Bí Kíp Thế Lực

Chào các vị anh hùng hảo hán, khi các bạn đang đọc những dòng này, tức là các bạn đang cầm trên tay cuốn Bí Tịch giúp nâng cao võ công của các hạ, làm cho nội lực ngày càng uyên thâm đủ sức hành tẩu trên giang hồ cũng như tranh Slot vào Đại Học, điều mà ai cũng muốn và chỉ có chiến thắng bằng đúng thực lực của mình mới mong giành được.

Hành tẩu trên giang hồ các hạ cũng đã biết, ngoài phải cần cù siêng năng, học hành chăm chỉ để có những kĩ năng cơ bản thì cần phải có những chiêu thức độc và mạnh, cũng như vũ khí vip. Thử hỏi có cao thủ võ lâm nào, không nắm trong tay các tuyệt thế võ học như Cửu Dương Thần Công, Cửu Âm chân kinh, Hàng Long Thập Bát Chưởng, Như Lai Thần Chưởng….

Hôm nay, bạn đã có 1 bí tịch như vậy và những Skill chỉ trong sách này mới có, bạn sẽ không tìm thấy ở 1 quyển sách màu mè nào khác…

Và đây là 1 phiên bản đặc biệt Limited. Hãy gối đầu giường và tu luyện nó cho cẩn thận nhé !!!

___Sư Phụ : Thế Lực__

Đi kèm Bí Tịch này là một Hệ thống Video hướng dẫn các Skill và kho bài tập rèn luyện Update được kết nối tới hệ thống data điện toán đám mây

Quần hùng quy tụ tại đây để được hướng dẫn kết nối:http://bikiptheluc.com/ebook

Đây là ID của bạn: 116

Chúc em học tốt! ^^

video: dodaihoc.2k16@gmail.com

pass: sachonthi

Menu skill

(Hệ thống Video cũng được xây dựng dựa trên menu này)

Bí Kíp Công Phá Kì Thi THPT Quốc Gia

Giải Phương Trình, Bất Phương Trình

Bằng Máy Tính Fx 570 ES, VN, Vinacal PLUS

Version 3.1 Ultimate

I, Giới thiệu

Xin chào các em, anh là Nguyễn Thế Lực – sinh viên ĐH Bách Khoa Hà Nội , khi các em đang đọc những dòng này là các em đang cầm trên tay bí kíp tuyệt học giúp các em công phá phương trình, bất phương trình hiệu quả mà ít em biết được, ít thầy cô dạy cho các em, đây là một sáng kiến kinh nghiệm mới hỗ trợ đắc lực cho các em trong học tập cũng như kì thi THPT Quốc Gia

II, Lý do chọn đề tài

Rất nhiều em hỏi anh rằng : " Sao anh lại có cách giải đó? Sao anh biết ghép căn thức đó với biểu thức đó để liên hợp, để ép nhân tử? ". Đa phần thầy cô cũng chỉ giải cho các em ở dưới dạng là với dạng này thì ta làm như thế chứ chưa thực sự có cách gì tổng quát.

Xu hướng chung của BGD cũng đang ra phương trình, bất phương trình thay thế hệ phương trình nhưng điều đó không hề thay đổi gì trong công cuộc chinh phục điểm 9 của chúng ta. Hôm nay anh xin giới thiệu bí kíp giải phương trình, bất phương trình bằng fx 570 es, vn, vinacal plus , đảm bảo học xong các em ở mức Trung Bình – khá chăm chỉ 1 chút cũng sẽ làm được.

Let 's go !!!

III, Yêu cầu chung

1. Có tinh thần Quyết tâm đỗ Đại Học !!!

2. Có kiến thức căn bản sử dụng các phương pháp liên hợp, đưa về phương trình tích, phương pháp hàm số, phương pháp đánh giá...

Ví dụ như:

Đưa về phương trình tích $A.B=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array}\right.$

*Liên hợp hay dùng:

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};\sqrt{a}-b=\frac{a-b^2}{\sqrt{a}+b};\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$

*Phương pháp hàm số:

hàm f đồng biến (nghịch biến) trên đoạn $[a;b]$ và $x,2-x\in[a;b]$ mà

TH1: $f(x)=0$ nếu có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất

TH2: $f(x)=f(2-x)$ phương trình có nghiệm duy nhất là x = 2- x

*Phương pháp đánh giá: thường là sử dụng BĐT Cô-Si vì BĐT này có trong SGK lớp 10

Ta có : $\forall a,b\geq 0; a+b\geq 2\sqrt{ab}, a^2+b^2\geq 2ab$

3. Có 1 chiếc máy tính có tính năng SOLVE : fx 570 es, vn, vinacal plus , fx 570 ms , ...

Lý do anh chọn Fx 570 ES PLUS vì đây là máy tính các em sử dụng nhiều và là máy tính có chứa các tính năng các máy VN PLUS và VINACAL đều có

(lý do khác là anh đang dùng máy này :D)

***Phân tích xu hướng ra đề về phương trình, bất phương trình:**

Những năm gần đây các phương trình đều ra theo xu hướng phải kết hợp 2 phương pháp: 1 là dùng liên hợp để tìm 1 nghiệm rồi sau đó sẽ dùng phương pháp hàm số hoặc đánh giá sau liên hợp để tìm nghiệm còn lại, đây là những dạng rất dễ dàng bấm máy tính để "dò biểu thức liên hợp" và " đánh giá sau liên hợp" nhưng bên cạnh đó cũng có những bài tập với các dạng đặc trưng như đặt ẩn phụ nên khó bấm được máy tính nhưng bằng giác quan chúng ta lại dễ dàng nghĩ về hướng đặt ẩn phụ hoặc đưa về tổng bình phương... nhưng thường những dạng không bấm được máy khá là hiếm.

IV, Nội Dung

***Yết Quyết của bí tịch: Khi một phương trình có nghiệm $x=a,x=b....$ tức là nó có thể được phân tích thành $(x-a)(x-b)f(x)=0$ và $f(x)$ sẽ vô nghiệm hay nó sẽ dương hoặc âm.**

Ta cứ ép làm sao xuất hiện được tích (x-a)(x-b) thì tự phần còn lại là $f(x)$

Các ví dụ đầu anh sẽ trình bày chi tiết 1 chút về cách giải 1 phương trình bằng máy tính, có các bước cơ bản sau:

Bước 1: Tìm tất cả các nghiệm của phương trình

Bước 2: Nghiệm đẹp thì ép liên hợp hoặc ép hàm luôn , nghiệm xấu thì thường là nghiệm của phương trình bậc 2, do đó phải dò xem đó là nghiệm của phương trình bậc 2 nào từ đó ghép căn với biểu thức thích hợp

Bước 3: Đánh giá sau liên hợp, kết luận nghiệm

Quy ước chung: nghiệm đẹp là nghiệm hữu tỉ, nghiệm xấu là nghiệm vô tỉ

Chú ý : Tài liệu có đính kèm Video, các em xem video để hiểu rõ hơn nhé

Để nắm được kĩ hơn nữa và chắc chắn cho điểm 9, các em đọc thêm Bí Kíp Hệ nhé

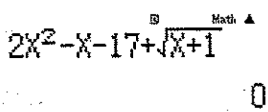
Trước khi vào từng dạng cụ thể, anh sẽ hướng dẫn sơ qua các kĩ năng dùng máy cơ bản.

1. Solve

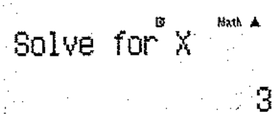
Đây là 1 tính năng tìm nghiệm của phương trình 1 ẩn, dựa vào định lí Rolle, theo anh biết thêm là dựa trên công thức Newton, dù phần sau anh đã viết rất chi tiết cách bấm máy nhưng anh vẫn viết thêm phần này cho các em dễ hiểu hơn nữa.

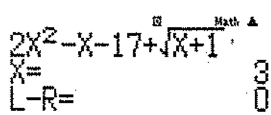
Ví dụ giải phương trình: $2x^2-x-17+\sqrt{x+1}=0$

Bước 1: Nhập phương trình



Bước 2: Tiến hành giải phương trình bằng cách bấm  **khi máy hỏi "Solve for X ? " thì các em chọn 1 số thuộc tập xác định rồi nhập =**





Ta được nghiệm đầu tiên là $x=3$

Đẩy sang trái và nhấn  **lưu luôn phương trình lại**

$2X^2-X-17+\sqrt{X+1}$

0

Sau đó ta sẽ tiến hành lưu nghiệm này vào biến A, để biến X còn để máy lưu nghiệm mới : **RCL X Shift Sto A** ()

Ans→A

3

Bước 3: Sau khi đã lưu được nghiệm thứ nhất, ta sẽ tiến hành dò nghiệm thứ 2 bằng cách giải phương trình: $\frac{2x^2-x-17+\sqrt{x-1}}{x-3}=0$

Ta ấn đẩy lên để tìm phương trình đã lưu rồi ấn sang trái sửa thành:

◀$17+\sqrt{X+1})\div(X-A)$

Sau khi ấn  **thì nhận được thông báo**

A?

3

Các em ấn "="

Solve for X

3

Các em ấn = tiếp để bắt đầu máy tìm nghiệm.

Can't Solve

[AC] :Cancel
[◀][▶]:Goto

Như vậy tức là không còn nghiệm nào nữa phương trình này chỉ có duy nhất 1 nghiệm $x=3$ **mà thôi**

Ta ép đơn giản như sau: ĐK $x \ge -1$

$$2x^2 - x - 17 + \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow (2x^2 - x - 15) + (\sqrt{x+1} - 2) = 0 \Leftrightarrow (x-3)\left(2x+5+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\right) = 0$$

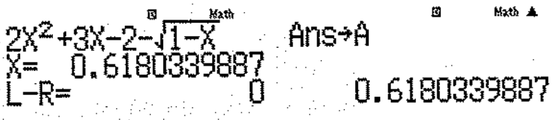
Với $x \ge -1 \to 2x+5+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} > 0$ **nên phương trình có nghiệm** $x = 3$

2. Table

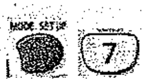
Đây là 1 tính năng thống kê bảng giá trị, thường là khi ta tìm ra nghiệm xấu ta muốn dò xem nó là nghiệm của phương trình bậc 2 nào, hay căn bậc 2 ghép với đa thức nào (2 cái này là tương đương nhé các em)

Ví dụ khi giải PT: $2x^2 + 3x - 2 = \sqrt{1-x}$ $(x \in [0;1])$ em chuyển sang 1 vế rồi bấm **Shift Solve** khi máy hỏi **Solve for X?** thì các em bấm **1=**

ta được nghiệm duy nhất lưu vào biến A



Ta sẽ tiến hành dò phương trình bậc 2 tạo ra nghiệm đó, do 1 nghiệm bị loại bởi điều kiện nên không thể dùng Vi-et đảo, do đó phải dò tìm

Các em vào  **và nhập biểu thức** $f(x) = A^2 + XA$ **nếu các em dùng** $fx-570$ **vn plus hay vinacal có thêm bảng** $g(x)$ **thì nhập** $g(x) = \sqrt{1-A} + XA$ **hoặc các em có thể ấn "=" để bỏ qua** $g(x)$

Máy hỏi Start các em nhập -9= , End các em nhập 9=, Step các em nhập 1=

Ta sẽ quan sát F(x) và G(x) xem giá trị nào nguyên, ta được kết quả:

$F(x): A^2 + A = 1 \to x^2 + x - 1 = 0$ **và** $G(x)\sqrt{1-A} - A = 0 \to \sqrt{1-x} - x = 0$

***Lưu ý: Trong tính năng Table nó có thể tính tối đa 30 giá trị tức là thường các em có thể cho nó chạy từ -14 tới 14 nhưng anh thì muốn nhanh với thấy hệ số nó cũng thường nhỏ hơn 9 nên cho chạy từ -9 tới 9 thôi.**

Do đó chúng ta làm như sau: (anh trích phương trình này từ bài giải hệ B2014 nên thực ra điều kiện chuẩn là $0 \le x \le 1$)

$$2x^2+3x-2=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow 2(x^2+x-1)+x-\sqrt{1-x}=0 \Leftrightarrow (x^2+x-1)\left(2+\frac{1}{x+\sqrt{1-x}}\right)=0$$

Với $x \in [0;1] \to 2+\frac{1}{x+\sqrt{1-x}}>0 \to x^2+x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}(tm) \\ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}(loai) \end{array}\right.$

Các em cứ ghép đúng như ta tính toán được là nó tự hết thôi.

Đây là 2 kĩ năng chính các em cần lắm được, ngoài ra còn nhiều tư duy nâng cao, Skill mạnh khác sẽ được minh họa trong phần phía dưới.

***Một số kinh nghiệm của anh đúc rút ra được:**

+ Phương trình cho 1 nghiệm đẹp đơn thì các em thay trực tiếp vào căn để xem nó bằng bao nhiêu để ghép với số đó

(Nên kiểm tra bằng đạo hàm xem nó có phải nghiệm kép không)

+ Phương trình có 1 nghiệm kép thì các em có $a=(\sqrt{...})'$ do đó có ngay a và thay x vào $\sqrt{.....}=ax+b$ tìm b thôi

+ Phương trình có 2 nghiệm đẹp (hữu tỉ) thì các em tiến hành giải hệ:

$\begin{cases} x=x_1 \to \sqrt{...}=ax_1+b \\ x=x_2 \to \sqrt{...}=ax_2+b \end{cases}$ **từ đó các em sẽ tìm được a,b**

+ Phương trình có 1 nghiệm xấu (vô tỉ) thì dùng table dò xem $\sqrt{.....}=ax+b$

+ Phương trình có 2 nghiệm xấu thì xem tổng và tích của chúng có đẹp không? Nếu đẹp thì áp dụng Vi-et Đảo, không đẹp thì tiến hành dò biểu thức để ghép với căn.

Sau đây thì chúng ta sẽ vào 1 số dạng bài cụ thể

Dạng 1: Phương trình cho nghiệm đẹp

Ví Dụ 1: Giải phương trình: $4\left(2\sqrt{10-2x}-\sqrt[3]{9x-37}\right)=4x^2-15x-33$

Các bài anh đưa ra đều lấy từ các đề thi thử để đảm bảo mức độ của nó phù hợp với kì thi, các ví dụ đầu anh sẽ trình bày rất kĩ từ cách bấm từng phím ra sao nên sẽ hơi dài, các bài sau các em làm tương tự

Nhận xét: thoạt nhìn vào đây là 1 phương trình khá khó ăn vì sao? Có căn bậc 2, căn bậc 3,bình phương, sẽ rất khó cho các em và thường chúng ta cũng nghĩ nó khó nhưng khi sử dụng máy tính thì mức độ khó của nó sẽ giảm rõ rệt vì ta kiểm soát được nó, biết KQ của nó và ta sẽ dắt mũi nó đi theo ý ta

Bước 1 : Tìm hết nghiệm của phương trình : Sử dụng chức năng SOLVE

Trước hết chúng ta sẽ bấm máy xem phương trình có mấy nghiệm, chúng ta chuyển hết phương trình sang 1 vế tí edit tìm nghiệm thứ 2 cho dễ

4(2 √ 10 – 2 Alpha X – shift √ 9 Alpha X -37) – (4 Alpha X x^2 - 15 Alpha X – 33)

$4(2\sqrt{10-2X}-\sqrt[3]{9X-}$▸ ◂$-37)-(4X^2-15X$▸ ◂$-(4X^2-15X-33)$

Sau khi ấn xong các em ấn "=" để lưu luôn lại phương trình không nó mất

Các em ấn SHIFT SOLVE ()máy hỏi Solve for X ?

các em nhấn **0 = rồi máy sẽ dò nghiệm**

Solve for X 0

$4(2\sqrt{10-2X}-\sqrt[3]{9X-}$▸
X= -3
L-R= 0

1 tẹo máy ra luôn x = - 3 (ngon ngon)

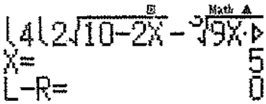
Tiếp theo các em nhấn mũi tên đẩy sang trái edit thành:

(4(2 √ 10 – 2 Alpha X – shift √ 9 Alpha X -37) – (4 Alpha X x^2 - 15 Alpha X – 33)) : (x+3)

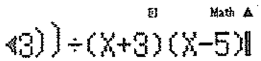
◂$5X-33))\div(X+3)$

Vì phương trình có nghiệm x = -3 nên nó sẽ có nhân tử x + 3 do đó ta phải chia đi nhân tử này để tìm nghiệm khác (các em nên xem thêm bí kíp Hệ, anh nói rất chi tiết phần này)

Các em ấn SHIFT SOLVE máy hỏi Solve for X ? các em nhấn **0 =** **rồi máy sẽ dò nghiệm (thực ra là ấn = luôn cũng được)**

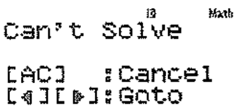


Máy báo thêm 1 nghiệm x = 5 rồi các em lại đẩy sang trái và sửa thành
(.......) : (x+3)(x-5)



Máy tính nó ưu tiên thực hiện nhân (X+3)(X-5) trước nhé, chứ không phải từ trái qua phải đâu, cả cái cụm đó là mẫu

Khi ta tiến hành dò nghiệm thì máy báo **Can't Solve** tức là hết nghiệm rồi đừng áp bức tao nữa :D



Vậy ta có 2 nghiệm là x = - 3 và x= 5

Nghiệm đẹp thì các em thay luôn vào căn. Nếu ép lần lượt từng nghiệm thì ghép căn với 1 số, nếu ép 2 nghiệm cùng 1 lúc thì ghép căn với đa thức bậc nhất thì mới xuất hiện nhân tử bậc 2 được.

Tới đây anh sẽ trình bày cách ép nhân tử theo 2 con đường và đánh giá sau liên hợp

ĐK: $x \le 5$

Với x = - 3 thì $\sqrt{10-2x}=4$ **và** $\sqrt[3]{9x-37}=-4$

Với x = 5 thì $\sqrt{10-2x}=0$ **và** $\sqrt[3]{9x-37}=2$

***Ép theo từng nghiệm**

Ta sẽ ép theo nghiệm x = -3 trước

$\Leftrightarrow 4\left(4+\sqrt[3]{9x-37}\right)+8\left(4-\sqrt{10-2x}\right)+4x^2-15x-81=0$

$$\Leftrightarrow \frac{4(27+9x)}{16-4\sqrt[3]{9x-37}+\left(\sqrt[3]{9x-37}\right)^2}+\frac{8(6+2x)}{4+\sqrt{10-2x}}+(x+3)(4x-27)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=0 \Leftrightarrow x=-3 \\ \frac{36}{16-4\sqrt[3]{9x-37}+\left(\sqrt[3]{9x-37}\right)^2}+\frac{16}{4+\sqrt{10-2x}}+(4x-27)=0(*) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) có nghiệm x = 5, chỗ này khó lòng mà đưa về nhân tử được nên chỉ có dùng đánh giá hoặc hàm số, ta sẽ thử bấm máy coi :

Chúng ta sẽ sử dụng tính năng Table để xem tính đơn điệu của nó:

Các em vào **Mode 7** rồi nhập

$$f(x)=\frac{36}{16-4\sqrt[3]{9x-37}+\left(\sqrt[3]{9x-37}\right)^2}+\frac{16}{4+\sqrt{10-2x}}+(4x-27)$$

Rồi ấn " =" Các em dùng 570 vn thì bỏ qua g(x) bằng cách ấn "="

Với Star? -9 = , End? 5 = , Step? 1 = ?

Ta quan sát cột F(x) thấy nó tăng dần mà không có chỗ nào tăng rồi giảm chứng tỏ hàm số này đồng biến và x =5 sẽ là nghiệm duy nhất từ đó ta có các hướng sau

Cách 1: Trâu bò đạo hàm chứng minh đồng biến

$$f(x)=\frac{36}{16-4\sqrt[3]{9x-37}+\left(\sqrt[3]{9x-37}\right)^2}+\frac{16}{4+\sqrt{10-2x}}+(4x-27)$$

Ta thấy như sau: Nếu đạo hàm toàn bộ thì khá là căng đó nên ta thử xem từng biểu thức có đồng biến không?

Các em khảo sát bằng **Table** cho từng biểu thức

Mode 7 rồi nhập nguyên phương trình vào sau đó cho **Start -9** = và **End 5** = , Step 1 = nhé

và thấy ngay là hàm này đồng biến các giá trị nó tăng dần, đầu tiên ta thử cả biểu thức sau đó ta thử từng biểu thức thấy nó đồng biến , việc tiếp theo là lần lượt chứng minh

$16-4\sqrt[3]{9x-37}+\left(\sqrt[3]{9x-37}\right)^2$ giống như $g(t)=16-4t+t^2, t\le 2$ nó nghịch biến vì

$g'(t)=2t-4\le 0$

Do đó $\dfrac{36}{16-4\sqrt[3]{9x-37}+\left(\sqrt[3]{9x-37}\right)^2}$ sẽ là hàm đồng biến, cái này chắc ít người dạy các em ^_^

Tương tự $\dfrac{16}{4+\sqrt{10-2x}}$ đồng biến do $4+\sqrt{10-2x}$ nghịch biến, $4x-27$ thì cũng đồng biến rồi

Tổng của các hàm số đồng biến là 1 hàm đồng biến, vậy $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty,5]$ và nếu nó có nghiệm thì sẽ là nghiệm duy nhất và nhận thấy x =5 là một nghiệm của phương trình, đó đi thi trình bày y như anh là được

Cách 2: Dùng đánh giá

$$f'(x)=\frac{36}{16-4\sqrt[3]{9x-37}+\left(\sqrt[3]{9x-37}\right)^2}+\frac{16}{4+\sqrt{10-2x}}+4x-27$$

$$(*)\Leftrightarrow\frac{36}{12+\left(\sqrt[3]{9x-37}-2\right)^2}+\frac{16}{4+\sqrt{10-2x}}+4x-27=0$$

Do $x\le 5$ nên $VT\le\frac{36}{12}+\frac{16}{4}+4.5-27=0$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=5$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là -3 và 5

***Ép theo cả 2 nghiệm 1 lúc :** $4\left(2\sqrt{10-2x}-\sqrt[3]{9x-37}\right)=4x^2-15x-33$

ta có 2 nghiệm là $x=-3,x=5$ do đó phương trình sẽ có nhân tử: $(x+3)(x-5)=x^2-2x-15$

Vậy $\sqrt{10-2x}$ và $\sqrt[3]{9x-37}$ ghép với bao nhiêu để được nhân tử trên?

Dễ thấy $\sqrt{10-2x}$ sử dụng liên hợp có dạng

$10-2x-(ax+b)^2=x^2-2x-15\Leftrightarrow-(ax+b)^2=x^2-25$

Anh viết như vậy cho các em dễ hiểu thôi, còn tìm cho nhanh thì khi $x=-3,x=5$ cái $x^2-2x-15=0$ nên ta giải luôn $\sqrt{10-2x}=ax+b$

Với $\begin{cases}x=-3\to-3a+b=4\\x=5\to5a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{-1}{2},b=\frac{5}{2}$ **biểu thức cần ghép là** $\frac{-x+5}{2}$

Tương tự với $x=-3,x=5$ thì : $\sqrt[3]{9x-37}=ax+b$

$\begin{cases}x=-3\to-3a+b=-4\\x=5\to5a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{3}{4},b=\frac{-7}{4}\to\frac{3x-7}{4}$

$$4\left(2\sqrt{10-2x}-\sqrt[3]{9x-37}\right)=4\left[2\sqrt{10-2x}-(5-x)\right]-\left(4\sqrt[3]{9x-37}-(3x-7)\right)-7x-27$$

$$\frac{-4}{2\sqrt{10-2x}+(5-x)}+\frac{27(x-5)}{(3x-7)^2+4(3x-7)\sqrt[3]{9x-37}+16\sqrt[3]{(9x-37)^2}}-4$$

$$4\left(2\sqrt{10-2x}-\sqrt[3]{9x-37}\right)=4x^2-15x-33$$

$$\Leftrightarrow 4\left[2\sqrt{10-2x}-(5-x)\right]-\left(4\sqrt[3]{9x-37}-(3x-7)\right)-7x+27=4x^2-8x-60$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4(x^2-2x-15)}{2\sqrt{10-2x}+(5-x)}-\frac{27(5-x)(x^2-2x-15)}{(3x-7)^2+4(3x-7)\sqrt[3]{9x-37}+16\sqrt[3]{(9x-37)^2}}=4(x^2-2x-15)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x-15)\left(\frac{-4}{2\sqrt{10-2x}+(5-x)}+\frac{27(x-5)}{(3x-7)^2+4(3x-7)\sqrt[3]{9x-37}+16\sqrt[3]{(9x-37)^2}}-4\right)=0$$

$\frac{-4}{2\sqrt{10-2x}+(5-x)}<0, \frac{27(x-5)}{(3x-7)^2+4(3x-7)\sqrt[3]{9x-37}+16\sqrt[3]{(9x-37)^2}}<0$ **do mấy cái mẫu dương, tử âm**

Nên $x^2-2x-15=0 \Leftrightarrow x=-3, x=5$

Đây là 1 cách có lẽ khá kinh điển phần đầu vì phải mò biểu thức liên hợp, tuy trông khá là phức tạp đoạn đầu kì công 1 chút nhưng đoạn sau lại sướng vì không phải đánh giá sau liên hợp, ngược lại ép từng nghiệm thì bước đầu có vẻ dễ nhưng bước sau lại có vẻ khoai hơn.

**Trong các đề thi Đại Học phương trình vô tỉ ít ra hơn so với hệ nên nguồn bài không có nhiều anh sẽ lấy từ một số đề thi thử hay nhé.*

Ví dụ 2: Giải phương trình $\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x$

Phân tích và hướng dẫn:

Khi giải phương trình có căn thì việc đầu tiên là ta phải đặt điều kiện, nhưng 2 biểu thức trong căn kia luôn dương rồi nhé các em nhưng để ý 1 tí $x\le 0$ phương trình tèo ngay :v do đó pương trình sẽ chỉ có nghiệm $x>0$, đi thi trình bày như anh là 10 luôn đó :D

Trước hết là ta sẽ bấm máy giải nghiệm của phương trình trên, ta được nghiệm duy nhất $X=1$

Ta sẽ tiến hành ép duyên như sau, ta thay vào 2 căn để xem giá trị của nó là bao nhiêu

$\sqrt{2x^2+x+1}=4=2x, \sqrt{x^2-x+1}=1=x$

Từ đó ta ghép như sau :

$\sqrt{2x^2+x+1}-2x+\sqrt{x^2-x+1}-x=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x^2+x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}+2x}+\dfrac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=0$

$\Leftrightarrow (1-x)\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}+2x}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}\right)=0$

Quá đơn giản $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}+2x}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}>0$ do $x>0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 1.

Nếu không tinh ý mà nhận ra x > 0 thì vấn đề đánh giá biểu thức sau liên hợp kia cực kì nhức nhối, trong phương pháp nhân liên hợp vấn đề đánh giá biểu thức sau liên hợp luôn là 1 trở ngại không đơn giản

*Đây là 1 cách khác làm theo ẩn phụ khá là trâu bò chấm com

$2x^2+x+1>0$ và $x^2-x+1>0, \forall x \in R \Rightarrow$ TXĐ: R

TH 1. $x \le 0$. PT vô nghiệm

TH 2. x > 0. PT $\Leftrightarrow \sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=3$. Đặt $t=\frac{1}{x}, t>0$

Ta được $\sqrt{2+t+t^2}+\sqrt{1-t+t^2}=3 \Leftrightarrow \sqrt{2+t+t^2}=3-\sqrt{1-t+t^2}$

$\Rightarrow 2+t+t^2=9+1-t+t^2-6\sqrt{1-t+t^2} \Leftrightarrow 3\sqrt{1-t+t^2}=4-t$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4-t\ge 0\\ 9(1-t+t^2)=16-8t+t^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t\le 4\\ 8t^2-t-7=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-\dfrac{7}{8}\end{array}\right.$

Đối chiếu với t > 0 ta được $t=1 \Rightarrow x=1$

Thử lại thấy x = 1 thỏa mãn pt. Vậy pt có nghiệm duy nhất x = 1

Ví dụ 3 :Trích đề thi thử 2016 :

$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}+4+2\sqrt{3+4x-4x^2}=\frac{1}{4}(4x^2-4x+3)(2x-1)^2$

Câu này mà vác vào đề thi thật chắc ngóm gần hết vì nhìn nó phức tạp , ấy thế mà chả khó tẹo nào, cái quan trọng là các em phải nhận định xem giải nó bằng phương pháp gì

Ban đầu có thể nhận dạng được ngay là có thể dùng đặt ẩn phụ

Cứ đặt điều kiện đàng hoàng đã $\frac{-1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$

Ta nhìn sơ sơ sẽ thấy như sau : $3+4x-4x^2=(2x+1)(3-2x)$

Nói thật tới đây, học sinh mới học cũng biết là dạng này đặt ẩn phụ $t=\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}$ cái này cơ bản rồi nhé

Mà $t^2=4+2\sqrt{3+4x-4x^2} \ge 4 \to t \ge 2$

Ta bấm được những nghiệm sau : $X=\frac{3}{2}, X=\frac{-1}{2}$ khi đó $t=2$

VT có dạng : $t+t^2$ ta thể biến đổi VP về dạng hàm u^2+u như vậy xem sao

với chú ý là $X=\frac{3}{2}, X=\frac{-1}{2}$ thì $u=2$ mà thấy cái $(2x-1)^2=4 \to u=\frac{(2x-1)^2}{2}$ ta sẽ cố ép về hàm

$f(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x})=f(\frac{(2x-1)^2}{2})$ xem có được không

$$\frac{1}{4}(4x^2-4x+3)(2x-1)^2=\frac{1}{4}((2x-1)^2+2)(2x-1)^2=\left[\frac{(2x-1)^2}{2}\right]^2+\frac{(2x-1)^2}{2}$$

Ngon rồi, vậy là VT và VP đề có dạng $f(t)=t^2+t$ và nó hoàn toàn đồng biến với $t>0$

Tưởng rằng đã xong mà khó lại càng thêm khó ta giải phương trình $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=\frac{(2x-1)^2}{2}$

Bậc lệch nhau rất nhiều, nên các thanh niên phải để ý chút, bài khó là phải dùng mẹo chứ trâu bò cũng không ăn thua

$$2\sqrt{3+4x-4x^2}=t^2-4 \to 3+4x-4x^2=\left(\frac{t^2-4}{2}\right)^2 \to 4x-4x^2=\left(\frac{t^2-4}{2}\right)^2-3$$

$$\frac{(2x-1)^2}{2}=\frac{4x^2-4x+1}{2}=\frac{4-\left(\frac{t^2-4}{2}\right)^2}{2}=2-\frac{(t^2-4)^2}{8}$$

Vậy ta có PT : $t=2-\frac{(t^2-4)^2}{8}$ cái này chày cối phân tích phương trình thành bậc 4 là ra

$$\leftrightarrow 8t-16+(t^2-4)^2=0 \leftrightarrow t^4-8t^2+8t=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t^3-8t+8=0(*) \end{array}\right.$$

Các em vào Mode 5 rồi ấn 4 để giải phương trình bậc 3 ra 3 nghiệm là x=-3,23.. ; x =2 và 1,236...

Tới đây dễ rồi, ta cần quan tâm nghiệm đẹp x =2 thôi

Ta tiến hành chia $t^3-8t+8=0$ cho $(t-2)$ ta sẽ được $t^3-8t+8=(t-2)(t^2+2t-4)$

Tới đây các em giải nghiệm đối chiếu điều kiện ta có $t=2$

$\rightarrow \sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=2 \leftrightarrow x=\frac{-1}{2}, x=\frac{3}{2}$ và nhớ kết luận nhé

Nhận xét: bài này thực sự là khó không chỉ từ chỗ ép hàm mà còn kết hợp cả đặt ẩn phụ, việc ép hàm thì máy tính giúp ích cực tốt định hướng biểu thức cần ép nhanh nhưng dính tới ẩn phụ thì máy tính chỉ giúp được khi đã đặt ẩn phụ

***Dạng đặc biệt: Phương trình cho nghiệm kép:**

Ví dụ 1: Giải phương trình: $2(x^2-9x+10)\sqrt{x-1}+x^3-8x^2+6x+85=0$

Tiến hành dò nghiệm của phương trình thì được $x=5$

Muốn kiểm tra xem $x=5$ có phải nghiệm kép không các em dùng tính năng tính đạo hàm tại $x=5$

Các em cứ hiểu đơn giản nó có nghiệm kép tức là

$f(x)=(x-a)^2g(x) \rightarrow f'(x)=2(x-a)g'(x)$ nên đạo hàm cũng có nghiệm đó

Các em bấm  **được:**

$$\frac{d}{dx}(\square)\Big|_{x=\square}$$

rồi nhập biểu thức vào

$$\frac{d}{dx}(2(X^2-9X+10)\sqrt{\ } \quad X^2+6X+85)\Big|_{x=5}$$

$$0$$

Khi ấn "=" thì được 0 tức là đạo hàm cấp 1 cũng có nghiệm x=5 do đó x=5 là 1 nghiệm kép.

Ta sẽ làm như sau: $2(x^2-9x+10)\sqrt{x-1}+x^3-8x^2+6x+85=0$

$a=(\sqrt{x-1})'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{1}{4}$ **tìm b thì ta làm như sau:** $\sqrt{x-1}=\frac{1}{4}x+b\Leftrightarrow b=2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$

Do đó ta ghép : $\sqrt{x-1}$ **với** $\frac{x+3}{4}$ **hay** $4\sqrt{x-1}-(x+3)$ **cũng được**

$$2(x^2-9x+10)\sqrt{x-1}+x^3-8x^2+6x+85=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-9x+10).4\sqrt{x-1}+2(x^3-8x^2+6x+85)=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-9x+10).[4\sqrt{x-1}-(x+3)]+(x^3-6x^2-17x+30)+2(x^3-8x^2+6x+85)=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-9x+10).\frac{-(x-5)^2}{4\sqrt{x-1}+(x+3)}+(3x^3-22x^2-5x+200)=0$$
$$\Leftrightarrow -(x^2-9x+10).\frac{(x-5)^2}{4\sqrt{x-1}+(x+3)}+(x-5)^2(3x+8)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-5)^2(-\frac{x^2-9x+10}{4\sqrt{x-1}+(x+3)}+3x+8)=0$$

$$-\frac{x^2-9x+10}{4\sqrt{x-1}+(x+3)}+3x+8=\frac{12x\sqrt{x-1}+3x^2+17x+32\sqrt{x-1}+24-\left(x^2-9x+10\right)}{4\sqrt{x-1}+(x+3)}$$
$$=\frac{2x^2+26x+14+12x\sqrt{x-1}+32\sqrt{x-1}}{4\sqrt{x-1}+(x+3)}>0,\forall x\geq 1$$

Do đó x=5. Xong

Dạng 2: Phương trình cho nghiệm xấu [thường là 1 đẹp 1 xấu (1 trai 1 gái mới đẹp)]

Thường là ưu tiên ép nghiệm xấu trước vì nghiệm lúc đầu bao giờ cũng dễ ép hơn, còn nghiệm đẹp thì lại dễ suy ra từ xét hàm số hơn. (tức là phải nhường con gái, còn con trai như anh em mình khó khăn kiểu gì cũng chiến được hết)

Ví dụ 1: Giải phương trình vô tỷ của Sở Giáo Dục Bắc Ninh

(Có video đính kèm tài liệu nhé các em)

Anh nghĩ đây là dạng khó nhất người ta có thể ra rồi, chủ yếu anh đưa câu này vào để trình bày 3 kĩ thuật chính tìm phương trình chứa nghiệm xấu hoặc tìm biểu thức ghép liên hợp

Các em cứ đặt ĐK đàng hoàng đã : $x\geq -\frac{4}{5}$

Bấm máy thôi : các em nhập phương trình: $3\sqrt{5x+4}+3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12$ này vào, bấm dấu "=" để lưu lại đã

Tiếp theo các em bấm **Shift Solve 0 =**

Máy cho ra luôn nghiệm X = 0, ta cần tìm tất cả các nghiệm

Đẩy sang trái sửa phương trình thành $(3\sqrt{5x+4}+3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12):X$

Tiếp theo các em bấm **Shift Solve** = được **X = 3,797…..**

Các em lưu nghiệm này vào A

Rồi lại sửa thành $(3\sqrt{5x+4}+3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12):X(X-A)$

Tiếp theo các em bấm **Shift Solve = =** cũng hơi lâu máy báo $X=1.10^{-50}$ **nghiệm này xấp xỉ nghiệm 0, tức là vô nghiệm.**

Vậy ta chỉ có 2 nghiệm thôi, làm sao để tìm được nghiệm lẻ nữa kết hợp với nghiệm lẻ kia để áp dụng Vi-et đảo, tìm ra phương trình bậc 2 chứa nghiệm đó? Phương trình vô tỷ họ rất hay cho 1 nghiệm lẻ, 1 nghiệm đẹp, 1 nghiệm lẻ bị loại do điều kiện nhằm gây khó khăn cho chúng ta.

***Cách 1: Mò phương trình tạo ra nghiệm lẻ kia :**

Nghiệm đó là nghiệm của 1 phương trình bậc 2 nào đó luôn có dạng :

$ax^2+bx+c=0$

Thông thường a =1, c nguyên nên chủ yếu là ta sẽ tìm b

Ta đã lưu nghiệm lẻ vào A,

Bây giờ ta lưu lại vào X bằng cách **RCL A Shift STO X**

Các em nhập như sau : $X^2+BX:B=B+1$

Nhập như sau : **Alpha X** x^2 **+ Alpha B Alpha X Alpha : Alpha B Alpha = Alpha B + 1**

Sau đó bấm CALC :

Máy hiện **X? 3,79….** Các em ấn =

Máy hiện **B? …...** Các em ấn **-9 =**

Sau đó các em lại ấn **"="** cho tới khi nào các em nhìn thấy X^2+BX là một số nguyên

ở đây anh bấm được là $B=-3$ khi đó $X^2+BX=3$

Vậy ta có $x^2-3x-3=0$ là nhân tử cần tìm

Ta cũng có thể dùng tính năng table cho nhanh các em vào: **Mode 7**

Máy hiện f(x)= các em nhập : A^2+XA **(X sẽ chạy mà, A là nghiệm) rồi ấn =**

Máy hiện Start ? các em bấm -9 = **(bắt đầu)**

Máy hiện End ? Các em bấm 9 = **(Kết thúc)**

Máy hiện Step ? Các em bấm 1 = (Bước nhảy ví dụ từ 2→3 thì bước là 1)

Nhìn vào bảng ta thấy luôn **X = -3** thì **f(x) = 3** vậy $f(x)=A^2-3A=3$

Vậy ta có $x^2-3x-3=0$. là nhân tử cần tìm

Nếu mà không có giá trị đẹp thì các em lại sửa thành : $2A^2+XA, 3A^2+XA, \ldots$ mò mà, keke, nhưng thường như anh nói thôi hệ số của x^2 là 1.

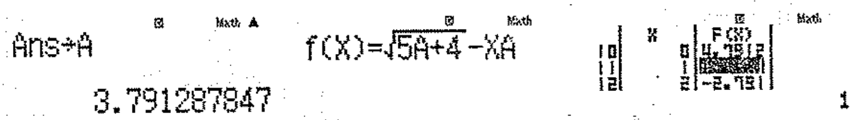
***Cách 2: Mò biểu thức để ghép liên hợp :** các bài toán về căn như trên thường là ghép liên hợp, nhưng vấn đề là ghép với số nào?

Dạng chính là : $\begin{cases}\sqrt{5x+4}=ax+b\\ \sqrt{x+4}=a'x+b'\end{cases}$ ta phải đi tìm a,b,a', b' như sau :

Ta có $\sqrt{5x+4}=ax+b$ (cái này để tí ghép liên hợp đó)

Nhớ kĩ là nghiệm **X = 3,797…..** ta vừa tìm được đã lưu vào biến A nhé, vì khi vào Table thì X sẽ thay đổi

Ta lại mò $\sqrt{5A+4}-X.A$ khi nào nguyên thì dừng



Ta dò được $\sqrt{5A+4}-1.A=1 \to \sqrt{5x+4}-x=1 \Leftrightarrow \sqrt{5x+4}=x+1$

Tương tự $\sqrt{x+4}-x=-1$

Vậy ta có $\sqrt{5x+4}-(x+1)=\dfrac{5x+4-(x^2+2x+1)}{\sqrt{5x+4}+(x+1)}=\dfrac{-(x^2+3x-3)}{\sqrt{5x+4}+(x+1)}$

$$\sqrt{x+4}-(x-1)=\frac{x+4-(x^2-2x+1)}{\sqrt{x+4}+(x+1)}=\frac{-(x^2-3x-3)}{\sqrt{x+4}+(x+1)}$$

Thấy lợi hại chưa các em, mới đầu cũng sẽ thấy hơi khó khăn

Ngoài ra còn 1 dạng nữa là $\sqrt{ax^2+bx+c}=ux+v$ *các em tham khảo ở bài tập chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương phía dưới nhé*

Và nhiều khi các em phải tiến hành dò $2\sqrt{\ldots}=ax+b; 3\sqrt{\ldots}=ax+b; 4\sqrt{\ldots}=ax+b \ldots\ldots$ *chú ý vào cái hệ số trước căn thức nhé*

***Cách 3: Đảo dấu : Mò nghiệm ngoại lai → phương trình nhân tử**

Cơ sở của phương pháp này là khi ta nhân liên hợp, bình phương các kiểu ....

Bản chất vẫn là từ $\sqrt{a} \to a$ tức là $+\infty \to \infty$ cái này làm xuất hiện nghiệm ngoại lai, muốn loại nghiệm ngoại lai ta kết hợp với ĐK ban đầu là vì vậy

Tức là trong quá trình bình phương hay nhân liên hợp vô tình đã tạo ra thêm nghiệm mới nhưng nó bị loại bởi điều kiện của phương trình ban đầu

Tức là $2 \to 4\left\langle\begin{matrix}-2\\2\end{matrix}\right.$ hiểu đơn giản là như vậy

Bởi vậy muốn tìm nghiệm ngoại lai đó chỉ cần giải các phương trình ngoại lai, nghiệm ngoại lai chỉ có tác dụng hỗ trợ việc giải phương trình mà không phải là nghiệm chính thống.

Ta có ;

$\sqrt{5x+4} \to 5x+4\left\langle\begin{matrix}-\sqrt{5x+4}\\\sqrt{5x+4}\end{matrix}\right.$ và $\sqrt{x+4} \to x+4\left\langle\begin{matrix}-\sqrt{x+4}\\\sqrt{x+4}\end{matrix}\right.$

Nghiệm ngoại lai để mà kết hợp được với nghiệm **X = 3,797.....** ra đẹp sẽ là nghiệm của 1 trong số các phương trình ngoại lai sau :

$$\begin{cases}-3\sqrt{5x+4}+3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12=0(1)\\3\sqrt{5x+4}-3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12=0(2)\\-3\sqrt{5x+4}-3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12=0(3)\end{cases}$$

Các em lần lượt bấm nghiệm của phương trình (1), (2), (3) ra rồi nhân với X = **3,797..... đã lưu ở A xem cái nào đẹp là nhận.**

(1)có nghiệm : X=5,402... lưu vào B, nghiệm X = -0,5022.... Lưu vào C, có 2 nghiệm đó thôi

thử tích AB, AC xem có đẹp không? Ko đẹp thì sang phương trình (2)

(2) có nghiệm **X=-0,7696......** lưu vào B, nghiệm **X = -0,79128....** Lưu vào C, nghiệm X = **6,76.....** lưu vào D

hết nghiệm rồi, bây giờ ta xét các tích AB,AC,AD

Thấy ngay tích AC = -3 thử A+C = 3

(3) Không cần giải nữa

Vậy ta có luôn phương trình chứa 1 nghiệm của phương trình ban đầu và nghiệm ngoại lai là $x^2-3x-3=0$

Trong các cách này anh thấy nhanh nhất là cách 2, nhưng cần nhạy bén 1 chút, trâu bò nhất là cách 3 nhưng mà chắc ăn, vừa vừa thì dùng cách 1 cũng được

Vậy là ta đã xác định được có nhân tử $x^2-3x-3=0$ bây giờ xác định lượng liên hợp cần ghép với các căn để ra được biểu thức này (đối với cách 1+3) chứ còn cách 2 thì xác định sẵn rồi còn đâu.

Dùng luôn kết quả của cách 2 ta ghép như sau :

$$3\sqrt{5x+4}+3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12=0$$
$$\Leftrightarrow 3[\sqrt{5x+4}-(x+1)]+3[\sqrt{x+4}-(x-1)]+4(x^2-3x-3)=0$$
$$\Rightarrow \frac{-3(x^2-3x-3)}{x+1+\sqrt{5x+4}}+\frac{-3(x^2-3x-3)}{x-1+\sqrt{x+4}}+4(x^2-3x-3)=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-3x-3)\left(4-\frac{3}{x+1+\sqrt{5x+4}}-\frac{3}{x-1+\sqrt{x+4}}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x-3=0 \\ g(x)=4-\dfrac{3}{x+1+\sqrt{5x+4}}-\dfrac{3}{x-1+\sqrt{x+4}}=0(*) \end{array}\right.$$

Với x = 0 thì $\frac{3}{x+1+\sqrt{5x+4}}=1;\frac{3}{x-1+\sqrt{x+4}}=3$ Do đó tách thành:

$$(*)\Leftrightarrow \frac{3}{x+1+\sqrt{5x+4}}-1+\frac{3}{x-1+\sqrt{x+4}}-3=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2-x-\sqrt{5x+4}}{x+1+\sqrt{5x+4}}+\frac{6-3x-3\sqrt{x+4}}{x-1+\sqrt{x+4}}=0(**)$$

*Với $x\ge 2, VT<0$ do đó phương trình vô nghiệm

* Với $x\in\left[\frac{-4}{5};2\right)$ thì

$$(**)\Leftrightarrow \frac{x^2-9x}{(x+1+\sqrt{5x+4})(2-x+\sqrt{5x+4})}+\frac{3(x^2-5x)}{(x-1+\sqrt{x+4})(2-x+\sqrt{x+4})}=0$$
$$\Leftrightarrow x=0$$

Vì $\frac{x-9}{(x+1+\sqrt{5x+4})(2-x+\sqrt{5x+4})}+\frac{3(x-5)}{(x-1+\sqrt{x+4})(2-x+\sqrt{x+4})}<0\forall x\in\left[\frac{-4}{5};2\right)$

Với : $x^2-3x-3=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$ thử lại chỉ có nghiệm $x=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ thỏa mãn

Vậy phương trình chỉ có 2 nghiệm là : $x = 0$ và $x = \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$

Ví dụ 2: Giải Phương Trình trong đề THPT Quốc Gia 2015

$$\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3} - (x+1)(\sqrt{x+2}-2) = 0$$

ĐK: $x \geq -2$

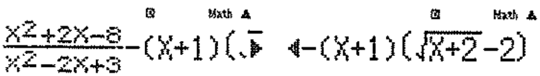
Bước 1: Tìm toàn bộ nghiệm của phương trình

Các em nhập phương trình vào máy như sau :

$\frac{\square}{\square}$ trên tử các em nhập **Alpha X** x^2 **+ 2 Alpha X – 8**

dưới mẫu là **Alpha X** x^2 **- 2 Alpha X +3**

- (Alpha X + 1)($\sqrt{\ }$ **Alpha X + 2 -2)**



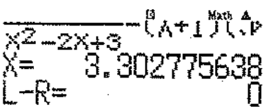
Ấn '=' để lưu ngay lại cái đã

Các em gọi lệnh **SOLVE** bằng cách bấm : **Shift Solve**

***Giải thích :**

Alpha X : là gọi biến X , Solve là lệnh giải phương trình 1 ẩn, bậc bao nhiêu cũng được miễn là trong khả năng tính toán của máy tính

Sau khi tiến hành gọi lệnh Solve , máy sẽ hiện " Solve for X" các em nhập 0 =



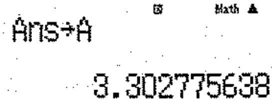
Máy báo nghiệm : X = 3,302775638…

Sai số R = 0 (cái này cũng quan trọng đó)

Các em tìm nghiệm thứ 2 như sau :

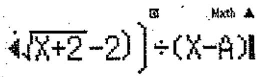
+ Trước hết phải lưu phương trình lại bằng cách: **Ấn sang trái, Ấn = để lưu phương trình lại**

+ Lưu nghiệm thứ 1 vào A : **RCL X Shift Sto A** ()



+ Sau đó bấm đẩy lên để tìm lại phương trình sau khi tìm được thì Ấn sang trái sửa thành:

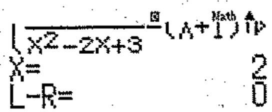
$$\left(\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3}-(x+1)(\sqrt{x+2}-2)\right):(X-A)$$



Sau đó lại bấm Shift Solve để giải nghiệm thứ 2

Máy hỏi **A? 3,30277….** Các em **bấm** =

Máy hỏi **Solve for X 3,30277….** Các em bấm = **luôn** , 10s sau máy ra nghiệm **X = 2**



Sau đó các em tiếp tục lặp lại và tìm nghiệm thứ 3 thì máy có hiện tượng **đơ lâu** hoặc hiện **can't solve** tức là vô nghiệm

Vậy phương trình chỉ có 2 nghiệm là **X =2 và X = 3,30277….**

Vậy phương trình có **nhân tử (X-2) và 1 nhân tử có dạng phương trình bậc 2**

Ta sẽ tiến hành xử nghiệm X=2 trước:

Với X =2 thì $\sqrt{x+2}=2$ **vậy ta chỉ việc liên hợp lên**

$$\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3}-(x+1)\frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+4}{x^2-2x+3}-\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ \dfrac{x+4}{x^2-2x+3}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}=0(*) \end{array}\right.$$

Ta thấy x= 3,30… phải là nghiệm của (*) ta sẽ dùng cách dò biểu thức liên hợp cách 2 thì được $\sqrt{x+2}=x-1$ **ở đây ta có thể dùng hàm số hoặc liên hợp**

Chi tiết như sau :

Cách 1: Mò phương trình bậc 2 : dùng Table

Hiện tại nghiệm x= 3,3… đang được lưu ở biến **A**

Các em vào **Mode 7**

Nhập $f(x) = A^2 + X.A$ **rồi bấm =**

Start? Các em bấm -9 =

End? Các em bấm 9 =

Step ? Các em bấm là 1 =

Chúng ta nhận được 1 cái bảng , và ta phải tìm giá trị F(x) đẹp ta thấy tại X = - 3 thì F(x) = 1

Vậy nghiệm vừa rồi chính là nghiệm của phương trình bậc 2 :

$x^2 - 3x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$

Cách 2: Mò biểu thức liên hợp

Dựa vào lý thuyết : $\sqrt{x+2} = ax + b$ anh trình bày rất chi tiết ở ví dụ trên

Ta tiếp tục dùng tính năng **Table**

Nhập $f(x) = \sqrt{A+2} - X.A$ **rồi bấm =**

Start? Các em bấm -9 =

End? Các em bấm 9 =

Step ? Các em bấm là 1 =

Chúng ta nhận được 1 cái bảng , và ta phải tìm giá trị F(x) đẹp ta thấy tại X = 1 thì F(x) = -1

Lưu ý là ban đầu anh hướng dẫn $f(x) = \sqrt{A+2} + X.A$ thì cũng được đỡ bị nhầm dấu nhưng mà nó không được xuôi vì dò $\sqrt{...} = ax + b \rightarrow b = \sqrt{...} - ax$ mà

Vậy : $\sqrt{x+2} - 1.x = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x - 1$

Với mỗi cách ta sẽ thu được những biểu thức khác nhau nhưng cho cùng nghiệm, tương ứng với các cách làm khác nhau

Với : $\sqrt{x+2} = x - 1$ **thì làm ta nghĩ về hàm số**

Với $x^2 - 3x - 1 = 0$ **thì làm ta nghĩ về liên hợp**

Anh sẽ trình bày tương ứng 2 cách như sau

Cách 1 : Hàm số

(*) tương đương:

$(x+4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)=(x+1)(x^2-2x+3)$

$\Leftrightarrow\left[\sqrt{x+2}^2+2\right]\left(\sqrt{x+2}+2\right)=\left[(x-1)^2+2\right]\left[(x-1)+2\right]$

Ta phải cố ép sao cho xuất hiện được $f(\sqrt{x-2})=f(x-1)$ khi ta đã biết được KQ từ bấm máy rồi thì việc ép cực dễ không phải mò mãi nữa

Xét hàm: $f(t)=(t+2)(t^2+2)=t^3+2t^2+2t+4$

$f'(t)=3t^2+4t+2=t^2+2(t^2+2t+1)=t^2+2(t+1)^2>0\forall t$

Hàm này đồng biến suy ra: $x-1=\sqrt{x+2}\Rightarrow\left[\begin{array}{c} x\geq 1 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}(tm)\end{array}\right.$

Cách dùng liên hợp:

Ta phải ép về x^2-3x-1 tức là $\sqrt{x+2}$ phải ghép với (x-1)

(Video anh nói khá chi tiết chỗ này)

Thêm bớt thoải mái đi các em

$(x+4)\left(\sqrt{x+2}-(x-1)\right)+(x+4)(x+1)=(x+1)(x^2-2x+3)$

$\Leftrightarrow(x+4)\dfrac{-(x^2-3x-1)}{\sqrt{x+2}+x-1}=(x+1)(x^2-3x-1)$

Tự nó sẽ xuất hiện nếu ta cứ ghép được 1 thằng thì phần thừa và thằng còn lại ghép lại sẽ lại xuất hiện được.

$$\Leftrightarrow(x^2-3x-1)\left(\frac{x+4}{\sqrt{x+2}+x-1}+x+1\right)=0$$

Vấn đề là làm sao ta chứng minh được $\dfrac{x+4}{\sqrt{x+2}+x-1}+x+1>0$?

Biểu thức trên sẽ dương ngay nếu x > 1

Ta có :

$(x+1)(x^2-2x+3)=(x+4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)$

$\Leftrightarrow x^3-x^2+x+3=2x+8+(x+4)\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow x^3-x^2-x-5=(x+4)\sqrt{x+2}\geq 0$

$\Leftrightarrow x^3-4\geq x^2+x+1>0\Leftrightarrow x>\sqrt[3]{4}>1$

Vậy $\frac{x+4}{\sqrt{x+2}+x-1}+x+1>0$

Suy ra $x^2-3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}(x>1)$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là x = 2 và $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

***Kĩ thuật liên hợp nâng cao: Đánh giá sau liên hợp và truy ngược dấu**

+ Thường khi ta nhân liên hợp xong, đưa được về phương trình tích thì nó có dạng:

$(x-a)(\frac{\dots\dots}{\sqrt{\dots}+\dots}+\dots.)=0$ ta có 2 trường hợp cơ bản:

+ Nếu biểu thức phức tạp phía sau kia có 1 nghiệm thì thường ta dùng hàm số chứng minh nó đơn điệu để chỉ ra đó là nghiệm duy nhất, cái này sinh ra là do các em tìm ra 2 nghiệm nhưng lại ép lần lượt từng nghiệm 1, nếu ép cả 2 cùng lúc thì ban đầu phức tạp nhưng lúc sau lại dễ.

+ Nếu biểu thức phức tạp đó vô nghiệm thì ta thường dùng đánh giá để khẳng định nó > 0 hoặc < 0 , ở đây thường là dùng so sánh bình thường

Cả 2 trường hợp này muốn thành công đều phải phụ thuộc vào điều kiện chặt của biến, qua các ví dụ phía trên các em thấy rằng xử lí biểu thức sau liên hợp luôn là 1 vấn đề không dễ.

Ngoài ra thì còn dùng 1 cách khác là ta đánh giá ngay từ đầu thêm bớt thích hợp để biểu thức sau liên hợp của chúng ta dương ngay, kĩ thuật này có tên là truy ngược dấu

Ví dụ 1: Giải phương trình : $2x^3+3x^2-17x-26=2\sqrt{x+1}$

Điều kiện : $x\geq -1$

Ta bấm máy và phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$ vậy $\sqrt{x+1}=2$

Vậy thông thường ta sẽ làm như sau:

$$2x^3+3x^2-17x-30+2(2-\sqrt{x+1})=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(2x^2+9x+10-\frac{1}{2+\sqrt{x+1}}\right)=0$$

Rõ ràng tới đây đánh giá có vẻ khó, vậy vấn đề là tại sao nó lại xuất hiện dấu "–" chứ nếu là dấu "+" thì đã xong.

Ở đây là ta đánh giá chưa đúng ,

Khi x càng lớn thì $2-\sqrt{x+1}<0$ trong khi bọn $2x^3+3x^2-17x-30$ nó dương

Vậy là chúng trái dấu nhau nên ta phải đảo ngược lại nhân tử là $\sqrt{x+1}-2>0$

Muốn làm được điều này ta nhân thêm $\sqrt{x+1}$ để đảo vị trí căn cho nhau chứ giữ nguyên có mà hòa cả làng, tức là : $\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-2)=(x+1)-2\sqrt{x+1}$

Hay nói một cách khác là ở đây thay vì ghép $\sqrt{x+1}$ với 2 thì ta ghép với $\frac{x+1}{2}$

Theo con đường tráo căn thức

$$2x^3+3x^2-18x-27+\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-2)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}}+2x^2+9x+9\right)=0$$

$$\frac{\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}}+2x^2+9x+9>0, \forall x\ge -1$$

Theo con đường, ghép biểu thức liên hợp khác :

$$2x^3+3x^2-18x-27+(x+1-2\sqrt{x+1})=0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}}+2x^2+9x+9\right)=0$$

Vậy mục đích của truy ngược dấu là gì? Là làm cho biểu thức sau liên hợp nếu có dấu trừ sẽ biến lại thành dấu "+" và phải truy ngược từ đầu để các biểu thức cùng dương hoặc cùng âm mà chủ yếu là biến từ thằng đang mang gông cùm thành thằng tự do và thằng đang yên ấm bên vợ con thì bắt nó đeo gông cùm, keke

Có hiểu ý anh không ý chỉ, đơn giản có 2 cách hiểu cho truy ngược dấu:

1 là tráo căn thức cho nhau, 2 là ghép biểu thức liên hợp khác . Thực chất chúng như nhau mà thôi.

