

BÀI TOÁN TÍNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

Tạp chí và tư liệu toán học

Bài toán tính góc giữa hai mặt phẳng là những bài toán tương đối khó và nằm ở mức vận dụng và vận dụng cao, bên cạnh những phương pháp truyền thống như dựng hình tạo góc thì trong chủ đề của tuần này ta sẽ cùng tìm hiểu tới 3 phương pháp giải quyết các bài toán trắc nghiệm có thể nói gần như mọi bài toán tính góc giữa 2 mặt phẳng mà ta hay gặp. Bản pdf được đăng trên blog *Chinh phục Olympic toán* các bạn chú ý đón đọc nhé!

I. CÁC PHƯƠNG PHÁP XỬ LÝ.

1. SỬ DỤNG CÔNG THỨC HÌNH CHIẾU.

Đây là một tính chất khá là cơ bản trong chương trình hình học 11 mà ta cần nắm rõ, công thức của nó rất đơn giản như sau.

Nội dung. Cho hình S thuộc mặt phẳng (P) , hình S' là hình chiếu của S lên mặt phẳng (Q) , khi đó ta có cosin góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) được tính theo công thức $\cos \alpha = \frac{S'}{S}$.

Sau đây là ví dụ minh họa cho công thức này.

Bài toán

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a; AD = 2a; AA' = 4a$. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', DD', BB' sao cho $MA = MA', ND = 3ND', PB' = 3PB$, mặt phẳng (MNP) cắt cạnh CC' tại Q . Tính cosin góc giữa $(MNQP); (ABCD)$

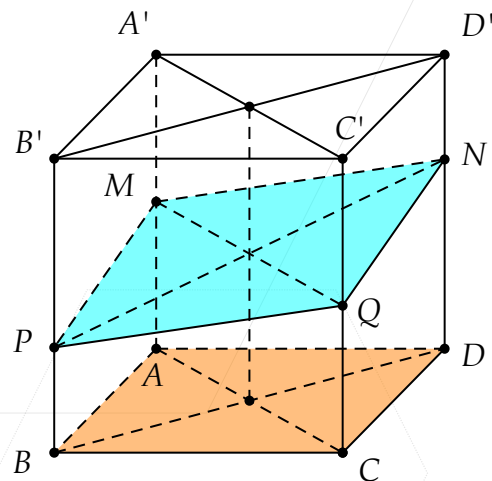
Hướng dẫn

Đầu tiên ta cần phải chú ý tới cách dựng được điểm Q . Kẻ đường nối tâm 2 đáy (Δ) , ta thấy PN thuộc mặt phẳng $(B'D'DB)$ nên (Δ) sẽ cắt PN , đồng thời P, M, N cùng thuộc mặt phẳng nên nối M vs giao điểm vừa tìm được ta sẽ ra được điểm Q . Vấn đề ở đây là ta cần tính được tỷ số $\frac{C'Q}{CQ}$, ta sẽ sử dụng tới tính chất sau.

Đặt $x = \frac{A'M}{AA'}, y = \frac{B'P}{B'B}, z = \frac{C'Q}{C'C}, t = \frac{D'N}{D'D}$, khi đó

ta có 2 công thức cần nhớ sau:

- $\frac{V_{A'B'C'D'.MPQN}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}} = \frac{x+y+z+t}{4}$
- $x+z = y+t$





Áp dụng vào bài toán ta suy ra $\frac{C'Q}{CC'} = \frac{1}{2}$. Để ý ta thấy rằng $MN \parallel PQ, MP \parallel QN$ nên $MNQP$ là hình bình hành. Dễ dàng tính được các đoạn thẳng

$$\begin{aligned} \bullet \quad MN = PQ &= \sqrt{\left(4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\right)^2 + 2^2} = \frac{2\sqrt{10}}{3} \\ \bullet \quad MP = QN &= \sqrt{\left(4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{13}}{3} \end{aligned}$$

Mặt khác do MQ là đường trung bình của $A'C'CA \Rightarrow MQ = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Từ đây dùng công thức *Herong* dễ dàng tính được $S_{MNQP} = \frac{\sqrt{599}}{48}$

Mặt khác hình chữ nhật $ABCD$ chính là hình chiếu của hình bình hành $MNQP$ lên mặt phẳng

