax + by - a - b = 0$$

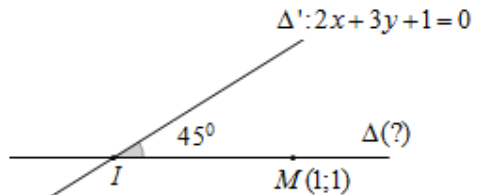
Với Δ' có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{\Delta'} = (2; 3)$, khi đó:

$$(\Delta, \Delta') = 45^\circ \Leftrightarrow \cos(\Delta, \Delta') = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2a + 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2(2a + 3b)^2 = 13(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 - 24ab - 5b^2 = 0 \Leftrightarrow (5a + b)(a - 5b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = -b \\ a = 5b \end{cases}$$

+ Với $5a = -b$, chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases}$ suy ra phương trình $\Delta: x - 5y + 4 = 0$



Với $a = 5b$, chọn $\begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases}$ suy ra phương trình $\Delta: 5x + y - 6 = 0$

Vậy phương trình đường thẳng Δ cần lập là: $x - 5y + 4 = 0$ hoặc $5x + y - 6 = 0$.

Cách 2:

+ Gọi $\Delta \cap \Delta' = \{I\}$ và gọi $I(1+3t; -1-2t) \in \Delta'$, suy ra $\overrightarrow{MI} = (3t; -2-2t)$ và với $\overrightarrow{u_{\Delta'}} = (3; -2)$

$$\text{Khi đó: } (\Delta, \Delta') = 45^\circ \Leftrightarrow \cos(\Delta, \Delta') = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|3 \cdot 3t - 2(-2-2t)|}{\sqrt{9t^2 + (2t+2)^2} \cdot \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2(13t+4)^2 = 13(13t^2 + 8t + 4) \Leftrightarrow 169t^2 + 104t - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{10}{13} \\ t = \frac{2}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I\left(-\frac{17}{13}; \frac{7}{13}\right) \\ I\left(\frac{19}{13}; -\frac{17}{3}\right) \end{cases}$$

+ Với $I\left(-\frac{17}{13}; \frac{7}{13}\right)$, đường thẳng Δ đi qua $I\left(-\frac{17}{13}; \frac{7}{13}\right), M(1;1)$ có phương trình: $x - 5y + 4 = 0$

Với $I\left(\frac{19}{13}; -\frac{17}{3}\right)$, đường thẳng Δ đi qua $I\left(\frac{19}{13}; -\frac{17}{3}\right), M(1;1)$ có phương trình: $5x + y - 6 = 0$

Vậy phương trình đường thẳng Δ cần lập là: $x - 5y + 4 = 0$ hoặc $5x + y - 6 = 0$.

Cách 3:

+ Phương trình Δ đi qua $M(1;1)$ có hệ số góc k , có dạng:

$$y = k(x-1) + 1 \text{ hay } kx - y - k + 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_{\Delta}} = (k; -1)$$

Với Δ' có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{\Delta'}} = (2; 3)$, khi đó:

$$(\Delta, \Delta') = 45^\circ \Leftrightarrow \cos(\Delta, \Delta') = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2k-3|}{\sqrt{k^2+1^2} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2(2k-3)^2 = 14(k^2+1)$$

$$\Leftrightarrow 5k^2 + 24k - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{5} \\ k = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta: x - 5y + 4 = 0 \\ \Delta: 5x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

+ Phương trình Δ có dạng $x - a = 0$. Vì $M(1;1) \in \Delta \Rightarrow 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1$ hay $\Delta: x - 1 = 0$

Khi đó $\cos(\Delta, \Delta') = \frac{2}{\sqrt{13}} \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ (không thỏa mãn)

Vậy phương trình đường thẳng Δ cần lập là : $x - 5y + 4 = 0$ hoặc $5x + y - 6 = 0$.

D. CÁC VÍ DỤ MỞ RỘNG

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A , phương trình đường thẳng AB và BC lần lượt là $x + 2y - 5 = 0$ và $3x - y + 7 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AC , biết AC đi qua điểm $F(1; -3)$.

Phân tích hướng giải:

* Bài toán yêu cầu viết phương trình đường thẳng AC , khi cho biết AC đi qua $F(1; -3)$. Như vậy ta cần khai thác thêm một yếu tố liên quan tới AC để có được đáp số của bài toán.

* Dữ kiện tam giác ABC cân tại A cho ta biết được $\widehat{B} = \widehat{C}$. Mặt khác bài toán cho biết phương trình AB, BC như vậy góc B là hoàn toàn xác định. Lúc này ta đã thấy rõ được **Bài toán 6.2**, khi AC đi qua $F(1; -3)$ và tạo với BC một góc không đối (đúng bằng góc B). Vậy ta đã giải quyết xong bài toán.

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

Giải

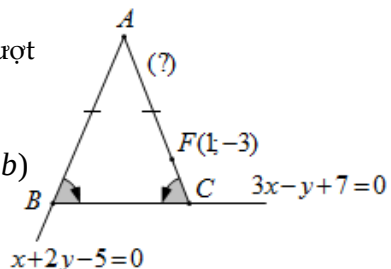
Cách 1:

+ Ta có vectơ pháp tuyến của AB, BC lần lượt là: $\vec{n}_1 = (1; 2)$ và $\vec{n}_2 = (3; -1)$.

Gọi vectơ pháp tuyến của AC là $\vec{n}_3 = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$

+ Tam giác ABC cân nên:

$$\cos B = \cos C \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|\vec{n}_3 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_3| \cdot |\vec{n}_2|} \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|} = \frac{|\vec{n}_3 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_3|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{|3a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5(3a - b)^2 \Leftrightarrow 22a^2 - 15ab + 2b^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (2a - b)(11a - 2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = b \\ 11a = 2b \end{cases}$$

+ Với $2a = b$, chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_3 = (1; 2) \Rightarrow AC \parallel AB$ (loại)

+ Với $11a = 2b$, chọn $\begin{cases} a = 2 \\ b = 11 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_3 = (2; 11)$

Khi đó AC đi qua $F(1; -3)$ và có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}_3 = (2; 11)$ nên có phương trình: $2x + 11y + 31 = 0$

Chú ý:

Ngoài cách giải trên các bạn có thể tham khảo thêm cách giải sau:

Cách 2:

+ Gọi Δ là đường thẳng đi qua $F(1; -3)$ và song song với BC

Khi đó Δ có phương trình:
 $3x - y - 6 = 0$

+ Gọi $\Delta \cap AB = \{E\}$, khi đó tọa độ điểm E là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x - y - 6 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{7} \\ y = \frac{9}{7} \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{17}{7}; \frac{9}{7}\right)$$

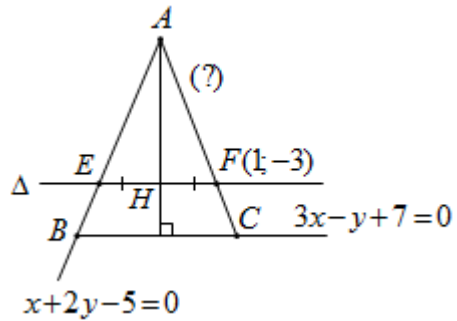
+ Gọi H là trung điểm của $EF \Rightarrow H\left(\frac{12}{7}; -\frac{6}{7}\right)$

Do tam giác ABC cân tại A nên $AH \perp BC$, do đó AH có phương trình:

$$x - \frac{12}{7} + 3\left(y + \frac{6}{7}\right) = 0 \Leftrightarrow 7x + 21y + 6 = 0$$

Suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 7x + 21y + 6 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{117}{7} \\ y = -\frac{42}{7} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{117}{7}; -\frac{42}{7}\right)$$



Khi đó $\overrightarrow{FA} = \left(\frac{110}{7}; -\frac{20}{7} \right) = \frac{10}{7}(11; -2) \Rightarrow \overrightarrow{n_{FA}} = (2; 11)$

Suy ra phương trình $AC : 2x + 11y + 31 = 0$

Ví dụ 2. (D – 2012 – CB) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là $x + 3y = 0$ và $x - y + 4 = 0$; đường thẳng BD đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.

Phân tích hướng giải:

Nếu ta đã hiểu và giải quyết tốt **Ví dụ 1** thì bạn sẽ nhận ra yêu cầu ở ví dụ này thực ra cũng tương tự. Khi người ra đề có gắng “giấu” **Ví dụ 1** trên bằng việc thay nó bởi một hình thức diễn đạt khác thông qua bài toán hình chữ nhật. Thật vậy :

* Nếu gọi $AC \cap BD$ ta sẽ được tam giác IAD cân và giống với nội dung của **Ví dụ 1** mà ta đã làm ở trên. Do đó ta sẽ tìm được các điểm A, D, I .

* Khi biết tọa độ A, D, I ta sẽ suy ra được tọa độ B, C khi I là trung điểm của BD, AC .

Sau đây là lời giải chi tiết:

Giải

+ Tọa độ điểm A là nghiệm

của hệ $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(-3; 1)$

Vecto pháp tuyến của AC, AD

lần lượt là $\vec{n}_1 = (1; 3), \vec{n}_2 = (1; -1)$

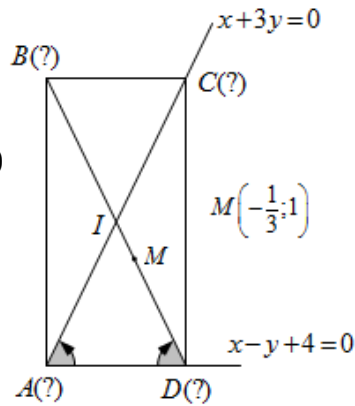
Gọi BD có vecto pháp

tuyến $\vec{n}_3 = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$

+ Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên: $\widehat{DAC} = \widehat{ADB} \Leftrightarrow \cos \widehat{DAC} = \cos \widehat{ADB}$

$$\Leftrightarrow \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \left| \cos(\vec{n}_3, \vec{n}_2) \right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{|1-3|}{\sqrt{1^2+3^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2}} \Leftrightarrow 4(a^2+b^2) = 10(a-b)^2$$



$$\Leftrightarrow 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - 3b)(3a - b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ 3a = b \end{cases}$$

+ Với $a = 3b$, chọn $\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_3 = (3; 1)$. Khi đó BD đi qua $M\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$ có

vecto pháp tuyến $\vec{n}_3 = (3; 1)$ nên có phương trình :

$$3\left(x + \frac{1}{3}\right) + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x + y = 0$$

Suy ra tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow D(-1; 3)$$

Gọi $AC \cap BD = \{I\}$, khi đó tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow I(0; 0) \equiv O$$

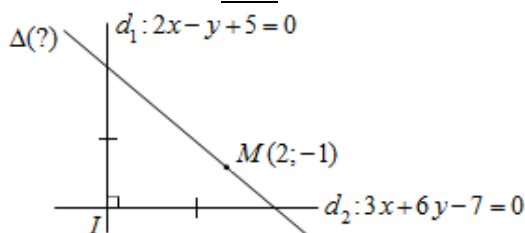
Khi đó do I là trung điểm của AC và BD nên suy ra $C(3; -1)$ và $B(1; -3)$.

+ Với $3a = b$, chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_3 = (1; 3) \Rightarrow BD \parallel AC$ (loại)

Vậy $A(-3; 1), B(1; -3), C(3; -1), D(-1; 3)$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: 2x - y + 5 = 0$, $d_2: 3x + 6y - 7 = 0$. Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2; -1)$ sao cho đường thẳng đó cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 tạo ra một tam giác cân tại đỉnh là giao điểm của d_1 và d_2 .

Giải



Cách 1:

+ Đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có các vecto pháp tuyến $\vec{n}_1 = (2; -1)$ và $\vec{n}_2 = (3; 6)$

Ta có $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2.3 + (-1).6 = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2$

- + Gọi Δ là đường thẳng cần lập và có vecto pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$

Khi đó Δ cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 sẽ tạo ra một tam giác vuông cân.

Suy ra góc tạo bởi Δ với d_1 (hoặc d_1) bằng 45° .

$$\text{Do đó: } \cos(\Delta, d_1) = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2(2a-b)^2 = 5(a^2+b^2)$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 8ab - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-3b)(3a+b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ 3a = -b \end{cases}$$

- + Với $a = 3b$, chọn $\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$

Suy ra Δ đi qua $M(2; -1)$ có vecto pháp tuyến $\vec{n} = (3; 1)$ có phương trình:

$$3x + y - 5 = 0$$

- + Với $3a = -b$, chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$

Suy ra Δ đi qua $M(2; -1)$ có vecto pháp tuyến $\vec{n} = (1; -3)$ có phương trình:
 $x - 3y - 5 = 0$

Vậy đường thẳng cần lập là: $3x + y - 5 = 0$ hoặc $x - 3y - 5 = 0$

Cách 2:

- + Gọi Δ là đường thẳng cần lập. Do Δ cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 tạo ra một tam giác cân tại đỉnh I là giao điểm của d_1 và d_2 nên Δ vuông góc với phân giác trong của góc I .

- + Các đường phân giác tạo bởi d_1, d_2 có phương trình:

$$\frac{|2x - y + 5|}{\sqrt{5}} = \frac{|3x + 6y - 7|}{\sqrt{45}} \Leftrightarrow 3|2x - y + 5| = |3x + 6y - 7|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 9y + 22 = 0 & (\Delta_1) \\ 9x + 3y + 8 = 0 & (\Delta_2) \end{cases}$$

- + Với $\Delta \perp \Delta_1$, suy ra $\vec{n}_\Delta = \vec{u}_{\Delta_1} = (3; 1)$ và Δ đi qua $M(2; -1)$ nên có phương trình: $3(x - 2) + (y + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 5 = 0$

+ Với $\Delta \perp \Delta_2$, suy ra $\overrightarrow{n_\Delta} = \overrightarrow{u_{\Delta_2}} = (1; -3)$ và Δ đi qua $M(2; -1)$ nên có phương trình: $(x - 2) - 3(y + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 5 = 0$

Nhận xét:

Ở **Cách 1**, ta khai thác yếu tố đặc biệt của bài toán khi chỉ ra $d_1 \perp d_2$. Nếu không khai thác điều này các bạn có thể tạo ra phương trình ẩn a, b bằng việc sử dụng $\cos(\Delta, d_1) = \cos(\Delta, d_2)$. Ở **Cách 2**, ta khai thác theo một góc nhìn khác khi chỉ ra đường thẳng Δ cần lập vuông góc với phân giác trong của đỉnh là giao của d_1 và d_2 .

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A và I là trung điểm của BC. Gọi $M\left(\frac{11}{2}; -4\right)$ là trung điểm của IB và N thuộc đoạn IC sao cho $NC = 2NI$. Biết phương trình đường thẳng AN là $x - y - 2 = 0$ và điểm N có tọa độ nguyên. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Phân tích hướng giải

* Dữ kiện đề bài cho tam giác ABC vuông cân nên $AI \perp BC$. Nghĩa là nếu biết phương của AI ta sẽ viết được phương trình BC, từ đó dễ dàng suy ra được các điểm N, I và từ đây ta cũng suy ra được tọa độ các đỉnh của tam giác ABC. Như vậy mấu chốt của bài toán lúc này là cần biết phương của AI.

* Ta có các điểm I, M, N thuộc đoạn BC đều có vị trí xác định, nên ta hoàn toàn có thể tìm được mối liên hệ giữa độ dài các đoạn thẳng (nếu cần). Mà AN đã biết phương trình. Điều này gợi ý ta đi tính góc $\widehat{IAN}$ để chuyển bài toán về nội dung **Bài toán 6.2**. Lúc đó ta sẽ dễ dàng biết được phương của AI và giải quyết được trọn vẹn bài toán.

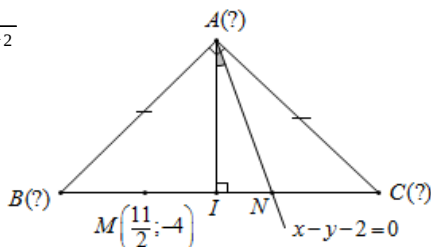
Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

Giải

$$\text{Đặt } IA = IB = IC = x \Rightarrow AN = \sqrt{IA^2 + IN^2}$$

$$= \sqrt{IA^2 + \left(\frac{IC}{3}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{9}} = \frac{x\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{IAN} = \frac{IA}{AN} = \frac{x}{\frac{x\sqrt{10}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$



Gọi $\vec{n} = (a; b)$ (với $a^2 + b^2 \neq 0$) là vectơ pháp tuyến của AI và có $\overrightarrow{n_{AN}} = (1; -1)$.

$$\text{Khi đó: } \cos \widehat{IAN} = \left| \cos(\vec{n}, \overrightarrow{n_{AN}}) \right| \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 9(a^2 + b^2) = 5(a-b)^2 \Leftrightarrow 2a^2 + 5ab + 2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a+b)(a+2b) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -b \\ a = -2b \end{cases}$$

+ Với $2a = -b$, chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$, suy ra $\vec{n} = (1; -2)$

Khi đó BC đi qua $M\left(\frac{11}{2}; -4\right)$ và vuông góc với AI nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{BC}} = (2; 1)$.

Do đó BC có phương trình: $2x + y - 7 = 0$

Suy ra tọa độ điểm N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow N(3; 1)$$

Mặt khác, ta có:

$$2\overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{IN} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x_I - \frac{11}{2}\right) = 3(3 - x_I) \\ 2(y_I + 4) = 3(1 - y_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 4 \\ y_I = -1 \end{cases} \Rightarrow I(4; -1)$$

Khi đó AI đi qua $I(4; -1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2)$ nên có phương trình: $x - 2y - 6 = 0$

Suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y - 6 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow A(-2; -4)$$

Do M là trung điểm của IB , suy ra $B(7; -7)$ và I là trung điểm của BC , suy ra $C(1; 5)$.

+ Với $a = -2b$, chọn $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$, suy ra $\vec{n} = (2; -1)$

Khi đó BC đi qua $M\left(\frac{11}{2}; -4\right)$ và vuông góc với AI nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{BC}} = (1; 2)$.

Do đó BC có phương trình: $x + 2y + \frac{5}{2} = 0$

Suy ra tọa độ điểm N là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + 2y + \frac{5}{2} = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right) \text{ (loại)}$$

Vậy $A(-2; -4), B(7; -7), C(1; 5)$.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Điểm $M\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$ là trung điểm của AB . Điểm N nằm trên đoạn AC sao cho $AN = 3NC$. Tìm tọa độ điểm A biết phương trình đường thẳng DN là $2x - y - 9 = 0$ và A có hoành độ nhỏ hơn 2.

Phân tích hướng giải:

* Bài toán cần tìm tọa độ điểm A . Lúc này ta cần gắn kết các thông số đã cho của đề bài ($M\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right); AN = 3NC; DN: 2x - y - 9 = 0$) để tạo môi liên hệ “có lợi” cho điểm A .

* Nhờ việc vẽ hình chính xác ta dễ dàng nhận ra được $MN \perp DN$, khi đó bằng việc sử dụng kiến thức hình học sơ cấp ta sẽ chỉ ra được điều này.

* Khi có được $MN \perp DN$ ta sẽ tìm được tọa độ điểm N , suy ra độ dài MN và tính được độ dài đoạn AM , đồng thời ta sẽ viết được phương trình AC theo góc nhìn của **Bài toán 6.2** – khi AC đi qua N tạo với DN một góc đúng bằng góc

$$\angle AMD \text{ với } \cos \angle AMN = \frac{AM}{DM} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \text{const.}$$

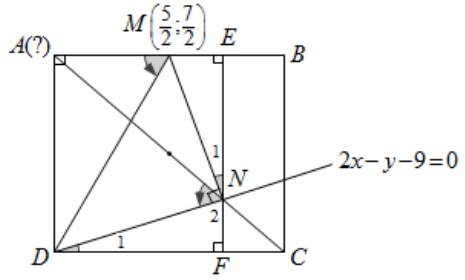
* Như vậy A đang nằm trên đường AC đã biết phương trình và cách M một khoảng xác định. Do đó ta sẽ dễ dàng tìm được tọa độ điểm A theo nội dung của **Bài toán 1**.

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

Giải

+ Đặt $AB = 4m$ và gọi vecto pháp tuyến của AC là $\vec{n}_{AC} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$

Gọi đường thẳng đi qua N song song với AD và cắt AB, DC lần lượt tại E, F .



$$\text{Khi đó } \begin{cases} ME = NF = m \\ NE = DF = 3m \end{cases} \Rightarrow \triangle MEN = \triangle NFD$$

$$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{N_1} \Rightarrow \widehat{N_1} + \widehat{N_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MND} = 90^\circ$$

Suy ra tứ giác $AMND$ nội tiếp đường tròn và MN có phương trình: $2x + 4y - 19 = 0$

Khi đó tọa độ điểm N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 19 = 0 \\ 2x - y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{11}{2}; 2\right) \Rightarrow MN = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$+ \text{ Ta có } ME^2 + NE^2 = MN^2 \Leftrightarrow m^2 + (3m)^2 = \frac{45}{4}$$

$$\Leftrightarrow m^2 = \frac{9}{8} \Rightarrow m = \frac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow AM = 2m = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (*)$$

+ Mặt khác: $\widehat{AMD} = \widehat{AND}$ (cùng chắn cung AD)

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{AMD} = \cos \widehat{AND}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AM}{MD} = \left| \cos(\vec{n}_{AC}, \vec{n}_{DN}) \right| \Leftrightarrow \frac{2m}{\sqrt{(4m)^2 + (2m)^2}} = \frac{|2a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = (2a - b)^2 \Leftrightarrow 3a^2 - 4ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 3a = 4b \end{cases}$$

+ Với $a = 0$, chọn $b = 1 \Rightarrow \vec{n}_{AC} = (0; 1) \Rightarrow AC$ đi qua $N\left(\frac{11}{2}; 2\right)$ có phương trình: $y - 2 = 0$

Gọi $A(t; 2) \in AC$, khi đó :

$$(*) \Leftrightarrow AM^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1; 2) \\ A(4; 2) \end{cases}$$

+ Với $3a = 4b$, chọn $\begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_{AC}} = (4; 3) \Rightarrow AC$ đi qua $N\left(\frac{11}{2}; 2\right)$ có phương trình: $4x + 3y - 28 = 0$

$$\text{Gọi } A(7 + 3t; -4t) \in AC, \text{ khi đó: } (*)AM^2 = \frac{9}{2} \left(3t + \frac{9}{2}\right)^2 + \left(4t + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 25t^2 + 55t + 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{7}{5} \\ t = -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\left(\frac{14}{5}; \frac{28}{5}\right) \\ A\left(\frac{23}{5}; \frac{16}{5}\right) \end{cases}$$

Do A có hoành độ nhỏ hơn 2 nên ta được $A(1; 2)$.

Nhận xét:

* Nếu bài toán không cho điều kiện A có hoành độ nhỏ hơn 2, ta vẫn có một điều kiện để loại bớt nghiệm của A là $\widehat{MAN} = 45^\circ$ hay $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Khi đó

ta sẽ được đáp số của bài toán là $A(1; 2)$ hoặc $A\left(\frac{14}{5}; \frac{28}{5}\right)$.

* Ngoài cách tìm A bằng việc viết phương trình AC để chuyển về **Bài toán 1** như trên. Chúng ta có thể tìm A nhờ chỉ ra A là giao điểm của hai đường tròn $(M; MA)$ và $(N; NA)$.

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(0; 2)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AC . Trên tia đối của BH lấy điểm E sao cho $BE = AC$. Biết phương trình đường thẳng $DE: x - y = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C của hình chữ nhật, biết B có tung độ dương và D không trùng với gốc tọa độ.

Phân tích hướng giải:

* Với việc cho $BE = AC$ và điểm $A(0; 2)$ cùng với phương trình đường thẳng $DE: x - y = 0$. Ta nghĩ tới việc gắn kết điểm $A(0; 2)$ với đường thẳng DE thông qua $BE = AC$ và các yếu tố đặc trưng trong hình. Muốn làm được điều này ta phán đoán “khả năng sẽ có một đường thẳng đi qua A tạo với DE một góc xác định (tính được).

* Lúc này bằng việc dùng công cụ hình học thuần túy ta sẽ dễ dàng chỉ ra được góc $\widehat{ADE} = 45^\circ$ (chi tiết ở phần bài giải). Khi đó việc viết phương trình AD là đơn giản khi nó thuộc nội dung của **Bài toán 6.2**. Từ đây việc “tháo” các điểm tiếp theo sẽ không có gì khó khăn.

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

Giải

Kẻ $EF \perp AD$ tại F và EF cắt BC tại K .

Khi đó ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B_1} = \widehat{B_4} \\ \widehat{A_1} = \widehat{B_4} \quad (+\widehat{ACB} = 90^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{A_1}.$$

Mặt khác $BE = AC$, suy ra:

$$\Delta BKE = \Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} BK = AB \\ KE = BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} KF = AF \\ KE = AD \end{cases} \Rightarrow EF = DF$$

Suy ra ΔFED vuông cân tại F nên $\widehat{ADE} = 45^\circ$

Gọi $\vec{n_1} = (a; b)$ là vecto pháp tuyến của AD , (với $a^2 + b^2 \neq 0$) và $\vec{n_2} = (1; -1)$ là vecto pháp tuyến của ED

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} \cos \widehat{ADE} &= \left| \cos(\vec{n_1}, \vec{n_2}) \right| \Leftrightarrow \cos 45^\circ = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow (a - b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

+ Với $a = 0$, chọn $b = 1$ ta được phương trình $AD: y - 2 = 0$

Khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ $\begin{cases} y - 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2 \Rightarrow D(2; 2)$

Suy ra phương trình $AB: x = 0$

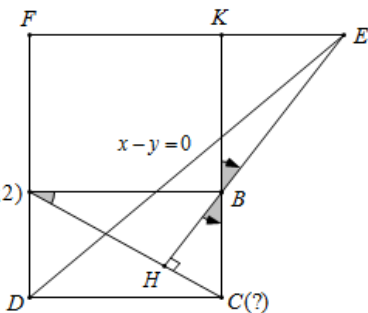
Gọi $B(0; b) \in AB$ với $b > 0$, khi đó:

$$S_{ABCD} = AD \cdot AB \Leftrightarrow 6 = 2 \cdot |b - 2| \Leftrightarrow b = 5 \text{ hoặc } b = -1 \text{ (loại), suy ra } B(0; 5)$$

Trung điểm của BD có tọa độ $I\left(1; \frac{7}{2}\right)$, cũng là trung điểm của

$AC \Rightarrow C(2; 5)$

+ Với $b = 0$, chọn $a = 1$ ta được phương trình $AD: x = 0$



Khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow D(0;0) \equiv O \text{ (loại)}$$

Vậy $C(2;5)$.

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(3;3)$ và $AC = 2BD$. Điểm $M\left(2; \frac{4}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB và điểm $N\left(3; \frac{13}{3}\right)$ thuộc đường thẳng CD . Viết phương trình đường chéo BD .

Giải

Cách 1:

+ Gọi N' là điểm đối xứng với N qua I (hay I là trung điểm của NN') suy ra $N'\left(3; \frac{5}{3}\right)$

thuộc đường thẳng AB

khi đó AB nhận $\overrightarrow{MN'} = \left(1; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(3;1)$

làm vectơ chỉ phương, suy ra $\overrightarrow{n_{AB}} = (1; -3)$

Phương trình $AB: x - 3y + 2 = 0$

+ Đặt $\widehat{ABI} = \varphi$. Do $AC = 2BD \Rightarrow AI = 2BI$, suy ra:

$$\cos \varphi = \frac{BI}{AB} = \frac{BI}{\sqrt{AI^2 + BI^2}} = \frac{BI}{\sqrt{4BI^2 + BI^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

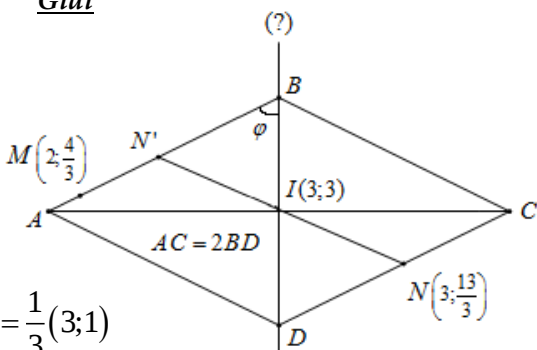
Gọi $\overrightarrow{n_{BD}} = (a; b)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng BD , khi đó:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \left| \cos(\overrightarrow{n_{BD}}, \overrightarrow{n_{AB}}) \right| \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{|a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{10}} \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) = (a - 3b)^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + 6ab - 7b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -7b \end{cases} \end{aligned}$$

+ Với $a = b$, chọn $a = b = 1$ hay $\overrightarrow{n_{BD}} = (1; 1)$

Khi đó BD đi qua $I(3;3)$ nên có phương trình: $x + y - 6 = 0$

+ Với $a = -7b$, chọn $\begin{cases} a = 7 \\ b = -1 \end{cases}$ hay $\overrightarrow{n_{BD}} = (7; -1)$



Khi đó BD đi qua $I(3;3)$ nên có phương trình : $7x - y - 18 = 0$

Vậy phương trình BD là : $x + y - 6 = 0$ hoặc $7x - y - 18 = 0$.

Cách 2: Các bạn tham khảo ở Ví dụ 6 trong cách ra đề 3 ở Bài toán 1 (ở ví dụ này có thêm điều kiện tọa độ B nguyên)

Nhận xét:

Vì hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật và hình vuông nhận giao điểm hai đường chéo là tâm đối xứng của hình đó. Nên nếu trong đề bài cho một điểm thuộc một cạnh thì các bạn nên nghĩ tới việc tìm điểm đối xứng của điểm đó qua tâm của hình chứa nó (ở đây tâm đã biết tọa độ).

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AB = 3AM$. Đường tròn tâm $I(1;-1)$ đường kính CM cắt BM tại D và đường thẳng đi qua hai điểm C, D có phương trình $x - 3y - 6 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết đường thẳng BC đi qua $N\left(\frac{4}{3}; 0\right)$ và điểm C có hoành độ dương.

Giải

Do $\widehat{BAC}, \widehat{BDC}$ cùng nhìn BC dưới một góc vuông nên $BADC$ nội tiếp đường tròn.

Khi đó $\widehat{ABM} = \widehat{DCM}$ (cùng chắn $\widehat{AD}$)

Mặt khác

$$\cos \widehat{ABM} = \frac{AB}{BM} = \frac{AB}{\sqrt{AM^2 + AB^2}} = \frac{3AM}{\sqrt{10AM^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \cos \widehat{DCM} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

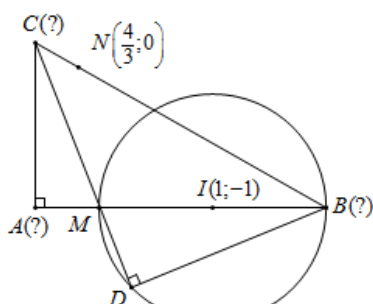
Gọi $\vec{n}_1 = (a; b)$ (với $a^2 + b^2 \neq 0$) là vecto pháp tuyến của AC , $\vec{n}_2 = (1; -3)$ là vecto pháp tuyến của DC

Khi đó ta có:

$$\cos \widehat{DCM} = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{|a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{10}}$$

$$(a - 3b)^2 = 9(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 4a^2 + 3ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 4a = -3b \end{cases}$$

+ Với $a = 0$, chọn $b = 1$, suy ra AC đi qua $I(1; -1)$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_1 = (0; 1)$ nên có phương trình: $y + 1 = 0$



Do đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y+1=0 \\ x-3y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow C(3;-1) \Rightarrow M(-1;-1)$$

Khi đó BC đi qua $C(3;-1)$ và $N\left(\frac{4}{3};0\right)$ nên có phương trình:

$$3x+5y-4=0$$

BD đi qua $M(-1;-1)$ và vuông góc với CD nên có phương trình:

$$3x+y+4=0$$

Suy ra tọa độ điểm B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x+5y-4=0 \\ 3x+y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow B(-2;2)$$

Suy ra phương trình $AB: x+2=0$

Do đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y+1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow A(-2;-1)$$

+ Với $4a=-3b$ $a=3; b=-4$, suy ra AC đi qua $I(1;-1)$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_1=(3;-4)$ nên có phương trình: $3x-4y-7=0$.

Do đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x-4y-7=0 \\ x-3y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{5} \\ y=-\frac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{3}{5};-\frac{11}{5}\right) \text{ (loại)}$$

Vậy $A(-2;-1), B(-2;2), C(3;-1)$.

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là trung điểm của AD , $H\left(\frac{11}{5};-\frac{2}{5}\right)$ là hình chiếu của B lên CE và $M\left(\frac{3}{5};-\frac{6}{5}\right)$ là trung điểm của đoạn BH . Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết A có hoành độ âm.

Giải

+ Do M là trung điểm của BH , suy ra $B(-1;-2)$

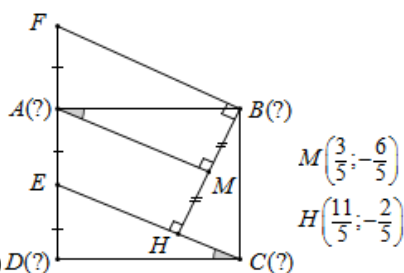
Ta có CE đi qua $H\left(\frac{11}{5};-\frac{2}{5}\right)$ và vuông góc với MH nên có phương trình:

$$2x+y-4=0$$

Gọi F đối xứng với E qua A , khi đó $BCEF$ là hình bình hành nên $FB \parallel AC \Rightarrow FB \perp BH$

Suy ra AM là đường trung bình của hình thang vuông $BHEF$, do đó $AM \perp BH$

Khi đó AM có phương trình: $2x + y = 0$



$$\text{Ta có: } \cos \widehat{ECD} = \frac{CD}{CE} = \frac{2ED}{\sqrt{ED^2 + CD^2}} = \frac{2ED}{\sqrt{5ED^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Do } \widehat{ECD} = \widehat{MAB} \Rightarrow \cos \widehat{MAB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Gọi $A(a; -2a) \in AM$, suy ra $\overrightarrow{BA} = (a+1; -2a+2)$ và ta có $\overrightarrow{u_{AM}} = (1; -2)$

Khi đó:

$$\cos \widehat{MAB} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{u_{AM}}|}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{u_{AM}}|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|a+1-2(-2a+2)|}{\sqrt{(a+1)^2 + (2a-2)^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 - 6a - 11 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \text{ hoặc } a = \frac{11}{5} \text{ (loại)}, \text{ suy ra } A(-1; 2)$$

Do AD đi qua $A(-1; 2)$ và vuông góc với AB nên có phương trình: $y - 2 = 0$

Khi đó tọa độ điểm E là nghiệm của hệ:

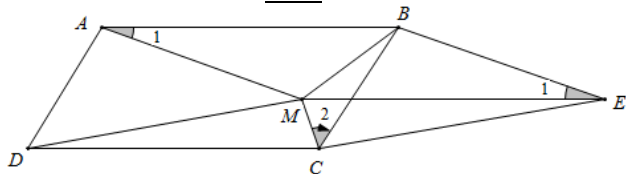
$$\begin{cases} y - 2 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow E(1; 2) \Rightarrow D(3; 2)$$

Ta $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow C(3; -2)$

Vậy $A(-1; 2), B(-1; -2), C(3; -2), D(3; 2)$.

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh $D(-7; 0)$. Một điểm M nằm trong hình bình hành sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MCB}$. Phương trình đường thẳng chứa MB, MC lần lượt là $\Delta_1: x + y - 2 = 0$; $\Delta_2: 2x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A , biết rằng đỉnh A thuộc đường thẳng $d: y = 3x$ và A có hoành độ nguyên.

Giải



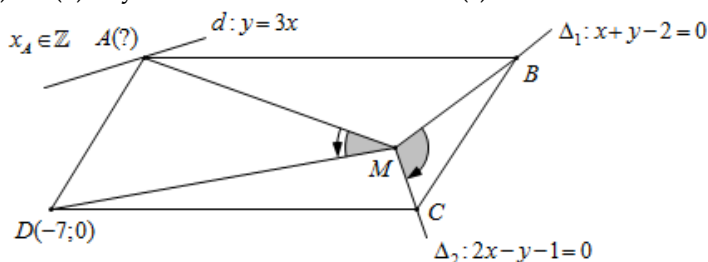
Dựng điểm E sao cho $ABEM$ là hình bình hành, khi đó $DCEM$ cũng là hình bình hành

Ta có: $\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{E_1} \\ \widehat{C_2} = \widehat{E_1} \end{cases} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_2} \Rightarrow BECM \text{ nội tiếp đường tròn}$

$$\Rightarrow \widehat{BEC} + \widehat{BMC} = 180^\circ \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } \triangle BEC = \triangle AMD \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{AMD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AMD} + \widehat{BMC} = 180^\circ$ (*)



Do $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{M\}$ nên tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(1; 1)$$

Gọi $A(a; 3a) \in d$ với $a \in \mathbb{Z}$, khi đó $\overrightarrow{MA} = (a - 1; 3a - 1)$

Ta có: $\overrightarrow{MD} = (-8; -1)$ và Δ_1, Δ_2 lần lượt có các vecto pháp tuyến

$$\vec{n}_1 = (1; 1), \vec{n}_2 = (2; -1)$$

Theo kết quả (*) ta có: $\widehat{AMD} + \widehat{BMC} = 180^\circ$, suy ra:

$$|\cos \widehat{AMD}| = |\cos \widehat{BMC}| \Leftrightarrow |\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD})| = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-8(a - 1) - (3a - 1)|}{\sqrt{(a - 1)^2 + (3a - 1)^2} \cdot \sqrt{65}} = \frac{|2 - 1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 13(5a^2 - 4a + 1) = (11a - 9)^2 \Leftrightarrow 28a^2 - 73a + 34 = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

hoặc $a = \frac{17}{28}$ (loại). Vậy $A(2; 6)$.

E. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (T) có phương trình $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông, biết đường thẳng chứa cạnh AB đi qua điểm $M(-3; -2)$ và điểm A có hoành độ dương.

Bài 2 (A – 2009 – NC). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ và đường thẳng $\Delta: x + my - 2m + 3 = 0$, với m là tham số thực. Gọi I là tâm của đường tròn (C) . Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ và điểm $M(6; 2)$. Chứng minh rằng M nằm ngoài đường tròn và viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $MA^2 + MB^2 = 50$.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+1)^2 = 16$ có tâm I và điểm $A(1 + \sqrt{3}; 2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A cắt (C) tại hai điểm B, C phân biệt sao cho tam giác IBC nhọn đồng thời có diện tích bằng $4\sqrt{3}$.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}y - 1 = 0$ có tâm I và điểm $A(2; 0)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A , cắt đường tròn (C) tại hai điểm B, C sao cho tam giác IBC nhọn và có diện tích bằng $\sqrt{3}$.

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$ có tâm I . Đường thẳng Δ đi qua $M(1; -3)$ và cắt (C) tại hai điểm A, B . Lập phương trình đường thẳng Δ , biết diện tích tam giác IAB bằng 8 và AB là cạnh lớn nhất của tam giác IAB .

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn (T) có phương trình $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$ và điểm $A(3; 3)$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua A và cắt (T) tại hai điểm sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó bằng độ dài cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn (T) .

Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC đều. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có phương trình

$(T): (x-4)^2 + (y-2)^2 = 5$, đường thẳng BC đi qua điểm $M\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. Tìm tọa độ điểm A .

Bài 9. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Các điểm $M(-2; 2), N(4; 2), P(3; -1), Q(0; -2)$ lần lượt thuộc các đường thẳng AB, BC, CD, DA . Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$.

Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh $A(1; 3)$. Biết điểm $M(6; 4)$ thuộc cạnh BC và $N\left(\frac{17}{2}; \frac{9}{2}\right)$ thuộc đường thẳng DC . Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông $ABCD$.

Bài 11. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$ có hai đáy AB, CD và hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Biết $A(0; 3), B(3; 4)$ và điểm C thuộc trục hoành. Tìm tọa độ đỉnh D của hình thang $ABCD$.

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông cân tại A . Biết phương trình cạnh BC là $d: x + 7y - 31 = 0$, điểm $N(7; 7)$ thuộc đường thẳng AC , điểm $M(2; -3)$ thuộc đường thẳng AB . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A có phương trình hai cạnh AB và AC lần lượt là $x + 2y - 2 = 0$ và $2x + y + 1 = 0$, điểm $M(1; 2)$ thuộc đoạn BC . Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A , cạnh BC nằm trên đường thẳng có phương trình $x + 2y - 2 = 0$. Đường cao kẻ từ B có phương trình $x - y + 4 = 0$, điểm $M(-1; 0)$ thuộc đường cao kẻ từ đỉnh C . Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Bài 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông cân tại A , phương trình $BC: 2x - y - 7 = 0$, đường thẳng AC đi qua điểm $M(-1; 1)$, điểm A nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 4y + 6 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết rằng đỉnh A có hoành độ dương.

Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A . Đường thẳng AB và BC lần lượt có phương trình $7x + 6y - 24 = 0$ và $x - 2y - 2 = 0$. Viết phương trình đường cao kẻ từ B của tam giác ABC .

Bài 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình đường thẳng $AB: x - 2y + 1 = 0$, phương trình đường thẳng $BD: x - 7y + 14 = 0$, đường thẳng AC đi qua điểm $M(2;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 8 = 0$. Lập phương trình tiếp tuyến Δ của (C) biết tiếp tuyến tạo với Δ' một góc bằng 45° . Biết đường thẳng $\Delta': 4x + 2y - 11 = 0$

Bài 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh A thuộc đường thẳng $\Delta: x - y - 4 = 0$, đường thẳng BC đi qua điểm $M(4;0)$, đường thẳng CD đi qua điểm $N(0;2)$. Biết tam giác AMN cân tại A . Viết phương trình đường thẳng BC .

Bài 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn $(C_1): (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ và cắt đường tròn $(C_2): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ tại hai điểm M, N sao cho $MN = 2\sqrt{2}$

Bài 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 16, các đường thẳng AB, BC, CD, DA lần lượt đi qua các điểm $M(4;5), N(6;5), P(5;2), Q(2;1)$. Viết phương trình đường thẳng AB .

Bài 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 13$, đường tròn $(C_2): (x-6)^2 + y^2 = 25$. Gọi giao điểm có tung độ dương của (C_1) và (C_2) là A . Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , cắt (C_1) và (C_2) theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.

Bài 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Viết phương trình bốn cạnh của hình vuông không song song với các trục tọa độ, có tâm O và hai cạnh kế lần lượt đi qua $M(-1;2)$ và $N(3;-1)$.

Bài 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$ với đáy lớn AD và $AD = 2BC$, đỉnh $B(4;0)$, phương trình đường chéo $AC: 2x - y - 3 = 0$, trung điểm E của AD thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y + 10 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang $ABCD$, biết $\widehat{ADC} = 2$.

Bài 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$ và điểm $M(7;3)$. Viết phương trình đường thẳng qua M cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $MA = 3MB$.

Bài 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-1;-3)$, $B(5;1)$. Điểm M nằm trên đoạn thẳng BC sao cho $MC = 2MB$. Tìm tọa độ điểm C biết rằng $MA = AC = 5$ và đường thẳng BC có hệ số góc là một số nguyên.

F. GIẢI BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1.

+ Đường tròn (T) có tâm

$I(2;3)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.

+ Gọi AB có vectơ pháp tuyến

$\vec{n}_{AB} = (a;b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$), do AB đi qua $M(-3;-2)$ nên có phương trình:

$a(x+3) + b(y+2) = 0 \Leftrightarrow ax + by + 3a + 2b = 0$, khi đó do AB tiếp xúc với (T)

nên ta có:

$$d(I, AB) = R \Leftrightarrow \frac{|2a + 3b + 3a + 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow 25(a+b)^2 = 10(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 10ab + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow (a+3b)(3a+b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3b \\ 3a = -b \end{cases}$$

+ Với $a = -3b$, chọn $\begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$ suy ra phương trình $AB: 3x - y + 7 = 0$

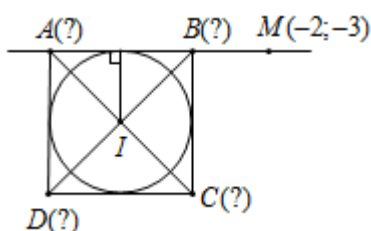
Gọi $A(t; 3t+7) \in AB$ với $t > 0$, khi đó:

$$IA^2 = 2R^2 = 20 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (3t+4)^2 = 20 \Leftrightarrow t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases}$$

(loại - không thỏa mãn $t > 0$)

+ Với $3a = -b$, chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$ suy ra phương trình $AB: x - 3y - 3 = 0$

Do $IA^2 = IB^2 = 2R^2 = 20$, nên A, B thuộc đường tròn tâm $I(2;3)$ bán kính $\sqrt{20}$.



Suy ra tọa độ điểm A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 3y - 3 = 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 3 \\ 10y^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6; y = 1 \\ x = 0; y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(6; 1) \\ B(0; -1) \end{cases} \quad (\text{do } x_A > 0)$$

Mặt khác I là trung điểm của AC và BD nên suy ra $C(-2; 5), D(4; 7)$

Vậy $A(6; 1), B(0; -1), C(-2; 5), D(4; 7)$.

Bài 2.

+ Đường tròn (C) có tâm $I(-2; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{2} = IA = IB$

+ Ta có $S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \sin \widehat{AIB} = \sin \widehat{AIB} \leq 1$

Suy ra diện tích tam giác IAB lớn nhất bằng 1, khi $\sin \widehat{AIB} = 1$

$$\Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ \Leftrightarrow \triangle IAB \text{ vuông cân tại } I$$

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên Δ , khi đó:

$$IH = \frac{IA}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow d(I, \Delta) = 1 \Leftrightarrow \frac{|-2 - 2m - 2m + 3|}{\sqrt{1 + m^2}} = 1 \Leftrightarrow (4m - 1)^2 = 1 + m^2$$

$$\Leftrightarrow 15m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{8}{15} \end{cases}$$

+ Vậy $m = 0$ hoặc $m = \frac{8}{15}$.

Bài 3.

+ Đường tròn (C) có tâm $I(1; 2)$

và bán kính $R = \sqrt{5}$

Ta có $IM = 5 > \sqrt{5} = R$, suy ra

M nằm ngoài đường tròn.

+ Ta có phương tích của điểm M đối với đường tròn (C) :

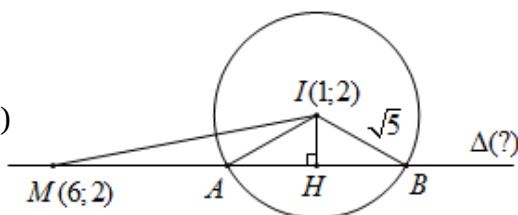
$$P_{M/(C)} = MA \cdot MB = MI^2 - R^2 = 25 - 5 = 20$$

Vậy $MA \cdot MB = 20$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên Δ .

$$\text{Khi đó ta có: } MA^2 + MB^2 = 50 \Leftrightarrow (MA + MB)^2 - 2MA \cdot MB = 50$$

$$\Leftrightarrow (MA + MH + HB)^2 - 2 \cdot 20 = 50$$



$$\Leftrightarrow (2MH)^2 = 90 \Leftrightarrow MH^2 = \frac{90}{4} \Rightarrow IH = \sqrt{MI^2 - MH^2} = \sqrt{25 - \frac{90}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

+ Gọi vectơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n}_\Delta = (a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$), do Δ đi qua $M(6; 2)$ nên có phương trình: $a(x - 6) + b(y - 2) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 6a - 2b = 0$,

$$\text{khi đó: } d(I, \Delta) = IH \Leftrightarrow \frac{|a + 2b - 6a - 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow 100a^2 = 10(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 9a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = b \\ 3a = -b \end{cases}$$

+ Với $3a = b$, chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$ suy ra phương trình $\Delta: x + 3y - 12 = 0$

Với $3a = -b$, chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$ suy ra phương trình $\Delta: x - 3y = 0$

Vậy phương trình đường thẳng Δ cần lập là: $x + 3y - 12 = 0$ hoặc $x - 3y = 0$.

Bài 4.

+ Đường tròn (C) có tâm $I(1; -1)$ và bán kính $R = 4$

+ Ta có $S_{IBC} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} IB \cdot IC \cdot \sin \angle CIB = 4\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin \angle CIB = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin \angle CIB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Mà tam giác IBC nhọn nên $\angle CIB = 60^\circ$, suy ra tam giác CIB đều.

+ Gọi vectơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n}_\Delta = (a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$), do Δ đi qua $A(1 + \sqrt{3}; 2)$ nên có phương trình:

$$a(x - 1 - \sqrt{3}) + b(y - 2) = 0 \Leftrightarrow ax + by - (1 + \sqrt{3})a - 2b = 0$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên Δ , khi đó:

$$IH = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow d(I, \Delta) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|a - b - (1 + \sqrt{3})a - 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}a + 3b)^2 = 12(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 3a^2 - 2\sqrt{3}ab + b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}a - b)^2 = 0 \Leftrightarrow b = \sqrt{3}a$$

+ Chọn $\begin{cases} a=1 \\ b=\sqrt{3} \end{cases}$ ta được phương trình Δ cần lập là: $x + \sqrt{3}y - 1 - 3\sqrt{3} = 0$

Bài 5.

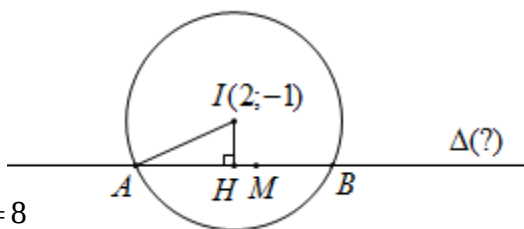
Giải tương tự như **Bài 4** ta được phương trình Δ là $y=0$ hoặc $4\sqrt{3}x + y - 8\sqrt{3} = 0$.

Bài 6.

+ Đường tròn (C) có tâm

$I(2; -1)$ và bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

+ Ta có



$$S_{IAB} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin \angle AIB = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{5})^2 \cdot \sin \angle AIB = 8 \Leftrightarrow \sin \angle AIB = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \angle AIB = \frac{3}{5} \\ \cos \angle AIB = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Ta có AB lớn nhất khi góc AIB lớn nhất $\Rightarrow \cos \angle AIB = -\frac{3}{5}$

$$\text{Khi đó } AB^2 = IA^2 + IB^2 - 2IA \cdot IB \cdot \cos \angle AIB = 20 + 20 + 24 = 64 \Rightarrow AB = 8$$

+ Gọi vectơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n}_\Delta = (a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$), do Δ đi qua $M(1; -3)$ nên có phương trình: $a(x-1) + b(y+3) = 0 \Leftrightarrow ax + by - a + 3b = 0$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên Δ , khi đó:

$$AH = 4 \Rightarrow IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = 2 \Leftrightarrow d(I, \Delta) = 2 \Leftrightarrow \frac{|2a - b - a + 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow (a+2b)^2 = 4(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 3a^2 - 4ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ 3a=4b \end{cases}$$

+ Với $a=0$, chọn $b=1$ ta được phương trình Δ : $y+3=0$

+ Với $3a=4b$, chọn $\begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$ ta được phương trình Δ : $4x+3y+5=0$

Vậy phương trình Δ cần lập là: $y+3=0$ hoặc $4x+3y+5=0$.

Chú ý:

Ngoài cách tìm IH theo cách giải trên, các bạn có thể tìm bằng cách sau:

Đặt $IH = m \Rightarrow AH = \sqrt{20 - m^2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{20 - m^2}$ (với $0 < m < 2\sqrt{5}$), khi đó:

$$S_{IAB} = \frac{1}{2} IH \cdot AB = \frac{1}{2} m \cdot 2\sqrt{20 - m^2} = m \cdot \sqrt{20 - m^2} = 8$$

$$\Leftrightarrow m^4 - 20m^2 + 64 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = 8 \\ AB = 4 \end{cases}$$

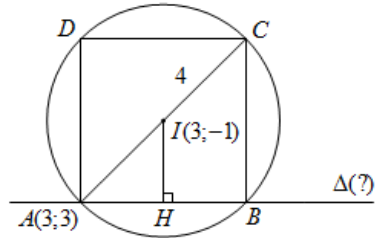
Để AB lớn nhất suy ra $m = 2$ hay $IH = 2$.

Bài 7.

+ Đường tròn (T) có tâm $I(3; -1)$ và bán kính $R = 4$.

Do $A \in (T)$ nên gọi $ABCD$ là hình vuông nội tiếp đường tròn (T)

$$\text{Suy ra } AC = 2R = 8 \Rightarrow BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$



+ Gọi vectơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n}_\Delta = (a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$), do Δ đi qua $A(3; 3)$ nên có phương trình:

$$a(x - 3) + b(y - 3) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 3a - 3b = 0$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên Δ , khi đó: $IH = \frac{BC}{2} = 2\sqrt{2}$

$$\text{hay } d(I, \Delta) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|3a - b - 3a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 16b^2 = 8(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$$

+ Với $a = b$, chọn $a = b = 1$ ta được phương trình $\Delta: x + y - 6 = 0$

+ Với $a = -b$, chọn $a = 1; b = -1$ ta được phương trình $\Delta: x - y = 0$

Vậy Δ có phương trình $x + y + 6 = 0$ hoặc $x - y = 0$.

Bài 8.

Cách 1:

Gọi $\overrightarrow{n_{BC}} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$, khi đó

BC đi qua $M\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ có phương trình:

$$a\left(x - \frac{3}{2}\right) + b(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2ax + 2by - 3a - 4b = 0$$

Đường tròn (T) có tâm $I(4; 2)$ và bán kính $r = \sqrt{5}$ nên:

$$d(I, BC) = r \Leftrightarrow \frac{5|a|}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow a^2 = 4b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ a = 2b \end{cases}$$

+ Với $a = -2b$, suy ra phương trình $BC: 2x - y - 1 = 0$ và $AI: x + 2y - 8 = 0$

Khi đó tọa độ trung điểm H của BC là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow H(2; 3)$$

Do ΔABC đều nên I là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overline{AI} = 2\overline{IH} \Rightarrow A(8; 0)$

+ Tương tự với $a = 2b$ ta được $A(8; 4)$

Vậy $A(8; 0)$ hoặc $A(8; 4)$

Cách 2:

Ta có $I(4; 2)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

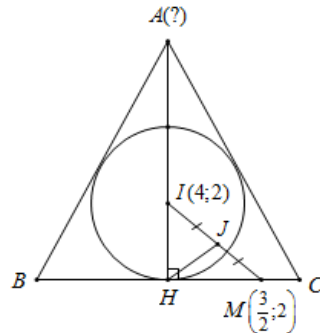
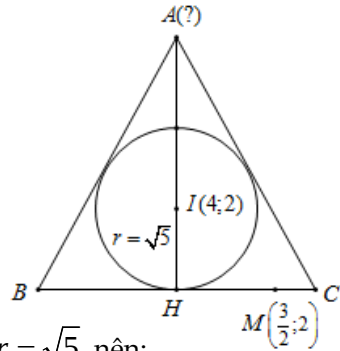
Gọi H, J lần lượt là trung điểm của BC và IM .

Khi đó H thuộc đường tròn tâm $J\left(\frac{11}{4}; 2\right)$ bán kính $R = \frac{IM}{2} = \frac{5}{4}$, nên

tọa độ điểm H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5 \\ \left(x - \frac{11}{4}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{25}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H(2; 3) \\ H(2; 1) \end{cases}$$

Do ΔABC đều nên I là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overline{AI} = 2\overline{IH}$ (*)



Áp dụng (*) với :

$$+ H(2;3) \Rightarrow A(8;0)$$

$$+ H(2;1) \Rightarrow A(8;4)$$

Chú ý: Thực ra việc sử dụng $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$ và đi viết phương trình đường tròn tâm J bán kính JH là một, nên ta có thể tìm H bằng cách đi giải hệ:

$$\begin{cases} H \in (T) \\ \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{MH} = 0 \end{cases}$$

Bài 9.

Gọi $\vec{n} = (a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) là vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB .

Khi đó :

$$\text{Phương trình } AB : ax + by + 2a - 2b = 0$$

$$\text{Phương trình } AD : bx - ay - 2a = 0$$

Do $ABCD$ là hình vuông nên ta có:

$$d(P, AB) = d(N, AD) \Leftrightarrow \frac{|5a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4b - 4a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 9a = 7b \end{cases}$$

+ Với $a = -b$, chọn $a = 1, b = -1$.

Khi đó ta được phương trình các đường thẳng: $AB : x - y + 4 = 0$;

$$AD : x + y + 2 = 0 ; BC : x + y - 6 = 0 ; CD : x - y - 4 = 0$$

Suy ra tọa độ các đỉnh: $A(-3;1), B(1;5), C(5;1), D(1;-3)$

+ Với $9a = 7b$, chọn $a = 9, b = 7$.

Khi đó ta được phương trình các đường thẳng: $AB : 7x + 9y - 4 = 0$;

$$AD : 9x - 7y - 14 = 0 ; BC : 9x - 7y - 22 = 0 ; CD : 7x + 9y - 12 = 0$$

Suy ra tọa độ các đỉnh:

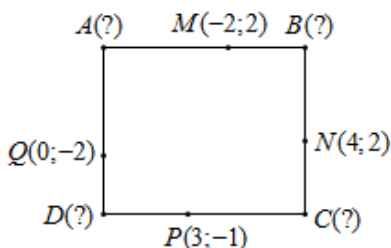
$$A\left(\frac{77}{65}; -\frac{31}{65}\right), B\left(\frac{113}{65}; -\frac{59}{65}\right), C\left(\frac{141}{65}; -\frac{23}{65}\right), D\left(\frac{21}{13}; \frac{1}{13}\right)$$

Bài 10.

Giải tương tự như **Bài 9** (ở bài này điểm A đóng vai trò như hai điểm thuộc đường AB, AD)

Ta được đáp số $B(4;6), C(7;3), D(4;0)$

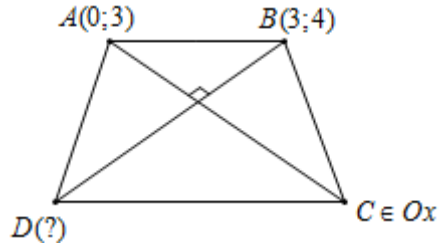
$$\text{hoặc } B\left(\frac{64}{13}; \frac{18}{13}\right), C\left(\frac{85}{13}; \frac{69}{13}\right), D\left(\frac{34}{13}; \frac{90}{13}\right).$$



Bài 11.

Gọi $C(c; 0) \in Ox$, khi đó phương trình AC có dạng: $3x + cy - 3c = 0$

Do BD đi qua $B(3; 4)$ và vuông góc với AC , nên BD có phương trình: $cx - 3y - 3c + 12 = 0$



Do $ABCD$ là hình thang cân nên ta có:

$$d(A, BD) = d(B, AC) \Leftrightarrow \frac{|3 - 3c|}{\sqrt{c^2 + 9}} = \frac{|9 + c|}{\sqrt{c^2 + 9}} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \\ c = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

+ Với $c = 6$ thì $C(6; 0)$, khi đó:

Phương trình $BD: 2x - y - 2 = 0$ và phương trình $CD: x - 3y - 6 = 0$

Suy ra tọa độ điểm D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x - 3y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow D(0; -2)$$

+ Với $c = -\frac{3}{2}$ thì $C(-\frac{3}{2}; 0)$, khi đó:

Phương trình $BD: x + 2y - 11 = 0$ và phương trình $CD: x - 3y + \frac{3}{2} = 0$

Suy ra tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 2y - 11 = 0 \\ x - 3y + \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow D\left(6; \frac{5}{2}\right)$$

Mà $ABCD$ là hình thang nên ta có $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$ với $k > 0$ nên $D(0; -2)$ thỏa mãn yêu cầu

Vậy $D(0; -2)$.

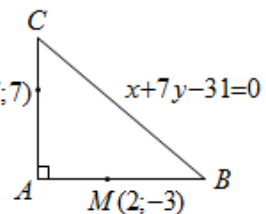
Bài 12.

+ Gọi vectơ pháp tuyến của AB là $\overrightarrow{n_{AB}} = (a; b)$ với

$a^2 + b^2 \neq 0$, AB đi qua $M(2; -3)$ có phương trình:

$$a(x - 2) + b(y + 3) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 2a + 3b = 0$$

Ta có $\overrightarrow{n_{BC}} = (1; 7)$, khi đó:



$$\angle ABC = 45^\circ \Leftrightarrow \cos \angle ABC = \cos 45^\circ$$

KHANG VIET

$$\Leftrightarrow \frac{|a+7b|}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{1^2+7^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (a+7b)^2 = 25(a^2+b^2)$$

$$\Leftrightarrow 12a^2 - 7ab - 12b^2 = 0 \Leftrightarrow (3a-4b)(4a+3b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 4b \\ 4a = -3b \end{cases}$$

+ Với $3a = 4b$, chọn $\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$ suy ra phương trình $AB: 4x + 3y + 1 = 0$

Khi đó AC đi qua $N(7;7)$ vuông góc với AB nên AC có phương trình:
 $3x - 4y + 7 = 0$

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x + 3y + 1 = 0 \\ 3x - 4y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(-1;1)$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x + 3y + 1 = 0 \\ x + 7y - 31 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(-4;5)$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - 4y + 7 = 0 \\ x + 7y - 31 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow C(3;4)$

+ Với $4a = -3b$, chọn $\begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases}$ suy ra phương trình $AB: 3x - 4y - 18 = 0$ và

$AC: 4x + 3y - 49 = 0$

Khi đó ta có $A(10;3) \equiv B(10;3)$ (loại)

Vậy $A(-1;1), B(-4;5), C(3;4)$

Bài 13.

+ Ta có vectơ pháp tuyến của AB, AC lần lượt là: $\vec{n}_1 = (1;2)$ và $\vec{n}_2 = (2;1)$

Gọi vectơ pháp tuyến của BC là $\vec{n}_3 = (a;b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$. Khi đó tam

giác ABC cân tại A nên: $\cos B = \cos C \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_3|} = \frac{|\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3|}{|\vec{n}_2| \cdot |\vec{n}_3|}$

$$\Leftrightarrow \frac{|a+2b|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|2a+b|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow |a+2b| = |2a+b| \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = b \end{cases}$$

+ Với $a = -b$, chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ ta được $\vec{n}_3 = (1;-1)$, suy ra phương trình $BC:$

$x - y + 1 = 0$

Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+2y-2=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow B(0;1)$$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$$

Ta có $\overrightarrow{MB}=(-1;-1), \overrightarrow{MC}=\left(-\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{MB} \Rightarrow M$ nằm ngoài đoạn BC (loại).

+ Với $a=b$, chọn $a=b=1$ ta được $\vec{n}_3=(1;1)$, suy ra phương trình BC :
 $x+y-3=0$

Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+2y-2=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow B(4;-1)$$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow C(-4;7)$

Ta có $\overrightarrow{MB}=(3;-3), \overrightarrow{MC}=(-5;5) \Rightarrow \overrightarrow{MC}=-\frac{5}{3}\overrightarrow{MB} \Rightarrow M$ nằm thuộc đoạn

BC (thỏa mãn).

+ Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow I(0;3)$

Ta có: $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IC})$

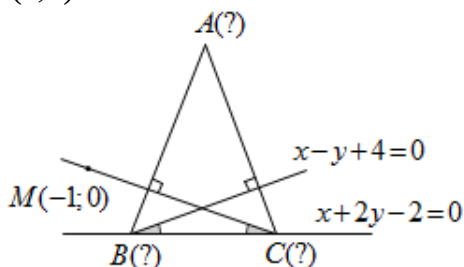
$$= DI^2 + \overrightarrow{DI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} = DI^2 - IB \cdot IC = DI^2 - \frac{BC^2}{4} \geq -\frac{BC^2}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $D \equiv I(0;3)$. Vậy $D(0;3)$

Bài 14.

+ Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+2y-2=0 \\ x-y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow B(-2;2)$$



KHANG

VIE

+ Ta có vectơ pháp tuyến của BC , đường cao kẻ từ B lần lượt là: $\vec{n}_1 = (1; 2)$ và $\vec{n}_2 = (1; -1)$

Gọi vectơ pháp tuyến của CM là $\vec{n}_3 = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$. Khi đó tam giác ABC cân tại A nên: $|\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_3)| \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_3|}$

$$\Leftrightarrow \frac{|1-2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{|a+2b|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2(a+2b)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 8ab + 7b^2 = 0 \Leftrightarrow (a+b)(a+7b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = -7b \end{cases}$$

+ Với $a = -b$, chọn $a = 1; b = -1 \Rightarrow \vec{n}_3 = (1; -1)$ cùng phương với $\vec{n}_2 = (1; -1)$ (loại)

+ Với $a = -7b$, chọn $a = 7; b = -1 \Rightarrow \vec{n}_3 = (7; -1)$, khi đó CM có phương trình: $7x - y + 7 = 0$

Vậy tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 7x - y + 7 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ y = \frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right)$$

Khi đó phương trình AB, AC lần lượt là: $x + 7y - 12 = 0$ và $5x + 5y - 3 = 0$

Suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

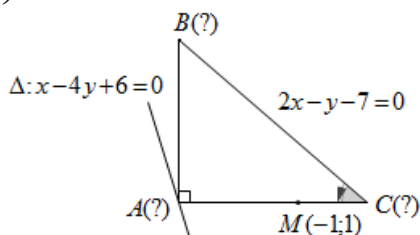
$$\begin{cases} x + 7y - 12 = 0 \\ 5x + 5y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{13}{10} \\ y = \frac{19}{10} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{13}{10}; \frac{19}{10}\right)$$

Vậy $A\left(-\frac{13}{10}; \frac{19}{10}\right), B(-2; 2), C\left(-\frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right)$.