Về bản chất với $x=3$ ta có những cách ghép liên hợp sau:

$\sqrt{x+1}-2$ hoặc $\frac{x+1}{2}-\sqrt{x+1}$ (*) hoặc

$$\frac{x^2+1}{5}-\sqrt{x+1}=\frac{1}{5}\frac{\left[\left(x^2+1\right)^2-25(x+1)\right]}{x^2+1+5\sqrt{x+1}}=\frac{1}{3}.\frac{x^4+2x^2-25x-24}{x^2+2+3\sqrt{x+1}}=\frac{1}{3}.\frac{(x-3)(x^3+3x^2+11x+8)}{x^2+2+3\sqrt{x+1}}$$

Vấn đề là em chọn biểu thức nào để tiến hành ghép liên hợp cho phù hợp với bài toán, thông thường là cách (*) đó nhé

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x-1}=x^2-1$

Điều kiện $x\ge 1$ và nghiệm là x = 2

Chúng ta chuyển hết sang 1 vế và thấy như sau: $\underbrace{x^2-1}_{>0}\underbrace{-\sqrt[3]{x+6}}_{0<}\underbrace{-\sqrt{x-1}}_{0<}=0$

Vậy là anh em cùng dòng không cùng lòng rồi nên phải truy sát 2 em cuối để nó thay đổi tư tưởng ngay

Ta biến đổi như sau : $[x^2-1-\frac{x+6}{4}-(x-1)]+\frac{\sqrt[3]{x+6}}{4}(\sqrt[3]{(x+6)^2}-4)+\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}-1\right)=0$

Đoạn này nhân 4 lên cho đẹp nhé

$$\left(4x^2-5x-6\right)+\sqrt[3]{x+6}(\sqrt[3]{(x+6)^2}-4)+4\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(4x-3)+\sqrt[3]{x+6}.\frac{(x+6)^2-64}{\sqrt[3]{(x+6)^4}+16+4\sqrt[3]{(x+6)^2}}+4\sqrt{x-1}.\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(4x-3+\sqrt[3]{x+6}.\frac{x+14}{\sqrt[3]{(x+6)^4}+16+4\sqrt[3]{(x+6)^2}}+\frac{4\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}\right)=0\Leftrightarrow x=2$$

Do $4x-3+\sqrt[3]{x+6}.\frac{x+14}{\sqrt[3]{(x+6)^4}+16+4\sqrt[3]{(x+6)^2}}+\frac{4\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}>0,\forall x\ge 1$

Tổng kết: truy ngược dấu này áp dụng khá mạnh cho phương trình có nghiệm duy nhất là nghiệm hữu tỉ, còn nghiệm lẻ thì khả năng cao sẽ khó hơn nhiều

***Một số dạng khó bấm máy, máy tính chỉ phụ giúp được phần nào thường là dạng đặt phần phụ, còn máy tính nó giúp ép liên hợp và ép hàm số và khảo sát cũng như đánh giá rất tốt nhưng mà có lẽ em ẩn phụ quá xinh đẹp**

Ví dụ 1 : Giải bất phương trình: $\frac{8-x}{\sqrt{9-x}}-\frac{2-x}{\sqrt{x-1}}\ge 3$.(trích chuyên Hà Tĩnh)

Lời giải:

Bài này dạng nhìn qua là biết ốp ẩn phụ, nó rất chuẩn dạng

ĐK : 1< x < 9 (*). Với đk (*) ta có : **(1)** $\Leftrightarrow\sqrt{9-x}+\sqrt{x-1}-\left(\frac{1}{\sqrt{9-x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)\ge 3$

$\Leftrightarrow\sqrt{9-x}+\sqrt{x-1}-\left(\frac{\sqrt{9-x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{9-x}.\sqrt{x-1}}\right)\ge 3$ **(2)** Đặt $t=\sqrt{9-x}+\sqrt{x-1}$, $t>0$.

Ta có: $8 < t^2 = 8 + 2\sqrt{(9-x).(x-1)} \le 8 + 9 - x + x - 1 = 16$.

$\Rightarrow 2\sqrt{2} < t \le 4$ (**) và $\sqrt{(9-x).(x-1)} = \dfrac{t^2-8}{2}$. Khi đó BPT (**2**) trở thành:

$t - \dfrac{2t}{t^2-8} \ge 3 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 - 10t + 24 \ge 0$ (do (**)).

$\Leftrightarrow (t+3).(t-2).(t-4) \ge 0 \Leftrightarrow t \ge 4$. Kết hợp với (**) ta suy ra t = 4 hay $\sqrt{9-x} + \sqrt{x-1} = 4 \Leftrightarrow x = 5$. *Vậy BPT đã cho có tập nghiệm* $T = \{5\}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $4(2x^2+1) + 3(x^2-2x)\sqrt{2x-1} = 2(x^3+5x)$ (Vinh lần 3)

Lời giải: Bài này các em bấm máy hoàn toàn được nhé, thậm chí rất là đẹp không cần ẩn phụ luôn, nhưng mà tìm được phương trình không bấm máy được hiếm quá nên anh cứ đưa tạm vào vì nó có cách liên quan tới ẩn phụ

Điều kiện : $x \ge \frac{1}{2}$ Phương trình tương đương:

$$3x(x-2)\sqrt{2x-1} = 2(x^3 - 4x^2 + 5x - 2)$$
$$\Leftrightarrow 3x(x-2)\sqrt{2x-1} = 2(x-2)(x^2-2x+1)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 2 \\ 3x\sqrt{2x-1} = 2(x^2-2x+1)(1) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) tương đương với :

$$2(2x-1) + 3x\sqrt{2x-1} - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2.\frac{2x-1}{x^2} + 3.\frac{\sqrt{2x-1}}{x} - 2 = 0(2)$$

Đặt : $t = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}, t \ge 0$. Khi đó phương trình (2) trở thành

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(t+2) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}, t \ge 0$$

Suy ra $x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm 2\sqrt{3}$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2, x = 4 \pm 2\sqrt{3}$

Ví dụ 3: Giải phương trình $4x^2 - 8x + \sqrt{2x+3} = 1$ ($x \in R$)

Lời giải: Bài này vẫn bấm máy ngon nhé các em, nhưng nó có dạng đặc biệt nên anh đưa vào

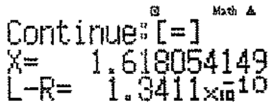
Biến đổi: $4x^2 - 8x + \sqrt{2x+3} = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + \frac{9}{4} = (2x+3) - \sqrt{2x+3} + \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \left(2x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+3} - \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{3}{2} = \sqrt{2x+3} - \frac{1}{2} \quad (1) \\ 2x - \frac{3}{2} = -\sqrt{2x+3} + \frac{1}{2} \quad (2) \end{array}\right.$$

Ta được $x=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$, $x=\frac{5-\sqrt{21}}{4}$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $x^2+3x+2=x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{3x+2}$

Các em tìm ra được nghiệm



Với nghiệm này thì ta có: $\begin{cases} x=\sqrt{x+1} \\ x+1=\sqrt{3x+2} \\ \sqrt{x+1}+1=\sqrt{3x+2} \end{cases}$

Ta sẽ có những cách làm như sau:

*Cách 1: Dùng bất đẳng thức Cô-si:

Ta có: ĐK: $x\ge\frac{-2}{3}$

$$x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{3x+2}\le|x|\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{3x+2}\le\frac{x^2+(x+1)}{2}+\frac{(x+1)^2+(3x+2)}{2}=x^2+3x+2=VT$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} x=\sqrt{x+1} \\ x+1=\sqrt{3x+2} \\ x\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

*Cách 2: Các em có thể đưa về tổng bình phương như ví dụ 3 phía trên

Nhân 2 vào 2 vế ta được:

$$2x^2+6x+4-2x\sqrt{x+1}-2(x+1)\sqrt{3x+2}=0$$
$$\Leftrightarrow(x-\sqrt{x+1})^2+(x+1-\sqrt{3x+2})^2=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases} x-\sqrt{x+1}=0 \\ x+1-\sqrt{3x+2}=0 \end{cases}$$

Một ví dụ nữa tương tự: Chuyên Sư Phạm 2016

Ví dụ 5: Giải phương trình $\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=2x^2+2x+2$

Bước 1 : Ta tìm ra được nghiệm duy nhất $x=-1$ khi tìm được nghiệm duy nhất thì chú ý xem nó có phải nghiệm kép hay không nhé các em

Bước 2: Xét đạo hàm cấp 1 tại $x=-1$ ta được $x=-1$ là nghiệm kép

Ta có: $\begin{cases}\sqrt{3x^3+2x^2+2}=1\\ \sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=1\end{cases}$ đo đó ta ghép các căn với 1

Nhân 2 vào nhé các em

$4x^2+4x+4-2\sqrt{3x^3+2x^2+2}-2\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=0$

$\Leftrightarrow\left(3x^3+2x^2+2-2\sqrt{3x^3+2x^2+2}+1\right)+\left(-3x^3+x^2+2x-1-2\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}+1\right)+(x^2+2x+1)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x^3+2x^2+2}-1\right)^2+\left(\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}-1\right)^2+(x+1)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{3x^3+2x^2+2}=1\\ \sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=1\\ x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1$

3.Advance Skill

*** Ép Liên Hợp – Super Skill : Đây là phương pháp thông dụng nhất rất hay được sử dụng.**

Nguyên lí chung: Khi tìm ra nhân tử ta cứ tách làm sao để khi liên hợp ra được nhân tử đã tìm được từ ban đầu thì sẽ ra được phương trình tích

Ví dụ 1: Giải bất phương trình sau trên tập R:

$$\frac{5x-13-\sqrt{57+10x-3x^2}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{19-3x}}+2\sqrt{x+3}\ge x^2+2x+9$$

Điều kiện $\begin{cases}-3\le x\le\dfrac{19}{3}\\ x\ne 4\end{cases}$

Đầu tiên phải rút gọn đã

$$\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{19-3x}\right)\left(2\sqrt{x+3}+\sqrt{19-3x}\right)}{\sqrt{x+3}-\sqrt{19-3x}}+2\sqrt{x+3}\ge x^2+2x+9$$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x+3}+\sqrt{19-3x}\ge x^2+2x+9$

Bấm máy phương trình có nghiệm $x=-2, x=1$ nên nhân tử x^2+x-2

Thay vào căn thức và tính được $\sqrt{x+3}-\dfrac{x+5}{3}$ và $\sqrt{19-3x}-\dfrac{13-x}{3}$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x+3}-\frac{x+5}{3}\right)+\left(\sqrt{19-3x}-\frac{13-x}{3}\right)\ge x^2+x-2$$

$$\Leftrightarrow\frac{4\left(-x^2-x+2\right)}{9\left(\sqrt{x+3}+\dfrac{x+5}{3}\right)}+\frac{-x^2-x+2}{9\left(\sqrt{19-3x}+\dfrac{13-x}{3}\right)}\ge x^2+x-2$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-2)\left[\frac{4}{9\left(\sqrt{x+3}+\frac{x+5}{3}\right)}+\frac{1}{9\left(\sqrt{19-3x}+\frac{13-x}{3}\right)}\right]\le 0 \qquad (*)$$

Vì $\frac{4}{9\left(\sqrt{x+3}+\frac{x+5}{3}\right)}+\frac{1}{9\left(\sqrt{19-3x}+\frac{13-x}{3}\right)}>0$ với mọi $x\in\left[-3;\frac{19}{3}\right]\setminus\{4\}$

Do đó $(*)\Leftrightarrow x^2+x-2\le 0\Leftrightarrow -2\le x\le 1$ (thoả mãn)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-2;1]$.

Ví dụ 2: (D-2014) Giải bất phương trình:

$(x+1)\sqrt{x+2}+(x+6)\sqrt{x+7}\ge x^2+7x+12$ Điều kiện : $x\ge -2$

Bấm máy thấy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$ ta sẽ ghép đơn giản như sau:

$$(x+1)(\sqrt{x+2}-2)+(x+6)(\sqrt{x+7}-3)-x^2-2x+8\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{(x+6)(x-2)}{\sqrt{x+7}+3}-(x-2)(x+4)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}-(x+4)\right)\ge 0$$

Với $x\ge -2$ thì chưa thể khẳng định ngay được biểu thức kia nên ta sẽ đánh giá sơ cấp như sau:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}-(x+4)<\frac{x+2}{2}+\frac{x+6}{2}-(x+4)=0$$

Do đó ta mới kết luận được $x\le 2$ Kết hợp với điều kiện suy ra $-2\le x\le 2$

***Ép Hàm – PRO Skill đây là 1 phương pháp rất mạnh trong khi ép liên hợp bó tay và xu hướng dùng phương pháp này ngày càng nhiều.**

Lí thuyết: Nếu hàm f đơn điệu trên $[a,b]$ và $u,v\in[a,b]$ mà $f(u)=f(v)\Rightarrow u=v$

Nguyên lí chung: Khi tìm ra được $\sqrt{....}=ax+b$ ta sẽ chuyển hết căn sang 1 vế đa thức 1 vế, rồi sắp xếp lại bậc sao cho hợp lí để có thể đưa chúng về cùng 1 hàm

Các bài xét hàm số thường có dạng $(ax+b)\sqrt{cx+b}$ hoặc $cx+d+\sqrt[3]{ax+b}$

Ví dụ 1: Giải phương trình: $2x^3+9x^2-6x(1+2\sqrt{6x-1})+2\sqrt{6x-1}+8=0$

ĐK: $x\ge\frac{1}{6}$

Bấm máy phương trình có 2 nghiệm là : $A\approx 0,5857...;B=3,4142...$ nhận thấy

$A+B=4, AB=2$ nên có nhân tử $X^2-4X+2=0$ do đó : $\sqrt{6x-1}$ sẽ ghép liên hợp với (x+1) để xuất hiện nhân tử trên

Vậy kết quả là $\sqrt{6x-1}=x+1$ Nếu ép theo liên hợp sẽ rất trâu

Do đó ta sẽ nghĩ về pp hàm số :

$f(\sqrt{6x-1})=f(x+1)$

$2x^3+9x^2-6x(1+2\sqrt{6x-1})+2\sqrt{6x-1}+8=0$

$\Leftrightarrow 2x^3+9x^2-6x+8=2.6x\sqrt{6x-1}-2\sqrt{6x-1}$

$\Leftrightarrow 2(x^3+3x^2+3x+1)+3x^2-12x+6=2(6x-1)\sqrt{6x-1}$

$\Leftrightarrow 2(x+1)^3+3(x^2+2x+1)-18x+3=2(6x-1)\sqrt{6x-1}$

$\Leftrightarrow 2(x+1)^3+3(x+1)^2=2(6x-1)\sqrt{6x-1}+3(6x-1)$

Xét hàm : $f(t)=2t^3+3t^2$

Để ý là : $x\ge\frac{1}{6}\to x+1>0; \sqrt{6x-1}\ge 0$ nên chỉ cần xét $t\ge 0$

ta có $f'(t)=6t^2+6t\ge 0, \forall t\ge 0$ do đó hàm đồng biến nên

$\sqrt{6x-1}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge\frac{1}{6} \\ x^2-4x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{2} \\ x=2-\sqrt{2}\end{array}\right.(tm)$ KL: ....

Ví dụ 2: Giải phương trình: $(x+5)\sqrt{x+1}+1=\sqrt[3]{3x+4}$

ĐK: $x\ge -1$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1$ do đó $\sqrt{x+1}+1=\sqrt[3]{3x+4}$

Ép về hàm : $f(\sqrt{x+1}+1)=f(\sqrt[3]{3x+4})$

$(x+5)\sqrt{x+1}+1=\sqrt[3]{3x+4}$

$[(x+1)\sqrt{x+1}+3(x+1)+3\sqrt{x+1}+1]+\sqrt{x+1}-3(x+1)=\sqrt[3]{3x+4}$

$\left[\sqrt{x+1}+1\right]^3+(\sqrt{x+1}+1)=(3x+4)+\sqrt[3]{3x+4}$

Xét hàm : $f(t)=t^3+t$ ta có:

$f'(t)=3t^2+1>0\forall t$ vậy hàm đồng biến suy ra

$\sqrt{x+1}+1=\sqrt[3]{3x+4}$

$\begin{cases} u=\sqrt{x+1}\ge 0 \\ v=\sqrt[3]{3x+4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u+1=v \\ x=u^2-1=\frac{v^3-4}{3}\end{cases}\Rightarrow 3\left[(v-1)^2-1\right]=v^3-4\Leftrightarrow v^3-3v^2+6v-4=0$

$\Leftrightarrow (v-1)(v^2-2v+4)=0\Leftrightarrow v=1\to x=-1(tm)$

Ví dụ 3: Trích đề thi thử chuyên Tuyên Quang: $(x-36)\sqrt{8-x}=\sqrt[3]{3x+3}+12x-99$

Đồ long CASIO say : $x=-1, x=-73, x=8$

X	-73	-1	8
$\sqrt{8-x}$	9	3	0
$\sqrt[3]{3x+3}$	-6	0	3

Dễ thấy : $\sqrt{8-x}+\sqrt[3]{3x+3}=3\leftrightarrow 3-\sqrt{8-x}=\sqrt[3]{3x+3}$

Ép liên hợp – Super Skill: Các em tự ép

Ép Hàm – PRO Skill : $f(3-\sqrt{8-x}) = f(\sqrt[3]{3x+3})$

$(x-36)\sqrt{8-x} = \sqrt[3]{3x+3} + 12x - 99$

$\Leftrightarrow [27 - 27\sqrt{8-x} + 9(8-x) - (8-x)\sqrt{8-x}] + (3-\sqrt{8-x}) = (3x+3) + \sqrt[3]{3x+3}$

$\Leftrightarrow (3-\sqrt{8-x})^3 + (3-\sqrt{8-x}) = (3x+3) + \sqrt[3]{3x+3}$

Xét hàm $f(t) = t^3 + t, t \in R$

$f'(t) = t^2 + 1$ do đó hàm đồng biến

$\Rightarrow 3 - \sqrt{8-x} = \sqrt[3]{3x+3}$ Đặt :

$\begin{cases} u = \sqrt{8-x} \\ v = \sqrt[3]{3x+3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 - u = v \\ v^3 = 3(8-u^2) + 3 \end{cases} \rightarrow v^3 = 24 - 3(3-v)^2 + 3 \leftrightarrow v^3 + 3v^2 - 18v = 0 \rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v = 3 \\ v = -6 \end{cases}$ Done!

Ví dụ 4.Giải phương trình: $(x+2)\left(\sqrt{x^2+4x+7}+1\right) + x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right) = 0$

Phương trình có nghiệm $x = -1 \rightarrow x + 2 = -x$

$(x+2)\left(\sqrt{x^2+4x+7}+1\right) + x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right) = 0$

$(x+2)\left(\sqrt{(x+2)^2+3}+1\right) + x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right) = 0$

$(x+2)\left(\sqrt{(x+2)^2+3}+1\right) = (-x)\left(\sqrt{(-x)^2+3}+1\right)$

Xét hàm : $f(t) = t(\sqrt{t^2+3}+1), t \in R$

$f'(t) = (\sqrt{t^2+3}+1) + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+3}} > 0$ do đó hàm đồng biến suy ra $x+2 = -x \Leftrightarrow x = -1$

***Kĩ thuật ép căn với căn (Học cho biết, keke)**

Bình thường chúng ta thường ghép căn với một đa thức $ax+b$ nhưng có những bài ta sẽ làm thêm được 1 cách nữa là căn ghép căn do đôi khi tìm ra phương trình bậc 2 tạo ra nghiệm lẻ khó, nhưng mối quan hệ giữa 2 căn lại đẹp.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^2 - x - 2 = \sqrt{3-x} + \sqrt{x}$

Để tìm nhanh mối quan hệ giữa 2 căn này trước hết cần tìm nghiệm của phương trình đã : $x = 2,618...$

Sau đó các em lưu : $\begin{cases} \sqrt{3-x} \rightarrow A \\ \sqrt{x} \rightarrow B \end{cases}$

Sau đó vào Table nhập : $f(x) = A + XB$ nếu em dùng vn và vinacal sẽ có thêm g(x) thì các em nhập : $g(x) = XA + B$ rồi cho Start -9= và end 9= step 1=

Còn các em dùng es thì nếu lần 1 không thấy giá trị đẹp thì bấm lần 2.

$$3(x+1)\sqrt{2x+1}-2x^2$$
$$=3(x+1)\sqrt{2x+1}-2(x^2-6x-3)-(12x+6)$$
$$=3\sqrt{2x+1}(x+1-2\sqrt{2x+1})-2(x^2-6x-3)$$
$$=3\sqrt{2x+1}.\frac{(x+1)^2-4(2x+1)}{x+1+2\sqrt{2x+1}}-2(x^2-6x-3)$$
$$=3\sqrt{2x+1}.\frac{x^2-6x-3}{x+1+2\sqrt{2x+1}}-2(x^2-6x-3)$$

Vậy ta có:

$$(x-1).(x^2-6x-3)(\frac{3\sqrt{2x+1}}{x+1+2\sqrt{2x+1}}-2)<0$$
$$\Leftrightarrow (x-1).(x^2-6x-3)[-\sqrt{2x+1}-2(x+1)]<0$$
$$\Leftrightarrow (x-1).(x^2-6x-3)[-(2x+1)-\sqrt{2x+1}-1]<0$$

Mà $-(2x+1)-\sqrt{2x+1}-1=-[(2x+1)+\sqrt{2x+1}+1]=-[(\sqrt{2x+1}+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]<0$

$$\Rightarrow (x-1).(x^2-6x-3)>0$$

Tới đây thì các em, biểu diễn 3 nghiệm trên 2 trục số:

Từ sơ đồ xét dấu và điều kiện ta có:

$$\begin{cases} x\ge -\frac{1}{2} \\ x\in\left(3-2\sqrt{3};1\right)\cup\left(3+2\sqrt{3};+\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(3-2\sqrt{3};1\right)\cup\left(3+2\sqrt{3};+\infty\right)$$

Vậy tập nghiệm của BPT là: $T=\left(3-2\sqrt{3};1\right)\cup\left(3+2\sqrt{3};+\infty\right)$

Ngoài ra còn 1 cách cũng khá hay nữa đưa phương trình về bậc 4 vì bản chất khi bình phương lên nó ra bậc 4 mà

Các em làm như phần anh hướng dẫn hệ khối B – 2014 để tìm 4 nghiệm (ở bài này có 2 thôi, sau khi tìm ra được 2 nghiệm các em sử dụng Vi-et đảo ra 1 phương trình bậc 2, lấy phương trình bậc 4 ban đầu chia cho phương trình bậc 2 này là được phương trình bậc 2 vô nghiệm còn lại nhé)

$f(X)=A+XB$ $\qquad$ $g(X)=XA+B$

Do đó : $\sqrt{3-x}-\sqrt{x}+1=0$

Biến đổi thành: $\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{x}+1\right)\left((x+1)\sqrt{3-x}+x\sqrt{x}+\sqrt{x(3-x)}+1\right)=0$

Trông nó nguy hiểm hẳn :D

Cách này chỉ làm cho bài toán phức tạp thêm, do đó anh không giới thiệu nhiều cho các em, nhưng cách này lại mạnh để biết mối quan hệ 2 căn nếu ép được về hàm số cụ thể thì các em tham khảo ở **bài tập cuối phần giải Hệ**

Cách bình thường thì ép về : $(x^2-3x+1)\left(1+\frac{1}{x-2+\sqrt{3-x}}+\frac{1}{x-1+\sqrt{x}}\right)=0$

Tổng kết: Các em nên làm theo cách bình thường cho dễ hiểu dễ xử lí, nếu những bài toán có 2 căn thức, khi các em bấm máy tìm nghiệm khá là xấu mà không mò ra được phương trình bậc 2 tạo ra nó thì các em đi tìm mối quan hệ giữa 2 căn thức xem có gì đặc biệt không, và sau khi tìm ra mối quan hệ thường ép về hàm số là chính, vì ép nhân tử thì rất kinh khủng.

***Các bài rèn luyện có hướng dẫn.**

Bài 1: Trích Đề thi thử THPT Chuyên Vinh lần 3 2015 ngày 17/5/2015

Giải bất phương trình : $3(x^2-1)\sqrt{2x+1}<2(x^3-x^2)$

Giải: ĐK: $x\ge -\frac{1}{2}$

$(1)\Leftrightarrow (x-1)[3(x+1)\sqrt{2x+1}-2x^2]<0$

Bấm máy giải hết nghiệm của phương trình: $3(x+1)\sqrt{2x+1}-2x^2$

3 (Alpha X + 1) √ 2 Alpha X + 1 – 2 Alpha X x^2

Sau đó bấm Shift Solve "Solve for X" các em bấm 0=

Được nghiệm X

Được 2 nghiệm là X = 6,464… và X = -0,464….

Các em lưu vào A và B, để ý rằng AB = -3 và A+B = 6 nên chắc chắn có nhân tử x^2-6x-3

Ta sẽ cố gắng ép để có nhân tử:

$3(x+1)\sqrt{2x+1}-2x^2=0$
$3(x+1)\sqrt{2x+1}=2x^2$
$\Rightarrow 9(x+1)^2(2x+1)=4x^4$
$\Leftrightarrow 9(x^2+2x+1)(2x+1)=4x^4$
$\Leftrightarrow 9(2x^3+5x^2+4x+1)=4x^4$
$\Leftrightarrow -4x^4+18x^3+45x^2+36x+9=0$
$\Leftrightarrow (x^2-6x-3)(-4x^2-6x-3)=0$

Từ đây ta thấy: $3(x+1)\sqrt{2x+1}-2x^2 \Leftrightarrow (x^2-6x-3)(-4x^2-6x-3)$

Vậy kết hợp với đề bài ta sẽ có

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-6x-3)(-4x^2-6x-3)<0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-6x-3)>0$

Ta kết luận tương tự như trên

Bài 2: BPT Chuyên Vinh lần 4 – 2015 : $1+\sqrt{x-1}\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)^3 \geq 0$

Giải:

Điều kiện : $x \geq 1$

Bước 1 các em tìm nghiệm của "phương trình" dùng Solve

Ta tìm được 1 nghiệm duy nhất x = 2 với nghiệm này:

$\begin{cases}\sqrt{x-1}=1\\ \sqrt{2x}=2\end{cases}$ vậy ta sẽ ép nhân tử để xuất hiện (x-2)(... >0 hoặc 0<.....) ≥ 0

Ta làm như sau:

$1+\sqrt{x-1}\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)^3 \geq 0$

$\Leftrightarrow 1-\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}\left(\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)^3+1\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2-x}{1+\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}.\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}+1\right)\left[\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)^2-\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)+1\right] \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2-x}{1+\sqrt{x-1}}+\left(\sqrt{2x}-2+3-3\sqrt{x-1}\right).\sqrt{x-1}.\left[\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)^2-\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)+1\right] \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2-x}{1+\sqrt{x-1}}+\left(\dfrac{2(x-2)}{\sqrt{2x}+2}+\dfrac{3(2-x)}{1+\sqrt{x-1}}\right).\sqrt{x-1}.\left[\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)^2-\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)+1\right] \geq 0$

$\Leftrightarrow (2-x)\left[\dfrac{1}{1+\sqrt{x-1}}+\left(\dfrac{-2}{\sqrt{2x}+2}+\dfrac{3}{1+\sqrt{x-1}}\right)\sqrt{x-1}.\left[\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)^2-\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)+1\right]\right] \geq 0$

Với $x \geq 1 \Rightarrow 2+\sqrt{2x}>1+\sqrt{x-1} \Rightarrow \dfrac{3}{1+\sqrt{x-1}}-\dfrac{2}{\sqrt{2x}+2}>0$

Do đó : $\left(\frac{-2}{\sqrt{2x}+2}+\frac{3}{1+\sqrt{x-1}}\right)\sqrt{x-1}.\left[\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)^2-\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)+1\right]\geq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}+\left(\frac{-2}{\sqrt{2x}+2}+\frac{3}{1+\sqrt{x-1}}\right)\sqrt{x-1}.\left[\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)^2-\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)+1\right]>0$$

Bất phương trình tương đương:

$2-x\geq 0 \Leftrightarrow 1\leq x\leq 2$.

Bài 3: (Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương) : $\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=\frac{5(x-3)}{\sqrt{2x^2+18}}$

Gợi ý:

Điều kiện: $-1\leq x\leq 4$

Bấm máy thì phương trình có các nghiệm là: $x=-1, x=\frac{3}{2}, x=3$ ta ép nghiệm x=3

trước vì VP có luôn nhân tử đó rồi

Nhân liên hợp cho em VT ta được :

$$5(x-3)\sqrt{2x^2+18}=5(x-3)(\sqrt{x+1}+2\sqrt{4-x})$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=3 \\ \sqrt{2x^2+18}=\sqrt{x+1}+2\sqrt{4-x}\,(*) \end{array}\right.$$

Tới đây (*) có 2 nghiệm các em có thể ép về nhân tử $2x^2-x-3=0$, tự cày nhé, anh thì đi trâu bò bình phương, đổi gió tí :D

$$2x^2+18=x+1+4(4-x)+4\sqrt{(x+1)(4-x)}$$
$$\Leftrightarrow 4\sqrt{(x+1)(4-x)}-2x^2-1-3x=0$$

Anh cố tình làm theo cách bình phương này để bổ sung thêm 1 mẹo nữa là dò biểu thức liên hợp

$\sqrt{ax^2+bx+c}=ux+v$ tương tự như các ví dụ trên thôi

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{-x^2+3x+4}+x+5\right)\left(\sqrt{-x^2+3x+4}-x-1\right)=0$$

Do cái điều kiện nên : $\sqrt{-x^2+3x+4}+x+5>0$ do đó $\sqrt{-x^2+3x+4}-x-1=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-x-3=0 \Leftrightarrow x=-1, x=\frac{3}{2}$ đối chiếu điều kiện và kết luận nhé

Bài 4. Giải phương trình: $\frac{2x^5+3x^4-14x^3}{\sqrt{x+2}}=\left(4x^2+14x^3+3x^2+2\right)\left(1-\frac{2}{\sqrt{x+2}}\right)$ **ĐK:** $x>-2$

Chúng ta tìm được 2 nhân tử là $(x-2)(x^2+x-1)$

$$PT \Leftrightarrow x^3(2x^2+3x-14)=(4x^4+14x^3+3x^2+2)\left(\sqrt{x+2}-2\right)$$

$$\Leftrightarrow x^3(x-2)(2x+7)\left(\sqrt{x+2}+2\right)=(4x^4+14x^3+3x^2+2)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^3(2x+7)\left(\sqrt{x+2}+2\right)=4x^4+14x^3+3x^2+2(*) \end{array}\right.$$

$(*)\Leftrightarrow x^3(2x+7)\sqrt{x+2}=3x^2+2$ từ đây ta thấy ngay $x>0$ nhé

Đoạn này có 2 cách:

***Cách 1: Ép liên hợp:**

$$x^3(2x+7)\sqrt{x+2}=3x^2+2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+2+x^3(2x+7)\left(x+1-\sqrt{x+2}\right)-x^3(2x+7)(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+2-x^3(2x+7)(x+1)+x^3(2x+7)\left(\frac{x^2+x-1}{x+1+\sqrt{x+2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+2-x^3(2x^2)+x^3(2x+7)\left(\frac{x^2+x-1}{x+1+\sqrt{x+2}}\right)=0$$

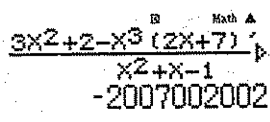
$$\Leftrightarrow -(x^2+x-1)(2x^3+7x^2+2x+2)+\left(\frac{x^3(2x+7)}{x+1+\sqrt{x+2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-1)\left(\frac{x^3(2x+7)}{x+1+\sqrt{x+2}}-(2x^3+7x^2+2x+2)\right)=0$$

Để phân tích $3x^2+2-x^3(2x+7)(x+1)=(x^2+x+1)(....)$

Thì các em xét $\dfrac{3x^2+2-x^3(2x+7)(x+1)}{(x^2+x+1)}=(....)$

nhập xong bấm CALC thay X=1000 vào được



Tức là phân giá trị biểu thức bằng: $-(2+2x+7x^2+2x^3)$

Từ cuối lên các em cứ lấy 3 chữ số 1 cọc được 1 hạng tử.

Với $x>0$ thì

$$\frac{x^3(2x+7)}{x+1+\sqrt{x+2}}-(2x^3+7x^2+2x+2)=\frac{x^3(2x+7)-x^2(2x+7)(x+1+\sqrt{x+2})}{x+1+\sqrt{x+2}}-(2x+2)$$

$$=\frac{-x^2(2x+7)(1+\sqrt{x+2})}{x+1+\sqrt{x+2}}-(2x+2)\le -2<0$$

Vậy $x^2+x-1=0\Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (do $x>0$)

***Cách 2: Ép hàm số:** $x^3(2x+7)\sqrt{x+2}=3x^2+2$ **từ đây có** $x>0$

Để đưa về dạng như anh đã dạy việc ép hàm thì ta phải chia đi x^3

$$PT\Leftrightarrow(2x+7)\sqrt{x+2}=\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\Leftrightarrow 2(x+2)\sqrt{x+2}+3\sqrt{x+2}=\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x}$$

Xét hàm: $f(t)=2t^3+3t, t>0$ có $f'(t)=6t^2+3>0$ do đó hàm đồng biến

$$f(\sqrt{x+2})=f\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow\sqrt{x+2}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ \textbf{(do } x>0\textbf{)}$$

Kết luận nghiệm : $x=2, x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Bài 5.Giải phương trình: $x^3+x-7=\sqrt{x^2+5}$

Hướng dẫn

Ta bấm được phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$

$$x^3+x-10-(\sqrt{x^2+5}-3)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)(x^2+2x+5)-\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\left(x^2+2x+5-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}\right)=0$$

Để đánh giá được các em phải tìm điều kiện chặt của x

Ban đầu ta có $x^3+x-7=\sqrt{x^2+5}>\sqrt{5}>2\Rightarrow x^3+x>2\Leftrightarrow(x-1)(x^2+x+2)>0\rightarrow x>1$

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}\le\frac{x+2}{3+\sqrt{5}}<\frac{x+2}{5}$$

$$\Rightarrow x^2+2x+5-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}\ge x^2+2x+5-\frac{x+2}{5}=x^2+\frac{9}{5}x+\frac{23}{5}=(x+0.9)^2+3.79>0$$

Tới đây xong rồi các em suy ra x = 2

Bài 6. Giải phương trình: $\sqrt{x+1}=\frac{x^2-x-2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}-3}$

Hướng dẫn

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+2=\frac{x^2-x-6}{\sqrt[3]{2x+1}-3} \Leftrightarrow 1=\frac{(x+2)(\sqrt{x+1}-2)}{\sqrt[3]{2x+1}-3}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)+\sqrt[3]{2x+1}=(x+1)\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}$$

Hàm số $f(t)=t^3+t$ đồng biến trên **R** do đó phương trình $\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}=\sqrt{x+1}$

$$\begin{cases} x\ge -1/2 \\ (2x+1)^2=(x+1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1/2 \\ x^3-x^2-x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1/2 \\ x=0, x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=0, x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình có nghiệm $S=\{0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$

Bài 7. Giải bất phương trình $\sqrt{x+1}\ge\frac{x^2-x-2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}-3}$ trên tập hợp số thực.

Hướng dẫn

ĐK: $x\ge -1, x\ne 13$

Khi đó: $\sqrt{x+1}\ge\frac{x^2-x-2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}-3} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+2\ge\frac{x^2-x-6}{\sqrt[3]{2x+1}-3} \Leftrightarrow 1\ge\frac{(x+2)\left(\sqrt{x+1}-2\right)}{\sqrt[3]{2x+1}-3}, (*)$

Nếu $\sqrt[3]{2x+1}-3>0 \Leftrightarrow x>13$ (1)

thì (*) $\Leftrightarrow (2x+1)+\sqrt[3]{2x+1}\ge(x+1)\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}$

Do hàm $f(t)=t^3+t$ là hàm đồng biến trên **R**, mà (*):

$$f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)\ge f\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}\ge\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^3-x^2-x\le 0$$

Suy ra: $x\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[0;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \xrightarrow{DK(1)}$ VN

Nếu $\sqrt[3]{2x+1}-3<0 \Leftrightarrow -1\le x<13$ (2)

thì (2*) $\Leftrightarrow (2x+1)+\sqrt[3]{2x+1}\le(x+1)\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}$

Do hàm $f(t)=t^3+t$ là hàm đồng biến trên **R**, mà (2*):

$$f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)\le f\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}\le\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\le x\le -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} -\frac{1}{2}<x<13 \\ (2x+1)^2\le(x+1)^3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Suy ra: $x\in[-1;0]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right) \xrightarrow{DK(2)} x\in[-1;0]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};13\right)$

Kết Luận: $x\in[-1;0]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};13\right)$

Bài 8. Giải bất phương trình: $\sqrt{9x^2+3}+9x-1\ge\sqrt{9x^2+15}$

Hướng dẫn

Nhận xét : $9x-1\ge\sqrt{9x^2+15}-\sqrt{9x^2+3}\ge 0\Rightarrow x\ge\frac{1}{9}$

$$bpt \Leftrightarrow \left(\sqrt{9x^2+3}-2\right)+3(3x-1)\ge\sqrt{9x^2+15}-4$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2-1}{\sqrt{9x^2+3}+2}+3(3x-1)-\frac{9x^2-1}{\sqrt{9x^2+15}+4}\ge 0$$

$$(3x-1)\left[\frac{3x+1}{\sqrt{9x^2+3}+2}-\frac{3x+1}{\sqrt{9x^2+15}+4}+3\right]\ge 0$$

$$(3x-1)\left[(3x+1)\left(\frac{1}{\sqrt{9x^2+3}+2}-\frac{1}{\sqrt{9x^2+15}+4}\right)+3\right]\ge 0\Rightarrow 3x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{3}$$

kết hợp các Đk suy ra nghiệm của BPT là $x\ge\frac{1}{3}$

Bài 9. Giải bất phương trình $8x^3-2x\ge(4+\sqrt{x-1})(x+14+8\sqrt{x-1})$.

Hướng dẫn

Điều kiện : $x\ge 1$

$(1)\Leftrightarrow 8x^3-2x\ge(4+\sqrt{x-1})(x-1+8\sqrt{x-1}+16-1)\Leftrightarrow 8x^3-2x\ge(4+\sqrt{x-1})^3-(4+\sqrt{x-1})$ (2)

Xét hàm số $f(t)=t^3-t; f'(t)=3t^2-1>0\forall t\ge 1\Rightarrow$ f(t) đồng biến trên $[1;+\infty)$ mà (2) có $f(2x)\ge f(4+\sqrt{x-1})$ và $2x, 4+\sqrt{x-1}\in[1;+\infty)$ nên $(2)\Leftrightarrow 2x\ge 4+\sqrt{x-1}$

$$\Leftrightarrow 2x-4\ge\sqrt{x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-4\ge 0\\(2x-4)^2\ge x-1\\x-1\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\4x^2-17x+17\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\x\le\frac{17-\sqrt{17}}{8}; x\ge\frac{17+\sqrt{17}}{8}\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\frac{17+\sqrt{17}}{8}$$

Bài 10. Giải bất phương trình:

$$x^5+x^4-x^2+4x+2\ge(x^4+1).\sqrt[3]{x^3+4x^2}$$

Hướng dẫn

Bất phương trình tương đương với:

$$(x^4+1).\sqrt[3]{x^3+4x^2}+x^3+4x^2\le(x+1)^3+(x^4+1)(x+1)\ (*).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+(x^4+1)t$ trên **R**, ta có:

$f'(t)=3t^2+(x^4+1)>0,\forall t\in R\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên **R**.

Vì vậy $(*)\Leftrightarrow f(\sqrt[3]{x^3+4x^2})\le f(x+1)\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^3+4x^2}\le x+1\Leftrightarrow\frac{3-\sqrt{13}}{2}\le x\le\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S=\left[\frac{3-\sqrt{13}}{2};\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$.

Bài 11.(THPT Lương Thế Vinh): $\sqrt{2x+2}-2\sqrt{3-x}-\dfrac{12x-20}{\sqrt{9x^2-18x+25}}=0$

Hướng dẫn

Bấm máy được nghiệm $x=\dfrac{5}{3}\Rightarrow 3x-5=0$ và $x\approx 2,8856\to 9x^2-18x-23=0$

$$pt\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x+2}-2\sqrt{3-x}\right)-\frac{4(3x-5)}{\sqrt{9x^2-18x+25}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{6x-10}{\sqrt{2x+2}+2\sqrt{3-x}}=\frac{4(3x-5)}{\sqrt{9x^2-18x+25}}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-5=0\Leftrightarrow x=5/3\\ 2\left(\sqrt{2x+2}+2\sqrt{3-x}\right)=\sqrt{9x^2-18x+25}(*)\end{array}\right.$$

Bình phương (*) lên ta được:

$$4\left(4\sqrt{2(x+1)(3-x)}-2x+14\right)=9x^2-18x+25$$

$$\Leftrightarrow 16\sqrt{2(x+1)(3-x)}-2x-8=9x^2-18x-23$$

$$\Leftrightarrow\left(9x^2-18x-23\right)+8\left(x-1-2\sqrt{2(x+1)(3-x)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(9x^2-18x-23\right)+8.\frac{\left(x^2-2x+1\right)-8(-x^2+2x+3)}{x-1+2\sqrt{2(x+1)(3-x)}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(9x^2-18x-23\right)\left(1+\frac{8}{x-1+2\sqrt{2(x+1)(3-x)}}\right)=0(**)$$

Ta có $\left(\sqrt{2x+2}+2\sqrt{3-x}\right)^2=4\sqrt{2(x+1)(3-x)}-2x+14\ge 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2(x+1)(3-x)}\ge x+7\Leftrightarrow x-1+2\sqrt{2(x+1)(3-x)}\ge 2x+6\ge 4>0$ do $x\in[-1,3]$

$$\Rightarrow 1+\frac{8}{x-1+2\sqrt{2(x+1)(3-x)}}>0$$

Do đó: $(**)\Rightarrow 9x^2-18x-23\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3+4\sqrt{2}}{3}\\ x=\dfrac{3-4\sqrt{2}}{3}\end{array}\right.$

Thay $x=\dfrac{3-4\sqrt{2}}{3}$ thấy không thỏa mãn nên loại.

Do đó phương trình có 2 nghiệm : $x=\dfrac{5}{3},x=\dfrac{3+4\sqrt{2}}{3}$

Bài 12. Giải phương trình : $\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{6(x^2+2x+4)}-2(x+2)}\ge\dfrac{1}{2}$

Hướng dẫn

Trước hết là cứ quy đồng bấm máy cho dễ, nhưng mà để quy đồng được thì phải xem mẫu khác O hay chưa và âm hay dương còn giữ hay đảo dấu của bất

ĐK $x \ge -2$

$\sqrt{6(x^2+2x+4)}-2(x+2)=\dfrac{2x^2-4x+8}{\sqrt{6(x^2+2x+4)}+2(x+2)}>0$ (vô nghiệm)

Do đó cái mẫu khác O, còn không thì oánh giá nó dương cũng được nhưng mà thế cầu kì quá .

Ta sẽ bấm máy tìm nghiệm: $\sqrt{x+2}-2\ge\frac{1}{2}\left[\sqrt{6(x^2+2x+4)}-2(x+2)\right]$

Phương trình được nghiệm $x\approx 5.46 \to x^2-4x+8=0 \Leftrightarrow x=2\sqrt{x+2}$ những bài có mối quan hệ kiểu này thường là chia đi đặt ẩn phụ, em có thể tham khảo ở phần dưới giải hệ cũng có 1 kiểu mối quan hệ $\sqrt{...}=ax$ và nghĩ tới chuyện chia đi và đặt ẩn phụ. Ta có:

$\sqrt{6(x^2+2x+4)}-2x-2\sqrt{x+2}\le 0$

Ta nên chia cho $\sqrt{x+2}\ge 0$

Trước hết các em nhận xét : $x=-2$ không là nghiệm của bpt do đó ta chia đi $\sqrt{x+2}$ được :

$\sqrt{6.\dfrac{x^2}{x+2}+12}-2\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}-2\le 0$ đặt $t=\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$

$\Rightarrow \sqrt{6t+12}-2t-2\le 0 \Leftrightarrow \sqrt{6t+12}\le 2(t+1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge -1 \\ 6t+12\le 4(t+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge -1 \\ 2(t-2)^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow t=2$

$\Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}=2 \Leftrightarrow x^2-4x-8=0 \Rightarrow x=2+2\sqrt{3}$

Bài 13. Giải bất phương trình: $\dfrac{300x^2-40x-2-\sqrt{10x-1}-\sqrt{3-10x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}\le 0$

Hướng dẫn

Điều kiện: $\dfrac{1}{10}\le x\le\dfrac{3}{10}$

Phải xem cái mẫu âm hay dương mới quy đồng, BPT là phải cẩn thận

Ta có: $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}<2, \forall x\in\left[\dfrac{1}{10};\dfrac{3}{10}\right]$(dùng BĐT: $a+b\le\sqrt{2(a^2+b^2)}$)

Bpt $\Leftrightarrow 300x^2-40x-2-\sqrt{10x-1}-\sqrt{3-10x}\ge 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{10x-1}-1)+(\sqrt{3-10x}-1)\le 300x^2-40x-4$

$\Leftrightarrow \dfrac{10x-2}{\sqrt{10x-1}+1}+\dfrac{2-10x}{\sqrt{3-10x}+1}\le (10x-2)(30x+2)$

$\Leftrightarrow (10x-2)\left[\dfrac{1}{\sqrt{10x-1}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{3-10x}+1}-30x-2\right]\le 0 \quad (*)$

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{10x-1}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{3-10x}+1}-30x-2$

$f'(x)=-\dfrac{5}{\sqrt{10x-1}(\sqrt{10x-1}+1)^2}-\dfrac{5}{\sqrt{3-10x}(\sqrt{3-10x}+1)^2}-30<0, \forall x\in(\frac{1}{10};\frac{3}{10})$

Mặt khác $f(x)$ liên tục trên $[\frac{1}{10};\frac{3}{10}]$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $[\frac{1}{10};\frac{3}{10}]$

$\Rightarrow f(\frac{3}{10})\le f(x)\le f(\frac{1}{10})<0$(có thể đánh giá)

Do đó bất phương trình $(*)\Leftrightarrow 10x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{5}$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm bất phương trình là: $\frac{1}{5}\le x\le\frac{3}{10}$

Bài 14. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+2}+x^2-x-2\le\sqrt{3x-2}\quad (x\in R)$.

Hướng dẫn

Điều kiện: $x\ge\frac{2}{3}$ (*).

$\sqrt{x+2}+x^2-x-2\le\sqrt{3x-2}\Leftrightarrow(\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2})+(x^2-x-2)\le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2(x-2)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+(x-2)(x+1)\le 0\Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{-2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+x+1\right)\le 0$ (1).

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+x+1$ trên $\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$.

$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2})^2}+1>0, \forall x>\frac{2}{3}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Suy ra: $f(x)\ge f(\frac{2}{3})=\dfrac{10-3\sqrt{6}}{6}>0, \forall x\ge\frac{2}{3}$.

Do đó: (1) $\Leftrightarrow x-2\le 0\Leftrightarrow x\le 2$.

Kết hợp với (*), suy ra bất phương trình có nghiệm $x\in\left[\frac{2}{3};2\right]$.

Bài 15. Giải bất phương trình sau: $\dfrac{1+2\sqrt{x}-2\sqrt{x^2+3x+1}}{1-2\sqrt{x^2-x+1}}>1$

Hướng dẫn

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 0\\ x^2+3x+1\ge 0\\ 1-2\sqrt{x^2-x+1}\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 0$

Ta có $2\sqrt{x^2-x+1}=2\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\geq\sqrt{3}>1\quad(\forall x\geq 0)$

suy ra $1-2\sqrt{x^2-x+1}<0$

$BPT\Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{x^2-x+1}<\sqrt{x^2+3x+1}$

Các em có thể làm theo cách ép liên hợp rồi tham khảo cách đặt ẩn phụ này

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{x+\frac{1}{x}-1}<\sqrt{x+\frac{1}{x}+3}$ (Vì x = 0 không thỏa mãn bất phương trình)

Đặt $x+\frac{1}{x}=t\Rightarrow t\geq 2$ vì $x>0$.

Ta có $1+\sqrt{t-1}<\sqrt{t+3}\Leftrightarrow 2\sqrt{t-1}<3\Leftrightarrow t<\frac{13}{4}$

Suy ra $2\leq t<\frac{13}{4}\Rightarrow 2\leq x+\frac{1}{x}<\frac{13}{4}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{1}{x}\geq 2\\ x+\frac{1}{x}<\frac{13}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2\geq 0\\ 4x^2-13x+4<0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{13-\sqrt{105}}{8}<x<\frac{13+\sqrt{105}}{8}$$

Bài 16. Giải phương trình: $x\sqrt{x-1}=(2x-3)^2(2x-2)+x-2$.

Hướng dẫn:

TXĐ D = $[1;+\infty)$

Phương trình $\Leftrightarrow(x-1)\sqrt{x-1}+(x-1)+\sqrt{x-1}=(2x-3)^3+(2x-3)^2+2x-3$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t^3+t^2+t\Rightarrow f'(t)=3t^2+2t+1\Rightarrow f'(t)>0,\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên **R**.

Phương trình (1) có dạng $f(\sqrt{x-1})=f(2x-3)$. Từ hai điều trên phương trình (1)

$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=2x-3$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 3/2\\ x-1=4x^2-12x+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 3/2\\ 4x^2-13x+10=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$$

Bài 17. Giải bất phương trình $\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}+x^2\leq\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+1$ trên tập số thực.

Hướng dẫn

Điều kiện $x>-3$. Bất pt đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}-\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+x^2-1\leq 0\Leftrightarrow\frac{\frac{x^2+x+2}{x+3}-\frac{4}{x^2+3}}{\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}}+x^2-1\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\frac{(x^2-1)(x^2+x+6)}{(x+3)(x^2+3)}}{\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}}+x^2-1\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left[\frac{x^2+x+6}{(x+3)\left(x^2+3\right)\left(\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}\right)}+1\right]\le 0$$

$\Leftrightarrow x^2-1\le 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$ (Với $x>-3$ thì biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương). Vậy tập nghiệm của bất pt là $S=[-1;1]$

Bài 18. Giải phương trình : $3\sqrt{x+6}+2\sqrt{4-x}=x+8$

Hướng dẫn

ĐK: $\begin{cases} x+6\ge 0\\ 4-x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow -6\le x\le 4$

$$(1)\Leftrightarrow\left(x+6-3\sqrt{x+6}\right)+\left(2-2\sqrt{4-x}\right)=0\Leftrightarrow\frac{(x+6)^2-9(x+6)}{x+6+3\sqrt{x+6}}+\frac{4-4(4-x)}{2+2\sqrt{4-x}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-3)(x+6)}{x+6+3\sqrt{x+6}}+\frac{4(x-3)}{2+2\sqrt{4-x}}=0\Leftrightarrow(x-3)\left(\frac{x+6}{x+6+3\sqrt{x+6}}+\frac{4}{2+2\sqrt{4-x}}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x=3$ (nhận) $\left(Do\ \frac{x+6}{x+6+3\sqrt{x+6}}+\frac{4}{2+2\sqrt{4-x}}>0\ \forall x\in[-6;4]\right)$

Vậy phương trình có nghiệm : $x=3$

Bài 19. Giải bất phương trình: $x^3+(3x^2-4x-4)\sqrt{x+1}\le 0$

Hướng dẫn

Khi các em bấm máy thì tìm ra được quan hệ là $\sqrt{x+1}=x$ tức là các em có thể ép về $x^2-x-1=0$ ngoài ra nó cũng gợi ý để ta làm theo ẩn phụ là : chia đi

TH 1. $\sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow x=-1$. Thỏa mãn BPT

TH 2. $\sqrt{x+1}>0\Leftrightarrow x>-1$. Chia hai vế cho $\left(\sqrt{x+1}\right)^3$ ta được

$\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3+3\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^2-4\le 0$. Đặt $t=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ và giải BPT ta được $t\le 1$

$$t\le 1\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{x+1}}\le 1\Leftrightarrow x\le\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le x<0\\ \begin{cases}x\ge 0\\ x^2-x-1\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le x<0\\ \begin{cases}x\ge 0\\ \frac{1-\sqrt5}{2}\le x\le\frac{1+\sqrt5}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow -1\le x\le\frac{1+\sqrt5}{2}.$$

Kết hợp $x>-1$ ta được $-1<x\le\frac{1+\sqrt5}{2}$.

Vậy tập nghiệm của BPT là S = $\left[-1;\frac{1+\sqrt5}{2}\right]$

Nhớ tìm ra là $\sqrt{\dots}=ax\to$ gợi ý là chia đi có thể đặt ẩn phụ.

Bài 20. Giải phương trình: $(2x-1)^2+\frac{16x^3-23x^2-x+7}{x^2-x+3}\left(2\sqrt{x-x^2}-1\right)=0$

Hướng dẫn

Điều kiện : $x\in[0;1]$

Bấm máy được nghiệm $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm kép $\to (2x-1)^2=0 \to 2\sqrt{x-x^2}=1$

Nghiệm lẻ : $x=0,276.. \to 5x^2-5x+1=0 \to \sqrt{x-x^2}=-2x+1$

Các em ép từng nghiệm được :

$$(2x-1)^2\left(1-\frac{16x^3-23x^2-x+7}{\left(x^2-x+3\right)\left(2\sqrt{x-x^2}+1\right)}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \to x=0.5 \\ 16x^3-23x^2-x+7=\left(x^2-x+3\right)\left(2\sqrt{x-x^2}+1\right)(*) \end{array}\right.$$

Em nào thích thì ép liên hợp không thì ép hàm số cũng được:

$$(*) \Leftrightarrow 2(2x-1)^3-6(2x-1)=2\left(-\sqrt{x-x^2}\right)^3-6(-\sqrt{x-x^2})$$

Xét hàm : $f(t)=2t^3-6t$ với $x\in[0;1] \Rightarrow \begin{cases} -1\le 2x-1\le 1 \\ -\sqrt{x-x^2}\le 0 \end{cases} \Rightarrow$ xét $t\le 1$ (nó chứa 2 thằng này)

Ta có $f'(t)=6t-6\le 0, \forall t\in[0;1]$ do đó hàm nghịch biến nên:

$$2x-1=-\sqrt{x-x^2} \Rightarrow x=\frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm : $x=\frac{1}{2}, x=\frac{5-\sqrt{5}}{10}$

- Tổng kết phương pháp :

Qua các ví dụ minh họa cũng như các ví dụ tự luyện các em cũng hiểu phần nào cách giải phương trình bằng máy tính, tác dụng của nó trong việc tìm nhân tử để biến đổi cho phù hợp. Cách ép liên hợp, ép hàm số dựa vào mò biểu thức ghép căn, mò phương trình bậc 2. Trong cuốn sách có những bài dễ và những bài khó phù hợp với tất cả các em và bám sát nội dung thi THPT QG . Các em chịu khó rèn luyện nhé, có sách cũng như anh bên cạnh trông chừng học hành. Nếu cảm thấy khó hiểu thì nhớ mở video khóa học đính kèm với cuốn sách này anh gửi qua Gmail sau khi vào link này đăng kí nhé:

http://bikiptheluc.com/ebook

Mọi thắc mắc có thể đăng lên nhóm:

https://www.facebook.com/groups/bikiptheluc

Và đừng quên hằng ngày đọc stt anh viết ^_^

https://www.facebook.com/Ad.theluc

Như vậy, là chúng ta vừa học cũng như rèn xong phần phương trình và đủ nội công sang tiếp phần Hệ phương trình, riêng phần Hệ anh cũng trang bị khá nhiều bài tập, để cho các em rèn giải phương trình luôn, thế nên đừng lo thiếu bài tập để làm nhé, tuy quyển sách có hơn 200 trang thật nhưng nó được tổng hợp những tuyệt kĩ hay nhất, những bài toán hay và sát đề thi. Hi vọng các em sẽ cày hết.

Ngoài các bài tập trong cuốn sách này, thì anh sẽ xây dựng thêm hệ thống video phân dạng cụ thể, và cách bấm máy tính cũng như sau mỗi bài đều có bài tập để cho các em rèn luyện thêm nhé.

Nào chiến tiếp thôiii !!!

Bí Kíp Công Phá Kì Thi THPT Quốc Gia

Giải Hệ Phương Trình Bằng Máy Tính Fx 570 PLUS

Version 3.0 Skynet

I, Giới thiệu

Xin chào tất cả các em! Khi các em đang đọc những dòng này là các em đang nắm trên tay bí kíp giải hệ phương trình giúp tăng khả năng lấy điểm thứ 9 của các em một cách dễ dàng hơn. Hi vọng, sau khi đọc xong tài liệu này, các em sẽ cảm thấy Hệ Phương Trình thật đơn giản và không còn thấy sợ câu thứ 9 này nữa. Ở phiên bản này anh sẽ bổ sung, sửa đổi, hoàn thiện, nâng cấp rất nhiều vấn đề của version 1.0 , 2.1

II, Lý do chọn đề tài

Có rất nhiều em gửi thắc mắc tới anh : "tại sao anh lại giải câu hệ như vậy ?" đó cũng là câu hỏi anh đã từng băn khoăn hồi còn ôn thi như các em, mà không một thầy giáo nào giải thích cho anh cả, anh phải tự mò mẫm cho mình 1 lý do, các thầy chỉ dạy cho mình phương pháp làm là chính chứ rất ít khi các thầy giải thích tại sao và thường chỉ đưa ra dấu hiệu là người ta cho thế này thì mình làm thế này.

Nhưng hôm nay, anh sẽ trình bày với các em một hướng đi mới trong việc công pháp điểm thứ 9 này với máy tính fx 570 ES PLUS, đảm bảo học xong các em ở mức Trung Bình – khá chăm chỉ 1 chút cũng sẽ làm được, thực tế là sau khi anh phát hành version 1.0 đã khá nhiều bạn quay lại cảm ơn anh, vì đã làm thành công nhiều hệ phương trình.

III, Yêu cầu chung

1. Có tinh thần Quyết tâm đỗ Đại Học !!!

2. Có kiến thức căn bản sử dụng các phương pháp thế, đưa về phương trình tích, phương pháp hàm số, phương pháp đánh giá...

Ví dụ như:

Đưa về phương trình tích $A.B=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array}\right.$

Phương pháp hàm số: $f(x)=f(y)$ mà hàm f đồng biến (nghịch biến) trên đoạn $[a;b]$ và $x,y\in[a;b]$

Thì phương trình có nghiệm duy nhất là x = y

Phương pháp đánh giá: thường là sử dụng BĐT Cô-Si vì BĐT này có trong SGK lớp 10

Ta có : $\forall a,b\geq 0; a+b\geq 2\sqrt{ab}$

3. Có 1 chiếc máy tính có tính năng SOLVE : fx 570 es plus, fx 570 es, ...

Lý do anh chọn Fx 570 ES PLUS vì đây là máy tính hiện đại nhất được mang vào phòng thi bây giờ và là bản nâng cấp của fx 570 es nên sẽ cho tốc độ cao hơn chút và có một số tính năng mới.

III, Danh mục

1. **Giới thiệu về phương pháp và cách giải một bài hệ phương trình cơ bản**
2. **Các ví dụ minh họa có hướng dẫn rất chi tiết kèm video**

Dạng tìm được mối quan hệ giữa x và y từ 1 phương trình trong hệ (mức độ thi ĐH)

1. Ví dụ 1 : Đề cao đẳng 2014 cung cấp các kĩ năng chính:

+Kĩ năng tìm được mối quan hệ giữa x và y cơ bản

+ Kĩ năng ép nhân tử cơ bản

2.Ví dụ 2 : Đề Đại Học khối B – 2014

+ Kĩ năng tìm mối quan hệ giữa x và y nâng cao

+ Kĩ năng ép nhân tử nâng cao

+ Giải phương trình vô tỉ có nghiệm lẻ

3.Ví dụ 3 : Đề Đại Học khối A – 2014

+ Kĩ năng tìm mối quan hệ giữa x và y

+ Kĩ năng đánh giá cô-si cơ bản

+ Giải phương trình vô tỉ có nghiệm đẹp bằng liên hợp

2.2 Dạng tìm mối quan hệ giữa x và y từ 2 phương trình(khó)

1. Giới thiệu khái quát về phương pháp hệ số bất định ở mức cơ bản
2. Một số ví dụ cụ thể

3. Các bài tập ví dụ tương tự

Hệ phương trình trong đề ĐH từ 2010 – 2013

Hệ phương trình trong các đề thi thử (cập nhật thường xuyên)

4. Tổng kết:

V, Nội Dung

Anh sẽ hướng dẫn các em công phá tất cả các hệ phương trình từ 2010 cho tới nay bằng máy fx 570 es plus theo cách tự nhiên và dễ hiểu nhất.

*** Đường lối chung để giải 1 hệ phương trình :**

Từ 1 trong 2 phương trình, hoặc phức tạp hơn là phải kết hợp 2 phương trình

↓

Mối quan hệ giữa x và y
(muốn làm được điều này thì các em phải dùng các pp thế, đưa về phương trình tích, ẩn phụ, hàm số, đánh giá….)

↓

Thế vào 1 trong các phương trình để đưa về phương trình 1 ẩn, có thể là giải được luôn, hoặc có thể là một phương trình chứa căn phải dùng thêm phương pháp mới giải được, tùy vào mức độ đề thi

Vậy vai trò của máy ở đây là gì ? Máy tính sẽ giúp ta làm chủ cuộc chơi chứ không phải tác giả nữa, tức là nhờ máy ta sẽ tìm được mối quan hệ ở Bước 2 để áp dụng phương pháp cho thích hợp, tránh hiện tượng "mò", và ở Bước 3 cũng vậy. Vai trò chính là giúp ta định hướng cách làm nhanh hơn.

