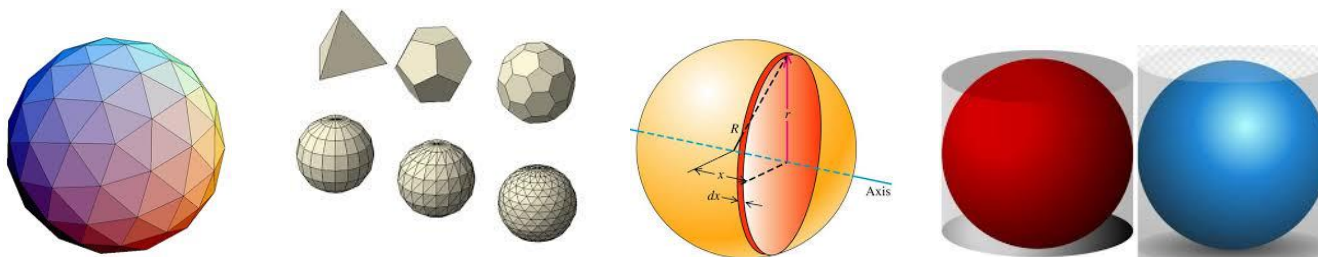


CHUYÊN ĐỀ: MẶT TRÒN XOAY



Giáo viên: LÊ BÁ BẢO Trường THPT Đặng Huy Trứ, Huế
SĐT: 0935.785.115 Địa chỉ: 116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế

Mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp khối đa diện

I- PHƯƠNG PHÁP

1. Chứng minh mặt cầu $S(O;R)$ ngoại tiếp đa diện:

Thông thường ta chứng minh mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của đa diện thông qua một số nhận xét quan trọng sau :

- + Điểm M thuộc $S(O;R) \Leftrightarrow OM = R$.
- + Điểm M thuộc $S(O;R)$ khi chỉ khi M nhìn đường kính của mặt cầu dưới 1 góc vuông.

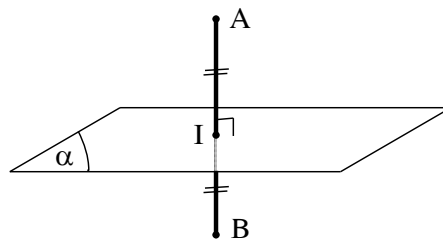
2. Điều kiện cần và đủ:

- + Để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của hình chóp có đường tròn ngoại tiếp.
- + Để một hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp là hình lăng trụ đó phải là hình lăng trụ đứng và có đáy lăng trụ là một đa giác nội tiếp.

3. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng:

Cho đoạn thẳng AB . Mặt phẳng (α) được gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB khi mp (α) đi qua trung điểm I của AB và vuông góc với AB .

Lưu ý: (α) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian cách đều A, B .



Dạng toán: CHỨNG MINH KHỐI ĐA DIỆN NỘI TIẾP MẶT CẦU

Chứng minh mặt cầu $S(O;R)$ ngoại tiếp đa diện:

Thông thường ta chứng minh mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của đa diện thông qua một số nhận xét quan trọng sau:

- + Điểm M thuộc $S(O;R) \Leftrightarrow OM = R$.

+ Điểm M thuộc $S(O;R)$ khi chỉ khi M nhìn đường kính dưới 1 góc vuông.

I- Thuật toán 1: SỬ DỤNG MỘT TRỤC XÁC ĐỊNH TÂM MẶT CẦU NGOẠI TIẾP ĐA DIỆN

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thỏa mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ : trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

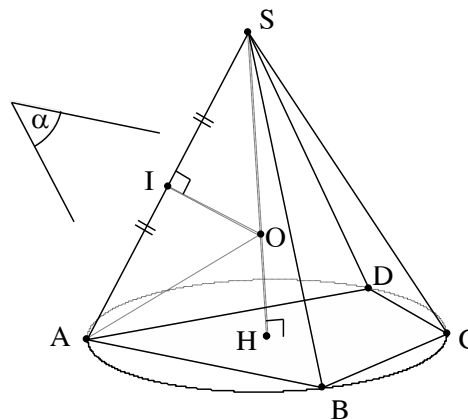
Bước 2: Lập mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên.

Lúc đó:

+ Tâm O của mặt cầu: $\Delta \cap mp(\alpha) = \{O\}$

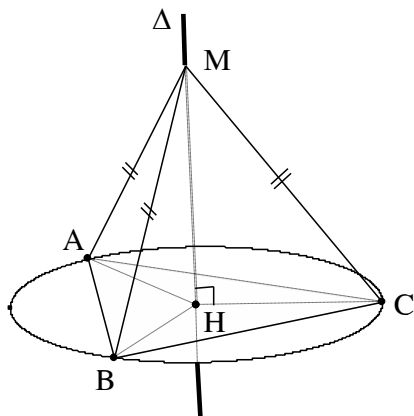
+ Bán kính: $R = OA (= OS)$.

Tùy vào tình huống hợp.



Lưu ý: Kỹ năng xác định trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

1. Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy.



Tính chất: $\forall M \in \Delta: MA = MB = MC$

Suy ra: $MA = MB = MC \Leftrightarrow M \in \Delta$

2. Các bước xác định trục:

- **Bước 1:** Xác định tâm H của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- **Bước 2:** Qua H dựng Δ vuông góc với mặt phẳng đáy.

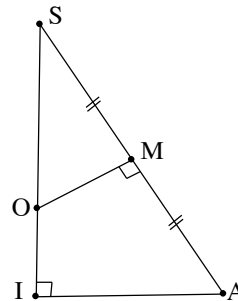
VD: Một số trường hợp đặc biệt

Tam giác vuông	Tam giác đều	Tam giác bất kì

3. Lưu ý: Kỹ năng tam giác đồng dạng

ΔSMO đồng dạng với ΔSIA

$$\Rightarrow \frac{SO}{SA} = \frac{SM}{SI} = \frac{MO}{IA}$$



4. Nhận xét quan trọng:

$$\exists M, S, (M \neq S): \begin{cases} MA = MB = MC \\ SA = SB = SC \end{cases} \Rightarrow SM \text{ là trục đường tròn ngoại tiếp } \Delta ABC.$$

Thuật toán 2: SỬ DỤNG HAI TRỤC XÁC ĐỊNH TÂM MẶT CẦU NGOẠI TIẾP ĐA DIỆN

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thỏa mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước:

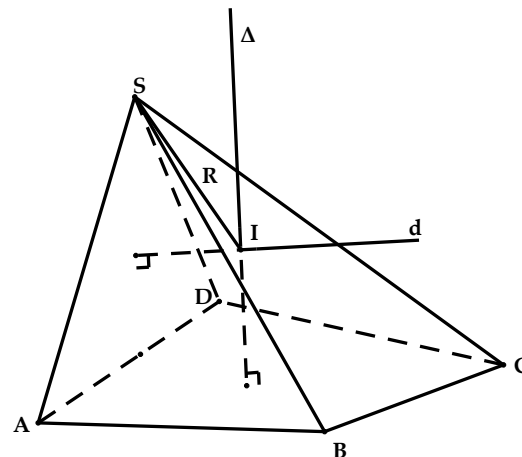
Bước 1: Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ : trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Bước 2: Xác định trục d của đường tròn ngoại tiếp một mặt bên (để xác định) của khối chóp.

