

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (C).

Câu 2 (1,0 điểm). Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành, biết hoành độ tiếp điểm $x_0 < 0$?

Câu 3 (1,0 điểm).

1/. Cho số phức z thỏa $(1+2i)z^2 = -5+10i$. Tìm môđun của số phức z ?

2/. Giải phương trình sau trên tập số thực: $3^x + 3^{1-x} = 4$?

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^1 \left(\frac{3}{x+1} + e^{-2x} \right) x dx$

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 2 điểm $M(2;1;0), N(1;2;-3)$, và mặt phẳng (P): $2x - y + z + 3 = 0$

1/. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua M,N và song song với mp(P) ?

2/. Tìm tọa độ M' đối xứng với M qua mặt phẳng (P) ?

Câu 6 (1,0 điểm).

1/. Giải phương trình: $\sin 7x + \cos 3x = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5x}{2}\right) - 2\cos^2\frac{9x}{2}$?

2/. Trong công tác chuẩn bị lực lượng cứu hộ cứu nạn để thực hiện nhiệm vụ cấp cứu kịp thời 2 chiếc máy bay **Su – 30 MK2** và **CASA – 212** của Việt Nam rơi trên biển. Bộ Quốc phòng chọn ngẫu nhiên 4 tàu trong số 5 tàu kiểm ngư; 7 tàu cảnh sát biển và 9 tàu đánh cá của ngư dân trên biển để tăng cường công tác tìm kiếm. Tính xác suất sao cho trong 4 tàu được chọn có cả tàu kiểm ngư; tàu cảnh sát biển và tàu của ngư dân ?

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABCD) là giao điểm của AC và BD, Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD,SC. Cho $SA = a\sqrt{2}$; $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SBM) ?

Câu 8 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} (8x-3)\sqrt{2x-1} - y - 4y^3 = 0 \\ 4x^2 - 8x + 2y^3 + y^2 - 2y + 3 = 0 \end{cases} ?$$

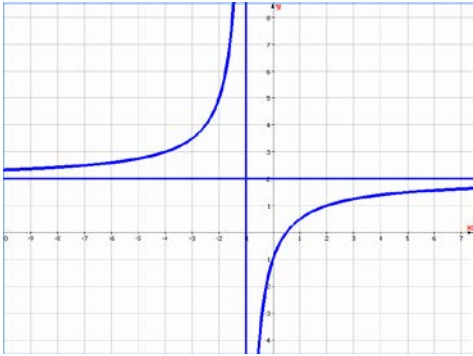
Câu 9 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có tâm I(2;4); trực tâm tam giác ABC là H(1;3), đường thẳng AH cắt BC tại điểm A'(2;2) và cắt đường tròn (C) tại điểm K khác A. Tính diện tích tứ giác ABKC ?

Câu 10 (1,0 điểm). Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a > -1; b > -1; c > -\frac{1}{2}$; và $a + b + c = 0$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{2c+1}$?

____ **Hết** ____

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung
1	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (C). 
2	Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành, biết hoành độ tiếp điểm $x_0 < 0$? ✱ PTHĐGD: $x_0^4 - 4x_0^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \text{ (loại)} \\ x_0 = 0 \text{ (loại)} \\ x_0 = -2 \text{ (nhận)} \end{cases}$ ✱ $y' = 4x^3 - 8x \Rightarrow k = y'(-2) = -16$ ✱ Tiếp tuyến tại $M(-2;0)$ có phương trình $y = -16(x+2) = -16x - 32$
3	1/. Cho số phức z thỏa $(1+2i)z^2 = -5+10i$. Tìm môđun của số phức z ? Gọi $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Khi đó $(1+2i)z^2 = -5+10i \Leftrightarrow (1+2i)(a^2 - b^2 + 2abi) = -5+10i$ $\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi + 2a^2i - 2b^2i - 4ab = -5+10i$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 - 4ab = -5 \\ a^2 - b^2 + ab = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 2 \\ a^2 - b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2; b = 1 \\ a = -2; b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2+i \\ z = -2-i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \sqrt{5} \\ z = \sqrt{5} \end{cases}$ 2/. Giải phương trình sau trên tập số thực: $3^x + 3^{1-x} = 4 \Leftrightarrow 3^x + \frac{3}{3^x} = 4 \Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \\ 3^x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ Vậy $S = \{0;1\}$
4	$I = \int_0^1 \left(\frac{3}{x+1} + e^{-2x} \right) dx = \int_0^1 \frac{3x}{x+1} dx + \int_0^1 xe^{-2x} dx = A + B$ ✱ Tính $A = \int_0^1 \frac{3x}{x+1} dx = 3 \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = 3 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = 3(x - \ln x+1) \Big _0^1 = 3 - 3\ln 2$ ✱ Tính $B = \int_0^1 xe^{-2x} dx$ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$ $\Rightarrow B = -\frac{1}{2}xe^{-2x} \Big _0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4}e^{-2x} \Big _0^1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$ ✱ Vậy $I = A + B = 3 - 3\ln 2 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2} = \frac{13}{4} - 3\ln 2 - \frac{3}{4e^2}$