Bài 15.

Cách 1:

+ Đường thẳng BC có vectơ chỉ phương $\vec{u}_{BC} = (1; 2)$.



Gọi AC có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{AC}} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$.

Khi đó tam giác ABC vuông cân tại A

nên: $\widehat{ACB} = 45^\circ$

$$\Rightarrow \left| \cos(\overrightarrow{n_{AC}}, \overrightarrow{u_{BC}}) \right| = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2(a+2b)^2 = 5(a^2+b^2)$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 8ab - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow (3a+b)(a-3b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -b \\ a = 3b \end{cases}$$

+ Với $3a = -b$, chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_{AC}} = (1; -3) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}} = (3; 1)$

Vậy AC đi qua $M(-1; 1)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{AC}} = (1; -3)$ nên có phương trình: $x - 3y + 4 = 0$

Khi đó điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ x - 4y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(2; 2) \Rightarrow AB: 3x + y - 8 = 0$$

Tương tự ta có $B(3; -1)$ và $C(5; 3)$.

+ Với $a = 3b$, chọn $\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_{AC}} = (3; 1)$, suy ra phương trình

$$AC: 3x + y + 2 = 0$$

Khi đó điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + y + 2 = 0 \\ x - 4y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{14}{13} \\ y = \frac{16}{13} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{14}{13}; \frac{16}{13}\right) \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy $A(2; 2), B(3; -1), C(5; 3)$.

Cách 2:

Gọi $A(4t-6; t)$ với $t > \frac{3}{2}$, suy ra $\overrightarrow{MA} = (4t-5; t-1)$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên:

$$\widehat{ACB} = 45^\circ \Rightarrow \left| \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{u_{BC}}) \right| = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|4t-5+2(t-1)|}{\sqrt{(4t-5)^2 + (t-1)^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2(6t-7)^2 = 5(17t^2 - 42t + 26) \Leftrightarrow 13t^2 - 42t + 32 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

$$\text{hoặc } t = \frac{16}{13} \text{ (loại)} \Rightarrow A(2; 2)$$

$$\text{Với } A(2; 2) \Rightarrow \begin{cases} AC: x - 3y + 4 = 0 \\ AB: 3x + y - 8 = 0 \end{cases}.$$

Từ đó ta suy ra được $B(3; -1)$ và $C(5; 3)$.

Vậy $A(2; 2), B(3; -1), C(5; 3)$.

Bài 16.

$$+ \text{ Tọa độ điểm } B \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 7x + 6y - 24 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow B\left(3; \frac{1}{2}\right)$$

+ Đường thẳng AB, BC lần lượt có vecto pháp tuyến $\vec{n}_1 = (7; 6), \vec{n}_2 = (1; -2)$

Gọi vecto pháp tuyến của AC là $\vec{n}_3 = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$. Do tam giác

$$ABC \text{ cân tại } A \text{ nên: } \cos B = \cos C \Leftrightarrow \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \left| \cos(\vec{n}_3, \vec{n}_2) \right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{|7 - 12|}{\sqrt{7^2 + 6^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|a - 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}}$$

$$\Leftrightarrow 25(a^2 + b^2) = 85(a - 2b)^2 \Leftrightarrow 12a^2 - 68ab + 63b^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (2a - 9b)(6a - 7b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 9b \\ 6a = 7b \end{cases}$$

+ Với $2a = 9b$, chọn $\begin{cases} a = 9 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_3 = (9; 2)$ và là vecto chỉ phương của đường cao kẻ từ đỉnh B

Suy ra phương trình đường cao kẻ từ B là:

$$\frac{x - 3}{9} = \frac{y - \frac{1}{2}}{2} \Leftrightarrow 4x - 18y - 3 = 0$$

+ Với $6a = 7b$, chọn $\begin{cases} a = 7 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_3 = (7; 6) \Rightarrow AC \parallel AB \text{ (loại)}$

Vậy đường cao kẻ từ B có phương trình: $4x - 18y - 3 = 0$

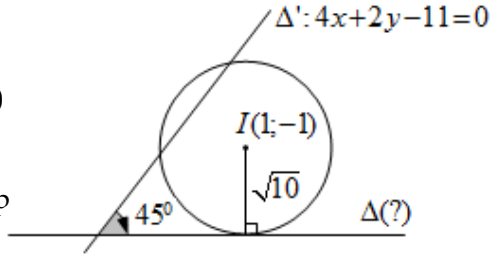
Bài 17.

Giải tương tự **Ví dụ 2. (D – 2012 – CB)** thuộc **Bài toán 6.2** ta được đáp số $A(3;2), B\left(\frac{21}{5}; \frac{13}{5}\right), C(4;3), D\left(\frac{14}{5}; \frac{12}{5}\right)$

Bài 18.

+ Đường tròn (C) có tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.

Đường thẳng Δ' có vecto pháp tuyến $\vec{n}_{\Delta'} = (2;1)$



Gọi Δ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_{\Delta} = (a;b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$.

+ Theo đề ra ta có : $(\Delta, \Delta') = 45^\circ \Leftrightarrow \left| \cos(\vec{n}_{\Delta}, \vec{n}_{\Delta'}) \right| = \cos 45^\circ$.

$$\Leftrightarrow \frac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2(2a+b)^2 = 5(a^2+b^2)$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 8ab - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow (a+3b)(3a-b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3b \\ 3a = b \end{cases}$$

+ Với $a = -3b$, chọn $\begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{\Delta} = (3; -1)$.

Khi đó Δ có dạng: $3x - y + m = 0$

Do Δ là tiếp tuyến của (C) nên:

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|3+1+m|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |m+4| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta: 3x - y + 6 = 0 \\ \Delta: 3x - y - 14 = 0 \end{cases}$$

+ Với $3a = b$, chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{\Delta} = (1; 3)$. Khi đó Δ có dạng: $x + 3y + n = 0$

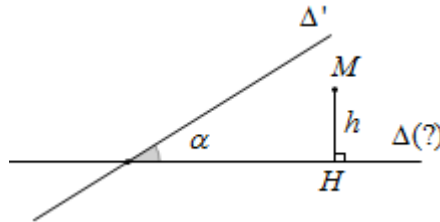
Do Δ là tiếp tuyến của (C) nên:

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|1-3+n|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |n-2| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 12 \\ n = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta: x + 3y + 12 = 0 \\ \Delta: x + 3y - 8 = 0 \end{cases}$$

Vậy có 4 phương trình tiếp tuyến thỏa mãn bài toán: $3x - y + 6 = 0$; $3x - y - 14 = 0$; $x + 3y + 12 = 0$; $x + 3y - 8 = 0$.

Nhận xét:

Bài toán này ta có thể tổng quát như sau: “Viết phương trình đường thẳng Δ cách một điểm cho trước một khoảng không đổi và hợp đường thẳng cho trước một góc không đổi”



Cách giải

+ Gọi vectơ pháp tuyến của Δ là $\overrightarrow{n_\Delta} = (a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$)

+ Sử dụng dữ kiện góc tạo bởi Δ và Δ' bằng α ($(\Delta, \Delta') = \alpha$) bằng cách áp dụng

$$\text{công thức : } \cos(\Delta, \Delta') = \cos \alpha \Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{n_\Delta} \cdot \overrightarrow{n_{\Delta'}}|}{|\overrightarrow{n_\Delta}| \cdot |\overrightarrow{n_{\Delta'}}|} = \cos \alpha \Leftrightarrow \frac{|a \cdot a' + b \cdot b'|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2}} = \cos \alpha$$

giúp ta thiết lập được phương trình đẳng cấp bậc hai $g(a, b) = 0$ (ẩn a, b). Từ đây ta sẽ rút ra được mối liên hệ $a = kb$. Sau đó bằng thao tác “chọn”, ta được bộ số $(a; b) \neq (0; 0)$ và suy ra được dạng phương trình Δ là: $ax + by + m = 0$

+ Cắt nghĩa dữ kiện còn lại của bài toán $d(M, \Delta) = MH = h$, cho ta được phương trình $g(m) = 0$ ẩn m . Giải phương trình này ta tìm được m và suy ra được phương trình Δ .

Bài 19.

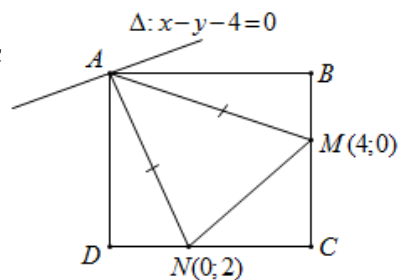
+ Gọi $A(t; t-4) \in \Delta$, khi đó tam giác

AMN cân tại A nên: $AM = AN$

$$\Leftrightarrow AM^2 = AN^2$$

$$\Leftrightarrow (t-4)^2 + (t-4)^2 = t^2 + (t-6)^2$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow A(-1; -5)$$



+ Gọi vectơ pháp tuyến của BC là $\overrightarrow{n_{BC}} = (a; b)$, khi đó BC đi qua $M(4; 0)$ nên có phương trình:

$$a(x-4) + by = 0 \Leftrightarrow ax + by - 4a = 0 \quad (\text{với } a^2 + b^2 > 0)$$

Suy ra CD đi qua $N(0; 2)$ và vuông góc với BC nên có phương trình:

$$bx - ay + 2a = 0$$

+ Vì $ABCD$ là hình vuông nên: $AB = AD \Leftrightarrow d(A, BC) = d(A, CD)$

$$\Leftrightarrow \frac{|-5a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|7a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b=0 \\ a-3b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3a \\ a=3b \end{cases}$$

+ Với $b = -3a$, chọn $\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$ ta được phương trình $BC: x-3y-4=0$

Với $a = 3b$, chọn $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$ ta được phương trình $BC: 3x+y-12=0$

Vậy BC có phương trình $x-3y-4=0$ hoặc $3x+y-12=0$.

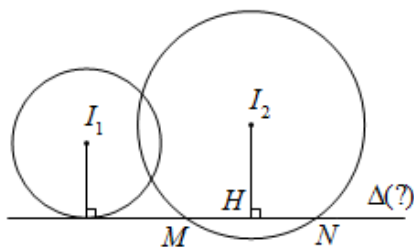
Bài 20.

+ Đường tròn (C_1)

có tâm $I_1(1;0)$ và bán kính $R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Đường tròn (C_2)

có tâm $I_2(1;0)$ và bán kính $R_2 = 2$



+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của I_2 trên Δ , khi đó $MH = \frac{MN}{2} = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow d(I_2, \Delta) = I_2H = \sqrt{R_2^2 - MH^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

+ Gọi đường thẳng Δ có dạng: $ax+by+c=0$

Ta có:

$$\begin{cases} d(I_1, \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ d(I_2, \Delta) = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{|2a+2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a+c)^2 = a^2+b^2 & (1) \\ 2|a+c| = |2a+2b+c| & (2) \end{cases}$$

+ Từ (2) $\Rightarrow \begin{cases} c=2b \\ c=-\frac{4a+2b}{3} \end{cases}$

Trường hợp $c = 2b$ thay vào (1), ta được:

$$2(a+2b)^2 = a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2+8ab+7b^2=0 \Leftrightarrow (a+b)(a+7b)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ a=-7b \end{cases}$$

Với $a = -b$, chọn $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow c = -2 \Rightarrow \Delta: x + y - 2 = 0$

Với $a = -7b$, chọn $\begin{cases} a=7 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow c = -2 \Rightarrow \Delta: 7x - y - 2 = 0$

Trường hợp $c = -\frac{4a+2b}{3}$ thay vào (1) ta được: $2\left(a - \frac{4a+2b}{3}\right)^2 = a^2 + b^2$

$$\Leftrightarrow 7a^2 - 8ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)(7a-b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 7a=b \end{cases}$$

Với $a = b$, chọn $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow c = -2 \Rightarrow \Delta: x + y - 2 = 0$

Với $7a = b$, chọn $\begin{cases} a=1 \\ b=7 \end{cases} \Rightarrow c = -6 \Rightarrow \Delta: x + 7y - 6 = 0$

Vậy Δ có phương trình $x + y - 2 = 0$, $7x - y - 2 = 0$, $x + y - 2 = 0$ hoặc $x + 7y - 6 = 0$.

Bài 21.

+ Gọi AB có vectơ pháp tuyến

$$\vec{n}_{AB} = (a; b) \text{ với } a^2 + b^2 \neq 0$$

Khi đó AB đi qua $M(4; 5)$

nên có phương trình:

$$ax + by - 4a - 5b = 0$$

Do $BC \perp AB$ và BC đi qua điểm $N(6; 5)$ nên BC có phương trình:

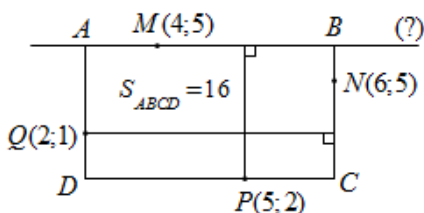
$$bx - ay + 5a - 6b = 0$$

Ta có $S_{ABCD} = d(P, AB) \cdot d(Q, BC) \Leftrightarrow 16 \frac{|15a + 2b - 4a - 5b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{|2b - a + 5a - 6b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\Leftrightarrow |a^2 - 4ab + 3b^2| = 4(a^2 + b^2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 + 4ab + b^2 = 0 \\ 5a^2 - 4ab + 7b^2 = 0 \end{cases} \text{ (VN)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 3a = -b \end{cases}$$

+ Với $a = -b$, chọn $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow AB: x - y + 1 = 0$

Với $3a = -b$, chọn $\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow AB: x - 3y + 11 = 0$



Vậy AB có phương trình $x - y + 1 = 0$ hoặc $x - 3y + 11 = 0$.

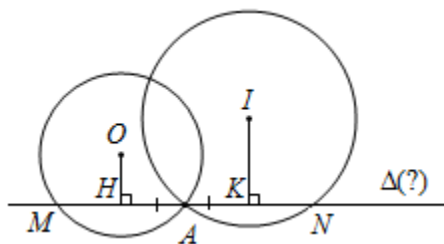
Bài 22.

+ Đường tròn (C_1) có tâm

$O(0;0)$ và bán kính $R_1 = \sqrt{13}$

Đường tròn (C_2) có tâm $I(6;0)$

và bán kính $R_2 = 5$



Tọa độ giao điểm của $(C_1), (C_2)$ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ (x-6)^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = 3 \\ x = 2; y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2;3) \\ A(2;-3) \end{cases}$$

Do A có tung độ dương nên suy ra $A(2;3)$.

+ Gọi Δ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_\Delta = (a;b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$, Δ đi qua $A(2;3)$ nên có phương trình:

$$a(x-2) + b(y-3) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 2a - 3b = 0$$

+ Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của O, I trên Δ

Gọi M, N lần lượt là giao điểm thứ hai của Δ với đường tròn $(C_1), (C_2)$.

Khi đó: $AM = AN \Leftrightarrow AH = AK \Leftrightarrow AH^2 = AK^2 \Leftrightarrow OA^2 - OH^2 = IA^2 - IK^2$

$$\Leftrightarrow R_1^2 - d(O, \Delta) = R_2^2 - d(I, \Delta) \Leftrightarrow 13 - \frac{(2a+3b)^2}{a^2+b^2} = 25 - \frac{(4a-3b)^2}{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow b^2 + 3ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -3a \end{cases}$$

+ Với $b = 0$, chọn $a = 1$, suy ra phương trình $\Delta: x - 2 = 0$

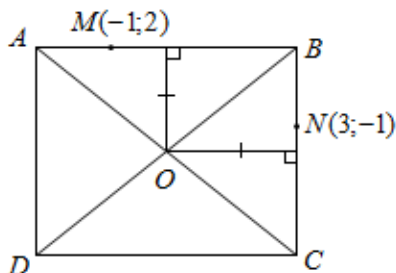
Với $b = -3a$, chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$, suy ra phương trình $\Delta: x - 3y + 7 = 0$

Vậy Δ có phương trình $x - 2 = 0$ hoặc $x - 3y + 7 = 0$

Bài 23.

+ Gọi hình vuông $ABCD$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Không mất tính tổng quát giả sử AB, BC lần lượt đi qua $M(-1;2)$ và $N(3;-1)$.



+ Gọi vecto pháp tuyến của AB là $\vec{n} = (a; b)$ với $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ (do 4 cạnh hình

vuông không song song với các trục tọa độ)

Khi đó phương trình $AB: a(x+1)+b(y-2)=0 \Leftrightarrow ax+by+a-2b=0$

Phương trình $BC: b(x-3)-a(y+1)=0 \Leftrightarrow bx-ay-3b-a=0$

+ Do $ABCD$ là hình vuông nên:

$$d(O, AB) = d(O, BC) \Leftrightarrow \frac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow 2a = -b \text{ hoặc } b = 0 \text{ (loại)}$$

Với $2a = -b$, chọn $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$, khi đó $AB: x-2y+5=0$ và $BC: 2x+y-5=0$

+ Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-2y+5=0 \\ 2x+y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow B(1;3)$$

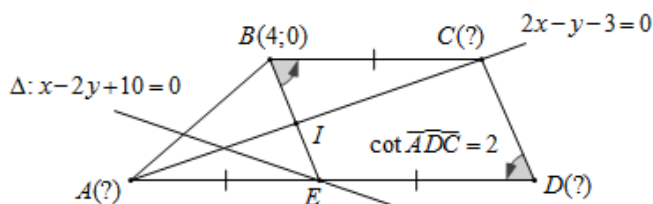
Do O là trung điểm của BD nên $D(-1;-3)$

Từ đó ta suy ra phương trình $CD: x-2y-5=0$ và $AD: 2x+y+5=0$

Vậy $AB: x-2y+5=0$; $BC: 2x+y-5=0$; $CD: x-2y-5=0$ và

$AD: 2x+y+5=0$

Bài 24.



+ Gọi $AE \cap BD = \{I\}$, do $AD = 2BC$ nên $ABCE$ là hình bình hành

$\Rightarrow I$ là trung điểm của BE

$$\text{Gọi } E(2t-10; t) \in \Delta \Rightarrow I\left(t-3; \frac{t}{2}\right).$$

$$\text{Mà } I \in AC \Rightarrow 2(t-3) - \frac{t}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 6 \Rightarrow \begin{cases} E(2; 6) \\ I(3; 3) \end{cases}$$

+ Mặt khác $BCDE$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{BE} = (-2; 6)$ và gọi

$$C(c; 2c-3) \in AC \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (c-4; 2c-3).$$

Khi đó $\widehat{EBC} = \widehat{ADC} = 2$

$$\Rightarrow \cos^2 \widehat{EBC} = \frac{1}{1 + \tan^2 \widehat{EBC}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow |\cos \widehat{EBC}| = \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{\quad}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BC}|}{BE \cdot BC} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|-2(c-4) + 6(2c-3)|}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{(c-4)^2 + (2c-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5|c-1|}{\sqrt{10(5c^2 - 20c + 25)}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 3c^2 - 22c + 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5 \\ c = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(5; 7) \\ C\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right) \end{cases}$$

+ Với $C(5; 7) \Rightarrow A(1; 1), D(3; 13)$ (do I, E lần lượt là trung điểm của AC, AD)

+ Với $C\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right) \Rightarrow A\left(\frac{11}{3}; \frac{13}{3}\right), D\left(\frac{1}{3}; \frac{23}{3}\right)$ (do I, E lần lượt là trung điểm của AC, AD)

Vậy $A(1; -1), C(5; 7), D(3; 13)$ hoặc $A\left(\frac{11}{3}; \frac{13}{3}\right), C\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right), D\left(\frac{1}{3}; \frac{23}{3}\right)$.

Bài 25.

+ Đường tròn (C) có tâm $I(1; -1)$, bán kính $R = 5$.

Ta có $MI = \sqrt{52} > R \Rightarrow M$ nằm ngoài đường tròn (C).

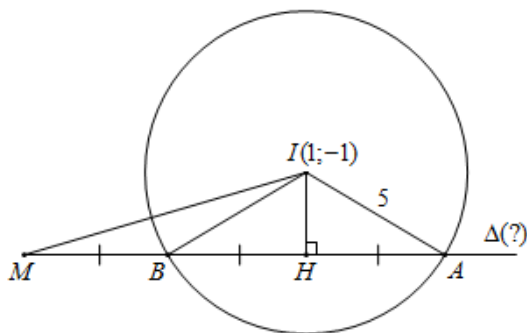
Theo phương tích của điểm M với đường tròn (C) ta có:

$$MA \cdot MB = MI^2 - R^2 = 27 \Rightarrow 3MB^2 = 27 \Rightarrow MB = 3 \Rightarrow \begin{cases} MA = 9 \\ AB = 6 \end{cases}$$

+ Gọi H là trung điểm của AB, khi đó ta có: $IH = \sqrt{R^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 4$

Gọi $\vec{n}_\Delta = (a; b)$ là vectơ pháp tuyến của Δ (với $a^2 + b^2 > 0$)

Khi đó Δ đi qua $M(7; 3)$ có phương trình: $ax + by - 7a - 3b = 0$



+ Mặt khác ta có:

$$d(I, \Delta) = IH \Leftrightarrow \frac{|a - b - 7a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 4 \Leftrightarrow 5a^2 + 12ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 5a = -12b \end{cases}$$

Với $a = 0$, chọn $b = 1$ ta được phương trình $\Delta: y - 3 = 0$

Với $5a = -12b$, chọn $\begin{cases} a = 12 \\ b = -5 \end{cases}$ ta được phương trình $\Delta: 12x - 5y - 69 = 0$

Vậy phương trình Δ cần lập là $y - 3 = 0$ hoặc $12x - 5y - 69 = 0$.

Bài 26.

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên AC , khi đó H là trung điểm của MC

Đặt $BM = MH = HC = x > 0$

Xét tam giác ABH ta có:

$$AH^2 = AM^2 - MH^2 = 25 - x^2$$

Khi đó xét tam giác AMH ta có:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 \Leftrightarrow 52 = 25 - x^2 + (2x)^2 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow AH^2 = 16 \Rightarrow AH = 4$$

+ Gọi $\vec{n}_{BC} = (a; b)$ là vectơ pháp tuyến của BC (với $a^2 + b^2 > 0$)

Khi đó BC đi qua $B(5;1)$ có phương trình: $ax + by - 5a - b = 0$

Mặt khác ta có:

$$d(A, BC) = AH \Leftrightarrow \frac{|-a - 3b - 5a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 4 \Leftrightarrow 5a^2 + 12ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 5a = -12b \end{cases}$$

+ Với $a = 0$, chọn $b = 1$ ta được phương trình $\Delta: y - 1 = 0$

Vì $AM = AC = 5$ nên C, M thuộc đường tròn tâm A bán kính là 5 có phương trình: $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 25$

Khi đó tọa độ điểm C, M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ (x+1)^2 + (y+3)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = 1 \\ x = -4; y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(2;1), M(-4;1) \\ C(-4;1), M(2;1) \end{cases}$$

Do M thuộc đoạn thẳng BC nên ta được $C(-4;1)$.

+ Với $5a = -12b$ ta có hệ số góc của đường thẳng BC là $k = \frac{12}{5}$ (loại). Vậy

$C(-4;1)$.

TRƯỜNG HỢP 2 : Bài toán cho vectơ pháp tuyến (chỉ phương)

Bài toán 6.3

A. NỘI DUNG BÀI TOÁN 6.3

Viết phương trình đường thẳng Δ biết phương của Δ (biết chỉ phương hoặc pháp tuyến) và Δ cách một điểm cho trước một khoảng không đổi.

B. CÁCH GIẢI CHUNG

$$\vec{n}_{\Delta} = (a; b) \longrightarrow \Delta : ax + by + m = 0$$

$$\xrightarrow{d(M, \Delta) = h = \text{const}} f(m) = 0 \longrightarrow m \longrightarrow \Delta$$

Giải thích chi tiết:

+ Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{\Delta} = (a; b)$, khi đó phương trình Δ có dạng $\Delta : ax + by + m = 0$

+ Dữ kiện M cách đường thẳng Δ một khoảng không đổi $d(M, \Delta) = h = \text{const}$ giúp ta thiết lập được phương trình $f(m) = 0$ (phương trình chứa ẩn m). Giải phương trình này ta tìm được m và suy ra được phương trình đường thẳng Δ .

Nhận xét

Như vậy để chuyển các bài toán về nội dung **Bài toán 6.3** ta cần khai thác các dữ kiện của bài toán để chỉ ra được 2 điều kiện:

- + Đường thẳng đó biết được vectơ chỉ phương hoặc pháp tuyến.
- + Đường thẳng đó cách một điểm cho trước một khoảng tính được.

C. VÍ DỤ GỐC

Ví dụ : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Viết phương trình đường thẳng Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; -4)$ và cách điểm $M(2; 3)$ một khoảng bằng 1.

Giải

+ Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; -4)$ nên phương trình Δ có dạng:
 $3x - 4y + m = 0$

$$+ \text{ Ta có } d(M, \Delta) = 2 \Leftrightarrow \frac{|6 - 12 + m|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 1 \Leftrightarrow |m - 6| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 11 \\ m = 1 \end{cases}$$

Vậy Δ có phương trình $3x - 4y + 11 = 0$ hoặc $3x - 4y + 1 = 0$.

D. CÁC VÍ DỤ MỞ RỘNG

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(T): x^2 + y^2 - 9x - y + 18 = 0$ và hai điểm $A(1; 4)$, $B(-1; 3)$. Gọi C, D là hai

điểm thuộc (T) sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Viết phương trình đường thẳng CD .

Phân tích hướng giải:

Về mặt lý thuyết, để viết được phương trình của một đường thẳng ta cần 2 yếu tố. Trong ví dụ này dữ kiện $ABCD$ là hình bình hành giúp ta có được $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = (2; 1) \Rightarrow \overrightarrow{n_{CD}} = (1; -2)$ và đồng thời ta cũng có được $CD = AB = \sqrt{5}$, cộng thêm $C, D \in (T)$ ta sẽ suy ra được khoảng cách IH từ I tới CD . Như vậy lúc này việc viết phương trình CD được chuyển về Bài toán 6.3. Do đó ta có lời giải cho bài toán như sau:

Giải

+ Đường tròn (T) có tâm $I\left(\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và

bán kính $R = ID = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

+ Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = (2; 1)$, suy ra CD có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2)$

Suy ra phương trình CD có dạng: $x - 2y + m = 0$

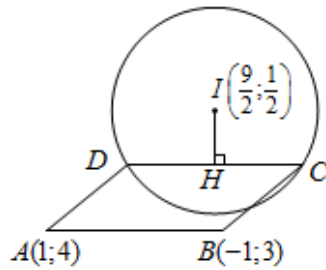
+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên CD , khi đó :

$$DH = \frac{DC}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Suy ra } IH = \sqrt{ID^2 - DH^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$+ \text{ Mặt khác } d(I, DC) = IH \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{9}{2} - 1 + m\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow |2m + 7| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -6 \end{cases}$$

Vậy phương trình CD là : $x - 2y - 1 = 0$ hoặc $x - 2y - 6 = 0$.



Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết đường cao hạ từ đỉnh A có phương trình $x + 2y - 2 = 0$, khoảng cách từ tâm $I(0; 2)$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đến đường thẳng BC bằng $2\sqrt{5}$, đường thẳng đi qua đỉnh B có phương trình $x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết A, B đều có tọa độ nguyên.

Phân tích hướng giải:

* Với dữ kiện đường cao hạ từ đỉnh A có phương trình $x + 2y - 2 = 0$, giúp ta suy ra được vecto pháp tuyến của BC . Khi đó việc viết phương trình BC được giải quyết theo nội dung của **Bài toán 6.3**.

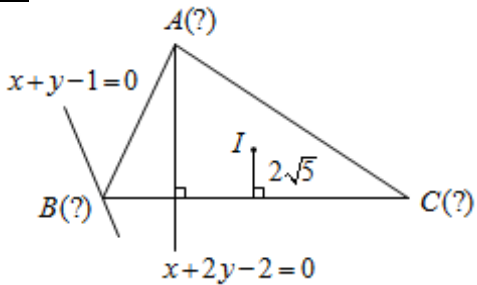
* Điểm B lúc này là giao điểm của hai đường thẳng đã biết phương trình nên ta sẽ tìm được tọa độ điểm B

* A, C đều nằm trên các đường thẳng đã biết phương trình và cùng cách I một khoảng xác định là IB . Nghĩa là A, C sẽ tìm được tọa độ nhờ góc nhìn của **Bài toán 1**. Do đó ta có lời giải chi tiết sau:

Giải

+ Vì BC vuông góc với đường thẳng $x + 2y - 2 = 0$ nên có vecto pháp tuyến $\vec{n}_{BC} = (2; -1)$

Do đó phương trình BC có dạng:
 $2x - y + m = 0$



+ Theo giả thiết ta có:

$$d(I, BC) = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|m-2|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |m-2| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 12 \\ m = -8 \end{cases}$$

+ Với $m = 12$, suy ra BC có phương trình: $2x - y + 12 = 0$

Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{11}{3} \\ y = \frac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow B\left(-\frac{11}{3}; \frac{14}{3}\right) \text{ (loại)}$$

Với $m = -8$, suy ra BC có phương trình: $2x - y - 8 = 0$

Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow B(3; -2)$$

+ Vì điểm A thuộc đường thẳng $x + 2y - 2 = 0$ và $C \in BC$ nên gọi

$$\begin{cases} A(2-2a; a) \\ C(c; 2c-8) \end{cases} \text{ với } a \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Khi đó } IA = IC = IB = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = 25 \\ IC^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-2a)^2 + (a-2)^2 = 25 \\ c^2 + (2c-10)^2 = 25 \end{cases}$$

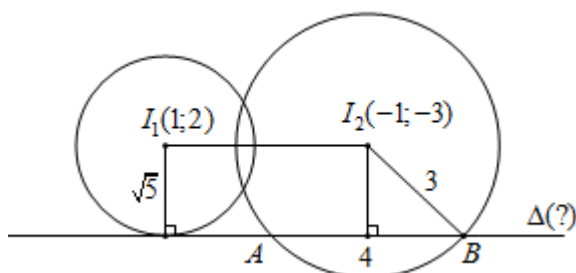
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 - 12a - 17 = 0 \\ c^2 - 8c + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{17}{5} \\ c = 3 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(4; -1) \\ A\left(-\frac{24}{5}; \frac{17}{5}\right) \\ C(3; -2) \equiv B \\ C(5; 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(4; -1) \\ C(5; 2) \end{cases} \quad (\text{vì } A$$

có tọa độ nguyên)

Vậy $A(4; -1)$, $B(3; -2)$ và $C(5; 2)$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường tròn $(C_1): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ và $(C_2): (x+1)^2 + (y+3)^2 = 9$. Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc với (C_1) và cắt (C_2) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 4$.

Giải



+ Ta có (C_1) có tâm $I_1(1; -2)$, bán kính $R_1 = \sqrt{5}$ và (C_2) có tâm $I_2(-1; -3)$, bán kính $R_2 = 3$

$$+ \text{ Ta có: } \begin{cases} d(I_1, \Delta) = R_1 = \sqrt{5} \\ d(I_2, \Delta) = \sqrt{R_2^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow d(I_1, \Delta) = d(I_2, \Delta)$$

Suy ra $\Delta // I_1I_2$ hoặc Δ đi qua trung điểm $M\left(0; -\frac{5}{2}\right)$ của I_1I_2 .

Vì M nằm trong (C_1) và Δ tiếp xúc với (C_1) nên Δ đi qua $M\left(0; -\frac{5}{2}\right)$ là

không thỏa mãn

Do đó $\Delta // I_1I_2$, suy ra phương trình Δ có dạng: $x - 2y + m = 0$

$$+ \text{ Ta có } d(I_1, \Delta) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|5+m|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |5+m| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -10 \end{cases}$$

Vậy phương trình Δ cần lập là: $x - 2y = 0$ hoặc $x - 2y - 10 = 0$.

Bài toán 6.4

A. NỘI DUNG BÀI TOÁN 6.4

Viết phương trình đường thẳng Δ biết phương của Δ (biết chỉ vector phương hoặc vector pháp tuyến) và thỏa mãn điều kiện () cho trước.*

B. CÁCH GIẢI CHUNG

$$\vec{n}_\Delta = (a; b) \longrightarrow \Delta: ax + by + m = 0 \xrightarrow{(*)} f(m) = 0 \longrightarrow m \longrightarrow \Delta$$

Giải thích chi tiết:

+ Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\Delta = (a; b)$, khi đó phương trình Δ có dạng $\Delta: ax + by + m = 0$

+ Điều kiện (*) giúp ta thiết lập được phương trình $f(m) = 0$ (phương trình chứa ẩn m). Giải phương trình này ta tìm được m và suy ra được phương trình đường thẳng Δ .

Nhận xét:

Như vậy để chuyển các bài toán về nội dung **Bài toán 6.4** ta cần khai thác các dữ kiện của bài toán để chỉ ra được 2 điều kiện:

- + Đường thẳng đó biết được vectơ chỉ phương hoặc pháp tuyến.
- + Đường thẳng đó thỏa mãn một điều kiện (*) và cần nghĩa dữ kiện này để thiết lập được phương trình chứa ẩn chưa biết liên quan tới đường thẳng cần viết

C. VÍ DỤ GỐC

Ví dụ : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Viết phương trình đường thẳng Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2)$ và cắt đường thẳng Δ' có phương trình $x - 3y + 2 = 0$ tại điểm M sao cho $OM = \sqrt{2}$.

Giải

+ Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2)$ nên phương trình Δ có dạng: $x + 2y + m = 0$

+ Vì $\Delta \cap \Delta' = \{M\}$, nên tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+2y+m=0 \\ x-3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{3m+4}{5} \\ y=\frac{2-m}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{3m+4}{5}; \frac{2-m}{5}\right)$$

$$+ \text{ Ta có } OM = \sqrt{2} \Leftrightarrow OM^2 = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{3m+4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2-m}{5}\right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-3 \end{cases}$$

Vậy Δ có phương trình $x+2y+1=0$ hoặc $x+2y-3=0$.

D. CÁC VÍ DỤ MỞ RỘNG

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-1;2), B(4;-3)$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng Δ' , đồng thời khoảng cách từ B đến đường thẳng Δ bằng ba lần khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ . Biết đường thẳng $\Delta': 3x-5y+2=0$.

Phân tích hướng giải:

Ở ví dụ 1, ta nhận thấy các dữ kiện trong bài toán khá đơn giản để ta “cắt nghĩa” chính xác. Cụ thể:

Với $\Delta \perp \Delta' \Rightarrow \vec{n}_{\Delta} = \vec{u}_{\Delta'} = (5;3)$ giúp ta viết được phương trình Δ theo góc nhìn của **bài toán 6.4**, khi điều kiện (*) trong bài toán là $d(B, \Delta) = 3d(A, \Delta)$. Sau đây là lời giải chi tiết:

Giải

+ Vì $\Delta \perp \Delta'$, suy ra Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{\Delta} = \vec{u}_{\Delta'} = (5;3)$.

+ Khi đó phương trình Δ có dạng:
 $5x+3y+m=0$

+ Theo đề ra ta có:

$$d(B, \Delta) = 3d(A, \Delta) \Leftrightarrow \frac{|5 \cdot 4 + 3 \cdot (-3) + m|}{\sqrt{5^2 + 3^2}} = 3 \cdot \frac{|5 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + m|}{\sqrt{5^2 + 3^2}}$$

$$\Leftrightarrow |m+11| = 3|m+1| \Leftrightarrow \begin{cases} m+11 = 3(m+1) \\ m+11 = -3(m+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=4 \\ m=-\frac{7}{2} \end{cases}$$

+ Vậy Δ có phương trình $5x + 3y + 4 = 0$ hoặc $5x + 3y - \frac{7}{2} = 0$.

Nhận xét :

Ở ví dụ 1, việc cắt nghĩa bài toán để có được vecto pháp tuyến của Δ là khá đơn giản khi đề bài cho $\Delta \perp \Delta'$ và điều kiện (*) của bài toán cũng không hề khó khi ta có luôn $d(B, \Delta) = 3d(A, \Delta)$. Nếu các dữ kiện trên được “giấu” bởi một hình thức tiếp cận khác thì bài toán sẽ trở nên phức tạp hơn. Các bạn sẽ thấy rõ điều này qua Ví dụ thứ 2 sau:

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(4;3)$, đường phân giác trong góc A có phương trình $x - y - 1 = 0$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(2; \frac{3}{2}\right)$. Viết phương trình cạnh BC , biết diện tích tam giác ABC bằng hai lần diện tích tam giác IBC .

Phân tích hướng giải:

Ở ví dụ này khi đọc đề toán, gần như bạn sẽ không thấy có mối liên quan gì tới Ví dụ 1 mà ta vừa làm. Song thực ra nội dung của hai ví dụ này là như nhau, có chăng chỉ là sự khác biệt trong hình thức phát biểu của bài toán. Ta sẽ phân tích rõ để thấy điều này:

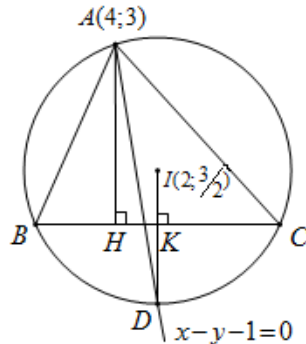
* Bài toán cho biết tâm $I\left(2; \frac{3}{2}\right)$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tọa độ điểm $A(4;3)$. Điều này giúp ta tìm được tọa độ điểm D là giao điểm thứ hai của đường phân giác trong góc A với đường tròn (có thể nhìn theo góc nhìn của **Bài toán 1** hoặc nó là giao của đường thẳng và đường tròn). Như vậy khi đó ta sẽ xác định được vecto pháp tuyến của BC , khi $BC \perp ID$ (giống dữ kiện ở ví dụ 1).

* $S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta IBC} \Leftrightarrow d(A, BC) = 2d(I, BC)$ (tương tự dữ kiện ở ví dụ 1). Như vậy lúc này **Bài toán 6.4** sẽ giúp ta viết được phương trình BC . Do đó ta có lời giải chi tiết sau:

Giải

+ Ta có $IA = \frac{5}{2}$, suy ra phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có dạng:

$$(x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$



+ Gọi D là giao điểm thứ hai của đường phân giác trong góc A với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ (x - 2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ 2x^2 - 9x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(4; 3) \equiv A \\ D\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow D\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

+ Vì AD là phân giác trong của góc A nên D là điểm chính giữa của cung BC nên $DC = DB$

Suy ra ID là đường trung trực của $BC \Rightarrow ID \perp BC$ hay đường thẳng BC nhận $\overrightarrow{DI} = \left(\frac{3}{2}; 2\right) = \frac{1}{2}(3; 4)$ làm vectơ pháp tuyến. Khi đó phương trình BC có dạng: $3x + 4y + m = 0$

+ Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, I lên BC , khi đó:

$$S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle IBC} \Leftrightarrow AH = 2IK \Leftrightarrow d(A, BC) = 2d(I, BC)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|24 + m|}{5} = 2 \cdot \frac{|12 + m|}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -16 \end{cases}$$

Vậy phương trình cạnh BC là: $3x + 4y = 0$ hoặc $3x + 4y - 16 = 0$.

Ví dụ 3 (D – 2011 – NC). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(1; 0)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm M và N sao cho tam giác AMN vuông cân tại A .

Phân tích hướng giải:

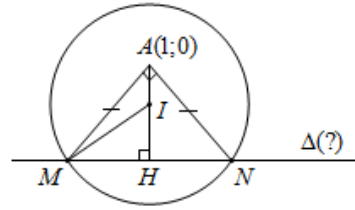
* Khi viết phương trình đường thẳng thường ta hay đặt ra câu hỏi “với những dữ kiện cho trong bài toán liệu ta có thể cắt nghĩa để tìm được vectơ pháp tuyến hoặc chỉ phương của đường thẳng đó không?”. Ở ví dụ này tam giác AMN cân tại A và $IM = IN = R$ giúp ta suy ra được $IA \perp MN$ hay ta sẽ tìm được vectơ pháp tuyến của Δ .

* Dữ kiện còn lại của bài toán “tam giác AMN vuông” chính là điều kiện (*) theo cách nhìn của **Bài toán 6.4**. Chúng ta sẽ cắt nghĩa dữ kiện này theo 2 cách ở phần lời giải chi tiết sau:

Giải

+ Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$

và bán kính $R = \sqrt{10}$; $\overrightarrow{IA} = (0;2)$



+ Ta có $\begin{cases} IM = IN = R \\ AM = AN \end{cases} \Rightarrow MN \perp AI$, suy ra phương trình MN hay Δ có

dạng: $y = m$

Cách 1:

$$\text{Gọi } AI \cap \Delta = \{H\} \Rightarrow \begin{cases} IH = d(I, \Delta) = |m+2| \\ MH = AH = d(A, \Delta) = |m| \end{cases}$$

Xét tam giác IHM ta có:

$$IH^2 + MH^2 = R^2 \Leftrightarrow (m+2)^2 + m^2 = 10 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$$

Vậy Δ có phương trình $y = 1$ hoặc $y = -3$.

Cách 2:

Hoành độ M, N là nghiệm của phương trình:

$$x^2 + m^2 - 2x + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + m^2 + 4m - 5 = 0 \quad (*)$$

(*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi $\Delta' = -m^2 - 4m + 6 > 0$ (2*)

$$\text{Khi đó } M(x_1; m), N(x_2; m) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (x_1 - 1; m) \\ \overrightarrow{AN} = (x_2 - 1; m) \end{cases} \text{ với } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = m^2 + 4m - 5 \end{cases}$$

$$AM \perp AN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) + m^2 = 0$$

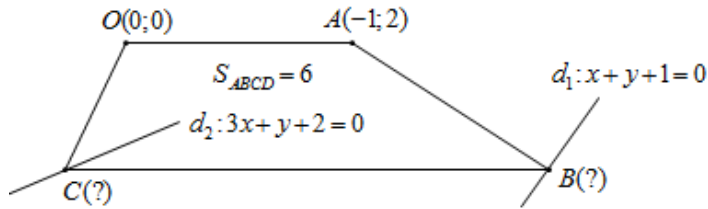
$$\Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + m^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 - 2 + m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn (2*))}$$

Vậy Δ có phương trình $y = 1$ hoặc $y = -3$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $OABC$ ($OA \parallel BC$) có diện tích bằng 6, đỉnh $A(-1;2)$. Đỉnh B và C lần lượt thuộc các đường thẳng $d_1: x + y + 1 = 0$ và $d_2: 3x + y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C .

Giải



+ Ta có phương trình $OA: 2x + y = 0$

Do $OA \parallel BC$ nên phương trình BC có dạng: $2x + y + m = 0$ (với $m \neq 0$)

+ Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y + m = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - m \\ y = m - 2 \end{cases} \Rightarrow B(1 - m; m - 2)$$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2x + y + m = 0 \\ 3x + y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 2 \\ y = 4 - 3m \end{cases} \Rightarrow C(m - 2; 4 - 3m)$$

+ Ta có :

$$S_{ABCD} = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(OA + BC) \cdot d(O, BC) = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[\sqrt{5} + \sqrt{20m^2 - 60m + 45} \right] \cdot \frac{|m|}{\sqrt{5}} = 6$$

$$\Leftrightarrow (1 + |2m - 3|)|m| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 - 2m - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} 0 < m < \frac{3}{2} \\ m^2 - 2m + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} m \geq \frac{3}{2} \\ m^2 - m - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 - \sqrt{7} \\ m = 3 \end{cases}$$

Vậy $B(-2; 1), C(1; -5)$ hoặc $B(\sqrt{7}; -1 - \sqrt{7}), C(-1 - \sqrt{7}; 1 + 3\sqrt{7})$.

E. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$. Viết phương trình các tiếp tuyến Δ của (C) , biết rằng tiếp tuyến có hệ số góc bằng 1.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$. Đường tròn (C') tâm $I(2;2)$ cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$. Viết phương trình đường thẳng AB .

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C_2): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 16$ và $(C_1): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C_1) tại hai điểm A và B , cắt (C_2) tại hai điểm C và D thỏa mãn $AB = 2\sqrt{7}$ và $CD = 8$.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(3;3)$ và $I(2;1)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp. Đường phân giác trong của góc nhọn A có phương trình $x - y = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC , biết $BC = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ và điểm $A(1;0)$. Gọi M, N là hai điểm trên đường tròn (C) sao cho tam giác AMN vuông cân tại A . Viết phương trình đường thẳng MN .

F. GIẢI BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1.

+ Đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $R = 3$.

+ Đường thẳng Δ có hệ số góc bằng 1, nên có dạng:

$$y = x + m \Leftrightarrow x - y + m = 0$$

+ Δ là tiếp tuyến của (C) nên ta có:

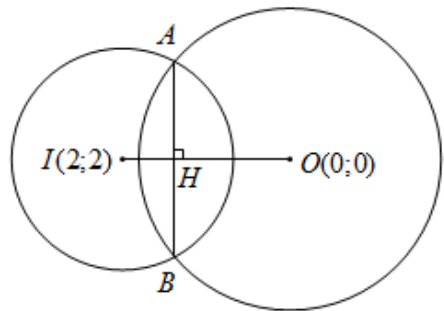
$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|2 + 1 + m|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3 \Leftrightarrow |m + 3| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3\sqrt{2} - 3 \\ m = -3\sqrt{2} - 3 \end{cases}$$

+ Vậy Δ có phương trình $x - y + 3\sqrt{2} - 3 = 0$ hoặc $x - y - 3\sqrt{2} - 3 = 0$.

Bài 2.

+ Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R = OA = 1$.

+ Vì (C) cắt (C') tại hai điểm A, B nên $AB \perp OI$



$\Rightarrow$ vecto pháp tuyến của AB là: $\vec{n} = \overrightarrow{OI} = (2; 2) = 2(1; 1)$.

Do đó phương trình AB có dạng: $x + y + m = 0$

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên $AB \Rightarrow HA = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{Suy ra } OH = \sqrt{OA^2 - HA^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

+ Ta có $d(O, AB) = IH \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |m| = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Vậy phương trình AB là: $x + y + 1 = 0$ hoặc $x + y - 1 = 0$.

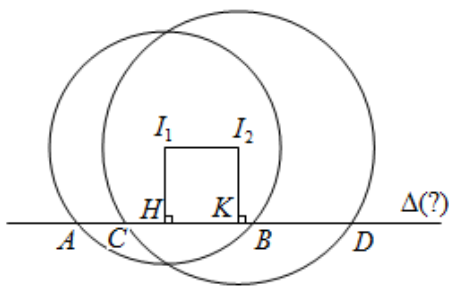
Bài 3.

+ Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1; 1)$

bán kính $R_1 = 4$; Đường tròn (C_2)

có tâm $I_2(2; -1)$ bán kính $R_2 = 4$

+ Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I_1, I_2 xuống Δ , khi đó:



$$\begin{cases} AH = \frac{AB}{2} = \sqrt{7} \\ CK = \frac{CD}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1H = \sqrt{I_1A^2 - AH^2} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{7})^2} = 3 \\ I_2K = \sqrt{I_2C^2 - CK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1H = I_2K = 3$$

Suy ra $\Delta // I_1I_2$ hoặc Δ đi qua trung điểm của I_1I_2 .

+ Ta có $I_1I_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} < 6 = I_1H + I_2K$, suy ra Δ không thể đi qua trung điểm của I_1I_2

Do đó $\Delta // I_1I_2 \Rightarrow$ vecto chỉ phương của Δ là $\vec{u} = \overrightarrow{I_1I_2} = (1; -2)$ hay vecto pháp tuyến của Δ là $\vec{n} = (2; 1)$

Khi đó phương trình Δ có dạng: $2x + y + m = 0$

+ Ta có $d(I_1, \Delta) = I_1H \Leftrightarrow \frac{|2+1+m|}{\sqrt{5}} = 3 \Leftrightarrow |m+3| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3\sqrt{5} - 3 \\ m = -3\sqrt{5} - 3 \end{cases}$

Vậy Δ có phương trình $2x + y + 3\sqrt{5} - 3 = 0$ hoặc $2x + y - 3\sqrt{5} - 3 = 0$.

Bài 4.

+ Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm I và bán kính $R = IA = \sqrt{5}$

nên có phương trình: $(T): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

+ Khi đó tọa độ giao điểm của đường phân giác trong góc A với (T) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=0 \\ x=y=3 \end{cases} \Rightarrow O(0;0) \text{ là giao điểm thứ hai.}$$

Do OA là phân giác trong của góc A nên $OI \perp BC$, suy ra $\vec{n}_{BC} = \vec{OI} = (2;1)$

Suy ra phương trình đường thẳng BC có dạng: $2x + y + m = 0$

Mặt khác OI vuông góc với BC tại trung điểm M của BC nên ta có:

$$IM = \sqrt{R^2 - CM^2} = \sqrt{5 - \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

+ Khi đó:

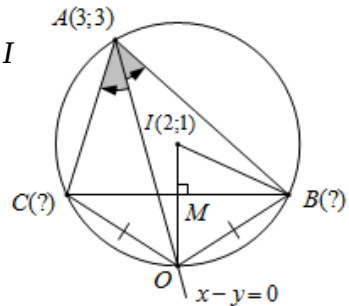
$$d(I, BC) = IM \Leftrightarrow \frac{|5+m|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BC: 2x+y-2=0 \\ C: 2x+y-8=0 \end{cases}$$

Mà góc $\widehat{BAC}$ nhọn nên hai điểm A và I sẽ cùng phía với đường thẳng BC do đó ta có phương trình đường thẳng BC thỏa mãn là: $2x + y - 2 = 0$

+ Suy ra tọa độ điểm B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ x=\frac{8}{5} \\ x=-\frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(0;2), C\left(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5}\right) \\ B\left(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5}\right), C(0;2) \end{cases}$$

Vậy $B(0;2), C\left(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5}\right)$ hoặc $B\left(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5}\right), C(0;2)$.



Chú ý:

- + Nếu góc $\widehat{BAC}$ nhọn thì hai điểm A và I sẽ cùng phía với đường thẳng BC còn nếu $\widehat{BAC}$ tù thì A và I sẽ khác phía với đường thẳng BC.
- + Ngoài cách giải trên các bạn có thể tham khảo thêm cách giải thứ hai ở **Bài 10** trong phần **Bài tập áp dụng** thuộc **Bài toán 5**.

Bài 5.

- + Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.

Phương trình IA: $x = 1$

Do tam giác AMN cân tại A nên $MN \perp IA$ nên phương trình MN có dạng: $y = m$

- + Khi đó phương trình hoành độ giao điểm của MN và (C) là:
 $x^2 - 2x + m^2 - 4m - 5 = 0$ (*)

Theo định lí Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = m^2 - 4m - 5 \end{cases}$$

Điều kiện để tồn tại M, N phân biệt là phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Tương đương $\Delta' = -m^2 + 4m + 6 > 0$ (2*)

- + Gọi $\begin{cases} M(x_1; m) \\ N(x_2; m) \end{cases}$ (với x_1, x_2 là nghiệm của (*)) $\Rightarrow \begin{cases} \overline{AM} = (x_1 - 1; m) \\ \overline{AN} = (x_2 - 1; m) \end{cases}$

Khi đó $\triangle AMN$ vuông tại A $\Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{AN} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) + m^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 + m^2 = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn (*))}$$

Vậy phương trình MN là $y = -1$ hoặc $y = 3$.

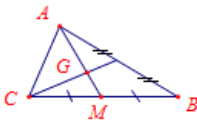
7. BÀI TOÁN 7

A. NỘI DUNG BÀI TOÁN 7

Tìm điểm dựa vào trung tuyến, đường cao, trung trực trong tam giác.

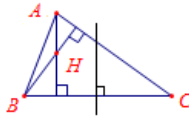
B. CÁCH GIẢI CHUNG

* Giao của 3 đường trung tuyến, đường cao, đường trung trực lần lượt có tên gọi là trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.



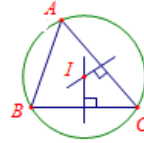
Trọng tâm G

Giao 3 (hoặc 2) đường trung tuyến



Trực tâm H

Giao 3 (hoặc 2) đường cao



Tâm đường tròn ngoại tiếp I

Giao 3 (hoặc 2) đường trung trực

* Khi bài toán có yếu tố trung tuyến ta cần khai thác dữ kiện bài toán bằng các chú ý sau:

+ Khi M là trung điểm của BC thì
$$\begin{cases} x_B + x_C = 2x_M \\ y_B + y_C = 2y_M \end{cases} \quad (\text{nghĩa là dữ kiện này luôn}$$

giúp ta có được hai phương trình)

+ Khi M là trung điểm của AB ở đó có hai điểm đang thuộc hai đường thẳng, còn điểm thứ ba đã biết (hoặc có thể biểu diễn ẩn theo hai điểm kia) thì ta luôn tìm được tọa độ hai điểm đó (quay về **Bài toán 5.2**).

+ Khi G là trọng tâm tam giác ABC thì:
$$\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases}$$

+ Khi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm tam giác ABC thì $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM}$ (quay về **Bài toán 5.1**).

* Khi bài toán có yếu tố đường cao ta cần khai thác dữ kiện bài toán bằng các chú ý sau:

+ $AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

+ Biết phương trình một đường cao nghĩa là cho ta biết phương (vecto pháp tuyến và vecto chỉ phương) của cạnh đối diện tương ứng.

+ Đường cao luôn song song với đường trung trực của cạnh đối diện. Nghĩa là biết phương trình của một trong hai đường trên ta sẽ biết được phương của đường còn lại.

* Khi bài toán có yếu tố trung trực (thực chất là sự kết hợp của yếu tố trung tuyến và đường cao) ta sẽ khai thác được đồng 2 giả thiết về trung điểm (trung tuyến) và tính vuông góc (đường cao).

* Trục tâm H , trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp I của một tam giác được liên hệ với nhau qua hệ thức vectơ: $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI}$

(Đường thẳng đi qua H, G, I còn được gọi là đường thẳng $O - Ie$).

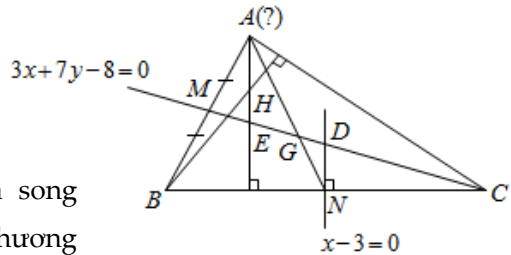
C. VÍ DỤ GỐC

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trực tâm $H(2;0)$, phương trình đường trung tuyến $CM: 3x + 7y - 8 = 0$, phương trình đường trung trực của BC là $x - 3 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A .

Giải

+ Gọi N là trung điểm của BC ; CM cắt AH và đường thẳng trung trực của BC lần lượt tại D, E .

+ Ta có AH đi qua $H(2;0)$ và song song với $DN: x - 3 = 0$ nên có phương trình $x - 2 = 0$



Khi đó tọa độ điểm E là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ 3x + 7y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow E\left(2; \frac{2}{7}\right)$$

Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 3 = 0 \\ 3x + 7y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow D\left(3; -\frac{1}{7}\right)$

+ $AE \parallel DN$ nên áp dụng định lí Ta - let, ta được:

$$\frac{EG}{GD} = \frac{AG}{GN} = 2 \Rightarrow EG = 2GD \Rightarrow ED = 3GD \Rightarrow \overrightarrow{ED} = 3\overrightarrow{GD}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2 = 3(3 - x_G) \\ -\frac{1}{7} - \frac{2}{7} = 3\left(-\frac{1}{7} - y_G\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{8}{3} \\ y_G = 0 \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{8}{3}; 0\right)$$

+ Gọi $\begin{cases} A(2; a) \in AH \\ C(-2 + 7c; 2 - 3c) \in CM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 3x_G - (x_A + x_C) = 8 - 7c \\ y_B = 3y_G - (y_A + y_C) = 3c - a - 2 \end{cases}$
 $\Rightarrow B(8 - 7c; 3c - a - 2)$

Suy ra $\overrightarrow{BC} = (14c - 10; a - 6c + 4)$. Ta có $\overrightarrow{u_{AH}} = (0; 1)$

Khi đó $BC \perp AH \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \Leftrightarrow a - 6c + 4 = 0 \Leftrightarrow a = 6c - 4$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} A(2; 6c-4) \\ B(8-7c; -3c+2) \\ C(-2+7c; 2-3c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (7c-4; -9c+6) \\ \overrightarrow{BH} = (7c-6; 3c-2) \end{cases}$$

+ Mặt khác:

$$AC \perp BH \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow (7c-4)(7c-6) + (-9c+6)(3c-2) = 0$$

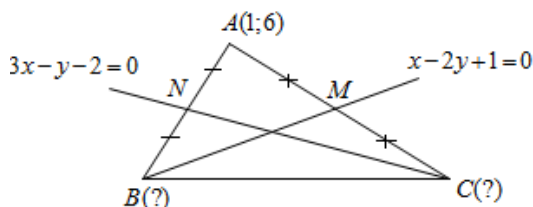
$$\Leftrightarrow 11c^2 - 17c + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c = \frac{6}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2; 2) \\ A\left(2; -\frac{8}{11}\right) \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } A(2; 2) \text{ hoặc } A\left(2; -\frac{8}{11}\right).$$

D. CÁC VÍ DỤ MỞ RỘNG

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC, biết $A(1; 6)$ và hai đường trung tuyến nằm trên hai đường thẳng có phương trình là $x - 2y + 1 = 0$ và $3x - y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC.

Giải



+ Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Do A không thuộc các đường trung tuyến cho trong bài nên giả sử phương trình $BN: x - 2y + 1 = 0$ và $CM: 3x - y - 2 = 0$.

$$+ \text{ Gọi } \begin{cases} B(2b-1; b) \in BN \\ C(c; 3c-2) \in CM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\left(b; \frac{b+6}{2}\right) \\ N\left(\frac{c+1}{2}; \frac{3c+4}{2}\right) \end{cases} \quad (\text{vì } M, N \text{ lần lượt là trung điểm}$$

của AB, AC)

$$+ \text{ Do } \begin{cases} M \in CM \\ N \in BN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b - \frac{b+6}{2} - 2 = 0 \\ \frac{c+1}{2} - 2 \cdot \frac{3c+4}{2} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b = 10 \\ 5c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(3; 2) \\ C(-1; -5) \end{cases}$$

+ Vậy $B(3; 2)$ và $C(-1; -5)$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(-1;2)$. Trung tuyến CM ($M \in AB$) và đường cao BH ($H \in AC$) lần lượt có phương trình $5x+7y-20=0$ và $5x-2y-4=0$. Viết phương trình các cạnh BC .

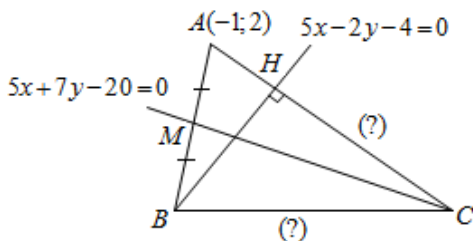
Giải

+ Phương trình

$$BH: \begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + 5t \end{cases} \Rightarrow B(2t; -2 + 5t)$$

Do M là trung điểm của AB

$$\Rightarrow M\left(\frac{2t-1}{2}; \frac{5t}{2}\right)$$



+ Vì $M \in CM \Rightarrow 5 \cdot \frac{2t-1}{2} + 7 \cdot \frac{5t}{2} - 20 = 0 \Leftrightarrow 45t = 45 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow B(2;3)$

+ AC đi qua $A(-1;2)$ vuông góc với BH nên có phương trình:

$$2x + 5y - 8 = 0$$

Khi đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + 5y - 8 = 0 \\ 5x + 7y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4;0)$$

+ Khi đó BC đi qua hai điểm $B(2;3), C(4;0)$ nên có phương trình:

$$3x + 2y - 12 = 0$$

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A và M là trung điểm của AB . Đường thẳng CM có phương trình $y-3=0$ và $K\left(-\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$ là trọng tâm của tam giác ACM . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC có phương trình $x+y-2=0$.

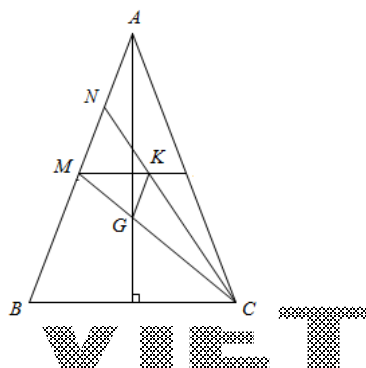
Giải

+ Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .

Do ABC cân tại A nên tọa độ

điểm G là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y - 3 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow G(-1;3)$$



+ Gọi MK đi qua $K\left(-\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$ và vuông góc với $AG: x + y - 2 = 0$ nên có phương trình: $x - y + 3 = 0$

Khi đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow M(0; 3)$

+ Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có:

$$\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 0 = 3(-1 - 0) \\ y_C - 3 = 3(3 - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -3 \\ y_C = 3 \end{cases} \Rightarrow C(-3; 3)$$

+ Do K là trọng tâm tam giác ACM nên:

$$\begin{cases} x_A = 3x_K - (x_C + x_M) = -2 - (-3 + 0) = 1 \\ y_A = 3y_K - (y_C + y_M) = 7 - (3 + 3) = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1)$$

Vì M là trung điểm của AB nên suy ra $B(-1; 5)$

Vậy $A(1; 1), B(-1; 5), C(-3; 3)$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết trực tâm $H(1; 0)$, chân đường cao hạ từ đỉnh B là $K(0; 2)$, trung điểm cạnh AB là điểm $M(3; 1)$.

Giải

+ Ta có AC đi qua $K(0; 2)$ và vuông góc với HK nên nhận $\overrightarrow{KH} = (1; -2)$ làm vecto pháp tuyến

Do đó AC có phương trình:

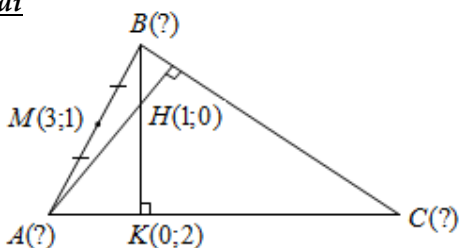
$$x - 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0$$

+ BK đi qua $H(1; 0)$ nhận $\overrightarrow{n_{KH}} = (2; 1)$ làm vecto pháp tuyến nên có phương trình: $2(x - 1) + y = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0$

+ Gọi $\begin{cases} A(2a - 4; a) \in AC \\ B(b; 2 - 2b) \in BK \end{cases}$, khi đó $M(3; 1)$ là trung điểm của AB nên ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 4 + b = 6 \\ a + 2 - 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 10 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(4; 4) \\ B(2; -2) \end{cases}$$

+ Ta có BC đi qua $B(2; -2)$ nhận $\overrightarrow{HA} = (4; 3)$ làm vecto pháp tuyến nên có phương trình: $4(x - 2) + 3(y + 2) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 2 = 0$



Khi đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 4x + 3y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{8}{11} \\ y = \frac{18}{11} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{8}{11}; \frac{18}{11}\right)$$

Vậy $A(4; 4), B(2; -2), C\left(-\frac{8}{11}; \frac{18}{11}\right)$.

Ví dụ 5 (D – 2009 – CB). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $M(2; 0)$ là trung điểm của cạnh AB . Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là $7x - 2y - 3 = 0$ và $6x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AC .

Giải

+ Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 7x - 2y - 3 = 0 \\ 6x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(1; 2)$$

+ Do $M(2; 0)$ là trung điểm của $AB \Rightarrow B(3; -2)$.

+ BC đi qua $B(3; -2)$ và vuông góc với đường thẳng $6x - y - 4 = 0$ nên nhận $\vec{n} = (1; 6)$ làm vecto pháp tuyến.

Do đó BC có phương trình: $x - 3 + 6(y + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 6y + 9 = 0$

Tọa độ trung điểm N của BC thỏa mãn hệ:

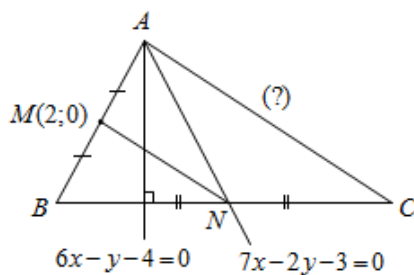
$$\begin{cases} x + 6y + 9 = 0 \\ 7x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow N\left(0; -\frac{3}{2}\right)$$

+ Do MN là đường trung bình của $\triangle ABC$

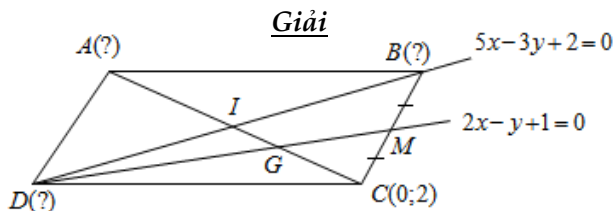
$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN} = (-4; -3) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AC}} = (3; -4).$$

Khi đó phương trình $AC: 3x - 4y + 5 = 0$.

(Sau khi tìm được $N\left(0; -\frac{3}{2}\right)$ các bạn có thể suy ra tọa độ $C(-3; -1)$ và suy ra phương trình AC).



Ví dụ 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD , phương trình đường thẳng DG là $2x - y + 1 = 0$, phương trình đường thẳng BD là $5x - 3y + 2 = 0$ và điểm $C(0; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành $ABCD$.



+ Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 5x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow D(-1; -1)$

+ Gọi $DG \cap BC = \{M\}$, suy ra M là trung điểm của BC

Do $M \in DG \Rightarrow M(m; 2m + 1) \Rightarrow B(2m; 4m)$

+ Mặt khác $B \in BD \Leftrightarrow 5.2m - 3.4m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow B(2; 4)$

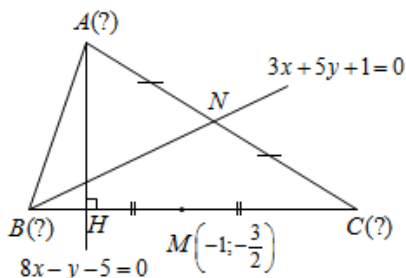
Suy ra trung điểm của BD có tọa độ $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Do I cũng là trung điểm của $AC \Rightarrow A(1; 1)$ (có thể suy ra điểm A nhờ hệ thức $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$)

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có phương trình đường trung tuyến BN và đường cao AH lần lượt có phương trình $3x + 5y + 1 = 0$ và $8x - y - 5 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết $M\left(-1; -\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của cạnh BC .

Giải

+ BC đi qua $M\left(-1; -\frac{3}{2}\right)$ và vuông góc với AH nên nhận $\overrightarrow{u_{AH}} = (1; 8)$ làm vectơ chỉ phương.



Do đó BC có phương trình: $x + 1 + 8\left(y + \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x + 8y + 13 = 0$

+ Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+8y+13=0 \\ 3x+5y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow B(3;-2)$$

+ Do M là trung điểm của BC nên suy ra $C(-5;-1)$

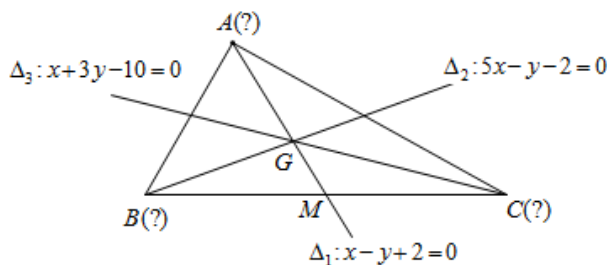
+ Gọi $A(a;8a-5) \in AH \Rightarrow N\left(\frac{a-5}{2}; 4a-3\right)$: là trung điểm của AC .

$$\text{Ta có } N \in BN \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{a-5}{2} + 5 \cdot (4a-3) + 1 = 0 \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow A(1;3)$$

Vậy $A(1;3), B(3;-2), C(-5;-1)$.

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có diện tích bằng 24 và phương trình các đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B, C lần lượt là $\Delta_1: x-y+2=0$, $\Delta_2: 5x-y-2=0$, $\Delta_3: x+3y-10=0$. Tìm tọa độ A, B, C .

Giải



+ Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y+2=0 \\ 5x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow G(1;3)$$

+ Vì $\begin{cases} B \in \Delta_2 \\ C \in \Delta_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(b;5b-2) \\ C(10-3c;c) \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{b-3c+10}{2}; \frac{5b+c-2}{2}\right)$: là trung điểm của BC

$$\text{Ta có } M \in \Delta_1 \Rightarrow \frac{b-3c+10}{2} - \frac{5b+c-2}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow b+c=4 \Leftrightarrow c=4-b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B(b;5b-2) \\ C(3b-2;4-b) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (2b-2; 6-6b) = (2b-2)(1;-3)$$

$$(\text{với } b \neq 1) \Rightarrow \overrightarrow{n_{BC}} = (3;1)$$

Khi đó BC đi qua $B(b;5b-2)$ và có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_{BC}} = (3;1)$ nên BC có phương trình: $3(x-b) + (y-5b+2) = 0 \Leftrightarrow 3x+y+2-8b=0$

$$+ \text{ Ta có } S_{ABC} = 3S_{GBC} \Leftrightarrow 24 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot d(G, BC) \cdot BC \Leftrightarrow d(G, BC) \cdot BC = 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3+3+2-8b|}{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{(2b-2)^2 + (6b-6)^2} = 16 \Leftrightarrow (b-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=2 \end{cases}$$

$$\text{Với } b=0 \Rightarrow \begin{cases} B(0;-2) \\ C(-2;4) \end{cases} \Rightarrow A(5;7) \text{ (do } G(1;3) \text{ là trọng tâm tam giác } ABC)$$

$$\text{Với } b=2 \Rightarrow \begin{cases} B(2;8) \\ C(4;2) \end{cases} \Rightarrow A(-3;-1) \text{ (do } G(1;3) \text{ là trọng tâm tam giác } ABC)$$

Vậy $A(5;7), B(0;-2), C(-2;4)$ hoặc $A(-3;-1), B(2;8), C(4;2)$.

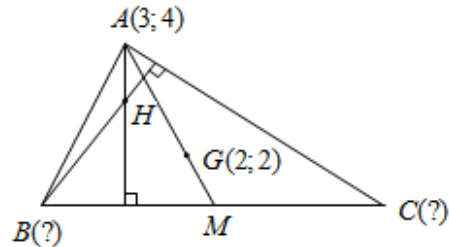
Ví dụ 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(3;4)$, trọng tâm $G(2;2)$, trực tâm $H\left(\frac{23}{9}; \frac{26}{9}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC .

Giải

+ Gọi $M(x;y)$ là trung điểm của BC , khi đó

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3=2(x-2) \\ 2-4=2(y-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; 1\right)$$



+ BC đi qua $M\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ và vuông góc với AH nên nhận

$$\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{4}{9}; -\frac{10}{9}\right) = -\frac{2}{9}(2;5) \text{ làm vectơ pháp tuyến.}$$

$$\text{Do đó } BC \text{ có phương trình: } 2\left(x - \frac{3}{2}\right) + 5(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 5y - 8 = 0$$

+ Gọi $B(4+5t; -2t) \in BC \Rightarrow C(-1-5t; 2+2t)$ (do $M\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ là trung điểm của BC)

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \overrightarrow{HB} = \left(\frac{13+45t}{9}; -\frac{18t+26}{9} \right) \\ \overrightarrow{CA} = (5t+4; 2-2t) \end{cases}, \text{ khi đó } H \text{ là trực tâm của tam giác}$$

ABC nên ta có:

$$\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \Leftrightarrow (5t+4) \cdot \frac{13+45t}{9} + (2t-2) \cdot \frac{18t+26}{9} = 0 \Leftrightarrow t^2 + t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -1 \end{cases}$$

+ Với $t = 0 \Rightarrow B(4;0), C(-1;2)$; với $t = -1 \Rightarrow B(-1;2), C(4;0)$

Vậy $B(4;0), C(-1;2)$ hoặc $B(-1;2), C(4;0)$.

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;1)$, trực tâm $H(14;-7)$, đường trung tuyến kẻ từ đỉnh B có phương trình $9x - 5y - 7 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C .

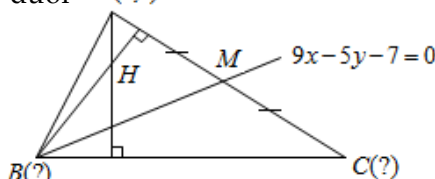
Giải

+ Gọi M là trung điểm của BC

Do phương trình BM viết dưới $A(2;1)$

$$\text{dạng tham số } \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = -5 + 9t \end{cases}$$

$$\text{nên gọi } \begin{cases} B(-2+5b; -5+9b) \\ M(-2+5m; -5+9m) \end{cases}$$



+ Do M là trung điểm của

$$BC \Rightarrow C(10m-6; 18m-11) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (10m-5b-4; 18m-9b-6)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AH} = (12; -8) = 4(3; -2).$$

$$\text{Khi đó: } AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(10m-5b-4) - 2(18m-9b-6) = 0 \Leftrightarrow b = 2m$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} B(10m-2; 18m-5) \\ C(10m-6; 18m-11) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HB} = (10m-16; 18m+2) \\ \overrightarrow{AC} = (10m-8; 18m-12) \end{cases}$$

+ Do H là trực tâm tam giác ABC nên ta có:

$$\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (10m-16) \cdot (10m-8) + (18m+2)(18m-12) = 0$$

$$\Leftrightarrow 106m^2 - 105m + 26 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{26}{53} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(3; 4), C(-1; -2) \\ B\left(\frac{154}{53}; \frac{203}{53}\right), C\left(-\frac{58}{53}; -\frac{115}{53}\right) \end{cases}$$

+ Vậy $B(3; 4), C(-1; -2)$ hoặc $B\left(\frac{154}{53}; \frac{203}{53}\right), C\left(-\frac{58}{53}; -\frac{115}{53}\right)$.

E. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(-1; -3)$, hai đường cao BH và CK lần lượt có phương trình $5x + 3y - 25 = 0$ và $3x + 8y - 12 = 0$. Hãy xác định tọa độ các đỉnh B và C .

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh $A(3; 4), C(8; 1)$. Gọi M là trung điểm của BC , E là giao điểm của BC và AM . Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành biết rằng $E(5; 2)$.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trọng tâm $G\left(\frac{4}{3}; 1\right)$, trung điểm BC là điểm $M(1; 1)$, phương trình đường thẳng chứa đường cao kẻ từ B là $x + y - 7 = 0$. Tìm tọa độ A, B, C .

Bài 4 (D – 2012 – CB). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là $x + 3y = 0$ và $x - y + 4 = 0$; đường thẳng BD đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC . Đường cao kẻ từ A , trung tuyến kẻ từ B , trung tuyến kẻ từ C lần lượt nằm trên các đường thẳng có phương trình $x + y - 6 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ và $x - 1 = 0$. Tìm tọa độ A, B, C .

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $C(-1; -2)$, đường trung tuyến kẻ từ A và đường cao kẻ từ B lần lượt có phương trình $5x + y - 9 = 0$ và $x + 3y - 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và B .

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , có trọng tâm $G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$, phương trình đường thẳng BC là $x - 2y - 4 = 0$ và phương trình đường thẳng BG là $7x - 4y - 8 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trọng tâm $G(-2;0)$, biết phương trình các cạnh AB và AC theo thứ tự là $4x + y + 14 = 0$ và $2x + 5y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

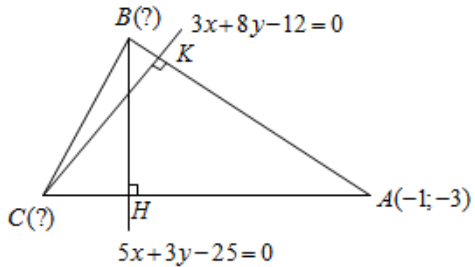
Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(-2;3)$. Đường cao CH nằm trên đường thẳng $2x + y - 7 = 0$ và đường trung tuyến BM nằm trên đường thẳng $2x - y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC .

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(-2;4)$. Phương trình đường trung trực cạnh BC , đường trung tuyến xuất phát từ C lần lượt là $x + 2y - 1 = 0$ và $x - 3y + 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC .

F. GIẢI BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1.

+ AB đi qua $A(-1;-3)$ và vuông góc với CK nên nhận $\overrightarrow{u_{CK}} = (8;-3)$ làm vecto pháp tuyến.



Do đó AC có phương trình: $8(x+1) - 3(y+3) = 0 \Leftrightarrow 8x - 3y - 1 = 0$

Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 8x - 3y - 1 = 0 \\ 5x + 3y - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(2;5)$$

+ AC đi qua $A(-1;-3)$ và vuông góc với BH nên nhận $\overrightarrow{u_{BH}} = (3;-5)$ làm vecto pháp tuyến.

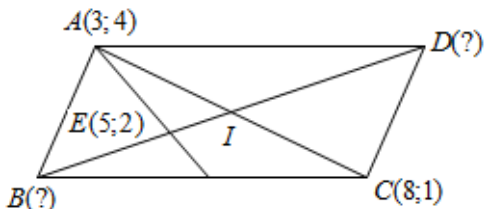
Do đó AC có phương trình: $3(x+1) - 5(y+3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5y - 12 = 0$

Khi đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x - 5y - 12 = 0 \\ 3x + 8y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4;0)$$

Bài 2.

+ Gọi $AC \cap BD = \{I\}$, khi đó I là trung điểm của $AC \Rightarrow I\left(\frac{11}{2}; \frac{5}{2}\right)$



+ Ta có E là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$\begin{cases} x_B = 3x_E - (x_A + x_C) = 4 \\ y_B = 3y_E - (y_A + y_C) = 1 \end{cases} \Rightarrow B(4;1)$$

+ Do I là trung điểm của $BD \Rightarrow D(7;4)$

Vậy $B(4;1), D(7;4)$.

Bài 3.

+ Ta có $\overrightarrow{GM} = \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$.

Gọi $A(a;b) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1-a; 1-b)$

Do G là trọng tâm tam giác

$$ABC \Rightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ 1-b = 3 \cdot 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow A(2;1)$$

+ AC đi qua $A(2;1)$ và vuông góc với đường cao kẻ từ B nên có phương trình: $x - y - 1 = 0$

+ Gọi $B(t; 7-t) \Rightarrow C(2-t; t-5)$ (do M là trung điểm của BC)

+ Ta có $C \in AC \Rightarrow 2-t - (t-5) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow \begin{cases} B(3;4) \\ C(-1;-2) \end{cases}$

Vậy $A(2;1), B(3;4), C(-1;-2)$.

Bài 4.

Vì $\{A\} = AC \cap AD$ nên xét hệ:

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(-3;1)$$

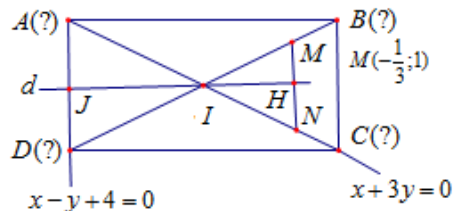
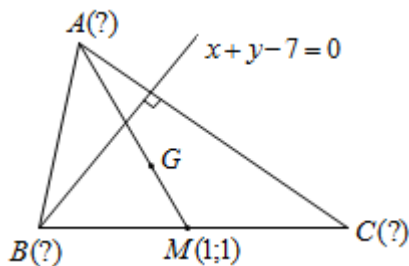
Phương trình của d' đi qua M song song AD có dạng:

$$x + \frac{1}{3} - (y-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 3y + 4 = 0$$

Gọi $\{N\} = d' \cap AC$ nên ta xét hệ: $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 3x - 3y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow N\left(-1; \frac{1}{3}\right)$

Gọi d là đường trung trực của AD cắt MN, AC, AD lần lượt tại H, I, J

$\Rightarrow H, I, J$ lần lượt là trung điểm $MN, AC, AD \Rightarrow H\left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right)$



Suy ra phương trình đường thẳng $d: \left(x + \frac{5}{4}\right) + \left(y - \frac{5}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$

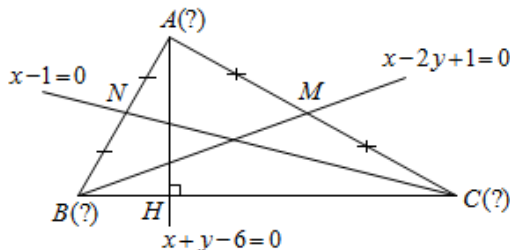
Ta có: $\{I\} = d \cap AC$ nên ta xét hệ: $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow I(0;0)$

$\Rightarrow C(3;-1)$ (I là trung điểm của AC) và $\{J\} = d \cap AD$ nên ta xét hệ:

$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow J(-2;2) \Rightarrow D(-1;3)$ (J là trung điểm của AD)

$\Rightarrow B(1;-3)$ (I là trung điểm của BD)

Bài 5.



+ Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , khi đó tọa độ điểm G là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1 \Rightarrow G(1;1)$$

$$+ \text{ Vì } \begin{cases} A \in AH \\ B \in BM \\ C \in CN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(a; 6-a) \\ B(2b-1; b) \\ C(1; c) \end{cases}$$

$$\text{khi đó: } \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 3 \\ a - b - c = 3 \end{cases} \quad (1)$$

+ Ta có $\overrightarrow{u_{AH}} = (1; -1), \overrightarrow{BC} = (2 - 2b; c - b)$, khi đó:

$$AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{AH}} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 2 - 2b - (c - b) = 0 \Leftrightarrow b + c = 2 \quad (2)$$

$$+ \text{ Từ (1) và (2) ta được hệ: } \begin{cases} a + 2b = 3 \\ a - b - c = 3 \\ b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -1 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(5;1) \\ B(-3;-1) \\ C(1;3) \end{cases}$$

Vậy $A(5;1), B(-3;-1), C(1;3)$.

Bài 6.

+ AC đi qua $C(-1;-2)$, vuông góc với đường thẳng $x+3y-5=0$ nên nhận $\vec{n} = (3;-1)$ làm vecto pháp tuyến.

Do đó AC có phương trình:

$$3(x+1)-(y+2)=0 \Leftrightarrow 3x-y+1=0$$

+ Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x-y+1=0 \\ 5x+y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow A(1;4)$$

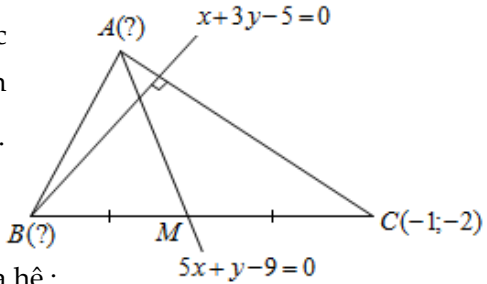
+ Gọi $B(5-3t;t)$, khi đó tọa độ trung điểm M của BC thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4-3t}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{t-2}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{4-3t}{2}; \frac{t-2}{2}\right)$$

+ Do M thuộc đường thẳng $5x+y-9=0$ nên ta có:

$$5 \cdot \frac{4-3t}{2} + \frac{t-2}{2} - 9 = 0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow B(5;0)$$

Vậy $A(1;4)$ và $B(5;0)$.



Bài 7.

+ Tọa độ điểm B thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 7x-4y-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow B(0;-2)$$

+ AG đi qua $G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ và vuông góc với BC (tam giác ABC cân tại đỉnh

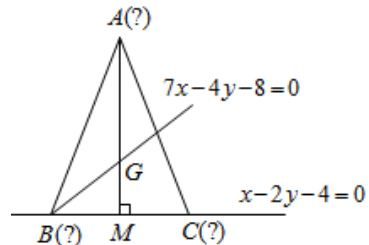
A) nên nhận $\overrightarrow{u_{BC}} = (2;1)$ làm vecto chỉ phương.

Do đó AG có phương trình: $2\left(x-\frac{4}{3}\right)+y-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow 2x+y-3=0$

+ Khi đó trung điểm M của BC là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x-2y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow M(2;-1)$$

Gọi $A(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2-x; -1-y)$. Mặt khác: $\overrightarrow{GM} = \left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$



Do G là trọng tâm tam giác

$$ABC \Rightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=2 \\ -1-y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow A(0;3)$$

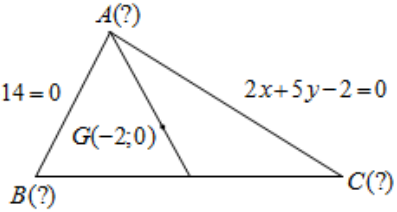
+ Suy ra $\begin{cases} x_C = 3x_G - (x_A + x_B) = 4 \\ y_C = 3y_G - (y_A + y_B) = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4;0)$

Vậy $A(0;3), B(0;-2), C(4;0)$.

Bài 8.

+ Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x + y + 14 = 0 \\ 2x + 5y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(-4;2)$$



+ Gọi $\begin{cases} B(b; -14 - 4b) \in AB \\ C(1 + 5c; -2c) \in AC \end{cases}$

+ Do $G(-2;0)$ là trọng tâm tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 + b + 1 + 5c = -6 \\ 2 - 14 - 4b - 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + 5c = -3 \\ 2b + c = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-3; -2) \\ C(1; 0) \end{cases}$$

+ Vậy $A(-4;2), B(-3;-2), C(1;0)$.

Bài 9.

+ AB đi qua $A(-2;3)$ và vuông góc với

CH nên nhận $\overrightarrow{u_{CH}} = (1; -2)$ làm vectơ pháp tuyến.

Do đó AB có phương trình :

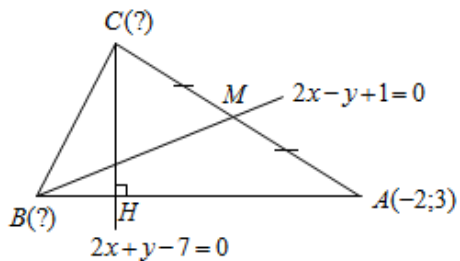
$$x + 2 - 2(y - 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 8 = 0$$

+ Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y + 8 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(2;5)$$

+ Gọi $C(t; 7 - 2t) \in CH$. Do M là trung điểm của AC nên suy ra:

$$M\left(\frac{t-2}{2}; 5-t\right)$$

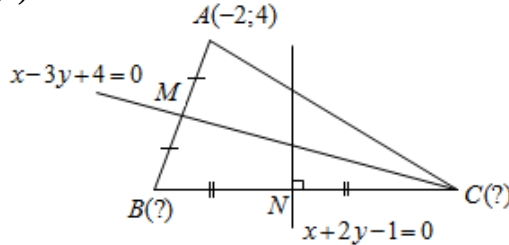


+ Mặt khác:

$$M \in BM \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{t-2}{2} - (5-t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow C(3;1)$$

Vậy $B(2;5), C(3;1)$.

Bài 10.



+ Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC .

Do M, N lần lượt nằm trên các đường $x-3y+4=0$ và $x+2y-1=0$ nên

$$\text{gọi } \begin{cases} M(3m-4; m) \\ N(1-2n; n) \end{cases} \Rightarrow B(6m-6; 2m-4) \Rightarrow C(-4n-6m+8; 2n-2m+4)$$

+ Ta có

$$C \in CM \Leftrightarrow (-4n-6m+8) - 3(2n-2m+4) + 4 = 0 \Leftrightarrow n = 0 \Rightarrow N(1;0)$$

+ BC đi qua $N(1;0)$ và vuông góc với đường thẳng $x+2y-1=0$ nên BC có phương trình: $2x - y - 2 = 0$

Khi đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x - 3y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow C(2;2)$$

Do $N(1;0)$ là trung điểm của BC nên suy ra $B(0;-2)$.

+ Vậy $B(0;-2), C(2;2)$.

8. BÀI TOÁN 8

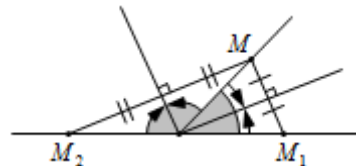
A. NỘI DUNG BÀI TOÁN 8

Tìm điểm dựa vào phân giác trong (hoặc ngoài) của tam giác.

B. CÁCH GIẢI CHUNG

Để giải quyết tốt các bài toán có chứa yếu tố phân giác các bạn cần nắm được các kiến thức cơ bản sau:

* Hai cạnh của một góc luôn đối xứng qua đường phân giác của góc đó. Nghĩa là một điểm thuộc một cạnh khi lấy đối xứng qua đường



phân giác của góc chứa cạnh đó thì luôn nằm trên cạnh còn lại của góc đó.

Đây là tính chất gần như luôn được khai thác trong các bài toán có yếu tố phân giác.

KHANG VIET

(Việc tìm điểm đối xứng có 3 cách giải, các bạn xem lại **Phần 2 ở Bài toán cơ bản 2**).

* Giao 3 đường phân giác trong của tam giác là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó.

* Giao 2 đường phân giác ngoài của hai góc hoặc giao của 1 đường phân giác trong của một góc và 1 đường phân giác ngoài của góc khác là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác. (Một tam giác có 1 đường tròn nội tiếp và 3 đường tròn bàng tiếp).

* Hai đỉnh của một tam giác luôn nằm khác phía với đường phân giác trong của đỉnh thứ ba và nằm cùng phía với đường phân giác ngoài của đỉnh thứ ba.

Trong nhiều bài toán yếu tố này sẽ giúp ta loại bớt các nghiệm không thỏa mãn.

* Gọi D_1, D_2 lần lượt là chân đường phân giác trong, phân giác ngoài góc A của tam giác ABC thì ta luôn có:

$$+) \overrightarrow{D_1B} = -\frac{AB}{AC} \overrightarrow{D_1C}$$

$$+) \overrightarrow{D_2B} = \frac{AB}{AC} \overrightarrow{D_2C}$$

* Một điểm nằm trên đường phân giác luôn cách đều hai cạnh của nó.

* Việc viết phương trình đường phân giác trong, phân giác ngoài của các góc trong một tam giác các bạn có thể xem lại **Bài toán cơ bản 5** thuộc **Phần 2**.

C. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

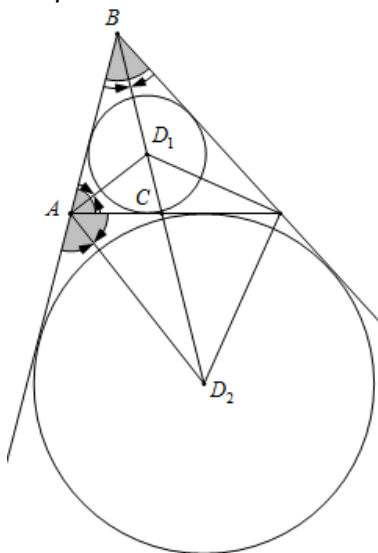
Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường phân giác trong AD là: $x - y = 0$, đường cao CH là: $2x + y + 3 = 0$, cạnh AC đi qua điểm $M(0; -1)$ sao cho $AB = 2AM$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Phân tích hướng giải:

* Phân giác trong của góc A là AD đã biết phương trình và $M \in AC$, lúc này ta nghĩ tới **Bài toán 8** bằng cách tìm điểm N thuộc cạnh AB đối xứng với AD qua điểm M .

* Khi tìm được tọa độ điểm N thì những “nút thắt” của bài toán gần như được “tháo bỏ”. Cụ thể:

+ Ta sẽ viết được phương trình của AB đi qua N và vuông góc với CH , từ đây suy ra tọa độ điểm A (là giao điểm của AB và AD). Suy ra phương trình AC và suy ra tọa độ điểm C .



Ví dụ 2 (B – 2013 – NC). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có chân đường cao hạ từ đỉnh A là $H\left(\frac{17}{5}; -\frac{1}{5}\right)$, chân đường phân giác trong của A là $D(5;3)$ và trung điểm của cạnh AB là $M(0;1)$. Tìm tọa độ đỉnh C

Phân tích hướng giải:

* Vẫn một câu hỏi quen thuộc “điểm nào, hay đường thẳng nào ta có thể tìm và viết được qua dữ kiện ban đầu của bài toán?”. Ở ví dụ này ta dễ dàng viết được phương trình cạnh BC (đi qua H và D) và phương trình AH (đi qua H và vuông góc với HD)

* Khi đó đồng thời ta sẽ tìm tọa độ hai điểm A, B - theo góc nhìn của **Bài toán 5** (A, B lần lượt thuộc hai đường thẳng AH, BC đã biết phương trình và liên hệ với điểm M qua hệ thức vectơ - ở đây M là trung điểm của AB).

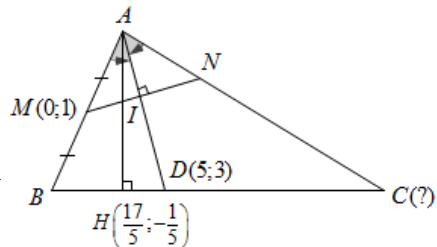
* Lúc này ta **Bài toán 8** xuất hiện, đồng nghĩa với việc ta sẽ tìm được điểm thuộc cạnh AC , đối xứng với M qua AD . Từ đây ta viết được phương trình AC và suy ra được tọa độ điểm C (giao của AC và BC).

Sau đây là lời giải chi tiết cho bài toán :

Giải

+ Ta có : $\overrightarrow{HD} = \left(\frac{8}{5}; \frac{16}{5}\right) = \frac{8}{5}(1; 2)$.

Suy ra : AH đi qua $H\left(\frac{17}{5}; -\frac{1}{5}\right)$ và



nhận $\vec{n} = (1; 2)$ làm vectơ pháp tuyến nên

có phương trình : $x - \frac{17}{5} + 2\left(y + \frac{1}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0$

BC đi qua $D(5;3)$ và nhận $\vec{n}' = (2; -1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình : $2(x - 5) - (y - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 7 = 0$

+ Gọi $\begin{cases} A(3 - 2a; a) \in AH \\ B(b; 2b - 7) \in BC \end{cases}$, khi đó M là trung điểm của AB nên ta có :

$$\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2a + b = 0 \\ a + 2b - 7 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-3; 3) \\ B(3; -1) \end{cases}$$

+ Khi đó AD đi qua $A(-3;3)$ và $D(5;3)$ nên AD có phương trình $y = 3$.

Gọi N là điểm đối xứng của M qua đường thẳng AD , khi đó $E \in AC$

MN đi qua $M(0;1)$ và vuông góc với AD nên có phương trình : $x = 0$

Khi đó tọa độ giao điểm I của MN và AD là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow I(0;3)$$

Do I là trung điểm của $MN \Rightarrow N(0;5)$

+ AC đi qua $A(-3;3)$ và $N(0;5)$ nên có phương trình : $2x - 3y + 15 = 0$

Suy ra tọa độ điểm C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - 3y + 15 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 11 \end{cases} \Rightarrow C(9;11)$$

Vậy $C(9;11)$.

Chú ý:

Ngoài cách tìm tọa độ điểm A theo góc nhìn của **Bài toán 5** ở ví dụ trên ta có thể tìm điểm A theo góc nhìn của **Bài toán 1**, khi $A \in AH$ và $AM = MH$. Cụ thể:

Gọi $A(3-2a; a) \in AH$, khi đó : $AM = MH \Leftrightarrow AM^2 = MH^2$

$$\Leftrightarrow (3-2a)^2 + (a-1)^2 = \left(\frac{17}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 - 14a - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-3;3) \\ A\left(\frac{17}{5}; -\frac{1}{5}\right) \equiv H \end{cases} \cdot \text{Vậy } A(-3;3).$$

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trung tuyến $BM : 2x + y - 3 = 0$, phân giác trong $BN : x + y - 2 = 0$. Điểm $P(2;1)$ thuộc đường thẳng đi qua A, B . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng $\sqrt{5}$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Phân tích hướng giải:

- * Với BM, BN đã biết phương trình, ta dễ dàng suy ra tọa độ điểm B .
- * $P(2;1) \in AB$ và phân giác $BN : x + y - 2 = 0$, giúp ta nghĩ tới tìm điểm Q thuộc BC đối xứng với P qua BN . Khi đó ta sẽ viết được phương trình các cạnh AB, BC .
- * Dữ kiện “đường trung tuyến $BM : 2x + y - 3 = 0$ ” ta chưa khai thác triệt để, cộng với dữ kiện “bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng $\sqrt{5}$ ” rất khó cắt nghĩa. Kinh nghiệm giải những bài toán kiểu này cho ta biết rằng bài toán khá

năng sẽ có những yếu tố đặc biệt từ những số liệu và thông số của đề bài. Lúc này ta cần cầm bút “nháp” để tìm ra điểm “mấu chốt” của bài toán. Ta viết được phương trình $AB: y=1$ và $BC: x=1$ là hai đường thẳng vuông góc, do đó tam giác ABC vuông tại B . Như vậy ta sẽ suy ra được M chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác và có bán kính $MB = \sqrt{5}$. Đến lúc này thì “con đường” để đi đến đáp số của lời giải trở nên khá rõ ràng.

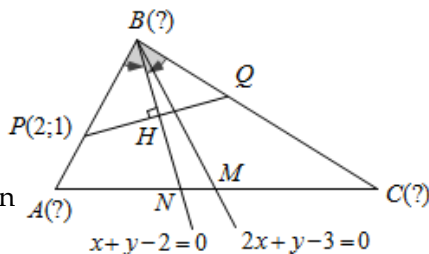
Sau đây là lời giải chi tiết:

Giải

+ Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow B(1;1)$$

+ Gọi Q là điểm đối xứng với P qua phân giác trong của góc A , suy ra $N \in AB$



PQ đi qua $P(2;1)$ và vuông góc với BN nên có phương trình: $x - y - 1 = 0$

Khi đó tọa độ điểm H là giao điểm của BN và PQ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Do H là trung điểm của $PQ \Rightarrow Q(1;0)$

Với $P(2;1), B(1;1), Q(1;0)$ suy ra phương trình $AB: y=1$ và $BC: x=1$

Mà $x=1$ và $y=1$ là hai đường thẳng vuông góc do đó tam giác ABC vuông tại B .

Suy ra M là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow MB = \sqrt{5}$

+ Gọi $\begin{cases} A(a;1) \in AB \\ C(1;c) \in BC \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{a+1}{2}; \frac{c+1}{2}\right)$ (vì M là trung điểm của AB)

$$\text{Ta có } M \in BM \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{a+1}{2} + \frac{c+1}{2} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a + c - 3 = 0 \Leftrightarrow c = 3 - 2a \Rightarrow M\left(\frac{a+1}{2}; 2-a\right)$$

+ Ta có

$$MB = \sqrt{5} \Leftrightarrow MB^2 = 5 \Leftrightarrow \left(\frac{a+1}{2} - 1 \right)^2 + (1-a)^2 = 5 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\text{Với } a = 3 \Rightarrow c = -3 \Rightarrow \begin{cases} A(3;1) \\ C(1;-3) \end{cases}; \text{ Với } a = -1 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow \begin{cases} A(-1;1) \\ C(1;5) \end{cases}$$

Vậy $A(3;1), B(1;1), C(1;-3)$ hoặc $A(-1;1), B(1;1), C(1;5)$.

Nhận xét :

Ở ví dụ trên nếu tư duy theo cách thông thường (chỉ tìm ý tưởng và chưa quan tâm tới số liệu cụ thể của bài toán) thì dữ kiện “bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng $\sqrt{5}$ ” ta sẽ rất khó cắt nghĩa. Và kinh nghiệm giải những dạng toán này, cho ta biết được sẽ cần tìm ra những yếu tố đặc biệt. Những yếu tố này sẽ là “mấu chốt” để gỡ những “nút thắt” trong bài toán.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có $C(3;-1)$, đường thẳng chứa BD và đường thẳng chứa đường phân giác của góc $\widehat{DAC}$ lần lượt có phương trình là $x - 4y + 2 = 0$ và $x + y - 4 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành trên.

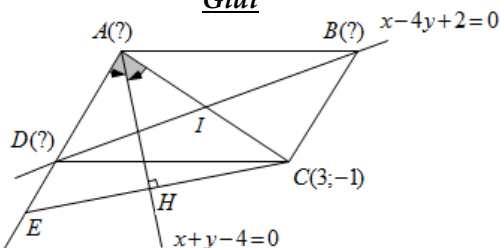
Phân tích hướng giải:

* Với những thông số ban đầu của bài toán, ta có thể nhận ra ngay nội dung **Bài toán 5**. Khi A, I (I là giao điểm hai đường chéo) lần lượt thuộc hai đường $x + y - 4 = 0$ và $x - 4y + 2 = 0$ và liên hệ với điểm $C(3;-1)$ qua hệ thức vectơ (trong trường hợp này I là trung điểm của AC). Nghĩa là ta sẽ tìm được tọa độ điểm A, I nhờ **Bài toán 5**.

* Ta cũng nhận thấy rõ **Bài toán 8**, nên hướng tư duy tiếp theo là tìm tọa độ điểm $E \in AD$ đối xứng với C qua đường phân giác $x + y - 4 = 0$. Từ đây ta sẽ viết được phương trình cạnh AD , suy ra được tọa độ điểm D và tiếp tục tìm được tọa độ điểm B (I là trung điểm của BD).

Sau đây là lời giải chi tiết cho bài toán :

Giải



+ Gọi $\Delta: x + y - 4 = 0$ là phương trình đường phân giác góc $\widehat{DAC}$ và $AC \cap BD = \{I\}$

Gọi $A(a; 4 - a) \in \Delta$. Do I là trung điểm của AC , suy ra $I\left(\frac{a+3}{2}; \frac{3-a}{2}\right)$

Ta có $I \in BD \Leftrightarrow \frac{a+3}{2} - 4 \cdot \frac{3-a}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow A(1; 3)$ và $I(2; 1)$

+ Gọi E là điểm đối xứng của C qua Δ , khi đó $E \in AD$

CE đi qua $C(3; -1)$ và vuông góc với Δ nên có phương trình: $x - y = 4$

Khi đó tọa độ giao điểm H của CE và Δ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow H(4; 0)$$

Do H là trung điểm của $CE \Rightarrow E(5; 1)$

+ AD đi qua $A(1; 3)$ và $E(5; 1)$ nên có phương trình: $x + 2y - 7 = 0$

Suy ra tọa độ điểm D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow D\left(4; \frac{3}{2}\right)$$

+ Do $I(2; 1)$ là trung điểm của BD , suy ra $B\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Vậy $A(1; 3), B\left(0; \frac{1}{2}\right), D\left(4; \frac{3}{2}\right)$.

Ví dụ 5 (B – 2008). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm $H(-1; -1)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x - y + 2 = 0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x + 3y - 1 = 0$.

Phân tích hướng giải:

* Dữ kiện của bài toán cho ta thấy ngay **Bài toán 8**, nghĩa là ta sẽ đi tìm tọa độ điểm $D \in AC$, đối xứng với H qua phân giác trong của góc A . Từ đây ta sẽ viết được phương trình AC (đi qua D và vuông góc với đường cao kẻ từ B) và tìm được tọa độ điểm A .

* Lúc này điểm C sẽ dễ dàng tìm được nhờ **Bài toán 3**.

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

Phân tích hướng giải:

* Giống như Ví dụ 5, ở ví dụ này **Bài toán 8** cũng xuất hiện khá rõ. Nên ta sẽ đi tìm tọa độ điểm $D \in AB$, đối xứng với C qua phân giác trong của góc A . Từ đây sẽ tìm được tọa độ điểm A theo góc nhìn của **Bài toán 3** (A thuộc đường thẳng $x + y - 5 = 0$ và tạo với C, D một tam giác vuông tại A).

* Khi tìm được điểm A , giúp ta viết được phương trình AB (đi qua A, D). Lúc này việc tìm điểm B sẽ được giải quyết nhờ **Bài toán 1** (với $B \in AB$ và $AB = \frac{2S_{ABC}}{AC}$). Khi đó ta sẽ suy ra phương trình BC .

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên :

Giải

+ Gọi D là điểm đối xứng của C qua đường thẳng $\Delta: x + y - 5 = 0$, khi đó $D \in AB$

CD đi qua $C(-4;1)$ và vuông góc với Δ nên có phương trình: $x - y + 5 = 0$

Khi đó tọa độ giao điểm H của CD và Δ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow H(0;5)$$

Do H là trung điểm của $CD \Rightarrow D(4;9)$

+ Gọi $A(t; 5-t) \in \Delta$ với $t > 0$, suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (-4-t; t-4) \\ \overrightarrow{AD} = (4-t; t+4) \end{cases}$

Tam giác CAD vuông tại A nên :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow (-4-t)(4-t) + (t-4)(t+4) = 0 \Leftrightarrow t^2 = 16 \Leftrightarrow t = 4 \quad \text{hoặc} \quad t = -4 \text{ (loại)} \Rightarrow A(4;1)$$

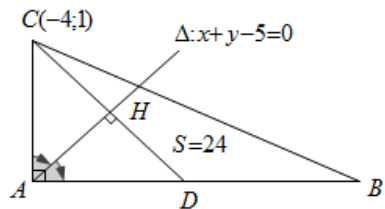
+ Khi đó $AC = 8 \Rightarrow AD = \frac{2S_{ABC}}{AC} = \frac{2 \cdot 24}{8} = 6$ và AB đi qua $A(4; -1); D(4; 9)$ nên có phương trình $x = 4$

Gọi $B(4; b) \in AB$, khi đó :

$$AD = 6 \Leftrightarrow AD^2 = 36 \Leftrightarrow (b-1)^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(4; 7) \\ B(4; -5) \end{cases}$$

+ Vì $\Delta: x + y - 5 = 0$ là phân giác trong của góc A nên B, C phải khác phía so với Δ , do đó $B(4; 7)$

Khi đó $B(4; 7), C(-4; 1)$ nên BC có phương trình: $3x - 4y + 16 = 0$



Ví dụ 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có đường chéo AC nằm trên đường thẳng $d: x + y - 1 = 0$. Điểm $E(9; 4)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh AB , điểm $F(-2; -5)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh AD . Xác định tọa độ các đỉnh của hình thoi $ABCD$ biết điểm C có hoành độ âm và $AC = 2\sqrt{2}$.

Phân tích hướng giải:

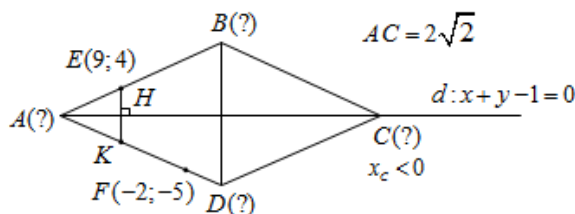
* Ta biết đường chéo của hình thoi là phân giác trong của các góc hình thoi, nghĩa là với ví dụ này d là phân giác trong của góc A . Như vậy lúc này ta nghĩ tới **Bài toán 8**, bằng cách tìm tọa độ điểm $K \in AD$, đối xứng với E qua d . Từ đây ta sẽ viết được phương trình AD (đi qua K, F) và suy ra tọa độ điểm A ($d \cap AD = \{A\}$).

* Khi có được tọa độ điểm A , ta sẽ suy ra tọa độ điểm C nhờ **Bài toán 1** (với $C \in d$ và $AC = 2\sqrt{2}$).

Lúc này thì việc tìm B, D sẽ khá đơn giản.

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

Giải



+ Gọi K là điểm đối xứng với E qua AC , do AC là phân giác của góc $\widehat{BAD}$ nên K thuộc AD

EK đi qua E và vuông góc với AC nên có phương trình: $x - y - 5 = 0$

+ Gọi $AC \cap EK = \{H\}$, khi đó tọa độ điểm H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow H(3; -2)$$

Do H là trung điểm của EK nên $K(-3; -8)$

+ Đường thẳng AD đi qua A, D nên có phương trình: $3x - y + 1 = 0$

Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(0; 1)$

+ Gọi $C(t; 1-t)$ với $t < 0$, khi đó:

$$AC = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow AC^2 = 8 \Leftrightarrow t^2 + t^2 = 8 \Leftrightarrow t = -2 \text{ hoặc } t = 2 \text{ (loại)}$$

$$\Rightarrow C(-2;3)$$

+ Gọi $BD \cap AC = \{I\}$, do I là trung điểm của AC nên $I(-1;2)$

Ta có BD đi qua I vuông góc với AC nên có phương trình: $x - y + 3 = 0$

Do $BD \cap AD = \{D\}$ nên tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow D(1;4)$$

Suy ra $B(-3;0)$ (do I là trung điểm của BD)

Vậy $A(0;1)$, $B(-3;0)$, $C(-2;3)$ và $D(1;4)$

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC . Phân giác trong của góc A và phân giác ngoài của góc B lần lượt có phương trình $x = 2$ và $x + y + 7 = 0$. Các điểm $I\left(-\frac{1}{2};1\right)$, $J(2;1)$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC . Tìm tọa độ các điểm A, B, C .

Phân tích hướng giải:

* Ta biết phân giác trong, phân giác ngoài của một góc luôn vuông góc với nhau. Tâm đường tròn nội tiếp là giao 3 đường phân giác trong của tam giác. Vì vậy trong ví dụ này ta nghĩ tới việc viết phương trình phân giác trong BJ đi qua $J(2;1)$ và vuông góc với đường thẳng $x + y + 7 = 0$.

Từ đây ta tìm được tọa độ điểm B .

* Khi tìm được B , **Bài toán 1** và **Bài toán 8** đồng thời xuất hiện. Với **Bài toán 1** sẽ giúp ta tìm được điểm A . Cụ thể: $A \in AD$ và $AI = IB$, (trong tình huống này ta cần loại đi một điểm nhờ $\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AD}$ cùng chiều – với D là giao của phân giác trong góc A và phân giác ngoài góc B). **Bài toán 8** gợi ý ta tìm tọa độ điểm $N \in AC$, đối xứng với B qua AD . Khi đó ta sẽ viết được phương trình AC (đi qua A, N) và sẽ tìm được điểm C giống như cách tìm điểm A bằng **Bài toán 1**.

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

Giải

+ Gọi phân giác trong của góc A và phân giác ngoài của góc B cắt nhau tại D , khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 2 \\ x + y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -9 \end{cases} \Rightarrow D(2;-9)$$

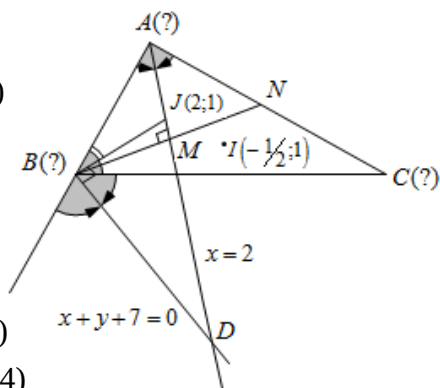
BJ đi qua J và vuông góc với BD nên có phương trình: $x - y - 1 = 0$

Vậy tọa độ điểm B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow B(-3; -4)$$

+ Gọi $A(2; a) \in AD$, khi đó:

$$\begin{aligned} IA^2 = IB^2 &\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (a-1)^2 \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2; 6) \\ A(2; -4) \end{cases} \end{aligned}$$



Vì J nằm giữa A và D hay $\overline{AJ}, \overline{AD}$ cùng chiều nên ta được $A(2; 6)$.

+ Gọi đường thẳng đi qua B vuông góc với AD và cắt AD, AC lần lượt tại M, N . Suy ra M là trung điểm của BN và BM có phương trình: $y = -4$

Vậy tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow M(2; -4) \Rightarrow N(7; -4)$

Khi đó AC đi qua A và N nên có phương trình: $2x + y - 10 = 0$

+ Gọi $C(c; 10 - 2c) \in AC$, khi đó:

$$\begin{aligned} IC^2 = IB^2 &\Leftrightarrow \left(c + \frac{1}{2}\right)^2 + (2c - 9)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5^2 \\ &\Leftrightarrow c^2 - 7c + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(2; 6) \equiv A \\ C(5; 0) \end{cases} \Rightarrow C(5; 0) \end{aligned}$$

Vậy $A(2; 6), B(-3; -4), C(5; 0)$.

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A với $BC = 4\sqrt{2}$. Các đường thẳng AB và AC lần lượt đi qua các điểm $M\left(1; -\frac{5}{3}\right)$ và $N\left(0; \frac{18}{7}\right)$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết đường cao AH có phương trình $x + y - 2 = 0$ và điểm B có hoành độ dương.

Phân tích hướng giải:

* Do tam giác ABC cân nên đường cao AH cũng là đường phân giác trong của góc A do đó ta nghĩ tới **bài toán 8** bằng việc xác định tọa độ điểm đối xứng của N (hoặc M) qua AH (trong lời giải bài toán này ta chọn N). Khi đó việc viết phương trình AB sẽ đơn giản khi ta có hai điểm đã biết tọa độ thuộc AB và suy ra được tọa độ điểm A (là giao điểm của AH và AB)

* Do đã biết phương trình AB và $BC = 4\sqrt{2} \Rightarrow d(B, AH) = \frac{BC}{2} = 2\sqrt{2}$, nghĩa là ta sẽ tìm được tọa độ điểm B theo góc nhìn của **Bài toán 2** (chúng ta đã tìm hiểu ở phần trước). Khi đó ta cũng sẽ suy ra được tọa độ điểm C , nhờ đối xứng với B qua AH .

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

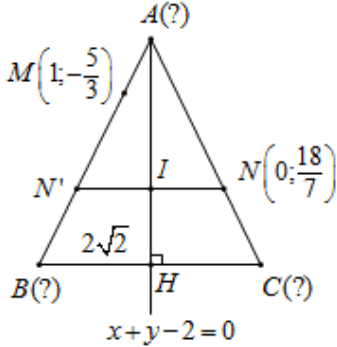
Giải

+ Gọi N' đối xứng với $N\left(0; \frac{18}{7}\right)$ qua AH , $M\left(1; -\frac{5}{3}\right)$

suy ra $N' \in AB$

NN' đi qua $N\left(0; \frac{18}{7}\right)$ và vuông góc với

AH nên có phương trình: $x - y + \frac{18}{7} = 0$



Khi đó tọa độ giao điểm I của NN' và AH là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y + \frac{18}{7} = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{7} \\ y = \frac{16}{7} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{2}{7}; \frac{16}{7}\right)$$

Do I là trung điểm của $NN' \Rightarrow N'\left(-\frac{4}{7}; 2\right)$

+ Khi đó AB đi qua $M\left(1; -\frac{5}{3}\right)$ và $N'\left(-\frac{4}{7}; 2\right)$ nên có phương trình:

$$7x + 3y - 2 = 0$$

Suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 7x + 3y - 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 3)$$

+ Gọi $B(-1 + 3t; 3 - 7t) \in AB$ với $t > \frac{1}{3}$

Khi đó ta có:

$$d(B, AH) = \frac{BC}{2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|-1 + 3t + 3 - 7t - 2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |4t| = 4 \Leftrightarrow t = 1$$

hoặc $t = -1$ (loại)

Suy ra $B(2; -4)$

+ BC đi qua $B(2;-4)$ và vuông góc với AH nên có phương trình:
 $x - y - 6 = 0$

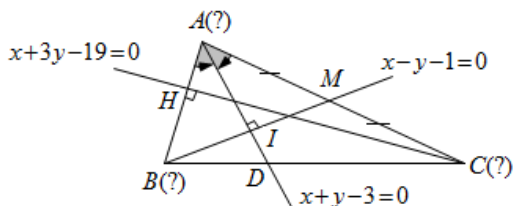
Khi đó tọa độ điểm H là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow H(4; -2) \Rightarrow C(6; 0) \text{ (do } H \text{ là trung điểm của } BC)$$

Vậy $A(-1; 3), B(2; -4), C(6; 0)$.

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC . Đường phân giác góc A có phương trình $x + y - 3 = 0$, đường trung tuyến kẻ từ đỉnh B có phương trình $x - y - 1 = 0$, đường cao kẻ từ C có phương trình $x + 3y - 19 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Giải



+ Gọi các đường thẳng đã cho lần lượt là AD, BM, CH

Gọi $AD \cap BM = \{I\}$, khi đó tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow I(2; 1)$$

$$\text{Gọi } \begin{cases} A(a; 3-a) \in AD \\ B(b; b-1) \in BM \\ C(19-3c; c) \in CH \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AB} = (b-a; b+a-4) \\ M\left(\frac{a-3c+19}{2}; \frac{c-a+3}{2}\right) \end{cases}$$

+ Ta có vectơ chỉ phương của CH là $\overrightarrow{u_{CH}} = (3; -1)$

Nhận thấy $AD \perp BM$ nên ABM cân tại A hay I là trung điểm của BM

Vậy với $CH \perp AB$ và I là trung điểm của BM ta suy ra hệ :

$$\begin{cases} 3(b-a) - (b+a-4) = 0 \\ b + \frac{a-3c+19}{2} = 4 \\ b-1 + \frac{c-a+3}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b-2=0 \\ a+2b-3c=-11 \\ a-2b-c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1; 2) \\ B(0; -1) \\ C(7; 4) \end{cases}$$

Vậy $A(1; 2), B(0; -1), C(7; 4)$

D. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1 (D – 2011 – CB). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $B(-4;1)$, trọng tâm $G(1;1)$ và đường thẳng chứa phân giác trong của góc A có phương trình $x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và C .

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh AB và BC lần lượt là $4x + 3y - 4 = 0$ và $x - y - 1 = 0$. Phân giác trong của góc A nằm trên đường thẳng $x + 2y - 6 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại B , đường thẳng chứa cạnh BC có phương trình $2x + y + 4 = 0$, đường phân giác trong góc A có phương trình $d_A: x - y - 1 = 0$. Đường thẳng chứa cạnh AC đi qua điểm $M(0; -2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh AC của tam giác, biết tọa độ chân đường cao hạ từ ba đỉnh A, B, C tương ứng là $M(-1; -2), N(2; 2), P(-1; 2)$.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với đường cao kẻ từ đỉnh B và phân giác trong của góc A có phương trình lần lượt là $x - 2y - 2 = 0$ và $x - y - 1 = 0$. Điểm $M(0; 2)$ thuộc đường thẳng AB và $AC = 2AB$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $\Delta_1: 4x - 2y + 5 = 0$ và $\Delta_2: 4x + 6y - 13 = 0$. Đường thẳng Δ cắt Δ_1, Δ_2 lần lượt tại A, B . Biết rằng Δ_1 là phân giác của góc tạo bởi OA và Δ ; Δ_2 là phân giác của góc tạo bởi OB và Δ . Viết phương trình đường thẳng Δ .

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(0; 2), B(2; 6)$ và C thuộc đường thẳng $d: x - 3y + 1 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C sao cho phân giác trong xuất phát từ đỉnh A song song với đường thẳng d .

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(5; 3)$, đường cao BH nằm trên đường thẳng $4x + 3y + 14 = 0$, phân giác trong của góc C nằm trên đường thẳng $x + 2y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC .

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A , có đỉnh $C(-4; 1)$, phân giác trong góc A có phương trình $x + y - 5 = 0$. Viết phương

trình đường thẳng BC , biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.

Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với đường cao kẻ từ đỉnh B và phương trình phân giác trong của góc A lần lượt có phương trình là $3x + 4y + 10 = 0$ và $x - y + 1 = 0$, điểm $M(0; 2)$ thuộc đường thẳng AB đồng thời cách C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác, biết C có tọa độ nguyên.

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $B(-4; 1)$, trọng tâm $G(1; 1)$ và đường thẳng chứa phân giác trong của góc A có phương trình $x - y - 1 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC .

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC , biết phương trình cạnh BC là $x - y + 1 = 0$. Hai đường phân giác trong của góc B và C lần lượt có phương trình là $d_1: 2x + y - 1 = 0$ và $d_2: x + y - 3 = 0$. Viết phương trình cạnh AB của tam giác ABC .

Bài 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC , có trọng tâm $G(0; 3)$, trung điểm của AB là $M(2; 3)$, phương trình phân giác trong của A là $d: x + 2y - 7 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Bài 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có $D(-6; -6)$. Đường trung trực của đoạn DC có phương trình là $2x + 3y + 17 = 0$ và đường phân giác của góc BAC có phương trình $5x + y - 3 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành $ABCD$.

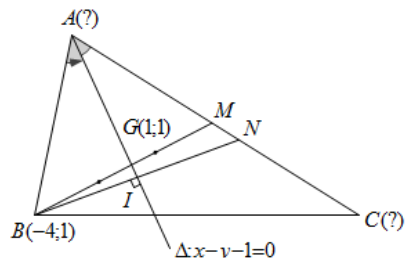
E. GIẢI BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1.

+ Gọi M là trung điểm của AC , khi đó

$$\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M + 4 = \frac{3}{2} \cdot (1 + 4) \\ y_M - 1 = \frac{3}{2} \cdot (1 - 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{7}{2} \\ y_M = 1 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; 1\right)$$



- + Gọi N là điểm đối xứng của B qua đường thẳng $\Delta: x - y - 1 = 0$, khi đó $N \in AC$.

BN đi qua $B(-4; 1)$ và vuông góc với Δ nên có phương trình: $x + y + 3 = 0$

Khi đó tọa độ giao điểm I của BN và Δ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow I(-1; -2)$$

Do I là trung điểm của $BN \Rightarrow N(2; -5)$

- + Đường thẳng AC đi qua $M\left(\frac{7}{2}; 1\right)$ và $N(2; -5)$ nên có phương trình:

$$4x - y - 13 = 0$$

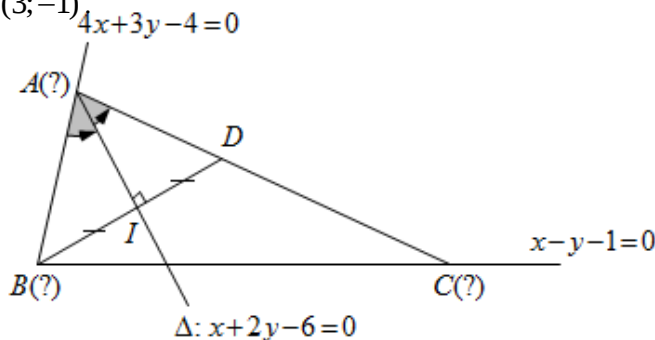
Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x - y - 13 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(4; 3)$$

- + Do M là trung điểm của AC nên suy ra $C(3; -1)$

Vậy $A(4; 3), C(3; -1)$

Bài 2.



- + Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x + 3y - 4 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 4)$$

$$\text{Tọa độ điểm } B \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 4x + 3y - 4 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1; 0)$$

- + Gọi Δ là phân giác trong của góc A ;

Gọi D là điểm đối xứng của B qua Δ , khi đó $D \in AC$.

BD đi qua $B(1; 0)$ và vuông góc với Δ nên có phương trình:

$$2x - y - 2 = 0$$

Khi đó tọa độ giao điểm I của AD và Δ là nghiệm của hệ:

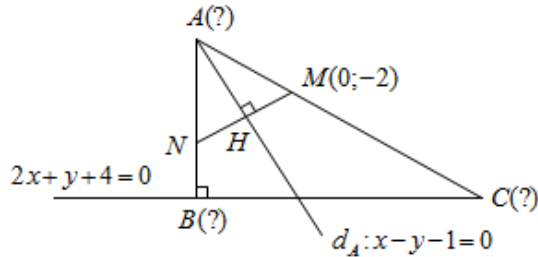
$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow I(2; 2)$$

Do I là trung điểm của $BD \Rightarrow D(3; 4)$

+ AC đi qua hai điểm $A(-2; 4)$ và $D(3; 4)$ nên có phương trình : $y = 4$

Suy ra tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = 4 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow C(5; 4)$

Bài 3.



+ Gọi N là điểm đối xứng với M qua phân giác trong của góc A , suy ra $N \in AB$

MN đi qua $M(0; -2)$ và vuông góc với đường thẳng d_A nên có phương trình : $x + y + 2 = 0$

Khi đó tọa độ điểm H là giao điểm của d_A và MN là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$$

Do H là trung điểm của MN nên $N(-1; -1)$

+ AB đi qua $N(-1; 0)$ và vuông góc với CB nên có phương trình: $x - 2y - 1 = 0$

Suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1; 0)$$

tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 2x + y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{5} \\ y = -\frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow B\left(-\frac{7}{5}; -\frac{6}{5}\right)$

+ AC đi qua $A(1; 0)$ và $M(0; -2)$ nên có phương trình : $2x - y - 2 = 0$

Khi đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 2x + y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{1}{2}; -3\right)$$

Vậy $A(0;1), B\left(-\frac{7}{5}; -\frac{6}{5}\right), C\left(-\frac{1}{2}; -3\right)$.

Bài 4.

+ Gọi H là trực tâm của tam giác ABC , khi đó $CNHM$ và $ANHP$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn

Do đó ta có:
$$\begin{cases} \widehat{C_1} = \widehat{N_1} \\ \widehat{A_2} = \widehat{N_2} \end{cases}$$

Mặt khác $\widehat{C_1} = \widehat{A_2}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ABC}$)

Suy ra $\widehat{N_1} = \widehat{N_2}$ hay BN là phân giác của góc $\widehat{PNM}$

+ Ta có phương trình $MN: 4x - 3y - 2 = 0$ và $PN: y - 2 = 0$

Khi đó đường phân giác của góc tạo bởi MN, PN thỏa mãn:

$$\frac{|4x - 3y - 2|}{5} = |y - 2| \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Do M, N nằm khác phía so với BN nên ta được phương trình BN là:

$$x - 2y + 2 = 0$$

+ AC đi qua $N(2;2)$ vuông góc với đường thẳng $BN: x - 2y + 2 = 0$ nên nhận $\vec{n} = \vec{u}_{BN} = (2;1)$ làm vectơ chỉ phương.

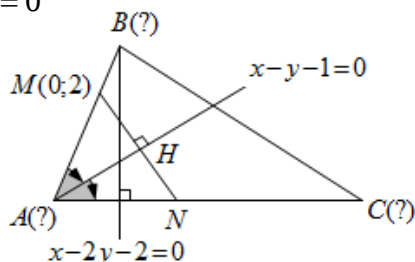
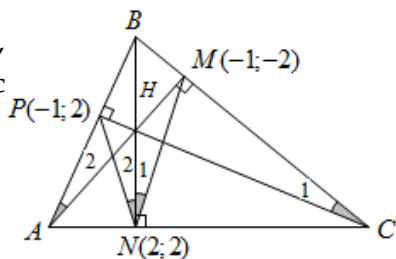
Do đó AC có phương trình: $2x + y - 6 = 0$

Bài 5.

+ Gọi D, E lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh B và chân đường phân giác trong hạ từ đỉnh A của tam giác ABC . Gọi N đối xứng với M qua $AE \Rightarrow N \in AC$

Khi đó MN đi qua $M(0;2)$ và vuông góc với AE nên có phương trình:

$$x + y - 2 = 0$$



Khi đó tọa độ giao điểm H của AE và MN là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Do H là trung điểm của MN nên $N(3;-1)$

+ AC đi qua $N(3;-1)$ và vuông góc với BD nên có phương trình:

$$2x+y-5=0$$

Suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x+y-5=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow A(2;1)$$

Khi đó AB đi qua $A(2;1)$ và $M(0;2)$ nên có phương trình: $x+2y-4=0$

Suy ra tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+2y-4=0 \\ x-2y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow B\left(3; \frac{1}{2}\right)$$

+ Gọi $C(t;5-2t) \in AC$, khi đó:

$$AC = 2AB \Leftrightarrow AC^2 = 4AB^2 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (2t-4)^2 = 4 \cdot \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow (t-2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(3;-1) \\ C(1;3) \end{cases}$$

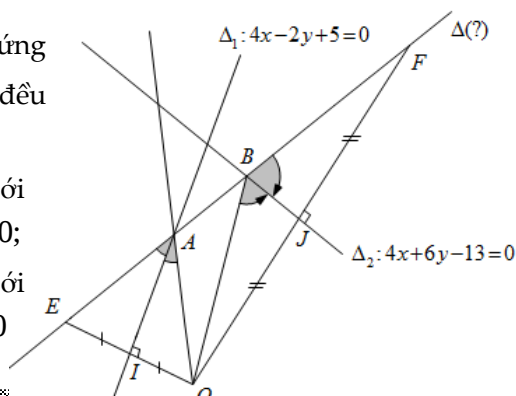
Vậy $A(2;1), B\left(3; \frac{1}{2}\right), C(3;-1)$ hoặc $A(2;1), B\left(3; \frac{1}{2}\right), C(1;3)$.

Bài 6.

+ Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của O qua Δ_1, Δ_2 . Khi đó E và F đều thuộc Δ

+ OE đi qua O và vuông góc với Δ_1 nên có phương trình $x+2y=0$;

OF đi qua O và vuông góc với Δ_2 nên có phương trình $3x-2y=0$



Suy ra tọa độ giao điểm I của OE và Δ_1 là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ 4x-2y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(-1; \frac{1}{2}\right)$$

Tọa độ giao điểm J của OF và Δ_2 là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 4x+6y-13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow J\left(1; \frac{3}{2}\right)$$

+ Do I, J lần lượt là trung điểm của OE, OF nên suy ra $E(-2;1), F(2;3)$

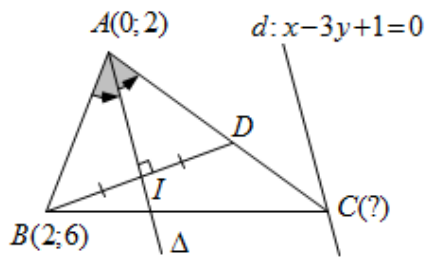
Khi đó Δ đi qua hai điểm E, F nên có phương trình : $x-2y+4=0$

Bài 7.

+ Gọi Δ là phân giác trong của góc A .

Do Δ đi qua $A(0;2)$ và song song với đường thẳng $d: x-3y+1=0$, nên Δ có phương trình : $x-3y+6=0$.

+ Gọi D là điểm đối xứng của B qua Δ , khi đó $D \in AC$



BD đi qua $B(2;6)$ và vuông góc với Δ nên có phương trình: $3x+y-12=0$.

Khi đó tọa độ giao điểm I của BD và Δ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x+y-12=0 \\ x-3y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow I(3;3)$$

Do I là trung điểm của $BD \Rightarrow D(4;0)$

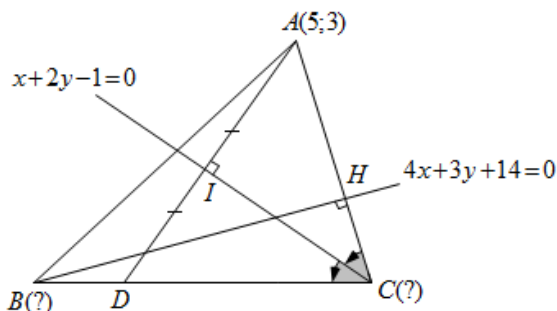
+ AC đi qua $A(0;2)$ và $D(4;0)$ nên có phương trình : $x+2y-4=0$

Suy ra tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+2y-4=0 \\ x-3y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow C(2;1)$

Vậy $C(2;1)$.

Bài 8.

+ AC đi qua $A(5;3)$ và vuông góc với $BH: 4x+3y+14=0$ nên có phương trình:
 $3x-4y-3=0$



$$\Leftrightarrow AB^2 = 36 \Leftrightarrow (b-1)^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(4; -5) \\ B(4; 7) \end{cases}$$

+ Với $B(4; -5)$, ta nhận thấy B, C nằm cùng phía so với Δ (loại).

Với $B(4; 7)$, ta có B, C nằm khác phía so với Δ (thỏa mãn).