Lúc đó:

+ Tâm I của mặt cầu: $\Delta \cap d = \{I\}$

+ Bán kính: $R = IA (= IS)$. Tùy vào từng trường hợp.



II- BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho điểm I nằm ngoài mặt cầu $(O; R)$. Đường thẳng Δ_1 qua I cắt mặt cầu tại hai điểm A, B ; đường thẳng Δ_2 cắt mặt cầu tại hai điểm C, D . Biết $IA = 3$ (cm), $IB = 8$ (cm), $IC = 4$ (cm). Tính độ dài ID .

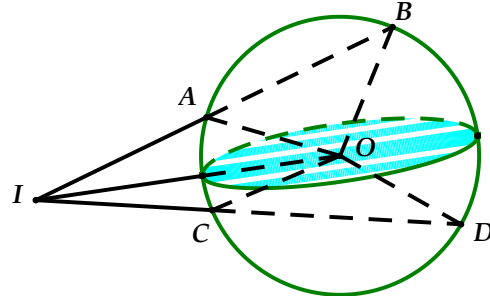
- A. 3 (cm). B. 4 (cm). C. 6 (cm). D. 8 (cm).

Lời giải

Áp dụng tính chất: Do 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc 1 đường tròn nên

$$IA \cdot IB = IC \cdot ID \Rightarrow ID = \frac{IA \cdot IB}{IC} = 6 \text{ (cm)}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**



Ví dụ 2: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tam giác SAC đều cạnh a . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

- A. $R = a$. B. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

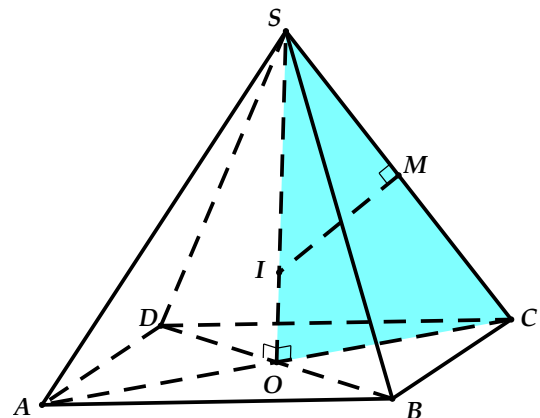
Ta có: $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Xét hai tam giác SMI và SOC

$$\text{đồng dạng suy ra: } \frac{SI}{SC} = \frac{SM}{SO} \Leftrightarrow SI = \frac{SM \cdot SC}{SO} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Nhận xét: I là trọng tâm

$$\Delta SAC \Rightarrow R = SI = \frac{2}{3}SO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 2a$, ΔABC cân tại A , $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $AB = AC = a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- A. $R = a\sqrt{5}$. B. $R = a\sqrt{2}$. C. $R = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $R = 2a$.

Lời giải

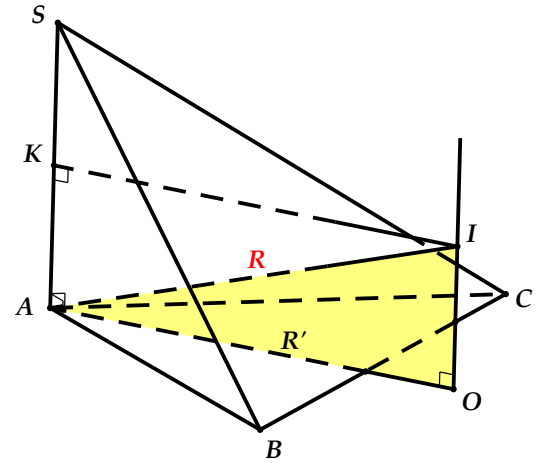
Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos \widehat{BAC} = 3a^2$

$$\Rightarrow BC = a\sqrt{3}. \text{ Xét } \triangle ABC: \frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2R' \Leftrightarrow R' = a:$$

bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

$$\text{Lúc đó: } R = \sqrt{\frac{SA^2}{4} + (R')^2} = a\sqrt{2}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**



Ví dụ 4: Tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc, $OA = OB = OC = 1$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

A. 1.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

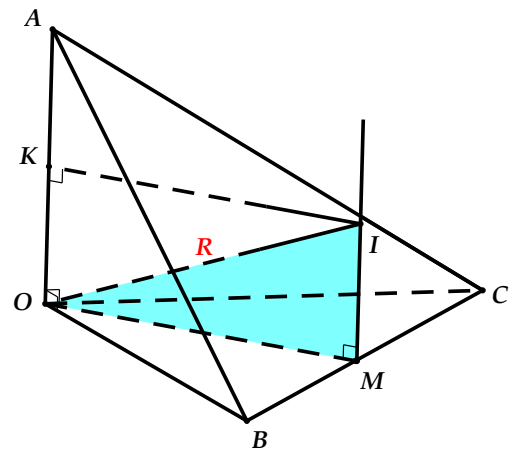
Gọi M là trung điểm BC , qua M dựng $d // OA$.

Gọi K là trung điểm OA , qua K dựng

$\Delta // OM \Rightarrow \Delta \cap d = \{I\}$: Tâm mặt cầu và

$$R = IO = \sqrt{\frac{OA^2}{4} + OM^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**



Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy, $\triangle ABC$ vuông cân tại C , $AC = 2\sqrt{2}$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{112\pi}{3}$.

B. $\frac{224\pi}{3}$.

C. 160π .

D. 40π .

Lời giải

$$\text{Do } \begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Leftrightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC$$

$$\Rightarrow ((SBC); (ABC)) = \widehat{SCA}$$

$$\text{Xét } \Delta SAC \text{ vuông tại } A: \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC}$$

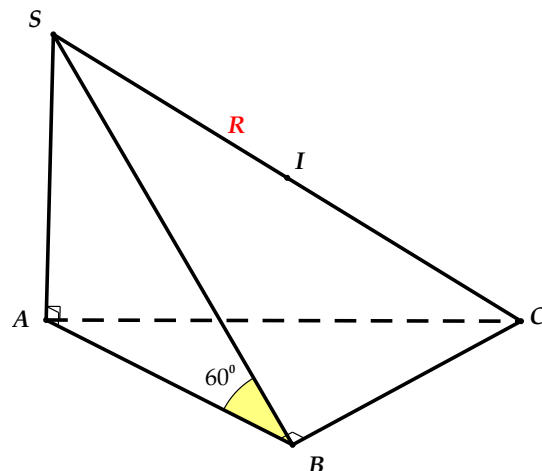
$$\Leftrightarrow SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = 2\sqrt{6}. \text{ Do } \Delta SCB \text{ vuông tại } C$$

$$\text{nên tâm } I \text{ mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } S.ABC \text{ là}$$

$$\text{trung điểm } SB \Rightarrow R = \frac{SB}{2}. \text{ Tính được}$$

$$AB = 4; SB = 2\sqrt{10} \Rightarrow R = \sqrt{10}. \text{ Vậy } S = 4\pi R^2 = 40\pi.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**



Ví dụ 6: Cho hai đường tròn (C_1) tâm O_1 , bán kính bằng 1, (C_2) tâm O_2 , bán kính bằng 2 lần lượt nằm trên hai mặt phẳng (P_1) , (P_2) sao cho $(P_1) \parallel (P_2)$ và $O_1O_2 \perp (P_1)$; $O_1O_2 = 3$. Tính diện tích mặt cầu qua hai đường tròn đó,