5	Cho 2 điểm $M(2;1;0), N(1;2;-3)$, và mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 3 = 0$ 1/. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua M,N và song song với mp(P) ? VTCP $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = (-1; 1; -3) \\ \vec{n}_{(P)} = (2; -1; 1) \end{cases} \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n} = [\overrightarrow{MN}, \vec{n}_{(P)}] = (-2; -5; -1)$ $\Rightarrow (Q): -2x - 5y - z + 9 = 0$ 2/. Tìm tọa độ M' đối xứng với M qua mặt phẳng (P) ? Gọi đường thẳng d qua M và vuông góc với mp(P) nên có phương trình $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$ Gọi H là hình chiếu của M lên mp(P) nên tọa độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \\ 2x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(0;2;-1)$ Do M' đối xứng với M qua mp(P) nên $H(0;2;-1)$ là trung điểm MM' $\Rightarrow M'(-2;3;-2)$
6	1/. Giải phương trình: $\sin 7x + \cos 3x = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5x}{2}\right) - 2\cos^2\frac{9x}{2}$? $\Leftrightarrow \sin 7x + \cos 3x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) - (1 + \cos 9x) \Leftrightarrow \sin 7x + \cos 3x = \sin 5x - \cos 9x$ $\Leftrightarrow \cos 9x + \cos 3x = \sin 5x - \sin 7x \Leftrightarrow 2\cos 6x \cos 3x = 2\cos 6x \sin(-x)$ $\Leftrightarrow 2\cos 6x \cos 3x + 2\cos 6x \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 6x(\cos 3x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 6x = 0 \\ \cos 3x + \sin x = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos 3x = -\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6} \\ 3x = \frac{\pi}{2} + x + k2\pi \\ 3x = -\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$ 2/. Trong công tác chuẩn bị lực lượng cứu hộ cứu nạn để thực hiện nhiệm vụ cấp cứu kịp thời 2 chiếc máy bay Su - 30 MK2 và CASA - 212 của Việt Nam rơi trên biển. Bộ Quốc phòng chọn ngẫu nhiên 4 tàu trong số 5 tàu kiểm ngư; 7 tàu cảnh sát biển và 9 tàu đánh cá của ngư dân trên biển để tăng cường công tác tìm kiếm. Tính xác suất sao cho trong 4 tàu được chọn có cả tàu kiểm ngư; tàu cảnh sát biển và tàu của ngư dân ? ✖ Gọi A là biến cố: “Chọn ngẫu nhiên 4 tàu có cả tàu kiểm ngư; tàu cảnh sát biển và tàu của ngư dân” nên có $n(A) = C_5^1 C_7^1 C_9^2 + C_5^1 C_7^2 C_9^1 + C_5^2 C_7^1 C_9^1 = 1260 + 945 + 630 = 2835$ ✖ Chọn ngẫu nhiên 4 tàu từ 21 tàu có $n(\Omega) = C_{21}^4 = 5985$ ✖ Xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2835}{5985} = \frac{9}{19}$
7	Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABCD) là giao điểm của AC và BD, Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD,SC. Cho $SA = a\sqrt{2}$; $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SBM) ? 1/. Tính thể tích khối chóp S.ABCD ?

Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$

$$\Rightarrow OA = a \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = a$$

$$\text{Mà } S_{ABCD} = AB \cdot AD = a^2 \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a a^2 \sqrt{3} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$$

2/. Tính khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SBM) ?

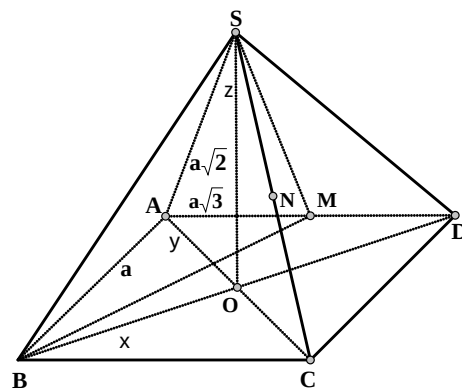
Dựng hệ trục tọa độ Oxyz với $O(0;0;0)$, $S(0;0;a)$,

$$B(a;0;0), A(0;a;0), D(-a;0;0), C(0;-a;0)$$

$$M\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right), \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{SB} = (a; 0; -a) = a(1; 0; -1) = a\vec{u}_1 \\ \overrightarrow{MB} = \left(\frac{3a}{2}; -\frac{a}{2}; 0\right) = \frac{a}{2}(3; -1; 0) = \frac{a}{2}\vec{u}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1; -3; -1) \Rightarrow d(N, (SBM)) = \frac{|1 \cdot 0 + 3 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + 1 \cdot \frac{a}{2} - a|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{2a}{\sqrt{11}} = \frac{2a\sqrt{11}}{11}$$

$$\Rightarrow (SBM): x + 3y + z - a = 0$$



8

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (8x-3)\sqrt{2x-1} - y - 4y^3 = 0 & (1) \\ 4x^2 - 8x + 2y^3 + y^2 - 2y + 3 = 0 & (2) \end{cases} \quad ? \quad \text{ĐK: } x \geq \frac{1}{2}$$