- **Nội dung chính của tài liệu này:**

(Anh chỉ bám sát nội dung thi, không đi quá xa đà vào những hệ quá khó, quá phức tạp so với đề thi)

Anh sẽ chia ra làm 2 dạng cơ bản :

1. **Từ 1 phương trình là đã tìm luôn được quy luật (90% Đề thi thử và ĐH cho dạng này)**

Biểu hiện: khi cho Y nguyên thì X, X^2 tìm được là số nguyên

2. **Phải kết hợp 2 phương trình thì mới tìm ra được quy luật (một số đề thi thử cho)**

Biểu hiện là cho Y nguyên nhưng được X, X^2 rất lẻ

Muốn tìm được quy luật giữa x và y của dạng này các em cần kết hợp 2 phương trình như cộng trừ 2 vế để khử số hạng tự do.

***Sau khi tìm được mối liên hệ giữa X và Y thế vào 1 phương trình còn lại thì lại có 2 khả năng chính**

a. Bấm máy phương trình ra nghiệm đẹp : vậy là xác suất 90% xử lý được

b. Bấm máy phương trình ra nghiệm xấu:

thường đề ĐH họ chỉ cho nghiệm xấu dạng

$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{a}\\ \dfrac{a+\sqrt{b}}{c}\end{array}\right.$ là những nghiệm của phương trình bậc 2, muốn xử lý được ta phải áp dụng định lý Vi-et đảo, anh sẽ nói rõ trong bài tập.

Với phương pháp này các em có thể xử lý được 90% các hệ trong đề thi thử THPT Quốc Gia và đề thi chính thức, phương pháp này còn giúp chúng ta luyện giải phương trình vô tỷ rất tốt, thậm chí là bất phương trình vô tỉ.

Nhưng phương pháp nào cũng có giới hạn của nó, có điểm mạnh điểm yếu riêng, anh sẽ trình bày cụ thể trong quá trình giải bài.

***Dạng 1: Các mối quan hệ được rút ra từ 1 phương trình**

Khởi động là 1 bài dễ trước nhé :

* Các ví dụ

Khởi động 1 bài đơn giản trước đã nhé !!!

Ví dụ 1: (CĐ-2014) Giải hệ phương trình sau $\begin{cases}x^2+xy+y^2=7\\ x^2-xy-2y^2=-x+2y\end{cases}(x,y\in R)$

Nhận xét chung:

Hệ gồm 2 phương trình 2 ẩn, điều đặc biệt là ở chỗ 1 phương trình có thể biến đổi được còn 1 phương trình thì không có gì mà biến đổi, nhìn qua thì các em thấy như vậy

Vậy dàn ý chung là: từ phương trình biến đổi được đưa ra mối quan hệ x và y rồi thế vào phương trình không biến đổi được

Bằng giác quan ta sẽ tìm cách nào đó để xử lý phương trình số 2, các em đa số là sẽ cứ viết dùng đủ mọi cách nhóm và rồi tự biến đổi mò 1 lúc thì nó ra mối quan hệ x và y.

Nhưng anh sẽ trình bày 1 phương pháp sử dụng máy tính để tìm mối liên hệ như sau:

Sử dụng tính năng Solve:

Các em biến đổi phương trình 2 về hết 1 vế : $X^2 - XY - 2Y^2 + X - 2Y = 0$

Ấn trên máy:

Alpha X x^2 - Alpha X Alpha Y – 2 Alpha Y x^2 Alpha + alpha X - 2 alpha Y

(không cần ấn = 0, khác version 1.0)

Giải thích "Alpha X, Alpha Y" là gọi biến X, biến Y nhưng với máy tính thì mặc định X là biến, Y là tham số

Sau đó các em bấm: Shift Solve

Máy hiện : **Y?** ← tức là máy hỏi ban đầu cho tham số Y bằng mấy để còn tìm X

Các em khởi tạo giá trị ban đầu cho Y là **0** bằng cách nhập: **0 =**

Nếu máy hỏi " **Solve for X**" thì các em ấn "**0=**" nhé

Bây giờ máy sẽ xử lý

Máy hiện:

X = 0 tức là khi y=0 thì có nghiệm x=0

L-R= 0 sai số của nghiệm là 0

Rồi vậy là được **Y=0 thì X=0**

Tiếp theo các em ấn **"mũi tên chỉ sang trái"** để quay trở về phương trình

Lại bắt đầu khởi tạo giá trị ban đầu **Y=1, X=0**

Thì máy lại tính ra **X = 2**

Cứ như vậy tới **Y=5, X =0** ta được bảng giá trị sau:

Bảng 1:

Y	0	1	2	3	4	5
X	0	2	-3	-4	-5	-6

***Cách 2: phức tạp hơn nhưng kiểm soát được toàn bộ nghiệm**

Với **Y = 0** ta đã tìm được 1 nghiệm **X = 0**

Để xem phương trình có còn nghiệm nào khác không các em làm như sau:

Ấn mũi tên sang ngang sửa phương trình thành: $(X^2 - XY - 2Y^2 + X - 2Y):(X-0)$

Phương trình này để bỏ nghiệm vừa tìm được và tìm nghiệm mới.

Sau đó lại bấm như ban đầu thì được **X = -1**

Sau đó lại ấn $\dfrac{X^2 - XY - 2Y^2 + X - 2Y}{(X-0)(X+1)}$

Sau đó lại bấm giải nghiệm thì máy báo " Can't solve" tức là vô nghiệm hay hết nghiệm rồi

Vậy là được Y=0 thì X=0, X = -1

Tiếp theo các em ấn **"mũi tên chỉ sang trái"** để quay trở về phương trình

Ta lại phải sửa phương trình thành: $X^2 - XY - 2Y^2 + X - 2Y$

Lại bắt đầu khởi tạo giá trị ban đầu Y=1, X=0

Thì máy lại tính ra X = 2 hoặc -2

Cứ như vậy tới Y=5 thì được các kết quả như sau:

Bảng 2:

Y	0	1	2	3	4	5
X	**0 hoặc -1**	**2 hoặc -2**	**-3hoặc 4**	**-4 hoặc 6**	**-5 hoặc 8**	**-6 hoặc 10**

Cách 2 này tuy đầy đủ nhưng sẽ rất mất thời gian chỉnh sửa phương trình nên trong tài liệu đa phần anh sẽ giải bằng cách 1, vì những bài thi ĐH không quá phức tạp

***Cách 3: Để tìm nghiệm khác ngoài 1 nghiệm tìm được**

Ví dụ khi Y=0, lúc máy hỏi " Solve for X" Các em ấn 0 = sẽ tìm được nghiệm X = 0

Các em ấn "-9=" thì sẽ được nghiệm X = -1

Các em ấn "9=" thì sẽ được nghiệm X=0

Vậy là ta đã tìm được ngay 2 nghiệm X = -1 và X =0 khi Y= 0

Anh rất hay dùng cách 1 cho hệ và cách 3 cho phương trình 1 ẩn, để tăng tốc độ làm bài

Các kết quả này hoàn toàn là do máy, từ bảng 1 ta thấy khi **Y = 2** tới **Y=5** anh thấy nó xuất hiện 1 quy luật gì đó

Tại **Y=0, Y=1** không xuất hiện quy luật do có nhân tử khác gây nhiễu bởi vì tính năng **Solve** là tính năng dò nghiệm theo công thức Newton nên nó sẽ tìm nghiệm gần với giá trị biến hiện tại của **X** , ở đây các TH chúng ta đều khởi tạo giá trị ban đầu **X = 0.**

Từ **Y=2** anh thấy nó xuất hiện 1 quy luật gì đó, dễ dàng nhận thấy là **x+y+1 = 0**

Vậy anh sẽ biến đổi phương trình 2 theo xem được không:

Thêm bớt để ép nhân tử :

$$\begin{aligned}
& x^2-xy-2y^2=-x+2y \\
& \Leftrightarrow x^2-xy-2y^2+x-2y=0 \\
& \Leftrightarrow x(x+y+1)-2xy-2y^2-2y=0 \\
& \Leftrightarrow x(x+y+1)-2y(x+y+1)=0 \\
& \Leftrightarrow (x-2y)(x+y+1)=0
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm vừa nãy bị nhiễu là do x-2y =0

Còn lại thì dễ dàng rồi nào:

$\left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=-(y+1) \end{array}\right.$ thế vào phương trình đầu tiên

* x=2y thì: $4y^2+2y^2+y^2=7 \Leftrightarrow y=\pm 1$

* x= -(y+1) thì các em tự xử lý nhé

Anh nói thì dài thôi chứ lúc làm thì nhanh lắm!!!

Như vậy là anh vừa trình bày chi tiết cách giải 1 bài hệ bằng máy tính casio fx-570 ES Plus nhưng bài trên là 1 bài dễ và chưa sử dụng một ứng dụng chính của Solve là tìm nghiệm phương trình 1 ẩn dù nó có phức tạp tới đâu.

Tiếp tục nhé, nâng level nên nào

Ví dụ 2: (ĐH-B-2014) Giải hệ $\begin{cases}(1-y)\sqrt{x-y}+x=2+(x-y-1)\sqrt{y}\\ 2y^2-3x+6y+1=2\sqrt{x-2y}-\sqrt{4x-5y-3}\end{cases}$

(x, y là các số thực)

- **Nhận xét chung**

Thấy ngay phương trình số 2 khó biến đổi, phương trình 1 có vẻ dễ hơn , vậy ta thử xem nào

Lưu ý ở bài này: điều kiện pt 1 là $x \geq y$ bởi vậy lúc khởi tạo giá trị ban đầu " **Solve for X**" các em phải nhập số lớn hơn Y, chẳng hạn là "9=" . Tại sao lại thế ?

Vì nếu em cho Y = 3 mà giá trị ban đầu X = 2 thì máy sẽ có 2 kiểu dò nghiệm

1 là : $2 \to 2,1 \to 2,2 \to 2,3 \to ....$

2 là : $.... \leftarrow 1,7 \leftarrow 1,8 \leftarrow 1,9 \leftarrow 2$

Nhưng đi theo đường nào thì $\sqrt{x-y}$ cũng không xác định ngay, do đó máy dừng dò nghiệm và báo "**Can't Solve**"

Do đó phải khởi tạo giá trị ban đầu của X lớn hơn Y

Các em làm tương tự, anh cho kết quả luôn:

Y	0	1	2	3	4	5
X	1	9	3	4	5	6

Dựa vào bảng ta thấy luôn : $x-y=1$ hoặc $\sqrt{x-y}=1$ chỉ có 1 thằng không theo quy luật là $y=1$

Vậy là đầu tiên anh đi theo hướng "x-y-1=0" trước vì vế phải có sẵn rồi kìa, chỉ cần biến đổi những số còn lại xem có được không là chuyển hướng luôn

$$(1-y)\sqrt{x-y}+x=2+(x-y-1)\sqrt{y}$$
$$\Leftrightarrow (1-y)\sqrt{x-y}+x-2-(x-y-1)\sqrt{y}=0$$
$$\Leftrightarrow (1-y)\sqrt{x-y}+(x-y-1)+(y-1)-(x-y-1)\sqrt{y}=0$$
$$\Leftrightarrow (1-y)\left[\sqrt{x-y}-1\right]+(x-y-1)\left[1-\sqrt{y}\right]=0$$

(Ngoài cách biến đổi này thì các em ghép căn với 1 luôn từ đầu nhé)

Tới đây phải nói là quá may mắn

$$pt \Leftrightarrow (1-\sqrt{y})(\sqrt{x-y}-1)\left[\left(1+\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{x-y}+1\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-y}-1=0\\ 1-\sqrt{y}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y+1\\ y=1\end{array}\right.$$

Tới đây giải thích được rằng $y=1$ là 1 nghiệm riêng không phụ thuộc vào x

Thế vào phương trình 2 ta được:

Với $y=1$ thì 9-3x =0 → x=3

Với y = x - 1

$$2y^2-3(y+1)+6y+1=2\sqrt{1-y}-\sqrt{1-y}$$
$$\Leftrightarrow 2y^2+3y-2=\sqrt{1-y}$$

Điều kiện ban đầu $y\ge 0$ mà bây giờ lại có $y\le 1$

Vậy $y\in[0;1]$

Dễ thấy VT đồng biến với điều kiện trên, VP thì nghịch biến, các em tính đạo hàm ra sẽ thấy nên nếu phương trình có nghiệm thì sẽ là nghiệm duy nhất

Thử bấm máy xem nào: **2 alpha X** x^2 **+ 3 alpha X -2 Alpha = √ 1- alpha X**

Sau đó bấm **Shift solve 0 ,5 =**

Phải dùng biến **X** nhé mà máy nó mặc định như vậy rồi

Ta đang tìm **X** trong khoảng **[0;1]** mà nên phải khởi tại giá trị ban đầu **X = 0,5** chẳng hạn được **X=0,618033…..**

Nếu x nguyên thì xong rồi đó nhưng đằng này có vẻ không còn may mắn nữa.

Vậy Bộ Giáo Dục cố tình ra nghiệm lẻ để làm khó ta, nhưng anh đã có cách

Ta thử bình phương nghiệm **X** đó lên xem có đẹp không nhưng câu trả lời là không!

Hi vọng nghiệm này không quá xấu, nó có dạng $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ là dạng nghiệm của phương trình bậc 2 thì ta sẽ giải quyết được.

*Tư duy ở đây là: phương trình trên nếu bình phương lên sẽ ra bậc 4 đầy đủ nên có thể phân tích được thành: $(x^2+Sx+P)(x^2+S'x+P')$

Do đó anh chỉ cần tìm được 1 nhân tử (x^2+Sx+P) là xong, vậy ta cần tìm 3 trong 4 nghiệm

Về lý thuyết là vậy nhưng thực tế anh tìm cả 4 nghiệm luôn

Bản chất của phương trình trên là bậc 4 nên ta sẽ bình phương lên để mất căn rồi chuyển sang 1 vế

Các em nhập lại phương trình thành: **(2 alpha X x^2 + 3 alpha X -2)^2 - (1- alpha X)**

Các em bấm dấu **"="** **để lưu phương trình vào máy**

Sau đó bấm **Shift solve 0 =**

Máy báo **X = 0,3228….**

Sau đó các em bấm **RCL X Shift STO A** để lưu nghiệm **X** vừa tìm được vào **A**

Vậy là được 1 nghiệm, để tìm nghiệm thứ 2 ta làm như nhau :

Nhấn nút đẩy lên 2 lần để tìm phương trình ta đã lưu

Đưa mũi tên chỉ sang trái, sửa phương trình thành:

((2 alpha X x^2 + 3 alpha X -2)^2 - (1- alpha X)): (X-A)

Sau đó bấm **Shift solve**

Máy hỏi **A? 0,3228….. thì** các em bấm dấu =

Máy hiện **"Solve for X"** thì các em cũng ấn **0=**

Máy báo **X = 0,6180....**

Các em ấm phím đẩy sang trái rồi ấn = để lưu lại phương trình

Sau đó các em bấm **RCL X Shift STO B** để lưu nghiệm **X** vừa tìm được vào **B**

Vậy đã có nghiệm thứ 2, các em lại ấn nút đẩy lên 2 lần, rồi đẩy sang trái để sửa phương trình tìm nghiệm thứ 3 các em lại sửa thành

((2 alpha X x^2 + 3 alpha X -2)^2 - (1- alpha X)) : (X-A)(X-B)

Sau đó bấm **Shift solve = = 0=**

Được nghiệm thứ 3 là **: X= -1,61803.....**

Các em ấm phím đẩy sang trái rồi ấn = để lưu lại phương trình

Sau đó các em bấm **RCL X Shift STO C** để lưu nghiệm **X** vừa tìm được vào C

Tương tự phương trình tìm nghiệm thứ 4 :

((2 alpha X x^2 + 3 alpha X -2)^2 - (1- alpha X)) : (X-A)(X-B)(X-C)

Sau đó bấm **Shift solve = = = 0=**

Các em sẽ được nghiệm thứ 4 là **: X = -2,3228...**

Vậy ta đã được 4 nghiệm là **A,B,C,X**

Ta biết rõ ràng là nghiệm B = 0,618... là nghiệm của phương trình ban đầu nên ta sẽ xét các tích BA,BC,BX xem tích nào đẹp

Thấy ngay: BC = - 1 và B+C = -1

Vậy phương trình chứa nghiệm B,C này là x^2+x-1 **(định lý Vi-et đảo)**

Đây chính là cách phân tích phương trình bậc 4 thành nhân tử với máy tính

Vậy ta sẽ cố nhóm để xuất hiện nhân tử này: với bài thì là y^2+y-1, ép nhân tử như sau:

$$2y^2+3y-2=\sqrt{1-y}$$

$$\Leftrightarrow 2(y^2+y-1)+y-\sqrt{1-y}=0$$

$$\Leftrightarrow 2(y^2+y-1)+\frac{y^2-(1-y)}{y+\sqrt{1-y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (y^2+y-1)(2+\frac{1}{y+\sqrt{1-y}})=0 \Leftrightarrow y^2+y-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}(tm)\rightarrow x=\frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ y=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}(loai) \end{array}\right.$$

Các em tự kết luận nhé!

Thực ra phần trên hoàn toàn có thể ứng dụng dò biểu thức liên hợp từ bí kíp phương trình nhưng anh trình bày thêm 1 cách giải phương trình bậc 4 cho đầy đủ.

Ví dụ 3: (ĐH-AA1-2014) Giải hệ $\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}=12 \\ x^3-8x-1=2\sqrt{y-2} \end{cases}$ **(x, y là số thực)**

***Nhận xét chung:**

Ta thấy phương trình 1 dễ biến đổi hơn phương trình 2

Điều kiện $\begin{cases} 2\le y\le 12 \\ x^2\le 12 \end{cases}$

* Anh cho bảng kết quả bấm máy luôn

Y	2	3	4	5	6	12	0
X	3,16	3	2,828	2,64	2,44	0	3,464

Nhận xét chung là Y tăng thì X giảm

Với Y=2, Y=4, Y=5, Y=6 thì kết quả xấu quá ta thử bình phương lên xem có sử dụng được không

Y	2	3	4	5	6	12	0
X^2	9,9999	9	8	7	6	0	12

Chứng tỏ các bác ở BGD cũng không làm khó ta lắm

Nhận thấy $y+x^2=12$

Căn cứ vào phương trình 1 thì sẽ là $y=12-x^2$

/*******

***Kinh nghiệm: Những bài toán có căn thức thay vì chọn y từ 0 tới 5 hay 100 thì ta sẽ chọn y làm sao cho căn thức đẹp và nhớ thêm cột giá trị căn, ở ví dụ trên ta sẽ bấm lại và được kết quả như sau:**

Y	3	8	11
X	3	2	1
$\sqrt{12-y}$	3	2	1

Vậy quy luật là: $x=\sqrt{12-y}$

********/

Làm sao để chứng minh điều này, dễ thấy không thể phân tích thành nhân tử như bài trước được

Giờ chỉ còn hàm số và đánh giá mà thôi

Do x, y không độc lập lên không dùng hàm số được (kinh nghiệm nhỏ của anh)

Vậy thử đánh giá, mà có 2 tích nên chỉ có Cô-si thôi

Ta dùng máy thử luôn cho nhanh nhé

Chúng ta dùng chức năng **CALC** để tính giá trị biểu thức

Các em nhập nguyên vế trái vào: $x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}$

Alpha X $\sqrt{\ }$ 12 – alpha Y + $\sqrt{\ }$ alpha Y – (12 – alpha X x^2)

Sau đó các em bấm **CALC**

Máy hiện X? em nhập **1 =**

Máy lại hỏi Y? em nhập vào là **11= hoặc tùy ý**

X	1	1	2	2	3	3	4
Y	10	11	10	11	8	11	
Giá trị	11,9	12	11,7	11,38	10,89	8,7	error

Ta nhận thấy $VT \le 12 = VP$ vậy đánh giá là phương pháp đúng đắn

Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si ta được:

$$x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)} \le \frac{x^2+(12-y)}{2}+\frac{y+(12-x^2)}{2}=12$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x=\sqrt{12-y} \\ y=12-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ y=12-x^2 \end{cases}$

Thế vào phương trình 2 ta được: $x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2}$

Ta bấm máy xem có nghiệm nguyên không , có thì coi như xong

Các em bấm như sau: **Alpha X Shift x^2 -8 Alpha X -1 = 2 $\sqrt{\ }$ 10 – alpha X x^2**

Sau đó ấn **Shifl Solve 9=**

(nếu các em ấn **0=** sẽ bị ra nghiệm **-1,** nên phải ấn **9=** để tìm nghiệm dương xem thêm ***cách 3*** nhé)

Ra được **x=3**, tới đây có thể mỉm cười được rồi

Ta sẽ biến đổi theo **x-3 = 0**

$x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2}$

$\Leftrightarrow (x^3-8x-3)+2(1-\sqrt{10-x^2})=0$

Anh ghép 1 với $\sqrt{10-x^2}$ vì khi nhân liên hợp nó xuất hiện $x^2-9=(x-3)(x+3)$

Tới đây các em vào máy giải phương trình bậc 3 kia xem được nghiệm gì nhé, đừng nói là em không biết bấm máy cái này

Được x=3 và 2 nghiệm xấu nhưng không sao vậy là được rồi

Ta tiến hành chia x^3-8x-3 cho **(x-3)** được x^2+3x+1

Vậy ta có:

$(x-3)(x^2+3x+1)+2(1-\sqrt{10-x^2})=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+1)+2.\dfrac{x^2-9}{1+\sqrt{10-x^2}}=0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left[x^2+3x+1+\dfrac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}\right]=0$

Ta có $x\geq 0$ **nên** $x^2+3x+1+\dfrac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}\geq 0$

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất x=y=3

Ví dụ 4: Đề thi thử THPT Quốc Gia của Sở GD TP. HCM

Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\left(\sqrt{y}+1\right)^2+\dfrac{y^2}{x}=y^2+2\sqrt{x-2}\\ x+\dfrac{x-1}{y}+\dfrac{y}{x}=y^2+y\end{cases}$

Giải:

Khi nhìn vào 2 phương trình này thì ta thấy phương trình số 2 dễ biến đổi hơn phương trình 1, em nào không nhìn ra điều này thì đi thử cả 2 phương trình cũng được.

Điều kiện: $x\geq 2, y>0$

Các em nhập phương trình : $x+\dfrac{x-1}{y}+\dfrac{y}{x}=y^2+y$ **như sau:**

Alpha X + $\dfrac{AlphaX-1}{AlphaY}$ $+\dfrac{AlphaY}{AlphaX}$ **= Alpha Y** x^2 **+ Alpha Y**

Sau đó các em bấm:

Shift Solve máy sẽ hiện " **Y?**" các em nhập **1 =**

Máy sẽ hiện " **Solve for X**" tức là khai báo giá trị ban đầu của **X**

Các em bấm " **0 =** "

Máy sẽ trả về giá trị nghiệm **X = 0,5. Vậy Y = 1 thì X = 0,5**

Để tìm nghiệm tiếp với Y=2 thì các em bấm :

Shift Solve máy sẽ hiện " **Y?**" các em nhập **2 =**

Cứ như vậy với Y = 3,4,5 ta thu được bảng giá trị sau:

Y	1	2	3	4	5
X	0,5	0,333… = 1/3	0,25 = 1/4	0,2 = 1/5	0,16666.. =1/6

Dựa vào bảng, ta thấy xuất hiện quy luật : $X=\frac{1}{Y+1} \Leftrightarrow XY+X-1=0$

Ta sẽ ép để xuất hiện nhân tử trên như sau:

$$x+\frac{x-1}{y}+\frac{y}{x}=y^2+y$$
$$\Leftrightarrow \frac{xy+x-1}{y}+\frac{y}{x}-y^2-y=0$$
$$\Leftrightarrow (xy+x-1)x+y^2-y^3x-xy^2=0$$
$$\Leftrightarrow (xy+x-1)x-y^2(xy+x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (xy+x-1)(x-y^2)=0(3)$$

Rất may ở bài này chúng ta không bị nhiễu bởi nhân tử $x=y^2$ như ở ví dụ 1.

Với $x\ge 2, y>0$ thì $xy+x-1>0$ nên từ (3) ta có : $x=y^2$ thế vào phương trình (1) ta có:

$$\left(\sqrt{y}+1\right)^2+1=y^2+2\sqrt{y^2-2}$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y}+1\right)^2=(y^2-2)+2\sqrt{y^2-2}+1$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y}+1\right)^2=\left(\sqrt{y^2-2}+1\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y}+1=\sqrt{y^2-2}+1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y}=\sqrt{y^2-2}$$
$$\Leftrightarrow y^2-y-2=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1(loai) \\ y=2(tm)\to x=4 \end{array}\right.$$

Vậy hệ có 1 nghiệm duy nhất là $(4;2)$

***Dạng 2: Các mối quan hệ được rút ra từ kết hợp 2 phương trình**

Dấu hiệu là: bấm nghiệm 2 phương trình đều ra xấu

Ví dụ 1: $\begin{cases} 2(x+y)^3+4xy-3=0(1) \\ (x+y)^4-2x^2-4xy+2y^2+x-3y+1=0(2) \end{cases}$

Giải:

Để sử lý được dạng này, thì phải cộng (trừ) (1) với (2) nhân với k hay ngược lại k(1)+(2), đơn giản nhất là k =1 có những bài phải cộng (trừ) đi k =1,2,3,4,5,.... Nhưng dạng này bây giờ khá hiếm, vì cũng khá khó đối với các em.

$(x+y)^4-2x^2-4xy+2y^2+x-3y+1+k[2(x+y)^3+4xy-3]=0$

Các em thử k =1,2,3,4,5...hoặc -1,-2,-3,-4,-5.... cho tới khi Y nguyên thì X nguyên nhé

Ta được bảng giá trị sau:

Y	0	1	2	3	4	5	
X	1	0	-1				

Dễ thấy quy luật x + y =1

Ta biến đổi như sau:

$(x+y)^4-2x^2-4xy+2y^2+x-3y+1+[2(x+y)^3+4xy-3]=0$

$\Leftrightarrow (x+y)^4+2(x+y)^3-2x^2+2y^2+x-3y-2=0$

$\Leftrightarrow (x+y)^3(x+y-1)+3[(x+y)^3-1]-2x^2+2(y^2-2y+1)+(x+y-1)=0$

$\Leftrightarrow (x+y)^3(x+y-1)+3[(x+y)^3-1]-2[x^2-(y-1)^2]+(x+y-1)=0$

$\Leftrightarrow (x+y-1)\{(x+y)^3+3[(x+y)^2+(x+y)+1)]\text{-}2(x\text{-}y+1)+1\}=0$

$\Leftrightarrow (x+y-1)\{(x+y)^3+3(x+y)^2+2+x+5y\}=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-1=0(3) \\ (x+y)^3+3(x+y)^2+2+x+5y=0(4) \end{array}\right.$

Lấy 2.(4) – (1) được : $6(x+y)^2+2x+10y+4-4xy+3=0$

Các em đưa về tổng bình phương chứng minh nó vô nghiệm

Chú ý $0=2(x+y)^3+4xy-3\le 2(x+y)^3+(x+y)^2-3 \Rightarrow x+y\ge 1$

Vậy: **x +y -1 = 0** thay vào (1) được:

$$2+4x(1-x)-3=0 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \rightarrow y=\frac{1}{2}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $x=y=\frac{1}{2}$

(bài này chính xác là làm theo đánh giá nhưng khá phức tạp, anh chỉ đưa vào để minh họa và rèn luyện thêm)

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^2-11x-2y+9=0 \\ 4x^2-22x+21+y^3+3y^2+y=(2x+1)\sqrt{2x-1} \end{cases}$

Gợi ý:

Bấm máy cả 2 phương trình **Y** nguyên → **X** ra lẻ → nghĩ tới dạng 2: kết hợp 2 phương trình

Lấy (2) – k(1) bấm máy với k = 1,2,3,4.... và Y= 0

$$[4x^2-22x+21+y^3+3y^2+y-(2x+1)\sqrt{2x-1}]-k.(2x^2-11x-2y+9)=0$$

Với k=1, **Y**= 0 → ra **X** = 9,... ra nghiệm xấu

Với k= 2, **Y**=0.........**X** = 1 quá đẹp, thử tiếp **Y** = 1 được **X** =2,5

Vậy xong rồi

Ta có bảng giá trị sau :

Y	0	1	2	3	4	5	
X	1	2,5	5	8,5	13		

Chú ý là bài có căn thì phải bấm luôn với X như vậy xem căn bằng bao nhiêu có đẹp không?

Dễ dàng suy ra được: $y+1=\sqrt{2x-1}$ muốn chứng minh điều này thì chỉ có dùng hàm số thôi, để ý vào phương trình nhé, cố ép sao về dạng hàm, thường người ta cũng sẽ gợi ý cho mình cứ x, y độc lập 2 vế thì nghĩ tới hàm số đầu tiên nhé.

Lấy (2) - 2.(1) ta được:

$$y^3+3y^2+5y+3=(2x+1)\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow (y^3+3y^2+3y+1)+2(y+1)=(2x-1)\sqrt{2x-1}+2\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^3+2(y+1)=\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+2\sqrt{2x-1}$$

Xét hàm $f(t)=t^3+2t$ là xong, phần còn lại các em tự làm tiếp nhé

Ví dụ 3: $\begin{cases} 2x^2+x+\sqrt{x+2}=2y^2+y+\sqrt{2y+1} \\ x^2+2y^2-2x+y-2=0 \end{cases}$

Chúng ta sẽ bấm máy với $y=4$ cho cái căn nó đẹp thì thấy x ra lẻ

Tương tự với phương trình 2 với y=0 thì cũng thấy ra xấu

Do đó ta nhận định đây là dạng kết hợp 2 phương trình.

Thử lấy $(1)+k(2)$ thường thường với $k=\pm 1$ xem có đẹp không nhớ lấy $y=4$ để căn đẹp nhé.

Thấy $(2x^2+x+\sqrt{x+2}-2y^2-y-\sqrt{2y+1})+(x^2+2y^2-2x+y-2)$ ra $x=1.2...$ xấu

$(2x^2+x+\sqrt{x+2}-2y^2-y-\sqrt{2y+1})-(x^2+2y^2-2x+y-2)$ ra $x=7$ đẹp !!!

Thử tiếp $y=0$ được $x=-1$ vậy ta có:

Y	0	4
X	-1	7
$\sqrt{2y+1}$	1	3
$\sqrt{x+2}$	1	3

Suy ra $\sqrt{x+2}=\sqrt{2y+1}$ do x và y độc lập nên ta lại nghĩ về hàm số. Lấy $(1)-(2)$ ta được:

$$(2x^2+x+\sqrt{x+2}-2y^2-y-\sqrt{2y+1})-(x^2+2y^2-2x+y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x+\sqrt{x+2}=4y^2+2y+\sqrt{2y+1}-2$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x+\sqrt{x+2}+2=(2y)^2+2y+\sqrt{2y+1}$$

Nhận thấy phía bên y đã hình thành dạng hàm khá gọn liên quan tới $2y$ nên ta cũng xây dựng hàm tương tự như vậy bên phía x :

$$(x+1)^2+(x+1)+\sqrt{(x+1)+1}=(2y)^2+2y+\sqrt{2y+1}$$

Xét hàm : $f(t)=t^2+t+\sqrt{t+1}, t\ge -1$ có :

$$f'(t)=2t+1+\frac{1}{2\sqrt{t+1}}\to f''(t)=2-\frac{1}{4\sqrt{(t+1)^3}}, f''(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{-3}{4}$$

$$\Rightarrow f'(t)\ge f'\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}>0, \forall t\ge -1$$

Vậy hàm đồng biến suy ra: $x+1=2y\Rightarrow x=2y-1$ các em thay vào (2) và giải phương trình bậc 2 là xong.

Ví dụ 4: Giải hệ : $\begin{cases} x^3+y^3-3x^2y+8=0 \\ y^2-xy-2y+4=0 \end{cases}$ ví dụ này anh đưa thêm vào để trình bày cách làm tìm mối quan hệ từ nghiệm của hệ thôi.

Từ phương trình 2 ta rút ra được : $x=\dfrac{y^2-2y+4}{y}$ thế vào phương trình 1 :

$\left(\dfrac{y^2-2y+4}{y}\right)^3+y^3-3\left(\dfrac{y^2-2y+4}{y}\right)^2y+8=0$ ta tìm được 2 nghiệm là

$\left[\begin{array}{l} y=-2\Rightarrow x=-6 \\ y=2\Rightarrow x=2 \end{array}\right.\Rightarrow \dfrac{x+6}{2+6}=\dfrac{y+2}{2+2}\Leftrightarrow x-2y+2=0$ ta sẽ tìm quy luật chung của 2 cặp nghiệm này bằng cách coi nó như tọa độ 2 điểm và viết phương trình đi qua.

Thế $x=2y-2$ vào cả 2 phương trình được:

$\dfrac{(1)}{(2)}=\dfrac{(2y-2)^3+y^3-3(2y-2)^2y+8}{y^2-(2y-2)y-2y+4}=3y$ hoặc các em thay $x=198, y=100$ cho nhanh

Do đó ta sẽ biến đổi $(1)+3y(2)$ các em tự làm sẽ ra được $(x-y)^3=(y-2)^3 \Leftrightarrow x=2y-2$ sau đó thay vào 1 trong 2 phương trình và giải nghiệm sẽ được như bấm máy.

**Lưu ý: Dạng này chỉ mang tính chất tham khảo thêm, do tính phức tạp cũng như cầu kì của nó, và cũng chưa có năm nào hỏi tới cũng như vượt quá mức độ thi Đại Học, các em chỉ cần nghiên cứu kĩ dạng mối quan hệ từ 1 phương trình, rồi cách phân tích nhân tử, sử dụng hàm số và đánh giá sao cho nhuần nhuyễn là được.*

*****Kĩ thuật bổ trợ:**

- Kinh nghiệm
- Phương pháp hàm số giải hệ
- Đánh giá giải hệ

Kinh nghiệm Bấm máy giải hệ của anh:

Lọc tinh cho y chạy từ 0 đến 5 còn lọc thô chỉ cần cho y=100 để nhìn ra mối quan hệ.

Các bài toán có căn thì phải chọn y làm sao cho căn nó đẹp

Ví dụ 1: Giải hệ $\begin{cases} x+\sqrt{x(x^2-3x+3)}=\sqrt[3]{y+2}+\sqrt{y+3}+1 \\ 3\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-6x+6}=\sqrt[3]{y+2}+1 \end{cases}$

Ta sẽ bấm phương trình 1 : chọn y sao cho 1 trong 2 cái căn đẹp

Y	-3	-1	-2	6	13	22
$\sqrt[3]{y+2}$	-1	1	0	2		
$\sqrt{y+3}$					4	5
X	0	2	1	3	3.466..	3.88..

Rõ ràng $\sqrt[3]{y+2}$ đẹp thì x đẹp và thấy mối quan hệ của chúng là $\sqrt[3]{y+2}=x-1$

Ở đây thì ta sẽ sử dụng phương pháp hàm số vì chúng đọc lập với nhau, ta sẽ ép về hàm $f\left(\sqrt[3]{y+2}\right)=f(x-1)$

$$(1)\Leftrightarrow (x-1)+\sqrt{(x^3-3x^2+3x-1)+1}=\sqrt[3]{y+2}+\sqrt{y+3}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)+\sqrt{(x-1)^3+1}=\sqrt[3]{y+2}+\sqrt{(\sqrt[3]{y+2})^3+1}$$

Xét hàm: $f(t)=t+\sqrt{t^3+1}, t\geq -1$ có $f'(t)=1+\dfrac{3t^2}{2\sqrt{t^3+1}}>0$ do đó hàm đồng biến

$\Rightarrow \sqrt[3]{y+2}=x-1$ thay vào (2) ta được: $3\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-6x+6}=x$

Bấm máy được nghiệm : $x=5, x=\dfrac{5}{4}$

$(*) \Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x-1}-\frac{2}{5}x\right)+\frac{x}{5}-\sqrt{x^2-6x+6}=0$

$\Leftrightarrow 3\left(5\sqrt{x-1}-2x\right)+x-5\sqrt{x^2-6x+6}=0$

$\Leftrightarrow 3.\frac{-4x^2+25x-25}{5\sqrt{x-1}+2x}+\frac{6(-4x^2+25-25)}{x+5\sqrt{x^2-6x+6}}=0$

$\Leftrightarrow \left(-4x^2+25x-25\right)\left(\frac{3}{5\sqrt{x-1}+2x}+\frac{6}{x+5\sqrt{x^2-6x+6}}\right)=0$

$\frac{3}{5\sqrt{x-1}+2x}+\frac{6}{x+5\sqrt{x^2-6x+6}}>0$ **do** $x\geq 1$

$\Rightarrow -4x^2+25x-25=0$

- **Cách 2: Theo kiểu ẩn phụ :**

Thay vào (2) ta có

$3\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-6x+6}=(x-1)+1 \Leftrightarrow (x-1)+1+\sqrt{(x-1)^2-4(x-1)+1}=3\sqrt{x-1}$

Do $x=1$ không thỏa mãn nên chia cả 2 vế cho $\sqrt{x-1}>0$ ta được:

$\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1-4+\frac{1}{x-1}}=3.$

Đặt $t=\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}>2 \Rightarrow t+\sqrt{t^2-6}=3 \Rightarrow \sqrt{t^2-6}=3-t \Leftrightarrow \begin{cases} t\leq 3 \\ t^2-6=(3-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{5}{2}.$

Với $t=\frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{5}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}=2 \\ \sqrt{x-1}=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \Rightarrow y=62 \\ x=\frac{5}{4} \Rightarrow y=-\frac{127}{64} \end{array}\right.$

Đáp số $\boxed{(x;y)=(5;62).(\frac{5}{4};-\frac{127}{64})}$

Ví dụ tương tự : $\begin{cases} 4x^3-3xy=9x+\sqrt{(y+3)^3} \\ 3x^2-2y+1=7x-2\sqrt{x+1} \end{cases}$

Bấm máy phương trình 1 ta được:

Y	-3	-2	1	6	13	22
$\sqrt{y+3}$	0	1	2	3	4	5
X	0	-0.5	-1	-1.5	-2	

Các em sẽ tìm ra 2 mối quan hệ là : $x=\sqrt{y+3}$ hoặc $-2x=\sqrt{y+3}$

Việc phân tích phương trình 1 thành nhân tử hay hàm số tương đối là phức tạp, các em cứ thử đi rồi sẽ thấy nhưng mối quan hệ kia gợi ý cho ta có thể chia đi

$4x^3-3xy=9x+\sqrt{(y+3)^3}$

$\Leftrightarrow 4x^3-3x(y+3)-\sqrt{(y+3)^3}=0$

Các em xét $y=-3$ xem hệ có nghiệm không nhé

Với $y\neq -3\Rightarrow 4\left(\dfrac{x}{\sqrt{y+3}}\right)^3-3\dfrac{x}{\sqrt{y+3}}-1=0$

Đặt $t=\dfrac{x}{\sqrt{y+3}}\Rightarrow 4t^3-3t-1=0\Leftrightarrow (t-1)(2t+1)^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

* Với $x=\sqrt{y+3}\Rightarrow y=x^2-3, x\geq 0$ thay vào 2 :

$x^2+7=7x-2\sqrt{x+1}$

Các em tiến hành dò nhân tử được $\left(x^2-5x+3\right)\left(x^2-9x+15\right)$

Các em có thể bình phương và đưa về phương trình bậc 4

* Với $-2x=\sqrt{y+3}\Rightarrow y=4x^2-3, x\leq 0$

$-5x^2+7=7x-2\sqrt{x+1}\Leftrightarrow -5x^2+7(1-x)+2\sqrt{x+1}=0$ ĐK : $x\in[-1;0]$

Thấy phương trình vô nghiệm nên bấm xem VT nó âm hay dương để đánh giá

$-5x^2+7(1-x)+2\sqrt{x+1}\geq -5+7(1-0)+2.0=2$ do đó phương trình vô nghiệm

*** Một số bài đặc biệt sử dụng phương pháp đánh giá giải hệ nó có dấu hiệu chung là can't solve rất nhiều.**

Ví dụ 1 : Giải Hệ: $\begin{cases} 2\sqrt{y+2}+\sqrt[3]{y-2}=\sqrt[3]{x^3+4}+x\\ \sqrt{(y+4)(2y+12)}-8=x^2+y-\sqrt{(x^2+2)(x^2-y)}\end{cases}$

Y	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
X	Can't	Can't	Can't	Có no	Can't	Can't	Can't	Can't

Chúng ta bấm máy phương trình (2) thử Y từ $-9\rightarrow 9$ đều can't solve chỉ có $Y=-2$ là có nghiệm với mọi x , do đó ta sẽ đưa về tổng bình phương hoặc đánh giá đều được. Còn chuyện ép về $(y+2)f(..)=0$ là rất khó khăn.

Với $y=-2\rightarrow\begin{cases} x^2+2=x^2-y\\ y+4\neq 2y+12\end{cases}$ muốn nó bằng thì biến đổi tí $\rightarrow\begin{cases} x^2+2=x^2-y\\ 2y+8\neq y+6\end{cases}$

Ta sẽ đưa về tổng bình phương như sau : nhân 2 lên cho nó đúng dạng

$(2) \Leftrightarrow 2\sqrt{(2y+8)(y+6)} - 16 = 2x^2 + 2y - 2\sqrt{(x^2+2)(x^2-y)}$

$\Leftrightarrow \left[(2y+8) - 2\sqrt{(2y+8)(y+6)} + (y+6)\right] + \left[(x^2+2) - 2\sqrt{(x^2+2)(x^2-y)} + (x^2-y)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2y+8} - \sqrt{y+6}\right)^2 + \left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-y}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2y+8} = \sqrt{y+6} \\ \sqrt{x^2+2} = \sqrt{x^2-y} \end{array}\right. \Leftrightarrow y = -2$

Ví dụ 2: Đây có thể coi là 1 ví dụ chống máy tính khá hay, bởi toàn can't solve do đó ta sẽ nghĩ tới hướng sử dụng phương pháp đánh giá

$$\begin{cases} \sqrt{3x-6y+5} + 2\sqrt{6y-3x-1} = \dfrac{6}{\sqrt{x-2y+3}} \\ x^3 - 2y + \sqrt{4y^2 - x} + \sqrt{x^2+2y+3} - (x^2+2)(1-2y-x^2) = 2 \end{cases}$$

Điều kiện: $\begin{cases} 3x-6y+5 \ge 0 \\ 6y-3x-1 \ge 0 \\ x-2y+3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y \ge \dfrac{-5}{3} \\ 2y-x \ge \dfrac{1}{3} \\ x-2y \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-5}{3} \le x-2y \le \dfrac{-1}{3}$

Bấm máy phương trình 1: phải khởi tạo X sao cho phù hợp với điều kiện nhé

Y	0	1	2	3	4	5	6	100
X	Can't	Can't	Can't	Can't	Can't	Can't	Can't	Can't

Đặt $x-2y+3 = t$ $\qquad (1) \Rightarrow \sqrt{t(3t-4)} + 2\sqrt{t(8-3t)} = 6$

$\sqrt{t(3t-4)} + 2\sqrt{t(8-3t)} \le \dfrac{t+3t-4}{2} + 2.\dfrac{t+8-3t}{2} = 6$

Dấu "=" sảy ra khi $t = 3t-4 = 8-3t \Leftrightarrow t = 2 \rightarrow x-2y = -1$ thay vào phương trình (2) và các em ép về được:

$$x(x+1)\left(x^2+x+1+\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+1}+\frac{1}{2+\sqrt{x^2+x+4}}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1$$

Ví dụ 3: $\begin{cases} \sqrt{2x+3y-4} + \sqrt{y-x} = y+1 \\ 2x^2y + y = 2x + 4\sqrt{(x^2+x-1)(3-y)} \end{cases}$

Bảng giá trị phương trình 1:

Y	1	2	2,5	3	4
X	Can't	1	0,25 và 65/36	2 và 2/9	Can't

Bảng giá trị phương trình 2:

Y	1	2	3	4
X	3,9...	1	Can't	Can't

Từ bảng 2 ta thấy từ $y>2$ thì phương trình 2 bắt đầu vô nghiệm dù X có là bao nhiêu, do đó ta sẽ pải đánh giá phương trình này.

Từ 1 ta có: $\begin{cases} 2x+3y-4\ge 0 \\ y\ge x \\ y+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge -1 \\ 5y-4\ge 2x+3y-4\ge 0 \end{cases} \to y\ge \frac{4}{5}$ rõ ràng đây chưa phải điều kiện ta cần

Nếu để ý vào cả 2 bảng cũng thấy nghiệm của hệ là $(1;2)$ luôn khi đó:

$\sqrt{2x+3y-4}=2$ và $\sqrt{y-x}=1$ cái này để ta ép Cô-si:

$$y+1=\sqrt{2x+3y-4}+\sqrt{y-x}=\frac{1}{2}.2\sqrt{2x+3y-4}+1.\sqrt{y-x}\le \frac{2x+3y}{4}+\frac{1+y-x}{2}=\frac{5}{4}y+\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow y\ge 2$

Thay vào phương trình 2 ta sẽ được như sau :

$0=2x^2y+y-2x-4\sqrt{(x^2+x-1)(3-y)}\le 4x^2+2-2x-4\sqrt{x^2+x-1}$

$\Leftrightarrow 2x^2-x+1\le 2\sqrt{x^2+x-1}$ mà $2\sqrt{x^2+x-1}\le (x^2+x-1)+1=x^2+x$

$\Leftrightarrow 2x^2-x+1\le x^2+x \Leftrightarrow (x-1)^2\le 0$ dấu "=" sảy ra khi $x=1$

Vậy hệ có nghiệm là $(1;2)$

Theo anh thì những bài kiểu như này nên học cho biết để đề phòng thôi, cũng không mấy ai thích ra loại hệ toàn đánh giá bất đẳng thức như thế này, nó không còn hay nữa mà khó.

Ví dụ 4: giải hệ $\begin{cases} 5x^2-2xy+5y^2=4(x+y)\sqrt{x^2-xy+y^2} \\ 3x^2+2y+3=x\sqrt{9y+7}+(y+1)\sqrt{2x^2-x+3} \end{cases}$

Ta bấm máy được $x=y$ từ phương trình 1 từ đó sẽ nghĩ tới chuyện sử dụng đánh giá cô-si:

Bấm máy với x,y bất kì thấy $VT\ge VP$ dựa vào dấu "=" tại x=y ta có:

$\begin{cases} \sqrt{x^2-xy+y^2}=x \\ x+y=2x \end{cases} \Rightarrow x+y=2\sqrt{x^2-xy+y^2}$ do đó sẽ đánh giá

$$4(x+y)\sqrt{x^2-xy+y^2}\le 2|x+y|.2\sqrt{x^2-xy+y^2}\le 2.\frac{(x+y)^2+4(x^2-xy+y^2)}{2}=5x^2-2xy+5y^2$$

Dấu "=" sảy ra khi $\begin{cases} x+y=|x+y| \\ x+y=2\sqrt{x^2-xy+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow x=y\ge 0$

Thay vào phương trình (2) có: $3x^2+2x+3=x\sqrt{9x+7}+(x+1)\sqrt{2x^2-x+3}$

Bấm máy $x=2, x=1 \to x^2-3x+2=0, \begin{cases} \sqrt{9x+7}=x+3 \\ \sqrt{2x^2-x+3}=x+1 \end{cases}$

$$x^2-3x+3+x\left(x+3-\sqrt{9x+7}\right)+(x+1)\left(x+1-\sqrt{2x^2-x+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-3x+2\right)\left(1+\frac{x}{x+3+\sqrt{9x+7}}+\frac{x+1}{x+1+\sqrt{2x^2-x+3}}\right)=0$$

$$1+\frac{x}{x+3+\sqrt{9x+7}}+\frac{x+1}{x+1+\sqrt{2x^2-x+3}}>0 \text{ **do** } x\ge 0 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Nghiệm của hệ $(1;1),(2;2)$

*** Dạng 2 này anh chỉ mở rộng thêm còn chủ yếu anh tập chung vào dạng 1 vì có tới 90% các hệ trong đề thi thử và ĐH đều ở dạng 1, minh chứng là các ví dụ sau đây:**

Ví dụ 1. (ĐH-AA1-2013) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y \\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0 \end{cases}$

Giải:

Điều kiện $x\ge 1$

- Bảng kết quả với phương trình 1: $\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y$

Y	0	1	2	3	4	5
X	1	Can't	17	82	257	

Dự đoán: $y=\sqrt[4]{x-1}$

Từ đó các em kết hợp với PP hàm số là ra do x và y đứng độc lập nên nghĩ tới hàm số.

Ta biến đổi phương trình 1 thành: $\sqrt{\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4+2}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{y^4+2}+y$

Tới đây các em nhớ xét điều kiện của y nhé, vì $y\ge 0$ thì mới xét hàm có $t\ge 0$ được

Dựa vào phương trình 2 ta có:

$0=x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1\ge 1+2.1.(y-1)+y^2-6y+1=y^2-4y \Leftrightarrow 0\le y\le 4$

Xét hàm: $f(t)=\sqrt{t^4+2}+t$ với $t\ge 0$

$f'(t)=\frac{2t^3}{\sqrt{t^4+2}}+1>0$ với $\forall t\ge 0$ do đó hàm đồng biến nên : $y=\sqrt[4]{x-1}$

Thế vào phương trình (2) ta được: $y(y^7+2y^4+y-4)=0$ (3)

$g(y)=y^7+2y^4+y-4, g'(y)=7y^6+8y^3+1>0$ với $y\ge 0$

Dễ thấy $g(1)=0$ nên phương trình (3) có 2 nghiệm là y=0 ,y = 1 suy ra x = 1 và x = 2

Vậy hệ có 2 nghiệm là (1;0) và (2;1)

Ví dụ 2. (ĐH-B-2013) Giải hệ : $\begin{cases} 2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0 \\ 4x^2-y^2+x+4=\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+4y} \end{cases} (x,y\in R)$

Giải:

- Bảng kết quả với phương trình 1: $2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0$
- Lưu ý mọi trường hợp ban đầu đều cho X = 0 nhé, để KQ của các em trung với của anh

Y	0	1	2	3	4	5
X	-0,5	0	0,5	1	1,5	2

Dễ dàng nhận ra quy luật là 2x+1 = y, các em cứ ghép để xuất hiện nhân tử (2x-y+1) là được

$$2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0$$
$$\Leftrightarrow x(2x-y+1)-2xy+2x-2y+y^2+1=0$$
$$\Leftrightarrow x(2x-y+1)-y(2x-y+1)+2x-y+1=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y+1)(2x-y+1)=0$$

ở đây có 1 phần tử gây nhiễu là **x-y+1** nhưng mà cũng may là không ảnh hưởng lúc ta bấm máy.

Vậy : $\left[\begin{array}{l} y=x+1 \\ y=2x+1 \end{array}\right.$

*Với **y = x + 1** thay vào phương trình (2) ta có:

$3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$ các em bấm được ra 2 nghiệm là **x = 0 và x = 1** chỉ cần khởi tạo giá trị ban đầu là **"-9="** và **"9="** các em sẽ tìm được 2 nghiệm này vậy sẽ có nhân tử "x^2-x" hoặc cứ tìm được 1 nghiệm rồi chia đi tìm nghiệm còn lại cho chắc

Ta phân tích thành:

$$3(x^2-x)+(x+1-\sqrt{3x+1})+(x+2-\sqrt{5x+4})=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-x)\left[3+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$$

Vậy ta tìm được 2 nghiệm là **(0;1) và (1;2)**

*Với **y = 2x + 1** thay vào phương trình (2) được:

$3-3x=\sqrt{4x+1}+\sqrt{9x+4}$ làm tương tự như trên được:

$$x\left(3+\frac{4}{\sqrt{4x+1}+1}+\frac{9}{\sqrt{9x+4}+2}\right)=0 \Leftrightarrow x=0$$

Vậy hệ có 2 nghiệm là **(0;1) và (1;2)**

Ví dụ 3: (ĐH-AA1-2012) Giải hệ : $\begin{cases} x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y \\ x^2+y^2-x+y=\frac{1}{2} \end{cases}$ $(x,y\in R)$

Gợi ý:

- Bảng kết quả với phương trình 1: $x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y$

Y	0	1	2	3	4	100
X	2	3	1,79 hoặc 4	-1 hoặc 5		102

Bài này cũng có phần tử gây nhiễu cho việc bấm máy, nhưng ta vẫn tìm đc là có nhân tử:
x = y+2 hoặc x-1= y+3 hoặc x-2 = y hoặc x-1 = y+1 căn cứ vào bài mà chọn mối quan hệ thích hợp
Rõ ràng x và y độc lập với nhau nên nghĩ nay tới pp hàm số, các em biến đổi thành:

$(x^3-3x^2+3x-1)-12(x-1)=(y^3+3y^2+3y+1)-12(y+1)$

$\Leftrightarrow (x+1)^3-12(x+1)=(y+1)^3+(y+1)$

Để xét hàm thì các em phải chú ý vào đoạn mà ta cần xét nhé, ở đây phải bám vào pt 2, BGD giải khá chi tiết rồi, anh chỉ định hướng cho các em thôi.

Ví dụ 4. (ĐH-A-2011) Giải hệ: $\begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 \\ xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2 \end{cases}$ (với x, y là các số thực)

Gợi ý:

- Bảng kết quả với phương trình 2: $xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2$

Y	0	1	2	3	4	5
X	-1,4141	1	0,5	1/3	1/4	1/5

Rõ ràng ta thấy pt có nhân tử (xy-1) ta sẽ cố tính nhóm để xuất hiện

$(xy-1)(x^2+y^2)-(x^2+y^2)+2-(x+y)^2=0$

$(xy-1)(x^2+y^2)+2(1-xy)=0$

$(xy-1)(x^2+y^2-2)=0$

+ TH 1: xy = 1 : Các em tự làm vì đơn giản

+TH 2 : $x^2+y^2=2$, thay vào 1 được : $3y(x^2+y^2)-4xy^2+2x^2y-2(x+y)=0$

Các em bấm máy để tìm quy luật của phương trình này : $6y-4xy^2+2x^2y-2(x+y)=0$

Y	0	1	2	3	4	5
X	0	1	0,5	1/3	1/4	1/5

Vậy lại có nhân tử (xy -1) = 0 ta sẽ lại ép nhân tử :

$6y-4xy^2+2x^2y-2(x+y)=0$

$\Leftrightarrow -2xy^2+x^2y-x+2y=0$

$\Leftrightarrow -2y(xy-1)+x(xy-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-2y)(xy-1)=0$

Tới đây thì dễ rồi, còn lại các em tự biến đổi tiếp nhé

Ví dụ 5. (ĐH-A-10) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0(1)\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7(2)\end{cases}$ $(x,y\in R)$

Đây là câu 10 điểm của đề ĐH 2010:

ĐK: $y\le\frac{5}{2}$, $x\le\frac{3}{4}$

- Bảng kết quả với phương trình 1: $(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0$

Y	0	1	2	3	-1	-2
X	1,11	0,866	0,5	1/3	1,3228	1,5
X^2	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	Can't solve	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$

Dự đoán: $X^2=\frac{5-2Y}{4}$ hoặc $2x=\sqrt{5-2y}$

Để ý 2 vế x, y hoàn toàn độc lập nên ta sẽ lại áp dụng phương pháp hàm số

$(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0$

$[(2x)^2+1].\frac{x}{2}=[(5-2y)+1].\frac{\sqrt{5-2y}}{2}$

Xét hàm: $f(t)=(t^2+1).\frac{t}{2}=\frac{1}{2}(t^3+t)$ hàm này đồng biến biến trên do $f'(t)>0$

$2x=\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x=5-2y\end{cases}\Rightarrow y=\frac{5-x}{2}$ thế vào (2)

$4x^2+\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0(3)$

Xét hàm $g(x)=4x^2+\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7$ trên đoạn $\left[0,\frac{3}{4}\right]$

$g'(x) = 8x - 8x\left(\frac{5}{2} - 2x^2\right) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} = 4x(4x^2 - 3) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} \le 0$ nên hàm số nghịch biến.

Mà $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ nên $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của (3)

Với $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$

- **Một số hệ sử dụng ẩn phụ trong đề ĐH cũng lâu lắm rồi (tham khảo thêm)**

Bài 1 *(D – 2009)* Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x(x+y+1) - 3 = 0 \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$

ĐK. $x \neq 0$. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 - 3.\frac{1}{x} = 0 \\ (x+y)^2 - 5.\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = 0 \end{cases}$ Đặt $x + y = a, \frac{1}{x} = b$ ta được hệ :

$$\begin{cases} a + 1 - 3b = 0 \\ a^2 - 5b^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b - 1 \\ (3b-1)^2 - 5b^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2, b = 1 \\ a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = 2, y = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

Bài 2 *(A – 2008)* Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = -\frac{5}{4} \end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y) + xy(x^2+y+1) = -\frac{5}{4} \\ (x^2+y)^2 + xy = -\frac{5}{4} \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} x^2 + y = a \\ xy = b \end{cases}$ ta được :

$$\begin{cases} a + b(a+1) = -\frac{5}{4} \\ a^2 + b = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - ab = 0 \\ b = -\frac{5}{4} - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0, b = -\frac{5}{4} \\ a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của hệ pt là S = $\left\{\left(1; -\frac{3}{2}\right); \left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\frac{25}{16}}\right)\right\}$

Bài 3. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x+y) = 7 \\ y(y-2x) - 2x = 10 \end{cases}$

Hệ $\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=7 \\ y(y-2x)-2x=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2=9 \\ (y-x)^2-(x+1)^2=9 \end{cases}$.

Đặt $a=x+1, b=y+1 \Rightarrow b-a=y-x$ ta được hệ $\begin{cases} a^2+b^2=9 \\ (b-a)^2-a^2=9 \end{cases}$

$\Rightarrow a^2+b^2=(b-a)^2-a^2 \Leftrightarrow a^2=-2ab \Leftrightarrow a=0$ hoặc $a=-2b$

Với $a=0 \Rightarrow b=\pm 3 \Rightarrow x=-1, y=2$ hoặc $x=-1, y=-4$

Với $a=-2b \Rightarrow 5b^2=9 \Leftrightarrow b=\pm\frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow a=\mp\frac{6}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow x=-1-\frac{6}{\sqrt{5}}, y=-1+\frac{3}{\sqrt{5}}$ hoặc $x=-1+\frac{6}{\sqrt{5}}, y=-1-\frac{3}{\sqrt{5}}$

Cách 2 : Thế (1) vào PT (2) và rút gọn ta được:

$$x^2+2xy+4x+2y+3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2y+3)=0.$$

Bài 4. *(A – 2006)* Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$

ĐK: $x\ge -1, y\ge -1, xy\ge 0$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ x+y+2+2\sqrt{(x+1)(y+1)}=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ x+y+2\sqrt{x+y+xy+1}=14 \end{cases}$

Đặt $x+y=a, \sqrt{xy}=b$. $a\ge -2, b\ge 0, a^2\ge 4b^2$ ta được hệ pt

$\begin{cases} a-b=3 \\ a+2\sqrt{a+b^2+1}=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3+b \\ 2\sqrt{b^2+b+4}=11-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3+b \\ 3b^2+26b-105=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$ (thỏa mãn đk)

Bài 5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=8 \\ \sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}=10 \end{cases}$.

Bình phương cả 2 PT.