Khi đó BC có phương trình: $3x - 4y - 16 = 0$.

Bài 10.

+ Gọi $\Delta: x - y + 2 = 0$ là phân giác trong của góc A

Gọi D là điểm đối xứng của H qua Δ , khi đó $D \in AC$

HD đi qua $H(-1; -1)$ và vuông góc với Δ nên có phương trình:

$$x + y + 2 = 0$$

Khi đó tọa độ giao điểm I của HD và Δ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-2; 0)$$

Do I là trung điểm của $HD \Rightarrow D(-3; 1)$

+ Khi đó AC đi qua $D(-3; 1)$ và vuông góc với đường thẳng $4x + 3y - 1 = 0$ nên AC có phương trình: $3x - 4y + 13 = 0$

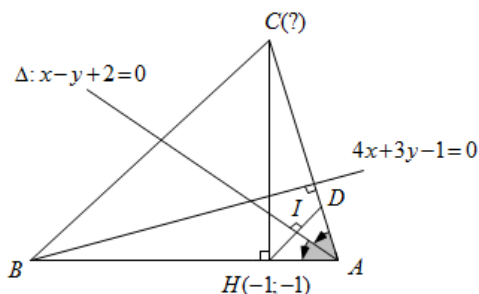
Suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - 4y + 13 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow A(5; 7)$$

+ CH đi qua $H(-1; -1)$ và nhận $\overrightarrow{HA} = (6; 8) = 2(3; 4)$ làm vectơ pháp tuyến nên CH có phương trình: $3(x + 1) + 4(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y + 7 = 0$

Vậy tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 7 = 0 \\ 3x - 4y + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{10}{3} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{10}{3}; \frac{3}{4}\right).$$

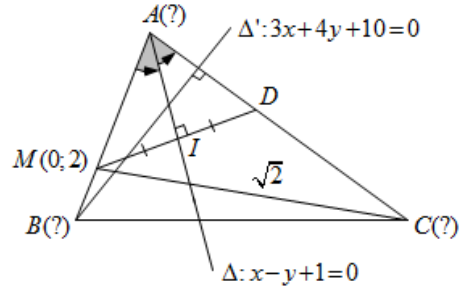


Bài 11.

+ Gọi $\Delta: x - y + 1 = 0$ là phân giác trong của góc A

Gọi D là điểm đối xứng của M qua Δ , khi đó $D \in AC$

MD đi qua $M(0; 2)$ và vuông góc với Δ nên có phương trình:
 $x + y - 2 = 0$



Khi đó tọa độ giao điểm I của MD và Δ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

Do I là trung điểm của $MD \Rightarrow D(1; 1)$

+ AC đi qua $D(1; 1)$ và vuông góc với $\Delta': 3x + 4y + 10 = 0$ nên có phương trình: $4x - 3y - 1 = 0$

Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x - 3y - 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(4; 5)$$

+ AB đi qua $A(4; 5)$ và $M(0; 2)$ nên có phương trình $3x - 4y + 8 = 0$

Suy ra tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 8 = 0 \\ 3x + 4y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow B\left(-3; -\frac{1}{4}\right)$$

+ Gọi $C(1 + 3t; 1 + 4t) \in AC$, khi đó:

$$CM = \sqrt{2} \Leftrightarrow CM^2 = 2 \Leftrightarrow (3t + 1)^2 + (4t - 1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow 25t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{2}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(1; 1) \\ C\left(\frac{31}{25}; \frac{33}{25}\right) \end{cases}$$

Do C có hoành độ dương và nằm khác phía với B so với đường thẳng Δ' nên ta được $C(1; 1)$.

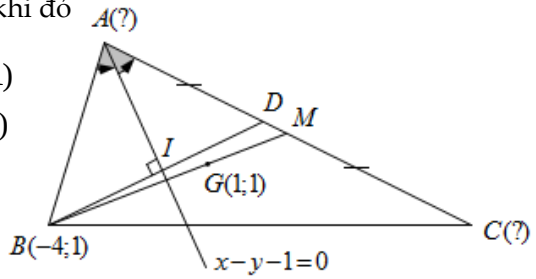
Vậy $A(4; 5), B\left(-3; -\frac{1}{4}\right), C(1; 1)$.

Bài 12.

- + Gọi M là trung điểm của AC , khi đó

$$\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4=2(x_M-1) \\ 1-1=2(y_M-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{7}{2} \\ y_M = 1 \end{cases} \Leftrightarrow M\left(\frac{7}{2}; 1\right)$$



- + Gọi $\Delta: x-y-1=0$ là phân giác trong của góc A

Gọi D là điểm đối xứng của B qua Δ , khi đó $D \in AC$

BD đi qua $B(-4; 1)$ và vuông góc với Δ nên có phương trình: $x+y+3=0$

Khi đó tọa độ giao điểm I của BD và Δ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y+3=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow I(-1; -2)$$

Do I là trung điểm của $BD \Rightarrow D(2; -5)$

- + Khi đó AC đi qua $D(2; -5)$ và $M\left(\frac{7}{2}; 1\right)$ nên có phương trình: $4x-y-13=0$

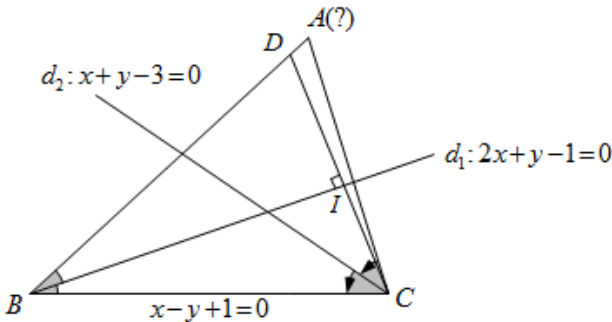
Suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x-y-13=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow A(4; 3)$$

- + Do M là trung điểm của AC nên $C(3; -1)$

Vậy $A(4; 3), C(3; -1)$

Bài 13.



- + Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow B(0; 1)$

+ Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow C(1;2)$

+ Gọi D là điểm đối xứng của C qua d_1 , khi đó $D \in AB$

CD đi qua $C(1;2)$ và vuông góc với d_1 nên có phương trình: $x-2y+3=0$

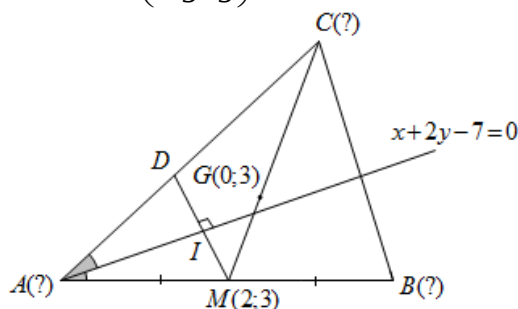
Khi đó tọa độ giao điểm I của CD và d_1 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{5} \\ y=\frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right)$$

Do I là trung điểm của $CD \Rightarrow D\left(-\frac{7}{5}; \frac{4}{5}\right)$

+ AB đi qua $B(0;1)$ và $D\left(-\frac{7}{5}; \frac{4}{5}\right)$ nên có phương trình: $6x-7y+14=0$.

Bài 14.



+ Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 2 = 3.(0-2) \\ y_C - 3 = 3.(3-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -4 \\ y_C = 3 \end{cases} \Rightarrow C(-4;3)$$

+ Gọi D là điểm đối xứng của M qua d , khi đó $D \in AC$

MD đi qua $M(2;3)$ và vuông góc với d nên có phương trình:

$$2x-y-1=0$$

Khi đó tọa độ giao điểm I của MD và d là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{9}{5} \\ y=\frac{13}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{9}{5}; \frac{13}{5}\right)$$

Do I là trung điểm của $MD \Rightarrow D\left(\frac{8}{5}; \frac{11}{5}\right)$

+ AC đi qua $D\left(\frac{8}{5}; \frac{11}{5}\right)$ và $C(-4; 3)$ nên có phương trình : $x + 7y - 17 = 0$.

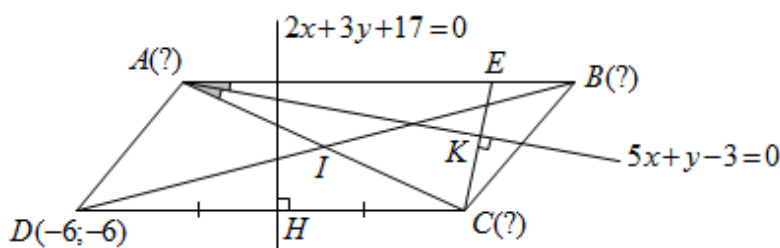
Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 7y - 17 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(3; 2)$$

+ Do M là trung điểm của AB nên suy ra $B(1; 4)$.

Vậy $A(3; 2), B(1; 4), C(-4; 3)$.

Bài 15.



+ Gọi $d_1 : 2x + 3y + 17 = 0$ và $d_2 : 5x + y - 3 = 0$

DC đi qua $D(-6; -6)$ và vuông góc với d_1 nên DC có phương trình:

$$3x - 2y + 6 = 0$$

Khi đó tọa độ giao điểm H của DC và d_1 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - 2y + 6 = 0 \\ 2x + 3y + 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow H(-4; -3)$$

Do H là trung điểm của DC , suy ra $C(-2; 0)$

+ Gọi E là điểm đối xứng của C qua d_2 , khi đó $E \in AB$

CE đi qua $C(-2; 0)$ và vuông góc với d_2 nên có phương trình: $x - 5y + 2 = 0$

Khi đó tọa độ giao điểm K của CE và d_2 là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - 5y + 2 = 0 \\ 5x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Do K là trung điểm của $CE \Rightarrow E(3; 1)$

- + AB đi qua $E(3;1)$ và vuông góc với d_1 nên có phương trình:
 $3x - 2y - 7 = 0$.

Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - 2y - 7 = 0 \\ 5x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow A(1; -2)$$

- + Gọi I là trung điểm của $AC \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$

$ABCD$ là hình bình hành nên I là trung điểm của $BD \Rightarrow B(5; 4)$

Vậy $A(1; -2), B(5; 4), C(-2; 0)$.

9. BÀI TOÁN 9

A. NỘI DUNG BÀI TOÁN 9

- + *Tìm điểm thuộc (E) thỏa mãn điều kiện (*) cho trước.*
 + *Viết phương trình chính tắc của elip (E) .*

B. CÁCH GIẢI CHUNG

Để giải quyết tốt các lớp bài toán liên quan tới Elip (tìm điểm và viết phương trình tắc của elip) trước tiên chúng ta cần nắm được các kiến thức cơ bản qua sơ đồ sau:

C. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

Giải

Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ta có $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{5}}{3}a$

và $2.(2a + 2b) = 20 \Leftrightarrow a + b = 5 \Leftrightarrow b = 5 - a$ (với $0 < a < 5$)

Khi đó ta có: $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = (5 - a)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}a\right)^2$

$$a^2 - 18a + 45 = 0 \Leftrightarrow a = 3 \text{ hoặc } a = 15 \text{ (loại)}$$

Với $a = 3 \Rightarrow b = 2$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$. Viết phương trình đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm phân biệt có tọa độ là các số nguyên.

Giải

$$\text{Gọi } M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{8} + \frac{y_0^2}{2} = 1 \quad (*)$$

$$\Rightarrow y_0^2 \leq 2 \Rightarrow y_0 \in \{-1; 0; 1\} \quad (\text{vì } y_0 \in \mathbb{Z})$$

+ Với $y_0 = \pm 1$ thay vào $(*)$ ta được: $x_0 = \pm 2$ (thỏa mãn)

+ Với $y_0 = 0$ thay vào $(*)$ ta được: $x_0 = \pm 2\sqrt{2}$ (loại)

Suy ra 4 điểm có tọa độ nguyên trên (E) là: $M_1(2;1), M_2(2;-1),$

$M_3(-2;1), M_4(-2;-1)$

Khi đó ta sẽ lập được 6 phương trình đường thẳng d thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $x = 2; x = -2; y = 1; y = -1; x - 2y = 0; x + 2y = 0$.

Nhận xét:

Ở ví dụ trên nếu ta tiếp cận theo cách thông thường là giả sử dạng phương trình của d rồi tìm giao điểm, sau đó sử dụng điều kiện tọa độ nguyên thì chúng ta sẽ gặp khó khăn. Song nếu ta làm theo chiều nghịch thì bài toán sẽ trở nên “nhẹ nhàng” hơn rất nhiều. Bởi ở những bài toán liên quan tới elip (hay cả đường tròn) ta hoàn toàn có thể chặn điều kiện cho x, y khá đơn giản. Vì vậy việc yêu cầu tọa độ nguyên của bài toán, giúp ta nghĩ tới ngay giải pháp trên.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Tìm tọa độ điểm M trên (E) sao cho bán kính qua tiêu của tiêu điểm này bằng 3 lần bán kính qua tiêu của tiêu điểm kia.

Giải

$$+ \text{ Từ } (E): \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$+ \text{ Gọi } M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} MF_1 = a + ex_0 \\ MF_2 = a - ex_0 \end{cases}$$

Từ giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} MF_1 = 3MF_2 \\ MF_2 = 3MF_1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} MF_1 - 3MF_2 = 0 \\ MF_2 - 3MF_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (MF_1 - 3MF_2)(MF_2 - 3MF_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 10MF_1.MF_2 - 3(MF_1^2 + MF_2^2) = 0 \Leftrightarrow 16MF_1.MF_2 - 3(MF_1 + MF_2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 16(a + ex_0).(a - ex_0) - 3.(2a)^2 = 0 \Leftrightarrow 16(a^2 - e^2x_0^2) - 12a^2 \\ &\Leftrightarrow x_0^2 = \frac{a^2}{4e^2} = \frac{3^2}{4.\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{81}{32} \Leftrightarrow x_0 = \pm \frac{9\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

$$+ \text{ Mặt khác } M \in (E) \Rightarrow y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{9} = \frac{23}{32} \Leftrightarrow y_0 = \pm \frac{\sqrt{46}}{8}$$

$$\text{Vậy } M\left(\frac{9\sqrt{2}}{8}; \frac{\sqrt{46}}{8}\right) \text{ hoặc } M\left(\frac{9\sqrt{2}}{8}; -\frac{\sqrt{46}}{8}\right) \text{ hoặc } M\left(-\frac{9\sqrt{2}}{8}; \frac{\sqrt{46}}{8}\right)$$

$$\text{hoặc } M\left(-\frac{9\sqrt{2}}{8}; -\frac{\sqrt{46}}{8}\right)$$

Nhận xét:

Trong giải toán ta biết $A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$, và ta thường chỉ quen với chiều biến

đổi thuận. Nhưng trong nhiều trường hợp, việc biến đổi theo chiều ngược lại sẽ giúp giải bài toán ngắn gọn hơn rất nhiều, mà ví dụ trên là một điển hình.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(-\sqrt{3}; 1)$, đường elip (E) đi qua điểm M và khoảng cách giữa hai đường chuẩn của (E) là 6. Lập phương trình chính tắc của (E).

Giải

+ Gọi phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$

+ Elip (E) có hai phương trình đường chuẩn là $x = \frac{a}{e}$ và $x = -\frac{a}{e}$

Do đó khoảng cách giữa hai đường chuẩn là:

$$2\frac{a}{e} = \frac{2a^2}{c} = 6 \Leftrightarrow a^2 = 3c \Leftrightarrow a^4 = 9c^2 = 9(a^2 - b^2) \Leftrightarrow b^2 = \frac{9a^2 - a^4}{9} \quad (1)$$

KHANG VIET

$$+ \text{ Mặt khác } M(-\sqrt{3}; 1) \in (E) \Rightarrow \frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) và rút gọn ta được: $a^4 - 12a^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 6 \Rightarrow b^2 = 2$

Vậy phương trình (E) cần lập là: $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng có một đỉnh và hai tiêu điểm của (E) tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở của (E) là $12(2 + \sqrt{3})$.

Giải

$$+ \text{ Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{với } a > b > 0$$

Ta có chu vi hình chữ nhật cơ sở: $4(a + b) = 12(2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow a + b = 3(2 + \sqrt{3}) \quad (1)$

+ Không mất tính tổng quát ta giả sử đỉnh $B(0; b)$ và hai tiêu điểm $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ tạo thành tam giác đều.

Do $\triangle BF_1F_2$ luôn cân tại B, nên $\triangle BF_1F_2$ đều khi

$$BF_1 = F_1F_2 \Leftrightarrow BF_1^2 = F_1F_2^2 \Leftrightarrow c^2 + b^2 = 4c^2 \Leftrightarrow c^2 = \frac{b^2}{3}$$

$$+ \text{ Khi đó } a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{4}{3}b^2 \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{3}b \quad (2) \text{ (do } a, b > 0)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}b + b = 3(2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow \sqrt{3}b(2 + \sqrt{3}) = 9(2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow b = 3\sqrt{3} \Rightarrow a = 6$$

$$+ \text{ Vậy phương trình chính tắc của elip (E) cần lập là: } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$$

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E) có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}; 0), F_2(\sqrt{3}; 0)$ và đi qua điểm $A(\sqrt{3}; \frac{1}{2})$. Lập phương trình chính tắc của (E) và với mọi điểm M thuộc (E), hãy tính giá trị biểu thức $P = MF_1^2 + MF_2^2 - 3OM^2 - MF_1 \cdot MF_2$

Giải

* Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$

(E) có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}; 0), F_2(\sqrt{3}; 0)$, suy ra $c = \sqrt{3}$

+ Khi đó $a^2 - b^2 = c^2 = 3 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + 3 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{b^2 + 3} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

+ Với $A\left(\sqrt{3}; \frac{1}{2}\right) \in (E) \Leftrightarrow \frac{3}{b^2 + 3} + \frac{1}{4b^2} = 1$

$$4b^2 - b^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (4b^2 + 3)(b^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 4$$

Vậy phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

* Gọi $M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} MF_1 = a + \frac{c}{a}x_0; & MF_2 = a - \frac{c}{a}x_0 \\ OM^2 = x_0^2 + y_0^2; & \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= \left(a + \frac{c}{a}x_0\right)^2 + \left(a - \frac{c}{a}x_0\right)^2 - 3(x_0^2 + y_0^2) - \left(a + \frac{c}{a}x_0\right)\left(a - \frac{c}{a}x_0\right) \\ &= a^2 + \frac{3c^2}{a^2}x_0^2 - 3(x_0^2 + y_0^2) = 4 + \frac{9}{4}x_0^2 - 3(x_0^2 + y_0^2) = 4 - 3\left(\frac{x_0^2}{4} + y_0^2\right) = 4 - 3 = 1 \end{aligned}$$

Vậy $P = 1$.

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. Đường thẳng $\Delta: x - \sqrt{2}y = 0$ cắt (E) tại hai điểm B, C. Tìm tọa độ điểm A trên (E) sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Giải

+ Do $\Delta \cap (E) = \{B; C\}$ nên B, C cố định hay độ dài BC không đổi.

Suy ra diện tích ABC lớn nhất khi khoảng cách $h = d(A, \Delta)$ lớn nhất.

+ Phương trình tham số của (E): $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\sin t \\ y = 2\cos t \end{cases}$ nên gọi $A(2\sqrt{2}\sin t; 2\cos t)$

Khi đó

$$h = d(A, \Delta) = \frac{|2\sqrt{2} \sin t - 2\sqrt{2} \cos t|}{\sqrt{3}} = \frac{|2\sqrt{2}(\sin t - \cos t)|}{\sqrt{3}} = \frac{\left|4 \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right|}{\sqrt{3}} \leq \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Dấu “=” xảy ra khi: $\left|\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ t = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

+ Với $t = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \Rightarrow A(2; -\sqrt{2})$

+ Với $t = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \Rightarrow A(-2; \sqrt{2})$

Vậy $A(2; -\sqrt{2})$ hoặc $A(-2; \sqrt{2})$.

Nhận xét :

Ngoài cách để (E) dưới dạng chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong nhiều bài toán các bạn có thể chuyển nó về dạng tham số sau : $\begin{cases} x = a \sin t \\ y = b \cos t \end{cases}$ để việc tham số hóa điểm thuộc elip được dễ dàng hơn.

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2 (hoành độ của F_1 âm). Tìm tọa độ điểm M thuộc elip sao cho $\widehat{MF_1F_2} = 60^\circ$.

Giải

+ (E) có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$,

suy ra $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2 \Rightarrow \begin{cases} F_1(-2; 0) \\ F_2(2; 0) \end{cases}$

+ $M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} MF_1 = a + \frac{c}{a}x_0 = 3 + \frac{2}{3}x_0; & MF_2 = a - \frac{c}{a}x_0 = 3 - \frac{2}{3}x_0 \\ \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{5} = 1 & (*) \end{cases}$

$$\text{Ta có } MF_2^2 = MF_1^2 + F_1F_2^2 - 2MF_1.F_1F_2.\cos \widehat{MF_1F_2}$$

$$\Leftrightarrow \left(3 - \frac{2}{3}x_0\right)^2 = \left(3 + \frac{2}{3}x_0\right)^2 + 4^2 - 2\left(3 + \frac{2}{3}x_0\right).4.\cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow 4x_0 = -3 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{3}{4}$$

$$+ \text{ Thay } x_0 = -\frac{3}{4} \text{ vào (*) ta được: } y_0^2 = \frac{75}{16} \Leftrightarrow y_0 = \pm \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

$$\text{Vậy } M\left(-\frac{3}{4}; \frac{5\sqrt{5}}{4}\right) \text{ hoặc } M\left(-\frac{3}{4}; -\frac{5\sqrt{5}}{4}\right).$$

Ví dụ 9 (A – 2012). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) , biết rằng (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông.

Phân tích hướng giải:

$$+ \text{ Phương trình (E): } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ như vậy ta cần tìm } a; b$$

$$+ (E) \text{ có độ dài trục lớn bằng } 8 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

+ Dữ kiện (E) cắt (C) tại bốn điểm phân biệt tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông nên 4 đỉnh nằm trên hai đường phân giác thuộc góc phần tư thứ nhất và thứ hai. Ta giả sử có đỉnh A thuộc đường phân giác $\Delta: y = x$. Vậy việc tìm tọa độ điểm A quay về **Bài toán 1** nhờ:

$$++ A \in \Delta: y = x;$$

$$++ AO = R = 2\sqrt{2} \text{ (hay } A \in (C))$$

$$+ \text{ Mà } A \in (E) \Rightarrow b \rightarrow \text{phương trình (E).}$$

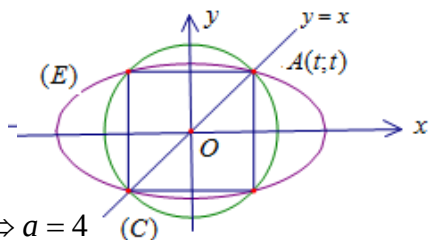
Giải

Gọi phương trình chính tắc của

$$\text{elip (E) có dạng: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$+ (E) \text{ có độ dài trục lớn bằng } 8 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

+ (E) cắt (C) tại bốn điểm phân biệt tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông nên 4 đỉnh nằm trên hai đường phân giác thuộc góc phần tư thứ nhất và thứ hai.



Ta giả sử A là một giao điểm của (E) và (C) thuộc đường phân giác $\Delta: y = x$.

+ Gọi $A(t; t) \in \Delta$ ($t > 0$).

Ta có: $A \in (C) \Rightarrow t^2 + t^2 = 8 \Leftrightarrow t = 2$ (vì $t > 0$) $\Rightarrow A(2; 2)$

+ Mà $A \in (E) \Rightarrow \frac{2^2}{4^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{16}{3}$.

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1$

Ví dụ 10 (B – 2012). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2BD$ và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2 + y^2 = 4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh A, B, C, D của hình thoi. Biết A thuộc trục Ox .

Phân tích hướng giải:

+ Phương trình $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) như vậy ta cần tìm $a; b$

+ Vì (E) đi qua các đỉnh A, B, C, D và $A \in Ox$ nên gọi $A(a; 0) \in Ox$ và $B(0; b) \in Oy$

+ Khai thác dữ kiện: $AC = 2BD \rightarrow f_1(a, b) = 0$ (1)

+ Khai thác dữ kiện: đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ tiếp xúc với các cạnh của hình thoi $\rightarrow f_2(a, b) = 0$ (2)

Từ (1) và (2) $\rightarrow a^2 = ?$ và $b^2 = ? \rightarrow$ phương trình (E) .

Giải

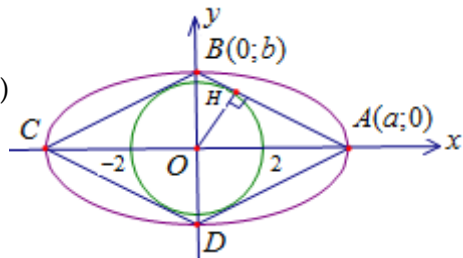
Gọi phương trình chính tắc của

elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (với $a > b > 0$)

Vì (E) đi qua các đỉnh A, B, C, D

và $A \in Ox$ nên không mất tính

tổng quát, ta giả sử: $A(a; 0)$ và $B(0; b)$.



Mà hình thoi $ABCD$ có $AC = 2BD \Leftrightarrow 2OA = 4OB \Leftrightarrow OA = 2OB$

$\Leftrightarrow a = 2b$ (vì $a > b > 0$) hay $A(2b; 0)$ và $B(0; b)$

Gọi H là hình chiếu của O lên AB

$\Rightarrow OH = R = 2$ (vì đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ tiếp xúc với các cạnh của hình thoi)

Xét tam giác OAB ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$

hay $\frac{1}{4} = \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{b^2} \Leftrightarrow b^2 = 5 \Rightarrow a^2 = 4b^2 = 20$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$

Ví dụ 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Lập phương trình chính tắc của elip (E) có tâm sai bằng $\frac{3}{5}$, biết diện tích của tứ giác tạo bởi các tiêu điểm và các đỉnh trên trục bé của (E) bằng 24.

Giải

+ Gọi phương trình chính tắc của

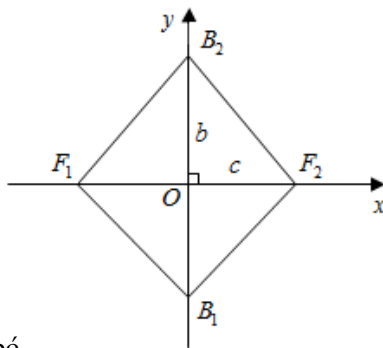
elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với

$a > b > 0$ và $a^2 = b^2 + c^2$

Ta có tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow a = \frac{5}{3}c$

+ Gọi $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ là các tiêu điểm

và $B_1(0; -b), B_2(0; b)$ là các đỉnh trên trục bé.



Suy ra $F_1B_2F_2B_1$ là hình thoi,

khi đó: $S_{F_1B_2F_2B_1} = \frac{1}{2} F_1F_2 \cdot B_1B_2 = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot 2b = 2bc = 24 \Leftrightarrow bc = 12 \Leftrightarrow b = \frac{12}{c}$

Khi đó $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}c\right)^2 = \left(\frac{12}{c}\right)^2 + c^2$

$\Leftrightarrow 25c^2 = 1296 + 9c^4 \Leftrightarrow c^4 = 81 \Leftrightarrow c = 3$ (do $c > 0$)

Suy ra $a = 5; b = 4$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) cần lập là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Ví dụ 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E) có tâm sai $e = \frac{4}{5}$, đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của elip có phương trình $x^2 + y^2 = 34$. Viết phương trình chính tắc của elip và tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho M nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc vuông và M có hoành độ dương.

Giải

+ Gọi phương trình chính tắc của

elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với

$a > b > 0$

Ta có tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow c = \frac{4}{5}a$

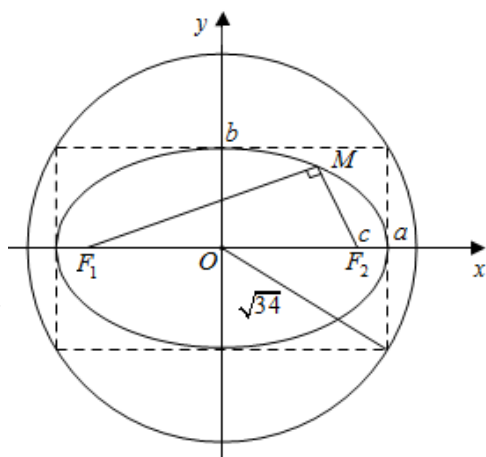
Vì đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở có bán kính:

$$R = \sqrt{34} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{34}$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 34 - a^2$$

$$\text{Khi đó } a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = 34 - a^2 + \left(\frac{4}{5}a\right)^2 \Leftrightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5; b = 3; c = 4.$$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) cần lập là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$



Ví dụ 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36$ có hai tiêu điểm F_1 và F_2 với F_1 có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1^2 + 2MF_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Giải

$$+ \text{ Ta có } (E): 4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

$$\text{suy ra } \begin{cases} a=3; & b=2 \\ c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$+ \text{ Gọi } M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} MF_1 = a + ex_0; & MF_2 = a - ex_0 \\ \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} = 1 \quad (*) \end{cases} \quad \text{với } -3 \leq x_0 \leq 3$$

$$\text{Khi đó } P = MF_1^2 + 2MF_2^2 = (a + ex_0)^2 + 2(a - ex_0)^2 :$$

$$= 3a^2 - 2aex_0 + 3e^2x_0^2 = \frac{5}{3} \left(x_0^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}x_0 + \frac{81}{5} \right)$$

$$+ \text{ Xét hàm } f(x_0) = x_0^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}x_0 + \frac{81}{5} \text{ với } x_0 \in [-3; 3]$$

$$\text{Ta có } f'(x_0) = 2x_0 - \frac{6}{\sqrt{5}}; \quad f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{\sqrt{5}} \in [-3; 3]$$

x_0	-3	$\frac{3}{\sqrt{5}}$	3
$f'(x_0)$	-	0	+
$f(x_0)$		$\frac{108}{5}$	

$$\text{Từ bảng biến thiên suy ra } \min_{x_0 \in [-3; 3]} f(x_0) = \frac{108}{5} \Rightarrow \min P = \frac{5}{3} f(x_0) = 30 \text{ khi } x_0 = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$+ \text{ Thay } x_0 = \frac{3}{\sqrt{5}} \text{ vào } (*), \text{ ta được: } y_0^2 = \frac{16}{5} \Leftrightarrow y_0 = \pm \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Vậy } MF_1^2 + 2MF_2^2 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất khi } M\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right) \text{ hoặc } M\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; -\frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

Ví dụ 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và điểm $I(1; 2)$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua I , cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho I là trung điểm của AB .

Giải

+ $I(1; 2)$ thuộc miền trong của (E) nên d luôn cắt (E) tại A, B

Gọi phương trình đường thẳng d có dạng: $\begin{cases} x = 1 + mt \\ y = 2 + nt \end{cases}$ với

$$t \in \mathbb{R}, m^2 + n^2 \neq 0.$$

+ Gọi $A(1 + mt_1; 2 + nt_1), B(1 + mt_2; 2 + nt_2)$. Trong đó t_1, t_2 là nghiệm của phương trình:

$$\frac{(1 + mt)^2}{16} + \frac{(2 + nt)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow (9m^2 + 16n^2)t^2 + 2(9m + 32n)t - 71 = 0$$

$$\text{Theo hệ thức Vi - et ta có: } t_1 + t_2 = -\frac{2(9m + 32n)}{9m^2 + 16n^2}$$

+ I là trung điểm của AB khi $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_I \\ y_A + y_B = 2y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + m(t_1 + t_2) = 2 \\ 4 + n(t_1 + t_2) = 4 \end{cases}$

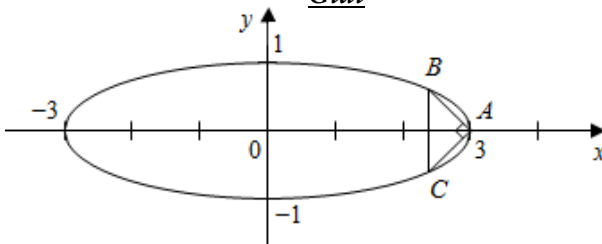
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(t_1 + t_2) = 0 \\ n(t_1 + t_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2m(9m + 32n)}{9m^2 + 16n^2} = 0 \\ -\frac{2n(9m + 32n)}{9m^2 + 16n^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9m + 32n = 0 \quad (\text{do } m^2 + n^2 \neq 0)$$

$$\text{Với } 9m + 32n = 0 \Leftrightarrow 9m = -32n, \text{ ta chọn } \begin{cases} m = 32 \\ n = -9 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra phương trình } d: \begin{cases} x = 1 + 32t \\ y = 2 - 9t \end{cases} \text{ hay } 9x + 32y - 73 = 0$$

Ví dụ 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(3; 0)$ và elip $(E): \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Tìm tọa độ các điểm B, C thuộc (E) sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

Giải



+ Ta có B, C thuộc (E) và tam giác ABC vuông cân tại A .

Mặt khác $A(3;0) \in Ox$ và elip (E) nhận Ox, Oy làm các trục đối xứng nên B, C sẽ đối xứng nhau qua trục Ox .

Do đó gọi $\begin{cases} B(m; n) \\ C(m; -n) \end{cases}$ với $n \neq 0$

+ Suy ra $\begin{cases} \overline{AB} = (m-3; n) \\ \overline{AC} = (m-3; -n) \end{cases}'$

khi đó $\begin{cases} B, C \in (E) \\ \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2}{9} + n^2 = 1 \\ (m-3)^2 - n^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2}{9} + n^2 = 1 \\ n^2 = (m-3)^2 \end{cases}$

Suy ra $\frac{m^2}{9} + (m-3)^2 = 1 \Leftrightarrow 5m^2 - 27m + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{12}{5} \end{cases}$

+ Với $m = 3 \Rightarrow n = 0$ (loại)

+ Với $m = \frac{12}{5} \Rightarrow n = \pm \frac{3}{5}$, suy ra $\begin{cases} B\left(\frac{12}{5}; \frac{3}{5}\right) \\ C\left(\frac{12}{5}; -\frac{3}{5}\right) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} B\left(\frac{12}{5}; -\frac{3}{5}\right) \\ C\left(\frac{12}{5}; \frac{3}{5}\right) \end{cases}$.

Ví dụ 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ điểm

$M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M cắt E tại hai điểm

A, B sao cho $MA = 2MB$.

Giải

+ Gọi $B(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0^2 + 4y_0^2 - 4 = 0$ (1)

+ Do M nằm trong (E) nên từ $MA = 2MB$

$$\Rightarrow \overline{MA} = -2\overline{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - \frac{2}{3} = -2\left(x_0 - \frac{2}{3}\right) \\ y_A - \frac{2}{3} = -2\left(y_0 - \frac{2}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 2 - 2x_0 \\ y_A = 2 - 2y_0 \end{cases} \Rightarrow A(2 - 2x_0; 2 - 2y_0)$$

$$+ \text{ Mà } A \in (E) \Rightarrow \frac{(2-2x_0)^2}{4} + (2-2y_0)^2 = 1 \Leftrightarrow x_0^2 + 4y_0^2 - 2x_0 - 8y_0 + 4 = 0 \quad (2)$$

+ Từ (1) và (2) ta được hệ:

$$\begin{cases} x_0^2 + 4y_0^2 - 4 = 0 \\ x_0^2 + 4y_0^2 - 2x_0 - 8y_0 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0; y_0 = 1 \\ x_0 = \frac{8}{5}; y_0 = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(0;1) \\ B\left(\frac{8}{5}; \frac{3}{5}\right) \end{cases}$$

$$\text{Với } B(0;1) \Rightarrow \Delta: x + 2y - 2 = 0 ; \text{ Với } B\left(\frac{8}{5}; \frac{3}{5}\right) \Rightarrow \Delta: x + 14y - 10 = 0$$

Vậy $x + 2y - 2 = 0$ hoặc $x + 14y - 10 = 0$.

D. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình chính tắc của elip (E)

có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$ và độ dài đường chéo hình chữ nhật cơ sở bằng $2\sqrt{5}$.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E) có phương trình

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ và } M(1; -1). \text{ Một đường thẳng } d \text{ đi qua } M \text{ cắt } (E) \text{ tại } A, B \text{ sao}$$

cho $MA \cdot MB$ lớn nhất. Tìm tọa độ A, B

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Lập phương trình chính tắc của elip biết

điểm $M\left(\sqrt{\frac{8}{3}}; \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ thuộc elíp và tam giác F_1MF_2 vuông tại M , trong đó

F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elíp.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Viết phương trình chính tắc của elip (E)

biết rằng elip (E) có hai tiêu điểm F_1 và F_2 với $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ và có một điểm

M thuộc (E) sao cho tam giác F_1MF_2 vuông tại M và có diện tích bằng 1.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Viết phương trình chính tắc của elíp đi

qua điểm $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và tiêu điểm của elíp nhìn trực góc với một góc 60° .

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. Giả sử F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip, trong đó F_1 có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M trên (E) sao cho $MF_1 - MF_2 = 2$.

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Tìm điểm M thuộc elip sao cho góc $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$ với F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip.

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Viết phương trình chính tắc của elip, biết hai tiêu điểm cùng với hai đỉnh trên trục bé xác định một hình vuông và phương trình hai đường chuẩn là $x = \pm 8$.

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2 . Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2 bằng $\frac{4}{3}$.

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng khi điểm M thay đổi trên (E) thì độ dài nhỏ nhất của OM bằng 4 và độ dài lớn nhất của MF_1 bằng 8, với F_1 là tiêu điểm có hoành độ âm.

E. GIẢI BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1.

- + Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$

$$\text{Tâm sai } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow c^2 = \frac{a^2}{3}$$

Độ dài đường chéo hình chữ nhật

$$\sqrt{(2a)^2 + (2b)^2} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5 \Leftrightarrow b^2 = 5 - a^2$$

- + Khi đó $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = 5 - a^2 + \frac{a^2}{3} \Leftrightarrow a^2 = 3 \Rightarrow b^2 = 2$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) cần lập là: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

Bài 2.

- + $M(1; -1)$ thuộc miền trong của (E) nên d luôn cắt (E) tại A, B

Gọi phương trình đường thẳng d có dạng: $\begin{cases} x = 1 + mt \\ y = -1 + nt \end{cases}$ với

$$t \in \mathbb{R}, m^2 + n^2 \neq 0.$$

- + Gọi $A(1 + mt_1; -1 + nt_1), B(1 + mt_2; -1 + nt_2)$.

Trong đó t_1, t_2 là nghiệm của phương trình:

$$\frac{(1 + mt)^2}{8} + \frac{(-1 + nt)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow (m^2 + 2n^2)t^2 + 2(m - 2n)t - 5 = 0$$

Theo hệ thức Vi - et, ta có: $t_1 t_2 = -\frac{5}{m^2 + 2n^2}$

- + Khi đó $MA \cdot MB = \sqrt{(mt_1)^2 + (nt_1)^2} \cdot \sqrt{(mt_2)^2 + (nt_2)^2}$
 $= (m^2 + n^2) |t_1 t_2| = \frac{5(m^2 + n^2)}{m^2 + 2n^2} = \frac{5}{2 - \frac{m^2}{m^2 + n^2}}$

Mặt khác $0 \leq \frac{m^2}{m^2 + n^2} \leq 1$, do đó $MA \cdot MB$ lớn nhất khi và chỉ khi

$$\frac{m^2}{m^2 + n^2} = 1 \Leftrightarrow n = 0$$

Khi đó đường thẳng d có dạng : $y = -1$, suy ra tọa độ giao điểm A, B của d và (E) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 6 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{6} \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(\sqrt{6}; -1) \\ B(-\sqrt{6}; -1) \end{cases}$$

hoặc $\begin{cases} A(-\sqrt{6}; -1) \\ B(\sqrt{6}; -1) \end{cases}$.

Vậy $\begin{cases} A(\sqrt{6}; -1) \\ B(-\sqrt{6}; -1) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A(-\sqrt{6}; -1) \\ B(\sqrt{6}; -1) \end{cases}$.

Bài 3.

+ Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

với $a > b > 0$ và $a^2 = b^2 + c^2$

Khi đó $M\left(\sqrt{\frac{8}{3}}; \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \in (E) \Leftrightarrow \frac{8}{3a^2} + \frac{1}{3b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 + 8b^2 = 3a^2b^2$ (1)

+ Với $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$, khi đó tam giác F_1MF_2 vuông tại M nên ta suy ra:

$$MF_1^2 + MF_2^2 = F_1F_2^2 \Leftrightarrow \left(c + \sqrt{\frac{8}{3}}\right)^2 + \frac{1}{3} + \left(c - \sqrt{\frac{8}{3}}\right)^2 + \frac{1}{3} = 4c^2 \Leftrightarrow c^2 = 3$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 3 \quad (2)$$

+ Thay (2) vào (1), ta được:

$$b^2 + 3 + 8b^2 = 3(b^2 + 3)b^2 \Leftrightarrow b^4 = 1 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 4$$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) cần lập là: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Bài 4.

+ Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$

Với $F_1(-\sqrt{3}; 0)$, suy ra $c = \sqrt{3} \Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 = 3$ hay $a^2 = b^2 + 3$ (1)

$$+ \text{ Gọi } M(x_0; y_0) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MF_1} = (-\sqrt{3} - x_0; -y_0) \\ \overrightarrow{MF_2} = (\sqrt{3} - x_0; -y_0) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \widehat{F_1MF_2} = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 3 + y_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = 3$$

$$\text{Ta có } S_{F_1MF_2} = \frac{1}{2} d(M, Ox) \cdot F_1F_2 = \frac{1}{2} |y_0| \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3} |y_0| = 1 \Leftrightarrow y_0^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$+ \text{ Mặt khác } M(x_0; y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{8}{3a^2} + \frac{1}{3b^2} = 1 \quad (2)$$

$$\text{Thay (1) vào (2), ta được: } \frac{8}{3(b^2 + 3)} + \frac{1}{3b^2} = 1 \Leftrightarrow 3b^4 = 3 \Leftrightarrow b = 1 \quad (\text{do}$$

$$b > 0) \Rightarrow a^2 = 4.$$

$$\text{Vậy phương trình chính tắc của elip (E) cần lập là: } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

Bài 5.

$$+ \text{ Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{với } a > b > 0$$

Gọi $F_1(-c; 0)$ là tiêu điểm của (E) và $B_1(0; -b), B_2(0; b)$ là hai đỉnh thuộc trục nhỏ của (E)

$$+ \text{ Do } \Delta F_1B_1B_2 \text{ cân tại } F_1 \text{ và } \widehat{B_1F_1B_2} = 60^\circ, \text{ suy ra } \Delta F_1B_1B_2 \text{ đều.}$$

$$\text{Khi đó: } F_1B_1 = B_1B_2 \Leftrightarrow F_1B_1^2 = B_1B_2^2 \Leftrightarrow c^2 + b^2 = (2b)^2 \Leftrightarrow c^2 = 3b^2$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = 4b^2 \quad (1)$$

$$+ \text{ Với } M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in (E) \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \quad (2)$$

$$\text{Thay (1) vào (2), ta được: } \frac{1}{4b^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 4$$

$$\text{Vậy phương trình chính tắc của elip (E) cần lập là: } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

Bài 6.

$$+ (E) \text{ có phương trình } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = 2 \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2 \end{cases}$$

+ Gọi

$$M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} MF_1 = a + \frac{cx_0}{a} = 2\sqrt{2} + \frac{2x_0}{2\sqrt{2}} \\ MF_2 = a - \frac{cx_0}{a} = 2\sqrt{2} - \frac{2x_0}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow MF_1 - MF_2 = \sqrt{2}x_0$$

+ Khi đó $MF_1 - MF_2 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2}x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = \sqrt{2}$

+ Với $x_0 = \sqrt{2} \Rightarrow y_0^2 = 4\left(1 - \frac{x_0^2}{8}\right) = 4\left(1 - \frac{2}{8}\right) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \sqrt{3} \\ y_0 = -\sqrt{3} \end{cases}$

Vậy $M(\sqrt{2}; \sqrt{3})$ hoặc $M(\sqrt{2}; -\sqrt{3})$.

Bài 7.

+ Elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 5; & b = 3 \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4 \end{cases}$

+ Gọi $M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} MF_1 = a + \frac{c}{a}x_0 = 5 + \frac{4}{5}x_0; & MF_2 = a - \frac{c}{a}x_0 = 5 - \frac{4}{5}x_0 \\ \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} = 1 & (*) \end{cases}$

với $x_0 > 0$.

Do $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$ nên suy ra :

$$MF_1^2 + MF_2^2 = F_1F_2^2 \Leftrightarrow \left(5 + \frac{4}{5}x_0\right)^2 + \left(5 - \frac{4}{5}x_0\right)^2 = 64 \Leftrightarrow 8x_0^2 = 175 \Leftrightarrow x_0 = \pm \frac{5\sqrt{14}}{4}$$

+ Thay $x_0 = \pm \frac{5\sqrt{14}}{4}$ vào (*) ta được: $\frac{7}{8} + \frac{y_0^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y_0^2 = \frac{9}{8} \Leftrightarrow y_0 = \pm \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Vậy $M\left(\frac{5\sqrt{14}}{4}; \frac{3\sqrt{2}}{4}\right),$

$$M\left(\frac{5\sqrt{14}}{4}; -\frac{3\sqrt{2}}{4}\right), M\left(-\frac{5\sqrt{14}}{4}; \frac{3\sqrt{2}}{4}\right), M\left(-\frac{5\sqrt{14}}{4}; -\frac{3\sqrt{2}}{4}\right).$$

Bài 8.

+ Ta có hai tiêu điểm $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ và hai đỉnh $B_1(0; -b), B_2(0; b)$ thuộc trục nhỏ xác định một hình vuông nên ta có $b = c$

- + Elip có phương trình đường chuẩn $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c} \Rightarrow \frac{a^2}{c} = 8 \Leftrightarrow a^2 = 8c$
- + Khi đó: $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 8c = c^2 + c^2 \Leftrightarrow c = 4 > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 32 \\ b = 4 \end{cases}$
- + Suy ra phương trình chính tắc của elip là: $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Bài 9.

- + Từ (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4 \end{cases}$
- $\Rightarrow p_{MF_1F_2} = \frac{MF_1 + MF_2 + F_1F_2}{2} = \frac{2a + 2c}{2} = a + c = 9$
- + Suy ra diện tích tam giác MF_1F_2 là: $S_{MF_1F_2} = pr = 9 \cdot \frac{4}{3} = 12$

+ Mặt khác, ta có:

$$S_{MF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot d(M, Ox) \cdot F_1F_2 = \frac{1}{2} \cdot |y_M| \cdot 2c = 4|y_M| \Rightarrow |y_M| = \frac{S_{MF_1F_2}}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

- + Vì $M(x_M; y_M) \in (E) \Rightarrow \frac{x_M^2}{25} + \frac{9}{9} = 1 \Leftrightarrow x_M = 0 \Rightarrow \begin{cases} M(0; 3) \\ M(0; -3) \end{cases}$

Vậy $M(0; 3)$ hoặc $M(0; -3)$.

Bài 10.

- + Gọi phương trình chính tắc của elip (E) cần lập là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$.

$$\text{Gọi } M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} -a \leq x_0 \leq a \\ MF_1 = a + \frac{cx_0}{a} \Rightarrow a - c \leq MF_1 \leq a + c \end{cases}$$

Suy ra độ dài MF_1 lớn nhất bằng: $a + c = 8$ (1)

- + Ta lại có: $M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} a > b \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} \leq \frac{x_0^2}{b^2} \\ \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow 1 = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \leq \frac{x_0^2}{b^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{b^2} = \frac{OM^2}{b^2} \Rightarrow OM \geq b$$

Suy ra độ dài nhỏ nhất của OM bằng $b = 4$ (2)

$$\text{Từ (1) và (2) ta được: } \begin{cases} a+c=8 \\ b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\sqrt{a^2-16}=8 \\ b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=4 \end{cases}$$

Vậy phương trình elip (E) cần lập là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

$$+ \text{ Gọi } M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} MF_1 = a + \frac{c}{a}x_0 = 5 + \frac{4}{5}x_0; & MF_2 = a - \frac{c}{a}x_0 = 5 - \frac{4}{5}x_0 \\ \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} = 1 & (*) \end{cases}$$

với $x_0 > 0$

Do $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$ nên suy ra :

$$MF_1^2 + MF_2^2 = F_1F_2^2 \Leftrightarrow \left(5 + \frac{4}{5}x_0\right)^2 + \left(5 - \frac{4}{5}x_0\right)^2 = 64 \Leftrightarrow 8x_0^2 = 175 \Leftrightarrow x_0 = \frac{5\sqrt{14}}{4}$$

$$\text{hoặc } x_0 = -\frac{5\sqrt{14}}{4} \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ Thay } x_0 = \frac{5\sqrt{14}}{4} \text{ vào (*) ta được: } \frac{7}{8} + \frac{y_0^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y_0^2 = \frac{9}{8} \Leftrightarrow y_0 = \pm \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Vậy } M\left(\frac{5\sqrt{14}}{4}; \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) \text{ hoặc } M\left(\frac{5\sqrt{14}}{4}; -\frac{3\sqrt{2}}{4}\right).$$

10. BÀI TOÁN 10

A. NỘI DUNG BÀI TOÁN 10

Cho đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm A, B . Viết phương trình đường thẳng AB .

B. CÁCH GIẢI CHUNG

Cách 1: Tọa độ A, B là nghiệm của hệ $\begin{cases} (C_1) \\ (C_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \\ B \end{cases} \Rightarrow \text{Phương trình } AB.$

Cách 2: Giả sử $(C_1): x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$

và $(C_2): x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$$

Suy ra phương trình $AB: (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$

Chú ý:

+ Ở **cách giải 2** có một ưu điểm hơn so với **cách giải 1** là ta không cần biết tọa độ điểm A, B song hoàn toàn viết được phương trình AB . Trong khi đó ở **cách 1** để viết phương trình AB ta cần tìm được cụ thể tọa độ hai điểm A, B .

+ **Cách 1** sẽ phù hợp cho những bài toán cần tìm cụ thể tọa độ giao điểm hai đường tròn tường minh. Còn **cách 2** sẽ thích hợp cho những bài toán chứa tham số (ít nhất một trong hai phương trình đường tròn chưa tường minh).

C. VÍ DỤ GỐC

Cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$

và $(C_2): x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$ cắt nhau tại hai điểm A, B . Viết phương trình đường thẳng AB .

Giải

Cách 1: Tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 2 \\ x = 3; y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1; 2), B(3; -2) \\ A(3; -2), B(1; 2) \end{cases}$$

Suy ra phương trình đường thẳng $AB: 2x + y - 4 = 0$

Cách 2: Tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow 12x + 6y - 24 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$$

Vậy phương trình đường thẳng $AB: 2x + y - 4 = 0$

D. CÁC VÍ DỤ MỞ RỘNG

Ví dụ 1 (Khối B – 2006). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm $M(-3; 1)$. Gọi A và B là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C) . Viết phương trình đường thẳng AB .

Phân tích hướng giải:

* Ở bài toán này, ta dễ nhận thấy $AB \perp MI$ (với I là tâm của đường tròn (C)). Do đó hướng đầu tiên chúng ta thường nghĩ tới là cố gắng tìm ra được tọa độ một trong hai điểm A hoặc B.

* Ta hoàn toàn có thể tính được độ dài đoạn $MA = MB = \sqrt{MI^2 - IA^2} = h$. Nghĩa là ngoài A, B đang thuộc (C) thì A, B cũng thuộc cả đường tròn (M, h) . Như vậy việc viết phương trình AB được chuyển về nội dung **Bài toán 10**. Trong ví dụ này ta sẽ trình bày theo **cách thứ 2** sau:

Giải

+ Đường tròn (C) có tâm $I(1;3)$

và bán kính $R = IA = 2$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MI &= 2\sqrt{5}, \text{ khi đó } MB = MA \\ &= \sqrt{MI^2 - IA^2} = \sqrt{20 - 4} = 4 \end{aligned}$$

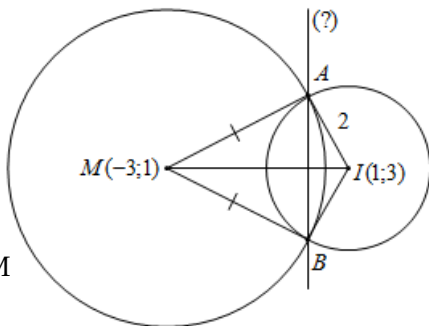
+ Suy ra A, B nằm trên đường tròn tâm M $(-3; 1)$ bán kính bằng 4 , có phương trình:

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$$

+ Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow 8x + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0$$

+ Vậy phương trình đường thẳng AB là: $2x + y - 3 = 0$



Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-4)^2 + y^2 = 4$ và điểm $E(4;1)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục tung, sao cho từ điểm M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (với A, B là các tiếp điểm) sao cho AB đi qua E .

Giải

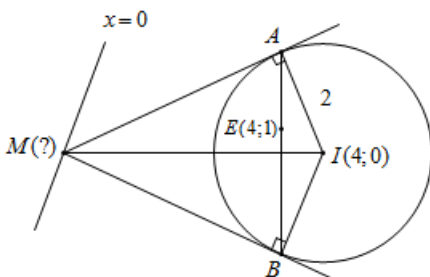
+ Đường tròn (C) có tâm $I(4;0)$ và bán kính $R = 2$

$$\begin{aligned} + \text{ Gọi } M(0; m) \in Oy &\Rightarrow IM^2 = m^2 + 16 \\ \Rightarrow MA^2 = MB^2 &= MI^2 - R^2 = m^2 + 12 \end{aligned}$$

Suy ra A, B thuộc đường tròn tâm M bán kính MA có phương trình:
 $x^2 + (y-m)^2 = m^2 + 12$

+ Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + (y-m)^2 = m^2 + 12 \\ (x-4)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2my - 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x - my - 12 = 0$$



Suy ra phương trình $AB: 4x - my - 12 = 0$

+ Mặt khác $E(4;1) \in AB \Rightarrow 16 - m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 4 \Rightarrow M(0;4)$.

Vậy $M(0;4)$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(6;6)$ và ngoại tiếp đường tròn tâm $J(4;5)$. Biết điểm $A(2;3)$ và hoành độ điểm B nhỏ hơn hoành độ điểm C . Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC .

Giải

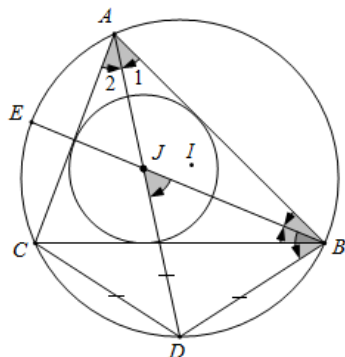
Đường tròn ngoại tiếp ABC có tâm $I(6;6)$ và bán kính $IA = 5$ nên có phương trình: $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 25$

Ta có AD đi qua $A(2;3), J(4;5)$

nên có phương trình: $x - y + 1 = 0$

Khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-6)^2 + (y-6)^2 = 25 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ x = 9 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(2;3) \equiv A \\ D(9;10) \end{cases} \Rightarrow D(9;10)$$



Suy ra đường tròn ngoại tiếp tâm $D(9;10)$ bán kính $DJ = 5\sqrt{2}$ có phương trình: $(x-9)^2 + (y-10)^2 = 50$

Khi đó tọa độ B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-6)^2 + (y-6)^2 = 25 \\ (x-9)^2 + (y-10)^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 9 \\ x = 10 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(2;9) \\ C(10;3) \end{cases} \text{ (do } x_B < x_C)$$

Vậy $B(2;9), C(10;3)$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A , có trục tâm $H(-3;2)$. Gọi D, E là chân đường cao kẻ từ B và C . Biết rằng điểm A thuộc đường thẳng $\Delta: x - 3y - 3 = 0$, điểm $F(-2;3)$ thuộc đường thẳng DE và $HD = 2$. Tìm tọa độ điểm A .

Giải

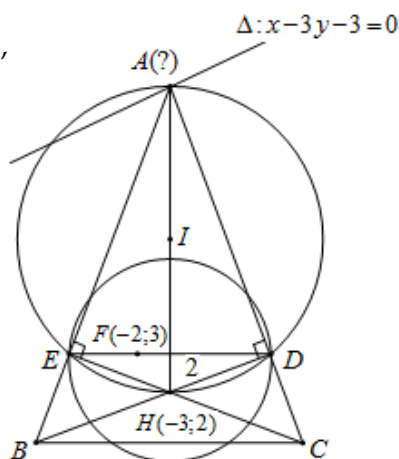
- + Do ABC cân tại A nên $HE = HD = 2$,
suy ra E, D thuộc đường tròn
tâm $H(-3; 2)$ và bán kính bằng 2 có
phương trình: $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$$

- + Gọi I là trung điểm của AH

$$\text{Gọi } A(3m+3; m) \in \Delta \Rightarrow I\left(\frac{3m}{2}; \frac{m+2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow IH^2 = \frac{5m^2 + 16m + 20}{2}$$



Ta có $ADHE$ nội tiếp đường tròn tâm $I\left(\frac{3m}{2}; \frac{m+2}{2}\right)$ bán kính IH nên có

$$\text{phương trình: } \left(x - \frac{3m}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{m+2}{2}\right)^2 = \frac{5m^2 + 16m + 20}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 3mx - (m+2)y - 7m - 9 = 0$$

- + Khi đó tọa độ điểm E, D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 3mx - (m+2)y - 7m - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow (6+3m)x + (m-2)y + 7m + 18 = 0$$

Suy ra phương trình $ED: (6+3m)x + (m-2)y + 7m + 18 = 0$

- + Do $F(-2; 3) \in ED \Rightarrow -2(6+3m) + 3(m-2) + 7m + 18 = 0 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow A(3; 0)$

Vậy $A(3; 0)$.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-2; -1)$, trực tâm $H(2; 1)$ và $BC = 2\sqrt{5}$. Gọi B', C' lần lượt là chân đường cao kẻ từ các đỉnh B, C . Lập phương trình đường thẳng BC , biết rằng trung điểm M của cạnh BC nằm trên đường thẳng có phương trình $x - 2y - 1 = 0$, tung độ của M dương và đường thẳng $B'C'$ đi qua điểm $N(3; -4)$

Phân tích hướng giải:

- * Bài toán yêu cầu viết phương trình BC mà ta có $AH \perp BC$ với $\overrightarrow{AH} = (4; 2)$.
Như vậy nếu biết thêm tọa độ một điểm trên đường thẳng BC thì ta sẽ có được đáp số của bài toán.

* Dữ kiện trung điểm M của cạnh BC nằm trên đường thẳng có phương trình $x-2y-1=0$, tung độ của M dương, gợi ý ta đi tìm tọa độ điểm M bằng cách tham số hóa điểm $M(2m+1; m)$. Lúc này ta cần một phương trình chứa m .

* Ta cần khai thác dữ kiện đường thẳng $B'C'$ đi qua điểm $N(3; -4)$. Điều này giúp ta nghĩ tới việc viết phương trình $B'C'$. Nhận thấy xuất hiện nội dung **Bài toán 10** với B', C' là giao điểm của đường tròn đi qua 4 điểm A, B, H, C' (nhận AH làm đường kính) hoàn toàn viết được phương trình và đường tròn đi qua 4 điểm B, C, B', C' (nhận $M(2m+1; m)$ làm tâm và đường kính $BC = 2\sqrt{5}$) có phương trình phụ thuộc vào m .

* Khi đó ta sẽ viết được phương trình đường thẳng $B'C'$ phụ thuộc vào m . Dữ kiện $B'C'$ đi qua điểm $N(3; -4)$ sẽ giúp tìm được $m \Rightarrow$ tọa độ điểm M và suy ra phương trình BC .

Sau đây là lời giải chi tiết của bài toán:

Giải

+ Do M nằm trên đường thẳng có phương trình $x-2y-1=0$ nên gọi $M(2m+1; m)$ với $m > 0$

Vì B', C' cùng nhìn BC dưới một góc vuông nên $BCB'C'$ nội tiếp đường tròn $(M; MB)$ (với $MB = \frac{BC}{2} = \sqrt{5}$)

Do đó đường tròn (T) đi qua 4 điểm B, C, B', C' có phương trình:

$$(x-2m-1)^2 + (y-m)^2 = 5$$

+ Đường tròn (T') đi qua 4 điểm A, B', H, C' nhận AH làm đường kính và $O(0; 0)$ là trung điểm của AH làm tâm nên có phương trình: $x^2 + y^2 = 5$

+ Do $(T) \cap (T') = \{B'; C'\}$ nên $B'C'$ có phương trình:

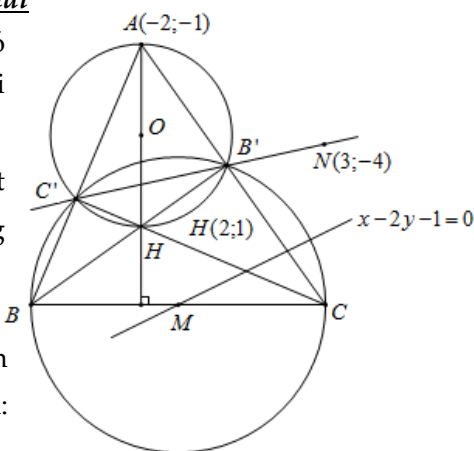
$$x^2 + y^2 - (x-2m-1)^2 - (y-m)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(2m+1)x + 2my - 5m^2 - 4m - 1 = 0$$

Mặt khác

$$N(-3; 4) \in B'C' \Rightarrow 6(2m+1) - 8m - 5m^2 - 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = 1$$

hoặc $m = -1$ (loại)



Suy ra $M(3;1)$

+ Khi đó đường thẳng BC đi qua $M(3;1)$ và nhận $\overrightarrow{AH} = (4;2) = 2(2;1)$ làm vecto pháp tuyến nên có phương trình:

$$2(x-3) + (y-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0.$$

Vậy phương trình đường thẳng BC là: $2x + y - 7 = 0$

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(T): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$ với tâm I và điểm $A(4;5)$. Từ A kẻ một đường thẳng cắt đường tròn (T) tại hai điểm B, C , tiếp tuyến tại B, C cắt nhau tại K . Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với IA , cắt (T) tại E, F . Xác định tọa độ các điểm E, F .

Giải

+ Gọi $K(a;b)$ khi đó $M\left(\frac{a+1}{2}; \frac{b+1}{2}\right)$

là trung điểm của IK

Do $IBKC$ nội tiếp đường tròn tâm

$$M \text{ bán kính } MI = \frac{\sqrt{(a-1)^2 + (b-1)^2}}{2}$$

nên B, C thuộc đường tròn có phương trình:

$$\left(x - \frac{a+1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+1}{2}\right)^2 = \frac{(a-1)^2 + (b-1)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - (a+1)x - (b+1)y + a + b = 0$$

+ Do B, C thuộc đường tròn

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$$

Khi đó tọa độ B, C là nghiệm của hệ:

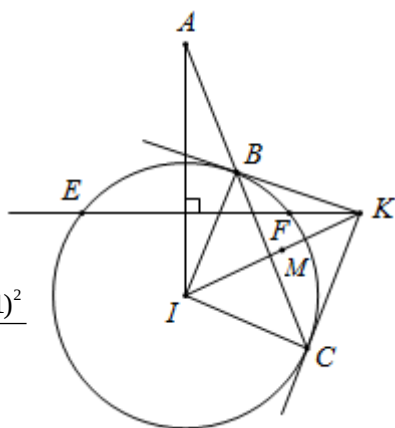
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (a+1)x - (b+1)y + a + b = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (a-1)x + (b-1)y - a - b - 3 = 0$$

Suy ra phương trình đường thẳng $BC: (a-1)x + (b-1)y - a - b - 3 = 0$

+ Do $A \in BC \Rightarrow 4(a-1) + 5(b-1) - a - b - 3 = 0 \Leftrightarrow 3a + 4b = 12$

+ $\overline{EF} \perp \overline{IA} = (3;4)$ và EF đi qua $K(a;b)$ nên có phương trình:

$$3(x-a) + 4(y-b) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - (3a + 4b) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 12 = 0$$

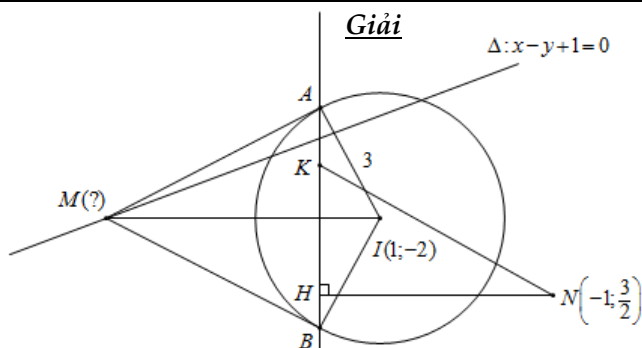


Khi đó tọa độ điểm E, F là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; y = 3 \\ x = \frac{16}{5}; y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy $E\left(\frac{16}{5}; \frac{3}{5}\right), F(0;3)$ hoặc $E(0;3), F\left(\frac{16}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ và đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho qua M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) (với A, B là các tiếp điểm), đồng thời khoảng cách từ điểm $N\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ đến AB lớn nhất.



+ Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = IA = 3$.

Gọi $M(m; m+1) \in \Delta$.