$(ABCD)$ nên áp dụng công thức cần ta có $\cos((MNQP);(ABCD)) = \frac{S_{ABCD}}{S_{MNQP}} = \frac{\sqrt{599}}{96}$

2. SỬ DỤNG CÔNG THỨC GÓC NHỊ DIỆN.

Đây là một công cụ rất mạnh để giải quyết các bài toán tính góc giữa 2 mặt phẳng, hầu hết các bài toán đơn giản hay đến phức tạp đều có thể giải bằng phương pháp này, sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu nó. Trong phần này mình sẽ chỉ hướng dẫn các bước làm cho các bạn!

Các bước thực hiện.

Bước 1: Đưa góc giữa hai mặt phẳng về góc giữa hai mặt phẳng kề nhau của một tứ diện. Chú ý điều này luôn thực hiện được.

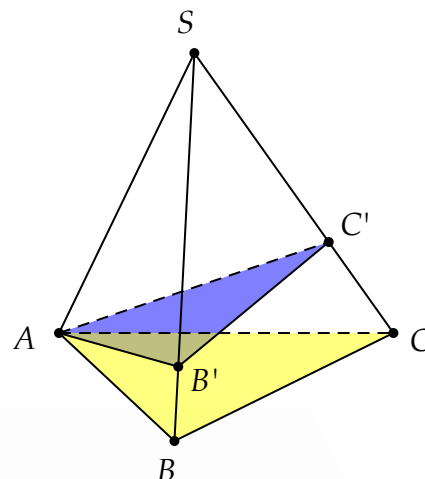
Bước 2: Sử dụng công thức: $V = \frac{2S_1S_2 \sin \alpha}{3a}$. Trong đó S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai tam giác kề nhau của tứ diện, a là độ dài giao tuyến, còn α là góc giữa hai mặt phẳng cần tìm.

Bài toán

Cho tứ diện $S.ABC$, $SA = a; SB = 2a; SC = 3a; \angle ASB = 60^\circ; \angle BSC = 90^\circ; \angle CSA = 120^\circ$. Tính $\cos((SAB);(SBC))$.

Hướng dẫn

Yêu cầu của đề bài là tính góc giữa hai mặt phẳng thì theo như bước 1 ta phải đưa về một tứ diện với bài này thì khỏi nghi bởi nó đã thuộc 1 tứ diện sẵn rồi ☺. Giờ ta phải tính thể tích của khối tứ diện đó. Đầu tiên thì phải chú ý đến giả thiết, với những bài mà cho độ dài các cạnh bên với lại góc ý thì ta phải dựng một chóp tam giác đều khác bằng cách lấy trên SB, SC các điểm B', C' sao cho $SB' = a, SC' = a$ thì ta được $S.AB'C'$ là chóp tam giác đều và ta sẽ tính được thể tích của nó, xong sau đó tìm dùng công thức tỷ số thể tích sẽ tính được $V_{S.ABC}$.



Đó là cách làm truyền thống, còn đối với thi trắc nghiệm thì có thể nhớ công thức tính thể tích như sau:

Tứ diện $S.ABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c, \angle ASB = \alpha, \angle BSC = \beta, \angle CSA = \gamma$ thì thể tích của nó là:

$$V = \frac{1}{6}abc\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - (\cos\alpha)^2 - (\cos\beta)^2 - (\cos\gamma)^2}$$

Áp dụng vào bài ta tính được thể tích là $V_{S.ABC} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Đồng thời có giả thiết góc thì suy ra tất cả các cạnh của nó ta sẽ tính được diện tích của hai tam giác là: $S_{SAB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}; S_{SBC} = 3a^2; SB = 2$.

Tương vào công thức ta có $\sin((SAB);(SBC)) = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos((SAB);(SBC)) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Xong bài nhé! ☺ đơn giản không nào.