Bài 6. Giải hệ : $\begin{cases} \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}=2\sqrt{7} \\ \frac{6}{x+y}+\frac{1}{xy}=-1 \end{cases}$

PT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-2}+\sqrt{(y+\frac{1}{y})^2-2}=2\sqrt{7}$

PT (2) $\Leftrightarrow 6+\frac{x+y}{xy}=-(x+y)\Leftrightarrow(x+\frac{1}{x})+(y+\frac{1}{y})=-6$

Ta có $\begin{cases}a+b=-6\\ \sqrt{a^2-2}+\sqrt{b^2-2}=2\sqrt{7}\end{cases}$

Bài 7. *(ĐT 2011)* Giải hệ : $\begin{cases}y(x-7)+x+1=0\\ 21y^2-x^2=(xy+1)^2\end{cases}$. Lần lượt chia cho $y;y^2$ và đặt ẩn

Bài 8. *(B – 2009)* Giải hệ : $\begin{cases}xy+x+1=7y\\ x^2y^2+xy+1=13y^2\end{cases}$. Lần lượt chia cho $y;y^2$ và đặt ẩn phụ.

Bài 9. Giải hệ : $\begin{cases}x^2+y^2+xy+1=4y\\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2\end{cases}$ Chia 2 vế của 2 PT cho y và đặt ẩn phụ.

Bài 10. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(2x+y)^2-5(4x^2-y^2)+6(2x-y)^2=0\\ 2x+\dfrac{1}{2x-y}=3-y\end{cases}$

- *Một số hệ phương trình hay trong đề thi thử có lời giải chỉ có tính chất rèn luyện và tham khảo thêm vì những bài tập này ở mức độ từ khó tới rất khó vượt tầm đề thi (nhớ che giải xong tự làm, làm xong mở ra xem,nhiều bài giải anh cố tình làm cách ẩn phụ để các em biết nhiều cách hơn)*

Bài 1 : (trích đề thi thử) :

Một bài hệ bấm máy thì dễ mà biến đổi thì toát mồ hôi hột ===

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-x-y-1}.\sqrt[3]{x-y-1}=y+1\\ x+y+1+\sqrt{2x+y}=\sqrt{5x^2+3y^2+3x+7y}\end{cases}$$

Điều kiện: $\begin{cases}x^2\ge x+y+1\\ 2x+y\ge 0\\ 5x^2+3y^2+3x+7y\ge 0\end{cases}$

Dễ dàng dùng đồ long 570 chém phương trình 1 ra được: $x-y=2$ hay $x-y-2=0$

Các em chỉ cần lọc thô với $y=100$ cho nhanh

Giờ là tiết mục kinh điển nhất mang tên " ép duyên"

$$\sqrt{x^2-x-y-1}.\sqrt[3]{x-y-1}=y+1$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x-y-1}.\left(\sqrt[3]{x-y-1}-1\right)=(y+1)-\sqrt{x^2-x-y-1}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x-y-1}.\frac{x-y-2}{\sqrt[3]{(x-y-1)^2}+\sqrt[3]{x-y-1}+1}=\frac{(y+1)^2-(x^2-x-y-1)}{(y+1)+\sqrt{x^2-x-y-1}}$$

$$\Leftrightarrow(x-y-2)\left(\frac{\sqrt{x^2-x-y-1}}{\sqrt[3]{(x-y-1)^2}+\sqrt[3]{x-y-1}+1}\right)=\frac{(y+1+x)(y+1-x)+(x+y+1)}{(y+1)+\sqrt{x^2-x-y-1}}$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2)\left(\frac{\sqrt{x^2-x-y-1}}{\sqrt[3]{(x-y-1)^2}+\sqrt[3]{x-y-1}+1}\right)=\frac{(x+y+1)(-x+y+2)}{(y+1)+\sqrt{x^2-x-y-1}}$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2)\left(\frac{\sqrt{x^2-x-y-1}}{\sqrt[3]{(x-y-1)^2}+\sqrt[3]{x-y-1}+1}+\frac{x+y+1}{(y+1)+\sqrt{x^2-x-y-1}}\right)=0(*)$$

Vấn đề là làm sao chứng minh :

$\dfrac{\sqrt{x^2-x-y-1}}{\sqrt[3]{(x-y-1)^2}+\sqrt[3]{x-y-1}+1}+\dfrac{x+y+1}{(y+1)+\sqrt{x^2-x-y-1}}>0?$ các em thử suy nghĩ nhé ^_^

Do đó

$(*)\Leftrightarrow x-y-2=0\Leftrightarrow y=x-2$

Thay vào phương trình 2 ta được:

$2x-1+\sqrt{3x-2}=\sqrt{8x^2-2x-2}$ Điều kiện : $x\ge\dfrac{2}{3}$

bấm máy ra nghiệm x = 1 là nghiệm duy nhất, vậy em nó xác định rồi, không yêu cũng phải yêu :v

Với x= 1 thì :

$$\begin{cases}\sqrt{3x-2}=1\\ \sqrt{8x^2-2x-2}=2\end{cases}$$

$$2x-1+\sqrt{3x-2}=\sqrt{8x^2-2x-2}\Leftrightarrow 2(x-1)+\sqrt{3x-2}-1=\sqrt{8x^2-2x-2}-2$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)+\frac{3(x-1)}{\sqrt{3x-2}+1}=\frac{8x^2-2x-6}{\sqrt{8x^2-2x-2}+2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(2+\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1}\right)=\frac{(x-1)(8x+6)}{\sqrt{8x^2-2x-2}+2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(2+\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1}-\frac{2(4x+3)}{\sqrt{8x^2-2x-2}+2}\right)=0$$

Xét $f(x)=2+\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+1}-\dfrac{2(4x+3)}{\sqrt{8x^2-2x-2}+2}$ với $x\ge\dfrac{2}{3}$ (anh bó tay . com rồi, em nào khỏe thì chứng minh f(x)<0 giúp anh)

Tới đây anh đổi hướng: hàm số không được mà lại có nghiệm duy nhất nên anh đã cay cú dùng BẤT ĐẲNG THỨC

Thử luôn : $2x-1=\sqrt{3x-2}=1, x=1$ được thì ăn cả, ngã về mo :v

Bấm máy thấy : $VP\ge VT$, mà VT có dạng tổng mà muốn $\le$ thì chỉ có áp dụng $a+b\le\sqrt{2(a^2+b^2)}$ thôi

$$2x-1+\sqrt{3x-2}\le\sqrt{2[(2x-1)^2+3x-2]}=\sqrt{2(4x^2-x-1)}=\sqrt{8x^2-2x-2}$$

Tới đây thì xong rồi : $2x-1=\sqrt{3x-2}=1\Leftrightarrow x=1$ (tự làm nhé)

*** Ngoài ra các em có thể bình phương 2 vế lên:

$4x^2-x-1+2(2x-1)\sqrt{3x-2}=8x^2-2x-2$

$\Leftrightarrow 4x^2-x-1-2(2x-1)\sqrt{3x-2}=0$

Có em nào nhìn ra được : $4x^2-x-1-2(2x-1)\sqrt{3x-2}=(2x-1-\sqrt{3x-2})^2=0$??? keke

Cuối cùng cũng được: $2x-1=\sqrt{3x-2}=1 \Leftrightarrow x=1$

Bài 2:

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(2x+\sqrt{4x^2+1})(2y+\sqrt{4y^2+1})=1\\ \sqrt[3]{x^4-x^2}+4=4y^2+3y\end{cases}$

Nhận xét:

Đây là 1 hệ phương trình chuẩn mực, tại sao anh nói vậy? hệ chuẩn mực (để thi) theo anh là hệ tìm ra được 1 mối ngay từ 1 trong 2 phương trình thường là dùng hàm số (xu hướng) hoặc đưa về dạng phương trình tích căng thì dùng đánh giá sau đó thế vào phương trình còn lại và chỉ còn 1 ẩn đa phần dùng ép nhân tử (liên hợp)

Vậy thì 1 bài hệ như thế này thì nên bắt đầu từ đâu?

Nếu bạn nào "cày nhiều" thì rất dễ dàng phát hiện ra phương trình 1 dùng hàm số vì "x,y độc lập với nhau"

Và sẽ giải theo hướng :

$$(2x+\sqrt{4x^2+1})(2y+\sqrt{4y^2+1})=1 \Leftrightarrow 2x+\sqrt{4x^2+1}=\frac{1}{2y+\sqrt{4y^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow 2x+\sqrt{(2x)^2+1}=\sqrt{(-2y)^2+1}+(-2y)$$

Tiếp theo là xét hàm : $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$

Chú ý ở đây bài toán có căn nhưng không cần điều kiện vì biểu thức trong căn ≥ 1

Vấn đề là ở chỗ, đâu phải em nào cũng nghĩ ngay được như vậy ? Vậy thì bí kíp hệ cửu dương thần công sẽ phối hợp với đồ long 570 chém đất mắt xích này

Ở đây, nếu em nào mới học thì cứ thử bấm máy cả 2 phương trình, cái nào nghiệm đẹp thì nhận, không thì bỏ qua, cả 2 cùng xấu thì nghĩ theo hướng kết hợp

Còn làm quen rồi sẽ có cảm nhận và bấm ngay phương trình 1 :

Bảng giá trị :

Y	1	2	3	4	5
X	-1	-2	-3	-4	-5

Dễ dàng thấy được quy luật là: $X=-Y$ hoặc x+y = 0

Vậy ở đây có 2 cách chính là : ép duyên sao cho có $(x+y)$ hoặc ép hàm về $f(x)=f(-y)$ còn nếu nhanh nhạy hơn 1 chút vì trong căn là $4x^2=(2x)^2$ thì dùng hàm $f(2x)=f(-2y)$ không thì lát sửa cho gọn cũng được mà không sửa cũng ko sao

*Cách 1: Dùng cách chính thống cho bài này : là dùng pp hàm số

Ép về như trên : $2x+\sqrt{(2x)^2+1}=\sqrt{(-2y)^2+1}+(-2y)$ rồi xét hàm :

$f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$ hoặc $f(t)=2t+\sqrt{4t^2+1}$ đều như nhau cả thôi

Xét $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$ có $f'(t)=1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}>1+\frac{t}{|t|}>0$ vậy hàm đồng biến

Suy ra $2x=-2y \Leftrightarrow y=-x$

*Cách 2: Ép duyên

ở đây có 2 hướng: 1 là nhân tung ra rồi ép, 2 là đưa về như dạng hàm số rồi ép hướng 1 sẽ làm bài toán cực kì phức tạp và rối mắt hơn, phương châm làm toán là càng ngày phải càng gọn chứ không phải làm cho bài toán rối mắt hơn nhưng anh sẽ cứ làm cả 2 hướng cho các em thấy được sự khác nhau về biến đổi của cùng 1 phương pháp

$$(2x+\sqrt{4x^2+1})(2y+\sqrt{4y^2+1})=1$$

$$\Leftrightarrow 4xy+2x\sqrt{4y^2+1}+2y\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4y^2+1}.\sqrt{4x^2+1}=1$$

$$\Leftrightarrow 2x(\sqrt{4y^2+1}-\sqrt{4x^2+1})+2(x+y)\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4y^2+1}.\sqrt{4x^2+1}+4xy-1=0$$

$$\Leftrightarrow 2x.\frac{4(y^2-x^2)}{\sqrt{4y^2+1}+\sqrt{4x^2+1}}+2(x+y)\sqrt{4x^2+1}+\frac{(4y^2+1)(4x^2+1)-(4xy-1)^2}{\sqrt{4y^2+1}.\sqrt{4x^2+1}-(4xy-1)}=0$$

$$\Leftrightarrow 2x.\frac{4(y^2-x^2)}{\sqrt{4y^2+1}+\sqrt{4x^2+1}}+2(x+y)\sqrt{4x^2+1}+\frac{4y^2+4x^2+8xy}{\sqrt{4y^2+1}.\sqrt{4x^2+1}-(4xy-1)}=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y)\left[\frac{2(y-x)}{\sqrt{4y^2+1}+\sqrt{4x^2+1}}+\sqrt{4x^2+1}+\frac{2(x+y)}{\sqrt{4y^2+1}.\sqrt{4x^2+1}-(4xy-1)}\right]=0$$

Tới đây tuy có suy ra được x+y=0 nhưng vế sau các em khó lòng đánh giá nổi nhưng kiểu gì cũng có điểm rồi, kaka

Ta sẽ đi theo hướng số 2 :

$$2x+\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{4y^2+1}-2y \Leftrightarrow 2(x+y)+\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4y^2+1}=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y)+\frac{4(x^2-y^2)}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4y^2+1}}=0 \Leftrightarrow 2(x+y)\left[1+\frac{2(x-y)}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4y^2+1}}\right]=0$$

Ta có : $1+\frac{2(x-y)}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4y^2+1}}=\frac{(\sqrt{4x^2+1}+2x)+(\sqrt{4y^2+1}-2y)}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4y^2+1}}$

Do : $\sqrt{4x^2+1}+2x=\frac{8x^2+1}{\sqrt{4x^2+1}-2x}>0, \sqrt{4y^2+1}-2y=\frac{1}{\sqrt{4y^2+1}+2y}>0$

Do đó $1+\frac{2(x-y)}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4y^2+1}}=\frac{(\sqrt{4x^2+1}+2x)+(\sqrt{4y^2+1}-2y)}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4y^2+1}}>0$ nên suy ra x+y =0

Từ đây ta có nhận xét rằng nếu chọn đúng phương pháp hàm số ngay từ đầu có phải nhàn hơn không, nhưng ép duyên cho bài này cũng là 1 ý tưởng trâu bò không hề tồi

Bây giờ thế y = -x vào phương trình 2 :

$$\sqrt[3]{x^4-x^2}+4=4(-x)^2+3(-x)\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^4-x^2}+4=4x^2-3x\Leftrightarrow 4x^2-3x-\sqrt[3]{x^4-x^2}-4=0$$

Bấm máy ta được những nghiệm sau :

X= -0,618….. , X = 1,618……

Đầu tiên ta thử tổng tích 2 nghiệm xem có đẹp không? Không đẹp thì dùng Table thử xem nó là "con rơi" của em phương trình bậc 2 nào

Ô mai cớt : A+B = 1 , AB = -1

Vậy nó là nghiệm của phương trình : $x^2-x-1=0$ hoặc $x-\frac{1}{x}=1$ sẽ có 2 hướng làm như sau : Thêm bớt để có $x^2-x-1=0$

$$4x^2-3x-\sqrt[3]{x^4-x^2}-4=0\Leftrightarrow 4(x^2-x-1)+x-\sqrt[3]{x^4-x^2}=0\Leftrightarrow 4(x^2-x-1)+\frac{x^3-(x^4-x^2)}{x+\sqrt[3]{x^4-x^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x^2-x-1)\left(4-\frac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^4-x^2}+\sqrt[3]{(x^4-x^2)^2}}\right)=0$$

Quá buồn vì có dấu "-"

Xét : $f(x)=4-\frac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^4-x^2}+\sqrt[3]{(x^4-x^2)^2}}=4-\frac{1}{1+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{(x-\frac{1}{x})^2}}$ (chia cho x^2)

Đặt $u=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}\to f(u)=4-\frac{1}{u^2+u+1}=\frac{4u^2+4u+3}{u^2+u+1}>0$

Vậy : $x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Nên nhớ cái đống $x^2+x\sqrt[3]{x^4-x^2}+\sqrt[3]{(x^4-x^2)^2}$ lúc nào cũng > 0 nó là bình phương thiếu của 1 tổng.

Tới đây thì xong rồi

Em nào thừa giấy như anh thì vẽ voi thêm cách chia đi :3

*x=0 không là nghiệm

*x # 0 chia cả 2 vế cho x ta được:

$$4x-3-\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}-\frac{4}{x}=0\Leftrightarrow 4(x-\frac{1}{x})-\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}-3=0\to 4t^3-t-3=0\Leftrightarrow(t-1)(4t^2+4t+3)=0$$

$$\Leftrightarrow t=1\to x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Chỗ phương trình bậc 3 kia vào chức năng giải phương trình bậc 3 mà giải ra 1 nghiệm t = 1 rồi thực hiện chia đi nhân tử (t-1) là ra được pt bậc 2 còn lại vô nghiệm (nghiệm thực)

Vậy hệ có 2 nghiệm là : $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2+\sqrt{2x}=(x+y)y+\sqrt{x+y}\\ \sqrt{x-1}+xy=\sqrt{y^2+21}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện xác định $x \ge 1, x+y \ge 0$

Khi đó $2x^2+\sqrt{2x}=(x+y)y+\sqrt{x+y} \Leftrightarrow 2x^2-xy-y^2+\sqrt{2x}-\sqrt{x+y}=0$

$$\Leftrightarrow (x-y)(2x+y)+\frac{x-y}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+y}}=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(2x+y+\frac{1}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+y}}\right)=0.$$

Do $x \ge 1, x+y \ge 0 \Rightarrow 2x+y>0$, từ đó suy ra $x=y$.

Thay vào (2) ta có $\sqrt{x-1}+x^2=\sqrt{x^2+21} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}-1+x^2-4=\sqrt{x^2+21}-5$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+x+2-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+21}+5}\right)=0 \ (3)$$

Vì $x+2-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+21}+5}=(x+2)\left(1-\frac{1}{10+\sqrt{x^2+91}}\right)>0$, từ (3) suy ra $x=2$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(2;2)$.

Bài 4: Giải hệ: $\begin{cases} x-2\sqrt{x^2-2x+4}=y+1-2\sqrt{y^2+3} \\ \sqrt{4x^2+x+6}-5\sqrt{y+2}=\sqrt{xy-2y-x+2}-1-2y-|x-2| \end{cases}$

Lời giải:

ĐK: $y \ge -2; (x-2)(y-1) \ge 0$

Bấm máy thấy $x-1=y$ từ (1) mà chúng độc lập lên nghĩ về hàm số

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x-1)-2\sqrt{(x-1)^2+3}=y-2\sqrt{y^2+3}$

Xét hàm $f(t)=t+2\sqrt{t^2+3}$ có $f'(t)=1-\frac{2t}{\sqrt{t^2+3}}, f'(t)=0 \Leftrightarrow t=1$

$f'(t)<0, \forall t>1$ và $f'(t)>0, \forall t<1$

Từ điều kiện ta có

- Nếu $x-2 \ge 0 \Rightarrow y-1 \ge 0$ hay $x-1 \ge 1 \Rightarrow y \ge 1$

  Phương trình (1) có dạng $f(x-1)=f(y) \Rightarrow x-1=y$

- Nếu $x-2<0 \Rightarrow y-1<0$ hay $x-1<1 \Rightarrow y<1$

  Phương trình (1) có dạng $f(x-1)=f(y) \Rightarrow x-1=y$

Vậy $x-1=y$ thế vào phương trình (2) ta có:

$$\sqrt{4x^2+x+6}-(1-2x)=5\sqrt{x+1}(a) \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+6}+(1-2x)}=\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \\ \sqrt{4x^2+x+6}+1-2x=\sqrt{x+1}(b) \end{array}\right.$$

Cách 1: Các em ghép (a) với (b) suy ra được: $2\sqrt{x+1}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ 4x^2-8x-3=0 \end{cases}$

Cách 2: Các em ép liên hợp:

Dò được: $\sqrt{x+1}-X=-0,5 \Leftrightarrow x-0,5=\sqrt{x+1}$

$$(b)\Leftrightarrow\left(\sqrt{4x^2+x+6}-3(x-\frac{1}{2})\right)+\left(x-\frac{1}{2}-\sqrt{x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5x^2+10x+\frac{15}{4}}{\sqrt{4x^2+x+6}+3(x-\frac{1}{2})}+\frac{x^2-2x-\frac{3}{4}}{x-\frac{1}{2}+\sqrt{x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-2x-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}+\sqrt{x+1}}-\frac{5}{\sqrt{4x^2+x+6}+3(x-\frac{1}{2})}\right)=0$$

$$\frac{1}{x-\frac{1}{2}+\sqrt{x+1}}-\frac{5}{\sqrt{4x^2+x+6}+3(x-\frac{1}{2})}=\frac{\sqrt{4x^2+x+6}-5\sqrt{x+1}+(1-2x)}{\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{4x^2+x+6}+3(x-\frac{1}{2})\right)}=0$$

$\Rightarrow\sqrt{4x^2+x+6}-5\sqrt{x+1}+(1-2x)=0$ Các em có thể kết hợp với (a) hoặc (b) để thấy nó vô nghiệm, qua ví dụ này để nhắc nhở chúng ta rằng, những ví dụ có biểu thức đánh giá sau liên hợp trâu thường là ta đi không chuẩn hướng hay rất có thể cần phải kết hợp với phương trình khác để bài toán dễ hơn

Nghiệm của hệ : $(-1,-2),\left(\frac{2+\sqrt{7}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

Bài 5 . Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy-y^2+2y-x-1=\sqrt{y-1}-\sqrt{x} \\ 3\sqrt{6-y}+3\sqrt{2x+3y-7}=2x+7 \end{cases}$

Hướng dẫn:

Điều kiện: $x\ge 0, 1\le y\le 6, 2x+3y-7\ge 0$ (*)

Nhận thấy $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ không là nghiệm của hệ phương trình $\Rightarrow \sqrt{y-1}+\sqrt{x}\ne 0$

Khi đó, PT (1) $\Leftrightarrow x(y-1)-(y-1)^2=\frac{y-1-x}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}$

$$\Leftrightarrow (y-1)(x-y+1)=\frac{y-1-x}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left(y-1+\frac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+1=0 \Leftrightarrow y=x+1 \text{ (do (*))}$$

Thay vào PT (2) ta được: $3\sqrt{5-x}+3\sqrt{5x-4}=2x+7$ ĐK: $4/5 \le x \le 5$ (**)

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{5-x}-(7-x)+3(\sqrt{5x-4}-x)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4+5x-x^2}{3\sqrt{5-x}+(7-x)}+\frac{3(-4+5x-x^2)}{\sqrt{5x-4}+x}=0$$

$$\Leftrightarrow (-4+5x-x^2)\left(\frac{1}{3\sqrt{5-x}+(7-x)}+\frac{3}{\sqrt{5x-4}+x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -x^2+5x-4=0 \text{ (do (**))}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=2 \\ x=4 \Rightarrow y=5 \end{array}\right. \text{ (thỏa mãn (*),(**))}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(1;2)$, $(4;5)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3\left(4y^2+1\right)+x\sqrt{2y}=3 \\ 2x^2y\left(1+\sqrt{4y^2+1}\right)=x+\sqrt{x^2+1} \end{cases}$

Hướng dẫn:

Điều kiện: $y \ge 0$

$PT(1) \Leftrightarrow x\left[x^2\left(4y^2+1\right)+\sqrt{2y}\right]=3 \Rightarrow x>0$

Khi đó, $PT(2) \Leftrightarrow 2y+2y\sqrt{4y^2+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$ (3)

Xét hàm $f(t)=t+t\sqrt{t^2+1}$ trên $(0;+\infty)$

Có $f'(t)=1+\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0\ \forall t>0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Khi đó, $PT(3) \Leftrightarrow f(2y)=f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 2y=\frac{1}{x}$

Thay vào phương trình (1) ta được phương trình: $x^3+x+\sqrt{x}=3$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2\sqrt{x}+x^2+x\sqrt{x}+x+2\sqrt{x}+3\right)=0 \Leftrightarrow x=1$

Với $x=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(1;\frac{1}{2}\right)$

Bài 7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{9-4y^2}=2x^2+6y^2-7 \end{cases}$

Hướng dẫn:

Điều kiện: $x \le 1; y \in \left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow 2y^3 + y = 2\sqrt{1-x} - 2x\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$$
$$\Leftrightarrow 2y^3 + y = 2(1-x)\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$, ta có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in R \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên **R**. Vậy

$$(1) \Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ y^2 = 1-x \end{cases}$$

Thế vào (2) ta được : $\sqrt{4x+5} = 2x^2 - 6x - 1$

Pt $\Leftrightarrow 2\sqrt{4x+5} = 4x^2 - 12x - 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{4x+5}+1\right)^2 = (2x-2)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{4x+5} = 2x-3 (vn) \\ \sqrt{4x+5} = 1-2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1+\sqrt{2} (loai) \\ x = 1-\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

Với $x = 1-\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \sqrt[4]{2} \\ y = -\sqrt[4]{2} \end{array}\right.$ Vậy hệ có hai nghiệm.

Bài 8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + \frac{x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \\ 3x^2 - 8x - 3 = 4(x+1)\sqrt{y+1} \end{cases}$

Hướng dẫn:

Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ y \ge -1 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^3 + x^2 + x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \Leftrightarrow \frac{x^3 + x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}} = (y+2)\sqrt{y+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3 + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \left(\sqrt{y+1}\right)^3 + \sqrt{y+1}.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in R$ suy ra *f(t)* đồng biến trên **R**.

Nên $f\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = f\left(\sqrt{y+1}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{y+1}$. Thay vào (2) ta được

$3x^2 - 8x - 3 = 4x\sqrt{x+1}$.

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2=\left(x+2\sqrt{x+1}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x+1}=x-1 \\ 2\sqrt{x+1}=1-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-6x-3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\le \dfrac{1}{3} \\ 9x^2-10x-3=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+2\sqrt{3} \\ x=\dfrac{5-2\sqrt{13}}{9} \end{array}\right.$$

Ta có $y=\dfrac{x^2}{x+1}-1$

Với $x=3+2\sqrt{3}\Rightarrow y=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}$. Với $x=\dfrac{5-2\sqrt{13}}{9}\Rightarrow y=-\dfrac{41+7\sqrt{13}}{72}$.

Các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện.

KL: Hệ phương trình có hai nghiệm

$(x;y)=\left(3+2\sqrt{3};\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}\right)$ & $(x;y)=\left(\dfrac{5-2\sqrt{13}}{9};-\dfrac{41+7\sqrt{13}}{72}\right)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 8\sqrt{2x-1}\left(2x-\sqrt{2x-1}\right)=y\left(y^2-2y+4\right) \\ 4xy+2\sqrt{(y+2)(y+2x)}=5y+12x-6 \end{cases}$

Hướng dẫn:

ĐK: $\begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ (y+2)(y+2x)\ge 0 \end{cases}$. Từ pt (1) $\Rightarrow$ để pt có nghiệm thì $y\ge 0$

PT $(1)\Leftrightarrow \left(2\sqrt{2x-1}\right)^3-2\left(2\sqrt{2x-1}\right)^2+4\left(2\sqrt{2x-1}\right)=y^3-2y^2+4y$ (*)

Xét hàm số $f(t)=t^3-2t^2+4t$ $(t\ge 0)$ có $f'(t)=3t^2-4t+4=2t^2+(t-2)^2>0$ $\forall t\ge 0$ nên $f(t)$ luôn đồng biến

Từ pt (*) $\Rightarrow f\left(2\sqrt{2x-1}\right)=f(y)\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}=y$

Thay vào pt (2) ta được pt $y^3+2(y+2)\sqrt{y+2}=3y(y+2)$

Đặt $z=\sqrt{y+2}$ ta được pt $y^3+2z^3=3yz^2\Leftrightarrow (y-z)^2(y+2z)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2z(loai) \\ y=z(tm) \end{array}\right.$

Với y = z ta được $y=\sqrt{y+2}\Rightarrow y=2\Rightarrow x=1$ (t/m).

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+3\sqrt{xy+x-y^2-y}=5y+4 \\ \sqrt{4y^2-x-2}+\sqrt{y-1}=x-1 \end{cases}$

Hướng dẫn:

Điều kiện: $\begin{cases} xy+x-y^2-y\geq 0 \\ 4y^2-x-2\geq 0 \\ y-1\geq 0 \end{cases}$

Hệ đã cho: $\begin{cases} x+3\sqrt{xy+x-y^2-y}=5y+4 & (1) \\ \sqrt{4y^2-x-2}+\sqrt{y-1}=x-1 & (2) \end{cases}$

Vì $y\geq 1\Rightarrow y+1>0\Rightarrow x-y\geq 0\Leftrightarrow x\geq y$

Phương trình (1) của hệ tương đương với:

$$x-y+3\sqrt{(x-y)(y+1)}=4(y+1)\Leftrightarrow x-y+3\sqrt{(x-y)(y+1)}-4(y+1)=0$$

Vì $y\geq 1\Rightarrow y+1>0\Rightarrow x-y\geq 0\Leftrightarrow x\geq y\geq 1$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-y}=\sqrt{y+1} \\ \sqrt{x-y}=-4\sqrt{y+1}\ (vn) \end{array}\right.\Leftrightarrow x=2y+1$$

Thay vào phương trình (2) của hệ ta được: $\sqrt{4y^2-2y-3}+\sqrt{y-1}=2y$ (*)

Điều kiện $y\geq\frac{1+\sqrt{13}}{4}$

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{4y^2-2y-3}-(2y-1)+\sqrt{y-1}-1=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{4y^2-2y-3-4y^2+4y-1}{\sqrt{4y^2-2y-3}+(2y-1)}+\frac{y-2}{\sqrt{y-1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2y-4}{\sqrt{4y^2-2y-3}+(2y-1)}+\frac{y-2}{\sqrt{y-1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y-2 \\ \dfrac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+(2y-1)}+\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+1}=0\ \ (3) \end{array}\right.$$

Phương trình (3) vô nghiệm vì $y\geq 1\Rightarrow 2y-1>0\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{4y^2-2y-3}+(2y-1)>0 \\ \sqrt{y-1}+1>0\end{cases}$.

Với $y=2\Rightarrow x=5$, thay lại hệ phương trình ban đầu, thỏa mãn.

Vậy hệ có một nghiệm $(5;2)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} & (1) \\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn:

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của hệ, chia cả hai vế của (1) cho x^3 ta được

$$(1)\Leftrightarrow 2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}=2(2-y)\sqrt{3-2y}$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{x}\right)^3+\left(1-\frac{1}{x}\right)=(3-2y)\sqrt{3-2y}+\sqrt{3-2y}\quad (*)$$

Xét hàm $f(t)=t^3+t$ luôn đồng biến trên R

$(*)\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}=\sqrt{3-2y}$ (3)

Thế (3) vào (2) ta được $\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{15-x}+1\Leftrightarrow\sqrt{x+2}-3+2-\sqrt[3]{15-x}=0$

$$\Leftrightarrow(x-7)\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}+\frac{1}{4-2\sqrt[3]{x+15}+\left(\sqrt[3]{x+15}\right)^2}}_{>0}\right)=0$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(7;\frac{111}{98}\right)$.

Bài 12: Giải hệ $\begin{cases}x^3-y^3+5x^2-2y^2+10x-3y+6=0 & (1)\\ \sqrt{x+2}+\sqrt{4-y}=x^3+y^2-4x-2y & (2)\end{cases}$

Hướng dẫn:

Điều kiện $x\geq-2;\ y\leq4$

$(1)\Leftrightarrow x^3+5x^2+10x+6=y^3+2y^2+3y$

$\Leftrightarrow(x+1)^3+2(x+1)^2+3(x+1)=y^3+2y^2+3y$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t^2+3t,\ f'(t)=3t^2+4t+3>0\ \forall t\in R$

Suy ra f(x+1) = f(y) => y= x+1 thay và pt (2) ta được

Phương trình : $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=x^3+x^2-4x-1$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}\right)-3=x^3+x^2-4x-4\Leftrightarrow\frac{2\left(\sqrt{(x+2)(3-x)}-2\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}+3}=(x+1)(x^2-4)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2[(x+2)(3-x)-4]}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}+3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)}+2\right)}=(x+2)(x^2-x-2)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(-x^2+x+2)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}+3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)}+2\right)}-(x+2)(x^2-x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow(x^2-x-2)\Bigg[\underbrace{x+2+\frac{2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}+3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)}+2\right)}}_{>0\ (vi\ x\geq-2)}\Bigg]=0$$

$\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\end{array}\right.$

Vậy hệ pt có nghiệm (x; y) = (2;3) , (x;y)= (-1; 0)

Bài 13. Giải hệ pt: $\begin{cases}2\sqrt{x+y+6}=1-y & (1)\\ 9\sqrt{1+x}+xy\sqrt{9+y^2}=0 & (2)\end{cases}$

Hướng dẫn:

Đk: $\begin{cases}x+y+6\geq0\\x\geq-1\end{cases}$

+) Nếu $y \ge 0$, để hệ có nghiệm thì $1 \ge y \ge 0$.

$$\left.\begin{array}{l} VT(1) = 2\sqrt{x+y+6} \ge 2\sqrt{5} \\ VP(1) = 1-y \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow VT(1) > VP(1) \text{ hệ vô nghiệm.}$$

+) Nếu y<0, từ (2) suy ra x>0

$$9\sqrt{1+x} + xy\sqrt{9+y^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{9+\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2} = (-y)\sqrt{9+(-y)^2}\ (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t\sqrt{9+t^2}, t>0; f'(t) = \dfrac{9+2t^2}{\sqrt{9+t^2}} > 0 \forall t > 0$

$$(3) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right) = f(-y) \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}} = -y \Leftrightarrow x = \frac{9}{y^2}$$

Thế vào pt(1) ta có phương trình $2\sqrt{\dfrac{9}{y^2}+y+6} = 1-y$ (4). Hàm số $g(y) = 2\sqrt{\dfrac{9}{y^2}+y+6}$ đồng biến trên $(-\infty;0)$; hàm số *h(y)*=1-*y* nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và phương trình có ngiệm y=-3 nên pt(4) có nghiệm duy nhất y=-3. Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (1;-3).

Bài 14. Giải hệ PT $\begin{cases} xy(x+1) = x^3+y^2+x-y \\ 3y\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4y+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right) = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn:

Ta có $xy(x+1) = x^3+y^2+x-y \Leftrightarrow x^3-x^2y+y^2-xy+x-y=0$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2-y+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=x^2+1 \end{array}\right.$$

Với $y=x^2+1$ thay vào PT thứ 2 ta được

$3(x^2+1)\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x^2+6)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$. Dễ thấy PT vô nghiệm.

Với $y=x$ thay vào PT thứ 2 ta được $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right) = -(2x+1)\left(\sqrt{3+(2x+1)^2}+2\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right) = (-2x-1)\left(\sqrt{3+(-2x-1)^2}+2\right)$$

Xét hàm số $f(t) = t\left(\sqrt{t^2+2}+2\right)$ ta có $f'(t) = \sqrt{t^2+2}+2+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+2}} > 0$ suy ra hàm số đồng biến.

Từ đó suy ra $3x = -2x-1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{5}$. Vậy HPT có nghiệm $(x;y) = \left(-\dfrac{1}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - y^2 - y - 3x + 2 = 0 \\ y\sqrt{x - y + 2} + x = 1 \end{cases}$

Hướng dẫn:

ĐK: $x \ge y - 2$.

$(1) \Leftrightarrow (x + y - 1)(x - y - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 - x \\ y = x - 2 \end{array}\right.$

* Với $y = 1 - x$ thay vào (2) ta có : $(1 - x)\left(\sqrt{2x + 1} - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 0\,(tm) \\ x = 0, y = 1\,(tm) \end{array}\right.$

* Với $y = x - 2$

$(2) \Leftrightarrow (x - 2).2 + x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}, y = -\dfrac{1}{3}$ (tm)

Vậy hệ pt có 3 nghiệm: $(1;0), (0;1), \left(\dfrac{5}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$.

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (1 - y)\sqrt{x^2 + 2y^2} = x + 2y + 3xy \\ \sqrt{y + 1} + \sqrt{x^2 + 2y^2} = 2y - x \end{cases}$

Hướng dẫn:

$\begin{cases} (1 - y)\sqrt{x^2 + 2y^2} = x + 2y + 3xy \ (1) \\ \sqrt{y + 1} + \sqrt{x^2 + 2y^2} = -x + 2y \ (2) \end{cases}$

ĐK: $y \ge -1$

Xét (1): $(1 - y)\sqrt{x^2 + 2y^2} = x + 2y + 3xy$ .Các em có thể dặt ẩn phụ không hoàn loàn làm như sau

Đặt $\sqrt{x^2 + 2y^2} = t\ (t \ge 0)$

Phương trình (1) trở thành: $t^2 + (1 - y)t - x^2 - 2y^2 - x - 2y - 3xy = 0$

$$\Delta = (1 - y)^2 + 4(x^2 + 2y^2 + x + 2y + 3xy) = (2x + 3y + 1)^2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -x - y - 1 \\ t = x + 2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2 + 2y^2} = -x - y - 1 \\ \sqrt{x^2 + 2y^2} = x + 2y \end{array}\right.$$

Ngoài ra các em dùng liên hợp cũng được.

Với $\sqrt{x^2+2y^2}=-x-y-1$, thay vào (2) ta có: $\sqrt{y+1}=3y+1 \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -\dfrac{1}{3} \\ 9y^2+5y=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=0$

$\Rightarrow \sqrt{x^2}=-x-1$ (vô nghiệm)

Với $\sqrt{x^2+2y^2}=x+2y$, ta có hệ: $\begin{cases} \sqrt{y+1}=-2x \\ \sqrt{x^2+2y^2}=x+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Bài 17. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2-y^2-7x+2y+6=0 \\ -7x^3+12x^2y-6xy^2+y^3-2x+2y=0. \end{cases}$ $(x,y \in \mathbb{R})$.

Ta có:

$-7x^3+12x^2y-6xy^2+y^3-2x+2y=0 \Leftrightarrow (y-x)\left[x^2-x(y-2x)+(y-2x)^2+2\right]=0$. (2)

Vì $x^2-x(y-2x)+(y-2x)^2+2=\left(y-2x-\dfrac{x}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}x^2+2>0$, $(\forall x,y)$ nên:

$(2) \Leftrightarrow x-y=0$ hay $x=y$.

$\Rightarrow$ Hệ tương đương: $\begin{cases} y=x \\ 2x^2-y^2-7x+2y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x^2-5x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3. \end{array}\right. \end{cases}$

Vậy hệ có 2 nghiệm $(x;y)=(2;2)$ hoặc $(x;y)=(3;3)$.

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2x-2=\sqrt{-y^2-4y-2} & (1) \\ 6x-y-11+\sqrt{10-4x-2x^2}=0 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn:

Điều kiện: $\begin{cases} y^2+4y+2 \ge 0 \\ -2x^2-4x+10 \ge 0 \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$y-6x+11=\sqrt{10-4x-x^2}=\dfrac{\sqrt{4(10-4x-2x^2)}}{2} \le \dfrac{14-4x-2x^2}{4}$

Rút gọn ta được: $4(y-6x+11) \le 14-4x-2x^2 \Leftrightarrow x^2-10x+2y+15 \le 0$ (3)

Tương tự phương trình (1)

$x^2+2x-2=\sqrt{-y^2-4y-2} \le \dfrac{-y^2-4y-2}{2} \Leftrightarrow 2x^2+4x+y^2+4y-3 \le 0$ (4)

Cộng vế với vế của (3) và (4) ta được:

$3x^2-6x+y^2+6y+12 \le 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2+(y+3)^2 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện đề bài, suy ra nghiệm hệ phương trình là $S=(1,-3)$

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 7x^3 + y^3 + 3xy(x-y) - 12x^2 + 6x = 1 \\ \sqrt[3]{4x+y+1} + \sqrt{3x+2y} = 4 \end{cases}$

Hướng dẫn:

Điều kiện: $3x+2y \geq 0$

$(1) \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$\Leftrightarrow (2x-1)^3 = (x-y)^3 \Leftrightarrow 2x-1 = x-y \Leftrightarrow y = 1-x$

Thế $y = 1 - x$ vào (2) ta được: $\sqrt[3]{3x+2} + \sqrt{x+2} = 4$

Đặt $a = \sqrt[3]{3x+2}, b = \sqrt{x+2}$ $(b \geq 0)$

Ta có hệ $\begin{cases} a+b=4 \\ a^3 = 3b^2 - 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4-a \\ a^3 = 3(4-a)^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4-a \\ a^3 = 3(16-8a+a^2) - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4-a \\ a^3 - 3a^2 + 24a - 44 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4-a \\ (a-2)(a^2 - a + 22) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{3x+2} = 2 \\ \sqrt{x+2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1$ (thỏa ĐK)

Kết luận: Nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (2; -1)$.

Bài 20. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} xy + 2x + 5y + 3 = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y+2} - y\sqrt{x-1} = \sqrt{x-1} + 2x - 2y - 2 \end{cases}$

Hướng dẫn:

ĐK : $\begin{cases} y \geq -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$

Pt đầu của hệ tương đương với $(x+y+1)(2y-x+3) = 0 \Leftrightarrow 2y - x + 3 = 0$ (do đk)

Thay vào pt thứ hai, được: $(2y+3)\sqrt{2y+2} - y\sqrt{2y+2} = \sqrt{2y+2} + 2y + 4$

$\Leftrightarrow (y+2)\left(\sqrt{2y+2} - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2y+2} - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ (thỏa đk)

Hệ pt có nghiệm duy nhất : $x = 5,\ y = 1$

Bài 21. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2(4x^2+y^2)} + \sqrt{5x^2+2xy+2y^2} = 3x - 2y \\ \sqrt{y^2+x+6} = 2(x+y) + 1 + 5\sqrt{x+1} \end{cases}$

Hướng dẫn:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ y^2 + x + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1$ (*)

Biến đổi vế trái phương trình thứ nhất $\sqrt{(2x+y)^2 + (2x-y)^2} + \sqrt{(2x+y)^2 + (x-y)^2}$

$\geq |2x-y| + |x-y| \geq |3x-2y| \geq 3x - 2y$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x+y=0 \\ (2x-y)(x-y)\ge 0 \\ 3x-2y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x=-y\ge 0$

Thay vào (2) ta được phương trình: $\sqrt{4x^2+x+6}=-2x+1+5\sqrt{x+1}$.

$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2+5(x+1)}=-(2x-1)+5\sqrt{x+1}$ (3)

Với $x\ge 0$, chia hai vế của phương trình (3) cho $\sqrt{x+1}$ ta được phương trình tương đương

$$\sqrt{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}\right)^2+5}=-\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}+5$$

Đặt $t=\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}$, phương trình được viết: $\sqrt{t^2+5}=-t+5 \Leftrightarrow \begin{cases} t\le 5 \\ t=2 \end{cases} \Leftrightarrow t=2$

Giải phương trình: $\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}=2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ 4(x+1)=4x^2-4x+1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ 4x^2-8x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ x=\frac{4\pm\sqrt{28}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=1+\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Khi $x=1+\frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow y=-2-\sqrt{7}$. Nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=\left(1+\frac{\sqrt{7}}{2};-2-\sqrt{7}\right)$.

Bài 22. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y+3}=(x+y)^2+2\sqrt{x+y} \\ \sqrt{x^2+x+y+2}+\sqrt{x-y}=3 \end{cases}$.

Hướng dẫn:

Điều kiện: $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ x-y\ge 0 \end{cases}$ (*)

Đặt $t=x+y\ge 0$, từ (1) ta có: $t+\sqrt{t+3}=t^2+2\sqrt{t}$

$\Leftrightarrow t-t^2+\sqrt{t+3}-2\sqrt{t}=0$

$$\Leftrightarrow t(1-t)+\frac{3(1-t)}{\sqrt{t+3}+2\sqrt{t}}=0 \Leftrightarrow (1-t)\left(t+\frac{3}{\sqrt{t+3}+2\sqrt{t}}\right)=0$$

$\Leftrightarrow t=1$ (Vì $t+\frac{3}{\sqrt{t+3}+2\sqrt{t}}>0, \forall t\ge 0$

Suy ra $x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$ (3).

Thay (3) vào (2) ta có: $\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x-1}=3$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+3}-2)+(\sqrt{2x-1}-1)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{2x-2}{\sqrt{2x-1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1\ \ (\text{Vì } \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}>0, x\geq\frac{1}{2}).$$

Suy ra (x = 1; y = 0), thoả mãn (*).

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất (x = 1; y = 0).

Bài 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2+3)=3(x^2+y^2)+2\\ 4\sqrt{x+2}+\sqrt{16-3y}=x^2+8\end{cases}$.

Hướng dẫn:

ĐK: $x\geq -2, y\leq\frac{16}{3}$

$(1)\Leftrightarrow (x-1)^3=(y+1)^3\Leftrightarrow y=x-2$ Thay $y=x$-2 vào (2) được

$$4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8\Leftrightarrow\frac{4(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}=(x-2)(x+2)+\frac{3(x-2)}{\sqrt{22-3x}+4}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ \dfrac{-4}{\sqrt{x+2}+2}+(x+2)+\dfrac{3}{\sqrt{22-3x}+4}=0(*)\end{array}\right.$$

Xét $f(x)$=VT(*) trên $\left[-2;\frac{21}{3}\right]$,có $f'(x)$>0 nên hàm số đồng biến. suy ra $x=-1$ là nghiệm duy nhất của (*)

Kết luận: HPT có 2 nghiệm (2;0),(-1;-3)

Bài 24. Giải hệ phương trình sau $\begin{cases}\left(4x^2+1\right)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\end{cases}$

Hướng dẫn: ĐK $\begin{cases}x\leq\frac{3}{4}\\ y\leq\frac{5}{2}\end{cases}$

Phương trình thứ nhất trong hệ tương đương với phương trình

$$\left(4x^2+1\right)2x=(5-2y+1)\sqrt{5-2y}\,(1)$$

Xét hàm số: $f_{(t)}=\left(t^2+1\right)t\Rightarrow f'=3t^2+1>0\Rightarrow f_{(t)}$ Đồng biến trên R

Phương trình 1 tương đương

$$f_{(2x)}=f_{\sqrt{5-2y}}\Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ y=\dfrac{5-4x^2}{2}\end{cases}$$

Thay vào phương trình 2 ta có: $\frac{25}{4}-6x^2+4x^4+2\sqrt{3-4x}=7$ (*)

- Xét hàm số $f(x)=4x^4-6x^2+\frac{25}{4}+2\sqrt{3-4x}$ trên $\left[0;\frac{3}{4}\right]$ suy ra

$$f'(x)=4x(4x^2-3)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}\ <0$$

Mặt khác : $f\left(\frac{1}{2}\right)=7$ nên (*) $\Leftrightarrow f_{(x)}=f_{\left(\frac{1}{2}\right)}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow$ y = 2. thỏa mãn

Kết luận $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=2\end{cases}$

Bài 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+3\sqrt{xy+x-y^2-y}=5y+4\\\sqrt{4y^2-x-2}+\sqrt{y-1}=x-1\end{cases}$

Hướng dẫn: ĐK: $\begin{cases}xy+x-y^2-y\geq 0\\4y^2-x-2\geq 0\\y-1\geq 0\end{cases}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow x-y+3\sqrt{(x-y)(y+1)}-4(y+1)=0$

Đặt $u=\sqrt{x-y},v=\sqrt{y+1}$ $(u\geq 0,v\geq 0)$.Khi đó (1) trở thành :

$$u^2+3uv-4v^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\u=-4v(vn)\end{array}\right.$$

Với $u=v$ ta có $x=2y+1$, thay vào (2) ta được : $\sqrt{4y^2-2y-3}+\sqrt{y-1}=2y$

$$\Leftrightarrow\sqrt{4y^2-2y-3}-(2y-1)+\left(\sqrt{y-1}-1\right)=0$$

$$\frac{2(y-2)}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\frac{y-2}{\sqrt{y-1}+1}=0\Leftrightarrow(y-2)\left(\frac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\frac{1}{\sqrt{y-1}+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y=2\text{(vì }\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\frac{1}{\sqrt{y-1}+1}>0\forall y\geq 1)$$

Với $y=2$ thì $x=5$. Đối chiếu Đk ta được nghiệm của hệ PT là $(5;2)$

Bài 26. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}xy\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{4+y}-\sqrt{y}\right)=8\\-3x^4y+2x^2y+26x=2\sqrt[3]{x^3-14}\end{cases}$

Hướng dẫn : $\begin{cases}xy\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{4+y}-\sqrt{y}\right)=8(1)\\-3x^4y+2x^2y+26x=2\sqrt[3]{x^3-14}(2)\end{cases}$

ĐK: $y\geq 0$

Ta có $\sqrt{4+y}-\sqrt{y}>\sqrt{y}-\sqrt{y}=0$ do đó từ phương trình (1) suy ra x>0; y>0

$$(1)\Leftrightarrow xy\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{4+y}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{4+y}+\sqrt{y}\right)=8\left(\sqrt{4+y}+\sqrt{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow xy\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)=2\left(\sqrt{4+y}+\sqrt{y}\right)\Leftrightarrow x+x\sqrt{1+x^2}=\frac{2}{\sqrt{y}}+\frac{2}{\sqrt{y}}\sqrt{\frac{4}{y}+1}$$

$\Leftrightarrow x+x\sqrt{1+x^2}=\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right)+\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right)\sqrt{1+\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right)^2}$ (3)

Xét hàm số $f(t)=t+t\sqrt{1+t^2}$ trên $(0;+\infty)$. Có $f'(t)=1+\sqrt{1+t^2}+\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}>0\forall t\in(0;+\infty)$

Suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mà phương trình (3) có dạng $f(x)=f\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right)\Leftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt{y}}\Leftrightarrow y=\frac{4}{x^2}$

Xét hàm số $g(u)=u^3+u$ trên R

Có $g'(u)=3u^2+1>0\forall u\in R$

Suy ra hàm số g(u) đồng biến trên R mà phương trình (4) có dạng:

$g(x-2)=g\left(\sqrt[3]{x^3-14}\right)\Leftrightarrow x-2=\sqrt[3]{x^3-14}\Leftrightarrow -6x^2+12x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{2}\,(tm)\\ x=1-\sqrt{2}\,(loai)\end{array}\right.$

=> $y=12-8\sqrt{2}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(1+\sqrt{2};12-8\sqrt{2}\right)$

Bài 27. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2(2x+1)^3+2x+1=(2y-3)\sqrt{y-2}\\ \sqrt{4x+2}+\sqrt{2y+4}=6\end{cases}$

Hướng dẫn:

Điều kiện xác định: $x\geq-\frac{1}{2},y\geq 2$

Xét hàm số: $f(t)=2t^3+t\quad t\in(0;+\infty)$ Suy ra $f'(t)=6t^2+1>0$ nên đây là hàm số đồng biến

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $f(2x+1)=f(\sqrt{y-2})\Leftrightarrow 2x+1=\sqrt{y-2}$

Thay vào phương trình thứ hai ta được: $\sqrt[4]{4y-8}+\sqrt{2y+4}=6$ (*)

Xét hàm số $g(y)=\sqrt[4]{4y-8}+\sqrt{2y+4}-6,\ y\in(2;+\infty)$

$g'(y)=\frac{1}{\sqrt[4]{4y-8}}+\frac{1}{\sqrt{2y+4}}>0\ \ \forall y\in(2;+\infty)$ nên g(y) đồng biến

Hơn nữa g(6) = 0 nên (*) có duy nhất 1 nghiệm là y = 6

Với y = 6 ta có $x=\frac{1}{2}$

Bài 28. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+xy+2y=2y^2+2x\ (1)\\ y\sqrt{x-y+1}+x=2.\qquad(2)\end{cases}$

Hướng dẫn:

ĐK: $x-y+1\ge 0$.

$(1)\Leftrightarrow x^2-y^2+xy-y^2+2y-2x=0\Leftrightarrow (x-y)(x+2y-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=y & (3)\\ x=2-2y & (4)\end{array}\right.$

- Từ (3) & (2) ta có $x=y=1$.
- Từ (4) & (2) ta có $\begin{cases} x=2-2y\\ y\sqrt{3-3y}=2y\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0;x=2\\ y=-\dfrac{1}{3};x=\dfrac{8}{3}.\end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm $(x;y)=(1;1)$; $(x;y)=(2;0)$; $(x;y)=\left(\dfrac{8}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$.

Bài 29. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(1-y)(x-3y+3)-x^2=\sqrt{(y-1)^3}.\sqrt{x}\\ \sqrt{x^2-y}+2\sqrt[3]{x^3-4}=2(y-2)\end{cases}$ $(x,y\in R)$.

Hướng dẫn:

ĐKXĐ: $\begin{cases}x^2-y\ge 0\\ x\ge 0, y\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\ge y\\ x\ge 1, y\ge 1\end{cases}$

Nhận xét $x\ge 1, y=1$ không là nghiệm của hệ. Xét $y>1$ thì pt (1) của hệ (I)

$x^2+x(y-1)-3(y-1)^2+(y-1)\sqrt{x(y-1)}=0 \quad \Leftrightarrow\left(\dfrac{x}{y-1}\right)^2+\dfrac{x}{y-1}-3+\sqrt{\dfrac{x}{y-1}}=0$

$t=\sqrt{\dfrac{x}{y-1}}, t>0$. Khi đó, pt (1) trở thành

$t^4+t^2+t-3=0\Leftrightarrow (t-1)\left(t^3+t^2+2t+3\right)=0\Leftrightarrow t=1.$

Với t = 1, thì $\sqrt{\dfrac{x}{y-1}}=1\Leftrightarrow y=x+1$, thế vào pt(2), ta được

$\sqrt{x^2-x-1}+2\sqrt[3]{x^3-4}=2(x-1)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x-1}+2\left[\sqrt[3]{x^3-4}-(x-1)\right]=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x-1}+6\left[\dfrac{x^2-x-1}{\sqrt[3]{\left(x^3-4\right)^2}++(x-1)\sqrt[3]{x^3-4}+(x-1)^2}\right]=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x-1}\left(1+\dfrac{6\sqrt{x^2-x-1}}{\sqrt[3]{\left(x^3-4\right)^2}++(x-1)\sqrt[3]{x^3-4}+(x-1)^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x-1}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\quad (x\ge 1)$.

Với $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Đối chiếu ĐK, hệ phương có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài 30. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + x - 4y + 2 = 0 \\ x^3 + x - 3 = 2\sqrt{x+2} + y \end{cases}$ $(x, y \in R)$.

Hướng dẫn:

$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + x - 4y + 2 = 0 & (1) \\ x^3 + x - 3 = 2\sqrt{x+2} + y & (2) \end{cases}$ Điều kiện: $x \geq -2$.

$(1) \Leftrightarrow x^3 + x + 2 = y^3 - 3y^2 + 4y \Leftrightarrow x^3 + x + 2 = (y-1)^3 + (y-1) + 2$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t + 2$ trên $[-2; +\infty)$.

Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in [-2; +\infty)$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[-2; +\infty)$.

Do đó: $x = y - 1$.

Thay $y = x + 1$ và phương trình (2) ta được: $x^3 - 3 = 2\sqrt{x+2} + 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - 8 = 2\left(\sqrt{x+2} - 2\right) \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right) = \frac{2\left(\sqrt{x+2} - 2\right)\left(\sqrt{x+2} + 2\right)}{\left(\sqrt{x+2} + 2\right)}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right) = \frac{2(x-2)}{\left(\sqrt{x+2} + 2\right)} \Leftrightarrow (x-2)\left[x^2 + 2x + 4 - \frac{2}{\left(\sqrt{x+2} + 2\right)}\right] = 0$$

- $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$
- $x^2 + 2x + 4 - \frac{2}{\left(\sqrt{x+2} + 2\right)} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = \frac{2}{\left(\sqrt{x+2} + 2\right)}$ (*)

Ta có $VT = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \geq 3; VP = \frac{2}{\sqrt{x+2} + 2} \leq 1, \forall x \in [-2; +\infty)$

Do đó phương trình (*) vô nghiệm. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 3)$.

Bài 31. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 y + x^2 + 1 = 2x\sqrt{x^2 y + 2} \\ y^3(x^6 - 1) + 3y(x^2 - 2) + 3y^2 + 4 = 0 \end{cases}$ $(x, y \in R)$.

Hướng dẫn:

Điều kiện: $x^2 y \geq -2$. Gọi hai phương trình lần lượt là (1) và (2)

$(2) \Leftrightarrow x^6 y^3 + 3x^2 y = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 + 3(y-1)$

$\Leftrightarrow (x^2 y)^3 + 3x^2 y = (y-1)^3 + 3(y-1)$ (3)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in R$

Do đó $(3) \Leftrightarrow f(x^2 y) = f(y-1) \Leftrightarrow x^2 y = y - 1, (y \geq -1)$.

Thế vào (1) ta được $x^2 y + x^2 + 1 = 2x\sqrt{y+1}$

$\Leftrightarrow x^2(y+1) - 2x\sqrt{y+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow (x\sqrt{y+1} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{y+1} = 1$

Do đó hệ đã cho tương đương với

$\begin{cases} x\sqrt{y+1}=1 \\ x^2y=y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y+x^2=1 \\ x^2y=y-1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x^2 \\ x^2(2-x^2)+x^2=1\,(4) \\ x>0 \end{cases}$

$(4) \Leftrightarrow x^4-3x^2+1=0 \Leftrightarrow (x^2-1)^2-x^2=0 \Leftrightarrow (x^2-x-1)(x^2+x-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$. Do $x>0$ nên $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Với $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Với $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right),(x;y)=\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Bài 32. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^6+3x^2-4=y^3+3y^2+6y \\ 2y-(x+1)\sqrt{x^2+y+8}+7=x \end{cases}$

Hướng dẫn:

Điều kiện: $x^2+y+8\ge 0$

∘ PT(1) $\Leftrightarrow x^6+3x^2=(y+1)^3+3(x+1) \Leftrightarrow (x^2)^3+3x^2=(y+1)^3+3(y+1)$

$\Leftrightarrow f(x^2)=f(y+1)$ với $f(t)=t^3+3t$

∘ Ta có: $f'(t)=3t^2+3>0\ \forall t\in R \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên R

Do đó: $f(x^2)=f(y+1) \Leftrightarrow x^2=y+1$

∘ Với $y=x^2-1$, pt (2) trở thành: $2(x^2-1)-(x+1)\sqrt{2x^2+7}-x+7=0$

$2x^2+7-(x+1)\sqrt{2x^2+7}-x-2=0(*)$

Đặt $t=\sqrt{2x^2+7},(t\ge\sqrt{7})$, pt(*) trở thành: $t^2-(x+1)t-x-2=0\,(**)$

Ta có: $\Delta=(x+3)^2$ nên (**) có hai nghiệm: $t=x+2$ hoặc $t=-1$ (loại)

Với $t=x+2$ $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+7}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ 2x^2+7=x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x^2-4x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array} \right.$

∘ Với $x=1 \Rightarrow y=0$ (nhận)

∘ Với $x=3 \Rightarrow y=8$ (nhận)

Kết luận: hệ có hai nghiệm (x;y) là (1;0), (3;8)

Bài 33. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2 \\ 12y^2-10y+2=2\sqrt[3]{x^3+1} \end{cases}$ $(x;y\in R)$

Hướng dẫn:

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=\sqrt{(-2y)^2+4}+(-2y)$ (*).

Xét hàm số đặc trưng $f(t)=\sqrt{t^2+4}+t \Rightarrow f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}+1=\dfrac{t+\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}>\dfrac{t+|t|}{\sqrt{t^2+4}}\ge 0.$

$3x^2+5x+2=2\sqrt[3]{x^3+1}$

$\Leftrightarrow (x+1)^3+2(x+1)=(x^3+1)+2\sqrt[3]{x^3+1}$ (**)

Suy ra f(t) là hàm số đồng biến trên R. Từ (*) suy ra: $f(x)=f(-2y)\Rightarrow x=-2y$.

Thay vào phương trình (2) ta được:

Xét hàm số $g(t)=t^3+2t$ ta thấy g(t) đồng biến trên R nên từ (**) suy ra $x+1=\sqrt[3]{x^3+1}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$. Vậy hệ có hai nghiệm là $(-1;\frac{1}{2})$; $(0;0)$.

Bài 34. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+y}+\sqrt{3}=\sqrt{y^2-3x}+\sqrt{7}\\ \sqrt{y-1}+2y^2+1=\sqrt{x}+x^2+xy+3y\end{cases}$

Hướng dẫn:

Điều kiện: $y\ge 1, x\ge 0, y^2\ge 3x$. $(2)\Leftrightarrow \sqrt{y-1}-\sqrt{x}+(y^2-2y+1)-x^2+(y^2-xy-y)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{y-1-x}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+(y-1)^2-x^2+y(y-x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (y-x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+2y-1+x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y=x+1\quad \left(\text{Do } \frac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+2y-1+x>0, \forall y\ge 1, \forall x\ge 0\right)$$

Thế y vào (1) ta được $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{7}-\sqrt{3}$ (3)

Xét $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$,

$$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2+3}}-\frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^2+3}}$$

Xét $g(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}, g'(t)=\frac{3}{\sqrt{(t^2+3)^3}}>0, \forall t\in R$ suy ra g(t) đồng biến trên R

Do $2x+1>2x-1$ nên $g(2x+1)>g(2x-1)$ suy ra $f'(x)=g(2x+1)-g(2x-1)>0, \forall x\in R$.