A. 24π .

B. 20π .

C. 16π .

D. 12π .

Lời giải

Đặt

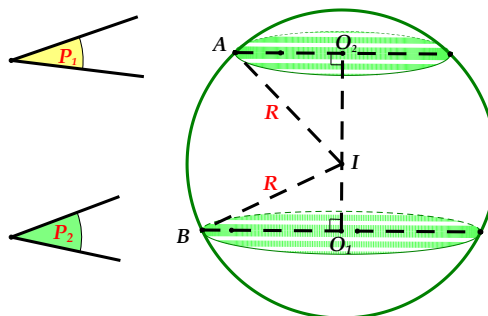
$$IO_1 = x \quad (0 < x < 3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = IB^2 - O_1B^2 = R^2 - 1 \Leftrightarrow R^2 = 1 + x^2 \\ (3-x)^2 = IA^2 - O_2A^2 = R^2 - 4 \Leftrightarrow R^2 = 4 + (3-x)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4 + (3-x)^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow R = \sqrt{IO_1^2 + BO_1^2} = \sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy } S = 4\pi R^2 = 20\pi.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**



Ví dụ 7: (Đề minh họa Bộ GD và ĐT) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$.

B. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$.

C. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$.

D. $V = \frac{5\pi}{3}$.

Lời giải

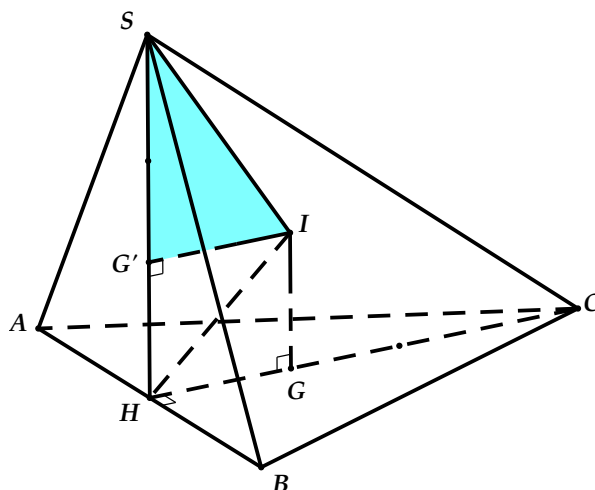
Gọi H là trung điểm cạnh AB , G, G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và SAB .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } SI &= \sqrt{(IG')^2 + (SG')^2} = \sqrt{HG^2 + (SG')^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{3}HC\right)^2 + \left(\frac{2}{3}SH\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{6}. \end{aligned}$$

Vậy thể tích khối cầu là

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi SI^3 = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.



Ví dụ 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC có $AB=2$; $AC=2$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Biết góc giữa (SBC) và (ABC) bằng α với $\tan \alpha = 2$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\sqrt{5}$.

B. 2.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của cạnh

$$BC \Rightarrow \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM.$$

Suy ra $((SBC); (ABC)) = \widehat{SMA}$.

Theo giả thiết: $\tan \alpha = \frac{SA}{AM} \Leftrightarrow SA = AM \cdot \tan \alpha$

$$= AB \cdot \cos \widehat{BAM} \cdot \tan \alpha = 2.$$

Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 12$

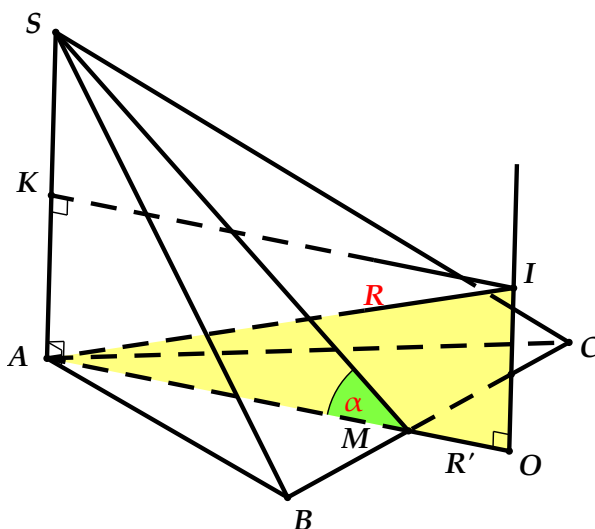
$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{3}.$$

Xét $\triangle ABC$: $\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2R' \Leftrightarrow R' = 2$: bán kính

đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

$$\text{Vậy bán kính mặt cầu là } R = \sqrt{(R')^2 + \frac{SA^2}{4}} = \sqrt{5}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.



Ví dụ 9: (Đề thử nghiệm Bộ GD và ĐT) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 2a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.

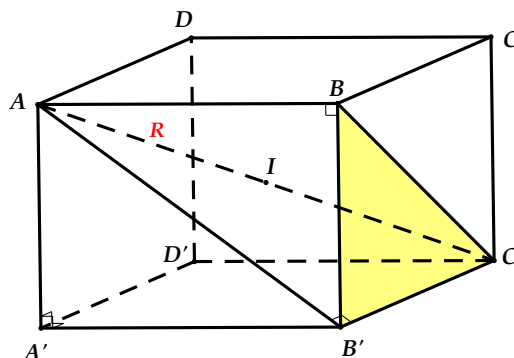
A. $3a$.B. $\frac{3a}{4}$.C. $\frac{3a}{2}$.D. $2a$.**Lời giải**

Ta chứng minh được $\widehat{ABC'} = \widehat{AB'C'} = 90^\circ \Rightarrow A, B, B', C'$ cùng thuộc mặt cầu với đường kính AC' .

Ta có: $IA = \sqrt{(AB')^2 + (B'C')^2} = 3a$.

Suy ra $R = \frac{IA}{2} = \frac{3a}{2}$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**



Ví dụ 10: Cho hình hộp chữ nhật có các kích thước a, b, c . Gọi (T) là một tứ diện có sáu cạnh là sáu đường chéo của sáu mặt bên của hình hộp đã cho. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó.

A. $S = 4\pi(a^2 + b^2 + c^2)$.B. $S = \pi(a^2 + b^2 + c^2)$.C. $S = 2\pi(a^2 + b^2 + c^2)$.D. $S = \frac{\pi(a^2 + b^2 + c^2)}{2}$.**Lời giải**

Nhận xét rằng mặt cầu ngoại tiếp tứ diện cũng là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật.

Vậy bán kính mặt cầu là $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$ suy ra diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = \pi(a^2 + b^2 + c^2)$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

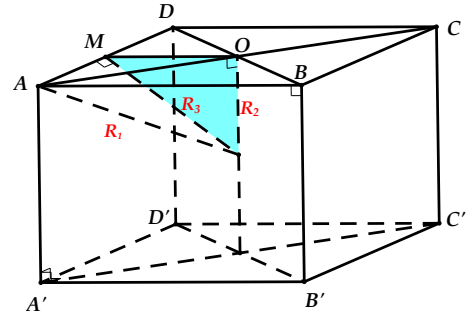
Ví dụ 11: Cho hình lập phương cạnh a . Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương, bán kính mặt cầu nội tiếp hình lập phương và bán kính mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $R_2^2 = R_1 \cdot R_3$.B. $R_2^2 = R_1^2 + R_3^2$.C. $R_1^2 = R_2^2 + R_3^2$.D. $R_3^2 = R_1 \cdot R_2$.**Lời giải**

Ta có: $R_1 = \frac{B'D}{2} = \frac{3\sqrt{a}}{4}$; $R_2 = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$;

$$R_3 = \sqrt{IO^2 + OM^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R_1^2 = R_2^2 + R_3^2.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.