Bài toán

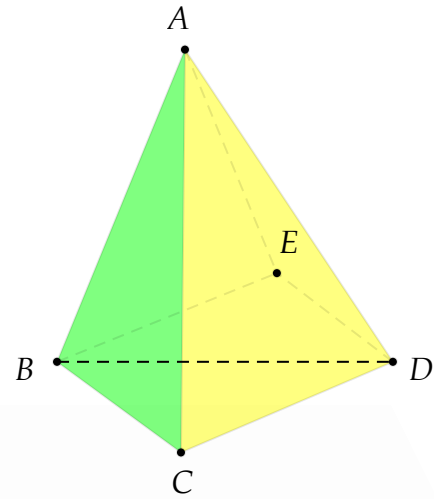
Cho tứ diện $ABCD$, $BC = 3, CD = 4, \angle ABC = \angle BCD = \angle ADC = 90^\circ, (AD, BC) = 60^\circ$. Tính $\cos((ABC);(ACD))$.

Hướng dẫn

Một bài toán tương đối khó phải không nào?



Ở bài toán này ta các bạn có nhớ đến định lý ba đường vuông góc không??? Theo giả thiết thì có phải là tam giác BCD vuông tại C đúng không? Tiếp theo hai góc ABC, ADC cũng vuông điều này chứng tỏ là hình chiếu AB lên (BDC) sẽ vuông góc BC, hình chiếu AD lên (BDC) cũng vuông với CD, nhỉ? Đến đây thì cần tìm điểm E sao cho E là hình chiếu của A lên (BDC) có phải là từ B kẻ vuông góc với BC, D kẻ vuông góc với CD thì ta sẽ được điểm E cần tìm ko? Oh không những thế AE còn vuông góc với cả mặt phẳng BCD nữa.



Đến đây quy về bài toán quá bình thường, chuyển góc giữa hai mặt phẳng cần tính về một tứ diện nhé các bạn ☺ Phần còn lại nhường nhé!

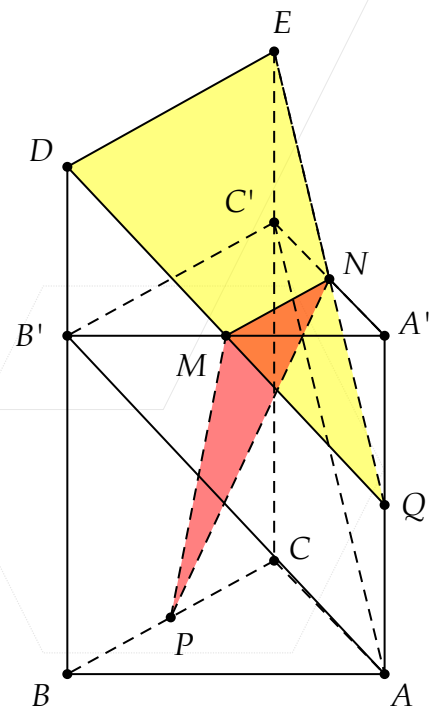
Bài toán

Cho lăng trụ tam giác đều. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, $A'C'$, BC. $AB = 2\sqrt{3}$; $AA' = 2$. Tính cosin góc $((AB'C'); (MNP))$.

Hướng dẫn

Câu này đề có vẻ rất ngắn gọn, và là câu 47 trong đề minh họa 2018 vào tháng 1 của bộ tức là câu điểm 9,4 nhé :V Nói chung không hề đơn giản tẹo nào cả. Tuy nhiên ta vẫn bám sát vào phương pháp để làm!

Đầu tiên phải đưa về một tứ diện nhỉ? Điều đó làm ta phải tìm một mặt phẳng song song với mặt phẳng ABC' thôi, bằng cách lấy trung điểm AA' ta sẽ chuyển về tính góc giữa $((MNQ); (MNP))$. Công việc giờ thì mình sẽ hướng dẫn cho các bạn nhé, mấu chốt là tính được thể tích của khối MNPQ đúng không, vậy thì nhìn hình vẽ nhé, mình sẽ đưa về tính thể tích của khối Q.PDE, khối này đối với các bạn tính đơn giản thôi bởi khoảng cách từ Q tới mp DECB bằng bởi khoảng cách từ A' tới mp DECB, từ A' kẻ vuông góc với $B'C'$ là okie! Tóm lại là thể tích đó tính được, xong sau đó sài công thức tỷ số thể tích ta sẽ tính được V của MNPQ còn lại chỉ là việc tính cạnh thôi, phần các bạn nhé, chỉ là kỹ năng tính toán thôi nha ☺. Nếu như có năng khiếu hình học thì



câu này tương đối dễ làm, có thể tham khảo cách của làm trên mạng nha bài này giải rất nhiều rồi!

3. SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ HÓA.

Nói chung đây cũng là một phương pháp rất mạnh, tuy nhiên nhược điểm của nó là phải nhớ công thức tính hơi công kênh và chỉ áp dụng cho những trường hợp ta dựng được hoặc trong bài toán có yếu tố 3 đường vuông góc!

Đầu tiên ta cần nhớ tới công thức cần thiết của chương hình học Oxyz sau

Gọi φ là góc giữa 2 mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0, (Q): a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q) \right| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \quad (0 \leq \varphi \leq 90^\circ)$$

Cách thực hiện

- **Bước 1:** Xác định 3 đường vuông góc chung
- **Bước 2:** Gắn hệ trục tọa độ Oxyz, coi giao điểm của 3 đường vuông góc chung là gốc tọa độ
- **Bước 3:** Từ giả thiết tìm tọa độ của các điểm có liên quan tới giả thiết.
- **Bước 4:** Áp dụng công thức cần tính để suy ra kết quả.

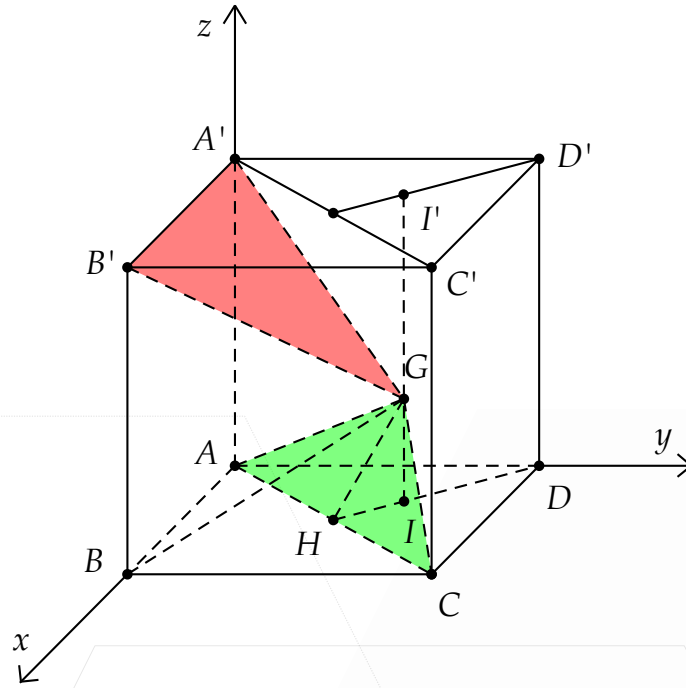
Kinh nghiệm

Theo kinh nghiệm của mình thì những bài toán có giả thiết liên quan tới hình hộp chữ nhật, hình lập phương thì ta nên sử dụng phương pháp tọa độ hóa, ngoài ra các bài có yếu tố một cạnh của chóp vuông góc với đáy hay liên quan tới lăng trụ đứng ta cũng có thể sử dụng phương pháp này nhưng tùy vào từng bài mà ta có hướng đi khác nhau, có thể là sử dụng phương pháp 2 hoặc sử dụng phương pháp 1, tùy vào kỹ năng của người làm bài. Sau đây ta cùng tìm hiểu ví dụ minh họa.

Bài toán

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Gọi I, I' lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD và tam giác $A'C'D'$, H là tâm hình vuông $ABCD$. Trên cạnh II' lấy điểm G sao cho $I'G = 2IG$. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng $(GAC), (GA'B')$

Hướng dẫn



Đây là một bài toán khó, và tất nhiên phương pháp 1 hay phương pháp 2 rất là khó để có thể sử dụng được, khi đó ta nghĩ tới phương pháp 3 – gắn trục tọa độ. Với bài toán này tìm 3 đường vuông góc chung không khó, ta sẽ coi 3 trục tọa độ như hình vẽ và gốc tọa độ trùng điểm A. Khi đó ta có tọa độ các điểm như sau:

$$A'(0;0;1), B'(1;0;1); G\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), C(1;1;0)$$