Để từ M kẻ được hai tiếp tuyến tới (C) thì :

$$MI > R \Leftrightarrow \sqrt{(m-1)^2 + (m+3)^2} > 3 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m + 1 > 0 \quad (*)$$

+ Ta có $MB = MA = \sqrt{IM^2 - R^2} = \sqrt{2m^2 + 4m + 1}$

Suy ra A, B thuộc đường tròn tâm $M(m; m+1)$ bán kính bằng $\sqrt{2m^2 + 4m + 1}$ có phương trình:

$$(x-m)^2 + (y-m-1)^2 = 2m^2 + 4m + 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2mx - 2(m+1)y - 2m = 0$$

Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2mx - 2(m+1)y - 2m = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow (m-1)x + (m+3)y + m - 2 = 0$$

Suy ra phương trình $AB: (m-1)x + (m+3)y + m - 2 = 0$

+ Gọi $K(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà AB luôn đi qua, khi đó :

$$(m-1)x_0 + (m+3)y_0 + m - 2 = 0 \text{ luôn đúng } \forall m$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + y_0 + 1)m = x_0 - 3y_0 + 2 \text{ luôn đúng } \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 + 1 = 0 \\ x_0 - 3y_0 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{5}{4} \\ y_0 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow K\left(-\frac{5}{4}; \frac{1}{4}\right)$$

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của N lên AB , khi đó:

$$d(N, AB) = NH \leq NK = \frac{\sqrt{26}}{4}$$

$$\text{Suy ra } d(N, AB)_{\max} = \frac{\sqrt{26}}{4} \text{ khi } H \equiv K \text{ hay } NK \perp AB \text{ (2*)}$$

$$\text{Mà ta có: } \overrightarrow{NK} = \left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{4}\right) = -\frac{1}{4}(1; 5) \text{ và } \overrightarrow{u_{AB}} = (m+3; 1-m)$$

$$\text{Suy ra (2*)} \Leftrightarrow m+3+5(1-m) = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa mãn (*))}$$

Vậy $M(2; 3)$

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(T') : x^2 + y^2 = 1$ và điểm $A(1; 3)$. Viết phương trình đường tròn (T) qua A và tâm của đường tròn (T') , đồng thời cắt đường tròn (T') tại hai điểm B, C sao cho khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC là lớn nhất.

Giải

+ Gọi I là tâm và R là bán kính của đường tròn (T) , khi đó $R = IO = IA$

Suy ra I thuộc đường trung trực của OA có phương trình:

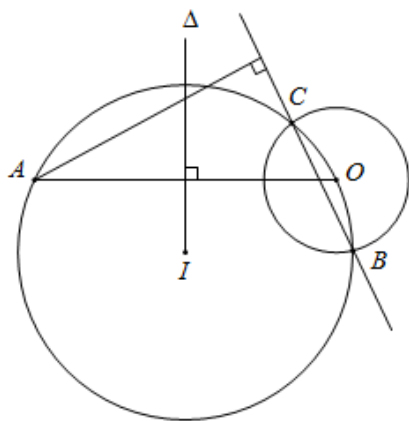
$$\Delta: x + 3y - 5 = 0$$

+ Khi đó $I(5-3m; m) \in \Delta$

$$\text{và bán kính } R = OI = \sqrt{10m^2 - 30m + 25}$$

Suy ra phương trình đường tròn (T) :

$$(x + 3m - 5)^2 + (y - m)^2 = 10m^2 - 30m + 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2(3m - 5)x - 2my = 0$$



Khi đó tọa độ B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(3m-5)x - 2my = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2(3m-5)x - 2my + 1 = 0$$

Suy ra phương trình $BC: 2(3m-5)x - 2my + 1 = 0$

$$+ \text{ Ta có } d(A, BC) = \frac{9}{\sqrt{4(3m-5)^2 + 4m^2}} = \frac{9}{\sqrt{40\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + 10}} \leq \frac{9}{\sqrt{10}}$$

Dấu “=” xảy ra khi $m = \frac{3}{2}$ hay phương trình đường tròn:

$$(T): x^2 + y^2 - x - 3y = 0$$

E. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0$ và điểm $A(1; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong (C) và có diện tích bằng 4. Biết AB là chiều dài của hình chữ nhật và B có hoành độ nguyên.

Bài 2. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') tâm $M(5; 1)$ biết (C') cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{3}$.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 18x - 6y + 65 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 = 9$. Từ điểm M thuộc đường tròn (C_1) kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn (C_2) với hai tiếp điểm A, B . Tìm tọa độ điểm M , biết độ dài đoạn $AB = 4,8$.

Bài 4. Cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và điểm $K(3; 4)$. Lập phương trình đường tròn (T) tâm K cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất với I là tâm của đường tròn (C) .

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm $K(1; 3)$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng 4, với I là tâm của đường tròn (C) .

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường tròn $(C_1): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ và $(C_2): (x+2)^2 + (y-10)^2 = 4$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết điểm A thuộc (C_1) , điểm C có tọa độ nguyên thuộc (C_2) và các đỉnh B, D thuộc đường thẳng $x - y + 6 = 0$.

F. GIẢI BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1.

+ Đường tròn (C) có tâm

$$I\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right) \text{ và bán kính } R = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Khi đó I là trung điểm của AC $\Rightarrow C(2; 5)$

+ Đặt $\begin{cases} AB = a \\ AD = b \end{cases}$ (với $a > b > 0$) khi đó :

$$\begin{cases} S_{ABCD} = 4 \\ AB^2 + AD^2 = BD^2 = 4R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ (loại)}$$

+ Vậy $AB = 2\sqrt{2} \Rightarrow B$ thuộc đường tròn tâm $A(1; 2)$ bán kính $R' = 2\sqrt{2}$ có phương trình: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$

+ Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 15 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 - 3y \\ 5y^2 - 44y + 96 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{24}{5} \end{cases} \text{ (loại)} \Rightarrow B(3; 4) \Rightarrow D(0; 3) \text{ (vì I là trung điểm}$$

của BD)

Vậy $B(3; 4), C(2; 5)$ và $D(0; 3)$.

Bài 2.

+ Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$

và bán kính $R = \sqrt{3}$

Cách 1:

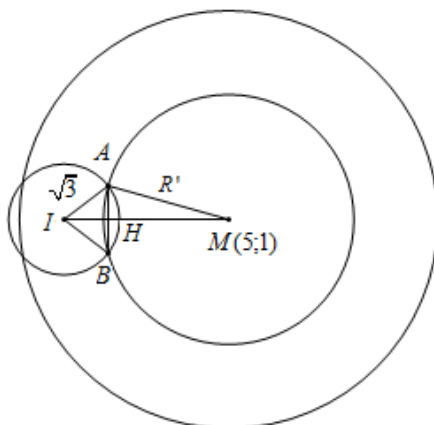
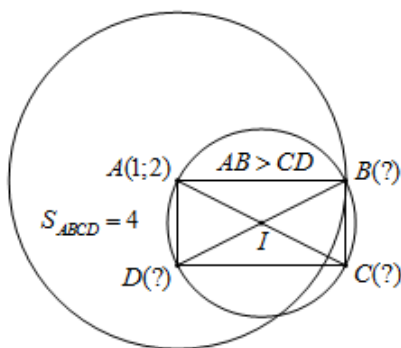
+ Gọi (C') có bán kính R' ,

khi đó (C') có phương trình:

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = R'^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 2y + 16 - R'^2 = 0$$

Suy ra phương trình AB có dạng: $8x + 6y + R'^2 - 24 = 0$



$$+ \text{ Ta có } AB = \sqrt{3} \Rightarrow \Delta IAB \text{ đều} \Rightarrow d(I, AB) = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|8-12+R'^2-24|}{\sqrt{8^2+6^2}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow |R'^2-28|=15 \Leftrightarrow \begin{cases} R'^2=43 \\ R'^2=13 \end{cases}$$

$$+ \text{ Vậy đường tròn } (C') \text{ cần lập là : } (x-5)^2 + (y-1)^2 = 43$$

$$\text{hoặc } (x-5)^2 + (y-1)^2 = 13.$$

Cách 2:

$$+ \text{ Gọi } (C') \text{ có bán kính } R'. \text{ Ta có } MI = 5$$

$$\text{Gọi } IM \cap AB = \{H\} \Rightarrow AH = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{3 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$+ \text{ Khi đó } MH = MI - IH = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \text{ hoặc } MH = MI + IH = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R' = MA = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{13} \\ R' = MA = \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{43} \end{cases}$$

$$+ \text{ Vậy đường tròn } (C') \text{ cần lập là : } (x-5)^2 + (y-1)^2 = 13 \text{ hoặc } (x-5)^2 + (y-1)^2 = 43.$$

Bài 3.

$$+ \text{ Đường tròn } (C_2) \text{ có tâm } O(0;0)$$

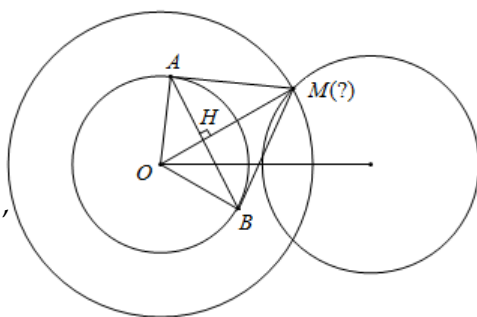
$$\text{và bán kính } R = OA = 3$$

Gọi H là giao điểm của OH và AB ,

$$\text{suy ra } AH = \frac{AB}{2} = \frac{4,8}{2} = \frac{12}{5}$$

$$\text{Suy ra } OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \frac{9}{5} \Rightarrow OM = \frac{OA^2}{OH} = 5$$

$$+ \text{ Vậy } M \text{ nằm trên đường tròn tâm } O \text{ bán kính bằng } 5 \text{ có phương trình: } x^2 + y^2 = 25$$



+ Suy ra tọa độ điểm M là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 - 18x - 6y + 65 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(4;3) \\ M(5;0) \end{cases}$$

Vậy $M(4;3)$ hoặc $M(5;0)$.

Bài 4.

+ Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R = 2$

+ Ta có: $S_{IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin \widehat{AIB} = \frac{R^2}{2} \sin \widehat{AIB} \leq \frac{R^2}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\sin \widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ$

Vậy $S_{IAB_{\max}} = \frac{R^2}{2}$ khi $\triangle IAB$ vuông tại $I \Rightarrow AB = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

+ Khi đó bài toán tương tự như **Bài 2** nên ta có đáp số

Đường tròn (T) cần lập là : $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$ hoặc $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 20$.

Bài 5.

+ Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$

+ Gọi $IM \cap AB = \{H\}$ và đặt $AH = a$, khi đó :

$$S_{IAB} = \frac{IH \cdot AB}{2} = \sqrt{R^2 - AH^2} \cdot AH = \sqrt{8 - a^2} \cdot a = 4$$

$$\Leftrightarrow a^2(8 - a^2) = 16 \Leftrightarrow (a^2 - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow AH = 2 \Leftrightarrow AB = 4$$

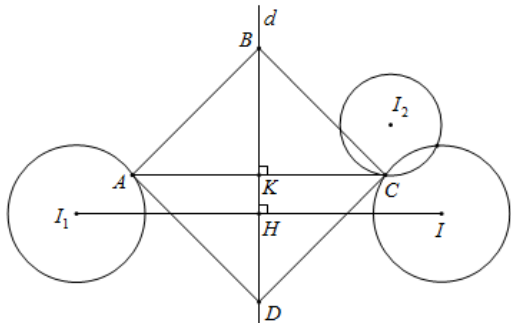
+ Khi đó bài toán tương tự như **Bài 2** nên ta có đáp số

Đường tròn (C) cần lập là : $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 13$ hoặc $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 53$.

Bài 6.

+ Gọi (T) là đường tròn đối xứng với (C_1) qua đường thẳng d

Khi đó tâm I của (T) đối xứng với tâm $I_1(1;2)$ qua đường thẳng d và có bán kính $R = R_1 = 3$



+ Đường thẳng II_1 có phương trình: $x + y - 3 = 0$

Khi đó tọa độ giao điểm H của II_1 và d là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right) \Rightarrow I(-4; 7)$$

+ Khi đó phương trình đường tròn $(T): (x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 9$

Do A, C đối xứng nhau qua d nên $A \in (C_1) \Rightarrow C \in (T)$

Suy ra tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 9 \\ (x + 2)^2 + (y - 10)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 10 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{16}{13} \\ y = \frac{106}{13} \end{cases} \Rightarrow C(-4; 10)$$

hoặc $C\left(-\frac{16}{13}; \frac{106}{13}\right)$ (loại)

Do A đối xứng với C qua d nên đường thẳng AC có phương trình:
 $x + y - 6 = 0$

Khi đó tọa độ giao điểm K của AC và d là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow K(0; 6) \Rightarrow A(4; 2)$$

+ Đường tròn tâm K ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có bán kính $KA = 4\sqrt{2}$
có phương trình: $x^2 + (y - 6)^2 = 32$

Khi đó tọa độ điểm B, D là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x^2 + (y - 6)^2 = 32 \\ x - y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 4 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-4; 2), D(4; 10) \\ B(4; 10), D(-4; 2) \end{cases}$$

Vậy $A(4; 2), B(-4; 2), C(-4; 10), D(4; 10)$

hoặc $A(4; 2), B(4; 10), C(-4; 10), D(-4; 2)$.

PHẦN 4.

SÁNG TẠO VÀ PHÁT TRIỂN TỪ CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẪNG THUẦN TÚY

A. Sáng tạo và phát triển

Bài 1. Cho tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AB ; D, E lần lượt là chân chiều cao kẻ từ A, B của tam giác ABC . Chứng minh rằng $MEND$ nội tiếp đường tròn.

Giải

+ Ta có $\widehat{NAE} = \widehat{NEA}$ (vì EN là trung tuyến của tam giác vuông AEB)

$$\widehat{MNE} = \widehat{NEA} \quad (\text{vị trí so le} - MN \parallel AC)$$

$$\Rightarrow \widehat{NAE} = \widehat{MNE} \quad (1)$$

+ Mặt khác: E, D cùng nhìn AB dưới một góc vuông nên $ABDE$ nội tiếp đường tròn, khi đó: $\widehat{NAE} = \widehat{EDM}$ (cùng bù với $\widehat{BDE}$) (2)

+ Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{MNE} = \widehat{EDM}$, suy ra $MEND$ nội tiếp đường tròn.

Chú ý: Các bạn sẽ dễ dàng nhận ra đây chính là 4 điểm thuộc đường tròn chín điểm (trung điểm các cạnh, chân các đường cao và trung điểm các đoạn thẳng nối trực tâm với các đỉnh của tam giác cùng thuộc một đường tròn) khá nổi tiếng khi chúng ta làm quen với hình học phẳng.

Bài 1.1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $B(-1; 4)$. Gọi $D, E(-1; 2), N$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ A , chân đường cao kẻ từ B và trung điểm cạnh AB . Biết $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEN . Tìm tọa độ đỉnh C của tam giác ABC .

Phân tích hướng giải:

* Với dữ kiện của bài toán ta dễ dàng viết được phương trình cạnh AC (đi qua E và vuông góc với BE)

* Ta sẽ mượn $C \in AC$ để tham số hóa điểm M và sử dụng kết quả **Bài 1**, khi $MEND$ nội tiếp đường tròn ta được $IM = IE = R$. Từ đây ta sẽ suy ra được tọa độ điểm C .

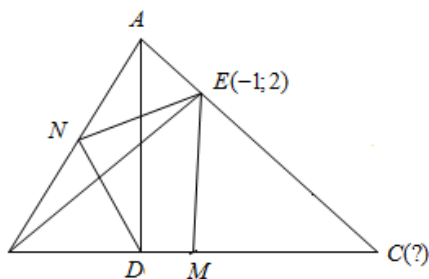
Sau đây là lời giải chi tiết cho bài toán.

Giải

+ BE có phương trình: $x = -1$, khi đó AC đi qua $E(-1; 2)$ vuông góc với BE có phương trình: $y = 2$

+ Gọi M là trung điểm của BC

và gọi $C(c; 2) \in AC \Rightarrow M\left(\frac{c-1}{2}; 3\right)$



Theo kết quả **Bài 1**, ta có $MEND$ là tứ giác nội tiếp đường tròn nên ta có :

$$\begin{aligned} IM = IE = R &\Leftrightarrow IM^2 = IE^2 \Leftrightarrow \left(\frac{c+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} c+2=3 \\ c+2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ c=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(1; 2) \\ C(-5; 2) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $C(1; 2)$ hoặc $C(-5; 2)$.

Nhận xét :

* Các bạn sẽ nhận thấy việc tìm điểm C thực chất được nhìn theo góc nhìn của **Bài toán 1**, khi ta mượn điểm gián tiếp M trong bài toán trên theo góc nhìn của **Bài toán 1** (M tham số hóa nhờ C và $CI = EI = R$) để suy ra tọa độ điểm C .

* Việc tìm điểm A ở bài toán trên cũng thực hiện tương tự như việc tìm điểm C .

Bài 1.2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC không vuông và đường thẳng Δ có phương trình $2x + y - 2 = 0$. Giả sử $D(4; 1), E(2; -1), N(1; 2)$ theo thứ tự là chân đường cao kẻ từ A , chân đường cao kẻ từ B và trung điểm cạnh AB . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng trung điểm M của cạnh BC nằm trên đường thẳng Δ và điểm M có hoành độ nhỏ hơn 1.

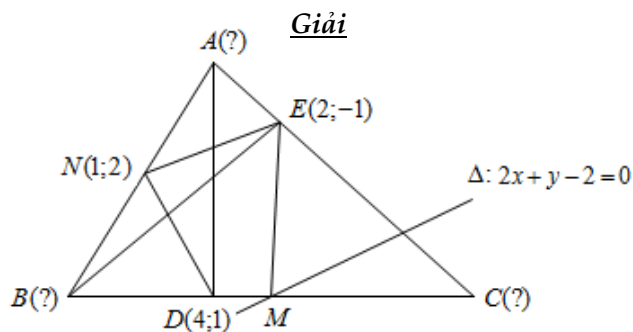
Phân tích hướng giải:

* Theo kết quả của **Bài 1**, $MEND$ nội tiếp đường tròn. Mà dữ kiện bài toán cho biết tọa độ 3 điểm D, E, N còn điểm thứ tư $M \in \Delta: 2x + y - 2 = 0$. Như vậy ta sẽ nghĩ tới việc viết phương trình đường tròn đi (T) đi qua 3 điểm D, E, N . Khi đó $\Delta \cap (T) = \{M\}$ sẽ giúp ta tìm được tọa độ điểm M .

* Lúc này ta sẽ viết được phương trình BC (đi qua D, M) và sử dụng **Bài toán 1** để tìm tọa độ điểm B ($B \in BC$ và $BN = NE$).

* Sau khi tìm được B ta sẽ có được ngay tọa độ hai điểm còn lại là A, C vì M, N lần lượt là trung điểm của BC, AB .

Sau đây là lời giải chi tiết cho bài toán trên:



+ Gọi đường tròn (T) đi qua ba điểm N, D, E có dạng:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Vì N, D, E thuộc (T) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} a + 2b + c = -5 \\ 4a + b + c = -17 \\ 2a - b + c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{9}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (T): 2x^2 + 2y^2 - 9x - 3y + 5 = 0$$

+ Theo cách chứng minh ở **Bài 1**, ta có MEND nội tiếp đường tròn $\Rightarrow M \in (T)$

Mặt khác $M \in \Delta$, do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 9x - 3y + 5 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 9x + 4 = 0 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; 1\right)$$

hoặc $M\left(\frac{7}{5}; 1\right)$ (loại)

+ Khi đó đường thẳng BC đi qua hai điểm $D(4; 1)$ và $M\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ nên có phương trình: $y = 1$

+ Gọi $B(t; 1) \in BC$, khi đó EN là trung tuyến của tam giác vuông AEB nên ta có: $BN = EN$

$$\Leftrightarrow BN^2 = EN^2 \Leftrightarrow (t-1)^2 + 1^2 = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 4 \end{cases} \Rightarrow B(-2;1) \text{ hoặc } B(4;1) \equiv D \text{ (loại -)}$$

vì ABC không vuông)

+ Do M, N lần lượt là trung điểm của BC và AB nên suy ra $C(3;1), A(4;3)$

Vậy $A(4;3), B(-2;1)$ và $C(3;1)$.

Chú ý:

Ngoài cách trình bày trên, ta có thể tìm tọa độ A, B theo góc nhìn của **Bài toán 5**.
Cụ thể:

+ Sau khi tìm được $M\left(\frac{1}{2};1\right)$ ta sẽ viết được phương trình $BC: y=1$ và $AD: x=4$

+ Gọi $\begin{cases} A(4;a) \in AD \\ B(b;1) \in BC \end{cases}$, khi đó $N(1;2)$ là trung điểm của AB nên ta được:

$$\begin{cases} b+4=2 \\ a+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(4;3) \\ B(-2;1) \end{cases}$$

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A và M là trung điểm của AB . Gọi I, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác MGK . Biết rằng K là trọng tâm của tam giác ACM .

Giải

+ Gọi N là trung điểm của MA ,

khi đó: $\frac{CK}{CN} = \frac{CG}{CM} = \frac{2}{3} \Rightarrow GK \parallel MN$ hay $GK \parallel AB$.

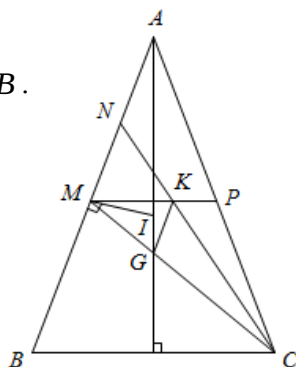
+ Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp nên $MI \perp AB \Rightarrow MI \perp GK$ (1)

+ Gọi P là trung điểm của AC

và do $\triangle ABC$ cân tại A nên:

$$\begin{cases} MP \parallel BC \\ AG \perp BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MK \parallel BC \\ GI \perp BC \end{cases} \Rightarrow GI \perp MK \quad (2)$$

+ Từ (1) và (2), suy ra I là trực tâm của tam giác MGK (đpcm).



Bài 2.1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A và M là trung điểm của AB . Biết $I\left(\frac{8}{3}; \frac{1}{3}\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $G(3;0), K\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}\right)$ lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và ACM .

Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC

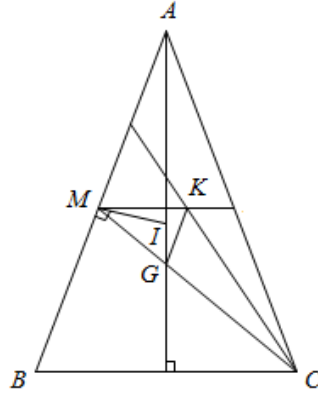
Phân tích hướng giải:

Với kết quả **Bài 2** ta có được I là trực tâm của tam giác MGK , từ đây ta dễ dàng suy ra được tọa độ điểm $M \Rightarrow$ tọa độ điểm C (do $\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$) $\Rightarrow$ tọa độ điểm A (do K là trọng tâm $\triangle ACM$) $\Rightarrow$ tọa độ điểm B (do M là trung điểm của AB). Sau đây là lời giải chi tiết cho bài toán:

Giải

$$+ \text{ Gọi } M(x; y) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{KM} = \left(x - \frac{7}{3}; y - \frac{1}{3}\right) \\ \overrightarrow{GM} = (x - 3; y) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{GI} = \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \\ \overrightarrow{KI} = \left(\frac{1}{3}; 0\right) \end{cases}$$



Theo kết quả **Bài 2** ta có I là trực tâm của tam giác MGK

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{KM} = 0 \\ \overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{GM} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}\left(x - \frac{7}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(y - \frac{1}{3}\right) = 0 \\ \frac{1}{3}(x - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(3; 1)$$

Mặt khác G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên:

$$\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 3 = 3(3 - 3) \\ y_C - 1 = 3(0 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = -2 \end{cases} \Rightarrow C(3; -2)$$

+ Do K là trọng tâm tam giác ACM nên:

$$\begin{cases} x_A = 3x_K - (x_C + x_M) = 7 - (3 + 3) = 1 \\ y_A = 3y_K - (y_C + y_M) = 1 - (-2 + 1) = 2 \end{cases} \Rightarrow A(1; 2)$$

M là trung điểm của AB , suy ra $B(5; 0)$.

Vậy $A(1; 2), B(5; 0), C(3; -2)$.

Bài 2.2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A và $C(2; -3)$. Biết $I\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $K\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ACM , với M là trung điểm của AB . Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC , biết A không trùng với gốc tọa độ.

Phân tích hướng giải:

Suy ra $A(0;1)$ hoặc $A(0;0) \equiv O$ (loại)

+ Vì M là trung điểm của AB nên $B(4;-1)$

Vậy $A(0;1)$ và $B(4;-1)$.

Bài 2.3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A và M là trung điểm của AB . Biết $I\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , $K\left(\frac{10}{3}; \frac{8}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ACM . Các đường thẳng AB, CM lần lượt đi qua các điểm $E(0;3), F(2;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết A có tung độ dương.

Phân tích hướng giải:

- * Với kết quả **Bài 2** ta có được $KI \perp CM$ và suy ra được phương trình CM .
 - * Lúc này ta thấy xuất hiện **Bài toán 3**, khi $M \in MC$ và M tạo với I, E tam giác vuông tại M . Nghĩa là nhờ **Bài toán 3** sẽ giúp ta tìm được tọa độ điểm M .
 - * Khi có tọa độ điểm M ta sẽ viết được phương trình AB (đi qua M, E), đồng thời tìm được tọa độ điểm P ($\overrightarrow{MP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MK}$). Khi đó xuất hiện **Bài toán 5**, khi A, C lần lượt thuộc hai đường thẳng AB, CM và liên hệ với điểm P qua hệ thức vector (trong trường hợp này P là trung điểm của AC). Từ đây ta suy ra được tọa độ điểm A và C .
 - * Với M là trung điểm AB , ta dễ dàng suy ra được tọa độ điểm B .
- Sau đây là lời giải chi tiết cho bài toán.

Giải

+ Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

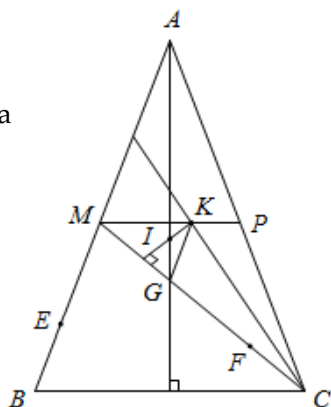
Theo kết quả ở **Bài 2**, ta có I là trực tâm của tam giác $MKG \Rightarrow KI \perp MG$ hay $KI \perp CM$.

CM đi qua $F(2;0)$ và nhận

$$\overrightarrow{KI} = \left(-\frac{2}{3}; 0\right) = -\frac{2}{3}(1; 0) \text{ làm vector pháp tuyến}$$

nên CM có phương trình: $x - 2 = 0$

+ Gọi $M(2; m) \in CM \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IM} = \left(-\frac{2}{3}; m - \frac{8}{3}\right) \\ \overrightarrow{EM} = (2; m - 3) \end{cases}$, khi đó:



$$IM \perp EM \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{EM} = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} + (m-3)\left(m - \frac{8}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 17m + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2; 4) \\ M\left(2; \frac{5}{3}\right) \end{cases}$$

- + Với $M(2; 4)$, suy ra AB đi qua $E(0; 3), M(2; 4)$ nên có phương trình:
 $x - 2y + 6 = 0$.

Do K là trọng tâm tam giác ACM nên:

$$\overrightarrow{MP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MK} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P - 2 = \frac{3}{2}\left(\frac{10}{3} - 2\right) \\ y_P - 4 = \frac{3}{2}\left(\frac{8}{3} - 4\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = 4 \\ y_P = 2 \end{cases} \Rightarrow P(4; 2)$$

Gọi $A(2a - 6; a) \in AB$ và $C(2; c) \in CM$ (với $a > 0$)

Khi đó P là trung điểm của AC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = 2x_P \\ y_A + y_C = 2y_P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 6 + 2 = 8 \\ a + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(6; 6) \\ C(2; -2) \end{cases}$$

Vì M là trung điểm của $AB \Rightarrow B(-2; 2)$

- + Với $M\left(2; \frac{5}{3}\right)$, suy ra AB đi qua $E(0; 3), M\left(2; \frac{5}{3}\right)$ nên có phương trình:
 $2x + 3y - 9 = 0$.

Do K là trọng tâm tam giác ACM nên

$$\overrightarrow{MP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MK} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P - 2 = \frac{3}{2}\left(\frac{10}{3} - 2\right) \\ y_P - \frac{5}{3} = \frac{3}{2}\left(\frac{8}{3} - \frac{5}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = 4 \\ y_P = \frac{19}{6} \end{cases} \Rightarrow P\left(4; \frac{19}{6}\right)$$

Gọi $A(3a; 3 - 2a) \in AB$ và $C(2; c) \in CM$ (với $a < \frac{3}{2}$ do $y_A > 0$)

Khi đó P là trung điểm của AC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = 2x_P \\ y_A + y_C = 2y_P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2 = 8 \\ 3 - 2a + c = \frac{19}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = \frac{22}{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy $A(6; 6), B(-2; 2), C(2; -2)$.

Bài 2.4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A và M là trung điểm của AB . Đường thẳng CM có phương trình $y - 3 = 0$ và $K\left(-\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$ là trọng tâm của tam giác ACM . Đường thẳng AB đi qua điểm $D\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết M có tung độ dương và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nằm trên đường thẳng $2x - y + 4 = 0$.

Phân tích hướng giải:

- * Với kết quả **Bài 2**, ta có được $KI \perp CM$ (I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC), kết hợp với I thuộc đường thẳng $2x - y + 4 = 0$ giúp ta tìm được tọa độ điểm I .
 - * Lúc này ta thấy xuất hiện **Bài toán 3**, khi $M \in MC$ và M tạo với I, D tam giác vuông tại M . Nghĩa là nhờ **Bài toán 3** sẽ giúp ta tìm được tọa độ điểm M .
 - * Khi có tọa độ điểm M ta sẽ viết được phương trình AB (đi qua M, D), đồng thời tìm được tọa độ điểm P ($\overrightarrow{MP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MK}$). Khi đó xuất hiện **Bài toán 5**, khi A, C lần lượt thuộc hai đường thẳng AB, CM và liên hệ với điểm P qua hệ thức vecto (trong trường hợp này P là trung điểm của AC). Từ đây ta suy ra được tọa độ điểm A và C .
 - * Với M là trung điểm AB , ta dễ dàng suy ra được tọa độ điểm B .
- Sau đây là lời giải chi tiết cho bài toán:

Giải

+ Gọi G, I lần lượt là trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

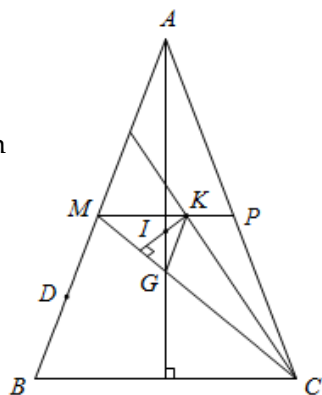
Theo kết quả ở **Bài 2**, ta có I là trực tâm của tam giác $MGK \Rightarrow KI \perp MG$ hay $KI \perp CM$.

Khi đó KI đi qua $K\left(-\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$ vuông

góc với $CM : y - 3$ nên có phương trình : $x + \frac{2}{3} = 0$.

Suy ra tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + \frac{2}{3} = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$$



+ Gọi $M(m;3) \in CM$ (với $m \in \mathbb{Z}$),

$$\text{suy ra } \overline{MI} = \left(-\frac{2}{3}-m; -\frac{1}{3}\right) \text{ và } \overline{MD} = \left(-\frac{1}{2}-m; 1\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Do } MI \perp MD &\Leftrightarrow \overline{MI} \cdot \overline{MD} = 0 \Leftrightarrow \left(m + \frac{2}{3}\right) \left(m + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow m^2 + \frac{7}{6}m = 0 \quad m = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{hoặc } m = -\frac{7}{6} \text{ (loại)} \end{aligned}$$

Suy ra $M(0;3)$.

Khi đó AB đi qua $D\left(-\frac{1}{2}; 4\right), M(0;3)$ nên có phương trình: $2x + y - 3 = 0$.

Do K là trọng tâm tam giác ACM nên

$$\overline{MP} = \frac{3}{2}\overline{MK} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P - 0 = \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3} - 0\right) \\ y_P - 3 = \frac{3}{2}\left(\frac{7}{3} - 3\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = -1 \\ y_P = 2 \end{cases} \Rightarrow P(-1;2)$$

+ Gọi $A(a;3-2a) \in AB$ và $C(c;3) \in CM$

Khi đó P là trung điểm của AC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = 2x_P \\ y_A + y_C = 2y_P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = -2 \\ 3 - 2a + 3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1;1) \\ C(-3;3) \end{cases}$$

Vì M là trung điểm của $AB \Rightarrow B(-1;5)$

Vậy $A(1;1), B(-1;5), C(-3;3)$.

Bài 2.5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A và M là trung điểm của AB . Đường thẳng CM có phương trình $5x - 7y - 20 = 0$ và $K\left(\frac{11}{6}; -\frac{7}{6}\right)$ là trọng tâm của tam giác ACM . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm nằm trên đường thẳng $2x + 4y + 7 = 0$ và có bán kính bằng $\frac{5}{\sqrt{2}}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết A và C có tọa độ nguyên.

Phân tích hướng giải:

* Với kết quả **Bài 2**, ta có được $KI \perp CM$ (I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC), kết hợp với I thuộc đường thẳng $2x + 4y + 7 = 0$ giúp ta tìm được tọa độ điểm I .

* Lúc này ta nhận ra **Bài toán 1**, khi $C \in CM$ và $CI = R = \frac{5}{\sqrt{2}}$. Nên ta sẽ dễ

dàng tìm ra được tọa độ điểm C . Ta tham số hóa được điểm A thông qua điểm $M \in CM$ (do K là trọng tâm $\triangle ACM$). Nghĩa là tiếp tục nhờ **Bài toán 1** giúp ta tìm được tọa độ điểm A và M . Từ đây ta suy ra được tọa độ điểm B .

Sau đây là lời giải chi tiết cho bài toán trên.

Giải

+ Gọi G, I lần lượt là trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Theo kết quả ở **Bài 2** ta có I là trực tâm của tam giác $MGK \Rightarrow KI \perp MG$ hay $KI \perp CM$.

Khi đó KI đi qua $K\left(-\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$ và nhận $\overrightarrow{u_{CM}} = (7; 5)$

làm vecto pháp tuyến, nên KI có phương trình:

$$7\left(x + \frac{2}{3}\right) + 5\left(y - \frac{7}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 7x + 5y - 7 = 0$$

Suy ra tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 7x + 5y - 7 = 0 \\ 2x + 4y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{7}{2}; -\frac{7}{2}\right)$$

+ Gọi $C(4 + 7t; 5t) \in CM$, khi đó:

$$R = IC = \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow IC^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \left(7t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(5t + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow 74t^2 + 42t = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

hoặc $t = -\frac{21}{37}$ (loại)

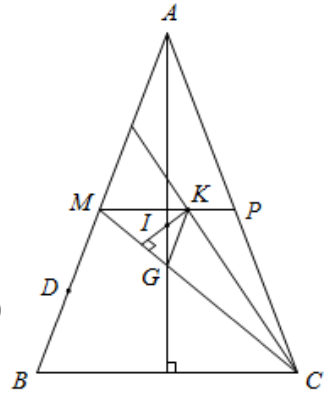
Suy ra $C(4; 0)$.

+ Gọi $M(4 + 7m; 5m) \in CM$, khi đó K là trọng tâm tam giác ACM nên:

$$\begin{cases} x_A = 3x_K - (x_M + x_C) = \frac{11}{2} - (4 + 7m + 4) = -7m - \frac{5}{2} \\ y_A = 3y_K - (y_M + y_C) = -\frac{7}{2} - (5m + 0) = -5m - \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow A\left(-7m - \frac{5}{2}; -5m - \frac{7}{2}\right)$$

$$\Rightarrow IA^2 = R^2 \Leftrightarrow (7m + 6)^2 + (5m)^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow 148m^2 + 168m + 47 = 0$$

KHANG VIET



$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = -\frac{47}{74} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1; -1) \\ A\left(\frac{72}{37}; -\frac{12}{37}\right) \end{cases}$$

Do A có tọa độ nguyên nên $A(1; -1) \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow B(0; -4)$ (vì M là trung điểm của AB)

Vậy $A(1; -1), B(0; -4), C(4; 0)$.

Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $AN = 3NC$. Chứng minh tam giác DMN vuông cân.

Giải

Cách 1 (dùng hình học phẳng thuần túy)

Cách 1.1:

Gọi $AC \cap BD = \{I\}$ và E là trung điểm của DI .

Khi đó $MNEA$ là hình bình hành

(vì MA, NE cùng song song và bằng $\frac{CD}{2}$), suy ra $AE \parallel MN$ (1)

Mặt khác: $NE \perp DA, DI \perp AN$ nên E là trực tâm tam giác DNA , suy ra $AE \perp DN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN \perp DN$ hay $\widehat{MND} = 90^\circ$ (*)

Khi đó $\widehat{MND} + \widehat{DAM} = 180^\circ$ nên $MNDA$ nội tiếp đường tròn, suy ra:

$\widehat{DMN} = \widehat{DAN} = 45^\circ$ (cùng chắn $\widehat{DM}$) (2*)

Từ (*) và (2*) suy ra tam giác DMN vuông cân tại N (đpcm).

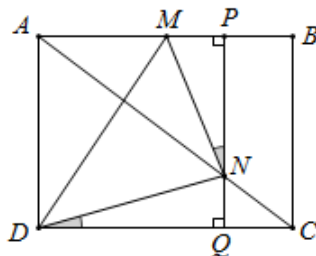
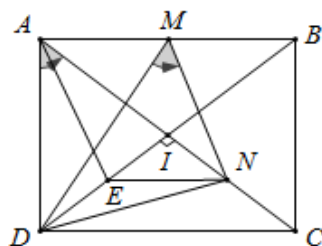
Cách 1.2:

Gọi đường thẳng đi qua N vuông góc với AB , cắt AB, CD lần lượt là P, Q .

Khi đó $\triangle MPN = \triangle NQD$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{PNM} = \widehat{QDN} \Rightarrow \widehat{MND} = 90^\circ \\ DN = MN \end{cases}$$

Suy ra tam giác DMN vuông cân tại N (đpcm).



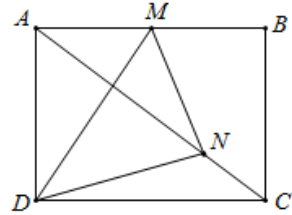
Cách 2 (dùng hệ thức lượng trong tam giác)

$$\text{Đặt } AB = a \Rightarrow AM = \frac{a}{2}; CN = \frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}; AN = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

Khi đó:

+ Xét tam giác ADM ,

$$\text{ta có: } DM^2 = AD^2 + AM^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} \quad (1)$$



+ Xét tam giác AMN , ta có:

$$\begin{aligned} MN^2 &= AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos \widehat{NAM} \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \cos 45^\circ = \frac{5a^2}{8} \quad (2) \end{aligned}$$

+ Xét tam giác DCN , ta có:

$$DN^2 = CD^2 + CN^2 - 2CD \cdot CN \cdot \cos \widehat{DCN} = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \cos 45^\circ = \frac{5a^2}{8} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta được : $\begin{cases} MN = DN \\ MN^2 + DN^2 = DM^2 \end{cases}$, suy ra tam giác DMN

vuông cân tại N (đpcm).

Cách 3 (dùng phương pháp vectơ)

Đặt $AB = a$

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{DA} \\ \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{cases} MN^2 = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{DC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{DA}\right)^2 = \frac{1}{16}DC^2 + \frac{9}{16}DA^2 - \frac{3}{8}\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = \frac{5}{8}a^2 \\ DN^2 = \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}\right)^2 = \frac{9}{16}DC^2 + \frac{1}{16}DA^2 + \frac{3}{8}\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = \frac{5}{8}a^2 \end{cases} \Rightarrow MN = DN \quad (1)$$

Lại có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DN} &= \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{DC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{DA}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}\right) = \frac{3}{16}(DC^2 - DA^2) - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = 0 \\ \Rightarrow MN &\perp DN \quad (1) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra tam giác DMN vuông cân tại N (đpcm).

Cách 4 (dùng phương pháp tọa độ)

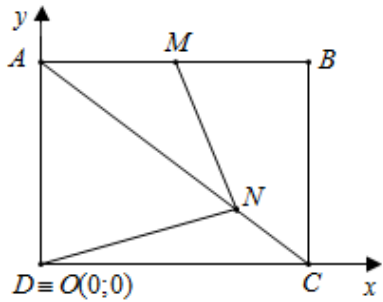
Chọn hệ trục tọa độ Oxy với $D(0;0) \equiv O$,
 $A(0;a), C(a;0)$

Suy ra $M\left(\frac{a}{2}; a\right)$ và $N\left(\frac{3a}{4}; \frac{a}{4}\right)$

nên $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{a}{4}; -\frac{3a}{4}\right), \overrightarrow{DN} = \left(\frac{3a}{4}; \frac{a}{4}\right)$

Khi đó: $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DN} = \frac{3}{16}a^2 - \frac{3}{16}a^2 = 0$ và $MN^2 = DN^2 = \frac{5}{8}a^2$

Suy ra tam giác DMN vuông cân tại N (đpcm).



Bài 3.1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB , $N\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là điểm trên cạnh AC sao cho $AN = 3NC$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết đường thẳng DM có phương trình $x-1=0$ và D có tung độ âm.

Giải

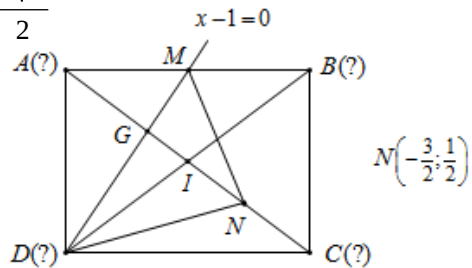
Theo kết quả **Bài 3**, ta có được tam giác DMN vuông cân tại N nên :

$$DN = MN = \sqrt{2} \cdot d(N, DM) = \sqrt{2} \cdot \left| -\frac{3}{2} - 1 \right| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Suy ra D, M thuộc đường

tròn tâm $\left(N, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ có phương trình:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$



Khi đó tọa độ điểm D, M là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ x=1 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(1;3) \\ M(1;-2) \\ D(1;-2) \\ M(1;3) \end{cases}$$

Do D có hoành độ âm nên ta được $\begin{cases} D(1;-2) \\ M(1;3) \end{cases}$

Gọi I là giao điểm của AC và BD ; G là giao điểm của AC và DM

Khi đó G là trọng tâm của tam giác ABD nên ta có:

$$\overline{DM} = 3\overline{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-1 = 3(1-x_G) \\ 3-(-2) = 3(3-y_G) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 1 \\ y_G = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(1; \frac{4}{3}\right)$$

$$\text{Mặt khác: } AG = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}AN = \frac{4}{9}AN$$

$$\text{Khi đó } \overline{AG} = \frac{4}{9}\overline{AN} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x_A = \frac{4}{9}\left(-\frac{3}{2}-x_A\right) \\ \frac{4}{3}-y_A = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}-y_A\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3 \\ y_A = 2 \end{cases} \Rightarrow A(3;2)$$

Suy ra $B(-1;4)$ (do M là trung điểm của AB)

$\Rightarrow I(0;1) \Rightarrow C(-3;0)$ (do I là trung điểm của BD và AC)

Vậy $A(3;2), B(-1;4), C(-3;0), D(1;-2)$.

Chú ý:

Ngoài cách trên ta có thể tìm điểm D, M bằng cách sử dụng **Bài toán 6.2** như sau:

+ Gọi $D(1;d) \in DM$ với $d < 0$, suy ra $\overline{ND} = \left(\frac{5}{2}; d - \frac{1}{2}\right)$. Ta có $\overline{u_{DM}} = (0;1)$

$$\text{Khi đó } \cos \widehat{NDM} = \frac{|\overline{ND} \cdot \overline{u_{DM}}|}{|\overline{ND}| \cdot |\overline{u_{DM}}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\left|d - \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{1}{2}\right)^2}} \Leftrightarrow d = -2$$

hoặc $d = 3$ (loại)

Suy ra $D(1;3)$, suy ra phương trình đường thẳng $NM : x + y + 1 = 0$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow M(1;-2)$

Bài 3.2 (Khối A, A1 – 2014). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có điểm M là trung điểm của đoạn AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $AN = 3NC$. Viết phương trình đường thẳng CD , biết rằng $M(1;2)$ và $N(2;-1)$.

Phân tích hướng giải:

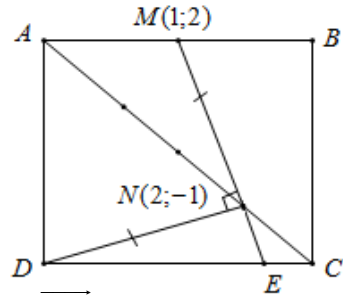
* Yêu cầu bài toán viết phương trình CD , giúp ta hướng tới việc gắn kết các dữ kiện để tìm các yếu tố liên quan tới đường thẳng CD . Việc bài toán cho biết tọa độ hai điểm $M(1;2)$ và $N(2;-1)$ cùng với dữ kiện $AN = 3NC$, khiến ta nghĩ tới việc tìm tọa

độ điểm E (với $MN \cap CD = \{E\}$). Điều này hoàn toàn có thể làm được nhờ vào

Bài toán 5.1 khi ta suy luận được $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{NE}$.

* Lúc này nếu tìm thêm được một điểm trên CD thì coi như bài toán giải quyết xong. Nhờ **Bài toán 1** ta sẽ nghĩ tới việc tìm điểm D . Cụ thể với kết quả của **Bài 3** ta có được tam giác MND vuông cân tại N nên D thuộc đường thẳng ND (viết được phương trình) và cách N một khoảng không đổi MN ($DN = MN$). Như vậy bài toán đã chuyển về đúng nội dung **Bài toán 1** nên ta có lời giải như sau:

Giải



+ Gọi $MN \cap CD = \{E\}$ và H

là hình chiếu vuông góc của M trên CD .

Khi đó theo định lý Ta-let ta có:

$$\frac{MN}{NE} = \frac{AN}{NC} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{NE} \quad (*)$$

+ Gọi $E(x; y)$ suy ra $\overrightarrow{NE} = (x - 2; y + 1)$ và với $\overrightarrow{MN} = (1; -3)$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3(x - 2) \\ -3 = 3(y + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{7}{3}; -2\right)$$

+ Theo kết quả **Bài 3**, ta có tam giác MND vuông cân tại N nên suy ra $\overrightarrow{n_{DN}} = \overrightarrow{MN} = (1; -3)$. Khi đó phương trình ND : $x - 3y - 5 = 0$

+ Do $D \in ND$ nên gọi $D(3t + 5; t)$. Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow (3t + 3)^2 + (t + 1)^2 = 10 \Leftrightarrow (t + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(5; 0) \\ D(-1; -2) \end{cases}$$

Đường thẳng CD đi qua $E\left(\frac{7}{3}; -2\right)$ và D nên với:

+ $D(5; 0)$ suy ra CD có phương trình: $3x - 4y - 15 = 0$

+ $D(-1; -2)$ suy ra CD có phương trình: $y = -2$ hay $y + 2 = 0$

Vậy phương trình CD cần lập là $3x - 4y - 15 = 0$ hoặc $y + 2 = 0$

Chú ý:

Ngoài cách giải trên các bạn có thể tham khảo thêm cách giải khác ở **Ví dụ 2** trong **Bài toán 6.1**.

Bài 3.3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB , N thuộc đường thẳng $\Delta: 3x + y + 4 = 0$ và là điểm trên cạnh AC sao cho $CN = \frac{1}{4}AC$. Biết phương trình đường thẳng $MD: x - 1 = 0$. Xác định tọa độ đỉnh C của hình vuông $ABCD$, biết khoảng cách từ C đến đường thẳng MD bằng 4 và N có hoành độ âm.

Giải

+ Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD

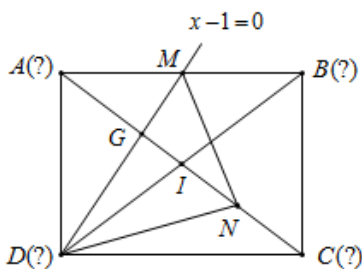
khi đó ta dễ dàng chỉ ra được: $\frac{NG}{CG} = \frac{5}{8}$

$$\text{Suy ra } d(N, DM) = \frac{5}{8} \cdot d(C, DM) = \frac{5}{8} \cdot 4 = \frac{5}{2}$$

Gọi $N(t; -3t - 4) \in \Delta$ với $t < 0$, khi đó:

$$d(N, DM) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow |t - 1| = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2} \text{ hoặc } t = \frac{7}{2} \text{ (loại), suy ra } N\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

+ Lúc này bài toán đưa về **Bài 3.1** nên ta được kết quả cuối cùng: $C(-3; 1)$ hoặc $C(-3; 0)$.



Bài 3.4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh $D(5; 1)$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB , N là điểm trên cạnh AC sao cho $CN = \frac{1}{4}AC$. Biết đường thẳng đi qua hai điểm M và N có phương trình $3x - y - 4 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông $ABCD$, biết điểm M có tung độ dương.

Phân tích hướng giải:

* Nhận thấy các dữ kiện trong bài toán chỉ xoay quanh 3 điểm M, N, D . Do đó ta nghĩ tới việc liên kết các điểm này với nhau bằng câu hỏi “3 điểm này liệu có tạo nên tam giác đặc biệt không?”, và chúng ta đã có được câu trả lời nhờ vào **Bài 3** – khi tam giác MND vuông cân tại N . Điều này sẽ giúp ta viết được phương trình DN và suy ra được tọa độ điểm N .

* Việc tìm điểm M cũng khá dễ dàng khi ta nhận thấy, M thuộc **Bài toán 1** ($M \in MN$ và $MN = DN$). Sau khi tìm được điểm M ta quay về nội dung giống như **Bài 3.1**

Do đó ta có lời giải chi tiết sau:

Giải

+ Theo kết quả **Bài 3** ta có tam giác MND vuông tại N

Do đó DN đi qua $D(5;1)$ và nhận

$\overrightarrow{u_{MN}} = (1;3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Khi đó phương trình $DN : x + 3y - 8 = 0$ $D(5;1)$

Suy ra tọa độ điểm N là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} 3x - y - 4 = 0 \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow N(2;2)$$

+ Gọi $M(t;3t-4) \in MN$ với $t > \frac{4}{3}$, khi đó theo kết quả **Bài 3** ta có tam giác MND cân tại N .

Do đó $MN^2 = ND^2 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (3t-6)^2 = 10 \Leftrightarrow (t-2)^2 = 1 \Leftrightarrow t=3$ hoặc $t=1$ (loại), suy ra $M(3;5)$

+ Gọi I là giao điểm của AC và BD ; G là giao điểm của AC và DM
Khi đó G là trọng tâm của tam giác ABD nên ta có:

$$\overrightarrow{DM} = 3\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-5 = 3(3-x_G) \\ 5-1 = 3(5-y_G) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{11}{3} \\ y_G = \frac{11}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{11}{3}; \frac{11}{3}\right)$$

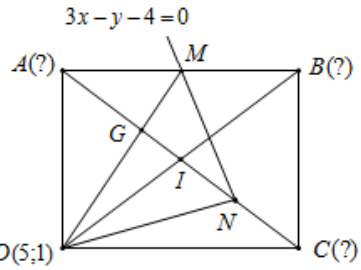
$$\text{Mặt khác: } AG = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}AN = \frac{4}{9}AN$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AG} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11}{3} - x_A = \frac{4}{9}(2 - x_A) \\ \frac{11}{3} - y_A = \frac{4}{9}(2 - y_A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 5 \\ y_A = 5 \end{cases} \Rightarrow A(5;5)$$

Suy ra $B(1;5)$ (do M là trung điểm của AB)

$\Rightarrow I(3;3) \Rightarrow C(1;1)$ (do I là trung điểm của BD và AC)

Vậy $A(5;5), B(1;5), C(1;1)$.



Bài 3.5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB , N là điểm trên cạnh AC sao cho $CN = \frac{1}{4}AC$. Biết $E(1;-1)$ là trung điểm của đoạn DM . Tìm tọa độ đỉnh B , biết $F\left(\frac{2}{3};0\right)$ là trọng tâm tam giác AMN và điểm M có hoành độ âm.

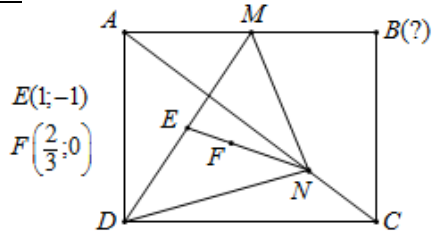
Giải

+ Theo kết quả của **Bài 3** ta có tam giác MND vuông cân tại N .

Suy ra $MD \perp EF$.

Do đó MD có phương trình:

$$x - 3y - 4 = 0$$



$$+ \text{ Mặt khác ta có: } \overrightarrow{NE} = 3\overrightarrow{FE} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_N = 3\left(1 - \frac{2}{3}\right) \\ -1 - y_N = 3(-1 - 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 0 \\ y_N = 2 \end{cases} \Rightarrow N(0; 2)$$

+ Lúc này bài toán có nội dung giống **Bài 3.1** do đó ta có kết quả : $B(-4; 0)$.

Bài 4: Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp J . Gọi D là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với đường thẳng AJ . Chứng minh rằng D là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC .

Giải

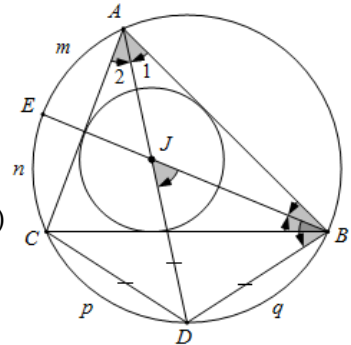
+ Gọi E là giao điểm thứ hai của BJ với đường tròn ngoại tiếp tam

giác ABC . Khi đó:
$$\begin{cases} \widehat{AmE} = \widehat{EnC} \\ \widehat{CpD} = \widehat{DqB} \end{cases}$$

(góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau)

$$\Rightarrow \widehat{EnC} + \widehat{CpD} = \widehat{AmE} + \widehat{DqB}$$

$$\text{hay } \widehat{ECD} = \widehat{AmE} + \widehat{DqB} \quad (1)$$



$$+ \text{ Mặt khác: } \begin{cases} \widehat{EBD} = \frac{1}{2} \widehat{ECD} \\ \widehat{DJB} = \frac{1}{2} (\widehat{AmE} + \widehat{DqB}) \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{EBD} = \widehat{DJB}$ hay tam giác DBJ cân tại D ,
suy ra $DB = DJ$ (*)

$$+ \text{ Lại có } \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow DB = DC \quad (2^*)$$

Từ (*) và (2*) suy ra: $DB = DJ = DC$ hay D là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC (đpcm).

Bài 4.1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(6;6)$ và ngoại tiếp đường tròn tâm $J(4;5)$. Biết điểm $A(2;3)$ và hoành độ điểm B nhỏ hơn hoành độ điểm C . Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC .

Giải

Đường tròn ngoại tiếp ABC có tâm $I(6;6)$ và bán kính $IA=5$ nên có phương trình:
 $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 25$

Ta có AD đi qua $A(2;3), J(4;5)$ nên có phương trình: $x - y + 1 = 0$

Khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:

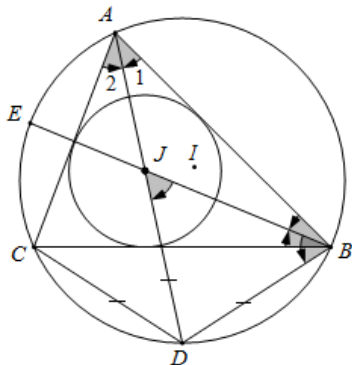
$$\begin{cases} (x-6)^2 + (y-6)^2 = 25 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ x = 9 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(2;3) \equiv A \\ D(9;10) \end{cases} \Rightarrow D(9;10)$$

Theo **Bài 4** ta có B, C nằm trên đường tròn tâm $D(9;10)$ bán kính $DJ = 5\sqrt{2}$ có phương trình: $(x-9)^2 + (y-10)^2 = 50$

Khi đó tọa độ B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-6)^2 + (y-6)^2 = 25 \\ (x-9)^2 + (y-10)^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 9 \\ x = 10 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(2;9) \\ C(10;3) \end{cases} \text{ (do } x_B < x_C \text{)}$$

Vậy $B(2;9), C(10;3)$.



Bài 4.2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm $J(2;1)$. Biết đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC có phương trình $2x + y - 10 = 0$ và $D(2;-4)$ là giao điểm thứ hai của AJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết B có hoành độ âm và B thuộc đường thẳng có phương trình $x + y + 7 = 0$.

Giải

+ AJ đi qua $J(2;1)$ và $D(2;-4)$

nên có phương trình: $x - 2 = 0$

Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ 2x + y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow A(2;6)$$

+ Theo **Bài 4** ta có B, C nằm trên đường tròn tâm $D(2;-4)$ bán kính $DJ = 5$

có phương trình : $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$

+ Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25 \\ x + y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \\ x = 2 \\ y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-3; -4) \\ B(2; 9) \end{cases}$$

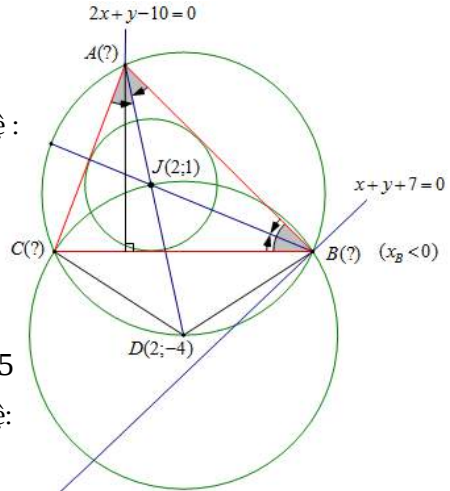
Do B có hoành độ âm nên ta được $B(-3; -4)$

+ BC đi qua B và vuông góc với đường thẳng $2x + y - 10 = 0$ nên có phương trình: $x - 2y - 5 = 0$

Khi đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ :

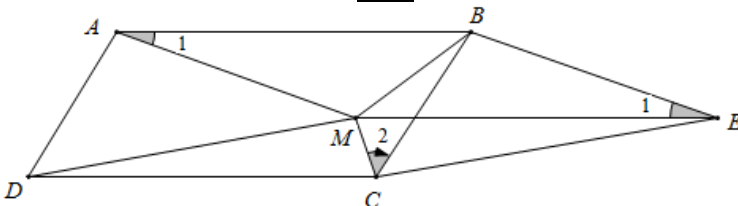
$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25 \\ x - 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \\ x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(-3; -4) \equiv B \\ C(5; 0) \end{cases} \Rightarrow C(5; 0)$$

Vậy $A(2;6), B(-3;-4), C(5;0)$.



Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Một điểm M nằm trong hình bình hành sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MCB}$. Chứng minh rằng $\widehat{AMD}, \widehat{BMC}$ là hai góc bù nhau.

Giải



Dựng điểm E sao cho $ABEM$ là hình bình hành, khi đó $DCEM$ cũng là hình bình hành

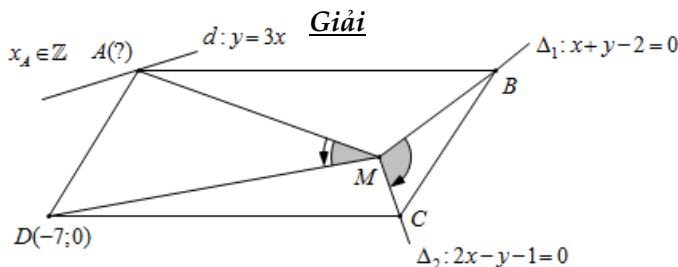
Ta có: $\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{E_1} \\ \widehat{C_2} = \widehat{E_1} \end{cases} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_2} \Rightarrow BECM \text{ nội tiếp đường tròn}$

$$\Rightarrow \widehat{BEC} + \widehat{BMC} = 180^\circ \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } \triangle BEC = \triangle AMD \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{AMD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AMD} + \widehat{BMC} = 180^\circ$ hay $\widehat{AMD}, \widehat{BMC}$ là hai góc bù nhau (đpcm).

Bài 5.1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh $D(-7;0)$. Một điểm M nằm trong hình bình hành sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MCB}$. Phương trình đường thẳng chứa MB, MC lần lượt là $\Delta_1: x + y - 2 = 0$; $\Delta_2: 2x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A , biết rằng đỉnh A thuộc đường thẳng $d: y = 3x$ và A có hoành độ nguyên.



Do $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{M\}$ nên tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(1;1)$$

Gọi $A(a; 3a) \in d$ với $a \in \mathbb{Z}$, khi đó $\overrightarrow{MA} = (a-1; 3a-1)$

Ta có: $\overrightarrow{MD} = (-8; -1)$ và Δ_1, Δ_2 lần lượt có các vecto pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1;1), \vec{n}_2 = (2; -1)$

Theo kết quả **Bài 5**, ta có $\widehat{AMD} + \widehat{BMC} = 180^\circ$, suy ra:

$$|\cos \widehat{AMD}| = |\cos \widehat{BMC}| \Leftrightarrow |\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD})| = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|,$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-8(a-1) - (3a-1)|}{\sqrt{(a-1)^2 + (3a-1)^2} \cdot \sqrt{65}} = \frac{|2-1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 13(5a^2 - 4a + 1) = (11a - 9)^2 \Leftrightarrow 28a^2 - 73a + 34 = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

hoặc $a = \frac{17}{28}$ (loại). Vậy $A(2;6)$.

Bài 5.2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh $A\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Một điểm $M(1; -1)$ nằm trong hình bình hành sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MCB}$ và $\widehat{BMC} = 135^\circ$. Tìm tọa độ đỉnh D , biết rằng D thuộc đường tròn có phương trình $(T): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$.

Giải

+ Đường tròn (T) nhận $M(1; -1)$

làm tâm và có bán kính $R = MD = \sqrt{5}$

Ta có $MA = \frac{3\sqrt{10}}{2}$. Theo **Bài 5** ta có

$\widehat{AMD} + \widehat{BMC} = 180^\circ$, suy ra: $\widehat{AMD} = 180^\circ - \widehat{BMC} = 45^\circ$

+ Xét tam giác AMD ta có:

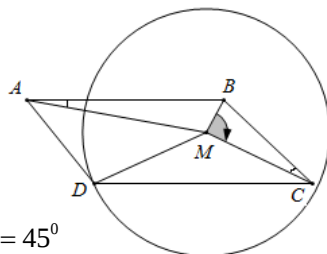
$$AD^2 = MA^2 + MD^2 - 2MA \cdot MD \cdot \cos \widehat{AMD} = \frac{45}{2} + 5 - 2 \cdot \frac{3\sqrt{10}}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{25}{2} \Rightarrow AD = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Suy ra D thuộc đường tròn tâm $A\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$ bán kính $AD = \frac{5}{\sqrt{2}}$

có phương trình: $\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 11x - y + 18 = 0$

+ Khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 11x - y + 18 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(2; 1) \\ D(3; -2) \end{cases}. \text{ Vậy } D(2; 1) \text{ hoặc } D(3; -2).$$



Bài 6: Cho tam giác ABC cân tại A và nội tiếp đường tròn tâm I . Gọi AI và đường cao đi qua C lần lượt cắt đường tròn tại các điểm thứ hai là M, N . Chứng minh rằng $IB \perp MN$

Giải

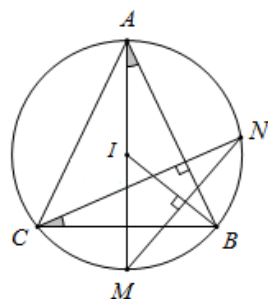
Ta có $\widehat{NCB} = \widehat{MAB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

$\Rightarrow BN = BM$ (tính chất góc nội tiếp)

Mặt khác $IM = IN = R$

Suy ra IB là đường trung trực của MN

hay $IB \perp MN$ (đpcm).



Bài 6.1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) có tâm I (0; 5). Đường thẳng AI cắt đường tròn (T) tại điểm thứ hai là M(5; 0). Đường cao đi qua C cắt đường tròn (T) tại điểm thứ hai là $N\left(-\frac{17}{5}; -\frac{6}{5}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đỉnh B có hoành độ dương.

Giải

+ Vì I là trung điểm của AM nên A(-5;10)

+ Mặt khác theo kết quả **Bài 6** ta có:

$IB \perp MN$ nên IB có phương trình:

$$7x + y - 5 = 0$$

$$\text{(với } \overline{MN} = \left(-\frac{42}{5}; -\frac{6}{5}\right) = -\frac{6}{5}(7;1))$$

+ Gọi $B(t; 5-7t)$ với $t > 0$, khi đó:

$$IB^2 = IM^2 \Leftrightarrow t^2 + (7t)^2 = 50 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -1 \text{ (loại)}$$

$$\Rightarrow B(1; -2)$$

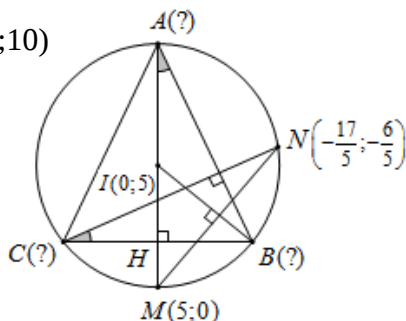
+ Phương trình AM: $x + y - 5 = 0$, suy ra BC đi qua B vuông góc AM có phương trình: $x - y - 3 = 0$

Gọi $AM \cap BC = \{H\}$, suy ra tọa độ điểm H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow H(4;1)$$

Do H là trung điểm của BC $\Rightarrow C(7;4)$

Vậy A(-5;10), B(1; -2), C(7;4).