Do đó $f(x)$ đồng biến trên **R**, nên $(3)\Leftrightarrow f(x)=f(2)\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=3$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(2;3)$

Bài 35. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y^2+x^3-x^2+2\sqrt[3]{y^4}+\sqrt[3]{y^2}=2x\sqrt{x-1}\left(y+\sqrt[3]{y}\right)\\ y^4+\sqrt{y^3-y^2+1}=y(x-1)^3+1\end{cases}$

Hướng dẫn:

$(1)\Leftrightarrow \left(y+\sqrt[3]{y}\right)^2+\left(x\sqrt{x-1}\right)^2-2x\sqrt{x-1}\left(y+\sqrt[3]{y}\right)=0\Leftrightarrow y+\sqrt[3]{y}=x\sqrt{x-1}$ (a)

Đặt $u=\sqrt[3]{y}$, $v=\sqrt{x-1}$, (a) thành $u^3+u=(v^2+1)v \Leftrightarrow u^3+u=v^3+v$ (b)

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$, có $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in R$ nên $f(t)$ đồng biến. Vậy $(b)\Leftrightarrow \sqrt[3]{y}=\sqrt{x-1}$ (*)

Thay vào (2): $y^4+\sqrt{y^3-y^2+1}=y^3+1 \Leftrightarrow y^4-y^3+\sqrt{y^3-y^2+1}-1=0 \Leftrightarrow y^4-y^3+\dfrac{y^3-y^2}{\sqrt{y^3-y^2+1}+1}=0$

$\Leftrightarrow\left(y+\dfrac{1}{\sqrt{y^3-y^2+1}+1}\right)(y^3-y^2)=0 \Leftrightarrow y^3-y^2=0$ (vì từ (*) suy ra $y\ge 0$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\\ y=1\end{array}\right.$

ĐS: $(1;0),(2;1)$

Bài 36. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2-y^2+xy-5x+y+2=\sqrt{y-2x+1}-\sqrt{3-3x}\\ x^2-y-1=\sqrt{4x+y+5}-\sqrt{x+2y-2}\end{cases}$

Hướng dẫn:

ĐK: $y-2x+1\ge 0, 4x+y+5\ge 0, x+2y-2\ge 0, x\le 1$

TH 1. $\begin{cases}y-2x+1=0\\ 3-3x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0=0\\ -1=\sqrt{10}-1\end{cases}$ (Không TM hệ)

TH 2. $x\ne 1, y\ne 1$. Đưa pt thứ nhất về dạng tích ta được

$$(x+y-2)(2x-y-1)=\frac{x+y-2}{\sqrt{y-2x+1}+\sqrt{3-3x}}$$

$$(x+y-2)\left[\frac{1}{\sqrt{y-2x+1}+\sqrt{3-3x}}+y-2x+1\right]=0.$$ Do $y-2x+1\ge 0$

nên $\dfrac{1}{\sqrt{y-2x+1}+\sqrt{3-3x}}+y-2x+1>0 \Rightarrow x+y-2=0$

Thay $y=2-x$ vào pt thứ 2 ta được $x^2+x-3=\sqrt{3x+7}-\sqrt{2-x}$

$\Leftrightarrow x^2+x-2=\sqrt{3x+7}-1+2-\sqrt{2-x}$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)=\dfrac{3x+6}{\sqrt{3x+7}+1}+\dfrac{2+x}{2+\sqrt{2-x}}$

$\Leftrightarrow (x+2)\left[\dfrac{3}{\sqrt{3x+7}+1}+\dfrac{1}{2+\sqrt{2-x}}+1-x\right]=0$

Do $x\le 1$ nên $\dfrac{3}{\sqrt{3x+7}+1}+\dfrac{1}{2+\sqrt{2-x}}+1-x>0$

Vậy $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow y=4$ (TMĐK)

Bài 37. Giải hệ : $\begin{cases}xy-y^2+2y-x-1=\sqrt{y-1}-\sqrt{x}\\ 3\sqrt{6-y}+3\sqrt{2x+3y-7}=2x+7\end{cases}$

Hướng dẫn:

Điều kiện : $x\ge 0, y\in[1;6]; 2x+3y\ge 7$

Các em bấm máy ra mối quan hệ $x-y+1=0$ từ (1) rồi biến đổi thành:

$$(x-y+1)\left(x+2y-1+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y-1}}\right)=0$$

Ta có : $x+2y-1\geq 0+2.1-1=1>0$ do đó $x+2y-1+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y-1}}>0$

$\Rightarrow x-y+1=0\Leftrightarrow x=y-1$ thế vào (2) được : $3\sqrt{6-y}+3\sqrt{5y-9}=2x+5$

Nhớ là trong quá trình bấm máy thì xét $3\sqrt{6-y}$=ay+b,$3\sqrt{5y-9}$=ax+b **có cả cái hệ số trước căn mới ra được và được kết quả như sau :**

$$\Leftrightarrow\left(8-y-3\sqrt{6-y}\right)+3(y-1-\sqrt{5y-9})=0$$

$$\Leftrightarrow\left(y^2-7y+10\right)\left(\frac{1}{8-y+3\sqrt{6-y}}+\frac{3}{y-1+\sqrt{5y-9}}\right)=0$$

Với : $y\in[1;6]\Rightarrow\frac{1}{8-y+3\sqrt{6-y}}+\frac{3}{y-1+\sqrt{5y-9}}>0$ nên

$$y^2-7y+10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2\rightarrow x=1\\ y=5\rightarrow x=4\end{array}\right.\Rightarrow(1;2),(4;5)$$

Bài 38. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}-y^3+(x-3)y^2+(2x-3)y+x-1=0\\ y^2+6y+6=(y+1)\sqrt{14y+13}+\sqrt{10x-9}\end{cases}$

Hướng dẫn: $x\geq\frac{9}{10},y\geq\frac{-13}{14}$

Các em bấm máy và đưa phương trình 1 thành: $(y+1)^2(x-y-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1(loai)\\ x=y+1\end{array}\right.$

Thay $x=y+1$ vào phương trình (2) ta được :

$$y^2+6y+6-(y+1)\sqrt{14y+13}-\sqrt{10y+1}=0$$

Bây giờ các em tiến hành bấm nghiệm và dò biểu thức ghép với căn là xong.

$$\Leftrightarrow(y+1)\left[(y+4)-\sqrt{14y+13}\right]+\left[(y+2)-\sqrt{10y+1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow(y+1)\frac{\left(y^2-6y+3\right)}{(y+4)+\sqrt{14y+13}}+\frac{\left(y^2-6y+3\right)}{(y+2)+\sqrt{10y+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(y^2-6y+3\right)\left(\frac{y+1}{(y+4)+\sqrt{14y+13}}+\frac{1}{(y+2)+\sqrt{10y+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y^2-6y+3=0$$

Do $y\geq\frac{-1}{10}\Rightarrow\frac{y+1}{(y+4)+\sqrt{14y+13}}+\frac{1}{(y+2)+\sqrt{10y+1}}>0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=3-\sqrt{6}\\ y=3+\sqrt{6}\end{array}\right.$ Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\{(4-\sqrt{6};3-\sqrt{6}),(4+\sqrt{6};3+\sqrt{6})\}$

Bài 39. $\begin{cases} 32x^5 - 5\sqrt{y-2} = y(y-4)\sqrt{y-2} - 2x (1) \\ (\sqrt{y-2}-1)\sqrt{2x+1} = 8x^3 - 13(y-2) + 82x - 29 (2) \end{cases}$

Hướng dẫn:

Đặt đk $x \geq -\frac{1}{2}, y \geq 2$

$(1) \Leftrightarrow (2x)^5 + 2x = (y^2-4y)\sqrt{y-2} + 5\sqrt{y-2} \Leftrightarrow (2x)^5 + 2x = \left(\sqrt{y-2}\right)^5 + \sqrt{y-2} (3)$ Xét hàm số

$f(t) = t^5 + t, f'(t) = 5t^4 + 1 > 0, \forall x \in R$, suy ra hàm số f(t) liên tục trên R. Từ (3) ta có

$f(2x) = f(\sqrt{y-2}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{y-2}$

Thay $2x = \sqrt{y-2} (x \geq 0)$ vào (2) được

$(2x-1)\sqrt{2x+1} = 8x^3 - 52x^2 + 82x - 29$

$\Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{2x+1} = (2x-1)(4x^2 - 24x + 29)$

$\Leftrightarrow (2x-1)\left(\sqrt{2x+1} - 4x^2 + 24x - 29\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ \sqrt{2x+1} - 4x^2 + 24x - 29 = 0 (4) \end{array}\right.$

Với x=1/2. Ta có y=3

$(4) \Leftrightarrow (\sqrt{2x+1} - 2) - (4x^2 - 24x + 27) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{2x+1}+2} - (2x-3)(2x-9) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3/2 \\ \frac{1}{\sqrt{2x+1}+2}(2x-9) = 0 (5) \end{array}\right.$

Với x=3/2. Ta có y=11

Xét (5). Đặt $t = \sqrt{2x+1} \geq 0 \Rightarrow 2x = t^2 - 1$. Thay vao (5) được

$t^3 + 2t - 10 - 21 = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t^2 - t - 7) = 0$. Tìm được $t = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$. Từ đó tìm được

$x = \frac{13+\sqrt{29}}{4}, y = \frac{103+13\sqrt{29}}{2}$

Bài 40. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \cos x - \cos y = 2y - 2x & (1) \\ 4x^3 + y - (x+1)\sqrt{2y+1} = 0 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn:

Xét f(t) = cost + 2t có f'(t) = –sint + 2 > 0 ∀ t

⇒ f(t) đồng biến trên R.

Do đó (1) ⇔ f(x) = f(y) ⇔ x = y.

Thay vào (2) ta được:

$4x^3 + x - (x+1)\sqrt{2x+1} = 0 \Leftrightarrow (2x)^3 + 2x = (\sqrt{2x+1})^3 + \sqrt{2x+1}$ (3)

Xét $g(t) = t^3 + t$ có $g'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t$

⇒ g(t) đồng biến trên R

Do đó (3) $\Leftrightarrow$ f(2x) = f($\sqrt{2x+1}$) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{2x+1}$ = 2x

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ 4x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

Bài 41. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x - 12y + 7 = 3x^2 - 6y^2 & (1) \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{4-y} = x^3 + y^2 - 4x - 2y & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn:

Điều kiện : $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 4-y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 4 \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có $(x-1)^3 = (y-2)^3 \Leftrightarrow x-1 = y-2 \Leftrightarrow y = x+1 \quad (3)$

Thay (3) vào (2) ta được pt: $\sqrt{x+2} + \sqrt{4-(x+1)} = x^3 + (x+1)^2 - 4x - 2(x+1)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = x^3 + x^2 - 4x - 1$, Đ/K $-2 \leq x \leq 3$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}\right) - 3 = x^3 + x^2 - 4x - 4 \Leftrightarrow \frac{2\left(\sqrt{(x+2)(3-x)} - 2\right)}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}\right) + 3} = (x+1)\left(x^2 - 4\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left[(x+2)(3-x) - 4\right]}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)} + 2\right)} = (x+1)\left(x^2 - 4\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(-x^2 + x + 2\right)}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)} + 2\right)} = (x+2)\left(x^2 - x - 2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - x - 2\right)\left(\underbrace{x + 2 + \frac{2}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)} + 2\right)}}_{>0}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$

- $x = 2 \xrightarrow{(3)} y = 3 \Rightarrow (x;y) = (2;3)$ (thỏa mãn đ/k)
- $x = -1 \xrightarrow{(3)} y = 0 \Rightarrow (x;y) = (-1;0)$(thỏa mãn đ/k)

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y) = (2;3), (x;y) = (-1;0)$

Bài 42. Giải hệ: $\begin{cases} 7\sqrt{x+1} - 1 = y\left(\sqrt{x+1} + 1\right) & (1) \\ (x+1)y^2 + y\sqrt{x+1} = 13x + 12 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn:

Điều kiện: $x \geq -1; x, y \in R$

$PT(1) \Leftrightarrow (7-y)\sqrt{x+1} = y+1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \dfrac{y+1}{7-y}$ (Do $y = 7$ không là nghiệm của phương trình)

Thay $\sqrt{x+1}=\frac{y+1}{7-y}$ vào (2) ta được phương trình: $y^2.\left(\frac{y+1}{7-y}\right)^2+y.\frac{y+1}{7-y}=13.\left(\frac{y+1}{7-y}\right)^2-1$

$\Leftrightarrow y^2(y+1)^2+y(y+1)(7-y)=13(y+1)^2-(7-y)^2 \Leftrightarrow y^4+y^3-5y^2-33y+36=0$

$\Leftrightarrow (y-1)(y-3)(y^2+5y+12)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=3 \end{array}\right.$

Với $y=1 \Rightarrow x=-\frac{8}{9}$

Với $y=3 \Rightarrow x=0$

Hệ phương trình có 2 nghiệm $(x;y)$ là $\left(-\frac{8}{9};1\right),(0;3)$.

Bài 43. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} & (1) \\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn:

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của hệ, chia cả hai vế của (1) cho x^3 ta được

$(1) \Leftrightarrow 2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}=2(2-y)\sqrt{3-2y}$

$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{x}\right)^3+\left(1-\frac{1}{x}\right)=(3-2y)\sqrt{3-2y}+\sqrt{3-2y} \quad (*)$

Xét hàm $f(t)=t^3+t$ luôn đồng biến trên **R**

$(*) \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}=\sqrt{3-2y} \qquad (3)$

Thế (3) vào (2) ta được $\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{15-x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}-3+2-\sqrt[3]{15-x}=0$

$$\Leftrightarrow (x-7)\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}+\frac{1}{4-2\sqrt[3]{x+15}+\left(\sqrt[3]{x+15}\right)^2}}_{>0}\right)=0$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(7;\frac{111}{98}\right)$.

Bài 44. Giải hệ $\begin{cases} x^2+xy(2y-1)=2y^3-2y^2-x & (1) \\ 6\sqrt{x-1}+y+7=4x(y-1) & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn:

ĐK: $x \geq 1$.

$(1) \Leftrightarrow (2y^2+x)(1+x-y)=0 \Leftrightarrow y=x+1$ vì $2y^2+x>0, \forall x \geq 1$

Thay vào (2) ta được $6\sqrt{x-1}+x+8=4x^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}+3\right)^2=(2x)^2 \Leftrightarrow 2x=\sqrt{x-1}+3$

$\Leftrightarrow 2x-3=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-13x+10=0 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=3$

Vậy nghiệm của phương trình là $(x;y)=(2;3)$.

Bài 45. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)(y-2)}+x+5=2y+\sqrt{y-2}\\ \dfrac{(x-8)(y+1)}{x^2-4x+7}=(y-2)\left(\sqrt{x+1}-3\right)\end{cases}$

Hướng dẫn:

Điều kiện $x\ge -1; y\ge 2$.
Bài này ép cũng được, không thì đặt rồi bấm máy cho gọn.
Đặt $\sqrt{x+1}=a;\sqrt{y-2}=b$ $(a,b\ge 0)$, từ (1) ta có:

$a+ab+a^2-1+5=2\left(b^2+2\right)+b\Leftrightarrow a-b+ab-b^2+a^2-b^2=0$

$\Leftrightarrow (a-b)(1+2a+b)=0$

$\Leftrightarrow a=b$ (do $a,b\ge 0\Rightarrow 1+2a+b>0$

$\Rightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{y-2}\Leftrightarrow y=x+3$.

Thế vào (2) ta được:

$\dfrac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7}=(x+1)\left(\sqrt{x+1}-3\right)\Leftrightarrow \dfrac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7}=\dfrac{(x+1)(x-8)}{\sqrt{x+1}+3}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=8\\ \dfrac{x+4}{x^2-4x+7}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}+3}\ (*)\end{array}\right.$

+ $x=8\Rightarrow y=11$;

+ $(*)\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+3\right)(x+4)=(x+1)\left(x^2-4x+7\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+3\right)\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2+3\right]=\left[(x-2)+3\right].\left[(x-2)^2+3\right]$ (**)

Xét hàm số $f(t)=(t+3)\left(t^2+3\right)$ với $t\in R$ có $f'(t)=3(t+1)^2\ge 0\ \forall t\in R$
nên $f(t)$ đồng biến trên **R**.

Do đó $(**)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+1}\right)=f(x-2)\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=x-2\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2\\ x+1=x^2-4x+4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2\\ x^2-5x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ (T/M)

$x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $(8;11)$ và $\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{2};\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}\right)$

Bài 46. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+y^3=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\ln\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)\ (1)\\ x(x+1)=(2-y).\sqrt{y^2+2y+3}\ (2)\end{cases}$

Hướng dẫn:

$(1) \Leftrightarrow x^3 - \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = -y^3 + \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{y^2+1}+y}\right)$ Xét $f(t) = t^3 - \ln\left(\sqrt{t^2+1} - t\right)$, $D = R$

$\Leftrightarrow x^3 - \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = (-y)^3 - \ln\left(\sqrt{(-y)^2+1} - (-y)\right)$

$f'(t) = 3t^2 + \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t \in R$

$\Rightarrow f$ đồng biến trên R.

Vậy $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(-y) \Leftrightarrow x = -y$

Thay vào (2) $\Rightarrow x^2 + x = (x+2).\sqrt{x^2 - 2x + 3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+x)(x+2) \geq 0 \\ (x^2+x)^2 = (x^2-2x+3).(x+2)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+x)(x+2) \geq 0 \\ x^2 - 2x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{7}$

Vậy nghiệm hpt: $(1+\sqrt{7}; -1-\sqrt{7}); (1-\sqrt{7}; (-1+\sqrt{7})$

Bài 47. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 \end{cases}$

Hướng dẫn:

Điều kiện : $x \geq -\dfrac{4}{5}$.

Nếu $y = 0 \Rightarrow x = 0$ không thỏa mãn (2)

Nếu $y \neq 0$. Chia cả hai vế của phương trình (1) cho y^5 ta được

$\left(\dfrac{x}{y}\right)^5 + \left(\dfrac{x}{y}\right) = y^5 + y \Leftrightarrow f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(y)$

Với $f(t) = t^5 + t; f'(t) = 5t^4 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra $f(t)$ đồng biến tên $\mathbb{R}$

$f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(y) \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2$. Thế vào (2) ta được

$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6$

Giải pt này ta được x = 1. Kết luận hệ có 2 nghiệm $x = y = 1; x = 1, y = -1$

Bài 48. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2(y-1)(x-y)} + \sqrt{xy} = 2y \\ \sqrt{y-1} + \sqrt{2x+5} = 3x^2 - 6x + 4 \end{cases}$

Hướng dẫn:

Điều kiện : $x \ge 0, y \ge 1$

Từ phương trình 1 bấm máy tính được: $X = Y, cho Y = 100 \to X = 100$

Cho Cacl X=100, Y=99 thì thấy dương, Y=101 thì thấy âm do đó không thể sử dụng đánh giá được do đó chỉ còn cách ép liên hợp

$$x = y \to \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2(y-1)(x-y)} = y \\ \sqrt{xy} = y \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2 + 2(y-1)(x-y)} + \sqrt{xy} = 2y$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + 2(y-1)(x-y)} - y\right) + \left(\sqrt{xy} - y\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)\left[(2y-2)+x+y\right]}{\sqrt{x^2+2(y-1)(x-y)}+y} + \frac{y(x-y)}{\sqrt{xy}+y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{3y+x-2}{\sqrt{x^2+2(y-1)(x-y)}+y} + \frac{y}{\sqrt{xy}+y}\right] = 0$$

$$x \ge 0, y \ge 1 \Rightarrow \frac{3y+x-2}{\sqrt{x^2+2(y-1)(x-y)}+y} + \frac{y}{\sqrt{xy}+y} > 0$$

Do đó $x = y$ thế vào phương trình (2) ta được:

$\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+5} = 3x^2 - 6x + 4$ Điều kiện $x \ge 1$

Bấm máy được nghiệm : $x = 2$ là nghiệm duy nhất, ta kiểm tra luôn xem có phải nghiệm kép không bằng cách tính đạo hàm phương trình tại $x = 2$ thì thấy nó khác không do đó đây là nghiệm đơn duy nhất và ta chỉ cần ghép căn với 1 số.

$$3x^2 - 6x + \left(1 - \sqrt{x-1}\right) + \left(3 - \sqrt{2x+5}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(3x - \frac{1}{1+\sqrt{x-1}} - \frac{2}{3+\sqrt{2x+5}}\right) = 0$$

Ta có:

$$\frac{1}{1+\sqrt{x-1}} + \frac{2}{3+\sqrt{2x+5}} \le \frac{1}{1} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow 3x - \left(\frac{1}{1+\sqrt{x-1}} + \frac{2}{3+\sqrt{2x+5}}\right) \ge 3x - \frac{5}{3} \ge 3 - \frac{5}{3} > 0$$

Do đó $x = 2$ là nghiệm. Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(2;2)$

Bài 49. Giải hệ: $\begin{cases} \dfrac{1+4(x-y+1)^2}{\sqrt{2(x-y+2)}} = 1 + \dfrac{3}{2(x-y+1)} \\ \sqrt{9x-2} + \sqrt[3]{7x^2+2y-5} = 2y+3 \end{cases}$

Hướng dẫn:

Bấm máy ra $x=y$ từ phương trình 1 :

Đặt : $x-y+1=t>-1, t\neq 0$ do đó ta biết rằng $t=1$

$$\Rightarrow \frac{1+4t^2}{\sqrt{2(t+1)}}=1+\frac{3}{2t} \Leftrightarrow (2t+3)\sqrt{2(t+1)}-2t(1+4t^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (2t+3)\left(\sqrt{2(t+1)}-2\right)+2(2t+3)-2t(1+4t^2)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2t+3)(2t-2)}{\sqrt{2(t+1)}+2}+2t+6-8t^3=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2t+3)(2t-2)}{\sqrt{2(t+1)}+2}+2t+6-8t^3=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2t+3)(2t-2)}{\sqrt{2(t+1)}+2}+(t-1)\left(-2t^2-2t-6\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\left[\frac{2(2t+3)}{\sqrt{2(t+1)}+2}+\left(-2t^2-2t-6\right)\right]=0$$

$$t>-1 \Rightarrow \frac{2(2t+3)}{\sqrt{2(t+1)}+2}+\left(-2t^2-2t-6\right)\leq (2t+3)+\left(-2t^2-2t-6\right)=-2t^2-3<0$$

$$\Rightarrow t=1 \Rightarrow x=y$$

Thay vào phương trình (2) ta được : $\sqrt{9x-2}+\sqrt[3]{7x^2+2x-5}=2x+3$

Điều kiện $x\geq\frac{2}{9}$

Được $x=3, x=2 \rightarrow \begin{cases}\sqrt{9x-2}=x+2\\ \sqrt[3]{7x^2+2x-5}=x+1\end{cases}$

$$\sqrt{9x-2}+\sqrt[3]{7x^2+2x-5}=2x+3$$

$$\Leftrightarrow \left(x+2-\sqrt{9x-2}\right)+\left(x+1-\sqrt[3]{7x^2+2x-5}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{x+2+\sqrt{9x-2}}+\frac{x^3-4x^2+x+6}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{7x^2+2x-5}+\left(\sqrt[3]{7x^2+2x-5}\right)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-5x+6\right)\left(\frac{1}{x+2+\sqrt{9x-2}}+\frac{x+1}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{7x^2+2x-5}+\left(\sqrt[3]{7x^2+2x-5}\right)^2}\right)=0$$

$$x\geq\frac{2}{9}\Rightarrow \frac{1}{x+2+\sqrt{9x-2}}+\frac{x+1}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{7x^2+2x-5}+\left(\sqrt[3]{7x^2+2x-5}\right)^2}>0$$

Do đó: $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2, x=3 \Rightarrow (2;2),(3;3)$

Bài 50. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(2y+1)\sqrt{x+1}-\sqrt{(x+2)(y^2+1)}=3y^2-2x+y-3\\ (8x+10)(2y-\sqrt{x+1})=\left(5+\sqrt{x-1}\right)(y^2+10\sqrt{x-1}+24)\end{cases}$

Hướng dẫn:

Điều kiện : $x\geq 1$

Bấm máy được bảng sau:

Y	0	1	2	3	4	100
X	-1	0	3	8	15	9999

Ta thấy mối quan hệ là : $x = y^2 - 1 \Leftrightarrow y^2 = x+1 \Leftrightarrow y = \sqrt{x+1}$

Ta ép liên hợp như sau:

$$(2y+1)\sqrt{x+1} - \sqrt{(x+2)(y^2+1)} = 3y^2 - 2x + y - 3$$

$$\Leftrightarrow (2y+1)\left(\sqrt{x+1} - y\right) + \left(x+2 - \sqrt{(x+2)(y^2+1)}\right) - y^2 + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2y+1).\frac{x+1-y^2}{\sqrt{x+1}+y} + \frac{(x+2)(x+1-y^2)}{x+2+\sqrt{(x+2)(y^2+1)}} + (x+1-y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1-y^2\right)\left(\frac{2y+1}{\sqrt{x+1}+y} + \frac{x+2}{x+2+\sqrt{(x+2)(y^2+1)}} + 1\right) = 0(*)$$

Từ phương trình (2) ta có:

$$(8x+10)(2y - \sqrt{x+1}) = \left(5+\sqrt{x-1}\right)(y^2 + 10\sqrt{x-1} + 24)$$

$$\Leftrightarrow 2y - \sqrt{x+1} = \frac{\left(5+\sqrt{x-1}\right)(y^2+10\sqrt{x-1}+24)}{(8x+10)} > 0 \Rightarrow 2y > \sqrt{x+1} > 0$$

Do đó : $x \geq 1, y > 0 \Rightarrow \dfrac{2y+1}{\sqrt{x+1}+y} + \dfrac{x+2}{x+2+\sqrt{(x+2)(y^2+1)}} + 1 > 0$

$(*) \Leftrightarrow x+1-y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{x+1}$ do $y > 0$ thay vào phương trình 2 ta được :

$$(8x+10)\sqrt{x+1} = \left(5+\sqrt{x-1}\right)(x+10\sqrt{x-1}+25)$$

Bài này bấm máy thấy nghiệm đã to lại còn xấu do đó ta sẽ dùng mẹo sử dụng ẩn phụ để xem mối quan hệ giữa $X = \sqrt{x+1}$ và $Y = \sqrt{x-1}$ (dùng Table dò không được)

Các em nhập vào máy là $\left(8X^2+2\right)X - (5+Y)(Y^2+10Y+26)$

Với $\begin{cases} Y = 0 \to X = 2.5 \\ Y = 10 \to X = 7.5 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - y = 5 \Rightarrow 2\sqrt{x+1} = 5 + \sqrt{x-1}$

Các em thích thì cho nhiều giá trị Y hơn để thấy rõ mối quan hệ giữa 2 căn thức

Do đó ta sẽ ép hàm như sau:

$$\Leftrightarrow 8(x+1)\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} = \left(5+\sqrt{x-1}\right)\left(\left(5+\sqrt{x-1}\right)^2 + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x+1}\right)^3 + \left(2\sqrt{x+1}\right) = \left(5+\sqrt{x-1}\right)^3 + \left(5+\sqrt{x-1}\right)$$

Xét hàm : $f(t) = t^3 + t$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in R$ do đó hàm đồng biến

$\Rightarrow 2\sqrt{x+1} = 5 + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow 4(x+1) = 24 + x + 10\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow 10\sqrt{x-1} = 3x - 20 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{20}{3} \\ 100(x-1) = 9x^2 - 120x + 400 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{20}{3} \\ 9x^2 - 220x + 500 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{20}{3} \\ x = \dfrac{110 \pm 20\sqrt{19}}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{110 + 20\sqrt{19}}{9}$

Vậy nghiệm của hệ : $\left(\dfrac{110+20\sqrt{19}}{9}; \sqrt{\dfrac{119+20\sqrt{19}}{9}}\right)$

Vậy là anh vừa dẫn dắt các em qua phần thứ 2 của bí kíp, với những kiến thức và kĩ năng này các em đã đủ sức để hành tẩu trong giang hồ, tu luyện nhiều sẽ thành cao thủ võ lâm hùng bá 1 phương, với1 kết thúc đẹp là 1 bài tập đẹp từ mối quan hệ, từ đánh giá biểu thức sau liên hợp, đẹp từ phương pháp hàm số giải phương trình tới sự đáng yêu của cái nghiệm, quá đẹp cho 1 cuộc tình.

Tổng kết lại, chúng ta đã nắm được cơ sở phương pháp từ 1 phương trình ta sẽ tìm ra mối quan hệ rồi sử dụng phương pháp làm cho phù hợp sau đó thế vào phương trình còn lại, rồi dựa vào nghiệm xấu hay đẹp mà ghép căn với 1 số cụ thể hay 1 biểu thức thường là $ax+b$ cho phù hợp.

Hi vọng các đệ tự cố gắng tu luyện nhiều hơn, không hiểu thì có thể hỏi anh hoặc xem Video trong khóa học đi kèm với sách anh sẽ nói rõ hơn, chi tiết hơn.

Và nhớ làm bài tập sau mỗi video nhé, vì anh sẽ thường xuyên update hệ thống bài tập cho các em.

Tiếp theo thì chúng ta sẽ sang Bí Kíp Oxy ^_^

Võ lâm bí tịch Oxy Cửu âm chân kinh

Version 2.0 ProSkill

I, Giới thiệu:

Đa số các em đều gặp trở ngại khi cày hình Oxy, khi các em xem bài giảng, nghe thầy cô giảng thì hiểu nhưng khi bắt tay vào làm thì lại không làm được, 1 phần là do các em chưa nắm vững các kiến thức căn bản, 1 phần là do chưa biết cách tư duy. Có nhiều em thì lại nói với anh rằng lúc làm bài thì dễ mà đi thi sao lại khó lại phải kẻ vẽ thêm đường phụ, lý do là ở đâu ?

Nhiều em cũng làm tốt Oxy nhưng sau khi đọc xong chuyên đề hệ phương trình ver 2.1 của anh thì lại cho rằng Oxy còn khó hơn cả hệ, và muốn anh chia sẻ những kinh nghiệm làm toán của mình.

Ở bí kíp này, anh sẽ tập chung truyền đạt tới các em tư duy Oxy đó mới là mấu chốt của bài toán, còn thì giải chi tiết cho em 100 bài không bằng định hướng để em tự làm được 1 bài, trên mạng tài liệu giải chi tiết rất nhiều, sách cũng có rất nhiều các quyển vài trăm trang... nhưng thử hỏi khi đọc xong em lĩnh hội được bao nhiêu ?

Ở bí kíp này anh muốn chia sẻ 1 cách làm bài Oxy có thể là không mới nhưng cũng không quá gây khó cho các em.

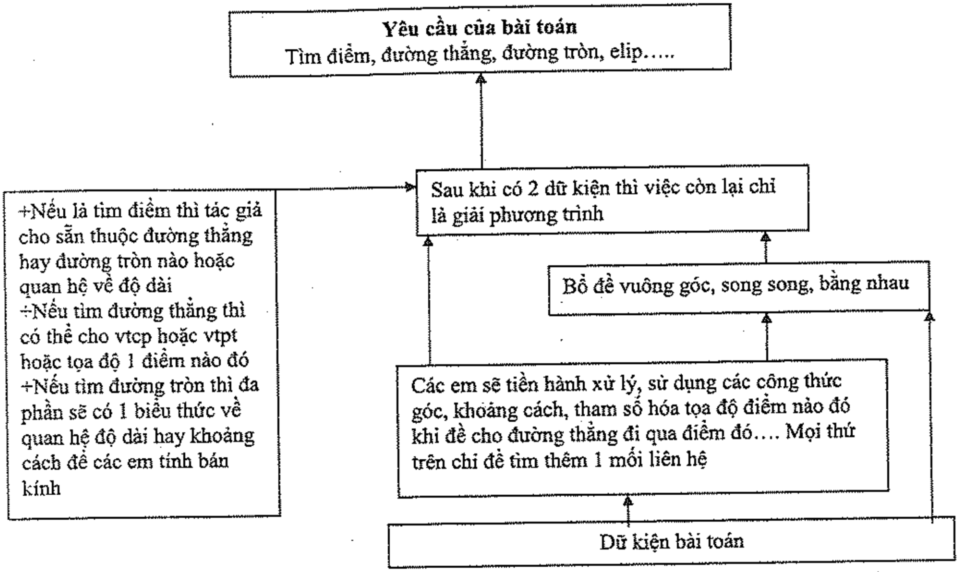
Anh cũng đã đi lang thang trên nhiều diễn đàn rồi xem các bài của các thầy nổi tiếng, nhưng anh thấy đây sẽ là tài liệu tổng hợp những phương án hay nhất và là duy nhất trên mạng, chưa từng có ai viết về nó. Anh không nổ đâu nhé, không lại đổi tên anh thành BLực (Boom Lực thì tội anh, keke cứ gọi anh là Thế Lực BK tức là anh Lực chuyên viết Bí Kíp hay anh Lực học ở Bách Khoa cũng được, hehe)

II, Đặt vấn đề

Trước khi nói về nội dung anh sẽ trình bày thì anh xin được nhắc lại một số kiến thức cơ bản:

Hình Oxy của ta có 3 đối tượng quan trọng là : Điểm; đường thẳng; đường tròn, elip...

Các đối tượng trên sẽ hoàn toàn xác định khi ta biết 2 điều kiện của nó, thường thì bài toán sẽ cho ta sẵn 1 dữ kiện, ta phải tự tìm dữ kiện còn lại thông qua các dữ kiện còn lại hoặc phải thông qua các bổ đề về vuông góc, bằng nhau, song song



Đó là tư duy để giải một bài Oxy, nhưng nếu đi từ dữ kiện đi lên thì anh nói thẳng là có vô vàn con đường cho em đi và đa phần là các em sẽ lạc lối.

Giống như sau:

Cùng mục tiêu là đỗ đại học có 2 con đường

+ Chăm học → học và làm bài chăm chỉ → Đỗ Đai Học

+ Đỗ Đại Học → thi được 24-27 điểm → mỗi môn 8-9 điểm → tập chung cày 1 điểm còn lại hoặc phải có bước đột phá (bí kíp hệ chẳng hạn ☺) →7 điểm đầu thì dễ rồi chăm là được → Chăm học

Các em thấy chưa, cùng là 1 mục tiêu, 1 dữ kiện, nhưng nếu xác định đi từ cái ta có đến cái ta tìm kiếm thì sẽ mông lung hơn nhiều là ta lên hệ thống muốn có kết quả như vậy thì ta phải làm những cái gì và nghiễm nhiên khi ta thực hiện đúng trình tự đó, ta sẽ được kết quả.

Anh gọi cái này là tư duy ngược, còn trong quá trình học phải có bước đột phá đó chính là bổ đề phụ trong bài toán Oxy.

- Yêu cầu chung:

1. Có Tinh thần đỗ Đại Học và ý thức học tập, tháng cuối rồi đó các em ạ
2. Nắm được các kiến thức cơ bản trong mặt phẳng Oxy

III, Nội Dung

***Nội dung chính :**

1. Hệ thống kiến thức cơ bản SGK
2. Tư duy ngược để giải toán Oxy
3. Các Bổ Đề hình học hay dùng trong mặt phẳng Oxy và cách chứng minh (một số bổ đề quan trọng, một số chỉ có tính chất tham khảo)

4. Chuẩn hóa Oxy

Về bố cục của tài liệu gồm có:

A- Hệ thống kiến thức cơ bản SGK

B-Tư duy ngược

Gồm 5 ví dụ phân tích chi tiết

Các bài tự luyện là bài Oxy thi ĐH có đáp số

C – Bổ đề hình học: Tam giác, hình vuông, hình chữ nhật

Bổ đề trong tam giác

Bổ đề trong hình vuông, hình chữ nhật….

Một số ví dụ minh họa

D – Chuẩn hóa Oxy

Ở tài liệu anh này, phần lớn là anh chia sẻ những kinh nghiệm và tư duy làm bài, cũng như một số bổ đề cơ bản mà anh và bạn của anh là anh Nguyễn Văn Nam – chuyên Toán Vĩnh Phúc đã tổng hợp lại, phần bổ đề chủ yếu giải quyết các bài khó và có các dữ kiện đặc biệt….

Hi vọng tài liệu này sẽ không làm các em thất vọng, Cảm ơn các em đã dài cổ hóng anh suốt thời gian qua ☺

Thời gian qua anh rất là vui khi nhận được sự đón nhận nồng nhiệt từ các em từ chuyên đề hệ, đó là niềm tự hào cũng như áp lực cho anh để cố gắng cho những tài liệu sau, anh đã cố gắng truyền đạt những điều dễ hiểu nhất tới các em, nhưng có hay hay không lại lại vấn đề khác, anh chỉ hi vọng là nó sẽ có ích thật nhiều cho các em khi hạ gục thằng Oxy, không còn cảm thấy lo sợ nó nữa

Lúc đầu anh cũng định trình bày kiến thức về hình vuông cơ sở nhưng thực sự thấy nó cũng không ứng dụng được nhiều nên anh đã bỏ qua phần này mà chỉ tập trung vào 3 phần chính là kiến thức cơ bản, tư duy ngược, và bổ đề phụ.

Tài liệu version 1.0 nên còn có nhiều sai sót anh rất hi vọng sự góp ý của các em ☺ (đặc biệt là sai chính tả)

*Các bước để làm 1 bài Oxy cơ bản:

+ Phân tích xem đề bài cho những gì? Ví dụ như cho tọa độ A đi qua 1 đường thẳng thì ý là ta sẽ tham số hóa tọa độ A rồi dùng thêm điều kiện gì đó nữa để tìm A, cần phải tập trung khai thác các dữ kiện xem họ cho như vậy để làm gì? Những lúc mà tự dưng thấy bí, thì thử nghĩ tới yếu tố phụ như vuông góc chẳng hạn có hay không.

A- Hệ thống kiến thức cơ bản

Oxy

- **Điểm**
  - Trực tâm: Giao 3 đường cao
  - Trọng tâm: Giao 3 đường trung tuyến
  - Tâm đường tròn ngoại tiếp: Giao 3 đường trung trực
  - Tâm đường tròn nội tiếp: Giao 3 đường phân giác
- **Đường thẳng**
  - Đi qua $M_o(x_o,y_o)$ Và có :
    - Hs góc k: $y=k(x-x_o)+y_o$
    - Vtpt $\vec{n}=(a;b): a(x-x_o)+b(y-y_o)=0$
    - Vtcp $\vec{u}=(a;b)$
      - Chính tắc $\dfrac{x-x_o}{a}=\dfrac{y-y_o}{b}$
      - Tham số : $\begin{cases} x=x_o+at \\ y=y_o+bt \end{cases}$
  - Đi qua $\begin{cases} A(a;0)\in Ox \\ B(0;b)\in Oy \end{cases} \Rightarrow pt: \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1, ab\neq 0$
- **Đường tròn**
  - +Tâm $I(x_o,y_o)$ +Bán kính R $\longrightarrow$ $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=R^2$
  - $x^2+y^2+ax+by+c=0 \xrightarrow{a^2+b^2>4c^2}$ Tâm $I\left(\dfrac{-a}{2};\dfrac{-b}{2}\right)$ và $R=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{4}-c}$
- **Elip** $\xrightarrow{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ Có
  - Độ dài $\longrightarrow$ Trục lớn: $A_1A_2=2a$, nhỏ $B_1B_2=2b$; tiêu cự $F_1F_2=2c$ với $a^2=b^2+c^2, a,b,c>0$
  - Tâm sai $\longrightarrow$ $e=c/a<1$
  - HCN cơ sở H giới hạn $\begin{cases} x=\pm a \\ y=\pm b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} S=4ab \\ C=4(a+b) \end{cases}$
  - $M(x_o,y_o)\in(E)\rightarrow \dfrac{x_o^2}{a^2}+\dfrac{y_o^2}{b^2}=1; MF_1+MF_2=2a \rightarrow \begin{cases} MF_1=a+\dfrac{c}{a}x_o=a+ex_o \\ MF_2=a-\dfrac{c}{a}x_o=a-ex_o \end{cases}$

Khoảng cách

$$\begin{cases} A(x_1;y_1) \\ B(x_2;y_2) \end{cases} \rightarrow \overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) \rightarrow AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\begin{cases} M(x_o;y_o) \\ \Delta : ax + by + c = 0 \end{cases} \rightarrow d_{(M,\Delta)} = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Delta' // \Delta, M \in \Delta' \rightarrow d_{(\Delta',\Delta)} = d_{(M,\Delta)}$$

Góc

$$\begin{cases} \Delta_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ \Delta_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \cos\varphi = |\cos(\overline{n_1}, \overline{n_2})| = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \cos(\overline{u_1}, \overline{u_2})$$

$$\Delta_1 \perp \Delta_2 \left\langle \begin{array}{l} \overline{n_1}.\overline{n_2} = \overline{u_1}.\overline{u_2} = 0 \\ k_1.k_2 = -1 \leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 : y = k_1 x + d_1 \\ \Delta_2 : y = k_2 x + d_2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Diện tích tam giác: $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

R,r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp

p là nửa chu vi

B-Tư duy ngược

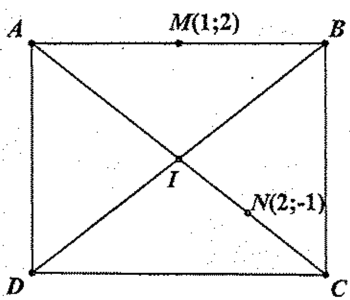
Anh nêu ra pp này để giúp hình thành tư duy cho các em ở bài toán Oxy, để định hướng rằng, muốn có KQ này thì ta cần tìm những gì, từ đó ta ghép nối với dữ kiện bài toán cho phù hợp

Khởi động ta sẽ chiến luôn bài A – 2014:

Ví dụ 1(ĐH-A-2014): Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có điểm M là trung điểm của đoạn AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho AN = 3NC. Viết phương trình đường thẳng CD biết rằng M(1;2) và N(2;-1).

Hướng dẫn

+ Bước 1 : Ta cần vẽ hình thật chuẩn



+ Bước 2: Xác định mục tiêu và phương hướng : bẻ khóa, tìm điểm mấu chốt

***Mục tiêu: Viết phương trình CD, trong khi tay trắng, vì không có dữ kiện gì trực tiếp cả**

Có 2 hướng chính để các em viết pt của 1 đường thẳng

1. Là tìm 2 điểm thuộc đường thẳng, ta đặc biệt quan tâm tới 2 đầu mút và trung điểm của đoạn CD, vì nó là các điểm đặc biệt
2. Ta tìm 1 điểm và 1 vecto chỉ phương hoặc pháp tuyến.

Một điều đặc biệt quan trọng khiến chúng ta phải quan tâm là ở hình vuông hay hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành thì cái tọa độ tâm cực kì quan trọng, nó giúp ta rất nhiều trong việc biết tọa độ 1 đỉnh tìm tọa độ đỉnh đối diện và có khả năng dễ dàng tìm được nhờ 2 đỉnh còn lại.

Ở đây tâm hình vuông ABCD là I, nếu ta tìm được I thì :

+Dễ dàng xác định được C, vì N là trung điểm IC

+ Dễ dàng xác định được trung điểm của CD vì I là trung điểm của MP, với P là trung điểm CD

+ Ta cũng dễ dàng xác định được $\overline{IM}$ là vecto pháp tuyến của CD

……….

Vậy nếu có tọa độ của I, ta sẽ giải quyết được vấn đề bài toán.

Vậy câu hỏi bây giờ là làm thế nào để tìm I ?

Ta nhận thấy ngay mối liên hệ giữa IM và IN như sau:

$\begin{cases} IM = \dfrac{AI}{\sqrt{2}} \\ IN = \dfrac{AI}{2} \end{cases} \Rightarrow IM = \sqrt{2}IN$, vậy ta đã có 1 phương trình, ta phải tìm được 1 phương trình nữa

Đến đây mới vui nè : có nhiều em hỏi anh là? Anh ơi sao em biến đổi 1 hồi thì lại ra 0x = 0 , keke

Đó là do các em đã dùng 1 dữ kiện 2 lần, vậy làm sao để tránh điều đó ?

Ta phải biết những dự kiện gì ta dùng rồi, những dữ kiện gì ta chưa dùng thì mới được:

Từ dữ kiện là hình vuông: $\left[\begin{array}{l} hcn, AC \perp BD \\ \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 90, AB = BC = CD = DA \end{array}\right.$

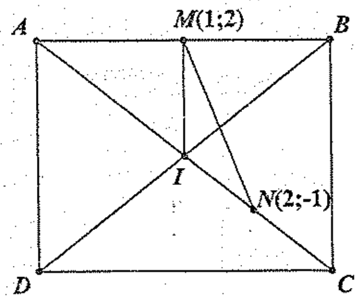
Khi ta dùng $IM = \dfrac{AI}{\sqrt{2}}$ tức là ta đã dùng $\begin{cases} AM = MI \\ AM \perp MI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = BC \\ AB \perp BC \end{cases}$ vậy điều kiện hình vuông coi như đã dùng rồi

$IN = \dfrac{AI}{2}$ tức là AN = 3 NC đã được dùng

Tọa độ M, N thì phục vụ phương trình $IM = \sqrt{2}IN = \sqrt{2}x, x > 0$ rồi , vậy muốn tìm 1 pt nữa ở đâu ?

Ta để ý là độ dài $MN = \sqrt{10}$ ta chưa có dùng, vậy phải bám vào nó

Các em nối M với N, thấy tam giác IMN có góc $\widehat{NIM} = 135^o$



Các em áp dùng định lý cosin : $MN^2 = IM^2 + IN^2 - 2IM.IN.Cos\widehat{NIM}$

$\Leftrightarrow 10 = 2x^2 + x^2 - 2\sqrt{2}x^2.\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 10 = 5x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

Tới đây thì ta có :

$$\begin{cases} IM = 2 \\ IN = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ 2x - 3 - 6y + 3 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x = 3y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2 - 4y = 0 \\ x = 3y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 0 \\ x = \dfrac{11}{5}, y = \dfrac{2}{5} \end{array}\right.$$ tới đây thì xong rồi

- Với $I(1;0)$

$C(3;2)$ và $\overline{IM} = (2;0)$ là vecto pháp tuyến của CD nên : $CD: y - 2 = 0$

- Với $I(\frac{11}{5};\frac{2}{5})$

$C(\frac{9}{5};\frac{-12}{5})$ và $\overline{IM} = (-\frac{6}{5};\frac{8}{5})$ là vecto pháp tuyến:

$-\dfrac{6}{5}(x - \dfrac{9}{5}) + \dfrac{8}{5}(y + \dfrac{12}{5}) = 0 \Leftrightarrow CD: 3x - 4y - 15 = 0$

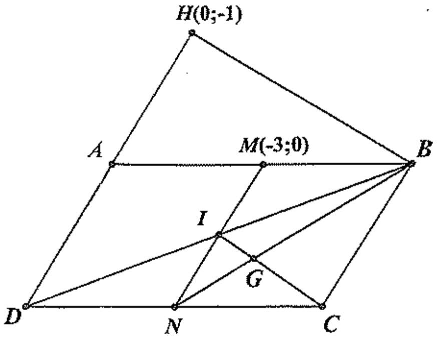
Vậy có 2 phương trình CD là : $CD: y - 2 = 0$ hoặc $CD: 3x - 4y - 15 = 0$

Ví dụ 2: (ĐH – B – 2014): Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD.

Điểm M(-3;0) là trung điểm của cạnh AB, điểm H(0;-1) là hình chiếu vuông góc của B trên AD và điểm G($\frac{4}{3}$;3) là trọng tâm của tam giác BCD. Tìm tọa độ các điểm B và D.

Hướng dẫn:

+ Bước 1: Vẽ cẩn thận cái hình, là bộ mặt của bài toán:



+ Bước 2: Xác định mục tiêu → Phương hướng : Tìm điểm mấu chốt, hạ gục bài toán

Mục tiêu của ta là tìm tọa độ B và D, ta để ý rằng 2 điểm này đối xứng với tâm I là quả tim của hình bình hành, ta cần bám vào nó khá nhiều, nên chỉ cần tìm đươc B và I là tìm được D

Các em gọi N là trung điểm của DC vì đằng nào lúc vẽ mình cũng phải xác định mới vẽ trọng tâm được với lại từ dữ kiện trọng tâm G có 2 khả năng là $\begin{cases} G = \dfrac{B+C+D}{3} \\ BG = \dfrac{2}{3}BN \end{cases}$ anh viết thế các em tự hiểu nhé, nó hoàn toàn tự nhiên chứ anh không hề sắp đặt gì ở đây cả. Về hình vẽ chỉ cần vậy thôi.

Mục tiêu bây giờ là tìm I và B, các em thấy rằng nếu có tọa độ I thì dễ dàng suy ra B nhờ con đường I → N do I là trung điểm MN → B do $\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GN}$ vậy thực chất ở đây ta chỉ cần tìm 1 điểm là I hoặc B là xong, nếu tìm B thì quy trình ngược lại và cuối cùng anh đã chọn tìm B vì thấy được ngay 1 dữ kiện đề bài cho là vuông góc liên quan trực tiếp tới điểm B là $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{AH}$ thực ra thì tìm điểm nào cũng vậy thôi, nhưng các em thấy cái nào dễ thì làm trước.

Ta giả sử $B(x_o, y_o)$ thì do M là trung điểm AB nên : $A(-6-x_o, -y_o)$ suy ra $\overrightarrow{AH} = (x_o+6, y_o-1)$

Ta có: $\overrightarrow{HB} = (x_o, y_o+1)$

Theo giả thiết: $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HB} = 0 \Leftrightarrow x_o(x_o+6)+(y_o+1)(y_o-1) = 0$ (1)

Vậy ta đã có 1 phương trình, ta cần tìm 1 phương trình nữa, ở đây ta đã sử dụng 3 dữ kiện của đề bài là vuông góc và toạ độ của H, M và M là trung điểm AB vậy chúng ta chỉ còn 2 dữ kiện nữa là ABCD là hình bình hành và G là trọng tâm BCD, ta sẽ tập trung khai thác chúng

Với G là trọng tâm BCD nên :

$$\overrightarrow{GB}=-2\overrightarrow{GN}\Leftrightarrow\begin{cases}x_o-\frac{4}{3}=-2(x_N-\frac{4}{3})\\y_o-3=-2(y_N-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_N=\frac{4-x_o}{2}\\y_n=\frac{9-y_o}{2}\end{cases}\Leftrightarrow N\left(\frac{4-x_o}{2};\frac{9-y_o}{2}\right)$$

Rồi còn dữ kiện ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow\begin{cases}AD=BC\\AD//BC\end{cases}$

Tức là $MN//AD$ ta sử dụng 1 điều kiện này đã:

$$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{10-x_o}{2},\frac{9-y_o}{2}\right)$$

$$MN//AD\to MN//AH\to\overrightarrow{MN}=k\overrightarrow{AH}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{10-x_o}{2}=k(x_o+6)(a)\\\frac{9-y_o}{2}=k(y_o-1)(b)\end{cases},k\neq 0$$

Dễ thấy $y_o=1$ không thỏa mãn (b) nên ta hoàn toàn yên tâm về sự khác 0 của 2 vế phương trình (b)

Ta nhân chéo (b) với (a) ta được : $(10-x_o)(y_o-1)=(x_o+6)(9-y_o)\Leftrightarrow x_o=2y_o-8$ (2)

Các em lấy (2) thay vào (1) được : $(y_o-1)(5y_o-15)=0\Leftrightarrow y_o=3\Rightarrow x_o=-2\to B(-2;3)$

ở đây $y_o=1$ bị loại rồi các em nhé, nó không thỏa mãn (b)

Nếu các em muốn yên tâm thì làm như này, đưa về vuông góc cho nó thành phép nhân đỡ nguy hiểm hơn

$$MN//AD\to MN//AH\to MN\perp HB\to\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{HB}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{10-x_o}{2}\right)x_o+\left(\frac{9-y_o}{2}\right)(y_o+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x_o^2+y_o^2-10x_o-8y_o-9=0(3)$$

Từ (1) và (3) suy ra :

$$\begin{cases}x_o^2+y_o^2+6x_o-1=0\\x_o^2+y_o^2-10x_o-8y_o-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_o^2+y_o^2+6x_o-1=0\\16x_o+8y_0+8=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_o^2+y_o^2+6x_o-1=0\\y_o=-(2x_o+1)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_o=-2,y_o=3\\x_o=0,y_o=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}B(-2;3)\\B(0;-1)\end{array}\right.$$

Nhiều em sẽ điêu đứng chỗ này đây, bản thân anh cũng đã điêu đứng 1 lần do tìm ra 2 điểm và không biết loại điểm còn lại, đó, cái gì nó cũng có 2 mặt, tránh vỏ dưa thì gặp vỏ dừa rồi :D

Hãy nhớ lại rằng còn 1 điều kiện = nhau của hình bình hành mà ta chưa hề dùng.

- Với $B(0;-1)$ ta có

Ta dùng điều kiện này : $AD=MN=BC$

$\overrightarrow{MN}=(5;5)$ và $N(2;5)$, $I(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ suy ra $D(1;6)$; $C(3;4)$ nên $\overrightarrow{BC}=(3;5)$

Dễ thấy $MN\neq BC$ nên loại $B(0;-1)$

- Với $B(-2;3)$ ta có

Ta làm y chang như vây :D

$\overrightarrow{MN}=(6;3)$ và $N(3;3)$, $I(0,\frac{3}{2})$ suy ra $D(2;0)$; $C(4;6)$ nên $\overrightarrow{BC}=(6;3)$

Đó thấy ngay $MN=BC$ vậy là $B(-2;3)$ thỏa mãn.

Vậy $B(-2;3)$ và $D(2;0)$

Đây chính là phương pháp tư duy ngược, xử lý điều kiện mà anh muốn trình bày, anh đã choáng khi làm xong mở giải ra xem của BGD, sao mà người ta có thể kẻ vẽ được như vậy ? trong khi mình không phải kẻ thêm đường gì, hoàn toàn tự nhiên và không gượng ép.

Ví dụ 3: ĐH – D – 2014 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có chân đường phân giác trong của góc A là điểm D (1; -1). Đường thẳng AB có phương trình 3x + 2y – 9 = 0, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình x + 2y – 7 = 0. Viết phương trình đường thẳng BC.

Hướng dẫn

Các em tham khảo bài cuối cùng, phần bài tập áp dụng bổ đề ở trang gần cuối nhé

Ví dụ 4: ĐH – A – 2013 :

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm C thuộc đường thẳng

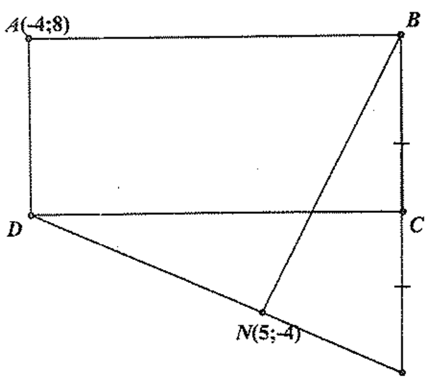
d : $2x+y+5=0$ và $A(-4;8)$. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C, N là hình chiếu vuông góc của B

trên đường thẳng MD. Tìm tọa độ các điểm B và C, biết rằng N (5;-4).

ĐS : $B(-4;-7);C(1;-7)$

Hướng dẫn

Bước 1: Vẽ hình : Hình khi mới vẽ thì chỉ đơn giản như vậy thôi

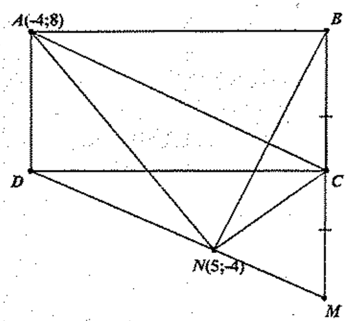


Bước 2: Xác định mục tiêu, phương hướng : tìm điểm mấu chốt

Ở đây ta cần tìm B và C, ta biết trước 1 dữ kiện của C rồi nên chỉ cần biết 1 dữ kiện nữa là xong. Thực sự thì ngoài điều kiện C thuộc $2x+y+5=0$ thì không có điều kiện gì liên quan tới C cả,

(bỗng dưng thấy bí dù đã ngó nghiêng đủ đường là phải nghĩ tới yếu tố phụ)

khi các em thấy điều này có nghĩa là các em phải tự đi tìm 1 điều gì đó đặc biệt liên quan tới C và các điểm có tọa độ còn lại., ở đây ta nối A với N vì độ dài AN có thể có ích cho ta, nối C với N, C với A, bao giờ những điểm có tọa độ sẵn rồi ta cũng sẽ liên hệ với điểm cần tìm xem có gì đặc biệt không, như bài kA-2014 đó ta cũng nối như vậy thì thấy được góc 135 độ, còn ở bài này thì sao ?



Lúc này tác dụng của việc vẽ chuẩn hình bắt đầu có tác dụng, ta thấy AN có thể vuông với CN, nếu vuông thì quá tốt, ta sẽ tìm được ngay tọa độ C.

Đây là lí do ta phải đi phân tích điểm nào cần tìm trước, điểm nào cần tìm sau để đi tìm các mối liên hệ cho phù hợp, nếu không vững vàng tư tưởng này thì trong phòng thi sẽ rất rối và cảm thấy ngột thở vì nghĩ mãi không ra

*Bây giờ ta sẽ đi chứng minh AN vuông góc với NC :

ở đây anh sử dụng cộng góc, em nào dùng tứ giác nội tiếp cũng được

Ta để phải bám chắc vào dữ kiện đề bài cho mà ta chưa dùng là :

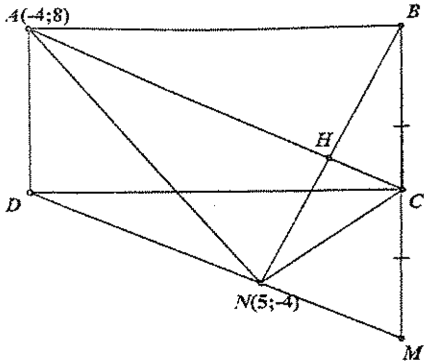
$BN \perp DM, BC = CM$

Trong tam giác vuông NBC thấy ngay NC là trung tuyến của tam giác nên

$NC = BC = CM$

Nên BCN là tam giác cân tại C suy ra : $\widehat{HNC} = \widehat{HBC}$ (1)

Để ý chút nữa: Anh gọi thêm điểm H

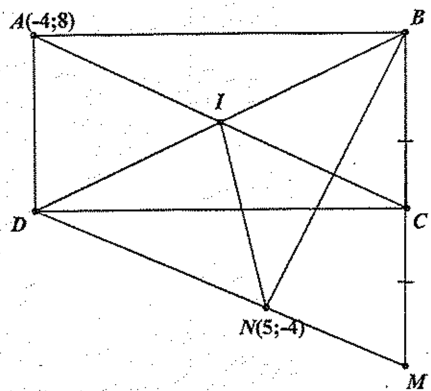


Thì $ACMD$ là hình bình hành, nên $AC // DM \rightarrow AC \perp BN$
Tam giác BCN cân lại có CH là đường cao nên nó là đường trung tuyến luôn hay H là trung điểm của BN
Vậy tam giác ABN cũng cân thì AH vừa là đường cao, vừa là trung tuyến nên $\widehat{ANH} = \widehat{ABH}(2)$
Từ (1) và (2) suy ra:
$\widehat{ANC} = \widehat{ANH} + \widehat{HNC} = \widehat{ABH} + \widehat{HBC} = \widehat{ABC} = 90$ vậy $AN \perp NC$ ta có :

Với C thuộc $2x + y + 5 = 0$ suy ra : $C(c,-2c-5)$
$\overrightarrow{AN} = (9;-12); \overrightarrow{NC} = (c-5,-2c-1)$

$AN \perp NC \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{NC} = 0 \Leftrightarrow 9(c-5) - 12(-2c-1) = 0 \Leftrightarrow c = 1 \rightarrow C(1;-7)$

Muốn tính tọa độ B ở đây thì ta tính thông qua H vì N ta biết rồi, H lại là trung điểm BN do đó ta cần viết phương trình AC và NB
Phương trình AC: $\frac{x+4}{1+4} = \frac{y-8}{-7-8} \Leftrightarrow 3x + y + 4 = 0$
Phương trình NB qua N và vuông AC : $(x-5) - 3(y+4) = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 17 = 0$
Toa độ H là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 3x + y = -4 \\ x - 3y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{-11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow H\left(\frac{1}{2};\frac{-11}{2}\right)$
Do H là trung điểm BN nên tọa độ H là $B(-4;7)$
Đây là cách anh làm trong bài thi năm 2013 của anh, có thể các em đọc sẽ thấy khó, nhưng lúc trong phòng thi anh chỉ nghĩ được ra cách này thôi, còn 1 cách nữa anh tham khảo thêm của BGD thì như sau:
Như anh đã nói 2 bài trước, quả tim của hình vuông, hình bình hành, hình chữ nhật luôn là tâm I của nó, ta chỉ cần bám vào cái tâm này là được.