Vậy khi đó ta tính được vecto pháp tuyến của 2 mặt phẳng

$$\vec{n}_{(GAC)} = [\vec{GA}; \vec{GC}] = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; 0\right) = (-1; 1; 0)$$

$$\vec{n}_{(GA'B')} = [\vec{GA'}; \vec{GB'}] = \left(0; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) = (0; 2; 1)$$

Đến đây áp dụng công thức ta có cosin góc giữa 2 mặt phẳng $(GAC), (GA'B')$ là

$$\cos \varphi = \frac{|-1.0 + 1.2 + 0.1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Đến đây bài toán đã được giải quyết hoàn toàn

Chú ý. Phương pháp gắn tọa độ đã được rất nhiều tác giả và cũng rất nhiều bài viết trên mạng nói đầy đủ và chi tiết về phương pháp này, ở cuối bài viết mình sẽ có link để các bạn tham khảo.

Tóm lại. Qua 3 phương pháp mình đề cập tới ở trên chắc hẳn đã phần nào giúp các bạn không còn sợ dạng toán này, không có phương pháp nào là ưu việt tuyệt đối cả cần phải vận dụng linh hoạt các phương pháp với nhau, đồng thời phải nắm vững được nhiều mảng kiến thức thì mới có thể làm tốt được. Sau đây là các bài tập cho các bạn rèn luyện.

II. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BC = a$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy góc φ và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Biết rằng

$$AA'.S_{ABC} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}. \text{ Giá trị của } P = \sin 2\varphi \text{ bằng bao nhiêu?}$$

Bài 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A , $AB = AC = 2a$, $BC = 2a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính cosin góc giữa $(SAB);(SAC)$

Bài 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AC' = a\sqrt{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng qua AC' cắt BB', DD' lần lượt tại M, N sao cho tam giác AMN cân tại A có $MN = a$. Tính $\cos((P);(ABCD))$.

Bài 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , có $AB = a$, $SA \perp SB$, $SA = SA; ACB = 30^\circ$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là $\frac{3a}{4}$. Tính $\cos((SAC);(SBC))$.

Bài 5: Cho hình chóp $S.ABC$, SA vuông góc với đáy, ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh C . Giả sử $SC = a$, tìm góc giữa hai mặt phẳng $(SBC);(ABC)$ để thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất ấy.

Bài 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có $BAD = 120^\circ$, hình chiếu vuông góc của điểm H trên mặt phẳng đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC , biết đường cao của khối chóp là $SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ và tam giác SBD vuông tại S . Tính góc giữa 2 mặt phẳng $(SAD), (SCD)$.

Bài 7: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a; BC = AD = 2a; BD = AC = 3a$. Trên AB, AC, AD lấy các điểm M, N, P sao cho $MA = MB; NA = 2NC; PA = 3PD$. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng $(MNP);(AMP)$.

Bài 8: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $AA' = 2a$. Trên AA', BB', CC' lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $MA = MA'; NB = 2NB'; PC = 3PC'$. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng $(ANP);(MNP)$.

Bài 9: Cho chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình thang vuông tại A, D sao cho $AD = 2AB = 2BC = 2a$, $SA = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SC . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng $(MND);(CSD)$.

Bài 10: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a; AD = 2a$, $AA' = 4a$. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', DD', BB' sao cho $MA = MA'; ND = 3ND'; PB' = 3PB$, mặt phẳng (MNP) cắt cạnh CC' tại Q . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng $(MNQP);(AQP)$



Bài 11: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là một tam giác cân với điều kiện $AB = AC = a, \angle BAC = 120^\circ$, cạnh bên $BB' = a$. Gọi I là trung điểm CC' . Chứng minh rằng tam giác $AB'I$ vuông ở A . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(ABC), (AB'I)$

Bài 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính tan góc giữa $(SAD), (SBC)$

Bài 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm AB, AC . Tính cosin góc giữa $(SEF), (SBC)$

Bài 14: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác vuông tại A . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , M là trung điểm của $A'B'$, I là trung điểm của GM . Tính cosin góc giữa 2 mặt phẳng $(IB'C'), (ICA)$

Bài 15: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$. Tính cosin góc giữa 2 mặt phẳng $(MC'D'), (MAB)$