Đặt $t = \sqrt{2x-1} \Rightarrow 2x = t^2 + 1$ thay vào (1) ta được $[4(t^2 + 1) - 3]t - y - 4y^3 = 0$

$$\Leftrightarrow 4t^3 + t = 4y^3 + y \Leftrightarrow 4(\sqrt{2x-1})^3 + \sqrt{2x-1} = 4y^3 + y \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = 4t^3 + t$ có tập xác định và liên tục trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$,

có: $f'(t) = 12t^2 + 1 > 0, \forall t > \frac{1}{2} \Rightarrow$ hàm số $f(t) = 4t^3 + t$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Nên (3) $\Leftrightarrow y = \sqrt{2x-1}, y \geq 0 \Leftrightarrow 2x = y^2 + 1$ thay vào (2) ta được

$$(2) \Leftrightarrow (y^2 + 1)^2 - 4(y^2 + 1) + 2y^3 + y^2 - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y^4 + 2y^3 - y^2 - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow (y^3 + 2y^2 - y - 2)y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y^3 + 2y^2 - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \text{ (loại)} \\ y = -1 \text{ (loại)} \\ y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Vậy $(1;1), \left(\frac{1}{2}; 0\right)$ là nghiệm của hệ.

9

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có tâm I(2;4); trực tâm tam giác ABC là H(1;3), đường thẳng AH cắt BC tại điểm A'(2;2) và cắt đường tròn (C) tại điểm K khác A. Tính diện tích tứ giác ABKC ?

Ta có $\widehat{KBC} = \widehat{KAC}$ (góc nội tiếp chắn cung KC)

Mà $\widehat{HBC} = \widehat{KAC}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) nên $\widehat{HBC} = \widehat{KBC}$

Xét tam giác HBK có A'B vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên cân tại B.

$$\Rightarrow A' \text{ là trung điểm HK} \Rightarrow K(3;1)$$

Đường thẳng AA' qua $K(3;1)$ có VTCP là $\overrightarrow{HK} = (2; -2)$

$\Rightarrow$ VTPT là $\vec{n} = (1;1) \Rightarrow AA' : x + y - 4 = 0$.

Gọi $A(a; 4 - a) \in AA'$.

Khi đó $IA = IK \Leftrightarrow (a - 2)^2 + (-a)^2 = 1^2 + (-3)^2$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 4a - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-1; 5) \\ A(3; 1) \equiv K : loai \end{cases}$$

Đường thẳng BC qua $A'(2;2)$ và vuông góc với AK nên $BC: x - y = 0$.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;4)$ và qua $K(3;1)$

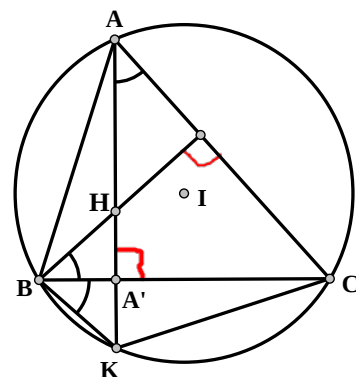
nên có phương trình $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$

Gọi $B(b; b) \in BC$.

Mà $IB = IC = IK$ nên tọa độ B, C là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B(1;1), C(5;5) \\ B(5;5), C(1;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AK = 4\sqrt{2} \\ BC = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Do tứ giác $ABKC$ có $AK \perp BC$ nên $S_{ABKC} = \frac{1}{2} AK \cdot BC = 16$



10

Ta chứng minh $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}; \forall x > 0, y > 0 (*)$

Thật vậy, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{xy} \Rightarrow (x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}; \forall x > 0, y > 0$

Ta có $P = 1 - \frac{1}{a+1} + 1 - \frac{1}{b+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4c+2} = \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{4c+2} \right)$ (Áp dụng $(*)$)

$$\leq \frac{5}{2} - \left(\frac{4}{a+b+2} + \frac{1}{4c+2} \right) = \frac{5}{2} - \left(\frac{4}{2-c} + \frac{1}{4c+2} \right)$$

Xét hàm số $f(c) = \frac{4}{2-c} + \frac{1}{4c+2}, c \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ có $f'(c) = \frac{4}{(c-2)^2} - \frac{4}{(4c+2)^2}$

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

c	$-\frac{1}{2}$	0	2
$f'(c)$	-	0	+
$f(c)$			

$$\Rightarrow \min f(c) \geq \frac{5}{2} \Rightarrow P \leq \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$$

$$\text{Vậy } \max P = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$