Trước hết ta tham số tọa độ $C(c,-2c-5)$

Bài toán cho ta những dữ kiện sau :

$\begin{cases} hcn\_ABCD \\ BC = CM \\ BN \perp DM \end{cases}$ 2 điều kiện cuối ta thấy không liên hệ được nhiều với C nên bám vào điều kiện hình chữ nhật xem sao.

Ta bám luôn vào điểm I nữa, ta có I là trung điểm AC nên : $I(\frac{t-4}{2};\frac{-2t+3}{2})$

Bây giờ ta lại xử 2 điều kiện còn lại, Tam giác BND vuông có IN là trung tuyến BD do đó IN=IB hay IN=IA

(tới đây dữ kiện hình chữ nhật coi như dùng hết rồi em nhé: 2 đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường mà, nên không được sử dụng lại dữ kiện hình chữ nhật nữa)

$$\left(5-\frac{t-4}{2}\right)^2+\left(-4-\frac{-2t+3}{2}\right)^2=\left(-4-\frac{t-4}{2}\right)^2+\left(8-\frac{-2t+3}{2}\right)^2 \leftrightarrow t=1$$

Suy ra C(1;-7)

Bây giờ còn điệu kiện đối xứng nữa thôi

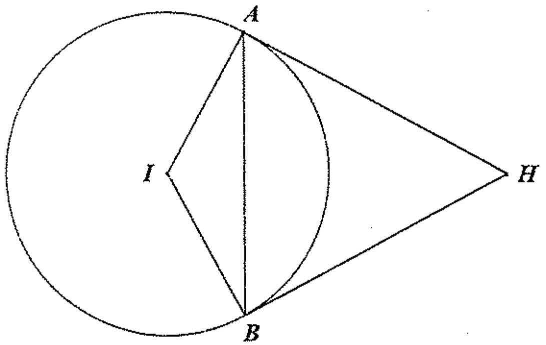
Các em làm tương tự như phần trên, chứng minh B đối xứng với N qua H rồi làm tương tự, sẽ ra KQ như vậy.

Ví dụ 5: ĐH – A – 2013 – NC :

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x-y=0$. Đường tròn (C) có bán kính R $=\sqrt{10}$ cắt Δ tại hai điểm A và B sao cho AB = $4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy. Viết phương trình đường tròn (C).

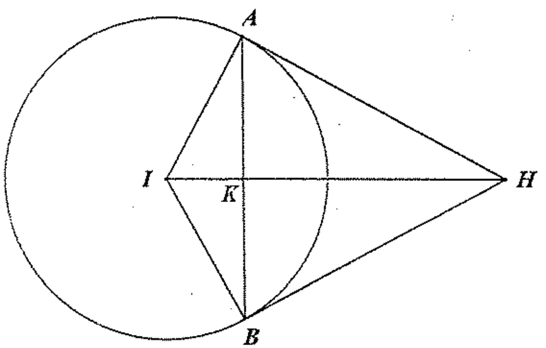
Hướng dẫn

Bước 1: Các em vứ vẽ cẩn thận cái hình không cần thêm bớt gì cả.



Bước 2: Xác định mục tiêu và tìm cách hủy diệt

Mục tiêu là viết đường tròn (C) có tâm mà ta tạm gọi là I với bán kính $R=\sqrt{10}$ vậy xác định tâm I nữa là xong, vậy ta cần 2 điều kiện liên quan tới tâm I.
ở đây họ cho độ dài AB tức là ta sẽ tìm 1 mối quan hệ liên quan tới độ dài với I và thường thì để tìm tọa độ 1 điểm cho dễ ta xác định đường thẳng đi qua nó.
Bản năng mách bảo ta rằng nối I với H vì nó quen thuộc rồi, tạm gọi giao điểm của AB và IH là K



Chúng ta bắt đầu chiến nhé
Các dữ kiện đề bài cho:

$\begin{cases} R=\sqrt{10} \\ AB=4\sqrt{2} \\ AB: x-y=0 \\ 2\_tiep\_tuyen \\ H\in Oy \end{cases}$ 2 tt thì ta suy được ra IAH là tam giác vuông,AK là đường cao

còn dữ kiện $\begin{cases} R=\sqrt{10} \\ AB=4\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow IK=\sqrt{IA^2-KA^2}=\sqrt{10-8}=\sqrt{2} \Rightarrow HK=\dfrac{AK^2}{IK}=\dfrac{(2\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

Các em cứ tính hết tất cả các cạnh cũng được, tới đây là có điểm rồi mà.

Vậy còn 2 dữ kiện là $\begin{cases} AB: x-y=0 \\ H \in Oy \to H(0;h) \end{cases}$ ta để ý HK chính là khoảng cách từ H tới AB vậy ta dùng công thức khoảng cách : $d_{(H,AB)} = HK \Leftrightarrow \frac{|0-h|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h=8 \\ h=-8 \end{array}\right.$

đến đây ta loại được h = -8.

Đố em nào biết tại sao ? keke, không chỉ có Hóa, Lý các em cần đọc kĩ mà Toán cũng vậy vì H thuộc tia Oy nên $h \ge 0$ các em học từ lớp 6 cái này rồi nhé :D

Đầy tiên anh tưởng toi rồi vì hết điều kiện mà loại nhưng đọc kĩ lại chút thì thấy được điều đó.

Vậy $H(0;8)$ Ta có ngay phương trình IH là $1.(x-0)+1.(y-8)=0 \Leftrightarrow x+y-8=0$ do IH vuông AB

Do đó tọa độ K là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=4$ lúc đầu anh định giải hệ $\begin{cases} I \in IK \\ IH = 2IK = 2\sqrt{2} \end{cases}$ nhưng nó sẽ ra 2 nghiệm nên mất công loại, các em hạn chế làm như thế này nhé, ta sử dụng vecto để đỡ phải loại nghiệm , để ý rằng $\overline{KH} = 4\overline{KI}$ cái này từ tỷ lệ độ dài ở trên đó các em

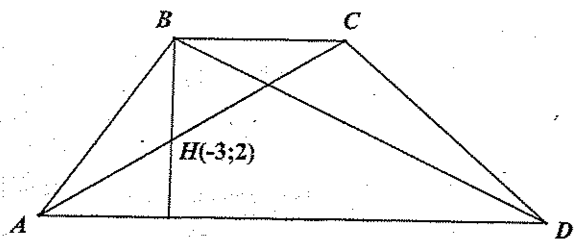
Vậy $K(4;4) \to I(3;5) \to (C):(x-3)^2+(y-5)^2=10$

Ví dụ 6: ĐH – B – 2013 :

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau
và AD = 3BC . Đường thẳng BD có phương trình x + 2y – 6 = 0 và tam giác ABD có trực tâm làH(-3 ; 2). Tìm tọa độ các đỉnh C và D

Hướng dẫn

Bước 1: Các em vứ vẽ cẩn thận cái hình không cần thêm bớt gì cả.



Bước 2: Xác định mục tiêu, phương hướng làm

*Mục tiêu là tìm tọa độ C, D vấn đề là tìm điểm nào trước ? Câu trả lời là điểm nào trước cũng được vì nó như nhau, thoạt nhìn thì tưởng D dễ hơn vì có phương trình BD rồi, nhưng mà để ý kĩ tí nữa thì ta cũng tìm được phương trình AC nên tọa độ C và D đều tham số hóa được

Tới đây là các em làm được 0,25 rồi, nhiều khi mỗi bài Oxy và bài Hệ ta chỉ cần sồ vào làm từ 0,25-0,5 còn dễ hơn là lấy hết cả 1 điểm bài đó.

Hồi anh thi để làm được 10 thì ăn cắm bút từ đầu tới lúc cuối đúng còn có gần 10 phút nữa là thu bài, mặt bừng bừng vì lo hết giờ, nhưng rất may tuy vội nhưng không để xảy ra sai sót.
Nên có nhiều em hỏi anh nên học Oxy hay Hệ ? thì bản thân anh khuyên học cả 2 kiếm mỗi cái một tí nếu khả năng mình chỉ tới mức đó thôi, còn không là cứ phải chén hết.

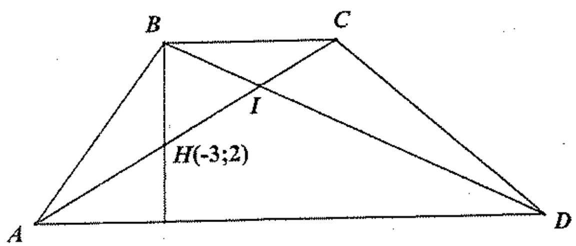
Tiếp tục nhé

ở đây đề bài cho :

$$\begin{cases} hinh\_thang\_can\_ABCD \\ AD = 3BC \\ AC \perp BD \\ BD: x + 2y - 6 = 0 \\ H(-3;2)\_va\_la\_truc\_tam \end{cases}$$

ta đã dùng điều kiện $\begin{cases} AC \perp BD \\ H(-3;2) \\ \mathrm{BD}: \mathrm{x} + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow AC: 2(x+3) - (y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 8 = 0$

Bây giờ phải xử lý các điều kiện còn lại, để tìm thêm 1 điều kiện của C hoặc D các em lại để ý chút, như anh đã nói ở các bài trước, các tứ giác của chúng ta đều có 1 điểm yếu là cái tâm, ta cứ xoáy vào cái tâm là ta sẽ làm được, tạm gọi tâm là I



ABCD là hình thang cân nên : IB = IC do đó IBC vuông cân, tương tự với tam giác IBH có góc $\widehat{IBH} = 90^0 - \widehat{IBC} = 45^o$ nên IBH cũng vuông cân.
Hoặc em nào nhìn rộng hơn 1 chút thì HBC là tam giác vuông cân do góc BCI = 45 độ mà có BI là đường cao nên BI cũng là đường trung tuyến luôn do đó I là trung điểm của HC
Các em chú ý là BH vuông BC tức là ở đây ta đã dùng điều kiện H là trực tâm rồi nên BH vuông AD mà AD // BC nên mới có chuyện BH vuông BC nhé! ☺
Vậy là ta vừa tìm được thêm 1 mối quan hệ liên quan tới C. chúng ta giải phương trình tìm C thôi.
Do $C \in AC: 2x - y + 8 = 0 \to C(\mathrm{c}; 2\mathrm{c} + 8)$

I là trung điểm HC nên : $I\left(\frac{c-3}{2};c+5\right)$ thuộc BD nên :

$\frac{c-3}{2}+2.(c+5)-6=0 \Leftrightarrow c=-1 \Rightarrow C(-1;6)$.

Bây giờ muốn tìm B thì ta lại phải tìm 1 điều kiện liên quan tới nó, ta để ý rằng AD = 3BC ta chưa hề dùng tới

Mà BC // AD nên : $\begin{cases} \frac{IB}{ID}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{3} \\ IB=IC \end{cases} \Rightarrow ID=3IC$ vậy là em D đã xác định rồi, keke

$I(-2;4) \to \overrightarrow{IC}=(1;2)$

Do $D \in BD: x+2y-6=0 \to D(6-2d,d)$

$ID=3IC \Leftrightarrow (8-2d)^2+(d-4)^2=9.5 \Leftrightarrow (d-4)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=1 \to D(4;1) \\ d=7 \to D(-8;7) \end{array}\right.$ ở đây ta đã dùng hết điều kiện nên không có gì mà loại các em nhé, quan hệ về độ dài thường là sẽ cho ta 2 điểm, còn quan hệ vecto sẽ chỉ cho 1 điểm duy nhất thôi.

Vậy: $C(-1;6);D(4;1)$ hoặc $C(-1;6);D(-8;7)$

Anh vừa trình bày cho các em chi tiết 5 bài thi ĐH , ở đây anh chủ yếu hướng dẫn các em cách tư duy là chính, thay vì giải cho em tất cả các bài trong đề ĐH, các bài còn lại là phần việc của em có muốn lấy điểm 8 hay không, anh chỉ có thể dẫn các em tới giữa đường rồi đem con bỏ chợ thôi còn lại là các em phải tự tìm cho mình đích đến.....

Cố gắng lên các em.

Phía dưới là phần bổ đề và chuẩn hóa Oxy

Phần bổ đề chỉ có tác dụng để các em nắm được 1 số tính chất đặc biệt hay dùng, phần quan trọng hơn là cách chứng minh các tính chất vuông góc, bằng nhau, thẳng hàng....

Phần chuẩn hóa Oxy chủ yếu đưa ra 1 hướng kiểm tra tính chất phụ mới để các em chắc chắn hơn với quyết định chứng minh tính chất đó của mình

Chuyên đề: Các bổ đề trợ giúp giải các bài toán hình học phẳng

❖ Tam Giác ABC – Một số bổ đề chỉ có tính chất tham khảo

Tài liệu:

- THTT 384,387,390,449
- Chuyên đề giải tích hình học phẳng Châu Ngọc Hùng
- Tuyển tập hình học giải tích trong mặt phẳng
- Tuyển chọn hệ phương trình +Oxy
- Kĩ thuật xử lý tọa độ hình học phẳng

1. Các dữ kiện khai thác được liên quan đến tam giác

   1.1 Tam giác cân tại A

   - AB = AC

- Đường cao từ A ≡ Đường phân giác từ A ≡ Đường trung tuyến từ A
- $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

1.2 Tam giác vuông tại A

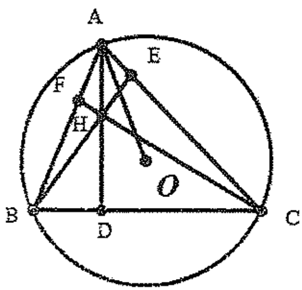
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$
- A thuộc đường tròn đường kính BC

1.3 Tam giác vuông cân

Tổng hợp các điều kiện cân và vuông

2. Các đại lượng liên quan đến tam giác
    - Điểm: Trực tâm H, trọng tâm G, tâm O đường tròn ngoại tiếp, tâm I đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn bàng tiếp I_A, J_B, J_C tương ứng nằm trong góc A, B, C)
    - Đường cao, trung tuyến, phân giác trong ngoài, trung trực, Ơ-le
    - Đường tròn: ngoại tiếp tâm O, nội tiếp tâm I, bàng tiếp tâm J, ơ-le
3. Các tính chất cơ bản trong tam giác

3.1. Các quan hệ bằng nhau



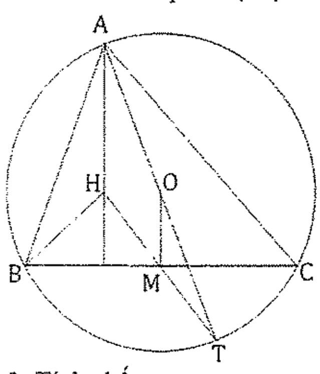
AD, BE, CF là 3 đường cao hạ từ A,B,C

$\widehat{HAB} = \widehat{HAC}$ (cùng phụ với $\widehat{FBD}$)

$\widehat{HAB} = \widehat{OAC}$ (do $\widehat{HAB} = 90^o - \widehat{ABC}$

$= \frac{1}{2}(180^o - 2\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}(180^o - \widehat{AOC}) = \widehat{OAC}$)

3.2 Mối quan hệ trực tâm H và tâm O: $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$



Gọi M là trung điểm BC, T đối xứng với A qua O => AT là đường kính đường tròn tâm O

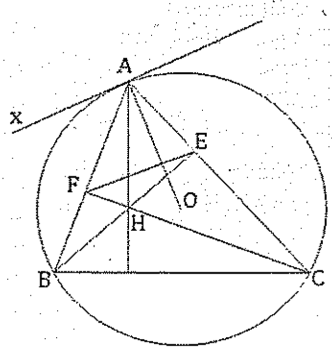
B,C thuộc đường tròn đường kính AT nên $BA \perp BT; CA \perp CT$ (1)

H là trực tâm nên $BA \perp CH; CA \perp BH$

Từ (1) và (2) suy ra CH//BT; BH//CT→ BHCT là hình bình hành, có M là trung điểm đường chéo BC nên M cũng là trung điểm đường chéo HT; O là trung điểm AT→OM là đường trung bình của tam giác AHT

$\Rightarrow \begin{cases} OM // AH \\ AH = 2OM \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$

3.3 Tính chất $AO \perp EF$



BE, CF là 2 đường cao hạ từ B, C. Kẻ tiếp tuyến tại A của đường tròn tâm O

$\Rightarrow \widehat{xAB} = \widehat{ACB}$

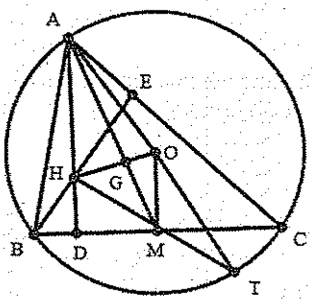
$\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^o$

$\Rightarrow$ BFEC là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$

Do đó $\widehat{xAB} = \widehat{AFE} \Rightarrow Ax // EF$ mà $AO \perp Ax$ nên $AO \perp EF$

3.4 Tính chất $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$



Trung tuyến AM của tam giác ABC, T đối xứng với A qua O.

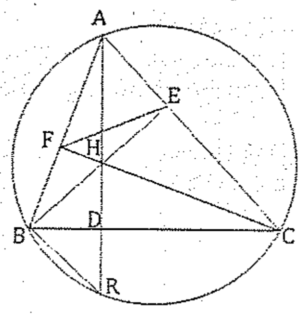
Theo 3.2, ΔAHT có M là trung điểm của HT

$\Rightarrow$ AM là trung tuyến của ΔAHT, có tỉ số $\frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ G cũng là trọng tâm tam giác AHT $\rightarrow \frac{HG}{GO} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$

3.5 Điểm R đối xứng với H qua BC => R thuộc đường tròn (O)

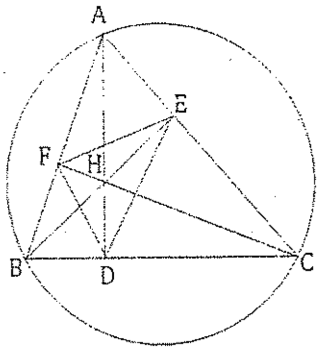


R, H đối xứng với nhau qua BC nên $\widehat{HBC} = \widehat{RBC}$

H là trực tâm $\Rightarrow$ theo (3.1) thì $\widehat{HBC} = \widehat{HAC}$

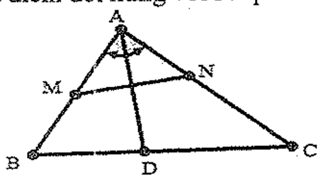
Do đó, $\widehat{RBC} = \widehat{HAC} \Rightarrow$ RBAC nội tiếp $\Rightarrow R \in (O)$

3.6 D, E, F là chân đường cao hạ từ A, B, C => H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF



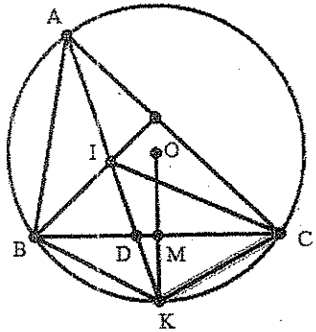
Chứng minh DH là phân giác $\widehat{EDF}$
BFHD, CEHD là 2 tứ giác nội tiếp nên
$\widehat{HDF} = \widehat{HBF}; \widehat{HDE} = \widehat{HCE}$
Mà theo 3.1, $\widehat{HBF} = \widehat{HCE}$
Suy ra $\widehat{HDF} = \widehat{HDE}$
Tương tự, EH, FH là phân giác góc $\widehat{FED}, \widehat{EFD}$
$\Rightarrow$ H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF

3.7 Tính chất đối xứng của đường phân giác
AD là phân giác trong góc A của tam giác ABC. M là điểm bất kì trên AB, N là điểm đối xứng với M qua AD $\rightarrow N \in AC$



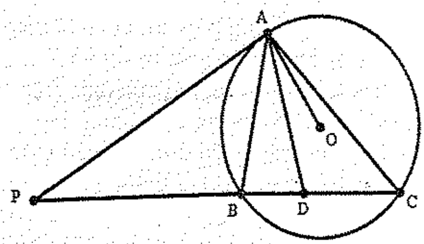
Do M, N đối xứng với nhau qua AD nên
$\widehat{MAD} = \widehat{NAD} \Rightarrow AN, AC$ trùng nhau
$\rightarrow N \in AC$

3.8 Phân giác trong AD cắt (O) tại K $\Rightarrow$ K là tâm đường tròn ngoại tiếp IBC



Chứng minh KI=KB
$\widehat{IBK} = \widehat{IBC} + \widehat{KBC} = \widehat{IBA} + \widehat{KAC} = \widehat{IBA} + \widehat{KAB} = \widehat{KIB}$
$\Rightarrow$ tam giác KIB cân tại K
Tương tự, tam giác KIC cân tại K $\Rightarrow KI = KC$
Do đó, K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC
Lưu ý: K cũng là điểm chính giữa cung BC không chứa A $\Rightarrow OK \perp BC$

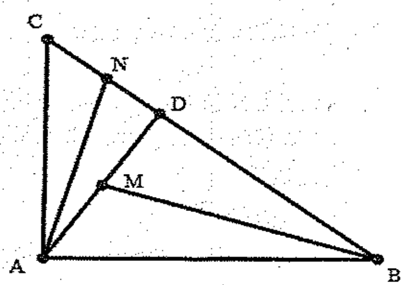
3.9 Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại P. AD là phân giác trong góc A $\Rightarrow PA = PD$



$\widehat{PAD} = \widehat{PAB} + \widehat{BAD} = \widehat{ACB} + \widehat{DAC} = \widehat{ADP}$
$\Rightarrow$ tam giác PAD cân tại P $\Rightarrow$ PA=PD

3.10 Tam giác ABC vuông tại A. AD là đường cao. $M \in AD, N \in CD$

- Nếu M, N là trung điểm của AD, CD $\Rightarrow AN \perp BM$



MN là đường trung bình của tam giác ACD
$MN // AC, AC \perp AB \rightarrow MN \perp AB$
Tam giác ANB có $MN \perp AB, AM \perp BN$ nên M là trự tâm tam giác ANB $\Rightarrow BM \perp AN$

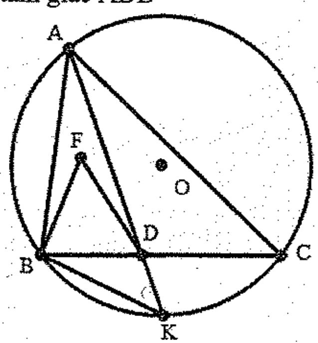
- Nếu AN, BM là phân giác $\widehat{CAD}, \widehat{ABC}$ thì $AN \perp BM$

AN, BM là phân giác nên $\frac{CA}{AD} = \frac{CN}{ND}; \frac{AM}{DM} = \frac{BA}{BD}$

Mặt khác $\Delta ACD \sim \Delta BAD$ nên $\frac{CA}{AD} = \frac{BA}{BD}$

Do đó $\frac{CN}{ND} = \frac{AM}{MD} \Rightarrow MN // AC$ Tương tự $\Rightarrow M$ là trực tâm tam giác ANB $\Rightarrow AN \perp BM$

3.11 Phân giác trong AD cắt (O) tại K => BK là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác ADB



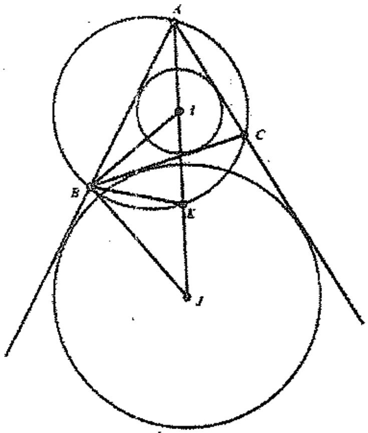
Ta cần chứng minh $BE \perp BK$

$\widehat{FBD} = \frac{180^\circ - \widehat{BFD}}{2} = 90^\circ - \widehat{BAD}$

$\widehat{KBC} = \widehat{KAC} = \widehat{BAD}$

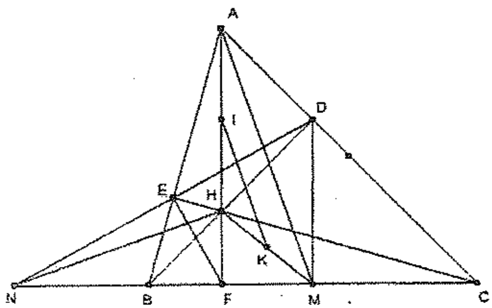
$\Rightarrow \widehat{FBD} + \widehat{KBC} = 90^\circ$ (đpcm)

3.12 Phân giác trong AD cắt đường tròn (O) tại K=> I và J đối xứng với nhau qua K



Đường tròn bàng tiếp có tâm J là giao của 1 đường phân giác trong và 2 đường phân giác ngoài của tam giác ABC $\Rightarrow$ có 3 đường tròn bàng tiếp
A,I,J cùng nằm trên đường phân giác trong góc A $\Rightarrow$ A, I, J thẳng hàng
BI, BJ là 2 đường phân giác của 2 góc kề bù $\Rightarrow BI \perp BJ$ $\Rightarrow$ tam giác BIJ vuông tại B
Theo 3.8, K là tâm đường tròn ngoại tiếp BIC $\Rightarrow KB = KI$
K là trung điểm IJ $\Rightarrow$ KI=KJ

3.13 Trung tuyến AM, 2 đường cao BD, CE. DE cắt BC tại N $\Rightarrow NH \perp AM$

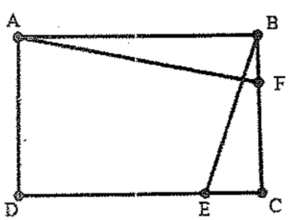


Gọi I, K là trung điểm AH, HM
I là tâm đường tròn ngoại tiếp AEHD
(do $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^o$)
Và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMF ($\widehat{HFM} = 90^o$)

Và đường tròn tâm I, tâm K cắt nhau tại H, N $\Rightarrow$ NH là trục đẳng phương của 2 đường tròn tâm (I), (K) $\Rightarrow NH \perp AM$

❖ Bổ đề trong hình vuông, hình chữ nhật…

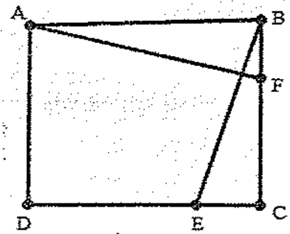
1. $AF \perp BE$, trong đó $E \in CD, F \in BC$ thỏa mãn $\frac{BF}{CE} = \frac{AB}{BC}$



$\Delta ABF \sim \Delta BCE$ do $\widehat{ABF} = \widehat{BCE} = 90^o; \frac{BF}{CE} = \frac{AB}{BC}$

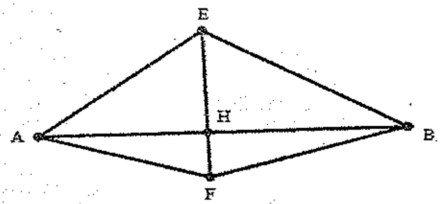
$\Rightarrow \widehat{BAF} = \widehat{CBE}; \widehat{BAF} + \widehat{BFA} = 90^o \Rightarrow \widehat{BFA} + \widehat{CBE} = 90^o \Rightarrow BE \perp$ AF

Chú ý: - Khi AB=BC, tức ABCD là hình vuông, nếu có BF=CE ta cũng có $AF \perp BE$



Trường hợp, E, F lần lượt là trung điểm của CD, BC $\Rightarrow BF = CE = \frac{AB}{2} \Rightarrow AF \perp BE$

2. Tính chất $AB \perp EF \Leftrightarrow AE^2 - BE^2 = AF^2 - BF^2$



Áp dụng định lý Py-ta-go:

$AE^2 = AH^2 + EH^2; BE^2 = EH^2 + BH^2$

$AE^2 - BE^2 = AH^2 - BH^2$

Tương tự, ta có

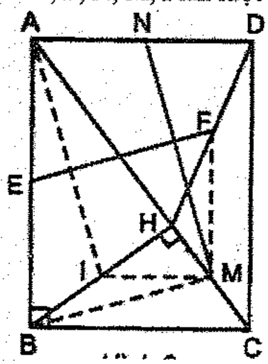
$AF^2 - BF^2 = AH^2 - BH^2$

Dó đó:

$AE^2 - BE^2 = AF^2 - BF^2$

3. Hệ quả của bổ đề tam giác 3.10

E, F, N, M, I lần lượt là trung điểm của AB, DH, AD, CH, BH



I, M là trung điểm của BH, CH => bổ đề 3.10, $AI \perp BM$

MI là đường trung bình của tam giác HBC $\Rightarrow MI // BC // AD$ và $MI = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = AN$

$\Rightarrow$ AIMN là hình bình hành $\Rightarrow AI // MN$

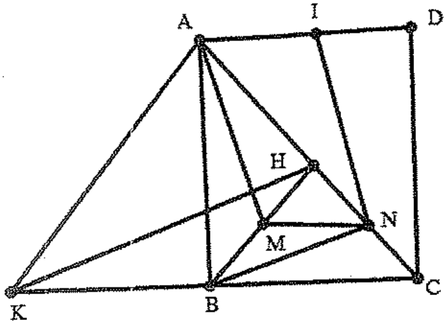
$\Rightarrow MN \perp BM$

Tương tự, chứng minh được EFMB là hình bình hành

$\Rightarrow BM // EF \Rightarrow AI \perp EF$ và $EF \perp MN$

4. $KH \perp IN$

K là điểm đối xứng của C qua B, M,N,I là trung điểm của BH, CH, AD



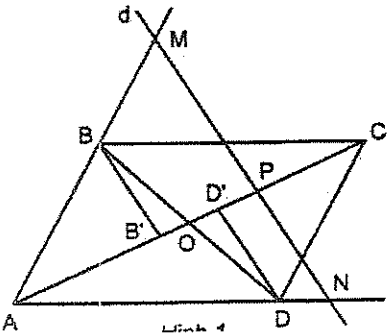
Theo bổ đề 4, $AM \perp BN$, AINM là hình bình hành $\Rightarrow$ AM//IN

BN là đường trung bình của tam giác HCK nên BN//KH

Do đó, $KH \perp IN$

5. $\dfrac{AB}{AM} + \dfrac{AD}{AN} = \dfrac{AC}{AP}$

Đường thẳng d bất kì cắt AB, AC, AD lần lượt tại M, P, N



Hình 1

Kẻ BB'//DD'//d

Theo định lý ta-let: $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AB'}{AP}; \dfrac{AD}{AN} = \dfrac{AD'}{AP}$

ABCD là hình bình hành, BB'//DD' nên AB'=CD'

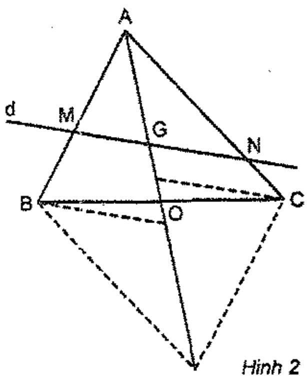
Do đó, AB'+AD'= AD'+D'C=AC

$$\frac{AB}{AM} + \frac{AD}{AN} = \frac{AB'}{AP} + \frac{AD'}{AP} = \frac{AB'+AD'}{AP} = \frac{AC}{AP}$$

Nếu d đi qua điểm O thì ta luôn có

$$\frac{AB}{AM} + \frac{AD}{AN} = 2$$

6. Đường thẳng d bất kì cắt AB,AC , trung tuyến AO tại M, N, G



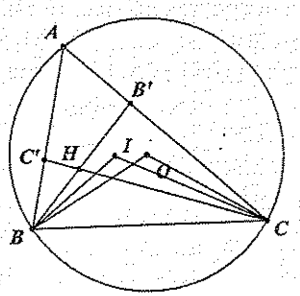
Hình 2

Áp dụng bổ đề 5, dựng hình bình hành ABDC

$$\Rightarrow \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = \frac{AD}{AO} = \frac{2AO}{AG}$$

Nếu G là trọng tâm, ta luôn có: $\dfrac{AB}{AM} + \dfrac{AC}{AN} = 3$

7. B, H, I, O, C cùng nằm trên đường tròn nếu $\widehat{BAC} = 60°$



Ta có các công thức sau:

$\widehat{BIC}=90^o+\dfrac{\widehat{BAC}}{2}=120^o;\widehat{BOC}=2\widehat{BAC}=120^o$

$\widehat{ABH}=90^o-\widehat{BAC}=30^o$

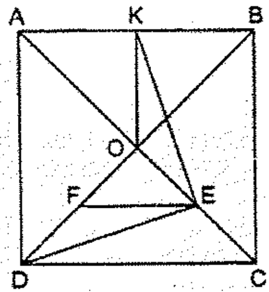
$\Rightarrow\widehat{BHC}=\widehat{ABH}+\widehat{HCB}=30^o+90^o=120^o$

Do đó $\widehat{BHC}=\widehat{BIC}=\widehat{BOC}=120^o$

$\Rightarrow$ B, H, I, O, C cùng thuộc 1 đường tròn

8. $DE\perp KE$

F, E, K là trung điểm của AB, DO, CO



Vì EF là đường trung bình của ΔOCD nên $EF=\dfrac{1}{2}DC$ mà $OK=\dfrac{1}{2}AB$ (do OK là đường trung tuyến của ΔOAB vuông cân) nên $EF=OK$

Mặt khác ta có : $DF=OE$

$\widehat{DEF}=180^o-\widehat{OFE}=135^o=\widehat{EOK}$

$\Rightarrow\Delta DFE=\Delta EOK(c-g-c)$

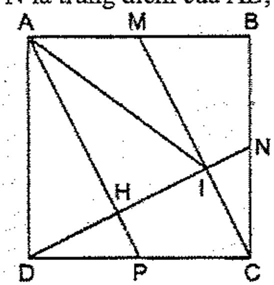
Do đó $\widehat{FDE}=\widehat{OEK}$

$\Rightarrow\widehat{DEK}=\widehat{DEO}+\widehat{OEK}=\widehat{DEO}+\widehat{FDE}$

$=\widehat{AOD}$ (tính chất góc ngoài của tam giác) $=90\Rightarrow KE\perp DE$

9. AI=AD

M, N là trung điểm của AB, BC. AN cắt CM tại I



Gọi P là trung điểm CD

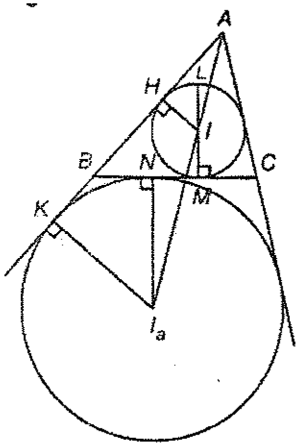
AP cắt DN tại H. theo bổ đề 1, $DN\perp CM$

Dễ thấy AMCP là hình bình hành $\Rightarrow$ AP//CM hay PH//CI, mà P là trung điểm DC nên H là trung điểm DI

AP//CM $\Rightarrow AP\perp DN$

Do đó, AP vừa là trung tuyến , vừa là đường cao $\Rightarrow$ tam giác ADI cân tại A $\Rightarrow$ AD=AI

10. A, L, N thẳng hàng



I, I_a là tâm đường tròn nội tiếp, và bàng tiếp góc A tiếp xúc với BC lần lượt tại M, N. L đối xứng với M qua I $\Rightarrow$ A, I, I_a thẳng hàng (1)

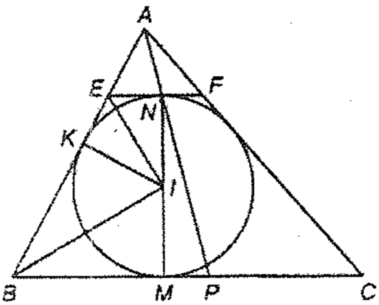
Lại có: $\begin{cases} IL \perp BC \\ I_aN \perp BC \end{cases} \Rightarrow IL // I_aN (2)$

H, K là tiếp điểm của (I), (I_a) với AB

$\Rightarrow \frac{IL}{I_aN} = \frac{IH}{I_aK} = \frac{IA}{I_aA}$ (do $IH // I_aK$)(3)

Từ (1), (2), (3) suy ra A, L, N thẳng hàng

11. BM=CP



Đường tròn nội tiếp tâm I, tiếp xúc với BC tại M. Kẻ đường kính MN. AN cắt BC tại P

Kẻ tiếp tuyến của (I) tại N, cắt AB, AC tại E, F. K là tiếp điểm của (I) với AB

⇨ IE là phân giác góc $\widehat{KIN}$

Có IB là phân giác góc $\widehat{KIM}$

$\widehat{KIM} + \widehat{KIN} = 180^o \Rightarrow \widehat{EIB} = 90^o$

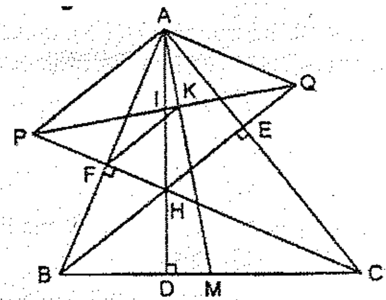
$\Rightarrow \Delta BIE$ vuông tại I có IK là đường cao $\Rightarrow r^2 = IK^2 = KE.KB = NE.MB$

Tương tự, $r^2 = NF.MC$

Do đó, $NE.MB = NF.MC \Rightarrow \frac{NE}{MC} = \frac{NF}{MB} = \frac{NE+NF}{MC+MB} = \frac{EF}{BC}$

Lại có EF//BC nên $\frac{NF}{CP} = \frac{EF}{BC}$ Do đó CP=BM

12. $AM \perp PQ$



AD, BE, CF là 3 đường cao hạ từ A, B, C. Đường thẳng qua A song song BE cắt CF tại P. Đường thẳng qua A song song CF cắt BE tại Q

⇨ APHQ là hình bình hành. Gọi I là tâm giao của AH và PQ $\Rightarrow$ I là trung điểm AH

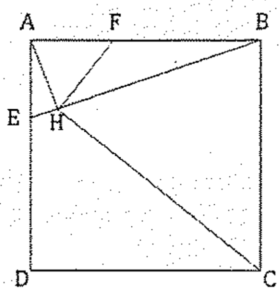
Có: $\widehat{ABC} = \widehat{AHP}$ (do tứ giác BFHD nội tiếp)

$\widehat{APH} = \widehat{BAC}$ (do phụ với 2 góc $\widehat{PAF} = \widehat{BAF}$)

Do đó $\Delta ABC \sim \Delta PHA$ (g-g) có I , M là trung điểm AH và BC

$\Rightarrow \Delta PIH \sim \Delta AMB \Rightarrow \widehat{PIH} = \widehat{AMD} \Rightarrow$ IKMD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IKM} = 90^o \Rightarrow$ đpcm

13. $CH \perp HF$



F, E thuộc AB, AD thỏa mãn AF=AE. H là hình chiếu của A lên BE

Xét ΔAHF và ΔBHC có:

$\widehat{HAF} = \widehat{AEH} = \widehat{HBC}$

$\dfrac{AH}{AE} = \dfrac{BH}{BA} \Rightarrow \dfrac{AH}{AF} = \dfrac{BH}{BC}$

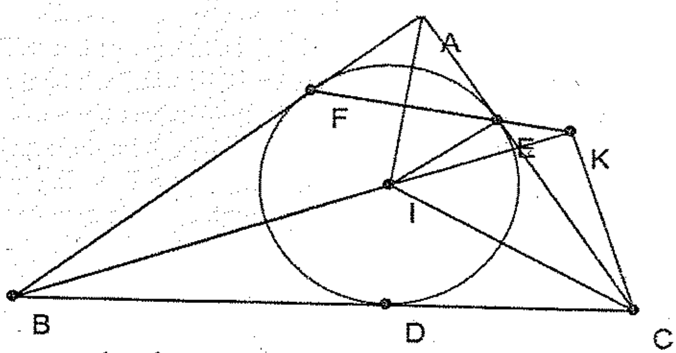
⇨ ΔAHF~ΔBHC (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{AHF} = \widehat{BHC}$

Mà $\widehat{AHF} + \widehat{FHB} = 90^o \Rightarrow \widehat{BHC} + \widehat{FHB} = 90^o$

⇨ $CH \perp HF$

14. $\widehat{BKC} = 90^o$



D, E, F là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. EF cắt BI tại K

Ta có $\widehat{BIC} = 90^o + \dfrac{\widehat{BAC}}{2} \Rightarrow \widehat{KIC} = 90^o - \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$

$\widehat{KEC} = \widehat{AEF} = \dfrac{180^o - \widehat{BAC}}{2} = 90^o - \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$

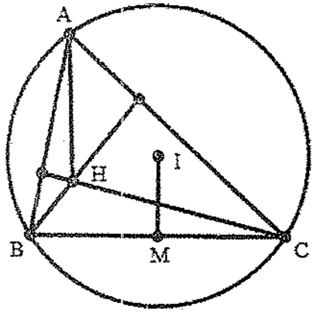
Do đó, $\widehat{KIC} = \widehat{KEC} \Rightarrow$ Tứ giác EKCI nội tiếp, có $\widehat{IEC} = 90^o \Rightarrow \widehat{IKC} = 90^o$

⇨ Đpcm

Bài tập áp dụng

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H(1;3), tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là I(2;0) và điểm A(3;4). Viết phương trình đường thẳng BC

Giải



$\overrightarrow{AH}$ =(-2;-1)

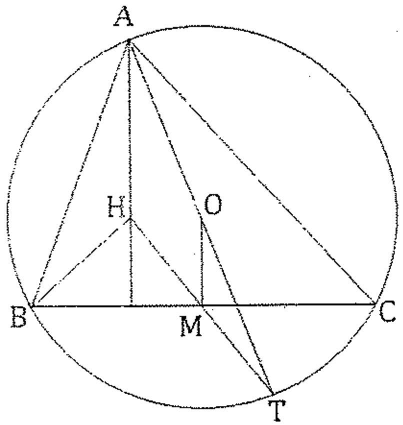
H là trực tâm $\Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow$ VTPT của BC là $\overrightarrow{AH} = (-2;-1)$ hay $\overrightarrow{n_{BC}}$=(2;1)

Ta cần tìm thêm tọa độ một điểm thuộc BC.

Điểm này có thể là chân hình chiếu của A lên BC, có thể là trung điểm của BC, hay có thể là giao của AI với BC

Quan sát dữ kiện đề bài, xuất hiện A, H, I (tâm ngoại tiếp), ta liên hệ ngay tới **bổ đề:**

Mối quan hệ trực tâm H và tâm O: $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$



Gọi M là trung điểm BC, T đối xứng với A qua O $\Rightarrow$ AT là đường kính đường tròn tâm O

B, C thuộc đường tròn đường kính AT nên $BA \perp BT; CA \perp CT$ (1)

H là trực tâm nên $BA \perp CH; CA \perp BH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra CH//BT; BH//CT

$\Rightarrow$BHCT là hình bình hành, có M là trung điểm đường chéo BC nên M cũng là trung điểm đường chéo HT; O là trung điểm AT $\Rightarrow$ OM là đường trung bình của tam giác AHT

⇨ $\begin{cases} OM // AH \\ AH = 2OM \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$

Từ đó, ta nhận ra phải đi tìm tọa độ điểm M:

Áp dụng bổ đề: $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM} = (-2;-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_M - x_I) = -2 \\ 2(y_M - y_I) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow M(1;\dfrac{-1}{2})$

Do đó, phương trình đường thẳng BC qua $M(1;\dfrac{-1}{2})$,có vtpt $\overrightarrow{n_{BC}}$=(2;1) là:

$BC: 2(x-1)+1.(y+\frac{1}{2})=0 \Leftrightarrow 2x+y-\frac{3}{2}=0$

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông ABCD cạnh a=1. M, N là trung điểm của AB, BC. Biết phương trình đường thẳng CM, DN lần lượt là x+y-2=0; x+2y-3=0. Tìm tọa độ A biết A thuộc d: x-2y+3=0

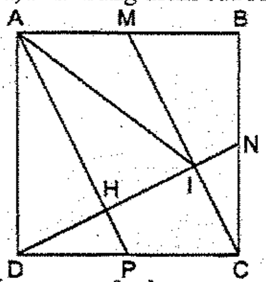
Giải

Tham số hóa A(2t-3;t) ⇒ cần tìm thêm 1 phương trình liên quan

Gọi I là giao điểm của CM, DN ⇒ I(1;1). Ta có **bổ đề** sau:

AD=AI

M, N là trung điểm của AB, BC. AN cắt CM tại I



Gọi P là trung điểm CD

AP cắt DN tại H. theo bổ đề 1, $DN \perp CM$

Dễ thấy AMCP là hình bình hành => AP//CM hay PH//CI, mà P là trung điểm DC nên H là trung điểm DI

AP//CM ⇒ $AP \perp DN$

Do đó, AP vừa là trung tuyến , vừa là đường cao ⇒ tam giác ADI cân tại A ⇒ AD = AI

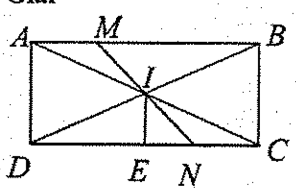
Áp dụng bổ đề:

$1 = AD = AI = \sqrt{(2t-4)^2+(t-1)^2} \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=8$

⇨ **A(-1;1) hoặc A(13;8)**

Ví dụ 3: (Khối A-2009) Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm I(6;2) là giao của 2 đường chéo AC và BD. Điểm M(1;5) thuộc cạnh AB và trung điểm E của CD thuộc đường thẳng Δ: x+y-5=0. Viết phương trình đường thẳng AB

Giải



Viết phương trình đường thẳng AB, biết đi qua M(1;5). Ta cần tìm vectơ pháp tuyến của nó (có thể tìm thêm 1 điểm khác thuộc AB nhưng không khả thi)

Nhận thấy IE⊥CD//AB ⇒ $IE \perp AB$, đã biết điểm I ⇒ cần tìm điểm E sẽ suy ra được vtpt của AB. Điểm E thuộc Δ:x+y-5=0 ⇒ tham số hóa E(t;5-t) ⇒ cần tìm thêm 1 phương trình

Khi đã biết tọa độ tâm I, ta nghĩ ngay đến tính chất đối xứng của hình chữ nhật: Cho hình chữ nhật ABCD có tâm I. Nếu M∈AB, N đối xứng với M qua I thì N∈CD

Do đó, N có tọa độ $\begin{cases} 2x_I - x_M = 11 \\ 2y_I - y_M = -1 \end{cases} \Rightarrow N(11;-1)$

Từ đó, ta có 1 phương trình liên qua đến t là: $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EN} = 0$

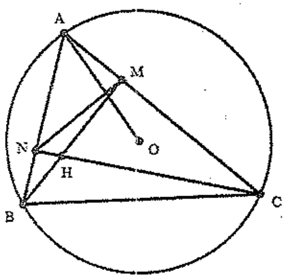
$\Rightarrow \overrightarrow{EI} = (6-t;t-3); \overrightarrow{EN} = (11-t;t-6)$

$\Rightarrow (6-t)(11-t)+(t-3)(t-6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6 \\ t=7 \end{array}\right.$

- Nếu $t=6 \Rightarrow \overrightarrow{EI} = (0;3) \Rightarrow (AB): 3(y-5)=0$
- Nếu $t=7 \Rightarrow \overrightarrow{EI} = (-1;4) \Rightarrow (AB): -1(x-1)+4(y-5)=0 \Leftrightarrow (AB): -x+4y-19=0$

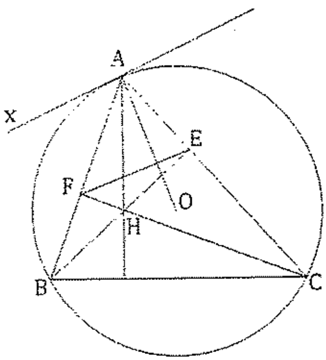
Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) $x^2+y^2=25$ ngoại tiếp tam giác nhọn ABC có chân các đường cao hạ từ B, C lần lượt là M(-1;-3); N(2;-3). Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $y_A<0$

Giải



Biết $y_A < 0$ => tìm tọa độ điểm A trước

Xuất hiện 2 chân đường vuông góc và tâm ngoại tiếp, ta nghĩ đến bổ đề: Tính chất AO⊥EF



BE, CF là 2 đường cao hạ từ B, C. Kẻ tiếp tuyến tại A của đường tròn tâm O

$\Rightarrow \widehat{xAB} = \widehat{ACB}$

$\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^o$ => BFEC là tứ giác nội tiếp => $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$

Do đó, $\widehat{xAB} = \widehat{AFE}$ => Ax//EF mà AO ⊥Ax nên AO⊥EF

Áp dụng, ta có MN⊥AO ; $\overrightarrow{MN} = (3;0)$ => VTPT của AO là $\overrightarrow{n_{AO}} = (3;0)$

AO qua O(0;0), có vtpt $\overrightarrow{n_{AO}} = (3;0)$

⇨ (AO): x=0

Tọa độ điểm A là giao của đường tròn (C) với AO: $\begin{cases} x=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow x=0, y=-5$

Do $y_A<0$

Phương trình AN: x-y-5=0

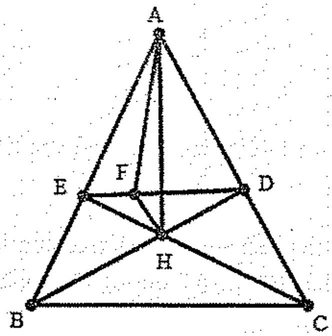
⇨ Phương trình AM: 2x+y+5=0

Điểm B, C là giao của AN, AM với đường tròn (C):

$\begin{cases} x-y-5=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Rightarrow B(5;0)$ $\begin{cases} 2x+y+5=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow C(-4;3)$

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng tọa độ, cho tam giác ABC cân tại A, trực tâm H(-3;2). Gọi D, E lần lượt là chân đường cao hạ từ B, C. Biết A nằm trên đường thẳng d: x-3y-3=0. Điểm F(-2;3) thuộc đường thẳng DE và HD=2. Tìm tọa độ điểm A

Giải



$A \in (d)$: x-3y-3=0 $\Rightarrow$ A(3t+3;t)

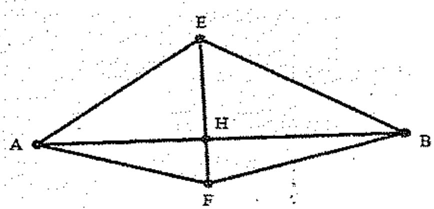
Ta cần tìm thêm 1 phương trình liên quan đến A

Tam giác ABC cân tại A, D, E là chân đường cao hà từ B, C $\Rightarrow$ DE//BC

H là trực tâm => $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp DE$ hay $AH \perp DF$

Sử dụng bổ đề sau:

Tính chất $AB \perp EF \Leftrightarrow AE^2 - BE^2 = AF^2 - BF^2$



Áp dụng định lý Py-ta-go:

$AE^2 = AH^2 + EH^2; BE^2 = EH^2 + BH^2$

$\Rightarrow AE^2 - BE^2 = AH^2 - BH^2$

Tương tự, ta có $AF^2 - BF^2 = AH^2 - BH^2$

Dó đó, $AE^2 - BE^2 = AF^2 - BF^2$

Áp dụng: $FA^2 - FH^2 = DA^2 - DH^2$

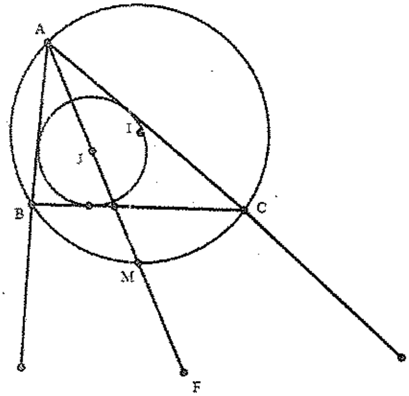
Theo Py-ta-go: $DA^2 = AH^2 - DH^2 \Rightarrow FA^2 - FH^2 = AH^2 - 2DH^2$

Biết tọa độ F, H, tham số hóa A, đoạn DH $\Rightarrow$ ta được 1 phương trình của t:

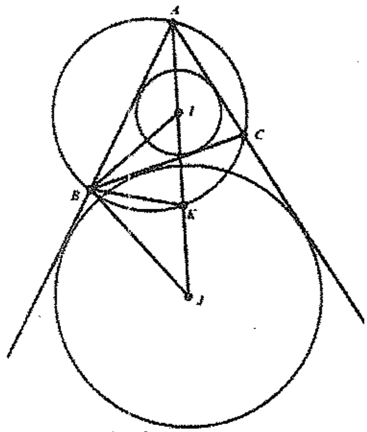
$(3t+5)^2 + (t-3)^2 - 2 = (3t+6)^2 + (t-2)^2 - 8 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow A(3;0)$

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có các điểm I(1;-1) và J(1;0) lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC, đường tròn bàng tiếp góc A có tâm F(2;-8). Tìm tọa độ của các đỉnh của tam giác biết đỉnh A có tung độ âm

Giải



Bổ đề liên quan đến đường tròn bàng tiếp:
Phân giác trong AD cắt đường tròn (O) tại K=> I và J đối xứng với nhau qua K



Đường tròn bàng tiếp có tâm J là giao của 1 đường phân giác trong và 2 đường phân giác ngoài của tam giác ABC
$\Rightarrow$ có 3 đường tròn bàng tiếp

A,I,J cùng nằm trên đường phân giác trong góc A $\Rightarrow$ A, I, J thẳng hàng
BI, BJ là 2 đường phân giác của 2 góc kề bù
$\Rightarrow BI \perp BJ \Rightarrow$ tam giác BIJ vuông tại B
Theo 3.8, K là tâm đường tròn ngoại tiếp BIC
$\Rightarrow$ KB=KI
$\Rightarrow$ K là trung điểm IJ $\Rightarrow$ KI=KJ

Áp dụng bổ đề:
Hướng: Tọa độ A là giao của đường tròn ngoại tiếp tâm I với JF
Gọi M là trung điểm của JF $\Rightarrow$ M thuộc đường tròn ngoại tiếp tâm I của tam giác ABC
$M\left(\frac{3}{2};-4\right) \Rightarrow$ đường tròn tâm ngoại tiếp tam giác ABC có tâm I(1;-1), bán kính
$IM=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+(-4+1)^2}=\frac{\sqrt{37}}{2} \Rightarrow$ phương trình đường tròn tâm I là:
$(x-1)^2+(y+1)^2=\frac{37}{4}$
Phương trình đường thẳng JF là: $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-0}{-8-0} \Leftrightarrow 8x+y-8=0$
Tọa độ điểm A thỏa mãn là giao của đường tròn ngoại tiếp ABC với đường thẳng JF:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=\dfrac{37}{4}\\ 8x+y-8=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}\\ x=\dfrac{97}{130}\end{array}\right.$$

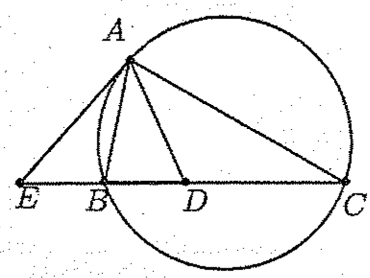
Nếu $x=\frac{3}{2}\rightarrow y=-4$ (thỏa mãn)

Nếu $x=\frac{97}{130}\rightarrow y>0$ (loại)

Vậy $A\left(\frac{3}{2};-4\right)$

Ví dụ 7: (Khối D-2014) Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có chân đường phân giác góc A là D((1;-1). Đường thẳng AB có phương trình 3x+2y-9=0. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp ABC có phương trình x+2y-7=0. Viết phương trình đường thẳng BC.

Giải



BC đi qua D(1;-1). Ta có 2 hướng: tìm vtpt hoặc tìm 1 điểm khác D thuộc BC

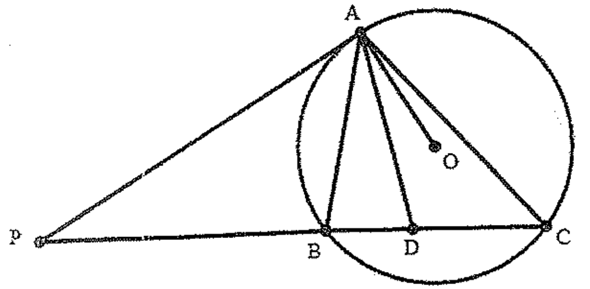
- Hướng tìm vtpt không khả quan do thiếu các yếu tố về vuông góc
- Đi theo hướng 2, tìm điểm khác D thuộc BC

Gọi E là giao điểm của tiếp tuyến tại A của đướng tròn ngoại tiếp ABC với BC ⇒ (AE): x+2y-7=0

Dễ dàng tìm được tọa độ A: $\begin{cases}3x+2y-9=0\\ x+2y-7=0\end{cases}\Rightarrow A(1;3)$

Ta sử dụng bổ đề sau:

Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại P. AD là phân giác trong góc A => PA=PD



$\widehat{PAD}=\widehat{PAB}+\widehat{BAD}=\widehat{ACB}+\widehat{DAC}=\widehat{ADP}$ $\Rightarrow$ tam giác PAD cân tại P $\Rightarrow$ PA=PD

Áp dụng bổ đề:

EA=ED $\Rightarrow$ E thuộc đường trung trực của AD

Phương trình đường thẳng AD: x=1 $\Rightarrow$ phương trình trung trực AD có dạng y=m

Trung trực Δ của AD qua điểm N là trung điểm AD, có tọa độ N(1;1) nên m=1

⇨ (Δ): y=1

Điểm E là giao của AE và (Δ): $\begin{cases} x+2y-7=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow E(5;1)$

⇨ Phương trình BC: $\frac{x-1}{5-1}=\frac{y+1}{1+1} \Leftrightarrow (BC): x-2y-3=0$

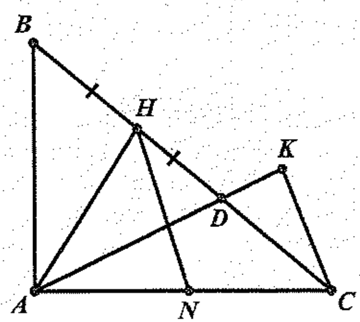
C- chuẩn hóa Oxy

Trong đề ĐH môn Toán các năm gần đây, BGD bắt đầu đưa thêm phần chứng minh tính chất phụ vào bài toán Oxy, có nghĩa là em phải nhận ra được tính chất đó thường là vuông góc thì mới có thêm dữ kiện để tính toán, bình thường các em chỉ cần vẽ chuẩn hình là có thể nhận ra được nhưng làm sao ta có thể kiểm tra nhanh xem thực sự thì nó có chính xác hay không, hôm nay anh sẽ hướng dẫn các em 1 phương pháp như thế.