Ví dụ 12: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, chiều cao $h=2$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{9}{8}$.

B. $\frac{9}{4}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{3}{2}$.

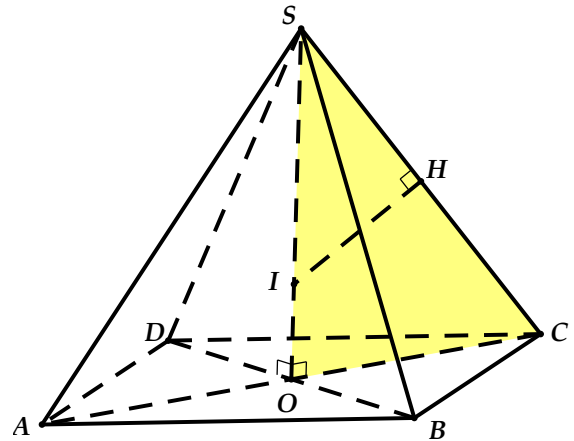
Lời giải

Xét hai tam giác SHI và SOC đồng dạng:

$$\frac{SH}{SO} = \frac{SI}{SC} \Leftrightarrow SI = \frac{SH \cdot SC}{SO} = \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow R = SI = \frac{9}{8}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.



Ví dụ 13: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, chiều cao $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\sqrt{3}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

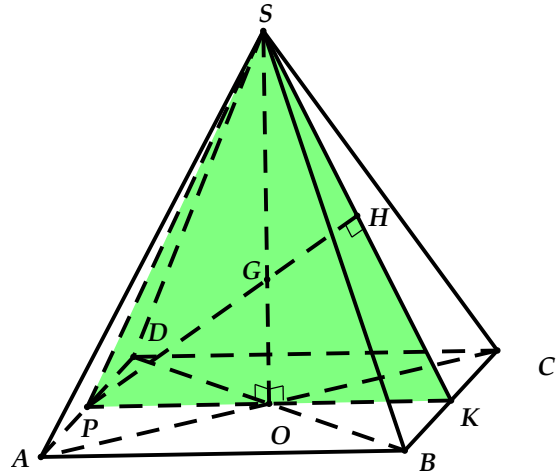
Lời giải

Ta có $\triangle SPK$ cân và có $PK=1$, $SO=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \triangle SPK$ đều.

Gọi G là trọng tâm $\triangle SPK \Rightarrow \begin{cases} GH \perp (SBC) \\ GO \perp (ABCD) \end{cases}$

$$\Rightarrow R = GO = GH = \frac{1}{3}SO = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**



Ví dụ 14: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, chiều cao $h=2$. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{\sqrt{17}}{8}$.

B. $\frac{\sqrt{17}-1}{8}$.

C. $\frac{\sqrt{17}-1}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{17}-2}{4}$.

Lời giải

Đặt $GH = x = GO = R$ ($0 < x < 2$).

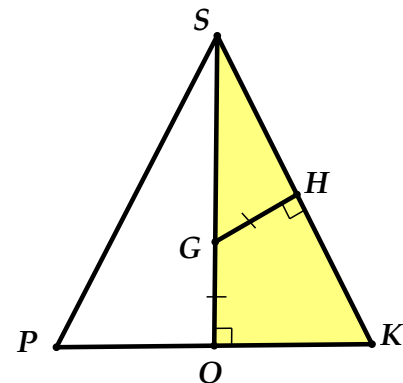
(Sử dụng hình trên)

Xét hai tam giác đồng dạng SHG và SOK :

$$\frac{HG}{OK} = \frac{SG}{SK} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{2-x}{\frac{\sqrt{17}}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{17}x = 2-x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{1+\sqrt{17}} = \frac{-1+\sqrt{17}}{8} \Rightarrow R = \frac{-1+\sqrt{17}}{8}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**



Ví dụ 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 1, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Biết hai mặt phẳng (SDC) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và mặt đáy bằng 45° . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.BCD$.

A. 7π .

B. $\frac{7\pi}{2}$.

C. $\frac{7\pi}{4}$.

D. $\frac{7\pi}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} (SDC) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SD \perp (ABCD)$

$\Rightarrow (SC; (ABCD)) = \widehat{SCD}$.

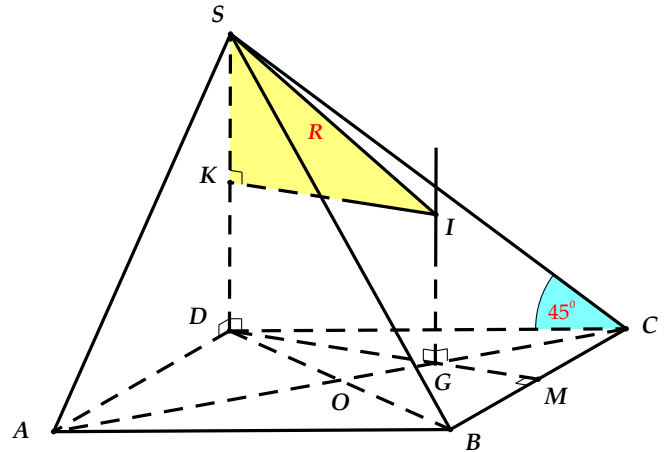
Mặt khác: $\triangle ABD$ cân tại A và $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ đều $\Rightarrow \triangle BCD$ đều.

Gọi G là trọng tâm $\triangle BCD$ và I là giao điểm hai đường như hình vẽ.

$R = SI = \sqrt{SK^2 + KI^2} = \frac{\sqrt{21}}{6}$.

Vậy mặt cầu có diện tích $S = 4\pi R^2 = \frac{7\pi}{3}$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**



Ví dụ 16: Cho hình chóp $S.ABC$ với $\triangle ABC$ có $AB = 1$, $AC = 2$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$, SA vuông góc với đáy. Gọi B_1 , C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB , SC . Tính diện tích mặt cầu qua các đỉnh A, B, C, B_1, C_1 .

A. 16π .

B. 12π .

C. 8π .

D. 4π .

Lời giải

Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos \widehat{BAC} = 3$

$\Rightarrow BC = \sqrt{3}$. Lúc đó $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Leftrightarrow \triangle ABC$

vuông tại B .