Bài 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I. Gọi M, N lần lượt là chân chiều cao kẻ từ đỉnh B và C. Chứng minh rằng $IA \perp MN$.

Giải

+ Do M, N đều nhìn BC dưới một góc vuông nên MNBC nội tiếp đường tròn

Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{AMN}$ (cùng bù với $\widehat{NMC}$) (1)

Gọi D là giao điểm thứ hai của AI

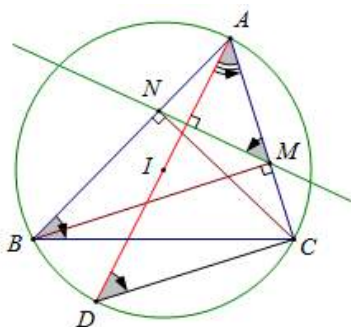
với đường tròn, khi đó:

$$\widehat{ABC} = \widehat{ADC} \text{ (cùng chắn cung } \widehat{AC}) \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{AMN} = \widehat{ADC}$

Mặt khác: $\widehat{ADC} + \widehat{DAC} = 90^\circ$,

suy ra $\widehat{AMN} + \widehat{DAC} = 90^\circ \Rightarrow IA \perp MN$ (đpcm).



Bài 7.1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(T): x^2 + y^2 = 25$ ngoại tiếp tam giác ABC có tọa độ chân đường cao kẻ từ B, C lần lượt là $M(1;3), N(2;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết A có tung độ âm.

Giải

+ Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$
và bán kính $R = 5$

Theo kết quả của **Bài 7** ta có $MN \perp OA$, do đó OA nhận $\overrightarrow{MN} = (1;0)$ làm vectơ pháp tuyến nên OA có phương trình: $x = 0$

Suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -5 \\ x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(0;-5) \text{ hoặc } A(0;5) \text{ (loại)}.$$

+ Khi đó AB đi qua $A(0;-5)$ và $N(2;3)$ nên có phương trình : $4x - y - 5 = 0$

Suy ra tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

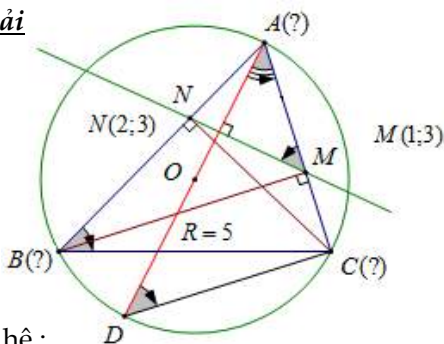
$$\begin{cases} 4x - y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -5 \\ x = \frac{40}{17} \\ y = \frac{75}{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(0;-5) \equiv A \\ B\left(\frac{40}{17}; \frac{75}{17}\right) \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{40}{17}; \frac{75}{17}\right)$$

+ AC đi qua $A(0;-5)$ và $M(1;3)$ nên có phương trình : $8x - y - 5 = 0$

Suy ra tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 8x - y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -5 \\ x = \frac{16}{13} \\ y = \frac{63}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(0;-5) \equiv A \\ C\left(\frac{16}{13}; \frac{63}{13}\right) \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{16}{13}; \frac{63}{13}\right)$$

Vậy $A(0;-5), B\left(\frac{40}{17}; \frac{75}{17}\right), C\left(\frac{16}{13}; \frac{63}{13}\right)$.



Bài 7.2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 25$, đường thẳng AC đi qua điểm $K(2;1)$. Gọi M, N lần lượt là chân đường cao kẻ từ đỉnh B và C . Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC , biết phương trình đường thẳng MN là $4x - 3y + 10 = 0$ và điểm A có hoành độ âm.

Giải

+ Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$

và bán kính $R = 5$

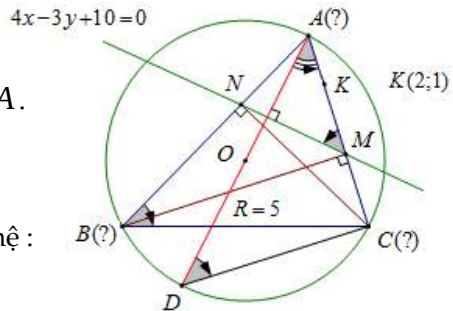
Theo kết quả của **Bài 7** ta có $MN \perp OA$.

Do đó ta có phương trình

$$OA: 3x + 4y = 0$$

Suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \\ x = 4 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow A(-4;3) \text{ hoặc } A(4;-3) \text{ (loại)}.$$



+ Khi đó AC đi qua $A(-4;3)$ và $K(2;1)$ nên có phương trình: $x + 3y - 5 = 0$

Suy ra tọa độ điểm C là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \\ x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(-4;3) \equiv A \\ C(5;0) \end{cases}$$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ 4x - 3y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-1;2)$

Phương trình đường thẳng $BM: 3x - y + 5 = 0$

Suy ra tọa độ điểm B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \\ x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-3;-4) \\ B(0;5) \end{cases}$$

Vậy $A(-4;3), B(-3;-4), C(5;0)$ hoặc $A(-4;3), B(0;5), C(5;0)$.

Bài 8. Cho tam giác ABC có trực tâm H . Gọi D là giao điểm thứ hai của AH với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M là giao điểm của AH với BC . Chứng minh rằng: M là trung điểm của HD .

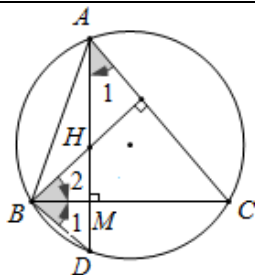
Giải

Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ (cùng chắn cung $\widehat{DC}$)

và $\widehat{B_2} = \widehat{A_1}$ (cùng phụ với góc $\widehat{C}$)

Suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{B_2} \Rightarrow \Delta BHD$ cân tại B

$\Rightarrow M$ là trung điểm của HD (đpcm).



Bài 8.1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(-1;-3)$. Biết rằng trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt là $H(1;-1)$ và $I(2;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC .

Giải

+ Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

tâm $I(2;-2)$ bán kính $IA = \sqrt{10}$

có phương trình: $(T): (x-2)^2 + (y+2)^2 = 10$

+ Phương trình $AH: x - y - 2 = 0$.

Gọi D là giao điểm thứ hai của AH với đường tròn (T) .

Khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+2)^2 = 10 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3; y = 1 \\ x = -1; y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(3;1) \\ D(-1;-3) \equiv A \end{cases} \Rightarrow D(3;1)$$

+ Gọi M là giao điểm của BC và AD .

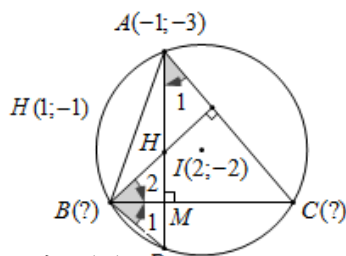
Theo kết quả **Bài 8** ta có M là trung điểm của $HD \Rightarrow M(2;0)$

+ Khi đó BC đi qua M vuông góc với AH nên có phương trình: $x + y - 2 = 0$

Suy ra tọa độ B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+2)^2 = 10 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 1 \\ x = 5; y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(1;1), C(5;-3) \\ B(5;-3), C(1;1) \end{cases}$$

Vậy $B(1;1), C(5;-3)$ hoặc $B(5;-3), C(1;1)$.

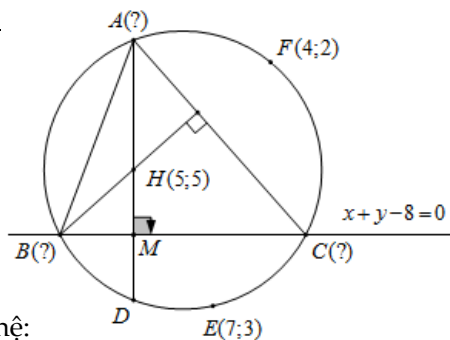


Bài 8.2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác nhọn ABC có trực tâm $H(5;5)$, phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là $x + y - 8 = 0$. Biết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua hai điểm $E(7;3)$ và $F(4;2)$. Tính diện tích tam giác ABC .

Giải

+ Đường thẳng AH đi qua $H(5;5)$ và vuông góc với BC nên có phương trình: $x - y = 0$

+ Gọi AH giao với BC tại M và giao với đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại D (khác A)



Khi đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 4 \Rightarrow M(4;4)$$

Theo kết quả của **Bài 8**, ta có M là trung điểm của HD nên suy ra $D(3;3)$

+ Gọi phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có dạng $(T): x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} E(7;3) \in (T) \\ F(4;2) \in (T) \\ D(4;4) \in (T) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a + 3b + c = -58 \\ 4a + 2b + c = -20 \\ 4a + 4b + c = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = -8 \\ c = 36 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } (T): x^2 + y^2 - 10x - 8y + 36 = 0$$

+ Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 8y + 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 6 \\ x = y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(6;6) \quad (\text{vì } A \neq D(3;3))$$

+ Tọa độ điểm B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 8 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 8y + 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3; y = 5 \\ x = 6; y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(3;5), C(6;2) \\ B(6;2), C(3;5) \end{cases} \Rightarrow BC = 3\sqrt{2}$$

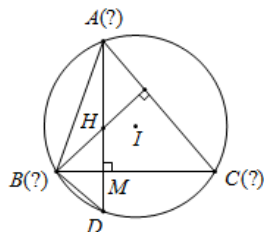
$$\text{Suy ra } S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot d(A, BC) = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{|6 + 6 - 8|}{\sqrt{2}} = 6$$

Vậy $S_{ABC} = 6$.

Bài 8.3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp $I(2;2)$, trực tâm $H(2;12)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết rằng đường thẳng BC có phương trình $x + y - 2 = 0$.

Gợi ý:

- + Viết phương trình AH (đi qua H và vuông góc với BC)
- + Suy ra tọa độ điểm M (là giao của AH và BC) $\Rightarrow$ tọa độ điểm D (Do M là trung điểm của HD – nhờ kết quả Bài 8)
- + Viết phương trình đường tròn (T) ngoại tiếp tam giác ABC (tâm I bán kính ID)
- + Từ đó suy ra tọa độ B, C là giao của BC với (T) và tọa độ A là giao của AD với (T) .



Đáp số: $A(4;14), B(1+\sqrt{73};1-\sqrt{73}), C(1-\sqrt{73};1+\sqrt{73})$

hoặc $A(4;14), B(1-\sqrt{73};1+\sqrt{73}), C(1+\sqrt{73};1-\sqrt{73})$

Bài 8.4. Cho tam giác nhọn ABC . Đường thẳng chứa trung tuyến kẻ từ đỉnh A và đường thẳng BC lần lượt có phương trình là $3x + 5y - 8 = 0$ và $x - y - 4 = 0$. Đường thẳng qua A vuông góc với đường thẳng BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là $D(4;-2)$. Viết phương trình các đường thẳng AB, AC biết rằng hoành độ của điểm B không lớn hơn 3.

Giải

- + Gọi M là trung điểm của BC , khi đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

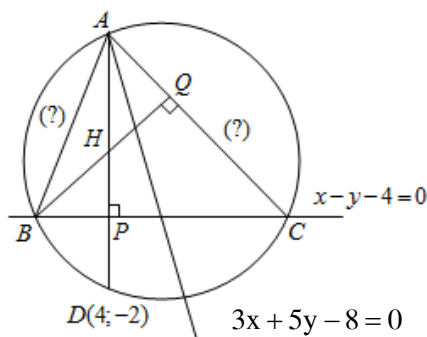
$$\begin{cases} 3x + 5y - 8 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

- + Vì $AD \perp BC$, nên AD đi qua $D(4;-2)$

nhận $\overrightarrow{u_{BC}} = (1;1)$ làm vecto pháp tuyến nên có phương trình:

$$x - 4 + y + 2 = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$$

- + Do $AD \cap AM = \{A\}$, nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:



$$\begin{cases} 3x + 5y - 8 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$$

Gọi $BC \cap AD = \{P\}$, nên tọa độ điểm P là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow P(3;-1)$$

+ Theo Bài 8 ta có P là trung điểm của $HD \Rightarrow H(2;0)$

+ Gọi $B(t; t-4) \in BC$ với $t \leq 3 \Rightarrow C(7-t; 3-t) \Rightarrow \begin{cases} \overline{BH} = (2-t; 4-t) \\ \overline{AC} = (6-t; 2-t) \end{cases}$

Do H là trực tâm của $\triangle ABC$ nên :

$$\overline{BH} \cdot \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow (2-t)(6-t) + (4-t)(2-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-t)(10-2t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ hoặc } t = 5 \text{ (loại)} \Rightarrow \begin{cases} B(2;-2) \\ C(5;1) \end{cases}$$

+ Suy ra phương trình $AB: 3x + y - 4 = 0$ và $AC: y - 1 = 0$

Nhận xét và bình luận:

Với khả năng sáng tạo, hy vọng bạn đọc có thể tự tạo ra cho mình những đề bài hay, được phát triển dựa trên những bài toán hình học phẳng thuần túy quen thuộc nhưng chứa đựng nhiều vẻ đẹp vốn có của nó.

Sau đây là các bài toán đề xuất bạn đọc có thể tham khảo thêm:

B. Các bài toán đề xuất

Bài 9. Cho tam giác ABC với H là trực tâm. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB . Gọi D, E, F lần lượt là chân chiều cao ứng với các đỉnh A, B, C và K, L, M lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AH, BH, CH . Chứng minh rằng: 9 điểm $A', B', C', D, E, F, K, L, M$ cùng nằm trên một đường tròn và H cùng với trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thẳng hàng.

Bài 9.1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm $G(1;1)$. Phương trình đường tròn đi qua trung điểm của các đoạn BA, BC và chân đường cao hạ từ B xuống cạnh AC có phương trình $x^2 + (y+1)^2 = 4$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Đáp số: $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 16$.

Bài 9.2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(T): (x+2)^2 + (y-2)^2 = 25$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC cắt (T) tại điểm $E(1; -2)$ khác A . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết tam giác ABC có trọng tâm $G\left(-1; \frac{16}{3}\right)$.

Đáp số: $A(1; 6), B(-6; 5), C(2; 5)$.

Bài 10. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh BC và CD sao cho $BM = CN$. Chứng minh rằng $AM \perp BN$.

Bài 10.1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh $B(3; 3)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh BC và CD . Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông $ABCD$, biết A thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 2 = 0$ và $H\left(\frac{11}{5}; \frac{7}{5}\right)$ là giao điểm của AM và BN .

Đáp số: $A(-1; 3), C(3; -1), D(-1; -1)$

Bài 10.2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh BC và CD . Đường thẳng đi qua B và C có phương trình $x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết C có hoành độ dương và $H\left(\frac{4}{5}; \frac{8}{5}\right)$ là giao điểm của AM và BN .

Đáp số: $A(-4; 0), B(0; 4), C(4; 0), D(0; -4)$.

Bài 10.3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn CD và $CD = AD = 2AB$; $\widehat{BAD} = 90^\circ$, $B(3; 6)$. Gọi M là trung điểm của AD và $H\left(\frac{18}{5}; \frac{24}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của M trên BC . Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang $ABCD$, biết A có tung độ nhỏ hơn 7.

Đáp số: $A(0; 6), C(6; 0), D(0; 0)$.

PHẦN 5.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $B(-12;1)$ và trọng tâm $G\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A có phương trình là

$\Delta: x + 2y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC .

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AD, BC , đỉnh $A\left(\frac{7}{4}; \frac{13}{2}\right)$ và $4AD = 9BC$. Giao điểm của hai đường chéo

AC, BD là $E(4;2)$. Đỉnh B thuộc đường thẳng $\Delta: 3x + 2y + 1 = 0$ và trung điểm M của đoạn BC thuộc đường thẳng $x - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang $ABCD$.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, đường tròn đường kính AM cắt cạnh BC tại hai điểm $B, M(5;7)$ và cắt đường chéo BD tại $N(6;2)$, đỉnh C thuộc đường thẳng $d: 2x - y - 7 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết hoành độ đỉnh C nguyên và tung độ đỉnh A bé hơn 2.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$. Điểm $N(3;2)$ là trung điểm cạnh BC , các điểm $M(-2;2)$ và $P(2;-1)$ lần lượt nằm trên cạnh AB và DC sao cho $AM = CP$. Xác định tọa độ các đỉnh $ABCD$.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có đỉnh $A(-3;1)$ và đỉnh C thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y - 5 = 0$. Trên tia đối của CD lấy điểm E sao cho $CE = CD$, biết $N(6;-2)$ là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng BE . Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật $ABCD$.

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$ và hai đường tròn có phương trình $(C_1): x^2 + y^2 - 6x + 8y + 23 = 0$, $(C_2): x^2 + y^2 + 12x - 10y + 53 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm nằm trên d , tiếp xúc trong với (C_1) và tiếp xúc ngoài với (C_2) .

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có chân đường cao hạ từ đỉnh A, B, C đến các cạnh đối diện là $D(2; -1), E(2; 2), F(-2; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại B và $BC = 2BA$. Điểm $M(2; -2)$ là trung điểm của cạnh AC . Gọi N là điểm trên cạnh BC sao cho $BN = \frac{1}{4}BC$. Điểm $H\left(\frac{4}{5}; \frac{8}{5}\right)$ là giao điểm của AN và BM . Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết điểm N nằm trên đường thẳng $x + 2y - 6 = 0$.

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có điểm $A(2; 3)$, trọng tâm $G(2; 0)$. Hai đỉnh B và C lần lượt thuộc các đường thẳng $\Delta_1: x + y + 5 = 0$ và $\Delta_2: x + 2y - 7 = 0$. Viết phương trình đường tròn tâm C và tiếp xúc với đường thẳng BG .

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $AC = 2AB$. Điểm $M(1; 1)$ là trung điểm của BC . Điểm N thuộc đoạn AC sao cho $NC = 3AN$ và điểm D thuộc BC sao cho AD đối xứng với AM qua phân giác trong góc A của tam giác ABC . Điểm C thuộc đường thẳng $d: x + y - 7 = 0$ và DN có phương trình $3x - 2y + 8 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có phương trình đường chéo $AC: x + y - 5 = 0$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm M và trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho $DN = BM$. Đường thẳng song song với AN kẻ từ M và đường thẳng song song với AM kẻ từ N cắt nhau ở $F(0; -3)$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết điểm M nằm trên trục hoành.

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(3; 0)$ và elip $(E): \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Tìm tọa độ các điểm B, C thuộc (E) sao cho tam giác ABC vuông cân tại A , biết điểm B có tung độ dương.

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Tìm điểm M có hoành độ dương thuộc (E) sao cho $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$, trong đó F_1, F_2 là các tiêu điểm.

Bài 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E) có tâm sai $e = \frac{4}{5}$, đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của elip có phương trình $x^2 + y^2 = 34$. Viết phương trình chính tắc của elip và tìm tọa độ điểm M thuộc elip (E) sao cho M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông và M có hoành độ dương.

Bài 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$ và elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với d và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 3.

Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có tam giác vuông ABD nội tiếp đường tròn $(T): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$. Biết hình chiếu vuông góc của B và D lên đường chéo AC lần lượt là $H\left(\frac{22}{5}; \frac{14}{5}\right)$ và

$K\left(\frac{13}{5}; \frac{11}{5}\right)$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình bình hành $ABCD$ biết A có tung độ nguyên và $AD = 3\sqrt{2}$.

Bài 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$, trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho $NC = 2ND$. Đỉnh $D(1; -3)$ và điểm A nằm trên đường thẳng $3x - y + 9 = 0$. Phương trình đường thẳng $MN: 4x - 3y - 3 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật $ABCD$.

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho biết elip (E) có chu vi hình chữ nhật cơ sở bằng $16(2 + \sqrt{3})$, đồng thời một đỉnh của (E) tạo với hai tiêu điểm một tam giác đều. Viết phương trình đường tròn (T) có tâm là gốc tọa độ và cắt (E) tại bốn điểm là bốn đỉnh của một hình vuông.

Bài 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(1;2)$, đường trung tuyến $BM: 2x + y + 1 = 0$ và phân giác trong $CD: x + y - 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC .

Bài 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(6;6)$, tâm đường tròn nội tiếp là $J(4;5)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC .

Bài 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-4)^2 + \left(y-\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ và hai điểm $A(2;3), B(6;6)$. Gọi M, N là hai điểm khác nhau nằm trên đường tròn (C) sao cho các đường thẳng AM và BN cắt nhau tại điểm $H\left(4; \frac{5}{2}\right)$, AN và BM cắt nhau tại C . Tìm tọa độ điểm C , biết tọa độ điểm $H\left(4; \frac{5}{2}\right)$.

Bài 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(4;-1)$. Đường cao và trung tuyến xuất phát từ đỉnh A lần lượt có phương trình $x + y - 1 = 0$ và $x + 2y - 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng chứa các cạnh của tam giác ABC .

Bài 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC . Đường cao kẻ từ A , trung tuyến kẻ từ B , trung tuyến kẻ từ C lần lượt có phương trình $x + y - 6 = 0, x - 2y + 1 = 0, x - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Bài 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 12, giao điểm của hai đường chéo là $I\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$, trung điểm của cạnh AD là $M(3;0)$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ biết A có hoành độ dương.

Bài 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông cân tại A , phương trình $BC: 2x - y - 7 = 0$, đường thẳng AC đi qua điểm $M(-1;1)$, điểm A nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 4y + 6 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết A có hoành độ dương.

Bài 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A . Đường thẳng AC có phương trình là $3x - y - 5 = 0$. Gọi H là trung điểm của BC ,

D là hình chiếu vuông góc của H trên AC và M là trung điểm của HD . Đường thẳng BD đi qua điểm $E(8; -5)$ và phương trình đường thẳng AM là: $11x - 7y - 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC .

Bài 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết đường cao kẻ từ A , trung tuyến kẻ từ B và phân giác trong kẻ từ C lần lượt có phương trình lần lượt là $3x - 4y + 27 = 0$, $4x + 5y - 3 = 0$ và $x + 2y - 5 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Bài 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $AC = 2AB$. Điểm $M(1; 1)$ là trung điểm của BC , điểm D thuộc BC sao cho AD đối xứng với AM qua tia phân giác trong góc $\widehat{BAC}$. Đường thẳng có phương trình $d: 3x - 2y + 8 = 0$ đi qua D . Xác định tọa độ các đỉnh B của tam giác ABC , biết C thuộc đường thẳng $d': x + y - 7 = 0$.

Bài 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn

$$(T): \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{325}{16}. \text{ Đường phân giác trong góc } \widehat{BAC} \text{ cắt } (T) \text{ tại}$$

$$E\left(0; -\frac{7}{2}\right). \text{ Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác } ABC, \text{ biết đường thẳng}$$

$$BC \text{ đi qua điểm } N(-5; 2) \text{ và đường thẳng } AB \text{ đi qua điểm } P(-3; -2).$$

Bài 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: 5x - 2y - 19 = 0$ và đường tròn $(T): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Từ một điểm M nằm trên đường thẳng Δ kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) (A, B là hai tiếp điểm). Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB biết $AB = \sqrt{10}$.

Bài 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có

$$BD = \frac{\sqrt{10}}{5} AC. \text{ Gọi hình chiếu vuông góc của điểm } D \text{ lên các đường thẳng}$$

$$AB, BC \text{ lần lượt là } M(-2; -1), N(2; -1), \text{ biết } AC \text{ nằm trên đường thẳng } x - 7y = 0. \text{ Tìm tọa độ các đỉnh } A, C.$$

Bài 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trọng tâm $G\left(\frac{4}{3}; 1\right)$, trung điểm BC là điểm $M(1; 1)$. Phương trình đường thẳng chứa đường cao kẻ từ đỉnh B là $\Delta: x + y - 7 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Bài 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: x - y - 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng Δ . Biết (C) cắt trục Ox tại hai điểm A, B và cắt trục Oy tại hai điểm M, N sao cho diện tích của hai tam giác IAB và IMN đều bằng 12.

Bài 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 4y = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 + 4x + 18y + 36 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I nằm trên đường thẳng $d: 2x + y - 7 = 0$ đồng thời tiếp xúc với cả hai đường tròn (C_1) và (C_2) .

Bài 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và điểm $M(2; 1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho trung điểm của đoạn thẳng AB nằm trên đường thẳng $\Delta: y = 2x$.

Bài 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất.

Bài 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(3; -4)$. Phương trình đường trung trực cạnh BC , đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh C lần lượt là $x + y - 1 = 0$ và $3x - y - 9 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC .

Bài 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(T): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$. Đỉnh A thuộc tia Oy , đường cao vẽ từ C nằm trên đường thẳng $d: x + 5y = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết C có hoành độ là một số nguyên.

Bài 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh $A(-3; 5)$, tâm I thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 5 = 0$ và diện tích bằng 25. Tìm

tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông $ABCD$, biết rằng điểm I có hoành độ dương.

Bài 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(0;2)$ và hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có phương trình lần lượt là $3x + y + 2 = 0$ và $x - 3y + 4 = 0$. Gọi A là giao điểm của Δ_1 và Δ_2 . Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M , cắt hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt tại B, C (B và C khác A) sao cho $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ngoại tiếp tam giác đều ABC . Tính diện tích tam giác ABC , biết (E) nhận $A(0;2)$ làm đỉnh và trục tung làm trục đối xứng.

Bài 42. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(T): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ và đường thẳng $\Delta: x + y + 2 = 0$. Từ điểm A thuộc Δ kẻ hai đường thẳng lần lượt tiếp xúc với (T) tại B và C . Tìm tọa độ điểm A biết diện tích tam giác ABC bằng 8.

Bài 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , biết BC và BG lần lượt có phương trình $x - 2y - 4 = 0$ và $7x - 4y - 8 = 0$. Biết đường thẳng CG đi qua điểm $E\left(-2; \frac{3}{4}\right)$. Tìm tọa độ điểm A .

Bài 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$. Tìm các điểm M thuộc (E) sao cho $\widehat{F_1MF_2} = 120^\circ$, trong đó F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E) .

Bài 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $I(1;-2)$ và hai đường thẳng có phương trình lần lượt là $\Delta_1: 3x + y + 5 = 0$ và $\Delta_2: 3x + y + 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua I và cắt Δ_1, Δ_2 lần lượt tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{2}$.

Bài 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với trung tuyến và phân giác trong của đỉnh B có phương trình $\Delta_1: 2x + y - 3 = 0$ và $\Delta_2: x + y - 2 = 0$. Điểm $M(2;1)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh AB , đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính bằng $\sqrt{5}$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết đỉnh A có hoành độ dương.

Bài 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$. Biết phân giác trong của $\widehat{ABC}$ đi qua trung điểm M của AD , đường thẳng BM có phương trình $x - y + 2 = 0$, điểm D thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 9 = 0$ và điểm $E(-1;2)$ thuộc cạnh AB . Tìm tọa độ các đỉnh của cho hình chữ nhật $ABCD$, biết điểm B có hoành độ âm.

Bài 48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh $C(3;-3)$, M là trung điểm của BC . Đường thẳng MD có phương trình $x - y - 2 = 0$, điểm A thuộc đường thẳng $d: 3x + y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông $ABCD$.

Bài 49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $BC = 2$. Gọi H, G lần lượt là trực tâm và trọng tâm của tam giác ABC và O là trung điểm của BC . Tìm tọa độ đỉnh A biết A thuộc đường thẳng $\Delta: 5x - 2y - 4 = 0$ và trung điểm K của HG cùng với các điểm B, C đều thuộc trục hoành.

Bài 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có phương trình đường cao kẻ từ đỉnh B và phân giác trong kẻ từ đỉnh A lần lượt là $d_1: 3x + 4y + 10 = 0$ và $d_2: x - y + 1 = 0$. Điểm $M(0;2)$ thuộc đường thẳng AB và cách C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Bài 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-3;6)$. Biết tam giác ABC nội tiếp đường tròn có tâm $I(1;3)$ và $AB \cdot AC = 60\sqrt{2}$. Hình chiếu H của điểm A xuống cạnh BC thuộc đường thẳng $d: x + 2y - 3 = 0$. Hãy tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành $ABCD$ biết H có tọa độ nguyên và hoành độ của điểm B bé hơn hoành độ điểm C .

Bài 52. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AO . Gọi (T) là đường tròn tâm A , đường kính OD . Tiếp tuyến

của (T) tại D cắt CA tại $E(-8;8)$. Đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác AEB đi qua điểm $M(4;7)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết đường thẳng EB có phương trình $4x+3y+8=0$.

Bài 53. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(T): (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ và hai điểm $A(2;-1), B(2;-5)$. Một đường kính MN thay đổi sao cho các đường thẳng AM, AN cắt tiếp tuyến tại B lần lượt tại P và Q . Tìm tọa độ trục tâm H của tam giác MPQ biết điểm H nằm trên đường thẳng $d: 2x-y-7=0$.

Bài 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $OABC$ có tâm I và diện tích bằng 4. Biết $A(1;2)$ và I thuộc đường thẳng $\Delta: x+y-1=0$. Tìm tọa độ các điểm B, C .

Bài 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(-3;4)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x+y-1=0$ và tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(1;7)$. Viết phương trình cạnh BC , biết diện tích tam giác ABC gấp 4 lần diện tích tam giác IBC .

Bài 56. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(2;0)$ và đường tròn $(T): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$. Tìm tọa độ hai điểm B, C thuộc (T) sao cho tam giác ABC vuông tại B và có diện tích bằng 4.

Bài 57. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(1;2)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') có tâm A và cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất.

Bài 58. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(1;5)$. Tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác lần lượt là $K(2;2)$ và $I\left(\frac{5}{2}; 3\right)$.

Tìm tọa độ đỉnh B và C của tam giác.

Bài 59. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(0;2), B\left(0; -\frac{4}{5}\right)$ và hai đường thẳng $\Delta_1: x-y-1=0; \Delta_2: 2x+y+2=0$. Hãy viết phương trình

đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ và cắt Δ_1, Δ_2 lần lượt tại M, N sao cho AM song song với BN .

Bài 60. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: x - y + 5 = 0$ và hai elip có phương trình $(E_1): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ và $(E_2): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$). Biết hai elip này có cùng tiêu điểm và (E_2) đi qua điểm M thuộc đường thẳng Δ . Tìm tọa độ điểm M sao cho elip (E_2) có độ dài trục lớn nhỏ nhất.

Bài 61. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích bằng 4. Biết $A(1; 0)$, $B(0; 2)$ và giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng $\Delta: x - y = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành $ABCD$.

Bài 62. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại $A(2; 3)$, $AB = 2AC$. Gọi M là trung điểm của AB . Hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng BC là $K(4; 9)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C .

Bài 63. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: x + 3y - 12 = 0$ và hai điểm $M(2; 4)$, $N(3; 1)$. Lập phương trình đường tròn đi qua hai điểm M, N và cắt Δ tại hai điểm AB sao cho $AB = \sqrt{10}$.

Bài 64. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $\Delta_1: x - 7y + 3 = 0$ và $\Delta_2: 2x + y + 1 = 0$. Lập phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng Δ_2 và tiếp xúc với Δ_1 tại điểm có hoành độ là 4.

Bài 65. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(2; 1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất.

Bài 66. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(0; 2)$, $B(-1; 0)$, $C(2; -1)$. Gọi Δ là đường thẳng bất kỳ qua A và H, K lần lượt là hình chiếu của các điểm B, C lên đường thẳng Δ . Viết phương trình đường thẳng Δ biết $BH + CK$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 67. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x - 2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: x - y = 0, \Delta_2: x - 7y = 0$. Xác định tọa độ tâm K của đường tròn (C') tiếp xúc với đường thẳng Δ_1, Δ_2 và tâm K thuộc đường tròn (C) .

Bài 68. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $\Delta_1: \sqrt{3}x + y = 0$, $\Delta_2: \sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với Δ_1 tại A , cắt Δ_2 tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B . Viết phương trình đường tròn (T) , biết rằng tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

Bài 69. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và hai điểm $A(3; -2), B(-3; 2)$. Tìm trên (E) điểm C có tọa độ dương sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Bài 70. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(T'): x^2 + y^2 = 1$ và điểm $A(1; 3)$. Viết phương trình đường tròn (T) qua A và tâm của đường tròn (T') đồng thời cắt đường tròn tại B, C sao cho khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC là lớn nhất.

Bài 71. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích bằng 16. Biết tam giác ABC cân tại A ; $BC = 4$ và $K\left(\frac{21}{5}; \frac{18}{5}\right)$ là hình chiếu của điểm B xuống cạnh AC . Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành $ABCD$ biết B thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 3 = 0$ đồng thời hoành độ các điểm B, C đều là các số nguyên.

Bài 72. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn (T) đi qua $A(4; 2)$, tiếp xúc với $\Delta_1: x - 2y - 5 = 0$ tại điểm B có tung độ âm và cắt $\Delta_2: x - 3y + 6 = 0$ tại C và D sao cho $ABCD$ là hình thang có 2 đáy là AD, BC và 2 đường chéo AC, BD vuông góc. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang $ABCD$.

Bài 73. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Lập phương trình chính tắc của elip (E) , biết điểm $M(1; \sqrt{3})$ nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc vuông và hình chữ nhật cơ sở của (E) nội tiếp đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 20$.

Bài 74. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2 . Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2 bằng $\frac{4}{3}$.

Bài 75. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(2\sqrt{3}; 2)$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua điểm M , sao cho M nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc vuông.

Bài 76. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 6. Phương trình đường thẳng chứa đường chéo BD là $2x + y - 11 = 0$, đường thẳng AB đi qua $M(4; 2)$, đường thẳng BC đi qua $N(8; 4)$. Viết phương trình các đường chứa các cạnh của hình chữ nhật $ABCD$, biết điểm B, D đều có hoành độ lớn hơn 4.

Bài 77. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$) có diện tích bằng 12. Đường phân giác trong của góc A cắt đoạn BC tại điểm $D(-2; -2)$. Điểm A nằm trên đường thẳng $x = -5$ và $CD \cdot BD = 15$. Tìm tọa độ điểm C , biết rằng C có tung độ âm.

Bài 78. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ tâm I . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AI, CI . Biết $MBND$ là hình vuông, đường thẳng BD có phương trình $3x - 2y + 1 = 0$. Điểm đối xứng với điểm N qua điểm C là $H(10; -4)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi, biết rằng hoành độ điểm B không nhỏ hơn hoành độ điểm D .

Bài 79. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trọng tâm $G\left(1; \frac{11}{3}\right)$, đường thẳng trung trực của cạnh BC có phương trình $x - 3y + 8 = 0$ và đường thẳng AB có phương trình $4x + y - 9 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Bài 80. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x - 4)^2 + y^2 = 4$ và điểm $E(4; 1)$. Tìm điểm M trên trục tung sao cho từ điểm M kẻ được hai

tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) với A, B là các điểm sao cho đường thẳng AB đi qua E .

Bài 81. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với đỉnh $A(1; -2)$. Đường cao BH và đường phân giác BN của tam giác ABC có phương trình lần lượt là $x - y + 1 = 0$ và $2x + y + 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC .

Bài 82. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , Cho tam giác ABC cân tại C có phương trình cạnh AB là $x - 2y = 0$. Điểm $I(4; 2)$ là trung điểm của AB , điểm $M\left(4; \frac{9}{2}\right)$ thuộc cạnh BC , diện tích tam giác ABC bằng 10. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác biết tung độ của điểm B không nhỏ hơn 3.

Bài 83. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho 3 điểm $I(1; -1)$, $M(2; 3)$, $N(5; 0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ sao cho I là tâm của hình vuông, M thuộc cạnh AB , N thuộc cạnh BC .

Bài 84. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 12. Điểm I là giao điểm của hai đường thẳng $d_1: x - y - 3 = 0$ và $d_2: x + y - 6 = 0$. Trung điểm của một cạnh là giao điểm của d_1 với trục Ox . Biết điểm I là tâm của hình vuông $ABCD$ và A có tung độ dương. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.

Bài 85. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $C(2; 0)$ và elip $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Tìm các điểm A, B trên (E) sao cho $CA = CB$ và tam giác CAB có diện tích lớn nhất.

Bài 86. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông cân tại A . Biết cạnh huyền nằm trên đường thẳng $\Delta: x + 7y - 31 = 0$, điểm $N\left(1; \frac{5}{2}\right)$ thuộc đường thẳng AC , điểm $M(2; -3)$ thuộc đường thẳng AB . Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết rằng điểm A có hoành độ âm.

Bài 87. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(T): x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ và đường thẳng Δ có phương trình

$x + y - 1 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ ngoại tiếp (T) , biết rằng điểm A thuộc đường thẳng Δ và có hoành độ nhỏ hơn 3.

Bài 88. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(T): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(7;3)$ và cắt đường tròn (T) tại hai điểm phân biệt B, C sao cho $AB = 3AC$.

Bài 89. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ và điểm $M(2; 4\sqrt{3})$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho tam giác MAB đều.

Bài 90. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình đường thẳng AB, BD lần lượt là $x - 2y + 1 = 0$ và $x - 7y + 14 = 0$. Đường thẳng AC đi qua điểm $M(2;1)$. Tìm tọa độ điểm N thuộc BD sao cho $NA + NC$ nhỏ nhất.

Bài 91. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A , D là trung điểm của đoạn AB . Biết rằng $I\left(\frac{11}{3}; \frac{5}{3}\right), E\left(\frac{13}{3}; \frac{5}{3}\right)$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , trọng tâm tam giác ADC . Các điểm $M(3; -1), N(-3; 0)$ lần lượt thuộc các đường thẳng DC, AB . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng A có tung độ dương.

Bài 92. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Viết phương trình chính tắc của elip (E) . Biết (E) đi qua điểm $M(-2; -3)$ và có phương trình một đường chuẩn là $x + 8 = 0$.

Bài 93. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$. Gọi I là tâm của (C) . Viết phương trình đường thẳng cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $ABOI$ là hình thang đáy AB có độ dài là $4\sqrt{5}$.

Bài 94. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm của cạnh BC , phương trình đường thẳng DM là $x - y - 2 = 0$ và điểm $C(3; -3)$. Biết đỉnh A thuộc đường thẳng $3x + y - 2 = 0$ và A có hoành độ âm. Xác định tọa độ các đỉnh A, B, D .

Bài 95. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$. Đỉnh A thuộc tia Oy , đường cao kẻ từ đỉnh C thuộc đường thẳng $x + 5y = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết đỉnh C có hoành độ là một số nguyên.

Bài 96. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{25}{2}$ nội tiếp hình vuông $ABCD$, đường chéo AC song song với đường thẳng $4x - 3y + 2015 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông, biết đỉnh A và đỉnh B đều có hoành độ dương.

Bài 97. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ biết đỉnh $B(2; -1)$, đường cao AH trong tam giác ABC có phương trình $3x - y - 9 = 0$ và đường phân giác của góc $\angle ACB$ có phương trình $x - y + 1 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh D .

Bài 98. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(3; 0)$, cạnh BC có phương trình $3x - 4y + 1 = 0$. Đường thẳng Δ có phương trình $x + 3y - 4 = 0$ cắt đoạn thẳng BC tại điểm H sao cho $HC = 2HB$. Xác định tọa độ đỉnh B, C biết diện tích của tam giác ABC bằng 15 và B có hoành độ dương.

Bài 99. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Tìm điểm M nằm trên elip sao cho $MF_1 = 4MF_2$, trong đó F_1, F_2 lần lượt là các tiêu điểm trái, phải của elip.

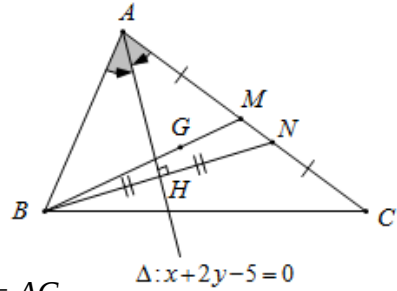
Bài 100. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có đỉnh $A(-2; 2)$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và diện tích hình thoi bằng $12\sqrt{3}$. Xác định tọa độ các đỉnh B, C, D biết đường chéo BD vuông góc với đường thẳng $x + y - 3 = 0$ và tâm của hình thoi có hoành độ dương.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

- + Gọi M là trung điểm của AC , khi đó:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{13}{2} \\ y_M = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{13}{2}; \frac{1}{2}\right)$$



- + Gọi N đối xứng với B qua Δ , suy ra $N \in AC$.

Khi đó phương trình $BN: 2x - y + 25 = 0$

Suy ra tọa độ giao điểm H của BN và Δ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y + 25 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow H(-9; 7) \Rightarrow N(-6; 13) \text{ (vì } H \text{ là trung điểm của } BN)$$

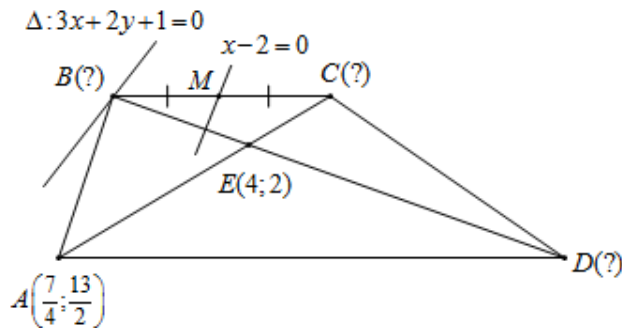
- + Khi đó AC đi qua M, N có phương trình: $x + y - 7 = 0$

Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow A(9; -2) \Rightarrow C(4; 3)$$

- + Suy ra phương trình: $BC: x - 8y + 20 = 0$

Bài 2.



- + Do $AD \parallel BC$ nên theo định lý Ta - let ta có: $\frac{EC}{EA} = \frac{EB}{ED} = \frac{BC}{AD} = \frac{4}{9}$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{EC} = -\frac{4}{9}\overrightarrow{EA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 4 = -\frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) \\ y_C - 2 = -\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 5 \\ y_C = 0 \end{cases} \Rightarrow C(5; 0)$$

- + Gọi $M(2; m) \Rightarrow B(-1; 2m)$.

$$\text{Mà } B \in \Delta \Rightarrow -3 + 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow B(-1; 1)$$

$$+ \text{ Ta có: } \overline{BC} = \frac{4}{9} \overline{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = \frac{4}{9} \left(x_D - \frac{7}{4} \right) \\ -1 = \frac{4}{9} \left(y_D - \frac{13}{2} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \frac{61}{4} \\ y_D = \frac{17}{4} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{61}{4}; \frac{17}{4}\right)$$

$$\text{Vậy } C(5; 0), B(-1; 1), D\left(\frac{61}{4}; \frac{17}{4}\right).$$

Bài 3.

+ Gọi I là trung điểm của BD

Ta có B, N thuộc đường tròn

đường kính AM nên $\widehat{AMN} = \widehat{ABN} = 45^\circ$

Suy ra tam giác AMN vuông cân tại N

$$\Rightarrow \begin{cases} AN \perp MN & (1) \\ AN = MN & (2) \end{cases}$$

+ Từ (1), suy ra phương trình $AN: x - 5y + 4 = 0$

Gọi $A(5a - 4; a) \in AN$ với $a < 2$, khi đó:

$$(2) \Rightarrow AN^2 = MN^2 \Leftrightarrow (5a - 10)^2 + (a - 2)^2 = 26 \Leftrightarrow (a - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$$

hoặc $a = 3$ (loại) $\Rightarrow A(1; 1)$

+ Gọi $C(c; 2c - 7) \in d$ với $c \in \mathbb{Z}$.

Ta $N \in BD$: là trung trực của $AC \Rightarrow NC = NA$, khi đó:

$$NC^2 = NA^2 \Leftrightarrow (c - 6)^2 + (2c - 9)^2 = 26 \Leftrightarrow 5c^2 - 48c + 91 = 0 \Leftrightarrow c = 7$$

hoặc $c = \frac{13}{5}$ (loại) $\Rightarrow C(7; 7)$

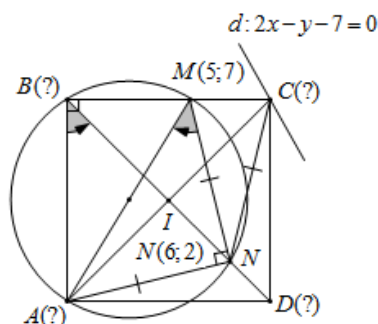
+ Ta có BC đi qua C, M nên có phương trình: $y - 7 = 0$

AB đi qua A và vuông góc với BC nên có phương trình: $x - 1 = 0$

$$\text{Khi đó tọa độ điểm } B \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} y - 7 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow B(1; 7)$$

Suy ra $I(4; 4)$ là trung điểm của $AC \Rightarrow D(7; 1)$ (cũng là trung điểm của BD)

Vậy $A(1; 1), B(1; 7), C(7; 7), D(7; 1)$



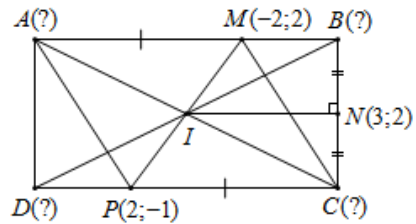
Bài 4.

+ Do $\begin{cases} AM // CP \\ AM = CP \end{cases}$, suy ra $AMCP$

là hình bình hành

Gọi AC giao với MP tại I ,

suy ra I là trung điểm của $AC \Rightarrow I\left(0; \frac{1}{2}\right)$



+ Do AB, DC lần lượt đi qua $M(-2;2), N(2;-1)$ và song song với NI , còn BC đi qua $N(3;-2)$ và vuông góc với NI nên ta có phương trình:

$$AB: x - 2y + 6 = 0; \quad DC: x - 2y - 4 = 0; \quad BC: 2x + y - 8 = 0$$

Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 6 = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow B(2;4)$$

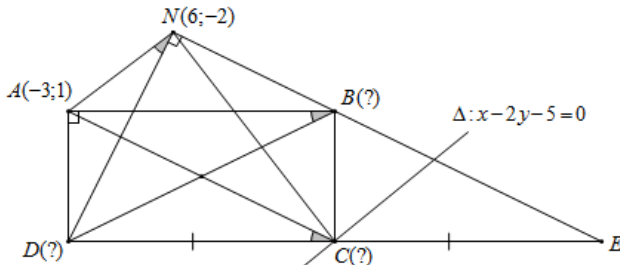
Khi đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4;0)$$

+ Do I cũng là trung điểm của AC, BD nên suy ra $A(-4;1), D(-2;-3)$

Vậy $A(-4;1), B(2;4), C(4;0), D(-2;-3)$

Bài 5.



+ Ta có A, N cùng nhìn BD dưới một góc vuông nên $ADBN$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{N_1} = \widehat{B_2}$

Lại có: $\widehat{C_1} = \widehat{B_2}$ (vì $ABCD$ là hình chữ nhật) $\Rightarrow \widehat{N_1} = \widehat{C_1}$

$\Rightarrow ANCD$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra $\widehat{ANC} = 90^\circ$ (vì $\widehat{ADC} = 90^\circ$) hay $AN \perp CN$

+ Gọi $C(2c+5;c) \in \Delta$, khi đó:

$$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow 3(1-2c) + (2+c) = 0 \Leftrightarrow c = 1 \Rightarrow C(7;1)$$

+ Do $ABEC$ là hình bình hành nên $EN \parallel AC$, suy ra phương trình $EN: y + 2 = 0$

Gọi $B(b; -2) \in NE$, khi đó:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CB} = 0 \Leftrightarrow (b+3)(b-7) - 3 \cdot (-3) = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4b - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(6; -2) \equiv N \\ B(-2; -2) \end{cases} \Rightarrow B(-2; -2)$$

+ Do $\overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow D(6; 4)$

Vậy $B(-2; -2), C(7; 1), D(6; 4)$

Bài 6.

+ (C_1) có tâm $I_1(3; -4)$, bán

kính $R_1 = \sqrt{2}$ và (C_2) có tâm

$I_2(-6; 5)$ và bán kính $R_2 = 2\sqrt{2}$

Gọi I là tâm và R là bán kính của đường tròn (C) cần lập.

Gọi $I(a; a-1) \in d$

+ Ta có (C) tiếp xúc trong với $(C_1) \Rightarrow I_1I = |R - R_1|$ (1)

(C) tiếp xúc ngoài với $(C_2) \Rightarrow I_2I = R + R_2$ (2)

+ Nếu $R > R_1$, khi đó từ (1) và (2) ta có:

$$R = I_1I + R_1 = I_2I - R_2 \Leftrightarrow \sqrt{(a-3)^2 + (a+3)^2} + \sqrt{2} = \sqrt{(a+6)^2 + (a-6)^2} - 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 9} + 3 = \sqrt{a^2 + 36} \Leftrightarrow 6\sqrt{a^2 + 9} = 18 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow \begin{cases} I(0; -1) \\ R = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

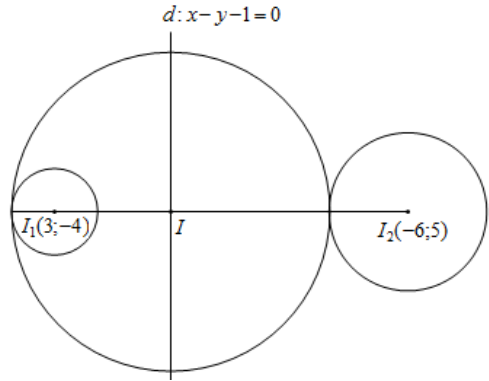
Suy ra phương trình đường tròn $(C): x^2 + (y+1)^2 = 32$.

+ Nếu $R < R_1$, khi đó từ (1) và (2) ta có:

$$R = R_1 - I_1I = I_2I - R_2 \Leftrightarrow \sqrt{2} - \sqrt{(a-3)^2 + (a+3)^2} = \sqrt{(a+6)^2 + (a-6)^2} - 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 9} + \sqrt{a^2 + 36} = 3 \text{ (vô nghiệm vì } \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 9} + \sqrt{a^2 + 36} \geq 9 > 3)$$

Vậy phương trình đường tròn $(C): x^2 + (y+1)^2 = 32$.



Bài 7.

+ Gọi H là trực tâm của tam giác ABC ,
khi đó $CDHE$ và $AFHE$ là các tứ giác nội
tiếp đường tròn

$$\text{Do đó ta có : } \begin{cases} \widehat{C_1} = \widehat{E_1} \\ \widehat{A_2} = \widehat{E_2} \end{cases}$$

Mặt khác $\widehat{C_1} = \widehat{A_2}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ABC}$)

Suy ra $\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$ hay EB là phân giác của góc $\widehat{DEF}$

+ Ta có phương trình $ED : x - 2 = 0$ và $EF : y - 2 = 0$

Khi đó đường thẳng phân giác tạo bởi ED, EF thỏa mãn :

$$|x - 2| = |y - 2| \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Do D, F nằm khác phía so với EB nên ta được phương trình EB là:

$$x - y = 0$$

+ AC đi qua $E(2; 2)$ vuông góc với đường thẳng $EB : x - y = 0$ nên nhận
 $\vec{n} = \vec{u}_{EB} = (1; 1)$ làm vectơ chỉ phương .

Do đó AC có phương trình : $x + y - 4 = 0$

+ Chứng minh tương tự ta có DA, FC lần lượt là phân giác của $\widehat{FDE}, \widehat{DFE}$

Khi đó ta có phương trình $BC : x - 2y - 4 = 0$; $AB : 3x - y + 8 = 0$

Suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ :

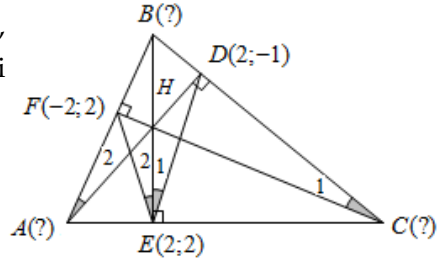
$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 3x - y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 5)$$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 3x - y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow B(-4; -4)$$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4; 0)$

Vậy $A(-1; 5), B(-4; 4), C(4; 0)$.



Bài 8.

+ Gọi E là trung điểm của BC , khi đó :

$$\begin{cases} BE = AB \\ ME = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}BC = BN \Rightarrow \triangle ABN = \triangle BEM \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B_1} \\ ME \perp BC \end{cases}$$

Mà $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{A_1} + \widehat{B_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AHB} = 90^\circ$ hay $AN \perp BM$

+ Ta có BM đi qua $H\left(\frac{4}{5}; \frac{8}{5}\right)$ và $M(2; -2)$ nên BM có phương trình: $3x + y - 4 = 0$

Khi đó AN đi qua $H\left(\frac{4}{5}; \frac{8}{5}\right)$ vuông góc với BM nên AN có phương trình:

$$x - 3y + 4 = 0$$

Suy ra tọa độ điểm N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow N(2; 2)$$

+ Gọi $A(3a - 4; a) \in AN \Rightarrow C(8 - 3a; -4 - a)$ (do $M(2; -2)$ là trung điểm của AC)

$$\text{Lại có } \overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{BN} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 3a - 2 = 3.(2 - x_B) \\ -4 - a - 2 = 3.(2 - y_B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = a \\ y_B = \frac{a + 12}{3} \end{cases} \Rightarrow B\left(a; \frac{a + 12}{3}\right)$$

$$\text{Do } B \in BM, \text{ nên ta có: } 3a + \frac{a + 12}{3} - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow \begin{cases} A(-4; 0) \\ B(0; 4) \\ C(8; -4) \end{cases}$$

Vậy $A(-4; 0), B(0; 4), C(8; -4)$.

Bài 9.

+ Gọi $B(b; -b - 5) \in \Delta_1$ và $C(7 - 2c; c) \in \Delta_2$

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + b + 7 - 2c = 6 \\ 3 - b - 5 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-1; -4) \\ C(5; 1) \end{cases}$$

+ Phương trình $BG: 4x - 3y - 8 = 0$

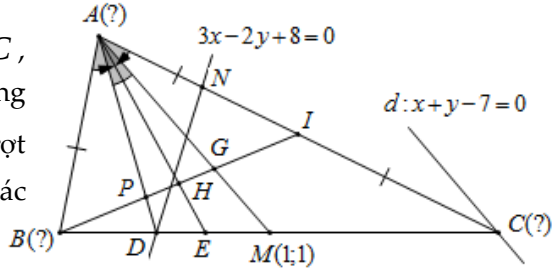
Đường tròn tâm C tiếp xúc với BG nên có bán kính:

$$R = d(C, BG) = \frac{|4.5 - 3.1 - 8|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{9}{5}$$

+ Vậy phương trình đường tròn cần lập là: $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = \frac{81}{25}$.

Bài 10.

- + Gọi I là trung điểm của AC ,
 E là chân đường phân giác trong
 của góc $\widehat{BAC}$ và G, H, P lần lượt
 là giao điểm của BI với các
 đường AM, AE, AD .



Khi đó $\triangle ABI$ cân tại A

Do AE là phân giác trong của $\widehat{BAC}$ và $\widehat{DAM}$; G là trọng tâm tam giác ABC

$$\text{Suy ra } PG = 2HG = 2(IH - IG) = 2\left(\frac{IB}{2} - \frac{IB}{3}\right) = \frac{IB}{3} = IG.$$

$$\Rightarrow PB = IB - (PG + IG) = \frac{IB}{3} \Rightarrow PB = PG \text{ hay } P \text{ là trung điểm của } BG$$

- + Lúc này ta sẽ chỉ ra $\overrightarrow{MD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CM}$. Thật vậy: Đặt $\begin{cases} \overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AP} \\ \overrightarrow{MD} = n\overrightarrow{MB} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AP} = \frac{m}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}) = \frac{m}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{3}\overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AM} + n\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} + n(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = n\overrightarrow{AB} + (1-n)\overrightarrow{AM} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \frac{m}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{3}\overrightarrow{AM} = n\overrightarrow{AB} + (1-n)\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} = n \\ \frac{m}{3} = 1-n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{6}{5} \\ n = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{MD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{MB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CM} \text{ hay } \overrightarrow{MD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CM}$$

- + Gọi $\begin{cases} D(2d; 4+3d) \in DN \\ C(c; 7-c) \in d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MD} = (2d-1; 3d+3) \\ \overrightarrow{CM} = (1-c; c-6) \end{cases}$, khi đó:

$$\overrightarrow{MD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2d-1 = \frac{3}{5}(1-c) \\ 3d+3 = \frac{3}{5}(c-6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10d+3c=8 \\ 5d-c=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-1 \\ c=6 \end{cases} \Rightarrow C(6;1)$$

Do $M(1;1)$ là trung điểm của $BC \Rightarrow B(-4;1)$

- + Gọi $N(2a; 4+3a) \in DN$, khi đó:

$$\overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-2a = 3(2a-x_A) \\ 1-(4+3a) = 3(4+3a-y_A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = \frac{8a-6}{3} \\ y_A = 4a+5 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{8a-6}{3}; 4a+5\right)$$

Khi đó:

$$AC = 2AB \Leftrightarrow AC^2 = 4AB^2 \Leftrightarrow \left(\frac{8a-24}{3}\right)^2 + (4a+4)^2 = 4\left[\left(\frac{8a+6}{3}\right)^2 + (4a+4)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 624a^2 + 1632 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -\frac{34}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-2; 5) \\ A\left(-\frac{350}{39}; -\frac{71}{13}\right) \end{cases}$$

Vậy $A(-2; 5), B(-4; 1), C(6; 1)$ hoặc $A\left(-\frac{350}{39}; -\frac{71}{13}\right), B(-4; 1), C(6; 1)$

Bài 11.

+ Ta có $\triangle ABM = \triangle ADN$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{BAM} = \widehat{DAN} \Rightarrow \widehat{NAM} = 90^\circ \\ AM = AN \end{cases}$$

$\Rightarrow AMFN$ là hình vuông

Suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{AFM} = 45^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{AFM} + \widehat{ACM} = 180^\circ$$

$\Rightarrow ACMF$ nội tiếp đường tròn

Suy ra $\widehat{ACF} = \widehat{AMF} = 90^\circ$ hay $AC \perp CF$.

Gọi $C(c; 5-c) \in AC \Rightarrow \overline{FC} = (c; 8-c)$,

khi đó: $AC \perp FC \Leftrightarrow \overline{u_{AC}} \cdot \overline{FC} = 0 \Leftrightarrow c - (8-c) = 0 \Leftrightarrow c = 4 \Rightarrow C(4; 1)$

+ Gọi $\overline{n_{BC}} = (a; b)$ là vectơ pháp tuyến của BC ($a^2 + b^2 \neq 0$) và ta có $\overline{n_{AC}} = (1; 1)$

Khi đó:

$$\cos 45^\circ = \cos \widehat{ACB} = \left| \cos(\overline{n_{BC}}, \overline{n_{AC}}) \right| \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{2}} \Leftrightarrow ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Với $a = 0$ chọn $b = 1$, suy ra $\overline{n_{BC}} = (0; 1)$, khi đó phương trình $BC: y = 1 // Ox$

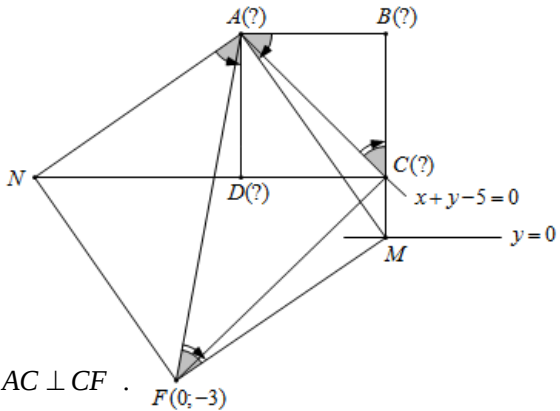
(loại - do M là giao của BC và trục Ox).

Với $b = 0$ chọn $a = 1$, suy ra $\overline{n_{BC}} = (1; 0)$, khi đó phương trình $BC: x = 4$

Suy ra tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(4; 0)$

+ Gọi $A(t; 5-t) \in AC \Rightarrow \overline{MA} = (t-4; 5-t)$. Ta có: $\overline{MF} = (-4; -3)$, khi đó:

$$MA \perp MF \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MF} = 0 \Leftrightarrow -4(t-4) - 3(5-t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A(1; 4)$$



CD đi qua $C(4;1)$ và vuông góc với BC nên phương trình $CD: y = 1$

AD đi qua $A(1;4)$ và song song với BC nên phương trình $AD: x = 1$

Suy ra $D(1;1) \Rightarrow B(4;4)$. Vậy $A(1;4), B(4;4), C(4;1), D(1;1)$.

Bài 12.

- + Do $A(0;3) \in (E)$; $B, C \in (E)$ và $\triangle ABC$ cân tại A nên B, C đối xứng nhau qua trục hoành Ox

Khi đó gọi $B(x_0; y_0) \Rightarrow C(x_0; -y_0)$ và $\frac{x_0^2}{9} + y_0^2 = 1$ với $x_0 < 3$

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow H(x_0; 0) \Rightarrow \begin{cases} BC = 2|y_0| = \frac{2}{3}\sqrt{9-x_0^2} \\ AH = |3-x_0| = 3-x_0 \end{cases}$

- + Ta giác ABC vuông cân tại A nên:

$$AH = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow 3-x_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{9-x_0^2} \Leftrightarrow x_0 = \frac{12}{5}$$

$$(\text{do } x_0 < 3) \Rightarrow y_0^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow y_0 = \pm \frac{3}{5}$$

- + Do B có tung độ dương nên ta có: $B\left(\frac{12}{5}; \frac{3}{5}\right)$ và $C\left(\frac{12}{5}; -\frac{3}{5}\right)$.

Bài 13.

$$+ (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4.$$

$$+ \text{ Gọi } M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} = 1 \\ MF_1 = 5 + \frac{4}{5}x_0; \quad MF_2 = 5 - \frac{4}{5}x_0 \end{cases}$$

Vì tam giác F_1MF_2 vuông tại M nên:

$$MF_1^2 + MF_2^2 = F_1F_2^2 \Leftrightarrow \left(5 + \frac{4}{5}x_0\right)^2 + \left(5 - \frac{4}{5}x_0\right)^2 = 64 \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{175}{16} \Rightarrow y_0^2 = \frac{81}{16}$$

- + Do M có hoành độ dương nên ta được: $M\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}; \frac{9}{4}\right)$ hoặc $M\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}; -\frac{9}{4}\right)$

Bài 14.

- + Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 1$

- + Vì đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở có bán kính $R = \sqrt{34}$ nên $a^2 + b^2 = 34$

Khi đó ta có hệ :

$$\begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{4}{5} \\ a^2 + b^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25(a^2 - b^2) = 16a^2 \\ a^2 + b^2 = 34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow c = 4$$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$+ \text{ Gọi } M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} = 1 \\ MF_1 = 5 + \frac{4}{5}x_0; \quad MF_2 = 5 - \frac{4}{5}x_0 \end{cases}$$

Vì tam giác F_1MF_2 vuông tại M nên :

$$MF_1^2 + MF_2^2 = F_1F_2^2 \Leftrightarrow \left(5 + \frac{4}{5}x_0\right)^2 + \left(5 - \frac{4}{5}x_0\right)^2 = 64 \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{175}{16} \Rightarrow y_0^2 = \frac{81}{16}$$

- + Do M có hoành độ dương nên ta được: $M\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}; \frac{9}{4}\right)$ hoặc $M\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}; -\frac{9}{4}\right)$.

Bài 15.

- + Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$ nên có dạng: $x - 3y + c = 0$

Khi đó phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (E) là:

$$4x^2 + (x + c)^2 = 36 \Leftrightarrow 5x^2 + 2cx + c^2 - 36 = 0 \quad (*)$$

Ta có d cắt (E) tại hai điểm A, B khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt hay $\Delta' = 180 - 4c^2 > 0 \Leftrightarrow -3\sqrt{5} < c < 3\sqrt{5} \quad (2^*)$

- + Đường thẳng Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt: $A\left(x_1; \frac{x_1 + c}{3}\right), B\left(x_2; \frac{x_2 + c}{3}\right)$

với x_1, x_2 là nghiệm của $(*)$ và
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2c}{5} \\ x_1 x_2 = \frac{c^2 - 36}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \left(\frac{x_2 - x_1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{15} \sqrt{720 - 16c^2}, d(O, \Delta) = \frac{|c|}{\sqrt{10}},$$

$$\text{suy ra: } S_{OAB} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot d(O, \Delta) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{15} \sqrt{720 - 16c^2} \cdot \frac{|c|}{\sqrt{10}} = 3$$

$$\Leftrightarrow 16c^4 - 720c^2 + 8100 = 0 \Leftrightarrow c = \pm \frac{3\sqrt{10}}{2} \quad (\text{thỏa mãn } (2^*))$$

Vậy phương trình đường thẳng Δ cần lập là $2x - 6y + 3\sqrt{10} = 0$

hoặc $2x - 6y - 3\sqrt{10} = 0$.

Bài 16.

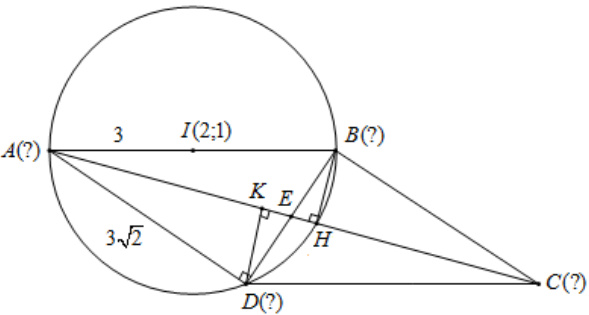
+ Đường tròn (T) có tâm

$I(2;1)$ và bán kính $R = 3$

Gọi E là giao điểm của AC và BD , suy ra $DKBH$ là hình bình hành.