Phương pháp này khá mạnh cho tam giác vuông, hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình thoi… vì chọn được gốc tọa độ dễ

***Khởi động là bài Oxy-2015**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC; D là điểm đối xứng của B qua H; K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AD. Giả sử $H(-5;-5), K(9;-3)$ và trung điểm của cạnh AC thuộc đường thẳng $x-y+10=0$. Tìm tọa độ A



Phân tích 1 chút về bài toán:
Đề bài yêu cầu tìm tọa độ điểm A trong khi thì chưa có nhiều dữ kiện về nó, nhưng lại có N là trung điểm AC thuộc đường thẳng $x-y+10=0$ rõ ràng ta có 1 dữ kiện về N và ta cần tìm 1 dữ kiện nữa sẽ tìm được nó và ta tham số hóa tọa độ nó luôn $N(x_o,x_o+10)$. Mặt khác thì H và K đều nhìn xuống AC dưới 1 góc vuông do đó chúng nội tiếp đường tròn tâm N đường kính AC bây giờ ta chỉ cần giải NH=NK :

$(x_o+5)^2+(x_o+15)^2=(x_o-9)^2+(x_o+13)^2$

$\rightarrow x_o=0 \rightarrow N(0;10) \rightarrow R=NH=5\sqrt{10}$

D là điểm đối xứng của B qua H thì ta thấy được BAD là tam giác cân. Rõ ràng tới đây ta đang bế tắc vì không thể tiếp cận được điểm A một cách gần hơn được nữa =((

Hiện tại thì ta đã biết tọa độ H,N và K tức là phương trình HN biết, Kể ra mà AK vuông với HN thì ta viết được phương trình AK ngay là được thêm 1 điều kiện của A nhưng vấn đề là điều đó có đúng không? Nhìn vào hình thì ta cũng cảm thấy nó vuông (các em vẽ chuẩn nhé)

Ta sẽ chuẩn hóa để xem xét nó 1 cách chính xác xem:

Chọn gốc tọa độ A(0,0) ở đây các em chọn ngẫu nhiên B(0,1) thuộc trục tung và C(2,0) thuộc trục hoành vì là ở đây ta chỉ kiểm tra tính vuông góc, phần này ko trình bày vào bài làm nhé

Ta có phương trình BC: $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}=1 \leftrightarrow x+2y-2=0$ phương trình AH: $2x-y=0$

Tọa độ H là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x+2y=2 \\ 2x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=\frac{4}{5} \end{cases} \rightarrow H\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right) \rightarrow D\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ và $N(1,0)$

$\overline{NH}=\left(\frac{-3}{5},\frac{4}{5}\right),\overline{AD}=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \overline{NH}.\overline{AD}=0$ vậy chúng vuông góc.

Khi đã chắc chắn chúng vuông góc rồi thì giờ phải lao vào mà chứng minh bằng học thôi.

Thường chứng minh vuông góc ta sẽ sử dụng cộng góc:

Tam giác BAD cân nên : $\widehat{BAH}=\widehat{HAD}$

Tam giác AHN cân nên : $\widehat{HAN}=\widehat{NHA}$

$\Rightarrow \widehat{BAH}+\widehat{HAN}=\widehat{HAD}+\widehat{NHA}=90^o$ vậy AD vuông HN.

Phương trình NH: $\frac{x}{-5}=\frac{y-10}{-5-10} \Leftrightarrow 3x-y+10=0$

$\Rightarrow AK:(x-9)+3(y+3)=0 \Leftrightarrow x+3y=0 \rightarrow A(-3a,a)$

$AN=R=NH \Leftrightarrow 9a^2+(a-10)^2=250 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-3 \rightarrow A(9,-3) \\ a=5 \rightarrow A(-15,5) \end{array}\right.$ Loại $A(9,-3)$ do trùng K , nó trùng K vì nó và K đối xứng nhau qua cái giao điểm vuông góc ấy, nếu các em chứng minh được cái đó thì áp dụng công thức trung điểm là xong và sẽ không phải loại.

*** Nhận xét: nếu xử lí các dữ kiện xong mà các em lâm vào thế bí thì hãy nghĩ tới chứng minh yếu tố phụ nhé, thường là bám vào những điểm đã biết tọa độ để xem mối quan hệ giữa chúng và điểm cần tìm có gì đặc biệt không.**

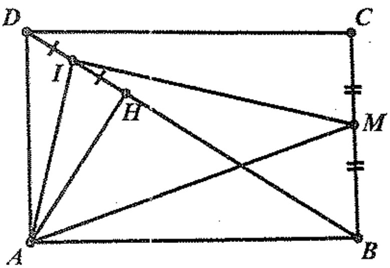
Ví dụ 1: Cho hình chữ nhật ABCD, H là hình chiếu vuông góc của A xuống BD, trung tuyến AI của tam giác ADH, M là trung điểm BC. Hỏi AI và MI có vuông góc hay không?

Đây là 1 nhánh trong bài Oxy mà 1 bạn hỏi anh dịp trước.

*Bình luận:

+ Nếu làm theo cách truyền thống thì khá là trâu bò!!! Và xem phần chứng minh bằng hình học ở **bổ đề 3.10** nhé

+ Ta sẽ dùng chuẩn hóa để chứng minh như sau:



Ở đây ta giả sử hình chữ nhật có tỉ lệ các cạnh $AB:BC = a:1, a>0$ nên chọn AB=1, BC=a nếu để kiểm tra nhanh thì các em có thể chọn a=2,3,4...

Rồi tìm $\overline{MI}, \overline{AI}$ để xem chúng vuông không.

Ta thử nghĩ 1 lúc chứng minh bằng hình học như tam giác đồng dạng, cộng góc coi xem có được không? nhưng sau một hồi thì anh thấy nó khá phức tạp và bế tắc (thực ra là phải kẻ thêm yếu tố phụ, khá là phức tạp, xem bổ đề 3.10 nhé)

Nên ta sẽ đi theo hướng trâu bò chuẩn hóa kiểu gì cũng ra = =

Để tổng quát nên thì a là 1 số nào đó.

Chọn gốc tọa độ $A(0;0), B(a;0), C(a,1), D(0;1)$ suy ra $M\left(a,\frac{1}{2}\right)$

Phương trình BD: $\frac{x}{a}+\frac{y}{1}=1 \Leftrightarrow x+ay-a=0 \to (AH): ax-y=0$

Tọa độ H là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x+ay-a=0 \\ ax-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{a^2+1} \\ y=\dfrac{2a}{a^2+1} \end{cases} \to H\left(\dfrac{a}{a^2+1}, \dfrac{a^2}{a^2+1}\right)$

Tọa độ $I\left(\dfrac{a}{2(a^2+1)}, \dfrac{2a^2+1}{2(a^2+1)}\right) \to \overline{AI} = \left(\dfrac{a}{2(a^2+1)}, \dfrac{2a^2+1}{2(a^2+1)}\right), \overline{MI} = \left(\dfrac{a-2a(a^2+1)}{2(a^2+1)}, \dfrac{a^2}{2(a^2+1)}\right)$

$$\overline{AI}.\overline{MI} = \frac{a}{2(a^2+1)}.\frac{a-2a(a^2+1)}{2(a^2+1)} + \frac{2a^2+1}{2(a^2+1)}.\frac{a^2}{2(a^2+1)}$$
$$= \frac{a^2\left[1-2(a^2+1)\right]+(2a^2+1).a^2}{4(a^2+1)} = 0$$

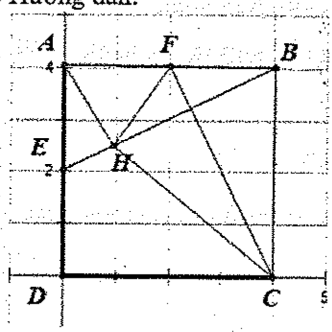
Vậy AI và MI vuông góc với nhau

Các bài Oxy mấy năm gần đây, rất hay đi theo hướng tìm yếu tố vuông góc thường khó nếu các em không tinh ý hoặc làm quen các bổ đề.

* Vậy để xử lí tốt được yếu tố phụ này trước hết là phải nắm được 1 vài cách chứng minh quen thuộc, khi áp dụng chuẩn hóa Oxy thì phải nhớ : Các yếu tố vuông góc thường xảy ra là các cạnh bên trong hình, nên nối thêm các điểm vào, bằng giác quan ta sẽ xem cặp nào có thể vuông góc.
Sau đó, chọn 1 thằng làm gốc tọa độ và tìm tọa độ của tất cả các đỉnh còn lại, rồi tìm xét tích vô hướng của cặp vecto ta cần xét để xem 2 đường có thực sự vuông với nhau không.
Đối với hình chữ nhật ta cứ chọn 1 số tỉ lệ bất kì giữa 2 cạnh, anh chọn là a cho tổng quát thôi, và ở đây chỉ có tác dụng kiểm tra nhanh và chắc chắn tính vuông góc, vì đây cũng là phương pháp mới.
Ví dụ cuối về phần này là:

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy cho hình vuông ABCD có $F(2;0) \in AB, E \in AD$, $AE = AF; H(-1;1)$ là hình chiếu vuông góc của A lên BE. Tìm tọa độ của C , biết C thuộc đường thẳng $d: x-2y+1=0$

Hướng dẫn:



Cứ tham số hóa tọa độ C đã : $C(2x-1, c)$, ở đây ta đã biết tọa độ H thì ta chỉ có bám vào CH thôi.
Nghĩ 1 lúc vẫn thấy bí không biết cho tọa độ F làm gì, do đó sẽ nghĩ tới yếu tộ phụ
Thử nối H với F thì cảm giác mách bảo HF vuông góc HC, nếu điều này sảy ra thì tốt quá, tìm ngay được tọa độ C.

*** Ta sẽ check nhanh xem có thật là vậy không.**

Chọn luôn $A(0;0) \Rightarrow D(0;-4), C(4,-4), B(4,0), E(0,-2)$ **và chọn F là trung điểm AB,**

E là trung điểm AD cho dễ, không thì các em làm như bài trên để tỉ lệ là a

Phương trình BE: $\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}=1 \Rightarrow x-2y-4=0 \Rightarrow (AH): 2x+y=0$

Tọa độ H: $\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{5} \\ y=\dfrac{-8}{5} \end{cases} \Rightarrow H(\dfrac{4}{5},\dfrac{-8}{5}) \quad \Rightarrow \overrightarrow{HF}=\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{8}{5}\right), \overrightarrow{HC}=\left(\dfrac{16}{5},\dfrac{-12}{5}\right)$

Dễ thấy tích vô hướng $\Rightarrow \overrightarrow{HF}.\overrightarrow{HC}=0$ **do đó chúng vuông góc.**

Khi đã biết chắc chắn chúng vuông, ta sẽ làm như sau:

Thông thường để chứng minh vuông góc ta sẽ dùng cộng góc hoặc chứng minh nó bằng 1 góc vuông khác.

Bài này chứng minh hơi cầu kì như sau:

Ta sẽ tiến hành xử lí dữ kiện $AE=AF$ **mà AD=AC nên:** $\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{AF}{AC}$ **mà** $\widehat{A}=\widehat{D}=90^o$

Nên $\Delta AEF \sim \Delta DAC(c-g-c) \Rightarrow \dfrac{EF}{AC}=\dfrac{EH}{HA} \Rightarrow \widehat{HEF}=\widehat{HAC} \Rightarrow \Delta EHF \sim \Delta AHC$

Do đó $\widehat{FHC}=90^o$ **do đó:** $FH \perp HC \to \overrightarrow{FH}.\overrightarrow{HC}=0 \Rightarrow C\left(\dfrac{-1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

***Tổng kết:**

Qua các ví dụ chúng ta thấy rằng xu hướng chung đang sử dụng nhiều tới các yếu tố phụ, điều này đòi hỏi khả năng nhận biết phán đoán cũng như kiến thức để chứng minh của học sinh mà không còn đơn thuần là chỉ xử lí dự liệu đề bài nữa.

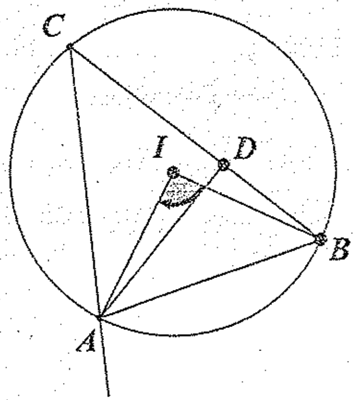
*Các bước giải toán hình phẳng cần nhớ:

Bước 1: Vẽ hình phẳng biểu thị cho bài toán. Trên cơ sở dữ kiện và yêu cầu bài toán phân tích các yếu tố hình phẳng cần thiết để giải toán.

Bước 2: Lập sơ đồ các bước giải bài toán

Bước 3: Trình bày lời giải bài toán theo sơ đồ ở bước 2

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có góc C nhọn, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là I(-2; 1) và thoả mãn $\widehat{AIB}=90^0$. Chân đường cao kẻ từ A đến BC là D(-1; -1), đường thẳng AC đi qua điểm M(-1; 4). Tìm toạ độ A, B biết đỉnh A có hoành độ dương



Bước 1. Vẽ hình phẳng biểu thị cho bài toán, khai thác yếu tố hình phẳng sau:

Ta có $\widehat{ACB}=\frac{1}{2}sd\widehat{AB}=\frac{1}{2}\widehat{AIB}=45^0$, mà $\widehat{ADC}=90^0$ suy ra tam giác ADC vuông cân tại D nên DA = DC mặt khác IA = IC do đó ID là trung trực của AC $\Rightarrow ID\perp AC$

Bước 2. Lập sơ đồ các bước giải bài toán

1.Chứng minh $DI\perp AC$

2. Viết phương trình đường thẳng AC: AC đi qua M và có véc tơ pháp tuyến $\overline{DI}$

3.Tính d(D,AC) suy ra $DA=\sqrt{2}d(D,AC)$

4. Do $A\in AC$ nên biểu thị toạ độ điểm A theo tham số a. Từ độ dài DA suy ra toạ độ A

5.Viết phương trình BD: BD đi qua D và có véc tơ pháp tuyến $\overline{DA}$

6. $B\in BD$ nên biểu thị toạ độ điểm B theo tham số b. Tam giác AIB vuông tại I, suy ra $\overline{IA}.\overline{IB}=0$ từ đó tìm được toạ độ điểm B

Bước 3. Trình bày lời giải bài toán theo sơ đồ bước 2

Ta có $\widehat{ACB}=\frac{1}{2}sd\widehat{AB}=\frac{1}{2}\widehat{AIB}=45^0$, mà $\widehat{ADC}=90^0$ suy ra tam giác ADC vuông cân tại D nên DA = DC

mặt khác IA = IC do đó ID là trung trực của AC $\Rightarrow ID\perp AC$

Đường thẳng AC đi qua M và có véc tơ pháp tuyến $\overline{DI}$ nên có phương trình x – 2y + 9 = 0

Gọi $A(2a-9;a)\in AC$, do DA = $\sqrt{2}d(\text{D},\text{AC})=2\sqrt{10}$

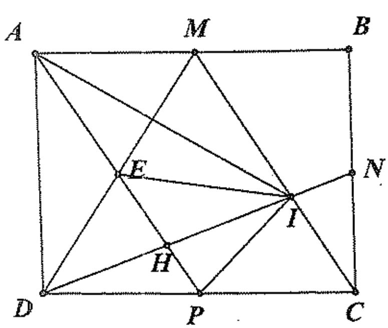
$DA^2=40\Leftrightarrow a^2-6a+5=0\left[\begin{array}{l}a=1\\a=5\end{array}\right.$. Do $x_A>0\Rightarrow A(1;5)$

Đường thẳng DB đi qua D và vuông góc với AD nên có phương trình $x+3y+4=0$

$B \in DB \Rightarrow B(-4-3b;b)$. Tam giác IAB vuông tại I nên $\overline{IA}.\overline{IB}=0 \Leftrightarrow b=-2$ suy ra B(2;-2).

Vậy A(1;5), B(2; -2)

Ví dụ 2. Cho hình vuông ABCD có hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC, biết CM cắt DN tại $I(\frac{22}{5};\frac{11}{5})$. Gọi H là trung điểm DI, biết đường thẳng AH cắt CD tại $P(\frac{7}{2};1)$. Biết $x_A<4$, tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông



Bước 1. Vẽ hình phẳng biểu thị cho bài toán, khai thác yếu tố hình phẳng sau:

Ta có $\Delta MBC=\Delta NCD \Rightarrow CM \perp DN$

Tứ giác AMID nội tiếp đường tròn tâm E(với E là trung điểm của AH) suy ra ED = EI, mà H là trung điểm của DI $\Rightarrow EH \perp DI \Rightarrow AH \perp DN$,

Mà $CM \perp DN$ suy ra CM // AH, mặt khác AM // CP nên tứ giác AMCP là hình bình hành, do đó P là trung điểm DC $\Rightarrow$ tứ giác AMPD là hình chữ nhật

$\Rightarrow IE=\frac{1}{2}DM=\frac{1}{2}AP \Rightarrow \Delta AIP$ vuông tại I

Ta có ΔADI cân tại A $\Rightarrow AI=AD=DC=2IP$ (do tam giác DIC vuông tại I) $\Rightarrow AI=2IP$

Bước 2. Lập sơ đồ các bước giải bài toán

1. Chứng minh tam giác AIP vuông tại I

2. Viết phương trình đường thẳng AI: đi qua I và vuông góc với PI

3. Chứng minh AI = 2 IP, $A \in AI$ biểu thị toạ độ điểm A theo tham số t. AI = 2IP suy ra toạ độ điểm A, rồi viết phương trình AP

4. Viết phương trình DN: qua I và vuông góc với AP, suy ra toạ độ điểm $H=AP \cap DN$, H là trung điểm ID suy ra toạ độ điểm D

5. Viết phương trình DC: qua D và vuông góc với AD, suy ra toạ độ điểm $P = AH \cap DC$, P là trung điểm DC suy ra toạ độ điểm C

6. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ suy ra toạ độ điểm B

Bước 3. Trình bày lời giải bài toán theo sơ đồ bước 2

$$\Delta MBC = \Delta NCD \Rightarrow CM \perp DN$$

Tứ giác AMID nội tiếp đường tròn tâm E(với E là trung điểm của AH) suy ra ED = EI, mà H là trung điểm của DI $\Rightarrow EH \perp DI \Rightarrow AH \perp DN$,

mà $CM \perp DN$ suy ra CM // AH, mặt khác AM // CP nên tứ giác AMCP là hình bình hành, do đó P là trung điểm DC $\Rightarrow$ tứ giác AMPD là hình chữ nhật

$\Rightarrow IE = \frac{1}{2}DM = \frac{1}{2}AP \Rightarrow \Delta AIP$ vuông tại I

Ta có ΔADI cân tại A $\Rightarrow AI = AD = DC = 2IP$ (do tam giác DIC vuông tại I) $\Rightarrow AI = 2IP$

Đường thẳng AI qua I và vuông góc với PI nên có phương trình $3x + 4y - 22 = 0$.

$$A \in AI \Rightarrow A(2-4t;4+3t) \Rightarrow \left(4t+\frac{12}{5}\right)^2 + \left(3t+\frac{9}{5}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\frac{6}{5} \end{array}\right.$$

Do $x_A < 4$ nên A(2; 4) suy ra pt(AP): $2x + y - 8 = 0$

$DN \perp AP$ suy ra pt(DN): x – 2y = 0

$$H = DN \cap AP \Rightarrow H\left(\frac{16}{5};\frac{8}{5}\right) \Rightarrow D(2;1), C(5;1), B(5;4)$$

Vậy $A(2;4), D(2;1), C(5;1), B(5;4)$

Các em làm tương tự với các ví dụ sau

Ví dụ 3. Cho hình vuông ABCD và điểm E thuộc cạnh BC . Một đường thẳng qua A vuông góc với AE cắt CD tại F, đường thẳng chứa trung tuyến AM của tam giác AEF cắt CD tại K. Tìm toạ độ điểm D biết A(-6; 6), M(-4; 2), K(-3; 0).

Gợi ý: $\Delta ABE = \Delta ADF \Rightarrow AE = AF$ nên tam giác AEF cân tại A, mà AM là đường trung tuyến $\Rightarrow AM \perp EF$. Do đó 3 điểm A, E, F thuộc đường tròn tâm M bán kính MA .Đáp số D(-6;0)

Ví dụ 4. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AC; M, N lần lượt là trung điểm của AH, BH. Trên cạnh CD lấy điểm K sao cho MNCK là hình bình hành. Biết $M\left(\frac{9}{5};\frac{2}{5}\right)$, K(9; 2) và các đỉnh B,C lần lượt nằm trên các đường thẳng $d_1: 2x-y+2=0,\quad d_2: x-y-5=0$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết hoành độ điểm C lớn hơn 4.

Gợi ý: MN là đường trung bình của tam giác HAB $\Rightarrow MN//AB, MN=\frac{1}{2}AB$. Do MNCK là hình bình hành $\Rightarrow MN//CK, MN=CK=\frac{1}{2}AB$ suy ra K là trung điểm của CD

Ta có $MN\perp BC, BH\perp MC$ nên N là trực tâm tam giác BCM $\Rightarrow CN\perp BM$,

mà MK // CN $\Rightarrow BM\perp MK$ Đáp số : A(1; 0), B(1; 4), C(9; 4), D(9; 0)

Ví dụ 5. Cho hình chữ nhật ABCD có D(4; 5), M là trung điểm đoạn AD, đường thẳng CM có phương trình $x-8y+10=0$. Điểm B nằm trên đường thẳng $d_1: 2x+y+1=0,\ y_C<2$. Tìm toạ độ A, B, C

Gợi ý: Ta có G là trọng tâm tam giác ADC $\Rightarrow DG=\frac{2}{3}DI=\frac{1}{3}BD\Rightarrow BG=2GD$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, D lên CM

$\Rightarrow \frac{BH}{DK}=\frac{BG}{GD}=2\Rightarrow BH=2DK=2d(D,CM)$ Đáp số $A(8;-1), B(2;-5), C(-2;1)$

Ví dụ 6. Cho hình bình hành ABCD có N là trung điểm của CD, đường thẳng BN có phương trình là $13x-10y+13=0$, điểm M(-1; 2) thuộc đoạn thẳng AC sao cho AC = 4 AM. **Gợi ý:** Gọi H là điểm đối xứng với N qua C, H thuộc đường thẳng $\Delta: 2x-3y=0$. Biết 3AC = 2AB, tìm toạ độ A, B, C, D.

Gọi $I=AC\cap BD, G=BN\cap AC$ suy ra G là trọng tâm tâm tam giác BCD

$\Rightarrow CG=\frac{2}{3}CI=\frac{1}{3}AC$, mà $AM=\frac{1}{4}AC\Rightarrow MG=AC-AM-CG=\frac{5}{12}AC$

Do đó $CG=\frac{4}{5}MG\Rightarrow d(C,BN)=\frac{4}{5}d(M,BN)\Rightarrow d(H,BN)=2d(C,BN)=\frac{8}{5}d(M,BN)$

Ta có $CM = \frac{3}{4}AC = \frac{3}{4}.\frac{2}{3}AB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}NH \Rightarrow CM = \frac{1}{2}NH$ suy ra tam giác MNH vuông tại M . Đáp số $A\left(\frac{-5}{3};\frac{7}{3}\right), B\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3}\right), C(1;1), D(-3;-1)$

Ví dụ 7. Cho hình bình hành ABCD có $BD = \frac{\sqrt{10}}{5}AC$. Gọi hình chiếu vuông góc của điểm D lên AB, BC lần lượt là M(-2; -1), N(2; -1). Biết AC nằm trên đường thẳng có phương trình $x - 7y = 0$. Tìm toạ độ A và C.

Gợi ý: Gọi I là trung điểm của BD $IM = IN = \frac{BD}{2} \Rightarrow I$ thuộc trung trực của MN

Đáp số $A\left(-\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right), C\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$

Ví dụ 8. Cho hình thang cân ABCD với CD = 2AB. Đường thẳng AC, BD lần lượt có phương trình $x + y - 4 = 0, x - y - 2 = 0$. Biết toạ độ các đỉnh A, B đều dương và diện tích hình thang bằng 36, tìm toạ độ các đỉnh của hình thang

Gợi ý: Ta có $AC \perp BD \Rightarrow \Delta IDC$ vuông cân tại I nên $\widehat{ACD} = 45^0$, suy ra tam giác AHC vuông cân tại H

$$\Rightarrow AH = HC = HK + KC = \frac{3}{2}AB . S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2}AH = \frac{9}{4}AB^2 \Leftrightarrow 36 = \frac{9}{4}AB^2 \Leftrightarrow AB^2 = 16$$

Đáp số A(1; 3), B(5; 3), C(7; -3), D(-1; -3)

Sau đây sẽ là các bài tập để các em rèn luyện thêm !

Cố gắng lên nhé vì các bài tập anh cho làm thêm thường khó hơn đề thi chính một chút để các em rèn cho quen đi.

*Các bài tập rèn luyện

Bài 1: Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Điểm D thuộc tia đối của tia AC sao cho $GD = GC$. Biết điểm G thuộc đường thẳng $d: 2x + 3y - 13 = 0$ và tam giác BDG nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 12y + 27 = 0$. Tìm toạ độ điểm B và viết phương trình đường thẳng BC, biết điểm B có hoành độ âm và toạ độ điểm G là số nguyên.

Hướng dẫn

Tam giác ABC vuông cân tại A có G là trọng tâm nên GB = GC

Mà GD = GC nên tam giác BCD nội tiếp đường tròn tâm G.

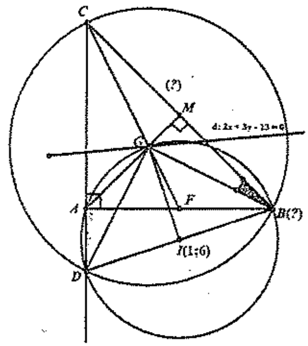
Suy ra

$\widehat{BGD} = 2\widehat{BCD} = 2\widehat{BCA} = 90^0 \Rightarrow BG \perp GD$

Hay tam giác BDG vuông cân tại G

Đường tròn (C) tâm I(1;6) bán kính $R = \sqrt{10}$ ngoại tiếp tam giác BDG nên I là trung điểm của BD

Do đó $IG = \sqrt{10}$ và $IG \perp BD$



Vì $G \in d: 2x + 3y - 13 = 0 \Rightarrow G\left(m; \dfrac{13-2m}{3}\right)$

Từ $IG = \sqrt{10} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} G(2;3) \\ G\left(-\dfrac{28}{13}; \dfrac{75}{13}\right) \end{array}\right.$, do toạ độ điểm G là số nguyên nên G(2;3).

BD đi qua I(1;6) và $IG \perp BD$ nên phương trình $x - 3y + 17 = 0$

$B, D \in BD \cap (C) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(-2;5) \\ D(4;7) \end{array}\right.$ (do hoành độ điểm B âm)

Vậy $\boxed{B(-2;5)}$

Gọi M là trung điểm của BC ta có AM = MB = MC (do ABC vuông cân tại A)

Suy ra $AM \perp BC \Rightarrow GM \perp MB$ và $GM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{1}{3}MB$

Nên $\tan\widehat{GBM} = \dfrac{MG}{MB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \cos\widehat{GBM} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

Gọi $\overline{n} = (a,b)$ với $(a^2 + b^2 \neq 0)$ là VTPT của BC.

Ta có VTCP của BG là $\overline{BG} = (4;-2) \Rightarrow \overline{n_{BG}} = (1;2)$ là VTPT của BG

Có $\cos(BG,BC) = \left|\cos\left(\overline{n_{BG}}, \overline{n}\right)\right| \Leftrightarrow \cos\widehat{GBM} = \left|\cos\left(\overline{n_{BG}}, \overline{n}\right)\right| \Leftrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{\left|\overline{n_{BG}}.\overline{n}\right|}{\left|\overline{n_{BG}}\right|.\left|\overline{n}\right|}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{|a+2b|}{\sqrt{5(a^2+b^2)}} \Leftrightarrow 35a^2 - 40ab + 5b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - b = 0 \\ 7a - b = 0 \end{array}\right.$

__Trường hợp 1:__ Với $a - b = 0 \Rightarrow \overline{n} = (1;1)$ nên phương trình $BC: x + y - 3 = 0$

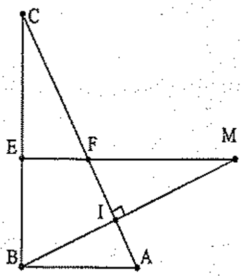
__Trường hợp 2:__ Với $7a - b = 0 \Rightarrow \overline{n} = (1;7)$ nên phương trình $BC: x + 7y - 33 = 0$

Do hai điểm D và G cùng nằm về một phía đối với đường thẳng BC nên phương trình BC thoả mãn là $\boxed{x + y - 3 = 0}$

Vậy $\boxed{BC: x+y-3=0}$ và $\boxed{B(-2;5)}$

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại B, $BC = 2BA$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, AC. Trên tia đối của tia FE lấy điểm M sao cho $FM = 3FE$. Biết điểm M có tọa độ $(5;-1)$, đường thẳng AC có phương trình $2x+y-3=0$, điểm A có hoành độ là số nguyên. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn



Gọi I là giao điểm của BM và AC.

Ta thấy $BC = 2BA \Rightarrow EB = BA, FM = 3FE \Rightarrow EM = BC$

$\Delta ABC = \Delta BEM \Rightarrow \widehat{EBM} = \widehat{CAB} \Rightarrow BM \perp AC$.

Đường thẳng BM đi qua M vuông góc với AC

$BM: x-2y-7=0$.

Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x-2y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{13}{5} \\ y=\dfrac{-11}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{13}{5};\frac{-11}{5}\right) \Rightarrow \overline{IM}=\left(\frac{12}{5};\frac{6}{5}\right)$$

Trong ΔA

Ta có $\overline{IB} = -\frac{2}{3}\overline{IM} = \left(\frac{-8}{5};\frac{-4}{5}\right) \Rightarrow B(1;-3)$

Mặt khác $BI = \sqrt{\left(\frac{-8}{5}\right)^2 + \left(\frac{-4}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, suy ra $BA = \frac{\sqrt{5}}{2}BI = 2$

Gọi toạ độ $A(a,3-2a)$, Ta có $BA^2 = 4 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (6-2a)^2 = 4 \Leftrightarrow 5a^2 - 26a + 33 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=\dfrac{11}{5} \end{array}\right.$

Do a là số nguyên suy ra $A(3;-3)$. $\overline{AI} = \left(\frac{-2}{5};\frac{4}{5}\right)$

Ta có $\overline{AC} = 5\overline{AI} = (-2;4) \Rightarrow C(1;1)$. Vậy $A(3;-3), B(1;-3), C(1;1)$

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh C thuộc đường thẳng $d: x+2y-6=0$, điểm $M(1;1)$ thuộc cạnh BD biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm M trên cạnh AB và AD đều nằm trên đường thẳng $\Delta: x+y-1=0$. Tìm tọa độ đỉnh C.

Hướng dẫn

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, AD

Gọi N là giao điểm của KM và BC

Gọi I là giao điểm của CM và HK

Ta có ΔDKM vuông tại K và $\widehat{DKM} = 45^0$

$\Rightarrow KM = KD \Rightarrow KM = NC$ (1)

Lại có $MH = MN$ (do $MHBN$ là hình vuông)

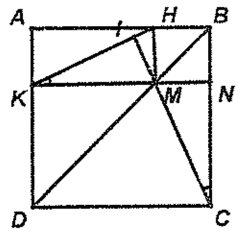
Suy ra hai tam giác vuông KMH, CNM bằng nhau

$\Rightarrow \widehat{HKM} = \widehat{MCN}$

Mà $\widehat{NMC} = \widehat{IMK}$ nên

$\widehat{NMC} + \widehat{NCM} = \widehat{IMK} + \widehat{HKM} = 90^0$

Suy ra $CI \perp HK$



Đường thẳng CI đi qua $M(1;1)$ và vuông góc với đường thẳng d nên $VTPT\ \overrightarrow{n_{CI}} = VTCP\ \overrightarrow{u_d} = (-1;1)$ nên có phương trình

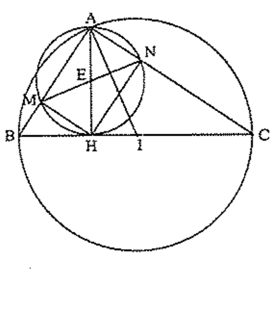
$-(x-1)+(y-1)=0 \Leftrightarrow x-y=0$

Do điểm C thuộc đường thẳng CI và đường thẳng Δ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-y=0 \\ x+2y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy $C(2;2)$

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (T) có phương trình: $x^2+y^2-6x-2y+5=0$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Đường tròn đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Tìm tọa độ điểm A và viết phương trình cạnh BC, biết đường thẳng MN có phương trình: $20x-10y-9=0$ và điểm H có hoành độ nhỏ hơn tung độ.

Hướng dẫn



(T) có tâm $I(3;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Do $IA = IC \Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{ICA}$ (1)

Đường tròn đường kính AH cắt BC tại $M \Rightarrow MH \perp AB \Rightarrow MH // AC$ (cùng vuông góc AC)

$\Rightarrow \widehat{MHB} = \widehat{ICA}$ (2)

Ta có: $\widehat{ANM} = \widehat{AHM}$ (chắn cung AM) (3)

Từ (1), (2), (3) ta có:

$\widehat{IAC} + \widehat{ANM} = \widehat{ICA} + \widehat{AHM}$

$= \widehat{MHB} + \widehat{AHM} = 90^\circ$

Suy ra: AI vuông góc MN

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng IA là: $x+2y-5=0$

Giả sử $A(5-2a;a) \in IA$.

Mà $A \in (T) \Leftrightarrow (5-2a)^2 + a^2 - 6(5-2a) - 2a + 5 = 0 \Leftrightarrow 5a^2 - 10a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \end{array}\right.$

Với $a=2 \Rightarrow A(1;2)$ (thỏa mãn vì A, I khác phía MN)
Với $a=0 \Rightarrow A(5;0)$ (loại vì A, I cùng phía MN)

Gọi E là tâm đường tròn đường kính AH $\Rightarrow E \in MN \Rightarrow E\left(t;2t-\frac{9}{10}\right)$

Do E là trung điểm AH $\Rightarrow H\left(2t-1;4t-\frac{38}{10}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}=\left(2t-2;4t-\frac{58}{10}\right), \overrightarrow{IH}=\left(2t-4;4t-\frac{48}{10}\right)$

Vì $AH \perp HI \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{IH}=\vec{0} \Leftrightarrow 20t^2-\frac{272}{5}t+\frac{896}{25}=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{8}{5} \Rightarrow H\left(\frac{11}{5};\frac{13}{5}\right) \text{ (thỏa mãn)} \\ t=\frac{28}{25} \Rightarrow H\left(\frac{31}{25};\frac{17}{25}\right) \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

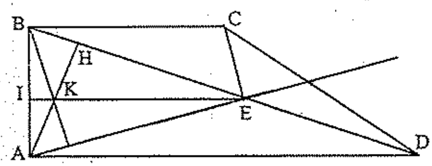
Với $t=\frac{8}{5} \Rightarrow H\left(\frac{11}{5};\frac{13}{5}\right)$ (thỏa mãn)

Ta có: $\overrightarrow{AH}=\left(\frac{6}{5};\frac{3}{5}\right) \Rightarrow BC$ nhận $\vec{n}=(2;1)$ là VTPT

$\Rightarrow$ phương trình BC là: $2x+y-7=0$

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A, B và AD = 2BC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường chéo BD và E là trung điểm của đoạn HD. Giả sử $H(-1;3)$, phương trình đường thẳng $AE: 4x+y+3=0$ và $C\left(\frac{5}{2};4\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B và D của hình thang ABCD.

Hướng dẫn



- Qua E dựng đường thẳng song song với AD cắt AH tại K và cắt AB tại I
 Suy ra: +) K là trực tâm của tam giác ABE, nên $BK \perp AE$.
 +) K là trung điểm của AH nên $KE \mathbin{/\!/}= \frac{1}{2}AD$ hay $KE \mathbin{/\!/}= BC$

Do đó: $CE \perp AE \Rightarrow$ CE: $2x - 8y + 27 = 0$

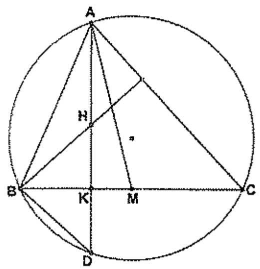
Mà $E = AE \cap CE \Rightarrow E\left(-\frac{3}{2};3\right)$, mặt khác E là trung điểm của HD nên $D(-2;3)$

- Khi đó BD: y - 3 = 0, suy ra AH: x + 1 = 0 nên A(-1; 1).
- Suy ra AB: x - 2y +3=0. Do đó: B(3; 3).

KL: A(-1; 1), B(3; 3) và D(-2; 3)

Bài 6. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn ABC. Đường thẳng chứa đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A và đường thẳng BC lần lượt có phương trình là $3x+5y-8=0,\ x-y-4=0$. Đường thẳng qua A vuông góc với đường thẳng BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là $D(4;-2)$. Viết phương trình các đường thẳng AB, AC; biết rằng hoành độ của điểm B không lớn hơn 3.

Hướng dẫn



Gọi M là trung điểm của BC, H là trực tâm tam giác ABC, K là giao điểm của BC và AD, E là giao điểm của BH và AC. Ta kí hiệu $\overrightarrow{n_d}, \overrightarrow{u_d}$ lần lượt là vtpt, vtcp của đường thẳng d. Do M là giao điểm của AM và BC nên tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y-4=0 \\ 3x+5y-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$$

AD vuông góc với BC nên $\overrightarrow{n_{AD}}=\overrightarrow{u_{BC}}=(1;1)$, mà AD đi qua điểm D suy ra phương trình của $AD: 1(x-4)+1(y+2)=0 \Leftrightarrow x+y-2=0$. Do A là giao điểm của AD và AM nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x+5y-8=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$$

Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y-4=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow K(3;-1)$$

Tứ giác HKCE nội tiếp nên $\widehat{BHK}=\widehat{KCE}$, mà $\widehat{KCE}=\widehat{BDA}$ (nội tiếp chắn cung $\overparen{AB}$)
Suy ra $\widehat{BHK}=\widehat{BDK}$, vậy K là trung điểm của HD nên $H(2;4)$.
(Nếu hs thừa nhận H đối xứng với D qua BC mà không chứng minh, **trừ 0.25 điểm**)

Do B thuộc BC $\Rightarrow B(t;t-4)$, kết hợp với M là trung điểm BC suy ra $C(7-t;3-t)$.
$\overrightarrow{HB}(t-2;t-8);\overrightarrow{AC}(6-t;2-t)$. Do H là trực tâm của tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow (t-2)(6-t)+(t-8)(2-t)=0 \Leftrightarrow (t-2)(14-2t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=7 \end{array}\right.$$

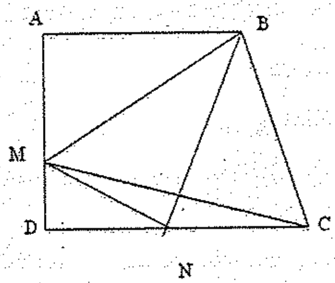
Do $t \le 3 \Rightarrow t=2 \Rightarrow B(2;-2), C(5;1)$. Ta có

$$\overrightarrow{AB}=(1;-3),\ \overrightarrow{AC}=(4;0) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}}=(3;1), \overrightarrow{n_{AC}}=(0;1)$$

Suy ra $AB: 3x+y-4=0;\ AC: y-1=0.$

Bài 7. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có $AB=AD<CD$, điểm $B(1;2)$, đường thẳng đường thẳng BD có phương trình là $y-2=0$.. Đường thẳng qua B vuông góc với BC cắt cạnh AD tại M. Đường phân giác trong góc MBC cắt cạnh DC tại N. Biết rằng đường thẳng MN có phương trình $7x-y-25=0$. Tìm tọa độ đỉnh D.

Hướng dẫn



Tứ giác $BMDC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BMC}=\widehat{BDC}=\widehat{DBA}=45^0$

$\Rightarrow \Delta BMC$ vuông cân tại B, BN là phân giác trong $\widehat{MBC}$

$\Rightarrow M, C$ đối xứng qua BN

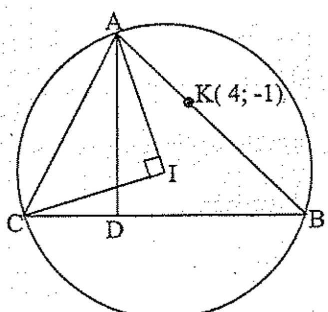
$\Rightarrow AD=d(B,CN)=d(B,MN)=\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

$BD: y-2=0 \Rightarrow D(a;2)$,

$BD=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5 \Rightarrow D(5;2) \\ a=-3 \Rightarrow D(-3;2)\ (\textit{loai cung phia B so voi MN}) \end{array}\right.$

Vậy có một điểm thỏa mãn là: $D(5;2)$

Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có I(1; - 2)là tâm đường tròn ngoại tiếp và $\widehat{AIC}=90^0$. Hình chiếu vuông góc của A trên BC là D(- 1; - 1). Điểm K(4; - 1) thuộc đường thẳng AB. Tìm tọa độ các đỉnh A, C biết điểm A có tung độ dương.



Do $\widehat{AIC}=90^0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{ABC}=45^0 \\ \widehat{ABC}=135^0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \widehat{ABD}=45^0$ nên ΔADB vuông cân tại D

do đó DA = DB. Lại có: IA = IB $\Rightarrow DI \perp AB$

Nên đường thẳng AB đi qua (4; - 1) và vuông góc với DI có phương trình $2x-y-9=0$. Gọi $A(a;2a-9)\in AB$, do

$DA=\sqrt{2}d(D;AB)=2\sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{(a+1)^2+(2a-8)^2}=2\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow a^2-6a+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(1;-7)\ (\textit{loại}) \\ A(5;1)\ (t/m) \end{array}\right.$

Phương trình DB đi qua D có VTPT $\overrightarrow{AD}: 3x+y+4=0$

$C \in DB \Rightarrow C(c;-3c-4)$. Do ΔIAC vuông cân tại I nên

$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}=0 \Leftrightarrow 4(c-1)-3(3c+2)=0 \Leftrightarrow c=-2 \Rightarrow C(-2;2)$

Bài 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn $(C): x^2+y^2-3x-5y+6=0$. Trực tâm của tam giác ABC là $H(2;2)$ và đoạn $BC=\sqrt{5}$.

Tìm tọa độ các điểm A,B,C biết điểm A có hoành độ dương .

Hướng dẫn

Gọi tâm đường tròn (C) là $I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ và A(x;y) suy ra $\overrightarrow{AH}(2-x;2-y)$ M là trung điểm của BC , tính được $AH=\sqrt{5} \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+3=0$

kết hợp với A thuộc đường tròn (C) nên ta có hệ phương trình

$\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+3=0 \\ x^2+y^2-3x-5y+6=0 \end{cases}$ Giải hệ ta được (x;y)=(0;3) (loại);Hoặc(x;y)=(1;4) (Nhận)

Suy ra toạ độ của A(1;4) ,chứng minh được $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}$

Từ $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}$ ta tính được M(2;3/2) Do (BC) vuông góc với IM nên ta viết được phương trình (BC): x-2y+1 =0 <=> x= 2y-1 thay vào phương trình đường tròn (C) ta được $(2y-1)^2+y^2-3(2y-1)-5y+6=0 \Leftrightarrow y^2-3y+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Suy ra toạ độ của B(1;1) , C(3;2) hoặc B(3;2) , C(1;1)

Vậy A(1;4), B(1;1) , C(3;2) hoặc A(1;4), B(3;2) , C(1;1)

Bài 10. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có AB=2BC. Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng BD; E,F lần lượt là trung điểm đoạn CD và BH. Biết A(1;1), phương trình đường thẳng EF là 3x – y – 10 = 0 và điểm E có tung độ âm.

Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.

Hướng dẫn

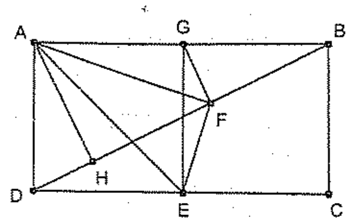
Gọi E,F,G lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng CD, BH AB. Ta chứng minh $AF \perp EF$.

Ta thấy các tứ giác ADEG và ADFG nội tiếp nên tứ giác ADEF cũng nội tiếp, do đó $AF \perp EF$.

Đường thẳng AF có pt: x+3y-4=0. Tọa độ điểm F là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x-y=10 \\ x+3y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{17}{5} \\ y=\frac{1}{5} \end{cases} \to F\left(\frac{17}{5};\frac{1}{5}\right) \to AF=\sqrt{\frac{32}{5}}$$

$\Delta AFE \sim \Delta DCB \to EF = \dfrac{1}{2}AF = 2\sqrt{\dfrac{2}{5}};$



$E(t;3t-10) \to EF^2 = \dfrac{8}{5} \Leftrightarrow \left(t-\dfrac{17}{5}\right)^2 + \left(3t-\dfrac{51}{5}\right)^2 = \dfrac{8}{5}$

$\Leftrightarrow 5t^2 - 34t + 57 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \vee t = \dfrac{19}{5}$

hay $E(3;-1) \vee E\left(\dfrac{19}{5};\dfrac{7}{5}\right)$

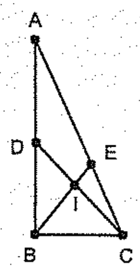
Theo giả thiết ta được $E(3;-1)$, pt AE: x+y-2=0. Gọi D(x;y), tam giác ADE vuông cân tại D nên $\begin{cases} AD = DE \\ AD \perp DE \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2 \\ (x-1)(x-3) = (y-1)(y+1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x-2 \\ (x-1)(x-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ hay D(1;-1) $\vee$ D(3;1)

Vì D và F nằm về hai phía so với đường thẳng AE nên D(1;-1).
Khi đó, C(5;-1); B(1;5). Vậy B(1;5); C(5;-1) và D(1;-1).

Bài 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại B, AB=2BC, D là trung điểm của AB, E thuộc đoạn AC sao cho AC=3EC, biết phương trình đường thẳng CD: x-3y+1=0 , $E(\frac{16}{3};1)$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

Hướng dẫn



Gọi $I = BE \cap CD$

$\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{EA}{EC} \Rightarrow$ E là chân đường phân giác trong góc ABC

$BD = BC \Rightarrow BE \perp CD \Rightarrow BE: 3x + y - 17 = 0$.

$I = BE \cap CD \Rightarrow$ Tọa độ $I(5;2)$

Đặt $BC = x > 0 \Rightarrow AB = 2x; AC = x\sqrt{5}; EC = \dfrac{x\sqrt{5}}{3}$

$\left.\begin{array}{l} \angle CEB = 45^0 \Rightarrow IC = IB = BC.\cos 45^0 = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \\ IE^2 = CE^2 - CI^2 \Rightarrow IE = \dfrac{x}{3\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{IB} = -3\overline{IE} \Rightarrow B(4;5)$

$C \in CD \Rightarrow C(3a-1;a)$

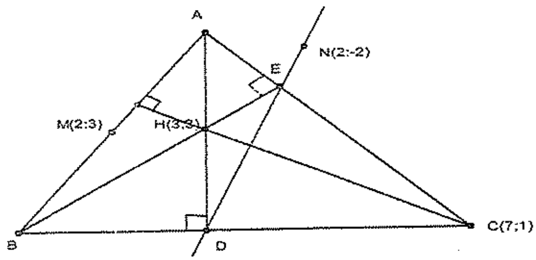
$BC = BI\sqrt{2} \Rightarrow BC = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 3 \end{array}\right.$

Với a=1 thì $C(2;1), A(12;1)$

Với a=3 thì $C(8;3), A(0;-3)$

Bài 12 Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc (Oxy). Cho tam giác ABC có trực tâm $H(3;3)$, đỉnh $C(7;1)$ và các đường cao AD, BE (D, E là các chân đường cao). Hãy tìm tọa độ các đỉnh A và B, biết rằng trung điểm của cạnh AB là điểm $M(2;3)$ và đường thẳng DE đi qua điểm $N(2;-2)$.

Hướng dẫn



Ta có tứ giác CDHE nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp chính là đường tròn đường kính HC suy ra phương trình là $(C):(x-5)^2+(y-2)^2=5 \Leftrightarrow x^2+y^2-10x-4y+24=0$

Đường thẳng AB đi qua điểm M và nhận $\overrightarrow{HC}=(4;-2)$ làm vtpt nên $AB: 2x-y-1=0$.

Gọi $A(t;2t-1) \Rightarrow B(4-t;7-2t)$. Ta có tứ giác AEDB nội tiếp và đường tròn này nhận AB làm đường kính nên pt là $(C'): x^2+y^2-4x-6y+13-5(t-2)^2=0$.

Do D, E là giao điểm của (C) và (C') nên phương trình đường thẳng DE là:

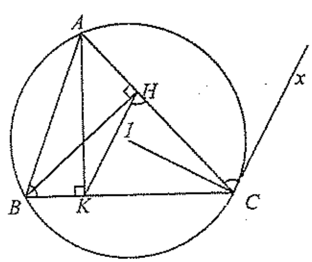
$-6x+2y+11+5(t-2)^2=0$.

Do đường thẳng DE đi qua điểm $N(2;-2)$ nên ta

có: $-12-4+11+5(t-2)^2=0 \Leftrightarrow t=3; t=1$. Từ đó $A(3;5), B(1;1)$ hoặc $A(1;1), B(3;5)$

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2=25$. Các điểm K(-1 ; 1), H(2; 5) lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B của tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng đỉnh C có hoành độ dương.

Hướng dẫn



(T) có tâm $I(1;2)$. Gọi Cx là tiếp tuyến của (T) tại C.

Ta có $\widehat{HCx}=\widehat{ABC}=\frac{1}{2}$ Sđ $\overset{\frown}{AC}$ (1)

Do $\widehat{AHB}=\widehat{AKB}=90^0$ nên $AHKB$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{ABC}=\widehat{KHC}$ (cùng bù với góc $\widehat{AHK}$) (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{HCx}=\widehat{KHC} \Rightarrow HK \parallel Cx$.

Mà $IC \perp Cx \Rightarrow IC \perp HK$.

Do đó IC có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{KH}=(3;4)$, IC có phương trình $3x+4y-11=0$

Do C là giao của IC và (T) nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ

$\begin{cases}3x+4y-11=0\\(x-1)^2+(y-2)^2=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\y=-1\end{cases};\begin{cases}x=-3\\y=5\end{cases}$. Do $x_C>0$ nên $C(5;-1)$

Đường thẳng AC đi qua C và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{CH}=(-3;6)$ nên AC có phương trình $2x+y-9=0$.

Do A là giao của AC và (T) nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ
$\begin{cases}2x+y-9=0\\(x-1)^2+(y-2)^2=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=7\end{cases};\begin{cases}x=5\\y=-1\end{cases}$(loại). Do đó $A(1;7)$

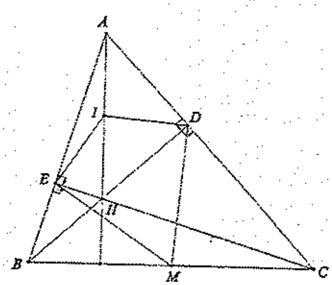
Đường thẳng BC đi qua C và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{CK}=(-6;2)$ nên BC có phương trình $x+3y-2=0$.

Do B là giao của BC và (T) nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ
$\begin{cases}x+3y-2=0\\(x-1)^2+(y-2)^2=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-4\\y=2\end{cases},\begin{cases}x=5\\y=-1\end{cases}$(loại). Do đó $B(-4;2)$

Vậy $A(1;7)$; $B(-4;2)$; $C(5;-1)$.

Bài 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh A(-1;5) và điểm M(0;-2) là trung điểm cạnh BC. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh B và C. Đường phân giác của góc $\widehat{DME}$ cắt đường cao hạ từ đỉnh A tại điểm I(0;3). Tìm toạ độ các đỉnh B, C biết rằng điểm B có hoành độ âm.

Hướng dẫn



Giả sử I là trung điểm AH, ta chứng minh MI là phân giác góc DME.

Tam giác EAH vuông có $EI=\frac{1}{2}AH$. Tương tự tam giác ADH có $DI=\frac{1}{2}AH$.

Do đó $EI=DI$ (1).

Lại có tam giác BEC vuông tại E, tam giác BDC vuông tại D có $ME=MB=MC=MD$ (2).

Từ (1),(2) ta có MI là phân giác góc DME.

Phương trình đường cao AH đi qua A,I là $2x+y-3=0$.

Đường thẳng BC đi qua M(0;-2) và vuông góc AH là $x-2y-4=0$.
Vì I là trung điểm AH nên H(1;1), gọi B(2b+4;b) thuộc BC. Vì M là trung điểm BC nên
C(-2b-4;-4-b).

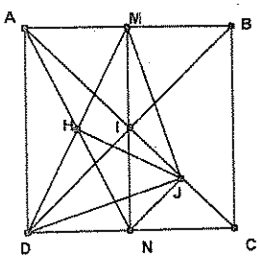
$$\overrightarrow{AC}=(-2b-3;-b-9),\overrightarrow{HB}=(2b+3;b-1)\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB}=0\Leftrightarrow -(2b+3)^2+(b-1)(-b-9)=0$$

Ta có $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-4 \\ b=0 \end{array}\right. \Rightarrow B(-4;-4),C(4;0)$

Vậy B(-4;-4) và C(4;0).

Bài 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có tâm I. Trung điểm cạnh AB là $M(0;3)$, trung điểm đoạn CI là $J(1;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông, biết đỉnh D thuộc đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$.

Hướng dẫn



Gọi *N* là trung điểm *CD* và *H* là tâm hình chữ nhật *AMND*. Gọi (*C*) là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật *AMND*. Từ giả thiết, suy ra *NJ//DI*, do đó *NJ* vuông góc với *AC*, hay *J* thuộc (*C*) (vì *AN* là đường kính của (*C*)). Mà *MD* cũng là đường kính của (*C*) nên *JM* vuông góc với *JD*. (1)

D thuộc Δ nên $D(t;t+1)\Rightarrow \overrightarrow{JD}(t-1;t+1),\overrightarrow{JM}(-1;3)$. Theo (1)

$\overrightarrow{JD}.\overrightarrow{JM}=0\Leftrightarrow -t+1+3t+3=0\Rightarrow t=-2\Rightarrow D(-2;-1)$.

Gọi a là cạnh hình vuông ABCD. Tính được

$$DM=\sqrt{JD^2+JM^2}=2\sqrt{5}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}\Rightarrow a=4.$$

Gọi $A(x;y)$. Vì $\begin{cases} AM=2 \\ AD=4 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x^2+(y-3)^2=4 \\ (x+2)^2+(y+1)^2=16 \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2;y=3 \\ x=\frac{6}{5};y=\frac{7}{5} \end{array}\right.$

- Với $A(-2;3)\Rightarrow B(2;3)\Rightarrow I(0;1)\Rightarrow C(2;-1)\Rightarrow J(1;0)$ (thỏa mãn)

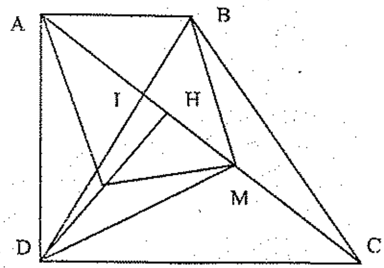
- Với

$$A\left(\frac{6}{5};\frac{7}{5}\right)\Rightarrow B\left(-\frac{6}{5};\frac{23}{5}\right)\Rightarrow I\left(\frac{-8}{5};\frac{9}{5}\right)\Rightarrow C\left(\frac{-22}{5};\frac{11}{5}\right)\Rightarrow J(-3;2)$$ (loại).

Vậy tọa độ các đỉnh hình vuông là $A(-2;3),B(2;3),C(2;-1),D(-2;-1)$.

Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D, D(2; 2) và CD = 2AB. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên AC. Điểm $M\left(\frac{22}{5};\frac{14}{5}\right)$ là trung điểm của HC. Xác định các tọa độ các điểm A, B, C của hình thang biết B thuộc đường thẳng $\Delta: x-2y+4=0$

Hướng dẫn



Gọi E là trung điểm DH ta thấy ABME là hình bình hành nên $ME \perp AD$, nên E là trực tâm tam giác ADM

$\Rightarrow AE \perp MD$ mà $AE \perp BM$ nên $DM \perp BM$

Từ đó suy ra phương trình $BM: 3x + y = 16$

Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x + y = 16 \end{cases} \Rightarrow B(4;4)$

Gọi I là giao điểm của AC và BD, ta có $\frac{AB}{CD} = \frac{IB}{IC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{DI} = 2\overline{IB} \Rightarrow I(\frac{10}{3}; \frac{10}{3})$

Phương trình đường thẳng $AC: x + 2y = 10$

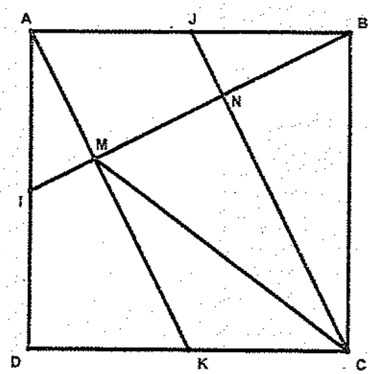
Phương trình đường thẳng $DH: 2x - y = 2$ suy ra tọa độ $H(\frac{14}{5}; \frac{18}{5})$ suy ra tọa độ

C(6;2)

Từ $\overline{CI} = 2\overline{IA} \Rightarrow A(2;4)$

Bài 17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy Cho hình vuông ABCD có điểm C(2; -2). Gọi điểm I, K lần lượt là trung điểm của DA và DC; M(-1; -1) là giao của BI và AK. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông ABCD biết điểm B có hoành độ dương.

Hướng dẫn



Gọi J là trung điểm của AB. khi đó AJCK là hình bình hành $\Rightarrow$ AK // CJ.

Gọi CJ $\cap$BM = N $\Rightarrow$ N là trung điểm của BM.

Chứng minh được AK $\perp$ BI từ đó suy ra tam giác BMC là tam giác cân tại C.

Ta có $\overline{MC}(3;-1) \Rightarrow |\overline{MC}| = \sqrt{10}$

$\Rightarrow$ CM = BM = AB = $\sqrt{10}$

Trong tam giác vuông ABM có

$AB^2 = BM.BI = BM.\sqrt{AB^2 + AI^2} = BM.AB\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow BM = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ B là giao của hai đường tròn (C; $\sqrt{10}$) và (M; $2\sqrt{2}$). Tọa độ điểm B thỏa mãn:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+2)^2=10\\(x+1)^2+(y+1)^2=8\end{cases} \Rightarrow B(1;\ 1).$$

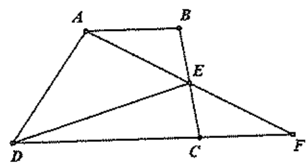
Phương trình đường thẳng AB có dạng: x - 3y + 2 = 0.

Phương trình đường thẳng AM có dạng: x + y + 2 = 0.

$\Rightarrow$ A (-2; 0). Ta có $\overline{BA}=\overline{CD} \Rightarrow D(-1;-3)$.

Bài 18. Cho hình thang ABCD có AB // CD, CD = 2AB, D(–7; 3), trung điểm của BC là E(4; 5), đỉnh A thuộc đường thẳng
(d): x + 4y – 1 = 0 và diện tích hình thang là 30. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết A có tọa độ nguyên.

Hướng dẫn



Ta có A $\in$ (d) $\Rightarrow$ A(1 – 4a; a).

Gọi F là giao điểm của AE và DC

$\Rightarrow$ E là trung điểm AF

$\Rightarrow$ Δ ABE = Δ FCE

$\Rightarrow$ $S_{ABCD} = S_{ADF}$

$= 2S_{ADE} \Rightarrow S_{ADE} = 15$.