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB_1$

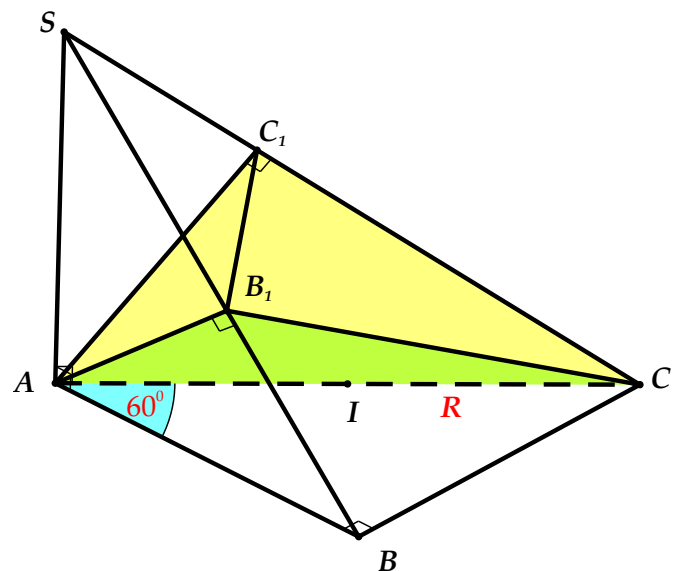
$\Rightarrow AB_1 \perp (SBC) \Rightarrow AB_1 \perp B_1C$.

Do $\widehat{ABC} = \widehat{AB_1C} = \widehat{AC_1C} = 90^\circ \Rightarrow A, B, C, B_1, C_1$ cùng thuộc mặt cầu có đường kính

$AC \Rightarrow R = \frac{AC}{2} = 1$.

Vậy diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**



Ví dụ 17: Ba tia Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc, C là một điểm cố định trên Oz , đặt $OC = 1$, A, B thay đổi trên Ox, Oy sao cho $OA + OB = OC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

D. $\sqrt{6}$.

Lời giải

Đặt $OB=b$, $OA=a \Rightarrow a+b=1$; ($a;b \in (0;1)$).

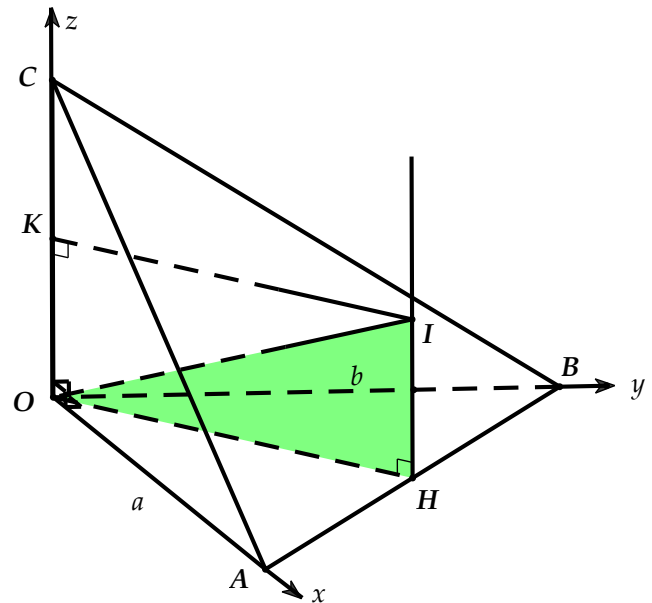
Gọi H , K lần lượt là trung điểm AB , OC

$$\Rightarrow R = \sqrt{IH^2 + OH^2} \Rightarrow R^2 = \frac{1}{4} + \frac{b^2 + c^2}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot (b^2 + c^2) \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} (a+b)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow R \geq \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow R_{\min} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**



Ví dụ 18: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $\triangle ABC$ là tam giác vuông cân tại A , $AB=1$, góc giữa $A'C$ và (ABC) bằng 60° . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $C'.ABB'A'$.

A. $\frac{5\pi}{2}$.

B. 5π .

C. $\frac{5\pi}{4}$.

D. $\frac{5\pi}{6}$.

Lời giải

Ta có: $AA' \perp (ABC) \Rightarrow (A'C; (ABC)) = \widehat{A'CA}$.

Xét $\triangle A'CA$ vuông tại A :

$$\tan \widehat{A'CA} = \frac{AA'}{AC} \Leftrightarrow AA' = AC \cdot \tan \widehat{A'CA} = \sqrt{3}.$$

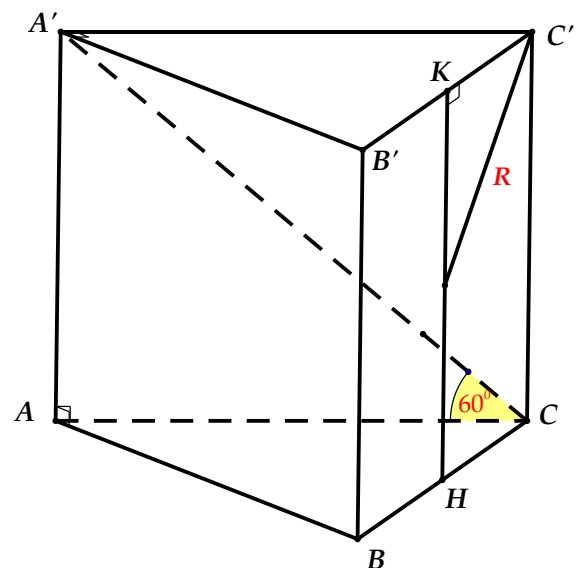
Nhận xét: Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $C'.ABB'A'$ cũng là mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Gọi H , K lần lượt là trung điểm các cạnh BC , $B'C'$.

$$\text{Bán kính mặt cầu là } R = IC' = \sqrt{IK^2 + (KC')^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Vậy diện tích mặt cầu là } S = 4\pi R^2 = 4 \cdot \frac{5\pi}{4} = 5\pi.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**



Ví dụ 19: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại A , $AB=3$, $BC=5$, hình chiếu vuông góc của B' trên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(ABB'A')$ bằng 60° . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $B'.ABC$.

A. $\frac{73\sqrt{3}}{48}$.

B. $\frac{73\sqrt{3}}{24}$.

C. $\frac{73\sqrt{6}}{48}$.

D. $\frac{73\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải

Gọi K là trung điểm

$$AB \Rightarrow ((ABB'A'), (ABC)) = \widehat{B'KH}.$$

Xét $\triangle B'KH$ vuông tại H :

$$B'H = KH \cdot \tan \widehat{B'KH} = 2\sqrt{3}.$$

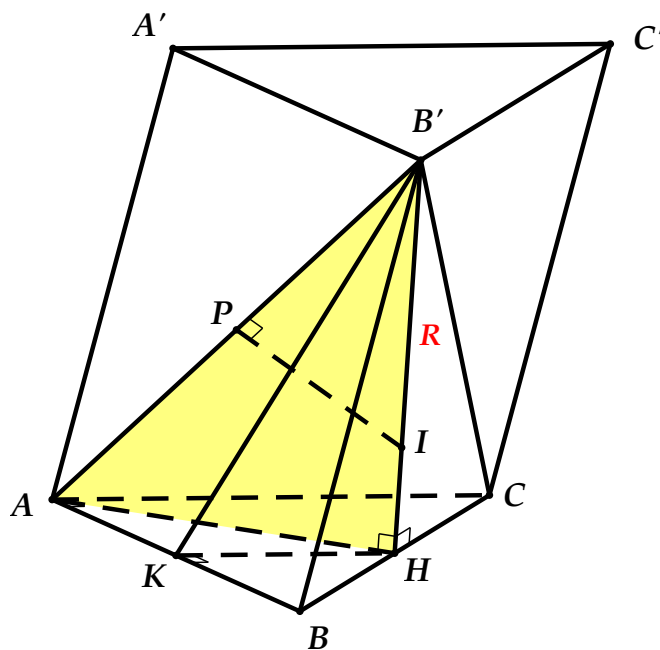
$$\text{Suy ra: } B'A = \sqrt{AH^2 + B'H^2} = \frac{\sqrt{73}}{2}.$$