Do đó E là trung điểm

của $HK \Rightarrow E\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$



+ Nếu $\triangle ABD$ vuông tại A thì $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow I \equiv E$ (loại)

Nếu $\triangle ABD$ vuông tại B thì $AD = 2R = 6 \neq 3\sqrt{2}$ (loại)

Vậy $\triangle ABD$ vuông tại D .

+ Ta có AC đi qua $H\left(\frac{22}{5}; \frac{14}{5}\right)$ và $K\left(\frac{13}{5}; \frac{11}{5}\right)$ nên có phương trình:

$$x - 3y + 4 = 0$$

Gọi $A(3a - 4; a) \in AC$ với $a \in \mathbb{Z}$, khi đó:

$$IA^2 = R^2 \Leftrightarrow (3a - 6)^2 + (a - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow 5a^2 - 19a + 14 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

hoặc $a = \frac{14}{5}$ (loại)

Suy ra $A(-1;1)$

+ Do $I(2;1)$ là trung điểm của $AB \Rightarrow B(5;1)$

Do E là trung điểm của AC và $BD \Rightarrow C(8;4), D(2;4)$

Vậy $A(-1;1), B(5;1), C(8;4), D(2;4)$.

Chú ý:

Có thể tìm tọa độ điểm A theo cách trình bày sau:

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1; y = 1 \\ x = \frac{22}{5}; y = \frac{14}{5} \end{cases} \Rightarrow A(-1; 1)$$

Bài 17.

+ Gọi E là giao điểm của MN và AD ,

$$\text{khi đó: } ED = \frac{1}{2}MC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BC = \frac{1}{3}BC$$

$$= \frac{1}{3}AD \Rightarrow \overline{AD} = 3\overline{ED} (*)$$

+ Do A thuộc đường thẳng

$$3x - y + 9 = 0 \Rightarrow A(a; 3a + 9)$$

$$\text{Do } E \text{ thuộc } MN: 4x - 3y - 3 = 0 \Rightarrow E(3b; -1 + 4b)$$

Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a = 3(1 - 3b) \\ -3 - (3a + 9) = 3[-3 - (-1 + 4b)] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 9b = -2 \\ a - 4b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 3)$$

+ CN đi qua $D(1; -3)$ và vuông góc với AD nên có phương trình:

$$x - 2y - 7 = 0$$

Khi đó tọa độ điểm N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y - 7 = 0 \\ 4x - 3y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow N(-3; -5)$$

Do D là trung điểm của CN nên suy ra $C(5; -1)$

$$+ \text{ Ta lại có } \overline{CB} = \overline{DA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 5 = -2 - 1 \\ y_B + 1 = 3 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2 \\ y_B = 5 \end{cases} \Rightarrow B(2; 5)$$

Vậy $A(-2; 3), B(2; 5), C(5; -1)$.

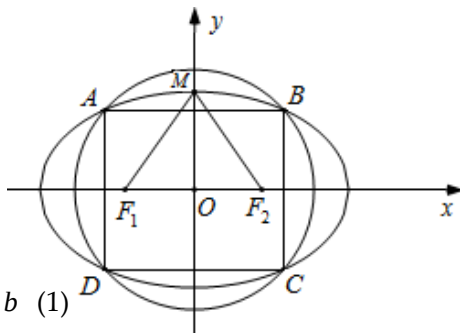
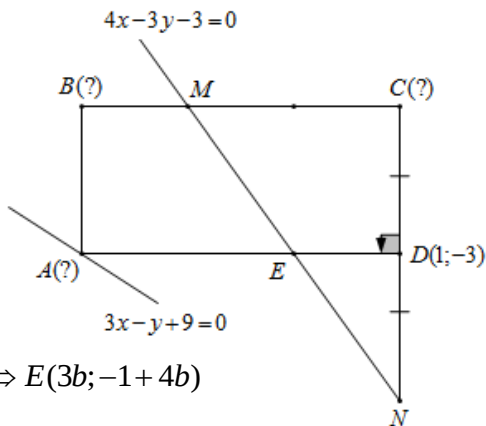
Bài 18.

+ Gọi phương trình chính tắc của elip

$$(E) \text{ có dạng: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } a > b > 0$$

Ta có chu vi hình chữ nhật cơ sở là:

$$4(a + b) = 16(2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow a = 4(2 + \sqrt{3}) - b \quad (1)$$



+ Gọi $M(0;b)$ là đỉnh của (E) mà MF_1F_2 là tam giác đều, khi đó:

$$MO = \frac{\sqrt{3}F_1F_2}{2} \Leftrightarrow b = \sqrt{3}c \Leftrightarrow c = \frac{b}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

Mặt khác ta có : $a^2 = b^2 + c^2$ (3)

Thay (1), (2) vào (3) ta được: $\left[4(2 + \sqrt{3}) - b\right]^2 = b^2 + \frac{b^2}{3} \Rightarrow b = 4\sqrt{3} \Rightarrow a = 8$

Vậy phương trình (E) : $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$

+ Phương trình đường tròn (T) có dạng: $x^2 + y^2 = R^2$

Đường tròn (T) cắt (E) tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D .

Do (T) và (E) đều nhận Ox, Oy làm các trục đối xứng nên $ABCD$ là hình chữ nhật.

$$\text{Gọi } A(x; y) \Rightarrow \begin{cases} B(-x; y) \\ C(-x; -y) \end{cases}$$

Khi đó hình chữ nhật $ABCD$ thành hình vuông thì:

$$AB = BC \Leftrightarrow |2x| = |2y| \Leftrightarrow x^2 = y^2$$

Do $A \in (T) \cap (E)$ nên x, y thỏa mãn:

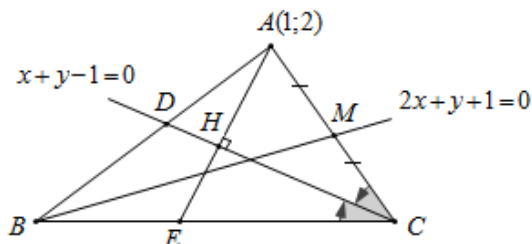
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1 \\ x^2 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 = \frac{R^2}{2} \\ \frac{R^2}{2.64} + \frac{R^2}{2.48} = 1 \end{cases} \Rightarrow R^2 = \frac{384}{7}$$

Vậy phương trình đường tròn (T) cần lập là $x^2 + y^2 = \frac{384}{7}$.

Bài 19.

+ Gọi E đối xứng với A qua $x+y-1=0$
 CD , khi đó $E \in BC$

AE đi qua A và vuông góc với CD nên có phương trình:
 $x - y + 1 = 0$



Suy ra tọa độ giao điểm H của AE và CD là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow H(0;1)$$

Do H là trung điểm của $AE \Rightarrow E(-1;0)$

$$+ \text{ Gọi } C(c;1-c) \in CD \Rightarrow M\left(\frac{c+1}{2}; \frac{3-c}{2}\right)$$

$$\text{Do } M \in BM \Rightarrow 2 \cdot \frac{c+1}{2} + \frac{3-c}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow c = -7 \Rightarrow C(-7;8)$$

+ Khi đó BC đi qua $C(-7;8), E(-1;0)$ nên có phương trình: $4x + 3y + 4 = 0$

Bài 20.

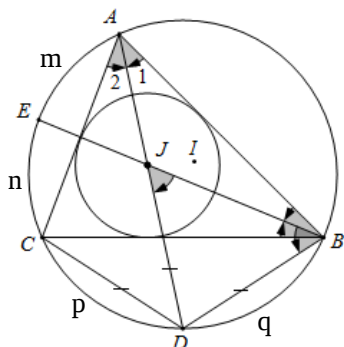
+ Đường tròn ngoại tiếp ABC có tâm $I(6;6)$ và bán kính $IA = 5$ nên có phương trình: $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 25$

Ta có AD đi qua $A(2;3), J(4;5)$

nên có phương trình: $x - y + 1 = 0$

Khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-6)^2 + (y-6)^2 = 25 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ x = 9 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(2;3) \equiv A \\ D(9;10) \end{cases} \Rightarrow D(9;10)$$



+ Gọi E là giao điểm thứ hai của BJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó:

$$\begin{cases} \widehat{AmE} = \widehat{EnC} \\ \widehat{CpD} = \widehat{DqB} \end{cases} \quad (\text{góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau})$$

$$\Rightarrow \widehat{EnC} + \widehat{CpD} = \widehat{AmE} + \widehat{DqB} \text{ hay } \widehat{ECD} = \widehat{AmE} + \widehat{DqB} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} \widehat{EBD} = \frac{1}{2} \widehat{ECD} \\ \widehat{DJB} = \frac{1}{2} (\widehat{AmE} + \widehat{DqB}) \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{EBD} = \widehat{DJB}$ hay tam giác DBJ cân tại D , suy ra $DB = DJ$ (*)

$$\text{Lại có } \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow DB = DC \quad (2^*)$$

Từ (*) và (2*) suy ra: $DB = DJ = DC$ hay D là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC .

Suy ra B, C nằm trên đường tròn tâm $D(9;10)$ bán kính $DJ = 5\sqrt{2}$ có phương trình : $(x-9)^2 + (y-10)^2 = 50$

Khi đó tọa độ B, C là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} (x-6)^2 + (y-6)^2 = 25 \\ (x-9)^2 + (y-10)^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=9 \\ x=10 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(2;9), C(10;3) \\ B(10;3), C(2;9) \end{cases}$$

Vậy $B(2;9), C(10;3)$ hoặc $B(10;3), C(2;9)$.

Bài 21.

+ Đường tròn (C) có bán kính $R = \frac{5}{2}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} A, B \in (C) \\ AB = \frac{5}{2} = R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM \perp BC \\ BN \perp AC \end{cases}$$

$\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác ABC

+ Khi đó AC đi qua $A(2;3)$ và vuông góc với BH nên có phương trình:
 $4x + 7y - 29 = 0$

BC đi qua $B(6;6)$ và vuông góc với AH nên có phương trình:
 $4x - y - 18 = 0$

+ Suy ra tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x + 7y - 29 = 0 \\ 4x - y - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{155}{33} \\ y = \frac{11}{8} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{155}{33}; \frac{11}{8}\right)$$

Vậy $C\left(\frac{155}{32}; \frac{11}{8}\right)$.

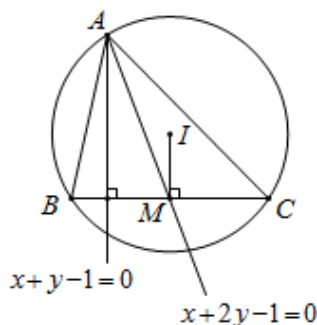
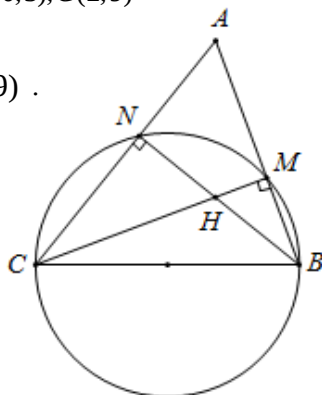
Bài 22.

+ Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;0)$$

Gọi M là trung điểm của BC , khi đó IM đi qua $I(4;-1)$ và song song với đường thẳng $x + y - 1 = 0$

Do đó phương trình IM : $x + y - 3 = 0$



Suy ra tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow M(5;-2)$$

- + Khi đó BC đi qua $M(5;-2)$ vuông góc với $x+y-1=0$ nên có phương trình: $x-y-7=0$
- + Gọi $B(t;t-7) \in BC$, khi đó:

$$IB = IA \Leftrightarrow (t-4)^2 + (t-6)^2 = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} t=7 \\ t=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(7;0) \Rightarrow C(3;-4) \\ B(3;-4) \Rightarrow C(7;0) \end{cases}$$

Khi đó phương trình các cạnh của tam giác ABC là:

$$AB: y=0; BC: x-y-7=0; CA: 2x+y-2=0$$

$$\text{hoặc } AB: 2x+y-2=0; BC: x-y-7=0; CA: y=0.$$

Bài 23.

- + H là hình chiếu của A trên BC và M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC

$$\text{Gọi } BN \cap CM = \{G\},$$

khi đó tọa độ điểm G là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-2y+1=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow G(1;1)$$

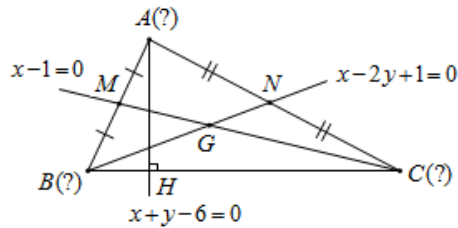
- + Gọi $\begin{cases} A(a;6-a) \in AH \\ B(2b-1;b) \in BN \\ C(1;c) \in CM \end{cases}$, khi đó G là trọng tâm của ΔABC nên ta có:

$$\begin{cases} a+2b+1=3 \\ 6-a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=2 \\ a-b-c=3 \end{cases} \quad (1)$$

- + Mặt khác $\overrightarrow{u_{AH}} = (1;-1)$ và $\overrightarrow{BC} = (2-2b;c-b)$,

$$\text{khi đó: } AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{AH}} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 2-2b-(c-b) = 0 \Leftrightarrow b+c=2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ: } \begin{cases} a+2b=2 \\ a-b-c=3 \\ b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-1 \\ c=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(5;1) \\ B(-3;-1) \\ C(1;3) \end{cases}$$



Bài 24.

+ Ta có $AB = 2MI$

$$= 2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{S_{ABCD}}{AB} = \frac{12}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow AM = \frac{AD}{2} = \sqrt{2}$$

+ AD và vuông góc với MI nên có phương trình: $x + y - 3 = 0$

+ Gọi $A(t; 3-t) \in AD$ với $t < 3$, khi đó :

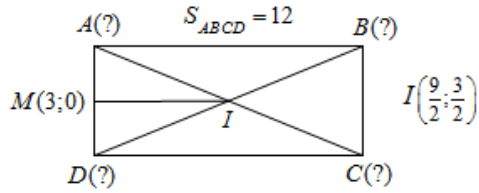
$$AM^2 = 2 \Leftrightarrow (t-3)^2 + (t-3)^2 = 2 \Leftrightarrow (t-3)^2 = 1 \Leftrightarrow t = 2$$

hoặc $t = 4$ (loại) $\Rightarrow A(2; 1)$

+ Do M là trung điểm của $AD \Rightarrow D(4; -1)$

+ I lần lượt là trung điểm của AC và BD nên suy ra $C(7; 2)$ và $B(5; 4)$

Vậy $A(2; 1), B(5; 4), C(7; 2)$ và $D(4; -1)$.



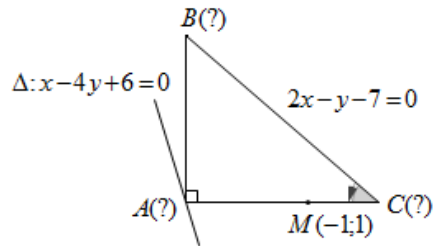
Bài 25.

Cách 1:

+ Đường thẳng BC có vectơ chỉ phương $\vec{u}_{BC} = (1; 2)$.

Gọi AC có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{AC} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$.

Khi đó tam giác ABC vuông cân tại A nên: $\widehat{ACB} = 45^\circ$



$$\Rightarrow \left| \cos(\vec{n}_{AC}, \vec{u}_{BC}) \right| = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|a + 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2(a + 2b)^2 = 5(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 8ab - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow (3a + b)(a - 3b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -b \\ a = 3b \end{cases}$$

$$\text{Với } 3a = -b, \text{ chọn } \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{AC} = (1; -3) \Rightarrow \vec{n}_{AB} = (3; 1)$$

Vậy AC đi qua $M(-1; 1)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{AC} = (1; -3)$ nên có phương trình: $x - 3y + 4 = 0$

+ Ta sẽ đi chứng minh $AM \perp BD$. Thật vậy:

Ta có: $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD}) = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH}$

$$(v_i \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HD} = 0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{BH} \\
 &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH}) \cdot \overrightarrow{HD} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) \cdot \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HD} = 0
 \end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BD}$ hay $AM \perp BD$

+ Khi đó BD đi qua $E(8;-5)$ và vuông góc với $AM : 11x - 7y - 5 = 0$ nên BD có phương trình: $7x + 11y - 1 = 0$

Suy ra tọa độ điểm D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0 \\ 7x + 11y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{7}{5}; -\frac{4}{5}\right)$$

+ DH đi qua $D\left(\frac{7}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ và vuông góc với $AC: 3x - y - 5 = 0$ nên DH có phương trình: $x + 3y + 1 = 0$

Suy ra tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+3y+1=0 \\ 11x-7y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{5} \\ y=-\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{5}; -\frac{2}{5}\right)$$

Suy ra $H(-1;0)$ (do M là trung điểm của HD).

+ Khi đó ta có phương trình $BC : x + y + 1 = 0$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ 3x-y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow C(1;-2) \Rightarrow B(-3;2)$$

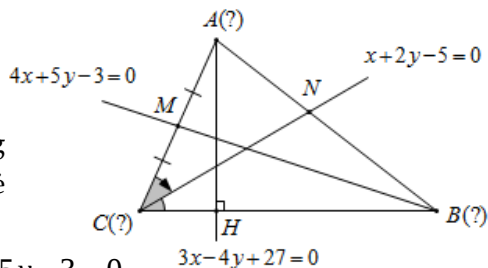
Vậy $A(3; 4), C(1; -2), B(-3; 2)$.

Bài 27.

+ Kí hiệu đường cao kẻ từ A , trung tuyến kẻ từ B và phân giác trong kẻ từ C lần lượt là:

$$AH : 3x - 4y + 27 = 0 ; BM : 4x + 5y - 3 = 0$$

và $CN: x + 2y - 5 = 0$



Vecto chỉ phương của CB là $\overrightarrow{u_{CB}} = \overrightarrow{n_{AH}} = (3; -4)$, vecto chỉ phương của CN là $\overrightarrow{u_{CN}} = (2; -1)$

Gọi $\overrightarrow{u_{AC}} = (a; b)$ là vecto chỉ phương của AC với $a^2 + b^2 \neq 0$

+ Do CN là phân giác trong của $\widehat{ACB}$ nên ta có:

$$\left| \cos(\overrightarrow{u_{AC}}, \overrightarrow{u_{CN}}) \right| = \left| \cos(\overrightarrow{u_{BC}}, \overrightarrow{u_{CN}}) \right| \Leftrightarrow \frac{|2a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{|6 + 4|}{5 \cdot \sqrt{5}} \Leftrightarrow 3b^2 + 4ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3b = -4a \\ b = 0 \end{cases}$$

Với $3b = -4a$, chọn $a = 3$, $b = -4$ khi đó $\overrightarrow{u_{AC}} = (3; -4)$ cùng phương với $\overrightarrow{u_{CB}}$ (loại).

Với $b = 0$, chọn $a = 1 \Rightarrow \overrightarrow{u_{AC}} = (1; 0)$

$$+ \text{ Gọi } \begin{cases} A(-1 + 4m; 6 + 3m) \in AH \\ C(5 - 2n; n) \in CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (6 - 4m - 2n; -6 - 3m + n) \\ M\left(2m - n + 2; \frac{3m + n + 6}{2}\right) \end{cases}$$

Do $\overrightarrow{u_{AC}}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương và $M \in BM$ nên ta có:

$$\begin{cases} -6 - 3m + n = 0 \\ 4 \cdot (2m - n + 2) + 5 \cdot \frac{3m + n + 6}{2} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - n = -6 \\ 31m - 3n + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-5; 3) \\ C(-1; 3) \end{cases}$$

+ CB đi qua C và vuông góc với AH nên có phương trình: $4x + 3y - 5 = 0$

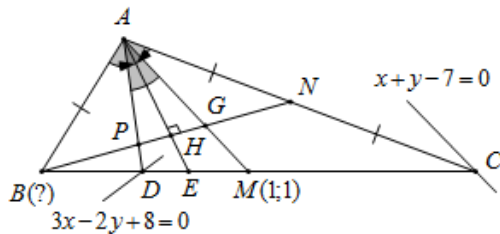
Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0 \\ 4x + 5y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow B(2; -1)$$

Vậy $A(-5; 3), B(2; -1), C(-1; 3)$.

Bài 28.

+ Gọi N là trung điểm của AC , E là chân đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ và G, H, P lần lượt là giao điểm của BN với các đường AM, AE, AD .



Khi đó $\triangle ABN$ cân tại A

Do AE là phân giác trong của $\widehat{BAC}$ và $\widehat{DAM}$; G là trọng tâm tam giác ABC

$$\text{Suy ra } PG = 2HG = 2(NH - NG) = 2\left(\frac{NB}{2} - \frac{NB}{3}\right) = \frac{NB}{3} = NG \Rightarrow PG = PB \text{ hay}$$

P là trung điểm của BG .

+ Lúc này ta sẽ chỉ ra $\overrightarrow{MD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CM}$. Thật vậy: Đặt $\begin{cases} \overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AP} \\ \overrightarrow{MD} = n\overrightarrow{MB} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AP} = \frac{m}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}) = \frac{m}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{3}\overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AM} + n\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} + n(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = n\overrightarrow{AB} + (1-n)\overrightarrow{AM} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \frac{m}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{3}\overrightarrow{AM} = n\overrightarrow{AB} + (1-n)\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} = n \\ \frac{m}{3} = 1-n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{6}{5} \\ n = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{MD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{MB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CM} \text{ hay } \overrightarrow{MD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CM}$$

+ Gọi $\begin{cases} D(2d; 4+3d) \in d \\ C(c; 7-c) \in d' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MD} = (2d-1; 3d+3) \\ \overrightarrow{CM} = (1-c; c-6) \end{cases}$, khi đó:

$$\overrightarrow{MD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2d-1 = \frac{3}{5}(1-c) \\ 3d+3 = \frac{3}{5}(c-6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10d+3c=8 \\ 5d-c=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-1 \\ c=6 \end{cases} \Rightarrow C(6;1)$$

Do $M(1;1)$ là trung điểm của $BC \Rightarrow B(-4;1)$

Vậy $B(-4;1)$.

Bài 29.

+ Đường tròn (T) có tâm $I\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

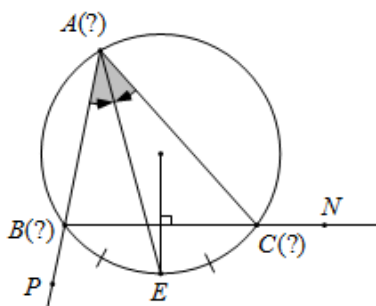
Vì AE là phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ nên E là điểm chính giữa cung BC, do đó $BC \perp IE$

Khi đó BC đi qua N và vuông góc với IE nên có phương trình: $2x+3y+4=0$

Suy ra tọa độ điểm B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x+3y+4=0 \\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{325}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-2;0) \\ C(4;-4) \end{cases}$$

+ Với $B(-2;0), C(4;-4)$, khi đó AB đi qua B và P nên có phương trình $2x-y+4=0$



Suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{325}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-2; 0) \equiv B \\ A(0; 4) \end{cases} \Rightarrow A(0; 4)$$

+ Với $B(4; -4), C(-2; 0)$, khi đó AB đi qua B và P nên có phương trình $2x + 7y + 20 = 0$

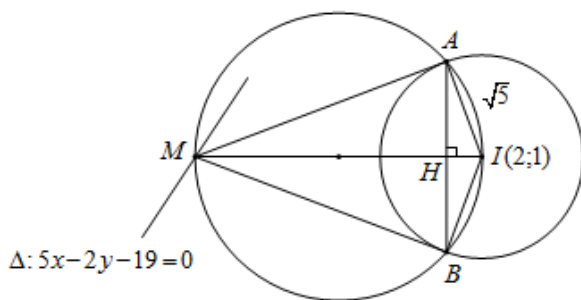
Suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2x + 7y + 20 = 0 \\ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{325}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -4 \\ x = -\frac{54}{53} \\ y = \frac{136}{53} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(4; -4) \equiv B \\ A\left(-\frac{54}{53}; \frac{136}{53}\right) \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{54}{53}; \frac{136}{53}\right)$$

Kiểm tra với $A\left(-\frac{54}{53}; \frac{136}{53}\right)$ ta nhận thấy AE không phải là phân giác trong của $\widehat{BAC}$

Vậy $A(0; 4), B(-2; 0), C(4; -4)$.

Bài 30.



+ Đường tròn (T) có tâm $I(2;1)$ và bán kính $AI = R = \sqrt{5}$

Gọi H là giao điểm của MI và AB , suy ra $AH = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Xét tam giác MAI ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AI^2} = \frac{4}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow AM = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow MI = \sqrt{AM^2 + AI^2} = \sqrt{10}$$

+ Gọi $M(5 + 2t; 3 + 5t) \in \Delta$, khi đó: $MI^2 = 10 \Leftrightarrow (2t + 3)^2 + (5t + 2)^2 = 10$

$$\Leftrightarrow 29t^2 + 32t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -\frac{3}{29} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(3; -2) \\ M\left(\frac{139}{29}; \frac{72}{29}\right) \end{cases}$$

Vì $MAIB$ nội tiếp đường tròn đường kính MI cũng chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB . Do đó:

+ Với $M(3; 2)$, phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB :

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

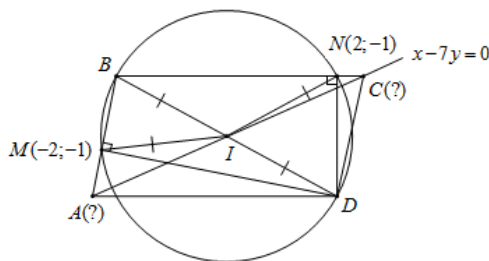
+ Với $M\left(\frac{139}{29}; \frac{72}{29}\right)$, phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB :

$$\left(x - \frac{197}{58}\right)^2 + \left(x - \frac{101}{58}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB là:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \text{ hoặc } \left(x - \frac{197}{58}\right)^2 + \left(x - \frac{101}{58}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

Bài 31.



+ Gọi I là giao điểm của AC và BD , khi đó I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ diện $DMBN$. Suy ra $IM = IN$

+ Gọi $I(7t; t) \in AC$, khi đó:

$$IM^2 = IN^2 \Leftrightarrow (7t+2)^2 + (t+1)^2 = (7t-2)^2 + (t+1)^2 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow I(0; 0)$$

+ Ta có $BD = 2IN = 2\sqrt{5} = \frac{\sqrt{10}}{5} AC \Rightarrow AC = 5\sqrt{2} \Rightarrow IA = IC = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Khi đó A, C thuộc đường tròn có phương trình: $x^2 + y^2 = \frac{25}{2}$

Suy ra tọa độ điểm A, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 7y = 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{25}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2}; y = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{7}{2}; y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right), B\left(-\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right) \\ A\left(-\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right), B\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

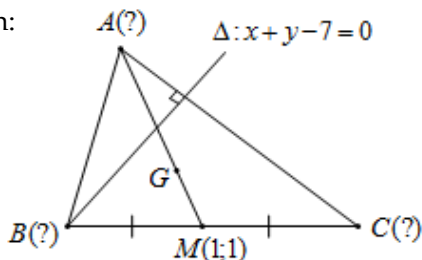
Vậy $A\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right), B\left(-\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ hoặc $A\left(-\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right), C\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Bài 32.

+ Do G là trọng tâm tam giác ABC nên:

$$\overline{AM} = 3\overline{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_A = 3 \cdot \left(1 - \frac{4}{3}\right) \\ 1 - y_A = 3 \cdot (1 - 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 2 \\ y_A = 1 \end{cases} \Rightarrow A(2; 1)$$



AC đi qua $A(2;1)$ và vuông góc với đường thẳng $x + y - 7 = 0$ nên có phương trình: $x - y - 1 = 0$

+ Gọi $\begin{cases} B(b; 7-b) \in \Delta \\ C(c; c-1) \in AC \end{cases}$, khi đó M là trung điểm của BC nên ta có:

$$\begin{cases} x_B + x_C = 2x_M \\ y_B + y_C = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 2 \\ 7 - b + c - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 2 \\ b - c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(3; 4) \\ C(-1; -2) \end{cases}$$

Vậy $A(2;1), B(3;4), C(-1;-2)$.

Bài 33.

+ Gọi I, R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C)

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên trục Ox, Oy .

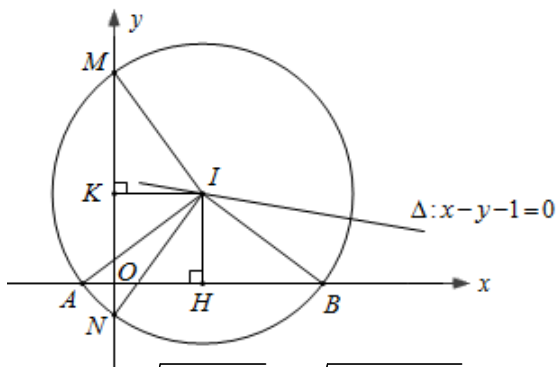
Gọi $I(t; t-1) \in d$, khi đó

ta có: $\begin{cases} IH = d(I, Ox) = |t-1| \\ IK = d(I, Oy) = |t| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = 2AH = 2\sqrt{R^2 - IH^2} = 2\sqrt{R^2 - (t-1)^2} \\ MN = 2MK = 2\sqrt{R^2 - IK^2} = 2\sqrt{R^2 - t^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{IAB} = \frac{1}{2} IH \cdot AB = |t-1| \sqrt{R^2 - (t-1)^2} = 12 \\ S_{IMN} = \frac{1}{2} IK \cdot MN = |t| \sqrt{R^2 - t^2} = 12 \quad (*) \end{cases}$$

Suy ra: $|t-1| \sqrt{R^2 - (t-1)^2} = |t| \sqrt{R^2 - t^2} \Leftrightarrow (t-1)^2 [R^2 - (t-1)^2] = t^2 (R^2 - t^2)$

$$\Leftrightarrow R^2 [t^2 - (t-1)^2] = t^4 - (t-1)^4 \Leftrightarrow (2t-1)(R^2 - 2t^2 + 2t - 1) = 0$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ R^2 = 2t^2 - 2t + 1 \end{cases}$$

+ Với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Thay $t = \frac{1}{2}$ vào (*) ta được: $R^2 = \frac{2305}{4}$

Khi đó phương trình của (C) là: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2305}{4}$.

+ Với $R^2 = 2t^2 - 2t + 1$ thay vào (*) ta được:

$$|t| \cdot |t-1| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - t - 12 = 0 \\ t^2 - t + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -3 \end{cases}. \text{ Với } t = 4 \Rightarrow \begin{cases} I(4; 3) \\ R = 5 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình của (C) là: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

Với $t = -3 \Rightarrow \begin{cases} I(-3; -4) \\ R = 5 \end{cases}$. Khi đó phương trình của (C) là: $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 25$

Vậy phương trình (C) cần lập là:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2305}{4} \text{ hoặc } (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

hoặc $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 25$.

Bài 34.

+ Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(0; 2)$ và bán kính $R_1 = 2$

Đường tròn (C_2) có tâm $I_1(-2; -9)$ và bán kính $R_1 = 7$

Gọi I, R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C) .

Do (C) tiếp xúc ngoài với hai đường tròn (C_1) và (C_2) nên ta có:

$$\begin{cases} I_1I = R_1 + R \\ I_2I = R_2 + R \end{cases} \Rightarrow I_2I - I_1I = R_2 - R_1 = 5$$

+ Gọi $I(t; 7-2t) \in d$, khi đó:

$$I_2I - I_1I = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(t+2)^2 + (2t-16)^2} - \sqrt{t^2 + (t-5)^2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5t^2 - 60t + 260} = \sqrt{5t^2 - 20t + 25} + 5 \Leftrightarrow \sqrt{5t^2 - 20t + 25} = 21 - 4t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \frac{21}{4} \\ 11t^2 - 148t + 416 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4 \Rightarrow I(4; -1) \Rightarrow I_1I = 5 \Rightarrow R = 3$$

Vậy phương trình đường tròn (C) cần lập là: $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$

Bài 35.

+ Do $\frac{2^2}{25} + \frac{1^2}{9} < 1$ nên M nằm trong (E) , suy ra mọi đường thẳng qua M đều cắt (E) tại hai điểm phân biệt

+ Nếu d đi qua $M(1; 2)$ và song song với Ox hay d có phương trình $x = 1$ thì trung điểm của AB là điểm $I(1; 0)$ không thuộc đường thẳng $y = 2x$ (loại)

Do đó gọi phương trình đường thẳng d đi qua $M(2; 1)$ có hệ số góc k có dạng: $y = k(x - 2) + 1$

Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = k(x - 2) + 1 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = kx - 2k + 1 \\ (25k^2 + 9)x^2 - 50k(2k - 1)x + 25(2k - 1)^2 - 225 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

+ Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$. Ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{50k(2k - 1)}{25k^2 + 9} \\ y_1 + y_2 = \frac{2(9 - 18k)}{25k^2 + 9} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{25k(2k - 1)}{25k^2 + 9}; \frac{9 - 18k}{25k^2 + 9}\right): \text{ là trung điểm của } AB$$

+ Khi đó: $I \in \Delta \Leftrightarrow \frac{9 - 18k}{25k^2 + 9} = \frac{50k(2k - 1)}{25k^2 + 9} \Leftrightarrow (2k - 1)(50k + 9) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = -\frac{9}{50} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d: y = \frac{1}{2}x \\ d: y = -\frac{9}{50}x + \frac{34}{25} \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng d cần lập là $y = \frac{1}{2}x$ hoặc $y = -\frac{9}{50}x + \frac{34}{25}$.

Bài 36.

+ Đường tròn (C) có tâm $O(0; 0)$

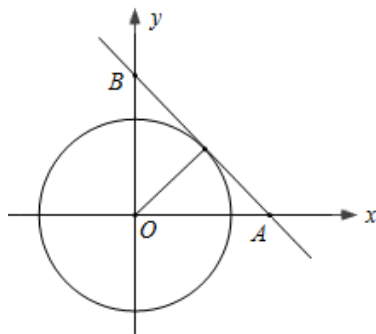
và bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Gọi $A(a; 0), B(0; b)$ với $a > 0, b > 0$.

Khi đó AB có phương trình:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow bx + ay - ab = 0$$

+ AB tiếp xúc với (C)



$$\Leftrightarrow d(O, AB) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 8 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \leq \frac{a^2 b^2}{2ab} = \frac{ab}{2} = S_{OAB}$$

Suy ra S_{OAB} nhỏ nhất bằng 8 khi $a = b = 4$

+ Vậy phương trình tiếp tuyến cần lập là: $x + y - 4 = 0$

Bài 37.

+ Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC .

Do M, N lần lượt nằm trên các đường $3x - y - 9 = 0$ và $x + y - 1 = 0$ nên

$$\text{gọi } \begin{cases} M(m; 3m - 9) \\ N(n; 1 - n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow B(2m - 3; 6m - 14) \Rightarrow C(2n - 2m + 3; 16 - 2n - 6m)$$

+ Ta có

$$C \in CM \Leftrightarrow 3 \cdot (2n - 2m + 3) - (16 - 2n - 6m) - 9 = 0 \Leftrightarrow 8n = 16 \Leftrightarrow n = 2 \Rightarrow N(2; -1)$$

+ BC đi qua $N(2; -1)$ và vuông góc với đường thẳng $x + y - 1 = 0$ nên BC có phương trình: $x - y - 3 = 0$

Khi đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3x - y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(3; 0)$$

Do $N(2; -1)$ là trung điểm của BC nên suy ra $B(1; -2)$.

Vậy $B(1; -2), C(3; 0)$.

Bài 38.

+ Do A thuộc tia Oy nên gọi $A(0; a)$ với $a \geq 0$

Khi đó $A \in (T) \Leftrightarrow a^2 - 2a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 4$ hoặc $a = -2$ (loại), suy ra $A(0; 4)$

+ Gọi $C(-5c; c) \in d$, khi đó $\Rightarrow C(C \in (T) \Leftrightarrow 25c^2 + c^2 + 20c - 2c - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow 13c^2 + 9c - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ c = \frac{4}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(5; -1) \\ C\left(-\frac{20}{13}; \frac{4}{13}\right) \end{cases}$$

Do C có hoành độ là một số nguyên nên $C(5; -1)$.

+ AB đi qua $A(0; 4)$ và vuông góc với $d: x + 5y = 0$ nên AB có phương trình: $5x - y + 4 = 0$

Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 5x - y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; y = 4 \\ x = -1; y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(0; 4) \equiv A \\ B(-1; -1) \end{cases}$$

Vậy $A(0; 4), B(-1; -1), C(5; -1)$.

Bài 39.

+ Ta có $S_{ABCD} = AB^2 = 25 \Rightarrow AB = 5$

Tam giác ABI vuông cân tại I

nên ta có: $AI = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$

+ Gọi $I(t; 5-t) \in \Delta$ với $t > 0$, khi đó:

$$AI^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow (t+3)^2 + t^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow 4t^2 + 12t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{7}{2} \end{cases} \xrightarrow{t > 0} t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$$

Do I là trung điểm của AC , suy ra $C(4; 4)$

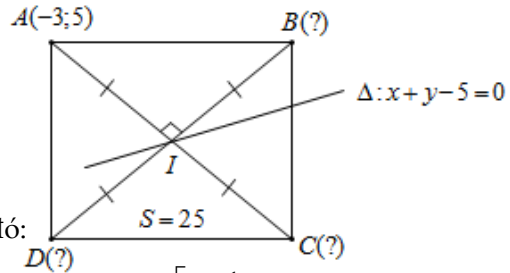
+ BD đi qua I và vuông góc với AC nên có phương trình: $7x - y + 1 = 0$

Gọi $B(b; 1+7b) \in BD$, khi đó:

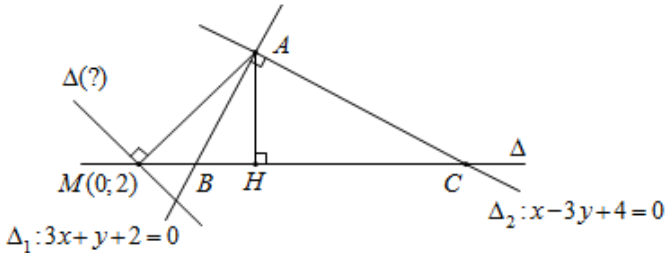
$$AI = BI \Leftrightarrow \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(7b - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(0; 1) \\ B(1; 8) \end{cases}$$

Do I là trung điểm của BD nên $B(0; 1) \Rightarrow D(1; 8)$ và $B(1; 8) \Rightarrow D(0; 1)$

Vậy $B(0; 1), C(4; 4), D(1; 8)$ hoặc $B(1; 8), C(4; 4), D(0; 1)$.



Bài 40.



+ Vectơ pháp tuyến của Δ_1, Δ_2 lần lượt là $\vec{n}_1 = (3; 1)$ và $\vec{n}_2 = (1; -3)$

Ta có $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow \Delta_1 \perp \Delta_2$, suy ra tam giác ABC vuông tại A .

Do $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{A\}$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x + y + 2 = 0 \\ x - 3y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 1)$$

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC , khi đó:

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}$$

Suy ra $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ nhỏ nhất khi $\frac{1}{AH^2}$ nhỏ nhất hay AH lớn nhất.

Mà ta có $AH \leq AM \Rightarrow AH_{\max} = AM \Leftrightarrow H \equiv M$ hay Δ đi qua M và vuông góc với AM với $\overline{AM} = (1;1)$

Khi đó phương trình Δ là: $x + y - 2 = 0$

Bài 41.

+ Do ABC là tam giác đều và $A(0;2)$ nên B, C đối xứng nhau qua trục tung nên gọi $B(x_0; y_0) \Rightarrow C(-x_0; y_0)$ với $x_0 > 0$

+ Độ dài tam giác đều ABC là $a = 2x_0$ và chiều cao $h = 2 - y_0$

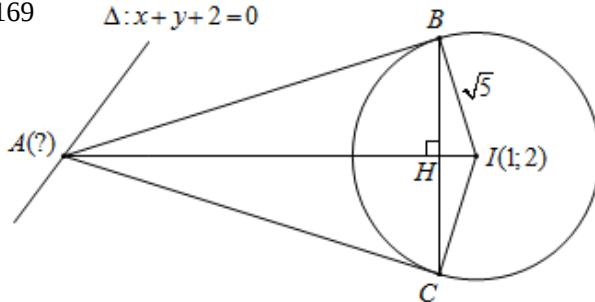
Khi đó $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2 - y_0 = \sqrt{3}x_0 \Leftrightarrow y_0 = 2 - \sqrt{3}x_0 \Rightarrow B(x_0; 2 - \sqrt{3}x_0)$

+ Ta có $B \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{16} + \frac{(2 - \sqrt{3}x_0)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm \frac{16\sqrt{3}}{13} \xrightarrow{x_0 > 0} x_0 = \frac{16\sqrt{3}}{13}$

$$\Rightarrow B\left(\frac{16\sqrt{3}}{13}; -\frac{22}{13}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = 2x_0 = \frac{32\sqrt{3}}{13} \\ h = 2 - y_0 = \frac{48}{13} \end{cases} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{768\sqrt{3}}{169}$$

Vậy $S_{ABC} = \frac{768\sqrt{3}}{169}$.

Bài 42.



+ Đường tròn (T) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $IB = R = \sqrt{5}$

Gọi H là giao điểm của BC và AI . Đặt $AI = a > 0$

Ta có:

$$\begin{cases} AH = \frac{AB^2}{AI} = \frac{AI^2 - IB^2}{AI} = \frac{a^2 - 5}{a} \\ IH = \frac{IB^2}{IA} = \frac{5}{a} \end{cases} \Rightarrow BH = \sqrt{AH \cdot IH} = \sqrt{\frac{a^2 - 5}{a} \cdot \frac{5}{a}} = \frac{\sqrt{5(a^2 - 5)}}{a}$$

$$\begin{aligned}
 + \quad S_{ABC} &= AH.BH = \frac{a^2 - 5}{a} \cdot \frac{\sqrt{5(a^2 - 5)}}{a} = 8 \Leftrightarrow 5(a^2 - 5)^3 = 64a^4 \\
 &\Leftrightarrow 5a^6 - 139a^4 + 375a^2 - 625 = 0 \Leftrightarrow (a^2 - 25)(5a^4 - 14a + 25) = 0 \\
 &\Leftrightarrow a = \pm 5 \xrightarrow{a > 0} a = 5 \Rightarrow AI = 5
 \end{aligned}$$

+ Gọi $A(t; -t-2) \in \Delta$, khi đó:

$$AI^2 = 25 \Leftrightarrow (t-1)^2 + (t+4)^2 = 25 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1; -3) \\ A(-4; 2) \end{cases}$$

Vậy $A(1; -3)$ hoặc $A(-4; 2)$.

Bài 43.

Cách 1:

+ Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 7x - 4y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow B(0; -2)$$

+ Gọi $\overrightarrow{n_{CG}} = (a; b)$ là vectơ

pháp tuyến của đường thẳng CG

Ta có BC, BG lần lượt có vectơ

pháp tuyến $\overrightarrow{n_{BC}} = (1; -2), \overrightarrow{n_{BG}} = (7; -4)$

Do $\triangle ABC$ cân tại A nên :

$$\widehat{GCB} = \widehat{GBC} \Leftrightarrow \left| \cos(\overrightarrow{n_{BC}}, \overrightarrow{n_{CG}}) \right| = \left| \cos(\overrightarrow{n_{BC}}, \overrightarrow{n_{BG}}) \right| \Leftrightarrow \frac{|a - 2b|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{15}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{65}}$$

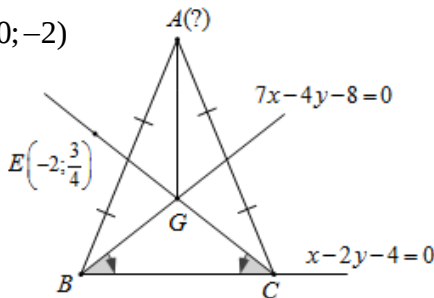
$$\Leftrightarrow 13(a - 2b)^2 = 45(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 32a^2 + 52ab - 7b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (8a - b)(4a + 7b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = b \\ 4a = -7b \end{cases}$$

+ Với $8a = b$, chọn $a = 1, b = 8$, suy ra $\overrightarrow{n_{CG}} = (1; 8)$.

Khi đó CG đi qua $E\left(-2; \frac{3}{4}\right)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{CG}} = (1; 8)$ nên có phương trình: $x + 8y - 4 = 0$

Suy ra tọa độ điểm C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ x + 8y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4; 0)$



Tọa độ trọng tâm G là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 7x - 4y - 8 = 0 \\ x + 8y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

Khi đó $\begin{cases} x_A = 3x_G - (x_B + x_C) = 0 \\ y_A = 3y_G - (y_B + y_C) = 3 \end{cases} \Rightarrow A(0; 3)$

+ Với $4a = -7b$, chọn $a = 7, b = -4$,

suy ra $\overrightarrow{n_{CG}} = (7; -4)$ cùng phương với $\overrightarrow{n_{BG}}$ (loại)

Vậy $A(0; 3)$.

Cách 2:

+ Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 7x - 4y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow B(0; -2)$

+ Kẻ $EF \parallel BC$ ($F \in BG$), khi đó phương trình

$$EF: x + 2 - 2\left(y - \frac{3}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y + 7 = 0$$

Suy ra tọa độ điểm F là nghiệm của hệ: $E\left(-2; \frac{3}{4}\right)$

$$\begin{cases} 2x - 4y + 7 = 0 \\ 7x - 4y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{13}{4} \end{cases} \Rightarrow F\left(3; \frac{13}{4}\right)$$

Suy ra tọa độ trung điểm I của EF là $I\left(\frac{1}{2}; 2\right)$

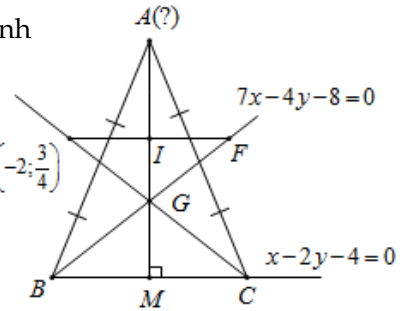
+ Do $\triangle ABC$ cân tại A nên $I \in AG \perp BC$, suy ra phương trình $AG: 2x + y - 3 = 0$

Tọa độ điểm G là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 7x - 4y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$

Tọa độ điểm giao điểm M của AG và BC là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow M(2; -1)$$

+ Ta có $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM} \Rightarrow A(0; 3)$. Vậy $A(0; 3)$.



Bài 44.

+ Elip (E) có $\begin{cases} a=10 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = 5\sqrt{3} \Rightarrow F_1F_2 = 2c = 10\sqrt{3}.$

+ Gọi $M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_0^2}{100} + \frac{y_0^2}{25} = 1 \quad (*) \\ MF_1 = a + \frac{c}{a}x_0 = 10 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_0; \quad MF_2 = a - \frac{c}{a}x_0 = 10 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_0 \end{cases}$

Khi đó ta có: $F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1 \cdot MF_2 \cdot \cos \widehat{F_1MF_2}$

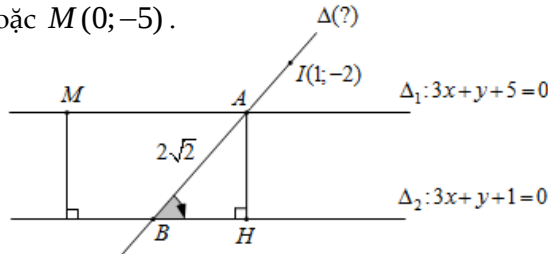
$\Leftrightarrow (10\sqrt{3})^2 = \left(10 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)^2 + \left(10 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)^2 - 2\left(10 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)\left(10 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right) \cdot \cos 120^\circ$

$\Leftrightarrow 300 = 200 + \frac{3}{2}x_0^2 + 100 - \frac{3}{4}x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$

+ Thay $x_0 = 0$ vào $(*)$ ta được: $y_0^2 = 25 \Leftrightarrow y_0 = \pm 5$

Vậy $M(0; 5)$ hoặc $M(0; -5).$

Bài 45.



+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên Δ_2 .

Chọn $M(0; -5) \in \Delta_1$. Nhận thấy $\Delta_1 // \Delta_2$ nên ta có:

$AH = d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M, \Delta_2) = \frac{4}{\sqrt{10}} \Rightarrow \cos \widehat{ABH} = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 - AH^2}}{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

+ Gọi $\vec{n}_\Delta = (a; b)$ là vectơ pháp tuyến của AB ($a^2 + b^2 \neq 0$). Ta có $\vec{n}_{\Delta_2} = (3; 1)$

Khi đó: $\cos \widehat{ABH} = \left| \cos(\vec{n}_\Delta, \vec{n}_{\Delta_2}) \right| \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{|3a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{10}} \Leftrightarrow 8(a^2 + b^2) = (3a + b)^2$

$\Leftrightarrow a^2 + 6ab - 7b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a + 7b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -7b \end{cases}$

+ Với $a = b$, chọn $a = b = 1 \Rightarrow \vec{n}_\Delta = (1; 1)$,
suy ra phương trình $\Delta: x + y + 1 = 0$.

+ Với $a = -7b$, chọn $a = 7, b = -1 \Rightarrow \vec{n}_\Delta = (7; -1)$,
suy ra phương trình $\Delta: 7x - y - 9 = 0$.

Vậy phương trình Δ cần lập là: $x + y + 1 = 0$ hoặc $7x - y - 9 = 0$.

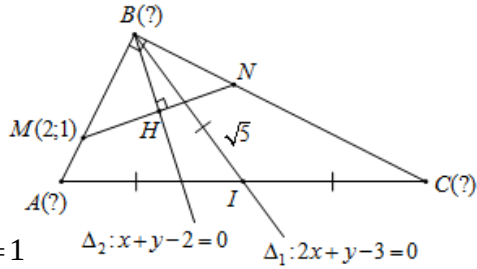
Bài 46.

+ Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow B(1;1)$$

Khi đó AB đi qua $B(1;1)$

và $M(2;1)$ nên có phương trình: $y = 1$



+ Gọi N là điểm đối xứng với M qua $\Delta_2 \Rightarrow N \in BC$ và phương trình $MN: x - y - 1 = 0$

Suy ra tọa độ giao điểm H của MN và Δ_2 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow N(1;0) \text{ (vì } H \text{ là trung điểm của } MN)$$

Khi đó BC đi qua $B(1;1)$ và $N(1;0)$ nên có phương trình: $x = 1$

+ Gọi $\begin{cases} A(a;1) \in AB \\ C(1;c) \in BC \end{cases} (a > 0) \Rightarrow I\left(\frac{a+1}{2}; \frac{c+1}{2}\right)$: là trung điểm của AC

$$\text{Ta có } I \in \Delta_2 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{a+1}{2} + \frac{c+1}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow c = 3 - 2a \Rightarrow I\left(\frac{a+1}{2}; 2-a\right)$$

+ Do đường thẳng $x = 1$ và $y = 1$ vuông góc nên $\widehat{ABC} = 90^\circ$ hay tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC chính là trung điểm I của AC

$$\Rightarrow IB = R = \sqrt{5} \Leftrightarrow IB^2 = 5 \Leftrightarrow \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + (a-1)^2 = 5$$

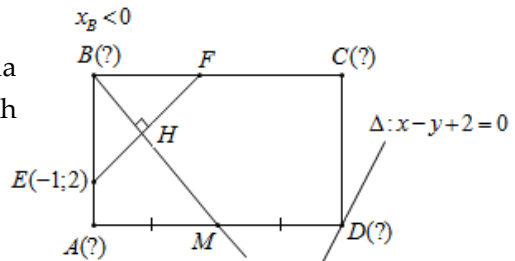
$$\Leftrightarrow (a-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases} \xrightarrow{a > 0} a = 3$$

Suy ra $c = -3 \Rightarrow A(3;1), C(1;-3)$. Vậy $A(3;1), B(1;1), C(1;-3)$.

Bài 47.

+ Gọi F là điểm đối xứng với E qua $BM \Rightarrow F \in BC$ và phương trình $EF: x + y - 1 = 0$

Suy ra tọa độ giao điểm H của EF và BM là nghiệm của hệ:



$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow F(0;1) \text{ (vì H là trung điểm của EF)}$$

+ Gọi $B(b; b+2) \in BM$ với $b < 0$,

suy ra $\overrightarrow{BE} = (-1-b; -b)$ và $\overrightarrow{BF} = (-b; -1-b)$

Khi đó:

$$\widehat{EBF} = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \Leftrightarrow 2b(1+b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=-1 \end{cases} \xrightarrow{b < 0} b = -1 \Rightarrow B(-1;1)$$

AB đi qua $B(-1;1)$ và $E(-1;2)$ nên có phương trình: $x = -1$

$$+ \text{ Gọi } \begin{cases} A(-1; a) \in AB \\ D(d; 9-d) \in \Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\left(\frac{d-1}{2}; \frac{a-d+9}{2}\right) \\ \overrightarrow{AD} = (d+1; 9-d-a) \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{cases} M \in BM \\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d-1}{2} - \frac{a-d+9}{2} + 2 = 0 \\ 9-d-a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2d-a = 6 \\ d+a = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=5 \\ a=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(5;4) \\ A(-1;4) \end{cases}$$

+ Ta có $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow C(5;1)$

Vậy $A(-1;4), B(-1;1), C(5;1), D(5;4)$.

Chú ý:

Ngoài cách tìm tọa độ điểm B ở trên các bạn có thể tìm B bằng cách viết phương trình đường thẳng AB đi qua $E(-1;2)$ và tạo với BM góc 45° (thuộc **Bài toán 6.2**). Sau đó tìm giao điểm của AB và BM .

Bài 48.

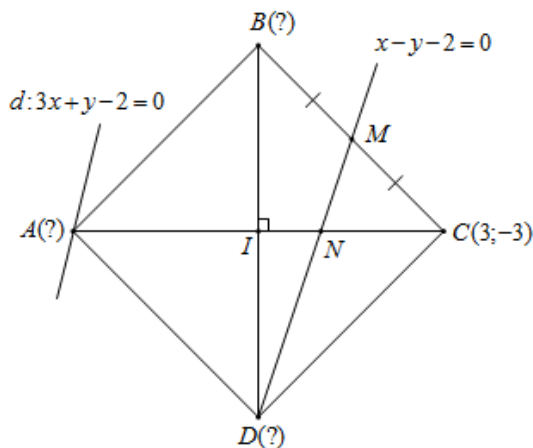
+ Gọi AC giao với DB, DM lần lượt tại I, N .

Suy ra N là trọng tâm của tam giác BCD , do đó:

$$CN = \frac{2}{3}CI = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot CA = \frac{1}{3}CA$$

$$\Rightarrow CA = 3CN \Rightarrow \overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CN}$$

+ Gọi $\begin{cases} A(a; 2-3a) \in d \\ N(b; b-2) \in DM' \end{cases}$



Khi đó:

$$\overline{CA} = 3\overline{CN} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3=3(b-3) \\ 2-3a+3=3(b-2+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3b=-6 \\ 3a+3b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow A(-1;5)$$

+ Suy ra tọa độ trung điểm I của AC là $I(1;1)$

Khi đó BD đi qua I vuông góc với AC nên có phương trình $x-2y+1=0$

Suy ra tọa độ điểm D là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow D(5;3)$

Vậy $A(-1;5), B(-3;-1), D(5;3)$.

Bài 49.

+ Gọi $B(b;0) \in Ox \Rightarrow C(-b;0)$,

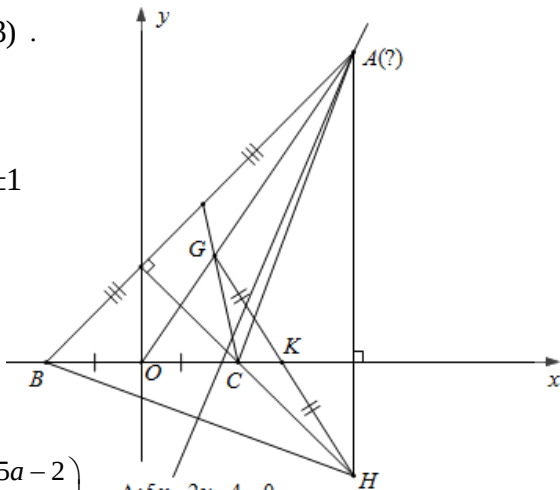
khi đó $BC = 2 \Leftrightarrow |b| = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1$

Do B, C có vai trò như nhau nên không mất tính tổng quát giả sử:

$$b = -1 \Rightarrow \begin{cases} B(-1;0) \\ C(1;0) \end{cases}$$

+ Gọi $A(2a;5a-2) \in \Delta \Rightarrow G\left(\frac{2a}{3}; \frac{5a-2}{3}\right)$

$$\Delta: 5x-2y-4=0$$



Do $AH \perp BC$ nên phương trình $AH: x = 2a$. Do đó $H(2a;h)$

Mà K là trung điểm của $GH \Rightarrow K\left(\frac{4a}{3}; \frac{5a+3h-2}{6}\right)$

+ Khi đó $K \in Ox \Rightarrow \frac{5a+3h-2}{6} = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2-5a}{3} \Rightarrow H\left(2a; \frac{2-5a}{3}\right)$

Suy ra $\overline{CH} = \left(2a-1; \frac{2-5a}{3}\right)$ và ta có $\overline{BA} = (2a+1; 5a-2)$

H là trực tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overline{CH} \cdot \overline{BA} = 0$

$$\Leftrightarrow (2a-1)(2a+1) - \frac{(5a-2)^2}{3} = 0 \Leftrightarrow 13a^2 - 20a + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=\frac{7}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2;3) \\ A\left(\frac{14}{13}; \frac{9}{13}\right) \end{cases}$$

Vậy $A(2;3)$ hoặc $A\left(\frac{14}{13}; \frac{9}{13}\right)$.

Bài 50.

+ Gọi N là điểm đối xứng với M qua $d_2 \Rightarrow N \in AC$ và phương trình

$$MN: x + y - 2 = 0$$

Suy ra tọa độ giao điểm H của MN và d_2 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow N(1; 1) \text{ (vì } H \text{ là trung điểm của } MN \text{)}$$

+ Khi đó AC đi qua N và vuông góc với d_1 nên AC có phương trình: $4x - 3y - 1 = 0$

$$\text{Suy ra tọa độ điểm } A \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 4x - 3y - 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(4; 5)$$

AB đi qua $A(4; 5)$ và $M(0; 2)$ nên có phương trình: $3x - 4y + 8 = 0$

Suy ra tọa độ điểm B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - 4y + 8 = 0 \\ 3x + 4y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow B\left(-3; -\frac{1}{4}\right)$$

+ Phương trình AC viết dạng tham số $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases} \Rightarrow C(1 + 3t; 1 + 4t)$

$$\text{Khi đó } MC = \sqrt{2} \Leftrightarrow (3t + 1)^2 + (4t - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow 25t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{2}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(1; 1) \\ C\left(\frac{31}{25}; \frac{33}{25}\right) \end{cases}$$

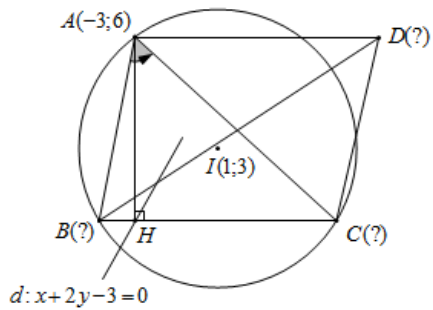
$$\text{Vậy } A(4; 5), B\left(-3; -\frac{1}{4}\right), C(1; 1) \text{ hoặc } A(4; 5), B\left(-3; -\frac{1}{4}\right), C\left(\frac{31}{25}; \frac{33}{25}\right).$$

Bài 51.

+ Đường tròn tâm $I(1; 3)$ bán kính $R = IA = 5$ có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$

Theo định lý sin trong tam giác ABC

$$\text{ta có } \frac{BC}{\sin A} = 2R = 10 \Rightarrow \frac{\sin A}{BC} = \frac{1}{10}$$



Gọi $I(t;1-t) \in \Delta$, khi đó:

$$d(I, OA) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|2t - (1-t)|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |3t - 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(1;0) \\ I\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right) \end{cases}$$

Do I là trung điểm của OB và AC nên

+ Với $I(1;0) \Rightarrow B(2;0), C(1;-2)$

+ Với $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right) \Rightarrow B\left(-\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right), C\left(-\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$

Vậy $B(2;0), C(1;-2)$ hoặc $B\left(-\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right), C\left(-\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Bài 55.

+ Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tâm $I(1;7)$ và bán kính $R = IA = 5$ nên có phương trình:

$$(T): (x-1)^2 + (y-7)^2 = 25$$

Gọi D là giao điểm thứ hai của phân giác trong của góc A với (T) .

Khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-7)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2; y = 3 \\ x = -3; y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(-2;3) \\ D(-3;4) \equiv A \end{cases} \Rightarrow D(-2;3)$$

Do AD là phân giác trong của góc A nên D là điểm chính giữa cung BC

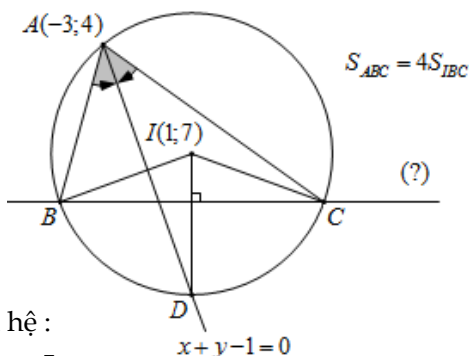
Suy ra $ID \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{DI} = (3;4)$ là vectơ pháp tuyến của BC

Khi đó phương trình BC có dạng $3x + 4y + m = 0$

+ Ta có $S_{ABC} = 4S_{IBC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(A, BC).BC = 4.\frac{1}{2}d(I, BC).BC \Leftrightarrow d(A, BC) = 4d(I, BC)$

$$\Leftrightarrow \frac{|-9 + 16 + m|}{5} = 4.\frac{|3 + 28 + m|}{5} \Leftrightarrow |m + 7| = 4|m + 31| \Leftrightarrow \begin{cases} m = -39 \\ m = -\frac{131}{5} \end{cases}$$

Vậy phương trình BC là $3x + 4y - 39 = 0$ hoặc $15x + 20y - 131 = 0$.

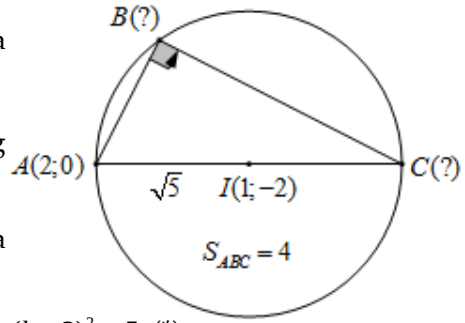


Bài 56.

+ Đường tròn (T) có tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$

Vì $A \in (T)$ và tam giác ABC vuông tại B nên AC là đường kính của (T)

Suy ra I là trung điểm của $AC \Rightarrow C(0; -4)$



+ Gọi $B(a; b)$, khi đó $B \in (T) \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b+2)^2 = 5$ (*)

Phương trình $AC: 2x - y - 4 = 0$

$$\text{Ta có: } d(B, AC) = \frac{2S_{ABC}}{AC} \Leftrightarrow \frac{|2a - b - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot 4}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow |2a - b - 4| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ b = 2a - 8 \end{cases}$$

+ Với $b = 2a$ thay vào (*) ta được:

$$(a-1)^2 + (2a+2)^2 = 5 \Leftrightarrow 5a^2 + 6a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow b = 0 \\ a = -\frac{6}{5} \Rightarrow b = -\frac{12}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(0; 0) \\ B\left(-\frac{6}{5}; -\frac{12}{5}\right) \end{cases}$$

+ Với $b = 2a - 8$ thay vào (*) ta được:

$$(a-1)^2 + (2a-6)^2 = 5 \Leftrightarrow 5a^2 - 26a + 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow b = -4 \\ a = \frac{16}{5} \Rightarrow b = -\frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(2; -4) \\ B\left(\frac{16}{5}; -\frac{8}{5}\right) \end{cases}$$

Vậy $B(0; 0), C(0; -4)$ hoặc $B\left(-\frac{6}{5}; -\frac{12}{5}\right), C(0; -4); B(2; -4), C(0; -4);$

$B\left(\frac{16}{5}; -\frac{8}{5}\right), C(0; -4).$

Bài 57.

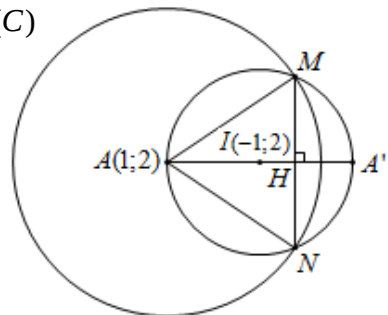
+ Đường tròn (C) có bán kính $R = 2$ và $A \in (C)$

Gọi AA' là đường kính của (C)

$\Rightarrow AA' = 2R = 4$ và $R' = AN$

với $R' \in (0; 4)$ là bán kính của (C')

Gọi $AA' \cap MN = \{H\}$.



Xét tam giác $AA'N$ ta có: $AH = \frac{AN^2}{AA'} = \frac{R'^2}{4}$

$$\text{Suy ra } HN = \sqrt{AN^2 - AH^2} = \sqrt{R'^2 - \frac{R'^4}{16}} = \frac{R' \cdot \sqrt{16 - R'^2}}{4}$$

+ Khi đó ta có

$$S_{AMN} = AH \cdot HN = \frac{R^3 \cdot \sqrt{16 - R'^2}}{16} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \sqrt{\frac{R'^2}{3} \cdot \frac{R'^2}{3} \cdot \frac{R'^2}{3} \cdot (16 - R'^2)} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$4 \cdot \sqrt{\frac{R'^2}{3} \cdot \frac{R'^2}{3} \cdot \frac{R'^2}{3} \cdot (16 - R'^2)} \leq \frac{R'^2}{3} + \frac{R'^2}{3} + \frac{R'^2}{3} + (16 - R'^2) = 16$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{R'^2}{3} \cdot \frac{R'^2}{3} \cdot \frac{R'^2}{3} \cdot (16 - R'^2)} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{R'^2}{3} \cdot \frac{R'^2}{3} \cdot \frac{R'^2}{3} \cdot (16 - R'^2)} \leq 16 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{AMN} \leq 3\sqrt{3}$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{R'^2}{3} = 16 - R'^2 \Leftrightarrow R'^2 = 12$

Suy ra $(S_{AMN})_{\max} = 3\sqrt{3}$ khi $R'^2 = 12$ hay phương trình

$$(C'): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 12$$

Bài 58.

+ Đường tròn ngoại tiếp ABC có

tâm $I\left(\frac{5}{2}; 3\right)$ và bán kính $IA = \frac{5}{2}$

nên có phương trình:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{4}$$

Ta có AD đi qua $A(1;5), K(2;2)$ nên có phương trình: $3x + y - 8 = 0$

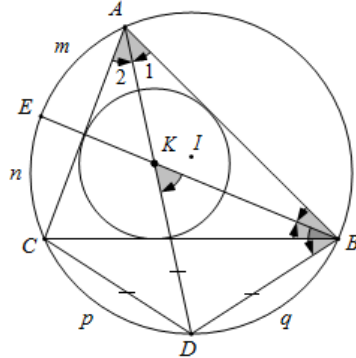
Khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x + y - 8 = 0 \\ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 5 \\ x = \frac{5}{2}; y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(1;5) \equiv A \\ D\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow D\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

+ Gọi E là giao điểm thứ hai của BK với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \widehat{AmE} = \widehat{EnC} \\ \widehat{CpD} = \widehat{DqB} \end{cases} \text{ (góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau)}$$

$$\Rightarrow \widehat{EnC} + \widehat{CpD} = \widehat{AmE} + \widehat{DqB} \text{ hay } \widehat{ECD} = \widehat{AmE} + \widehat{DqB} \quad (1)$$



$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} \widehat{EBD} = \frac{1}{2} \widehat{ECD} \\ \widehat{DKB} = \frac{1}{2} (\widehat{AmE} + \widehat{DqB}) \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{EBD} = \widehat{DKB}$ hay tam giác DBK cân tại D ,

suy ra $DB = DK$ (*)

Lại có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow DB = DC$ (2*)

Từ (*) & (2*) suy ra: $DB = DK = DC$ hay B, C nằm trên đường tròn tâm $D\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ bán kính $DK = \frac{\sqrt{10}}{2}$ có phương trình: $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$

Khi đó tọa độ B, C là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = \frac{25}{4} \\ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(1;1), C(4;1) \\ B(4;1), C(1;1) \end{cases}$$

Vậy $B(1;1), C(4;1)$ hoặc $B(4;1), C(1;1)$.

Bài 59.

+ Do A, O, B thẳng hàng nên khi đó theo

định lý Ta - Let ta có $AM \parallel BN$ suy ra:

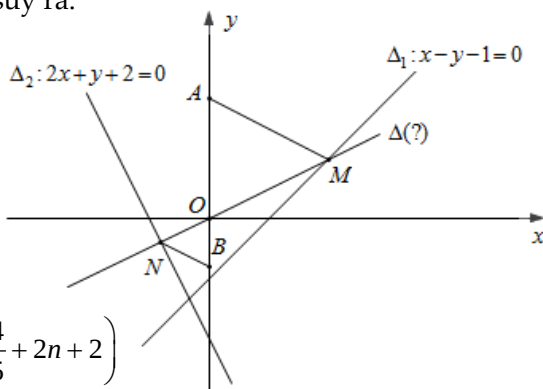
$$\frac{AM}{NB} = \frac{AO}{BO} = \frac{2}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow \overline{AM} = \frac{5}{2} \overline{NB}$$

+ Gọi $\begin{cases} M(m; m-1) \in \Delta_1 \\ N(n; -2n-2) \in \Delta_2 \end{cases}$, khi đó:

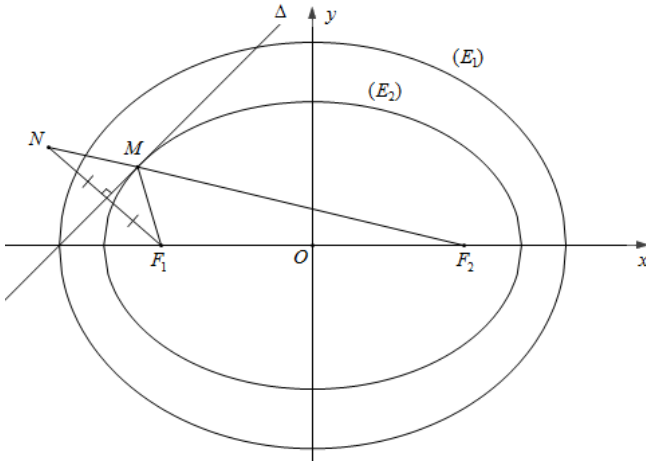
$$\overline{AM} = \frac{5}{2} \overline{NB} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 0 = \frac{5}{2}(0 - n) \\ m - 1 - 2 = \frac{5}{2}\left(-\frac{4}{5} + 2n + 2\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 5n = 0 \\ m - 5n = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2;1) \\ N\left(-\frac{4}{5}; -\frac{2}{5}\right) \end{cases}$$

+ Khi đó Δ đi qua M, N nên có phương trình: $x - 2y = 0$



Bài 60.



- + Elip (E_1) có hai tiêu điểm $F_1(-3;0), F_2(3;0)$.

Dễ thấy F_1, F_2 nằm cùng phía với Δ

Vì $M \in (E_2)$ và (E_2) nhận F_1, F_2 là hai tiêu điểm nên ta có: $MF_1 + MF_2 = 2a$

Khi đó elip (E_2) có độ dài trục lớn nhỏ nhất khi và chỉ khi $MF_1 + MF_2$ nhỏ nhất.

- + Gọi N đối xứng với $F_1(-3;0)$ qua $\Delta \Rightarrow N(-5;2)$

Khi đó ta có phương trình NF_2 là: $x + 4y - 3 = 0$

- + Ta có $MF_1 + MF_2 = MN + MF_2 \geq NF_2 = \sqrt{68}$

Suy ra $MF_1 + MF_2$ nhỏ nhất khi $\{M\} = NF_2 \cap \Delta$

Vậy tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 4y - 3 = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{17}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{17}{5}; \frac{8}{5}\right)$$

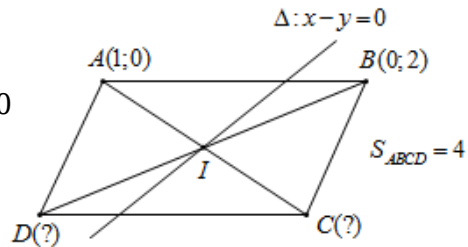
Vậy $M\left(-\frac{17}{5}; \frac{8}{5}\right)$.

Bài 61

- + Phương trình AB là: $2x + y - 2 = 0$

- + Ta có $S_{IAB} = \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$

$$\Rightarrow d(I, AB) = \frac{2S_{IAB}}{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



Gọi $I(t;t) \in \Delta$, khi đó:

$$d(I, AB) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|2t+t-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |3t-2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{3} \Rightarrow I\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \\ t = 0 \Rightarrow I(0;0) \end{cases}$$

Do I là trung điểm của AC và BD nên

$$+ \text{ Với } I\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \Rightarrow C\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right), D\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

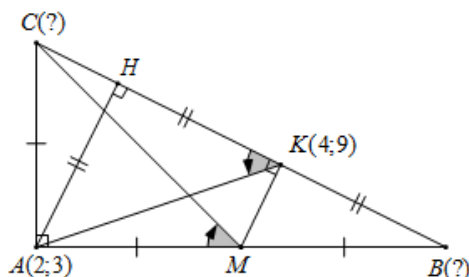
$$+ \text{ Với } I(0;0) \Rightarrow C(-1;0), D(0;-2)$$

Vậy $C(-1;0), D(0;-2)$ hoặc $C\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right), D\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Bài 62.

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC , khi đó K là trung điểm của HB

Tứ giác $ACKM$ nội tiếp đường tròn và ACM vuông cân tại A nên $\widehat{CKA} = \widehat{CMA} = 45^\circ$



Suy ra tam giác AHK vuông cân tại H

Suy ra H thuộc đường trung trực của AK có phương trình $\Delta: x + 3y - 21 = 0$

$$\text{Gọi } H(21-3t;t) \in \Delta \Rightarrow \begin{cases} \overline{AH} = (19-3t; t-3) \\ \overline{KH} = (17-3t; t-9) \end{cases},$$

$$\text{khi đó: } \overline{AH} \cdot \overline{KH} = 0 \Leftrightarrow (19-3t) \cdot (17-3t) + (t-3)(t-9) = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 12t + 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \Rightarrow H(6;5) \\ t = 7 \Rightarrow H(0;7) \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } H(6;5) \Rightarrow B(2;13) \text{ (vì } K \text{ là trung điểm của } HB)$$

Khi đó phương trình AB là $x = 2$, suy ra phương trình $AC: y = 3$

BC đi qua $B(2;13), K(4;9)$ nên có phương trình: $2x + y - 17 = 0$

Suy ra tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y - 17 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow C(7;3)$$

$$+ \text{ Với } H(0;7) \Rightarrow B(8;11) \text{ (vì } K \text{ là trung điểm của } HB)$$

Khi đó AC đi qua A và vuông góc với AB nên có phương trình:

$$3x + 4y - 18 = 0$$

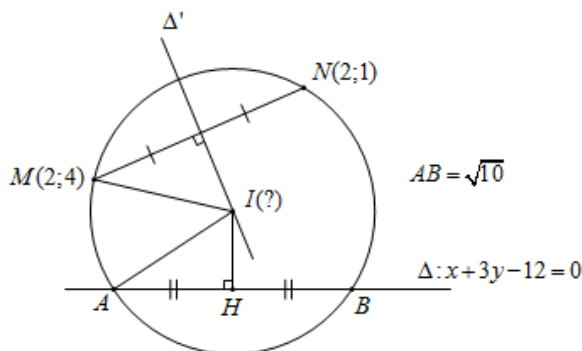
BC đi qua $B(8;11), K(4;9)$ nên có phương trình: $x - 2y + 14 = 0$

Suy ra tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 14 = 0 \\ 3x + 4y - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow C(-2;6)$$

Vậy $B(2;13), C(7;3)$ hoặc $B(8;11), C(-2;6)$.

Bài 63.



+ Gọi I, R lần lượt là tâm và bán kính của phương trình đường tròn cần lập

Do $IM = IN = R \Rightarrow I$ thuộc đường thẳng trung trực của MN có phương trình $\Delta': x - 3y + 5 = 0$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB (hay Δ) $\Rightarrow HA = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$$\text{Suy ra } IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{IM^2 - \frac{5}{2}} \text{ hay } d(I, \Delta) = \sqrt{IM^2 - \frac{5}{2}}$$

+ Gọi $I(3t - 5; t) \in \Delta'$, khi đó:

$$\begin{aligned} d(I, \Delta) = \sqrt{IM^2 - \frac{5}{2}} &\Leftrightarrow \frac{|3t - 5 + 3t - 12|}{\sqrt{10}} = \sqrt{(3t - 7)^2 + (t - 4)^2 - \frac{5}{2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{(6t - 17)^2}{10} = \frac{20t^2 - 100t + 125}{2} \Leftrightarrow 8t^2 - 31t + 42 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{21}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(1; 2) \\ I\left(\frac{23}{8}; \frac{21}{8}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

+ Với $I(1; 2) \Rightarrow R = IM = \sqrt{5}$, suy ra phương trình đường tròn cần lập:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

+ Với $I\left(\frac{23}{8}; \frac{21}{8}\right) \Rightarrow R = IM = \frac{\sqrt{170}}{8}$, suy ra phương trình đường tròn cần lập:

$$\left(x - \frac{23}{8}\right)^2 + \left(y - \frac{21}{8}\right)^2 = \frac{170}{64}.$$

Vậy phương trình đường tròn cần lập là:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ hoặc } \left(x - \frac{23}{8}\right)^2 + \left(y - \frac{21}{8}\right)^2 = \frac{170}{64}.$$

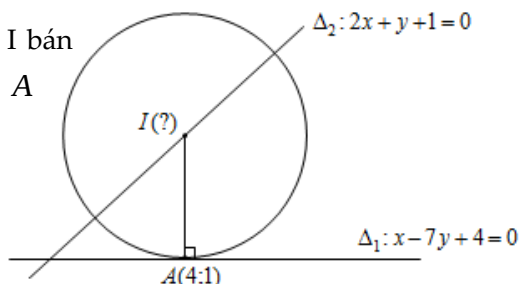
Bài 64.

+ Gọi đường tròn cần lập có tâm I bán kính R và tiếp xúc với Δ_1 tại điểm A

Do A có hoành độ là 4 và thuộc $\Delta_1 \Rightarrow A(4;1)$.

+ Khi đó IA đi qua $A(4;1)$ và

vuông góc với Δ_1 nên có phương trình $7x + y - 29 = 0$



Suy ra tọa độ điểm I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 7x + y - 29 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -13 \end{cases} \Rightarrow I(6; -13), \text{ suy ra } R = IA = 10\sqrt{2}$$

Vậy phương trình đường tròn cần lập có phương trình:

$$(x-6)^2 + (y+13)^2 = 200.$$

Bài 65.

+ Gọi $\begin{cases} A(a;0) \in Ox \\ B(0;b) \in Oy \end{cases} (a, b > 0),$

khi đó phương trình Δ đi qua A, B có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

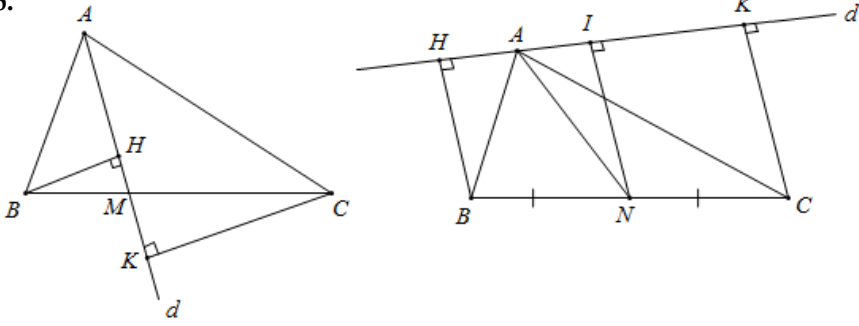
Vì $M \in \Delta \Rightarrow \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cô - si ta có:

$$1 = \frac{2}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}} \Leftrightarrow ab \geq 8 \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2}ab \geq 4$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{2}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$

+ Vậy phương trình Δ cần lập là: $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ hay $x + 2y - 4 = 0$.

Bài 66.



Do d có thể cắt hoặc không cắt đoạn BC , nên ta có hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Đường thẳng d cắt đoạn thẳng BC tại M

$$\Rightarrow \begin{cases} BH \leq BM \\ CK \leq CM \end{cases} \Rightarrow BH + CK \leq BM + CM = BC = \sqrt{10}$$

Dấu “=” xảy ra khi $d \perp BC$

Trường hợp 2: Đường thẳng d không cắt đoạn thẳng BC

Gọi N là trung điểm của $BC \Rightarrow N\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ và gọi I là hình chiếu của N trên d

$$\text{Khi đó } BH + CK = 2NI \leq 2NA = \sqrt{26}$$

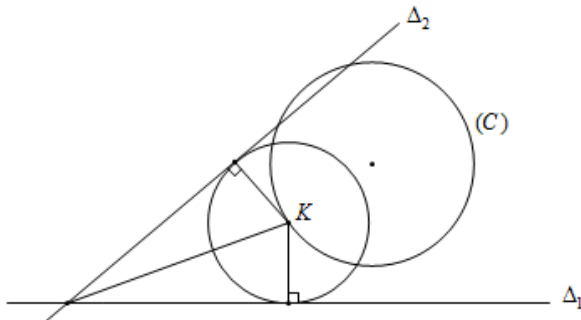
Dấu “=” xảy ra khi $d \perp AN$

Mà ta có $\sqrt{26} > \sqrt{10}$, do đó giá trị lớn nhất của $BH + CK = \sqrt{26}$ khi $d \perp AN$

Ta có $\overrightarrow{AN} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}(1; -5)$. Do đó phương trình d đi qua $A(0; 2)$ và

nhận $\vec{n} = (1; -5)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $x - 5y + 10 = 0$.

Bài 67.



+ Vì (C') có tâm K , tiếp xúc với đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2 \Rightarrow d(K, \Delta_1) = d(K, \Delta_2)$

Do đó K thuộc đường phân giác của góc tạo bởi Δ_1, Δ_2 thỏa mãn:

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{2}} = \frac{|x-7y|}{\sqrt{50}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

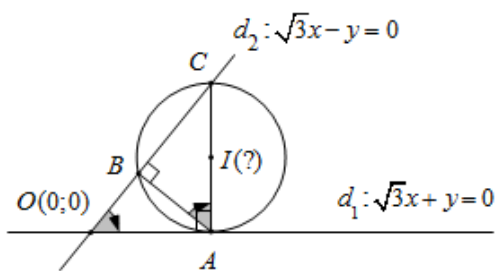
+ Khi đó tọa độ điểm K là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ (x-2)^2+y^2=\frac{4}{5} \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

hoặc
$$\begin{cases} x-2y=0 \\ (x-2)^2+y^2=\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{8}{5} \\ y=\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$$

Vậy $K\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

Bài 68.

+ Xét hệ:
$$\begin{cases} \sqrt{3}x+y=0 \\ \sqrt{3}x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$



$\Rightarrow O(0;0)$ là giao điểm của d_1 và d_2 .

Véc tơ pháp tuyến của d_1, d_2 lần lượt là: $\vec{n}_1 = (\sqrt{3}; 1), \vec{n}_2 = (\sqrt{3}; -1)$,

suy ra:
$$\cos(d_1, d_2) = \frac{|\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{3+1} \cdot \sqrt{3+1}} = \frac{1}{2}$$

Mặt khác tam giác ABC vuông tại B, do đó $\angle AOB = 60^\circ \Rightarrow \angle BAC = 60^\circ$.

+ Xét tam giác AOB và AOC ta có:
$$\begin{cases} AB = OA \sin 60^\circ = \frac{OA\sqrt{3}}{2} \\ AC = OA \tan 60^\circ = OA\sqrt{3} \end{cases}$$

Khi đó
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{OA\sqrt{3}}{2} \cdot OA\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} OA^2.$$

Do đó
$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

+ Gọi $A(t; -\sqrt{3}t)$ với $t > 0$, khi đó:

$$OA = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow OA^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow t^2 + 3t^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ hoặc } t = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (loại)}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -1\right)$$

Suy ra AC qua A , vuông góc d_1 có phương trình:

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{3}(y + 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 3y - 4 = 0$$

Khi đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - 3y - 4 = 0 \\ \sqrt{3}x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{\sqrt{3}} \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}; -2\right)$$

+ Vì tam giác ABC vuông tại B nên AC là đường kính.

Do đó đường tròn (T) cần viết có:

$$\text{Tâm } I\left(\frac{-1}{2\sqrt{3}}; -\frac{3}{2}\right) \text{ và bán kính } R = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}}{2} = 1$$

$$\text{Suy ra phương trình đường tròn } (T): \left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1$$

Bài 69.

+ Phương trình đường thẳng AB là: $2x + 3y = 0$

+ Gọi $C(x_0; y_0)$ với $x_0, y_0 > 0$. Do $C \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} = 1$

$$\text{Khi đó } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot d(C, AB) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{52} \cdot \frac{|2x_0 + 3y_0|}{\sqrt{13}} = 2x_0 + 3y_0 \quad (1)$$

Mặt khác theo Bất đẳng thức Bunhiacốpski ta có:

$$2 = (1^2 + 1^2) \left(\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} \right) \geq \left(\frac{x_0}{3} + \frac{y_0}{2} \right)^2 \Rightarrow \frac{x_0}{3} + \frac{y_0}{2} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 2x_0 + 3y_0 \leq 6\sqrt{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{ABC} \leq 6\sqrt{2}$

$$+ \text{ Dấu "}" xảy ra khi: } \begin{cases} \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} = 1 \\ \frac{x_0}{3} = \frac{y_0}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y_0 = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$$

Vậy $C\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$.

Bài 70.

+ Gọi I là tâm và R là bán kính của đường tròn (T) , khi đó $R = IO = IA$

Suy ra I thuộc đường trung trực của OA có phương trình

$$\Delta: x + 3y - 5 = 0$$

+ Khi đó $I(5 - 3m; m) \in \Delta$

và bán kính $R = OI = \sqrt{10m^2 - 30m + 25}$

Suy ra phương trình đường tròn (T) :

$$(x + 3m - 5)^2 + (y - m)^2 = 10m^2 - 30m + 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2(3m - 5)x - 2my = 0$$

Khi đó tọa độ B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(3m - 5)x - 2my = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2(3m - 5)x - 2my + 1 = 0$$

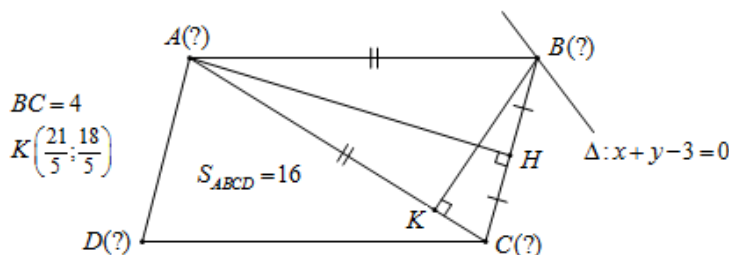
Suy ra phương trình $BC: 2(3m - 5)x - 2my + 1 = 0$

$$+ \text{ Ta có } d(A, BC) = \frac{9}{\sqrt{4(3m - 5)^2 + 4m^2}} = \frac{9}{\sqrt{40\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + 10}} \leq \frac{9}{\sqrt{10}}$$

Dấu “=” xảy ra khi $m = \frac{3}{2}$ hay phương trình đường tròn:

$$(T): x^2 + y^2 - x - 3y = 0$$

Bài 71.



+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC

$$\Rightarrow AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{S_{ABCD}}{BC} = \frac{16}{4} = 4$$

Ta có $CH = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

$$\text{Suy ra } BK = \frac{S_{ABCD}}{AC} = \frac{16}{2\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

Gọi $B(t; 3-t) \in \Delta$ với $t \in \mathbb{Z}$, khi đó :

$$BK^2 = \frac{64}{5} \Leftrightarrow \left(t - \frac{21}{5}\right)^2 + \left(t + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{64}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 - 18t + 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{13}{5} \end{cases} \xrightarrow{t \in \mathbb{Z}} t = 1 \Rightarrow B(1; 2)$$

+ AC đi qua K và vuông góc với BK nên có phương trình: $2x + y - 12 = 0$

Gọi $C(c; 12 - 2c) \in AC$ với $c \in \mathbb{Z}$, khi đó:

$$CB^2 = 16 \Leftrightarrow (c - 1)^2 + (2c - 10)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow 5c^2 - 42c + 85 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5 \\ c = \frac{17}{5} \end{cases} \xrightarrow{c \in \mathbb{Z}} c = 5 \Rightarrow C(5; 2)$$

+ Do $AB = AC$ nên A thuộc đường trung trực của BC có phương trình $x - 3 = 0$

Suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \\ 2x + y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow A(3; 6)$$

Vì $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 5 - x_D \\ -4 = 2 - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 7 \\ y_D = 6 \end{cases} \Rightarrow D(7; 6)$$

Vậy $A(3; 6), B(1; 2), C(5; 2), D(7; 6)$.

Chú ý : Nếu sử dụng dữ kiện $AC = 2\sqrt{5}$ để tìm A thì ta cần loại đi một điểm A nhờ dữ kiện $AB = 2\sqrt{5}$.

Bài 72.

+ Gọi đường tròn (T) có tâm I và bán kính R

Do $AD \parallel CB$, suy ra $\widehat{AB} = \widehat{DC}$.

Mà $AC \perp BD \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AB} = \text{sđ } \widehat{DC} = 90^\circ$

Khi đó $\widehat{AIB} = \text{sđ } \widehat{AB} = 90^\circ$

$\Rightarrow AIBH$ là hình vuông (với H là hình chiếu của A trên d_1)

Suy ra $R = IA = AH = d(A, \Delta_1)$

$$= \frac{|4 - 4 - 5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

+ Gọi $B(2t+5; t) \in \Delta_1$ với $t < 0$.

Khi đó: $AB = \sqrt{2}IA = \sqrt{10}$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 10 \Leftrightarrow (2t+1)^2 + (t-2)^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 1 \xrightarrow{t < 0} t = -1 \Rightarrow B(3; -1)$$

+ Tâm I thuộc đường trung trực của AB có phương trình $\Delta: x + 3y - 5 = 0$

Gọi $I(5-3m; m) \in \Delta$.

Ta có: $IA^2 = 5 \Leftrightarrow (3m-1)^2 + (m-2)^2 = 5$

$$\Leftrightarrow 10m^2 - 10m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(5; 0) \in \Delta_1 \\ I(2; 1) \end{cases} \Rightarrow I(2; 1)$$

Khi đó phương trình đường tròn $(T): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

Suy ra tọa độ điểm C, D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 3 \\ x = 0; y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(3; 3), D(0; 2) \\ C(0; 2), D(3; 3) \end{cases}$$

Do $ABCD$ là hình thang nên ta được $C(0; 2), D(3; 3)$

Vậy $B(3; -1), C(0; 2), D(3; 3)$.

Bài 73.

+ Gọi phương trình chính tắc của elip (E) là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$

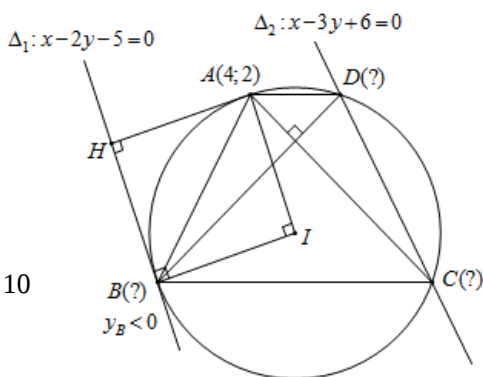
$$\text{Do } \widehat{F_1MF_2} = 90^\circ \text{ nên } OM = \frac{1}{2}F_1F_2 \Leftrightarrow OM = c = 2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 4 \quad (1)$$

+ Hình chữ nhật cơ sở của (E) nội tiếp đường tròn: $x^2 + y^2 = 20$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 20 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a^2 = 12; b^2 = 8$

Vậy elip (E) cần lập là: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$



Bài 74.

$$+ \text{ Ta có } (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \\ c=\sqrt{a^2-b^2}=4 \end{cases} \Rightarrow p = \frac{MF_1 + MF_2 + F_1F_2}{2} = 9$$

Khi đó:

$$S_{MF_1F_2} = pr = \frac{1}{2}d(M, Ox).F_1F_2 \Rightarrow d(M, Ox) = \frac{2pr}{F_1F_2} = \frac{2.9.\frac{4}{3}}{8} = 3 = |y_M| \Rightarrow y_M = \pm 3$$

$$+ \text{ Mặt khác } M \in (E) \Rightarrow x_M = 0$$

Vậy $M(0;3)$ hoặc $M(0;-3)$.

Bài 75.

$$+ \text{ Gọi phương trình chính tắc của elip } (E) \text{ là } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } a > b > 0$$

$$\text{Do } M \in (E) \Rightarrow \frac{12}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \quad (1)$$

$$+ \text{ Mặt khác } \widehat{F_1MF_2} = 90^\circ \text{ nên } OM = \frac{1}{2}F_1F_2 = c \Rightarrow c = 4 \Rightarrow a^2 - b^2 = 16 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } a^2 = 24; b^2 = 8$$

$$\text{Vậy elip } (E) \text{ cần lập là: } \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

Bài 76.

$$+ \text{ Gọi } B(t; 11-2t) \in BD \Rightarrow \begin{cases} \overline{MB} = (t-4; 9-2t) \\ \overline{NB} = (t-8; 7-2t) \end{cases} \text{ với } t > 4$$

$$\text{Do } MB \perp NB \Leftrightarrow \overline{MB} \cdot \overline{NB} = 0 \Leftrightarrow 5t^2 - 44t + 95 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=5 \\ t=\frac{19}{5} \end{cases} \xrightarrow{t>4} t=5 \Rightarrow B(5;1)$$

$$+ \text{ Khi đó } AB \text{ có phương trình: } x + y - 6 = 0 \text{ và } BC \text{ là: } x - y - 4 = 0$$

$$+ \text{ Gọi } D(d; 11-2d) \in BD \text{ với } d > 4, \text{ khi đó:}$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = d(D, BC) \cdot d(D, AB) = \frac{|3d-15|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|5-d|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}(d-5)^2$$

Theo giả thiết

$$S_{ABCD} = 6 \Rightarrow \frac{3}{2}(d-5)^2 = 6 \Leftrightarrow (d-5)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} d=7 \\ d=3 \end{cases} \xrightarrow{d>4} d=7 \Rightarrow D(7; -3)$$

Suy ra phương trình

$$AB: x + y - 6 = 0; BC: x - y - 4 = 0; CD: x + y - 4; AD: x - y - 10 = 0.$$

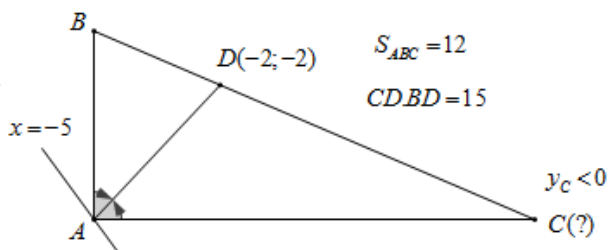
Bài 77.

+ Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 12$

$$\Leftrightarrow AB \cdot AC = 24$$

Theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{DC}{AC} = \frac{DB}{AB} = \sqrt{\frac{DC \cdot DB}{AC \cdot AB}} = \sqrt{\frac{15}{24}} = \sqrt{\frac{5}{8}} \Rightarrow DC = \sqrt{\frac{5}{8}} AC$$



+ Mặt khác:

$$\cos 45^\circ = \cos \widehat{CAD} = \frac{AC^2 + AD^2 - DC^2}{2 \cdot AC \cdot AD} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{AC^2 + AD^2 - \frac{5}{8} AC^2}{2 \cdot AC \cdot AD}$$

$$\Leftrightarrow (AC - 2\sqrt{2}AD)(3AC - 2\sqrt{2}AD) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} AC = 2\sqrt{2}AD \\ AC = \frac{2\sqrt{2}}{3}AD \end{cases}$$

Tương tự ta có $AB = 2\sqrt{2}AD$ hoặc $AB = \frac{2\sqrt{2}}{3}AD$.

$$\text{Mà } AB > AC \Rightarrow \begin{cases} AB = 2\sqrt{2}AD \\ AC = \frac{2\sqrt{2}}{3}AD \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } AB \cdot AC = \frac{8}{3} AD^2 = 24 \Leftrightarrow AD^2 = 9$$

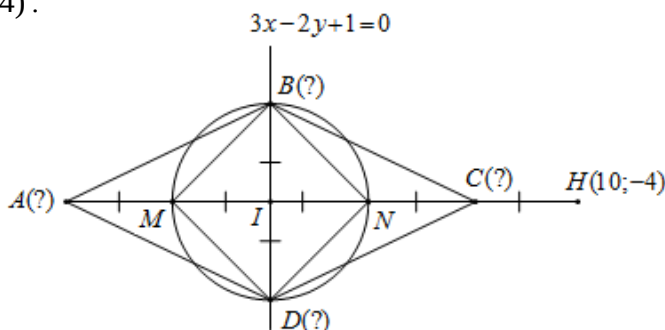
+ Gọi $A(a; -5)$, khi đó: $AD^2 = 9 \Leftrightarrow (a+2)^2 + 3^2 = 9 \Leftrightarrow a = -2 \Rightarrow A(-2; -5)$

Với $AD = 3 \Rightarrow \begin{cases} AC = 2\sqrt{2} \\ DC = \sqrt{5} \end{cases}$, khi đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x+5)^2 + (y+2)^2 = 8 \\ (x+2)^2 + (y+2)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3; y = -4 \\ x = -3; y = 0 \end{cases} \xrightarrow{y_C < 0} C(-3; -4)$$

Vậy $C(-3; -4)$.

Bài 78.



+ AC đi qua H và vuông góc với BD nên có phương trình: $2x + 3y - 8 = 0$

Khi đó tọa độ điểm I là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + 3y - 8 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow I(1; 2)$

Ta có

$$\overline{CI} = \frac{2}{3} \overline{HI} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_C = \frac{2}{3} \cdot (-9) \\ 2 - y_C = \frac{2}{3} \cdot 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 7 \\ y_C = -2 \end{cases} \Rightarrow C(7; -2) \Rightarrow A(-5; 6)$$

+ N là trung điểm của $IC \Rightarrow N(4; 0)$

Do $MBND$ là hình vuông nên $IB = ID = IN = \sqrt{13}$, suy ra B, D thuộc đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = \sqrt{13}$ có phương trình: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$

Khi đó tọa độ điểm B, D là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3; y = 5 \\ x = y = -1 \end{cases} \xrightarrow{x_B \geq x_D} \begin{cases} B(3; 5) \\ D(-1; -1) \end{cases}$$

Vậy $A(-5; 6), B(3; 5), C(7; -2), D(-1; -1)$.

Bài 79.

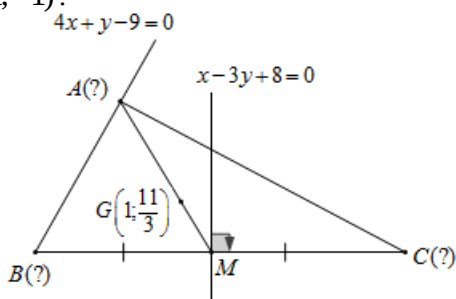
+ Gọi M là trung điểm của

$BC \Rightarrow M(3m-8; m)$: thuộc

đường trung trực của BC

Gọi $A(a; 9-4a) \in AB$, khi đó do G

là trọng tâm tam giác ABC nên ta có:



$$\overline{AG} = 2\overline{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a = 2(3m-8-1) \\ \frac{11}{3} - (9-4a) = 2\left(m - \frac{11}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ m=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1;5) \\ M(1;3) \end{cases}$$

+ BC đi qua M và vuông góc với đường $x-3y+8=0$ nên có phương trình: $3x+y-6=0$

Suy ra tọa độ điểm B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x+y-6=0 \\ 4x+y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow B(3;-3) \Rightarrow C(-1;9) \text{ (do } M \text{ là trung điểm của } BC)$$

Vậy $A(1;5), B(3;-3), C(-1;9)$.

Bài 80.

+ Đường tròn (C) có tâm $I(4;0)$

và bán kính $R = 2$

+ Gọi $M(0;m) \in Oy \Rightarrow IM^2 = m^2 + 16$

$$\Rightarrow MA^2 = MB^2 = MI^2 - R^2 = m^2 + 12$$

Suy ra A, B thuộc đường tròn tâm M bán kính MA có phương trình:

$$x^2 + (y-m)^2 = m^2 + 12$$

+ Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + (y-m)^2 = m^2 + 12 \\ (x-4)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2my - 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x - my - 12 = 0$$

Suy ra phương trình $AB: 4x - my - 12 = 0$

+ Mặt khác $E(4;1) \in AB \Rightarrow 16 - m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 4 \Rightarrow M(0;4)$

Vậy $M(0;4)$.

Bài 81.

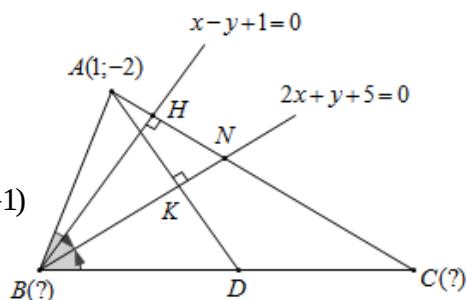
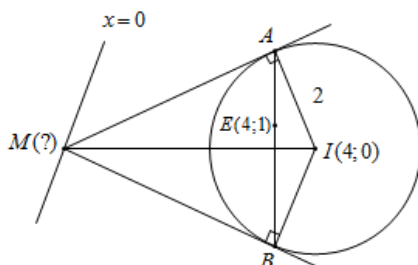
+ Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow B(-2;-1)$$

+ Gọi D là điểm đối xứng với A

qua $BN \Rightarrow D \in BC$

AD đi qua A và vuông góc với BN nên có phương trình: $x-2y-5=0$



Suy ra tọa độ giao điểm K của AD và BN là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x-2y-5=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow K(-1;-3) \Rightarrow D(-3;-4) \text{ (vì } K \text{ là trung điểm của } AD)$$

Suy ra BC đi qua B, D nên có phương trình: $3x - y + 5 = 0$

+ AC đi qua A và vuông góc với BH nên có phương trình: $x + y + 1 = 0$

Suy ra tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ 3x-y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

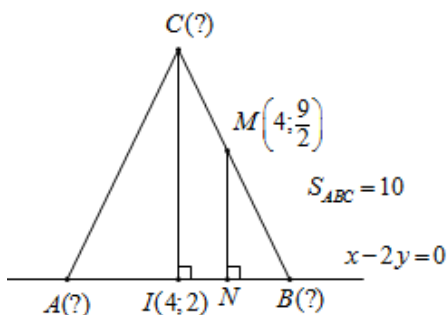
Vậy $B(-2;-1), C\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Bài 82.

+ Gọi N là hình chiếu vuông góc của

M lên $AB \Rightarrow N\left(5; \frac{5}{2}\right) \Rightarrow MN = \sqrt{5}$

+ CI đi qua I và vuông góc với AB nên có phương trình: $2x + y - 10 = 0$



Gọi $\begin{cases} C(c; 10-2c) \in CI \\ A(2a; a) \in AB \Rightarrow B(8-2a; 4-a) \end{cases}$ với $a \leq 1$ do $y_B \geq 3$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} CI = \sqrt{(c-4)^2 + (8-2c)^2} = \sqrt{5}|c-4| \\ AI = BI = \sqrt{(2a-4)^2 + (a-2)^2} = \sqrt{5}|a-2| = \sqrt{5}(2-a) \\ BN = \sqrt{\frac{5}{4}(2a-3)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}(3-2a) \end{cases}$$

$$+ \text{ Ta có } S_{ABC} = 10 \Leftrightarrow CI \cdot AI = 10 \Leftrightarrow \sqrt{5}|c-4| \cdot \sqrt{5}(2-a) = 10 \Leftrightarrow |c-4| = \frac{2}{2-a} \quad (1)$$

Mặt khác do $MN \parallel CI$ nên ta có:

$$\frac{MN}{CI} = \frac{BN}{BI} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}|c-4|} = \frac{\sqrt{5}(3-2a)}{2\sqrt{5}(2-a)} \Leftrightarrow |c-4| = \frac{2(a-2)}{2a-3} \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$\frac{2}{2-a} = \frac{2(a-2)}{2a-3} \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow |c-4| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \\ c = 2 \end{cases}$$

Vậy $A(1; 2), B(6, 3), C(6; -2)$ hoặc $A(1; 2), B(6, 3), C(2; 6)$.

Bài 83.

+ Gọi vectơ pháp tuyến của AB

là $\vec{n} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 > 0$

Khi đó phương trình AB :

$$a(x-2) + b(y-3) = 0$$

phương trình BC : $b(x-5) - ay = 0$

+ Do $ABCD$ là hình vuông nên:

$$d(T, AB) = d(T, BC) \Leftrightarrow \frac{|-a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow |a+4b| = |a-4b| \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

+ Với $a = 0$, chọn $b = 1$, khi đó AB : $y-3=0$ và BC : $x-5=0 \Rightarrow B(5; 3)$

Do T là trung điểm của BD nên $D(-3; -5)$

Suy ra phương trình AD : $x+3=0, DC$: $y+5=0 \Rightarrow A(-3; 3), C(5; -5)$

+ Với $b = 0$, chọn $a = 1$, khi đó AB : $x-2=0$ và BC : $y=0 \Rightarrow B(2; 0)$

Do T là trung điểm của BD nên $D(0; -2)$

Suy ra phương trình AD : $y=-2, DC$: $x=0 \Rightarrow A(2; -2), C(0; 0)$

Vậy $A(-3; 3), B(5; 3), C(5; -5), D(-3; -5)$ hoặc $A(2; -2), B(2; 0), C(0; 0), D(0; -2)$.

Bài 84.

+ Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y-3=0 \\ x+y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{9}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$

Không mất tính tổng quát giả sử M là trung điểm của AD với $\{M\} = d_1 \cap Ox \Rightarrow M(3; 0)$

$$\text{Ta có } AB = 2IM = 3\sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{S_{ABCD}}{AB} = \frac{12}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow MA = MD = \sqrt{2}$$

Suy ra A, D thuộc đường tròn $(M, \sqrt{2})$ có phương trình: $(x-3)^2 + y^2 = 2$

+ Vì I, M cùng thuộc d_1 nên $d_1 \perp AD \Rightarrow$ phương trình AD : $x+y-3=0$

Khi đó tọa độ điểm A, D là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ (x - 3)^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = 1 \\ x = 4; y = -1 \end{cases} \xrightarrow{y_A > 0} \begin{cases} A(2; 1) \\ D(4; -1) \end{cases}$$

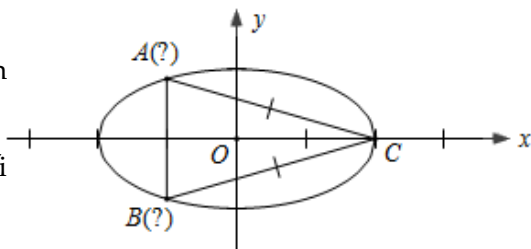
+ Do I là trung điểm của $AC, BD \Rightarrow C(7; 2), D(4; -1)$

Vậy $A(2; 1), B(5; 4), C(7; 2), D(4; -1)$.

Bài 85.

+ Theo giả thiết ta có C là đỉnh nằm trên trục lớn của elip (E) .

Do $CA = CB$, suy ra A, B đối xứng nhau qua trục hoành



$$\text{Gọi } A(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 \\ B(x_0; -y_0) \end{cases} \text{ với } x_0 \in (-2; 2)$$

$$\text{Khi đó } S_{ABC} = \frac{1}{2} d(C, AB) \cdot AB = \frac{1}{2} |2 - x_0| \cdot |2y_0| = |(2 - x_0)y_0|$$

$$\Rightarrow S_{ABC}^2 = (2 - x_0)^2 \cdot y_0^2 = (2 - x_0)^2 \cdot \left(1 - \frac{x_0^2}{4}\right) = \frac{(2 - x_0)^3 (2 + x_0)}{4} \quad (1)$$

Mặt khác áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$4 = \frac{2 - x_0}{3} + \frac{2 - x_0}{3} + \frac{2 - x_0}{3} + 2 + x_0 \geq 4 \sqrt[4]{\frac{(2 - x_0)^3 (2 + x_0)}{27}} \\ \Rightarrow (2 - x_0)^3 \cdot (2 + x_0) \leq 27 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } S_{ABC}^2 \leq \frac{27}{4} \Leftrightarrow S_{ABC} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\frac{2 - x_0}{3} = 2 + x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} A\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(-1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ A\left(-1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(-1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ hoặc } A\left(-1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Bài 86.

+ Gọi vecto pháp tuyến của AB là $\vec{n}_{AB} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$, AB đi qua $M(2; -3)$ có phương trình:
 $a(x - 2) + b(y + 3) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 2a + 3b = 0$

Ta có $\vec{n}_{BC} = (1; 7)$, khi đó:

$$\angle ABC = 45^\circ \Leftrightarrow \cos \angle ABC = \cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a + 7b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (a + 7b)^2 = 25(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 12a^2 - 7ab - 12b^2 = 0 \Leftrightarrow (3a - 4b)(4a + 3b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 4b \\ 4a = -3b \end{cases}$$

+ Với $3a = 4b$, chọn $\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$ suy ra phương trình $AB: 4x + 3y + 1 = 0$

Khi đó AC đi qua $N\left(1; \frac{5}{2}\right)$ vuông góc với AB nên AC có phương trình:

$$3x - 4y + 7 = 0$$

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x + 3y + 1 = 0 \\ 3x - 4y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 1)$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x + 3y + 1 = 0 \\ x + 7y - 31 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(-4; 5)$

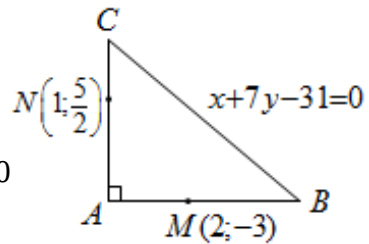
Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - 4y + 7 = 0 \\ x + 7y - 31 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow C(3; 4)$

+ Với $4a = -3b$, chọn $\begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases}$ suy ra phương trình $AB: 3x - 4y - 18 = 0$ và

$$AC: 4x + 3y - 49 = 0$$

Khi đó ta có $A(10; 3) \equiv B(10; 3)$ (loại)

Vậy $A(-1; 1), B(-4; 5), C(3; 4)$



Bài 87.

+ Đường tròn (T) có tâm $I(4;-3)$ và bán kính $R = 2$

Gọi AB, AD tiếp xúc với (T) lần lượt tại $M, N \Rightarrow AMIN$ là hình vuông cạnh bằng $R = 2$

Suy ra $AI = 2\sqrt{2}$

+ Gọi $A(t; 1-t) \in \Delta$ với $t < 3$, khi đó:

$$AI^2 = 8 \Leftrightarrow 2(t-4)^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=6 \end{cases} \xrightarrow{t < 3} t=2 \Rightarrow A(2; -1)$$

Suy ra $C(6; -5)$ (do I là trung điểm của AC)

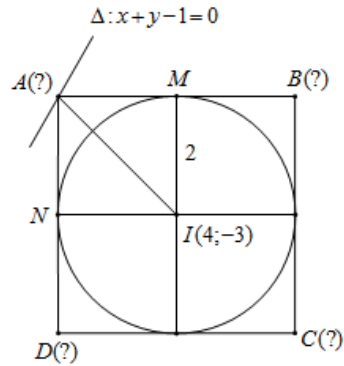
Do BD đi qua I và $BD \perp AC$ nên phương trình $BD: x - y - 7 = 0$

Vì $IB = ID = IA = 2\sqrt{2}$, nên B, D thuộc đường tròn: $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 8$

Khi đó tọa độ B, D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 7 = 0 \\ (x-4)^2 + (y+3)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2; y=-5 \\ x=6; y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(2; -5), D(6; -1) \\ B(6; -1), D(2; -5) \end{cases}$$

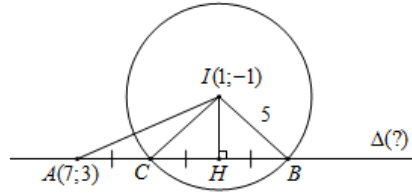
Vậy $A(2; -1), B(2; -5), C(6; -5), D(6; -1)$ hoặc $A(2; -1), B(6; -1), C(6; -5), D(2; -5)$



Bài 88.

+ Đường tròn (T) có tâm $I(1; -1)$ và bán kính $R = 5$

Ta có $AI = 2\sqrt{13} > R \Rightarrow A$ nằm ngoài đường tròn (T) .



Gọi H là hình chiếu của I lên BC , khi đó: $HB = HC = AC$

Khi đó:

$$\begin{cases} IH^2 = IB^2 - HB^2 \\ IH^2 = IA^2 - HA^2 \end{cases} \Rightarrow IB^2 - HB^2 = IA^2 - HA^2 \Leftrightarrow R^2 - AC^2 = IA^2 - 4AC^2$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = \frac{AI^2 - R^2}{3} = \frac{52 - 25}{3} = 9 \Rightarrow AC = 3 \Rightarrow HB = 3 \Rightarrow IH = 4$$

+ Gọi $\vec{n}_\Delta = (a; b)$ là vectơ pháp tuyến của Δ với $a^2 + b^2 \neq 0$

Suy ra phương trình $\Delta: ax + by - 7a - 3b = 0$

$$\text{Khi đó } d(I, \Delta) = IH \Leftrightarrow \frac{|6a + 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 4 \Leftrightarrow 5a^2 + 12ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 5a = -12b \end{cases}$$

+ Với $a = 0$, chọn $b = 1$, suy ra phương trình $\Delta: y - 3 = 0$

+ Với $5a = -12b$, chọn $a = 12, b = -5$, suy ra phương trình $\Delta: 12x - 5y - 69 = 0$

Vậy $\Delta: y - 3 = 0$ hoặc $\Delta: 12x - 5y - 69 = 0$.

Bài 89.

+ Đường tròn (C) có tâm $I(2; -3)$ và bán kính $R = 1$

Khi đó phương trình IM là $x = 2$, suy ra AB vuông góc với IM nên có phương trình $y = m$

+ Suy ra hoành độ giao điểm A, B là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 4x + m^2 + 6m - 12 = 0 \quad (*)$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi:

$$\Delta' = -m^2 - 6m + 16 > 0 \Leftrightarrow -8 < m < -2 \quad (2*)$$

Ta có $\begin{cases} A(x_1; m) \\ B(x_2; m) \end{cases}$ trong đó x_1, x_2 là nghiệm của $(*)$ và thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = m^2 + 6m - 12 \end{cases}$$

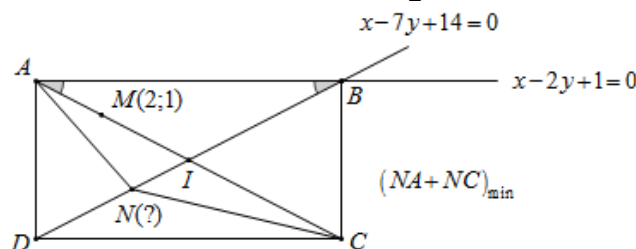
+ Gọi H là trung điểm của AB , suy ra $\begin{cases} x_H = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2 \\ y_H = m \end{cases} \Rightarrow H(2; m)$

Do tam giác ABC đều nên ta có:

$$MH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow MH^2 = \frac{3}{4} AB^2 \Leftrightarrow 2m^2 + (9 - 4\sqrt{3})m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{4\sqrt{3} - 9}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình Δ cần lập là $y = 0$ hoặc $y = \frac{4\sqrt{3} - 9}{2}$

Bài 90.



+ Ta có $\overrightarrow{n_{AB}} = (1; -2), \overrightarrow{n_{BD}} = (1; -7), \overrightarrow{n_{AC}} = (a; b)$ lần lượt là các vecto pháp tuyến của các đường thẳng AB, BD, AC .

Khi đó do $ABCD$ là hình chữ nhật nên ta có:

$$\left| \cos(\overrightarrow{n_{AC}}, \overrightarrow{n_{BD}}) \right| = \left| \cos(\overrightarrow{n_{AB}}, \overrightarrow{n_{BD}}) \right| \Leftrightarrow \frac{|a - 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 2(a - 2b)^2 = 9(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 7a^2 + 8ab + b^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 7a = -b \\ a = -b \end{cases}$$

+ Với $7a = -b$, chọn $a = 1, b = -7 \Rightarrow \overrightarrow{n_{AC}} = (1; -7)$ cùng phương với $\overrightarrow{n_{BD}}$ (loại).

+ Với $a = -b$, chọn $a = 1, b = -1 \Rightarrow \overrightarrow{n_{AC}} = (1; -1)$.

Khi đó AC đi qua $M(2; 1)$ có phương trình: $x - y - 1 = 0$

Suy ra tọa độ giao điểm I của AC và BD là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 7y + 14 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

+ Do A, C khác phía so với đường thẳng $BD \Rightarrow NA + NC \geq AC$

Dấu "=" xảy ra khi $\{N\} = AC \cap BD \Rightarrow N \equiv I$ hay $N\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Bài 91.

+ Gọi P, K lần lượt là trung điểm của DA, AC

và G là trọng tâm tam giác ABC , khi đó:

$$\frac{CE}{CP} = \frac{CG}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow EG \parallel PD \text{ hay } EG \parallel AB.$$

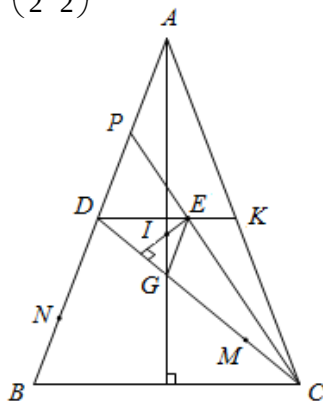
Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp

nên $DI \perp AB \Rightarrow DI \perp EG$ (1)

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} DK \parallel BC \\ AG \perp BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} DE \parallel BC \\ GI \perp BC \end{cases} \Rightarrow GI \perp DE \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra I là trực tâm của tam giác $DEG \Rightarrow EI \perp DG$

+ Khi đó CD đi qua $M(3; -1)$ và vuông góc với IE nên có phương trình $x = 3$



Gọi $D(3; d) \in CD$, suy ra

$$DN \perp DI \Leftrightarrow \overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{DI} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ d = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(3; 3) \\ D\left(3; -\frac{4}{3}\right) \end{cases}$$

+ Với $D(3; 3)$, suy ra phương trình $AB: x - 2y + 3 = 0$ và AI đi qua I và vuông góc với DE nên có phương trình $x - y - 2 = 0$

$$\text{Suy ra tọa độ điểm } A \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(7; 5)$$

Do D là trung điểm của $AB \Rightarrow B(-1; 1)$

Ta có BC đi qua B và vuông góc với AI nên có phương trình: $x + y = 0$

$$\text{Khi đó tọa độ điểm } C \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x + y = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow C(3; -3).$$

+ Với $D\left(3; -\frac{4}{3}\right)$ làm tương tự như trên ta được $A\left(\frac{107}{6}; -\frac{125}{27}\right)$ (loại)

Vậy $A(7; 5), B(-1; 1), C(3; -3)$.

Bài 92.

+ Gọi phương trình chính tắc của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$

+ Phương trình đường chuẩn là $x + 8 = 0 \Rightarrow \frac{a^2}{c} = 8 \Leftrightarrow a^2 = 8c$ (1)

$$\text{Vì } M \in (E) \Leftrightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{9}{a^2 - c^2} = 1 \quad (2)$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta được: } \frac{4}{8c} + \frac{9}{8c - c^2} = 1 \Leftrightarrow 2c^2 - 17c + 26 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ c = \frac{13}{2} \end{cases}$$

+ Với $c = 2 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = a^2 - c^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

+ Với $c = \frac{13}{2} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 52 \\ b^2 = a^2 - c^2 = \frac{39}{4} \end{cases} \Rightarrow (E): \frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{\frac{39}{4}} = 1$

Vậy phương trình (E) cần lập là: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ hoặc $\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{\frac{39}{4}} = 1$.

Do $ABCD$ là hình vuông nên :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \\ AD^2 = CD^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)(a-3) + (a-7)(a+1) = 0 \\ (a+1)^2 + (a-7)^2 = (a-3)^2 + (a+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)(2a-10) = 0 \\ -12a+50 = 10-4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 5 \\ a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow a = 5 \Rightarrow D(5;3)$$

Mặt khác $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (-2; -6) \Rightarrow B(-3; -1)$.

Vậy $A(-1;5)$, $B(-3; -1)$, $D(5;3)$

Bài 95.

+ Đường tròn (C) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$

có tâm $I(2;1)$ và bán kính $R = \sqrt{13}$

A thuộc tia Oy nên gọi $A(0; a)$ với $a \geq 0$

$A \in (C) \Leftrightarrow a^2 - 2a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 4$ hoặc $a = -2$ (loại).

+ Gọi $C(5c; -c)$ (với $c \in \mathbb{Z}$) thuộc đường thẳng $d: x + 5y = 0$

$C \in (C) \Leftrightarrow 25c^2 + c^2 - 20c + 2c - 8 = 0 \Leftrightarrow 13c^2 - 9c - 4 = 0 \Leftrightarrow c = 1$

hoặc $c = -\frac{4}{13}$ (loại). Vậy $C(5; -1)$

+ Vì $AB \perp d$ nên AB có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{AB}} = \overrightarrow{u_d} = (5; -1)$

Khi đó AB có phương trình : $5(x-0) - (y-4) = 0$ hay $5x - y + 4 = 0$

Gọi $\Leftrightarrow B(b; 5b+4) \in AB$. Ta có :

$$IB = R \Leftrightarrow IB^2 = R^2 \Leftrightarrow (b-2)^2 + (5b+3)^2 = 13 \Leftrightarrow b^2 + b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

Với $b = 0 \Rightarrow B(0; 4) \equiv A$ (loại) ; Với $b = -1 \Rightarrow B(-1; -1)$

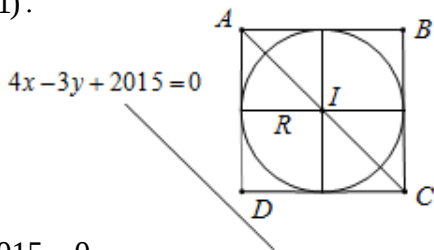
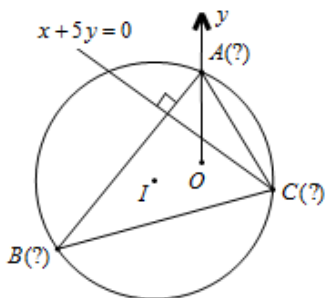
Vậy $A(0; 4)$, $B(-1; -1)$ và $C(5; -1)$.

Bài 96

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$

và bán kính $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Vì AC song song với $4x - 3y + 2015 = 0$



nên AC đi qua I có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{u_{AC}} = \overrightarrow{u_d} = (3; 4) \text{ có phương trình: } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } IA = IB = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 5$$

Gọi $A(1+3a; 1+4a) \in AC$ nên

$$IA = 5 \Leftrightarrow IA^2 = 25 \Leftrightarrow (3a)^2 + (4a)^2 = 25 \Leftrightarrow a = 1 \text{ hoặc } a = -1$$

Với $a = 1 \Rightarrow A(4; 5)$ và $a = -1 \Rightarrow A(-2; -3)$ (loại).

Vì I là trung điểm của AC nên $C(-2; -3)$

Ta có BD đi qua I và vuông góc với AC nên có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$

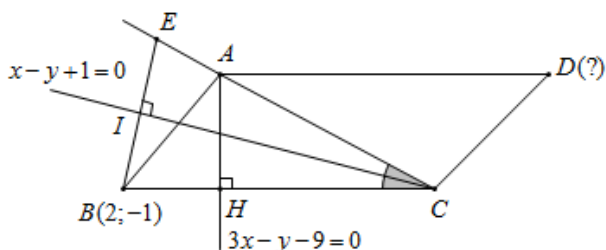
Gọi $B(1+4b; 1-3b) \in BD$ nên

$$IB = 5 \Leftrightarrow IB^2 = 25 \Leftrightarrow (4b)^2 + (3b)^2 = 25 \Leftrightarrow b = 1 \text{ hoặc } b = -1$$

Với $b = 1 \Rightarrow B(5; -2) \Rightarrow D(-3; 4)$ (Vì I là trung điểm của BD) và $b = -1 \Rightarrow B(-3; 4)$ (loại)

Vậy $A(4; 5)$, $B(5; -2)$, $C(-2; -3)$ và $D(-3; 4)$.

Bài 97.



Ta có BC đi qua $B(2; -1)$ nhận $\overrightarrow{u_{AH}} = (1; 3)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $x - 2 + 3(y + 1) = 0$ hay $x + 3y + 1 = 0$

Khi đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-1; 0)$$

Gọi $E(x; y)$ là điểm đối xứng của B qua phân giác $d: x - y + 1 = 0$ của góc $\angle ACB$. Suy ra $E \in AC$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BE} = (x-2; y+1) \\ \overrightarrow{u_d} = (1; 1) \end{cases}$ và $I\left(\frac{x+2}{2}; \frac{y-1}{2}\right)$ là trung điểm của EB .

Khi đó:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{u_d} \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y+1) = 0 \\ \frac{x+2}{2} - \frac{y-1}{2} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow E(-2; 3)$$

Khi đó đường thẳng EC đi qua $C(-1; 0)$ và có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{EC} = (1; -3) \text{ nên có phương trình: } \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} \Leftrightarrow 3x + y + 3 = 0$$

Vì $EC \cap AH = \{A\}$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x + y + 3 = 0 \\ 3x - y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -6 \end{cases} \Rightarrow A(1; -6)$$

Gọi $D(a; b)$, khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (a-1; b+6) \\ \overrightarrow{BC} = (-3; 1) \end{cases}$

$$ABCD \text{ là hình bình hành nên suy ra } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1 = -3 \\ b+6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -5 \end{cases}$$

Vậy $D(-2; -5)$

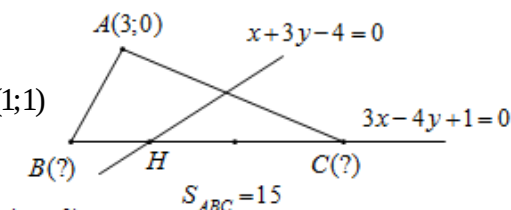
Bài 98.

Ta có $\Delta \cap BC = \{H\}$ nên tọa độ

điểm H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ x + 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow H(1; 1)$$

Ta có: $d(A, BC) = \frac{|9+1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2$ ($x_B > 0$)



$$\text{Khi đó } S_{ABC} = 15 \Leftrightarrow \frac{1}{2} d(A, BC) \cdot BC = 15 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot BC = 15 \Leftrightarrow BC = 15$$

Mặt khác H thuộc đoạn BC và $HC = 2HB$ nên $BH = \frac{BC}{3} = 5$

Gọi $B\left(b; \frac{3b+1}{4}\right) \in BC$ (với $b > 0$).

$$\text{Khi đó } BH = 5 \Leftrightarrow BH^2 = 25 \Leftrightarrow (b-1)^2 + \left(\frac{3b+1}{4} - 1\right)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (b-1)^2 + \frac{9}{16}(b-1)^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{25}{16}(b-1)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (b-1)^2 = 16 \Leftrightarrow b = 5 \text{ hoặc } b = -3 \text{ (loại) , suy ra } B(5; 4)$$

$$\text{Gọi } C(x; y) \text{ khi đó } \begin{cases} \overline{HC} = (x-1; y-1) \\ \overline{BH} = (-4; -3) \end{cases},$$

$$\text{khi đó: } \overline{HC} = 2\overline{BH} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -8 \\ y-1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow C(-7; -5)$$

Vậy $B(5; 4)$ và $C(-7; -5)$

Bài 99.

Từ phương trình Elip (E):

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3 \Rightarrow \begin{cases} F_1(-3; 0) \\ F_2(3; 0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} M \in (E) &\Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a = 10 \\ &\text{Mặt khác } MF_1 = 4MF_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5MF_2 = 10 \Leftrightarrow MF_2 = 2 = MF_2^2 = 4$$

Gọi $M(x_0; y_0)$, khi đó

$$\begin{cases} M \in (E) \\ MF_2^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1 \\ (x_0 - 3)^2 + y_0^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1 & (1) \\ y_0^2 = -x_0^2 + 6x_0 - 5 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta được: } \frac{x_0^2}{25} - \frac{x_0^2 - 6x_0 + 5}{16} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3x_0^2 - 50x_0 + 175 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \Rightarrow y_0 = 0 \\ x_0 = \frac{35}{3} \Rightarrow y_0^2 = -\frac{640}{9} < 0 \end{cases}.$$

Vậy $M(5; 0)$

Bài 100.

Đường thẳng $d: x + y - 3 = 0$ vuông góc với BD nên $AC \parallel d$ và đi qua $A(-2; 2)$

có phương trình: $x + 2 + y - 2 = 0$ hay $x + y = 0$

Vì $ABCD$ là hình thoi có $\angle BAD = 60^\circ$

$$\text{nên } S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Mặt khác: } S_{ABCD} = 12\sqrt{3} \Rightarrow \frac{AB^2 \sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{6}$$

$$\text{Suy ra } AI = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ (với } I \text{ là tâm của } ABCD)$$

Gọi $I(t; -t) \in AI$ (với $t > 0$)

Có $AI = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2 = 18 \Leftrightarrow (t+2) + (t+2)^2 = 18 \Leftrightarrow (t+2)^2 = 9 \Leftrightarrow t = 1$
hoặc $t = -5$ (loại)

Vậy $I(1; -1)$, suy ra $C(4; -4)$ (Vì I là trung điểm của AC)

Khi đó BD đi qua $I(1; -1)$ vuông góc với AC có dạng: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \end{cases}$.

Gọi $B(1+b; -1+b) \in BD$

Khi đó

$$AB = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow AB^2 = 24 \Leftrightarrow (b+3)^2 + (b-3)^2 = 24 \Leftrightarrow b^2 = 3 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} B(1+\sqrt{3}; -1+\sqrt{3}) \Rightarrow D(1-\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}) \\ B(1-\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}) \Rightarrow D(1+\sqrt{3}; -1+\sqrt{3}) \end{cases} \text{ (Vì } I \text{ là trung điểm của } BD)$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} B(1+\sqrt{3}; -1+\sqrt{3}) \\ C(4; -4) \\ D(1-\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} B(1-\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}) \\ C(4; -4) \\ D(1+\sqrt{3}; -1+\sqrt{3}) \end{cases}$$