Xét hai tam giác $B'PI$ và

$$B'HA: \frac{B'I}{B'A} = \frac{B'P}{B'H} \Rightarrow IB' = \frac{B'A \cdot B'P}{B'H} = \frac{73\sqrt{3}}{48}.$$

$$\Rightarrow R = IB' = \frac{73\sqrt{3}}{48}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**



Ví dụ 20: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) vuông góc với nhau. Biết tam giác ABC đều cạnh a , tam giác BCD vuông cân tại D . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

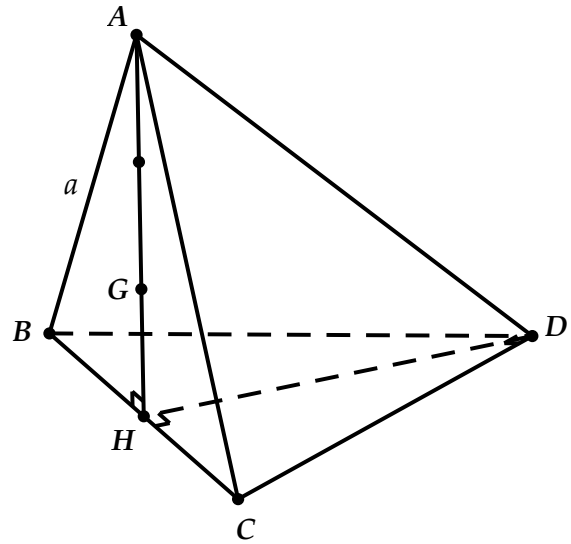
Lời giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , H là trung điểm cạnh BC . Do $(ABC) \perp (BCD)$ và tam giác BCD vuông cân tại D nên AH là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD .

Suy ra : G là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và bán kính mặt cầu là :

$$R = AG = \frac{2}{3} AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**



Ví dụ 21: Tính Bán kính mặt cầu nội tiếp hình bát diện đều có cạnh bằng a .

A. $r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

B. $r = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $r = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

D. $V = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

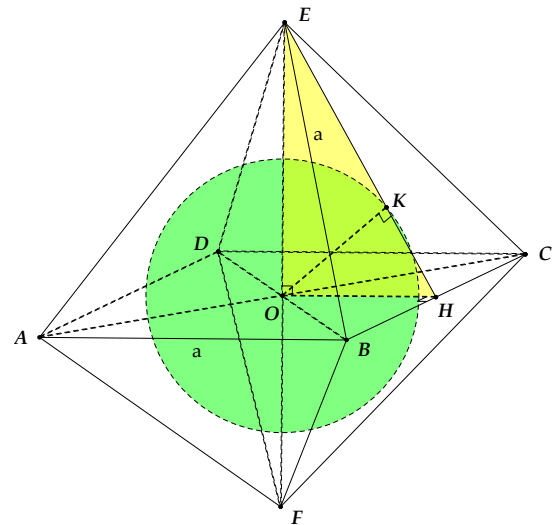
Lời giải

Gọi H là trung điểm BC và O là tâm hình vuông $ABCD$. Dựng $OK \perp EH \Rightarrow OK \perp (SBC)$.

Dễ chứng minh tương tự với các mặt khác thì khoảng cách từ O đến các mặt của bát diện đều bằng nhau và bằng $OK \Rightarrow O$ là tâm và $r = OK$ là bán kính mặt cầu nội tiếp bát diện đều.

$$\text{Xét } \triangle SOH: \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{OE^2} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**



Ví dụ 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Gọi H là trung điểm AB và $SH = a\sqrt{3}$ là độ dài đường cao của hình chóp. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

A. $R = \frac{a\sqrt{21}}{3}$.

B. $R = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

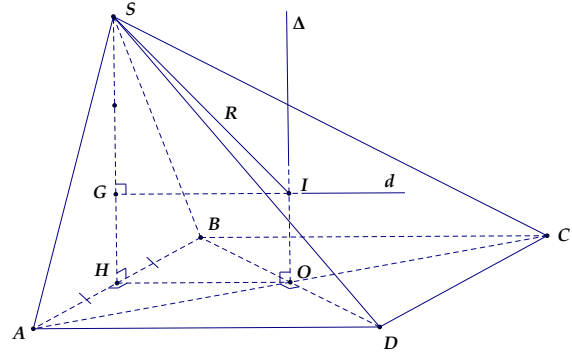
D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Qua O dựng $\Delta \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta // SH$.

Ta có: $\begin{cases} SH \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB)$



Mặt khác: ΔSAB cân có $AB = 2a$ và $SH = a\sqrt{3}$ suy ra ΔSAB đều cạnh $2a$. Gọi G là trọng tâm ΔSAB , qua G dựng $d \perp (SAB) \Rightarrow d \perp OI$.

Lúc đó: $d \cap \Delta = \{I\}$. Ta có: $\begin{cases} IA = IB = IC = ID \\ IA = IB = IS \end{cases} \Leftrightarrow IA = IB = IC = ID = IS$ hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ và có bán kính $R = SI$.

Xét ΔSGI vuông tại G , ta có: $SI = \sqrt{SG^2 + GI^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}SH\right)^2 + IO^2} = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot 3a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{21}}{3}$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

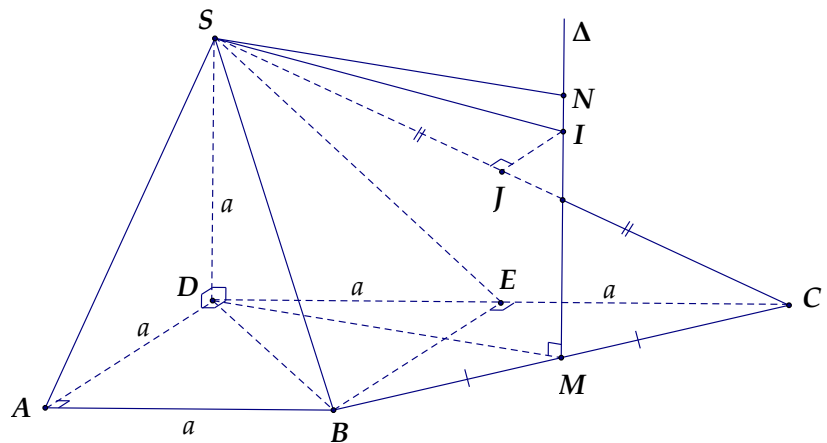
Ví dụ 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A, D , $AB = AD = a$, $CD = 2a$. Cạnh bên $SD \perp (ABCD)$ và $SD = a$. Gọi E là trung điểm của DC . Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE$.

- A. $R = \frac{a\sqrt{11}}{4}$. B. $R = \frac{a\sqrt{11}}{2}$. C. $R = \frac{a\sqrt{11}}{3}$. D. $R = \frac{2a\sqrt{11}}{11}$.

Lời giải

Vì $AB = DE = AD = a$ và $\widehat{DAB} = 90^\circ$ nên $ABED$ là hình vuông.

Tam giác BCD có $EB = ED = EC = a$ nên vuông tại B , $BE \perp CD$ nên trung điểm M của BC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC .



+ Qua M dựng $\Delta \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta // SD$.

+ Dựng mặt phẳng trung trực của cạnh SC , mặt phẳng này cắt Δ tại I .

Ta có: $\begin{cases} IB = IE = IC \\ IC = IS \end{cases} \Leftrightarrow IB = IE = IC = IS$. Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BEC$ và

$$R = IC$$

* Kẻ $SN // DM$ cắt MI tại N , ta có $SDMN$ là hình chữ nhật, với $SD = a$ và

$$DM^2 = \frac{DB^2 + DC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{(AB^2 + AD)^2 + DC^2}{2} - \frac{EC^2 + EB^2}{4} = \frac{5a^2}{2}.$$

$$\text{Ta có: } SI^2 = SN^2 + NI^2 = SN^2 + (NM - IM)^2 = \frac{5a^2}{2} + (a - IM)^2.$$

$$\text{Mặt khác: } IC^2 = IM^2 + MC^2 = IM^2 + \frac{a^2}{2} \text{ và } R = IC = SI.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{5a^2}{2} + (a - IM)^2 = IM^2 + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow IM = \frac{3a}{2} \Rightarrow R = IC = \sqrt{IM^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{11}}{2}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Ví dụ 24: Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $(SBC) \perp (ABC)$ và $SA = SB = a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, biết $SC = x$.

$$\text{A. } R = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - 2x^2}}$$

$$\text{B. } R = \frac{a^2 + 1}{\sqrt{3a^2 - x^2}}$$

$$\text{C. } R = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\text{D. } R = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - x^2}}$$

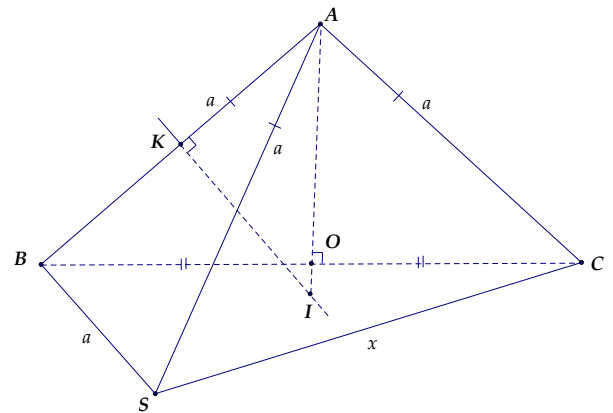
Lời giải

Gọi K là trung điểm AB , qua K dựng đường trung trực của AB . Tâm I của mặt cầu là giao điểm của trục đường tròn Δ của ΔSBC và đường trung trực của AB . Lúc đó: $R = IA$. Xét hai tam giác KAI và OAB đồng dạng:

$$\frac{AI}{AB} = \frac{KA}{AO} \Leftrightarrow AI = \frac{AB \cdot KA}{AO} = \frac{AB^2}{2\sqrt{AC^2 - OC^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - x^2}}$$

$$R = AI = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - x^2}}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

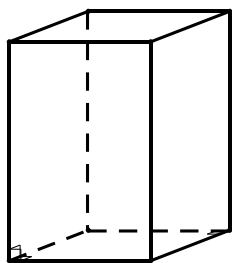


III-BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

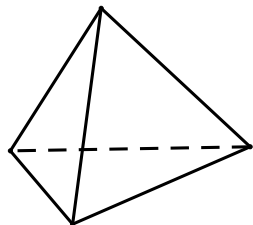
Câu 1. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Xét điểm M trong không gian mà $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2$. Trong các câu sau, tìm câu đúng.

- A. M thuộc một mặt cầu có tâm là trọng tâm tam giác ABC và có bán kính $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- B. M thuộc một mặt cầu có tâm là trọng tâm tứ diện $ABCD$ và có bán kính $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
- C. M thuộc một mặt cầu có tâm là trọng tâm tứ diện $ABCD$ và có bán kính $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- D. M thuộc một đường tròn cầu có tâm là trọng tâm tam giác ABC và có bán kính $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

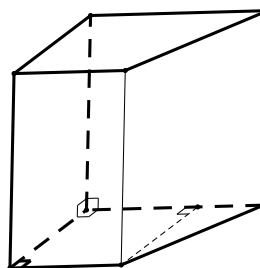
Câu 2. Trong các hình dưới đây, hình nào **không** có mặt cầu ngoại tiếp?



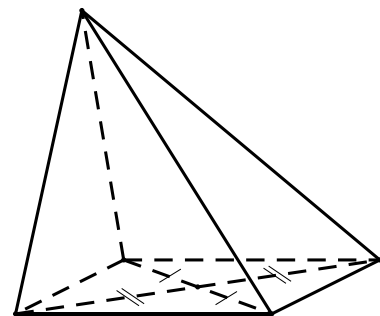
hình 1



hình 2



hình 3



hình 4

- A. Hình 1. B. Hình 2. C. Hình 3. D. Hình 4.

Câu 3. Ba tia Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc. C là điểm cố định trên $Oz, C \neq O$; A, B là hai điểm thay đổi trên Ox, Oy sao cho $OA^2 + OB^2 = k^2$ (k cho trước). Kí hiệu (S) là tập hợp tâm các mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Trong các câu sau, tìm câu đúng.

- A. (S) là một mặt trụ. B. (S) là một mặt phẳng.
C. (S) là một đoạn thẳng. D. (S) là một cung tròn.

Câu 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

- A. Hình chóp có đáy là tứ giác thì có mặt cầu ngoại tiếp.
B. Hình chóp có đáy là hình thang vuông thì có mặt cầu ngoại tiếp.
C. Hình chóp có đáy là hình bình hành thì có mặt cầu ngoại tiếp.
D. Hình chóp có đáy là hình thang cân thì có mặt cầu ngoại tiếp.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = a$. Hình chiếu của S trên (ABC) là trung điểm H của BC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là trung điểm SH .
B. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là H .
C. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là trọng tâm của tam giác ABC .
D. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là trung điểm AH .

- Câu 6.** Ba tia Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc. C là điểm cố định trên $Oz, C \neq O$; A, B là hai điểm thay đổi trên Ox, Oy sao cho $OA + OB = OC$. Kí hiệu (S) là tập hợp tâm các mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Trong các câu sau, tìm câu đúng.
- A. (S) là một mặt phẳng. B. (S) là một mặt trụ.
C. (S) là một đoạn thẳng. D. (S) là một cung tròn.
- Câu 7.** Xét các hình hộp nội tiếp một mặt cầu bán kính R . Trong các mệnh đề sau đây, tìm mệnh đề đúng: tổng độ dài các cạnh của hình hộp lớn nhất.
- A. Khi hình hộp có đáy là hình vuông.
B. Khi hình hộp là hình lập phương.
C. Khi hình hộp có các kích thước tạo thành cấp số cộng với công sai khác 0.
D. Khi hình hộp có các kích thước tạo thành cấp số nhân với công bội khác 1.
- Câu 8.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là tâm của đáy.
B. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là trung điểm của đoạn thẳng nối S với tâm của mặt đáy.
C. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là trọng tâm của tam giác SAC .
D. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là S .
- Câu 9.** Hình chóp $D.ABC$ có DA vuông góc với (ABC) , BC vuông góc với DB , $AB = c$, $BC = a$, $AD = h$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
- A. $\frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. B. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. C. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. D. $2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- Câu 10.** Mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của tứ diện đều $ABCD$ cạnh a có bán kính là :
- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $2a\sqrt{2}$.
- Câu 11.** Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm các mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp tiếp xúc với các cạnh của hình lập phương. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng.
- A. O_1 trùng với O_2 nhưng khác O_3 .
B. O_2 trùng với O_3 nhưng khác O_1 .
C. Trong ba điểm O_1, O_2, O_3 không có hai điểm nào trùng nhau.
D. O_1, O_2, O_3 trùng nhau.
- Câu 12.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi B', C', D' lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, AD . Tính bán kính mặt cầu đi qua các điểm B, C, D, B', C', D' .

A. $\frac{\sqrt{11}}{8}$. B. $\frac{\sqrt{11}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{22}}{8}$. D. $\frac{\sqrt{22}}{8}$.

Câu 13. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh cùng bằng a . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp đó.

A. $a\sqrt{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 14. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , $AC = a$, $AB = 2\sqrt{3}a$, $AC' = a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích khối cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{8\pi a^3}{3}$. B. $\frac{4\pi a^3}{3}$. C. $\frac{16\pi a^3}{3}$. D. $\frac{32\pi a^3}{3}$.

Câu 15. Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, chiều cao $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính tỉ số thể tích khối cầu nội tiếp hình chóp và thể tích khối chóp đã cho.

A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{9}$. C. $\frac{\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{3}$.

Câu 16. Hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, chiều cao bằng 1. Tính tỉ số thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp và thể tích khối chóp đã cho.

A. $\frac{27}{2}\pi$. B. $\frac{27}{4}\pi$. C. $\frac{27}{8}\pi$. D. $\frac{27}{16}\pi$.

Câu 17. Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC có $AC = 1$, $BC = 2$, $\widehat{ACB} = 120^\circ$, cạnh bên bằng 2. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

A. 40π . B. $\frac{40\pi}{3}$. C. $\frac{40\pi}{9}$. D. $\frac{40\pi}{27}$.

Câu 18. Cho hình lăng trụ tam giác đều có các cạnh cùng bằng 1. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

A. 7π . B. $\frac{7\pi}{2}$. C. $\frac{7\pi}{3}$. D. $\frac{7\pi}{6}$.

Câu 19. Cho tam giác đều ABC cạnh 1. Gọi (P) là mặt phẳng qua BC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Trong (P) xét đường tròn (T) đường kính BC . Tính diện tích mặt cầu nội tiếp hình nón có đáy (T) , đỉnh là A .

A. $\frac{\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. π . D. 2π .

- Câu 20.** Hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh 1, $\widehat{BCD} = 120^\circ$, SD vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SB và mặt đáy bằng 60° . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp $SBCD$
- A. $\sqrt{13}$. B. $\frac{\sqrt{13}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{13}}{8}$.
- Câu 21.** Cho tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền $AB = 2a$. Trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) , lấy điểm S sao cho SC tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Tính theo a đường kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.
- A. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$. B. $2\sqrt{5}a$. C. $\sqrt{10}a$. D. $2\sqrt{10}a$.
- Câu 22.** Xét mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện đều cạnh bằng 1. Tính bán kính mặt cầu đó.
- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. C. $\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.
- Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = 2a$. Mặt bên SCD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là
- A. $S = \frac{50\pi a^2}{9}$. B. $S = \frac{16\pi a^2}{3}$. C. $S = \frac{32\pi a^2}{3}$. D. $S = \frac{14\pi a^2}{3}$.
- Câu 24.** Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật mà $AD = 3$, $AC = 5$; SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.
- A. $\frac{17\pi\sqrt{34}}{3}$. B. $\frac{17\pi\sqrt{34}}{6}$. C. $34\pi\sqrt{34}$. D. $\frac{17\pi\sqrt{34}}{9}$.
- Câu 25.** Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B , $AB = BC = 1$; $AD = 2$; mặt phẳng (SAD) vuông góc với $(ABCD)$ và tam giác SAD đều. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$.
- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
- Câu 26.** Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$. Tam giác BCD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là

$$A. V = \frac{4\sqrt{6}\pi a^3}{27}. \quad B. V = \frac{8\sqrt{6}\pi a^3}{9}. \quad C. V = \frac{8\sqrt{6}\pi a^3}{27}. \quad D. V = \frac{16\sqrt{6}\pi a^3}{27}.$$

Câu 27. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh 1, $\widehat{A} = 60^\circ$, $SA = \frac{1}{2}$, tam giác SAB vuông tại S và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp $SABD$.

$$A. \frac{4\pi}{27}. \quad B. \frac{4\pi}{9}. \quad C. \frac{4\pi}{6}. \quad D. \frac{4\pi}{3}.$$

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và BCD là các tam giác đều cạnh a , $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

$$A. R = \frac{a\sqrt{11}}{6}. \quad B. R = \frac{a\sqrt{21}}{6}. \quad C. R = \frac{a\sqrt{15}}{3}. \quad D. R = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

Câu 29. Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = 1$; các cạnh bên cùng tạo với đáy góc 60° . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

$$A. \frac{8\pi}{6}. \quad B. \frac{8\pi}{9}. \quad C. \frac{8\pi}{3}. \quad D. 8\pi.$$

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $BC = 2AB = 2a$, $AC = a\sqrt{5}$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

$$A. 9\pi a^2. \quad B. 3\pi a^2. \quad C. \sqrt{5}\pi a^2. \quad D. 4\sqrt{5}\pi a^2.$$

Câu 31. Hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC) , $AB = 1$, $AC = 2$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Gọi B_1, C_1 là hình chiếu của A trên SB, SC . Tính bán kính mặt cầu đi qua A, B, C, B_1, C_1 .

$$A. \frac{\sqrt{5-4\cos\alpha}}{\sqrt{3}\sin\alpha}. \quad B. \frac{2\sqrt{5-4\cos\alpha}}{\sqrt{3}\sin\alpha}. \quad C. \frac{\sqrt{5-4\cos\alpha}}{\sqrt{2}\sin\alpha}. \quad D. \frac{\sqrt{5-4\cos\alpha}}{2\sin\alpha}.$$

Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp một mặt cầu mà $\widehat{ADB} = \widehat{BDC} = \widehat{CDA} = 90^\circ$. Tìm một đường kính của mặt cầu đó.

$$A. AB. \quad B. BC. \quad C. CA. \\ D. DD' \text{ trong đó } \overrightarrow{DD'} = 3\overrightarrow{DG} \text{ với } G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC.$$

Câu 33. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh cùng bằng 1. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp đều đó.

$$A. \frac{\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{3})}. \quad B. \frac{\sqrt{2}}{4(1+\sqrt{3})}. \quad C. \frac{\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}. \quad D. \frac{\sqrt{3}}{4(1+\sqrt{3})}.$$

Câu 34. Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC vuông cân tại $A, AB=1$, chiều cao bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$, điểm A' cách đều ba điểm A, B, C . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp $A'ABC$.

A. $\frac{8\pi}{3}$.

B. $\frac{4\pi}{3}$.

C. $\frac{16\pi}{3}$.

D. $\frac{32\pi}{3}$.