Ta có $\overline{DE}=(11;2)$ là vtcp của DE

$\Rightarrow$ DE: $\frac{x-4}{11}=\frac{y-5}{2}$ $\Rightarrow$ DE: 2x – 11y + 47 = 0.

$$d(A;\ DE) = \frac{|2(1-4a)-11a+47|}{\sqrt{2^2+11^2}}=\frac{|-19a+49|}{\sqrt{125}}$$

Do đó: $\frac{1}{2}DE.d(A;DE)=15 \Leftrightarrow \sqrt{125}.\frac{|-19a+49|}{\sqrt{125}}=30$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-19a+49=30\\-19a+49=-30\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\b=\frac{79}{19}\end{array}\right.$$. Vậy A(–3; 1).

E là trung điểm AF $\Rightarrow$ F(11; 9) $\Rightarrow$ $\overline{DF}$ = (18; 6) = 6(3; 1)

$\Rightarrow \frac{x+7}{3}=\frac{y-3}{1}$ $\Rightarrow$ DF: x – 3y + 16 = 0 $\Rightarrow$ C(3c – 16; c)

Ta có $\overline{AB}$ = (27 – 3c; 9 – c)

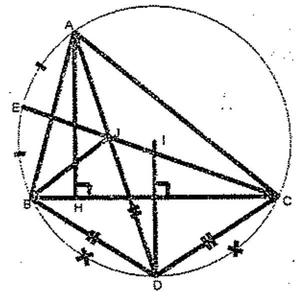
$\overline{DC}$ = (3c – 9; c – 3) = 2$\overline{AB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3c-9=54-6c\\c-3=18-2c\end{cases} \Leftrightarrow c = 7.$$ Vậy C(5; 7).

E là trung điểm BC $\Rightarrow$ B(3; 3)

Bài 19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ (Oxy), cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm $J(2;1)$. Biết đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC có phương trình : $2x+y-10=0$ và $D(2;-4)$ là giao điểm thứ hai của AJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC biết B có hoành độ âm và B thuộc đường thẳng có phương trình $x+y+7=0$.

Hướng dẫn



AJ đi qua $J(2;1)$ và $D(2;-4)$ nên có phương trình $AJ: x-2=0$

$\{A\}=AJ\cap AH$, (trong đó H là chân đường cao xuất phát từ đỉnh A)

Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x-2=0\\2x+y-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=6\end{cases}\Rightarrow A(2;6)$$

Gọi E là giao điểm thứ hai của BJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có $\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{DC}\Rightarrow DB=DC$ và $\overset{\frown}{EC}=\overset{\frown}{EA}$

$\widehat{DBJ}=\frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{EC}+\text{sđ}\overset{\frown}{DC})=\frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{EA}+\text{sđ}\overset{\frown}{DB})=\widehat{DJB}\Rightarrow\Delta DBJ$ cân tại $D\Rightarrow$

$DC=DB=DJ$ hay D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC

Suy ra B,C nằm trên đường tròn tâm $D(2;-4)$ bán kính $JD=\sqrt{0^2+5^2}=5$ có phương trình $(x-2)^2+(y+4)^2=25$. Khi đó tọa độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+4)^2=25\\x+y+7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=-4\end{cases}\vee\begin{cases}x=2\\y=-9\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}B(-3;-4)\\B(2;-9)\end{array}\right.$$

Do B có hoành độ âm nên ta được $B(-3;-4)$

$$BC:\begin{cases}qua\ B(-3;-4)\\\perp AH\end{cases}\Rightarrow BC:\begin{cases}qua\ B(-3;-4)\\vtpt\ \vec{n}=\vec{u}_{AH}=(1;-2)\end{cases}\Rightarrow BC: x-2y-5=0$$

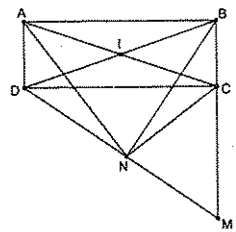
Khi đó tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+4)^2=25\\x-2y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=-4\end{cases}\vee\begin{cases}x=5\\y=0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}C(-3;-4)\equiv B\\C(5;0)\end{array}\right.\Rightarrow C(5;0)$$

Vậy $A(2;6), B(-3;-4), C(5;0)$

Bài 20. Cho hình chữ nhật ABCD có A(1;5), $AB=2BC$ và điểm C thuộc đường thẳng $d: x+3y+7=0$. Gọi M là điểm nằm trên tia đối của tia CB, N là hình chiếu vuông góc của B trên MD. Tìm tọa độ các điểm B và C biết $N(-\frac{5}{2};\frac{1}{2})$ và điểm B có tung độ nguyên.

Hướng dẫn



Gọi $I = AC \cap BD$

Do $BN \perp DM \Rightarrow IN = IB = ID$

$\Rightarrow IN = IA = IC$

$\Rightarrow \Delta ANC$ vuông tại N

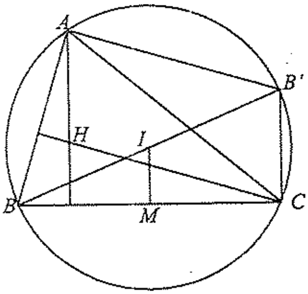
Đường thẳng CN qua $N\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ và nhận $\overrightarrow{NA} = \left(\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$ là pháp tuyến nên có phương trình: $7x+9y+13=0$. Do $C = CN \cap d \Rightarrow C(2;-3)$

Gọi $B(a;b)$. Do $AB = 2BC$ và $AB \perp BC$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(a-1)(a-2)+(b-5)(b+3)=0\\(a-1)^2+(b-5)^2=4\left[(a-2)^2+(b+3)^2\right]\end{cases}$$

Giải hệ trên suy ra $\left[\begin{array}{l}a=5, b=-1\\a=-\frac{7}{5}, b=-\frac{9}{5}\quad (ktm)\end{array}\right.$ Vậy $B(5;-1), C(2;-3.)$

Bài 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(-1;-3)$, trực tâm H(1; - 1) và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác I(2; - 2). Tìm tọa độ các đỉnh B, C của tam giác.



Gọi *BB'* là đường kính của đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác *ABC*.

Ta có $AH \perp BC, B'C \perp BC \Rightarrow AH // B'C$

Tương tự: $CH // AB'$. Do đó *AHB'C* là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$.

Gọi *M* là trung điểm của *BC*, suy ra *IM* là đường trung bình của tam giác *BCB'* nên $\overrightarrow{B'C} = 2\overrightarrow{IM}$.

Suy ra $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM} \Rightarrow \begin{cases}2 = 2(x_M-2)\\2=2(y_M+2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_M = 3\\y_M=-1\end{cases}$

Đường thẳng BC đi qua $M(3;-1)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM} = (1;1)$ nên có phương trình

$x-3+y+1=0 \Leftrightarrow x+y-2=0$

+) Đường tròn (C) có tâm I và bán kính $R = IA = \sqrt{10}$ nên có phương trình

$(x-2)^2+(y+2)^2=10$

+) Do B, C là giao của đường thẳng BC và đường tròn (C) nên tọa độ của B, C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}(x-2)^2+(y+2)^2=10 \ (1)\\ x+y-2=0 \quad (2)\end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow y=2-x$ thế vào (1) ta được $(x-2)^2+(4-x)^2=10 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=5\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\\ y=-3\end{array}\right.$. Vậy $B(1;1), C(5;-3)$ hoặc $B(5;-3), C(1;1)$.

Bài 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại B, $AB=2BC$. Gọi D là trung điểm của AB, E nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AC=3EC$. Biết phương trình đường thẳng chứa CD là $x-3y+1=0$ và điểm $E\left(\frac{16}{3};1\right)$. Tìm tọa độ các điểm A,B,C.

Hướng dẫn

Gọi $I=BE\cap CD$. Ta có $\frac{BA}{BC}=\frac{EA}{EC}$ nên E là chân phân giác trong góc B của tam giác ABC. Do đó $\widehat{CBE}=45^0 \Rightarrow BE\perp CD$

PT đường thẳng BE: $3x+y-17=0$.

Tọa độ điểm I t/m hệ $\begin{cases}3x+y-17=0\\ x-3y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\ y=2\end{cases} \Rightarrow I(5;2)$

Ta có $BI=CI=\frac{BC}{\sqrt{2}}, CE=\frac{1}{3}AC=\frac{BC\sqrt{5}}{3} \Rightarrow IE=\frac{BC}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \overline{IB}=-3\overline{IE}$

Từ đó tìm được tọa độ điểm B(4;5)

Gọi C(3a-1; a) ta có

$BC=\sqrt{2}BI=2\sqrt{5} \Rightarrow (3a-5)^2+(a-5)^2=20 \Leftrightarrow 10a^2-40a+30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\ a=3\end{array}\right.$

Với a =1 ta có C(2;1), A(12;1)

Với a=3 ta có C(8;3), A (0; -3)

Bài 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x+y+5=0$ và A(−4; 8). Gọi E là điểm đối xứng với B qua C, F(5; −4) là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng ED. Tìm tọa độ điểm C và tính diện tích hình chữ nhật ABCD.

Ta có $C\in d: 2x+y+5=0$ nên C(t; −2t − 5).

Ta chứng minh 5 điểm A, B, C, D, F cùng nằm trên đường tròn đường kính BD. Do tứ giác ABCD là hình chữ nhật thì AC cũng là đường kính của đường tròn trên, nên suy ra được $\widehat{AFC} = 90^0 \Leftrightarrow AC^2 = AF^2 + CF^2$. Kết hợp với gt ta có phương trình:

$(t+4)^2 + (-2t-13)^2 = 81 + 144 + (t-5)^2 + (-2t-1)^2 \Leftrightarrow t = 1$.

Từ đó ta được C(1; –7).

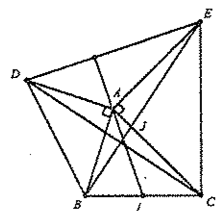
Từ giả thiết ta có AC // EF, BF $\perp$ ED nên BF $\perp$ AC, do C là trung điểm BE nên BF cắt và vuông góc với AC tại trung điểm.

Suy ra F đối xứng với B qua AC, suy ra ΔABC = ΔAFC

$\Rightarrow S_{ABC} = S_{AFC} \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{AFC} = 75$ (đvdt).

Bài 24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có góc A nhọn, điểm $I(4;2)$ là trung điểm đoạn BC, điểm A nằm trên đường thẳng $d: 2x - y - 1 = 0$. Dựng bên ngoài tam giác ABC các tam giác ABD, ACE vuông cân tại A. Biết phương trình đường thẳng $DE: x - 3y + 18 = 0$ và $BD = 2\sqrt{5}$ điểm D có tung độ nhỏ hơn 7. Xác định tọa độ các điểm A, B, C.

Hướng dẫn



Ta có

$2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{DE} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}\right)$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

$= AB.AE.\cos\widehat{BAE} - AC.AD.\cos\widehat{CAD} = 0$

$\Rightarrow AI \perp DE$

a. Phương trình đường thẳng AI: $3(x-4) + y - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 14 = 0$

Tọa độ điểm A thỏa mãn hệ $\begin{cases} 3x + y - 14 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(3;5)$.

$BD = 2\sqrt{5} \Rightarrow AD = \sqrt{10}$. Gọi $D(3a - 18; a)$ ta có

$AD = \sqrt{10} \Leftrightarrow (3a-21)^2 + (a-5)^2 = 10 \Leftrightarrow 10a^2 - 136a + 456 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{38}{5} (loại) \\ a = 6 \end{array}\right.$

$a = 6 \Rightarrow D(0;6)$

Đường thẳng AB đi qua $A(3;5)$, vtpt là $\overrightarrow{AD} = (-3;1)$ có phương trình

$-3(x-3) + y - 5 = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 4 = 0$

Gọi tọa độ điểm $B(b; 3b - 4)$ ta có

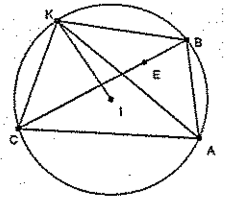
$AB = \sqrt{10} \Rightarrow (b-3)^2 + (3b-9)^2 = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 4 \\ b = 2 \end{array}\right.$

Với $b = 4 \Rightarrow B(4;8) \Rightarrow C(4;-4)$, loại do góc $\widehat{BAC}$ tù.

Với $b = 2 \Rightarrow B(2;2) \Rightarrow C(6;2)$, thỏa mãn.

Bài 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhận trục hoành làm đường phân giác trong của góc A, điểm $E(3;-1)$ thuộc đường thẳng BC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $x^2 + y^2 - 2x - 10y - 24 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết điểm A có hoành độ âm.

Hướng dẫn



Đường tròn ngoại tiếp có tâm I(1;5)

Tọa đôi điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 10y - 24 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \end{cases}$$

Do A có hoành độ âm suy ra A(-4;0).

Và gọi K(6;0),vì AK là phân giác trong góc A nên KB=KC, do đó $KI \perp BC$ và $\overrightarrow{IK}(-5;5)$ là vtpt của đường thăng BC.

$\Rightarrow BC: -5(x-3) + 5(y+1) = 0 \Leftrightarrow -x + y + 4 = 0$.

Suy ra tọa độ B, C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 10y - 24 = 0 \\ -x + y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vây A(-4;0), B(8;4), C(2;-2) và A(-4;0), C(8;4), B(2;-2) .

Bài 26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng BD là $H\left(-\frac{6}{5};\frac{7}{5}\right)$, điểm $M(-1;0)$ là trung điểm cạnh BC và phương trình đường trung tuyến kẻ từ A của tam giác ADH có phương trình là $7x + y - 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

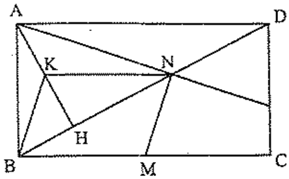
Gọi N, K lần lượt là trung điểm của HD và AH $\Rightarrow NK // AD$ và $NK = \frac{1}{2}AD$.

Do $AD \perp AB \Rightarrow NK \perp AB$.

Mà $AK \perp BD \Rightarrow K$ là trực tâm tam giác ABN.

Suy ra $BK \perp AN$ (1)

Vì M là trung điểm BC $\Rightarrow BM = \frac{1}{2}BC$.



Do đó $NK // BM$ và $NK = BM$

$\Rightarrow \lozenge BMNK$ là hình bình hành

$\Rightarrow MN // BK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN \perp AN$.

$\Rightarrow$ phương trình MN có dạng: $x - 7y + c = 0$.

$M(-1;0) \in MN \Leftrightarrow -1 - 7.0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$.

$\Rightarrow$ phương trình AM là: $x - 7y + 1 = 0$.

Mà $N = MN \cap AN \Rightarrow N\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$. Vì N là trung điểm HD $\Rightarrow D(2;-1)$.

Ta có: $\overrightarrow{HN} = \left(\frac{8}{5};-\frac{6}{5}\right)$

Do $AH \perp HN \Rightarrow$ AH đi qua H và nhận $\vec{n} = (4;-3)$ là 1 VTPT.

$\Rightarrow$ phương trình AH là: $4x - 3y + 9 = 0$.

Mà $A = AH \cap AN \Rightarrow A(0,3)$.

Ta có: $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2(-1 - x_B) \\ -4 = 2(0 - y_B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -2 \\ y_B = 2 \end{cases} \Rightarrow B(-2;2)$.

Vì M là trung điểm BC $\Rightarrow C(0;-2)$.

Vậy tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật là: $A(0;3), B(-2;2), C(0;-2), D(2;-1)$.

*Tổng kết

Như vậy là chúng ta vừa kết thúc chuyên đề này bằng 1 bài tập nhẹ nhàng, đến đây thì các em tự hỏi mình đã tiến bộ thêm chưa? Đủ tự tin để chinh chiến sa trường chưa?

Anh không biết nói gì hơn là một lời động viên hãy cố gắng chịu khó cày đào rèn luyện thì nhất định chúng ta sẽ học tốt hơn ! Có những kĩ năng gì về giải toán Oxy là anh truyền bí kíp cho các em rồi đó, tiếp theo chúng ta sẽ sang 1 phần ảo tung chảo cho những em muốn thử sức với điểm 10.

Bí Kíp Bất Đẳng Thức Như Lai Thần Trưởng

Version 2.0 Super Kill

I, Giới thiệu

Chào các em, khi các em đang đọc những dòng này là trên tay các em đang sở hữu tâm pháp công phá Bất Đẳng Thức đề THPT Quốc Gia bằng máy tính fx – 570 es, vn, vinacal plus. Bất Đẳng Thức luôn là một câu khó nhất trong đề Đại Học và số lượng 10 điểm hằng năm cũng không có nhiều, thế nhưng không có nghĩa là chúng ta từ bỏ, và đặc biệt là làm Toán rất dư thời gian kể cả là khi soát xong, vậy nên tại sao chúng ta không dành thời gian dư đó để kiếm thêm 0,25-0,5 điểm với học sinh khá, còn khá cứng thì hạ gục nó luôn.

Với tư cách là 1 người đi trước, đã từng được 10 môn Toán đề khối B năm 2013, hôm nay thì anh xin được chia sẻ những thủ thuật, những " mánh" của anh để chinh phục BĐT, và bật mí thêm là cấp 3 anh cũng học 1 trường bình thường của Huyện chứ không phải trường chuyên lớp chọn gì mà còn làm được BĐT.

Bí kíp này là 1 trong 4 bí kíp anh đã phát hành về môn Toán, trước khi đọc bí kíp này các em nên đọc thêm về Bí Kíp Hệ và Phương Trình, Bất phương trình để làm quen và vững chắc hơn.

II, Yêu cầu

1. Có thái độ học tập chăm chỉ, cần cù, không từ bỏ và tự tin vào bản thân
2. Có 1 chiếc máy tính cầm tay fx 570 es hoặc vn , vinacal

III, Nội dung

Phần 1 : Các kiến thức cơ bản cần nắm vững

1. Bất đẳng thức Cô-si cho 2 và 3 số không âm :

Đánh giá tổng với tích : $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ $\quad$ $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}$

Dạng phân số: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ $\quad$ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}$

Tổng và tổng bình phương: $2(x^2+y^2)\ge(x+y)^2\ge 4xy$ $\quad$ $3(x^2+y^2+z^2)\ge(x+y+z)^2\ge 9xyz$

Dấu "=" sảy ra tại $x=y$

Trong Bất đẳng thức này cần chú ý tới "Điểm rơi là dấu "=" xảy ra tại đâu điều này rất quan trọng để khi ta ghép cho đúng. Và BĐT này có trong sách giáo khoa lớp 10 do đó mà ta không cần phải chứng minh thêm và trong những năm gần đây BĐT này càng được sử dụng nhiều trong đề thi thử và ĐH.

2. Một số bất đẳng thức phụ cần biết:

Với $ab\ge 1$ thì $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\ge\frac{2}{1+ab}$ với $ab<1$ thì bất đẳng thức đổi chiều, dấu "=" xảy ra khi a=b=1

3. Phân tích cấu trúc bài Bất Đẳng Thức trong đề Đại Học

Trích câu 10 đề Toán THPT QG 2015 :

Cho các số thực a,b,c thuộc đoạn $[1;3]$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\frac{1}{2}abc$$

Tóm tắt bài toán: $\begin{cases} a,b,c \in [1;3] \\ a+b+c=6 \\ P=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\dfrac{1}{2}abc \end{cases} \rightarrow P_{max}=?$

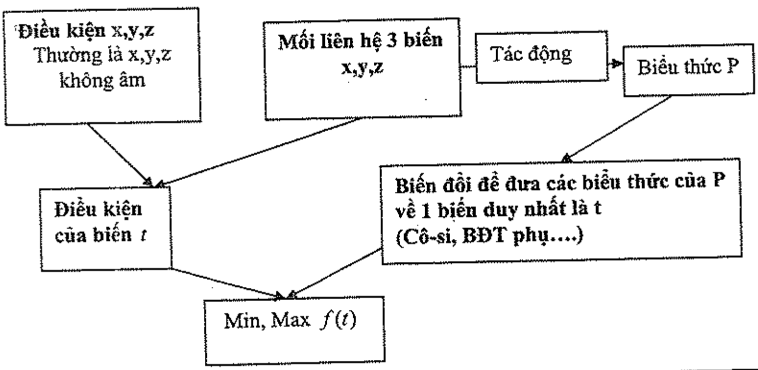
Rõ ràng thường thì các bài BĐT thi ĐH đều là 3 biến và họ thường cho không âm để các em có thể sử dụng Cô-si, bên cạnh đó thì họ cho 1 biểu thức liên hệ giữa 3 biến ở đây là $a+b+c=6$

Điều kiện này có 2 chức năng quan trọng sau :

+ Một là để đánh giá, biến đổi để đưa P thành 1 hàm duy nhất với 1 biến duy nhất là $P=f(t)$

+ Hai là để tìm điều kiện của biến t từ đó mới xét hàm được

3. Hướng làm 1 bài Bất Đẳng thức:



Mục tiêu của toàn bộ quy trình này là dồn từ 3 biến về 1 biến sử dụng các biến đổi tương đương hay bất đẳng thức cô- si hay BĐT phụ từ đó đưa P về 1 hàm số duy nhất, tiếp đó thì ta tìm điều kiện của biến và xét hàm là xong.
Đây là xu hướng chung các năm gần đây, và BGD thường cho dấu = 3 biến lệch nhau chứ không cho $x=y=z$ đâu như vậy mới hay và khó.

5. Vai trò của máy và cơ sở của phương pháp.

Nhiều bạn tự hỏi anh nói từ nãy tới giờ thì em máy ở đây có tác dụng gì?
Máy tính ở đây có tác dụng là tìm ra dấu " = " khi P đạt Max hay Min thì x , y, z bằng bao nhiêu? Từ đó ta dự đoán cách dồn biến để biến đổi P về biến đó, và điều quan trọng thứ 2 là để ta chắc chắn mỗi dấu = khi ta ghép các biến với nhau để không xảy ra tình trạng đánh giá không đúng

Ví dụ nhé, thường thấy xyz thì ta có các đánh giá sau:

$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ ở đây thì dấu "=" sảy ra tại $x=y=z$

Nhưng vấn đề là ở chỗ, khi ta bấm máy ra được kết quả P Max thì $x=3, y=2, z=1$ cơ

Thì khi đó ta lại sử dụng đánh giá khác $(x-2)+(y-1)+z \geq 3\sqrt[3]{(x-2)(y-1)z}$

Do đó mà việc biết dấu "=" của x,y,z tại đâu vô cùng lợi hại và quan trọng.

***Cơ sở của phương pháp:** Làm cách nào mà ta có có thể tìm được dấu "=" ??? Biểu thức kia 3 biến cơ mà?

Ta sẽ dễ dàng đưa P về 2 biến nhờ mối liên hệ giữa 3 biến và thật tình cờ và bất ngờ ta được hàm 2 biến lúc này ta chỉ việc coi 1 biến là tham số và 1 biến là ẩn chính.

Và khảo sát, đối với Đồ Long Casio ngoài tuyệt chiêu Solve thì skill Table trong trường hợp này áp dụng vô cùng tốt vào việc khảo sát giá trị hàm trên 1 đoạn.

Chúng ta sẽ cùng sang các ví dụ và phân tích cụ thể.

Loại 1: Dồn 3 biến thành 1 biến duy nhất

Đây thường là dạng khó, vì phải đánh giá cùng 1 lúc cả 3 biến nhưng nó lại có 1 cách làm chung, dấu hiệu nhận biết thường gồm đầy đủ điều kiện, mối liên hệ 3 biến và các biến không đối xứng cho lắm tức là a, b có thể đổi chỗ cho nhau nhưng a và c thì không

Mở màn là lễ thành hôn của boy cô đơn Casio và gái xinh 2015 miss BĐT :

Bài 1(THPT QG – 2015): Cho các số thực a,b,c thuộc đoạn $[1;3]$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\dfrac{1}{2}abc$

Phân tích:

Nhìn vào bài này, nhiều em thấy ngay a,b,c đối xứng tức là thay đổi vai trò được cho nhau và Gia Cát Dự

$a=b=c=2\in[1;3]$ thấy rất là hợp lý, và cứ hồn nhiên đánh giá với dấu "=" như vậy, kaka

Và mọi sự cố gắng đổ suống sông xuống bể.

Đầu tiên, ta sẽ thế $c=6-a-b$ vào P để được biểu thức có 2 ẩn a,b

Ý tưởng: Ta sẽ cho a chạy từ 1 tới 3 và b cố định để xem P tăng lên hay giảm đi, có giá trị nào đẹp không?

Sau đó ta lại tăng b lên và cho a chạy xem có cái nào đẹp không :D

***Ban đầu**

Chọn a =X, b =1, c =5 - X ta có:

$$P=\frac{X^2+(1+X^2)(5-X)^2+12X(5-X)+72}{X+(1+X)(5-X)}-\frac{X(5-X)}{2}$$

Các em chú ý là nên viết gọn biểu thức P lại $b^2c^2+c^2a^2=c^2(a^2+b^2)$ để đỡ tốn kí tự đề phòng bị đầy kí tự

Sau đó các em bấm **Mode 7** để vào tính năng **Table**

Sau đó nhập hàm

$$f(x)=\frac{X^2+(1+X^2)(5-X)^2+12X(5-X)+72}{X+(1+X)(5-X)}-\frac{X(5-X)}{2}$$

Đối với máy 570 es plus thì chỉ có hàm f(x) còn riêng 570 vn plus thêm g(x)
Với a=X, b=2, c =4 - X

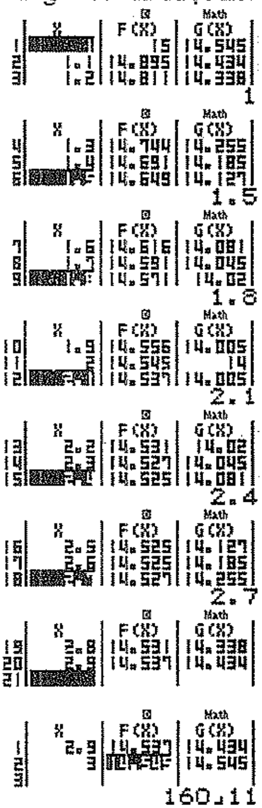
$$g(x)=\frac{4X^2+(4+X^2)(4-X)^2+12.2.X(4-X)+72}{2X+(2+X)(4-X)}\cdot\frac{2X(4-X)}{2}$$

Máy es không có g(x) thì tí nhập lại Với Start 1 = End 2.9 = và Step 0,1 =
Trong bí kíp này anh hướng dẫn theo máy 570 vn plus bởi nó có 2 bảng rất tiện lợi cho việc so sánh các giá trị và đẩy mạnh tốc độ lên 2 lần
Giải thích: Table là 1 hàm thống kê giá trị của hàm số theo giá trị của biến, với **Start** là giá trị khởi đầu của biến, **End** là giá trị kết thúc, trong đó **Step** là bước nhảy là khoảng các giữa 2 giá trị liên tiếp của biến

Và ghi nhớ 1 điều Table chỉ có thể tính tối đa **30 giá trị**.

Mà từ 1 tới 3 là 31 giá trị do có thêm số 0 nên ta chỉ cần tính từ 1 tới 2.9 em nào cẩn thận thì tính nốt 3 nữa

Chúng ta sẽ thu được kết quả như sau:



Với a=X, b=1, c =5 – X
Ta sẽ soi các giá trị đẹp trước:

$X=1\to f(X)=15; X=2, X=3\to f(X)=\frac{160}{11}; X=2,5\to f(X)=14,525$

Trong 3 cái này thì cái X=1 là lớn nhất nhưng c = 4 mà $c\in[1;3]$ do đó loại

Và lớn nhất trong mấy giá trị đẹp là tại X=2 và X=3

Đáng nhẽ ngay từ đầu ta để nó chạy từ 2 → 3 thì đỡ phải thêm lần nữa vì $c\le 3\to X\ge 2$ (nhưng do cái G(X) kia không cần $X\ge 2$ mà ta bấm cùng 1 lượt nên cứ phải đưa vào cho đủ đoạn cần xét)

Nhìn tổng quát từ $2\to 3$ thấy X tăng thì F(X) giảm dần rồi tăng lên và rõ ràng nó lớn nhất tại 2 đầu mút X=2 và X=3

Vậy a=2,b=1,c=3 hoặc a=3,b=1,c=2 thì P = 160/11

Với a=X, b=2, c =4 – X

Ta lại soi các girl xinh :

Ngay dòng đầu lại là $X=1\to P=160/11$

$X=2\to P=14\quad X=3\to P=160/11$

Ta lại nhận thấy rằng khi X tăng từ $1\to 2$ thì G(X) giảm còn $2\to 3$ thì lại tăng, do đó giá trị lớn nhất vẫn ở 2 đầu mút là X=1, X=3

Vậy : a=1,b=2,c=3 hoặc a=3,b=2,c=1

(nói thêm tại chỗ a=b=c=2 là Min chứ ko phải Max)

Nếu các em cẩn thận hơn thì cứ cho $b\to 1\to 1,5\to 2\to 2,5\to 3$

Nhưng như vậy sẽ hơi lâu, nên chú ý vào các giá trị đẹp.

Khi nhận xét bảng thì nhìn cả theo chiều dọc là a=X tăng thì sao? Và theo chiều ngang thì b tăng thì sao?

Ở bài này ta thấy ngay nó cứ quanh quẩn đi các hoán vị của $a=1, b=2, c=3$

Vậy là sau một thời gian thống kê khoảng 10 phút chúng ta đã có $a=1, b=2, c=3$
Do đó mà chứng minh $a=b=c$ là 1 sai lầm.
Ta dồn 3 biến thành 1 dựa vào P thì có 3 cách sau
$t=abc=6$ hoặc $t=ab+bc+ca=11$ hoặc $t=a^2+b^2+c^2=14$
Xử lí điều kiện để xem ta được điều kiện của biến nào từ đó chọn nó làm biến cuối cùng

$$a,b,c\in[1;3]\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)(b-1)(c-1)\ge 0\\(3-a)(3-b)(3-c)\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1\ge 0\\3(ab+bc+ca)-abc-9(a+b+c)+27\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}ab+bc+ca\le abc+5\\3(ab+bc+ca)\ge abc+27\end{cases}\Rightarrow 2(ab+bc+ca)\ge 22\Leftrightarrow ab+bc+ca\ge 11$$

Vậy ở đây các em đặt t = ab+bc+ca hoặc t =abc đều được
Đặt $t=ab+bc+ca$
Ta mới chặn dưới nó, giờ phải chặn trên nữa
Theo Cô-si ta có : $36=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\ge 3(ab+bc+ca)\to t\le 12$ **vậy** $t\in[11;12]$
Chỗ này tìm thêm thôi chứ dấu "=" chỗ này là $a=b=c$ nhưng bài toán là t=11 chứ không phải t=12 nên không sao cả.
Tới đây mới được 0,25 thôi nhé , chỗ xử lí điều kiện là phải có kinh nghiệm
Ta đã biết là dấu bằng xảy ra tại đầu mút t = 11 giờ ép về cái hàm luôn nghịch biến là xong

$P=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\dfrac{abc}{2}$ **biến đổi về ẩn t**
$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ **làm ta nghĩ về**
$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc$
Bỗng dưng cho đẹp

$$\to\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}=\frac{t^2+72}{t}$$

$$\to\frac{abc}{2}\ge\frac{(ab+bc+ca)-5}{2}=\frac{t-5}{2}$$

Vậy : $P=\dfrac{t^2+72}{t}-\dfrac{abc}{2}\le\dfrac{t^2+72}{t}-\dfrac{t-5}{2}=f(t)$ **với** $t\in[11;12]$ **thôi giờ đạo hàm là xong.....**

$f'(t)=\dfrac{t^2-144}{2t^2}\le 0\forall t\in[11,12]\to P\le f(t)\le f(11)=\dfrac{160}{11}\to P_{max}=\dfrac{160}{11}$ khi $a=1, b=2, c=3$ và các hoán vị của bọn chúng.

Nhận xét: Đây là 1 bài chuẩn mực sử dụng tuyệt chiêu Casio để tìm dấu "=" của BĐT và từ đó định hướng bài làm, công cụ này hỗ trợ tăng 66% nội công cho các sĩ tử để chiến thắng trong cuộc chiến giành điểm 10 và trong đó 33% còn lại là kiến thức, kinh nghiệm tích lũy được và dĩ nhiên 1% là sự may mắn

Tiếp theo ta sang:

Bài 2 (A – 2014):Cho x, y, z là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$.

Tính giá trị lớn nhất của biểu thức.

$$P=\frac{x^2}{x^2+yz+x+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9}$$

Phân tích:

Dạng của bài này cũng tương tự bài trước, năm 2014 phân khối và đề khối A là khó nhất rồi, bài này thì vẫn dạng như bài kia nhưng cứng hơn 1 chút.

$$\begin{cases} x,y,z\ge 0 \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases} \to \begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ x,y,z\le\sqrt{2}\sim 1,4<1,5 \end{cases}$$

Ở bài này các em lưu ý biểu thức P dài, anh đã bấm thử và không đủ số kí tự, vì máy tối đa là được khoảng 80 kí tự thôi những kí tự như bình phương hay căn và phân số khá là tốn bộ nhớ.

Nên bài này ta phải viết gọn : $\frac{y+z}{x+y+z+1}=1-\frac{x+1}{x+y+z+1}$ thay vì để $\frac{y+\sqrt{2-x^2-y^2}}{x+y+\sqrt{2-x^2-y^2}+1}$

- Với $x=X, y=0, z=\sqrt{2-X^2}$

$f(x)=\frac{X^2}{X^2+X+1}+1-\frac{X+1}{X+\sqrt{2-X^2}+1}-\frac{1}{9}$ tương tự Mode 7 Table với **Start 0 = , End 1,5 = , Step 0.1 =**

- Với $x=X, y=0,5, z=\sqrt{1,75-X^2}$

$$g(x)=\frac{X^2}{X^2+0,5\sqrt{1,75-X^2}+X+1}+1-\frac{X+1}{X+1,5+\sqrt{1,75-X^2}}-\frac{1+0,5\sqrt{1,75-X^2}}{9}$$

Ở bài này do đoạn nhỏ để nâng cao tính chính xác thì anh sẽ cho $y:0\to 0,5\to 1\to\sqrt{2}$

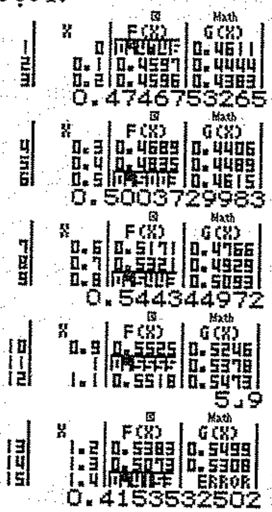
Xong đợt 1 ta ghi kết quả ra giấy nháp và làm đợt 2 :

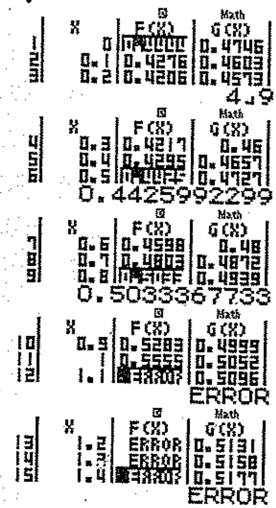
- Với $x=X, y=1, z=\sqrt{1-X^2}$:

$$f(x)=\frac{X^2}{X^2+\sqrt{1-X^2}+X+1}+1-\frac{X+1}{X+2+\sqrt{1-X^2}}-\frac{1+\sqrt{1-X^2}}{9}$$

- Với $x=X, y=\sqrt{2}, z=X$: $g(x)=\frac{X^2}{X^2+X\sqrt{2}+X+1}+1-\frac{X+1}{X+\sqrt{2}+X+1}-\frac{1+X\sqrt{2}}{9}$

Đợt 1: **Đợt 2:**





Nhận xét:

Ở Đợt 1:

Cột F(X) ta thấy các giá trị đẹp :

$X=1\to P=5/9$

Và nó là lớn nhất luôn , X tăng thì các giá trị lại giảm rồi lại tăng lên tới X=1 rồi lại giảm chứng tỏ đây là 1 cực đại

Cột G(X) thì không thấy giá trị đẹp và cũng không có giá trị nào lớp hơn 5/9

Đợt 2:

Cột F(X) ta thấy các giá trị đẹp :

$X=0\to P=4/9$ $X=1\to P=5/9$

X tăng thì F(X) giảm xong lại tăng tới 5/9 là không tăng được nữa

Cột G(X) ta không thấy giá trị nào đẹp và cũng không có giá trị nào lớn hơn 5/9

Vậy tóm lại: Max là 5/9 với $x=1,y=0,z=1$ Hoặc $x=1,y=1,z=0$

Vậy khả năng cao dồn biến $t=x+y+z=2$

Đặt : $t=x+y+z$

$0\le t^2=(x+y+z)^2\le 3(x^2+y^2+z^2)=6\to t\in[0,\sqrt{6}]$

Bây giờ ta xử lí $P=\dfrac{x^2}{x^2+yz+x+1}+\dfrac{y+z}{x+y+z+1}-\dfrac{1+yz}{9}\le f(t)$

Làm sao để đưa được về ẩn t, xử từng em 1 nhé:

$A=\dfrac{x^2}{x^2+yz+x+1}$ thay $x=1,y=0,z=1$ vào được $A=\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{x+y+z+1}=\dfrac{x}{x+y+z+1}$

$B=\dfrac{y+z}{x+y+z+1}$ **nếu đánh giá được cái A với** $\dfrac{x}{x+y+z+1}$ **thì A+B sẽ rất đẹp, ta thử xem:**

Cần chứng minh: $\dfrac{x^2}{x^2+yz+x+1}\le\dfrac{x}{x+y+z+1}$

$\Leftrightarrow x(x+y+z+1) \le x^2 + yz + x + 1$

$\Leftrightarrow xy + xz \le yz + 1$ **Ta cố ý nhân 2 để đưa nó về bình phương.**

$\Leftrightarrow 2xy + 2xz \le 2yz + 2$

$\Leftrightarrow 2 - 2xy - 2xz + 2yz \ge 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz \ge 0$ **@@ đúng quá, lại còn rất tự nhiên nữa, Đắng.....**

$\Leftrightarrow (x-y-z)^2 \ge 0$

$C = \frac{1+yz}{9} \ge ???(x+y+z)$ **Thay** $x=1, y=0, z=1$ được $C = \frac{1}{9} = \frac{x+y+z}{18} = \frac{(x+y+z)^2}{36}$

Đừng em nào dại dột $y^2 + z^2 \ge 2yz$ @@ nhé chú ý cài dấu "=" kìa

Ta biết thừa dấu = xảy ra khi $x = y + z$ **tức là ta cần sử dụng** $x^2 + (y+z)^2 \ge 2x(y+z)$

Tư duy 1 chút sẽ thấy như sau:

$x^2 + (y+z)^2 \ge 2x(y+z) \to 2 + 2yz \ge 2xy + 2xz$

$\to 2 + 4yz \ge 2xy + 2xz + 2yz$

$\to 2 + 4yz + (x^2 + y^2 + z^2) \ge 2xy + 2xz + 2yz + (x^2 + y^2 + z^2)$

$\to 4 + 4yz \ge (x+y+z)^2 \to 1 + yz \ge \frac{(x+y+z)^2}{4}$

Phần trên là phân tích ngược, giờ các em chỉ cần chứng minh ngược lại là được:

$(x+y+z)^2 = 2xy + 2xy + 2yz + (x^2 + y^2 + z^2) = 2x(y+z) + 2 + 2yz \le x^2 + (y+z)^2 + 2 + 2yz = 4 + 4yz$

$\to 1 + yz \ge \frac{(x+y+z)^2}{4}$

Ta có: $P \le \frac{x+y+z}{x+y+z+1} - \frac{(x+y+z)^2}{36} = \frac{t}{t+1} - \frac{t^2}{36} = f(t), t \in [0, \sqrt{6}]$

Đến đây có thể thở phào nhẹ nhõm ẵm gọn con 10 rồi @@

$f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{t}{18} = -\frac{(t-2)(t^2+4t+9)}{18(t+1)^2}$ $f'(t) = 0 \leftrightarrow t = 2$

$f(0) = 0; f(2) = \frac{5}{9}, f(\sqrt{6}) = \frac{31}{30} - \frac{\sqrt{6}}{5}$ **Lập BBT rồi suy ra**

$P \le f(t) \le \frac{5}{9} \to P_{Max} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=1, z=0 \\ x=1, y=0, z=1 \end{array}\right.$

Đề của khối A thường là các câu khó, ta sẽ cày tiếp 1 câu khối A

Bài 3 (ĐH-B2013) Cho *a, b, c là* các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}.$$

Phân tích:

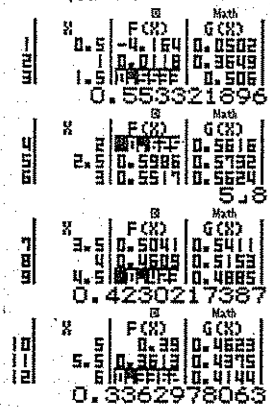
Ở những bài chỉ cho điều kiện $a,b,c > 0$ mà không cho mối liên hệ giữa a,b,c thì thường là $a = b = c$ nhưng vấn đề là nó bằng bao nhiêu?

Khi đó ta có $P = \frac{4}{\sqrt{3a^2+4}} - \frac{9}{2a\sqrt{9a^2}} = \frac{4}{\sqrt{3a^2+4}} - \frac{9}{6a^2}$ để cái căn kia nguyên thì a=2 là đẹp nhất

Ta sẽ check nhanh bằng máy xem a=b=c=2 đã là lớn nhất chưa
Với chúng khác nhau thì sao, ở đây Start các em cho 0,5 = vì nhập 0 là lỗi , End để hẳn 10 = ; Step 0,5 =
Với trường hợp $a \neq b \neq c$ thì các em cứ để tùy ý

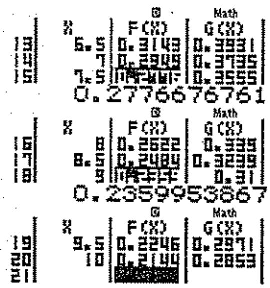
$a=b=c$

$$f(x)=\frac{4}{\sqrt{3a^2+4}}-\frac{9}{6a^2}$$



$a=X\neq b=1\neq c=2$:
cứ thay đổi tùy ý

$$g(x)=\frac{4}{\sqrt{a^2+9}}-\frac{9}{(a+1)\sqrt{(a+4).5}}$$



Nhận xét

Ta thấy tại $a=b=c=2$ kết quả vẫn là đẹp nhất và lớn nhất hội
Nên dự đoán của chúng ta là đúng.

Bây giờ chỉ cần ghép hợp lí để dồn biến về $t=a+b+c=6$ là xong

$$P=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}\leq f(t)$$

$A=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}\leq\frac{?}{a+b+c+?}$, thay a=b=c=2 được

A=1 $\rightarrow A=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}\geq\frac{8}{a+b+c+2}$

đo a=b=c=2 rồi nên ta nhớ lại đánh giá cũ chuối của chúng ta:

$$a^2+b^2+c^2+4=a^2+b^2+c^2+2^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{(c+2)^2}{2}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{a+b+c+2}{2}\right)$$

$$\rightarrow A=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}\leq\frac{8}{a+b+c+2}$$

$B=\frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}\geq\frac{?}{(a+b+c)^2}$ Thay thay a=b=c=2 được $B=\frac{3}{8}$

Với a=b=c hiển nhiên ta có $a+2c=b+2c$

$$(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}\leq(a+b)\frac{1}{2}[(a+2c)+(b+2c)]$$

$$=\frac{1}{6}(3a+3b)(a+b+4c)\leq\frac{1}{6}.\frac{1}{4}[4(a+b+c)]^2=\frac{2}{3}(a+b+c)^2$$

Chỗ này rất quan trọng nhé: $a+b+4c=a+b+2(a+b)=3(a+b)$ rồi áp dụng $xy\le\frac{(x+y)^2}{4}$

Do đó mà có động thái nhân thêm 3 để nó bảo toàn cái dấu "=" của BĐT

$$B=\frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}\ge 9.\frac{3}{2(a+b+c)^2}$$

$$\Rightarrow P=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}\le\frac{8}{t+2}-\frac{27}{2t^2}=f(t),t>0$$

$$f'(t)=-\frac{8}{(t+2)^2}+\frac{27}{t^3}$$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow 27(t+2)^2-8t^3=0\Leftrightarrow t=6$$

t	0		6		$+\infty$
f'(t)		+	0	-	
f(t)		↗	$\frac{5}{8}$	↘	

$P\le f(t)\le\frac{5}{8}$; $\max P=\frac{5}{8}$ xảy ra khi $a=b=c=2$.

Loại 2 : Dồn từ 3 biến thành 2 biến , rồi 2 biến thành 1 biến ; BĐT 2 biến

Đây là dạng đơn giản hơn, dạng này thường có dấu hiệu là có điều kiện của biến nhưng khuyết mối liên hệ giữa 3 biến hoặc mối liên hệ mờ nhạt, biểu thức cần tính thì có 2 biến đối xứng và thường chỉ cần chia đi 1 biến không đối xứng ta sẽ chỉ còn 2 biến và dồn về 1 biến nữa là xong.

1 nhận xét thêm nữa là những dạng này thường là ở dạng phân số và có tử và mẫu đồng bậc

Bài 1(ĐH - A2013) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$

Phân tích:

Điều kiện : $a,b,c>0$

Mối liên hệ: $(a+c)(b+c)=4c^2$ với mối liên hệ này ta khó lòng rút ra được ngay $c=??f(a,b)$

Nó cũng gợi ý nhỏ cho ta là chia đi vì 2 vế đồng bậc

$P=\frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$ gợi ý cho ta như sau:

$\frac{32a^3}{(b+3c)^3}\rightarrow$ **tử và mẫu đồng bậc nên thường chia đi, tương tự** $\frac{32b^3}{(a+3c)^3},\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$

Và chú ý là a,b có thể thay đổi cho nhau nhưng lại không thể thay cho c , nên thường ta chia cho c,c^2,c^3 tùy vào bậc của a,b

Vậy việc đầu tiên là chia đi và đổi 3 biến thành 2 biến:

$$\begin{cases} (a+c)(b+c)=4c^2 \\ P=\dfrac{32a^3}{(b+3c)^3}+\dfrac{32b^3}{(a+3c)^3}-\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{c} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (\dfrac{a}{c}+1)(\dfrac{b}{c}+1)=4 \\ \dfrac{32\left(\dfrac{a}{c}\right)^3}{[\left(\dfrac{b}{c}\right)+3]^3}+\dfrac{32\left(\dfrac{b}{c}\right)^3}{[\left(\dfrac{a}{c}\right)+3]^3}-\sqrt{\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2} \end{cases}$$ Đặt :

$x=\dfrac{a}{c}, y=\dfrac{b}{c}; x,y>0$

$\rightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1)=4 \rightarrow x+y+xy=3 \\ P=\dfrac{32x^3}{(y+3)^3}+\dfrac{32y^3}{(x+3)^3}-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ tới đây ta thấy bài toán đơn giản hơn nhiều, bây giờ tiếp tục dồn về 1 biến duy nhất nhưng trước hết ta phải khảo sát ngay xem nó đạt cực đại tại đâu:

$x+y+xy=3 \rightarrow y=\dfrac{3-x}{1+x}; x,y\in(0;3]$

Ta sẽ cho x chạy từ 0 tới 3 nhé bấm 1 bảng F(x) thôi, bỏ bảng G(X) bằng cách bấm "="

$F(x)=\dfrac{32x^3}{(\dfrac{3-x}{1+x}+3)^3}+\dfrac{32\left(\dfrac{3-x}{1+x}\right)^3}{(x+3)^3}-\sqrt{x^2+\left(\dfrac{3-x}{1+x}\right)^2}$ với Start 0 = ,End 3 = , Step 0,1 =

Khi nhập đúng là max nhọ vì thiếu đúng 1 kí tự bình phương nữa thôi, ta thử rút gọn tối đa xem, không ta sẽ phải dùng 1 cách khác

Vâng, thực sự là trời không phù hộ ta còn thiếu đúng 1 kí tự bình phương nữa là xong, Đúng là trời đã sinh Table sao lại còn sinh ra giới hạn bộ nhớ RAM

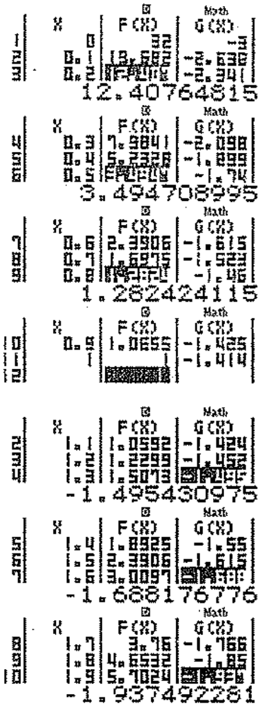
Rất may cho các thanh niên dùng Fx 570 vn plus ta còn bảng G(X) bơ vơ

Ta nhập :

$F(x)=\dfrac{32x^3}{(\dfrac{3-x}{1+x}+3)^3}+\dfrac{32\left(\dfrac{3-x}{1+x}\right)^3}{(x+3)^3}; G(X)=-\sqrt{x^2+\left(\dfrac{3-x}{1+x}\right)^2}$ với Start 0.1= ,End 3 = , Step 0,1 =

$P=F(X)+G(X)$

Ta được bảng giá trị sau:



Chúng ta ghi các kết quả sau ra giấy và tiến hành cộng tay
Để ý thì thấy mỗi X=1 và X=3 thì F(X) đẹp, ngó qua thằng G(X) thấy quen quen ^_^ hình như là $\sqrt{2}$ cơ mà mình cũng chả quan tâm, chủ yếu là quan tâm xem dấu = ở đâu.

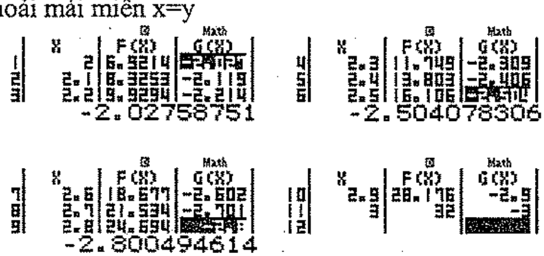
X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
P ≈	17.5	10.1	5.8	3.3	1.7	0.8	0.1	-0.2	-0.3	-0.4

Thực ra thì 1 lúc ta thấy nó giảm là có thể đoán ngay được hoặc là từ X=0,1 đến 0,7 là nó dương đoạn sau lại âm xong rồi tới X=1.3 nó lại dương là ta cũng có thể đoán nhanh chỉ tính đoạn 0.8-1.3 thôi cũng được, ở đây anh thống kê cho dễ hiểu

Nhìn vào toàn bộ bảng thì tổng $F(x)+G(x)$ min tại $x=1$

Ta thấy ngay $x=1\to P_{\min}=1-\sqrt{2}$

Vậy rõ ràng $x=y=1$ ta sẽ dồn biến về $t=x+y=2$ và đánh giá thoải mái miễn x=y



Đặt $t=x+y=2$

Xử lí điều kiện :

$3=x+y+xy\le x+y+\dfrac{(x+y)^2}{4}\leftrightarrow t^2+4t-12\ge 0\leftrightarrow t\ge 2$ Mặt khác $t=3-xy<3\to t\in[2;3)$

Giờ ép về cái hàm đồng biến là xong

$$P=\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}-\sqrt{x^2+y^2}\ge f(t),t\in[2,3)$$

$A=\dfrac{32x^3}{(y+3)^3}+\dfrac{32y^3}{(x+3)^3}\ge ?f(x+y)$ thay $x=y=1$ vào ta được :

$A=1=x+y-1=(x+y-1)^2=(x+y-1)^3$

Với x = y thì ta thấy $\dfrac{32x^3}{(y+3)^3}=\dfrac{32y^3}{(x+3)^3}\Leftrightarrow\dfrac{x}{y+3}=\dfrac{y}{x+3}$ nên ta cần áp dụng BĐT gì đó

để cho 2 thằng đó bằng nhau mục đích là $\dfrac{x}{y+3}+\dfrac{y}{x+3}$ đưa được về dạng (x+y)

Ta thấy A có dạng : $A=32(u^3+v^3)$

Mà $u^3+v^3=(u+v)^3-3uv(u+v)\ge(u+v)^3-3.\frac{(u+v)^2}{4}.(u+v)=\frac{(u+v)^3}{4}$

$$\to A=\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}\ge 8\left(\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}\right)^3=8\left(\frac{x^2+3x+y^2+3y}{xy+3(x+y)+9}\right)=8\left(\frac{(x+y)^2-2xy+3(x+y)}{xy+3(x+y)+9}\right)$$

Các em thế $xy=3-(x+y)$ vào, trâu bò phết đó @@

$$8\left(\frac{(x+y)^2-2xy+3(x+y)}{xy+3(x+y)+9}\right)^3=8\left(\frac{t^2-2(3-t)+3t}{3-t+3t+9}\right)^3=8\left(\frac{t^2+5t-6}{2(t+6)}\right)^3=(t-1)^3$$

Em khó nhất xong rồi, còn em này nữa

$\sqrt{x^2+y^2}\le ???f(x+y)\frac{1}{2}$ chả có cái đánh giá Cô-si nào làm được cái tổng mà lại lớn hơn tổng bình phương này, keke

Ta có: $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=t^2-2(3-t)=t^2+2t-6\to\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{t^2+2t-6}$

$$P=\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}-\sqrt{x^2+y^2}\ge(t-1)^3-\sqrt{t^2+2t-6}=f(t),t\in[2,3)$$

Bài này trâu thật, đến cái hàm cũng cho xấu kinh khủng

$f'(t)=3(t-1)^2-\frac{t+1}{\sqrt{(t+1)^2-7}}=3(t-1)^2-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{7}{(t+1)^2}}}\ge f'(2)=3-\frac{3}{\sqrt{2}}>0$ hàm đồng biến nên nhỏ nhất tại t=2

@@ hơi bị nản rồi ý, có khi lấy 9,75 thôi :D

Vậy: $P\ge f(t)\ge f(2)=1-\sqrt{2}$ Do đó $P_{min}=1-\sqrt{2}\leftrightarrow x=y=1\to a=b=c$

Bài 2(B-2014): Cho các số thực a, b, c không âm và thỏa mãn điều kiện (a+b)c >0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\frac{c}{2(a+b)}$$

Phân tích:

Câu này tương tự nhé các em, cũng chia đi rồi đặt và thậm chí dễ hơn câu trên nhiều, vẫn ghép 2 thằng đầu với nhau để dồn biến

Do a,b đối xứng và c lạc loài nên chia đi c, thực ra thì điều kiện $\begin{cases}a,b,c\ge 0\\(a+b)c>0\end{cases}\to c>0,a+b>0$ đã gợi ý chia c rồi

$$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\frac{c}{2(a+b)}=\sqrt{\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+1}}+\sqrt{\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}+1}}+\frac{1}{2\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\right)}$$

Đặt : $x=\frac{a}{c}, y=\frac{b}{c}; x,y \ge 0 \Rightarrow P=\sqrt{\frac{x}{y+1}}+\sqrt{\frac{y}{x+1}}+\frac{1}{2(x+y)}$ bây giờ làm sao để dồn về 1 biến cuối cùng

Ta chỉ cần xử lí $A=\sqrt{\frac{x}{y+1}}+\sqrt{\frac{y}{x+1}} \ge ???f(x+y)$ là xong

Bây giờ ta cần xem xét dấu "=" xảy ra tại đâu đã

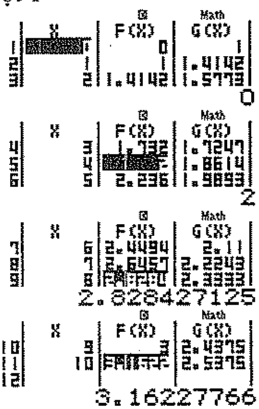
Do khoảng của Y khá là rộng chứ không thuộc 1 đoạn hẹp nên vấn đề chọn Y cũng khá nhức nhối

Ta sẽ thử từ $y: 0 \to 1 \to 2 \to 3$ xem A biến thiên như thế nào?

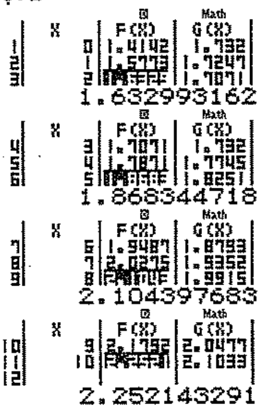
Đợt 1 : $f(x)=\sqrt{\frac{x}{0+1}}+\sqrt{\frac{0}{x+1}}$ $\quad g(x)=\sqrt{\frac{x}{1+1}}+\sqrt{\frac{1}{x+1}}$ với Start 0 = End 10 = step 1 =

Đợt 2: $f(x)=\sqrt{\frac{x}{2+1}}+\sqrt{\frac{2}{x+1}}$ $\quad g(x)=\sqrt{\frac{x}{3+1}}+\sqrt{\frac{3}{x+1}}$ với Start 0 = End 10 = step 1 =

Đợt 1



Đợt 2



Đợt 1:

Ta thấy ngay X tăng thì giá trị A tăng, **Y tăng thì giá trị P giảm kể từ khi X=1**

Các em chú ý này Y tăng thì nhìn từ F(x) sang G(X) còn X tăng thì nhìn thẳng hàng dọc từng cột.

Chúng ta bỏ ô x=y=0 nhé vì điều kiện.

Nhìn toàn bộ bảng ta chỉ thấy duy nhất A=1 là nhỏ nhất khi đó X=1,Y=0 hoặc X=0, Y=1 Tức là X+Y=1

Ở ví dụ này tính may mắn khá cao, là nếu họ cho điểm rơi x,y không nguyên hay đẹp thì khó, nói chung là các em cứ chia y đủ nhỏ làm sao mà bấm ra được giá trị đẹp

Bây giờ thì ta chỉ biết giữ vững niềm tin dồn về $t=x+y=1$ và dấu "=" khi $x=y+1$ hoặc $y=x+1$

Do tính chất đối xứng nên cặp x=1,y=0 mới sinh ra thêm hoán vị x=0,y=1 như ở các ví dụ trước.

Ta xem xét từng biểu thức: nếu $x=y+1$

$x+(y+1)\ge 2\sqrt{x(y+1)} \Leftrightarrow \frac{x}{x+y+1} \le \frac{x}{2\sqrt{x(y+1)}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{y+1}} \ge \frac{2x}{x+y+1}$ dấu = khi x=y+1 hoặc x =0 (cái này do mình lấy x chia cho 2 vế nên nó tạo ra thêm)

Tương tự $\sqrt{\frac{y}{x+1}} \ge \frac{2y}{x+y+1}$ dấu "=" khi y=x+1 hoặc y=0

Vậy : $A=\sqrt{\frac{x}{y+1}}+\sqrt{\frac{y}{x+1}} \ge \frac{2(x+y)}{x+y+1}$

$\Rightarrow P=\sqrt{\frac{x}{y+1}}+\sqrt{\frac{y}{x+1}}+\frac{1}{2(x+y)} \ge \frac{2t}{t+1}+\frac{1}{2t}=f(t), t>0$

$f'(t)=\frac{2}{(t+1)^2}-\frac{1}{2t^2}, f'(t)=0 \Leftrightarrow 4t^2=(t+1)^2 \Leftrightarrow 2t=t+1 \Leftrightarrow t=1$ (do $t>0$ mới đưa ko cần giá trị tuyệt đối nhé)

Giờ các em lập BBT suy ra $P \ge f(t) \ge f(1)=\frac{3}{2} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x=y+1, y=0 \rightarrow b=0, a=c \\ y=x+1, x=0 \rightarrow a=0, b=c \end{array}\right.$

*** Các BĐT 2 biến trong đề thi**

Bài 1 (D-2014): Cho hai số thực x, y thỏa mãn các điều kiện $1 \le x \le 2; 1 \le y \le 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=\frac{x+2y}{x^2+3y+5}+\frac{y+2x}{y^2+3x+5}+\frac{1}{4(x+y-1)}$$

Phân tích:

Ta có : $x, y \in [1;2]$ và trong P chúng đối xứng với nhau

Bài này cái điều kiện giống đề 2016 nên ta cũng xử lí nó tương tự như vậy :

$\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 1 \le y \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2) \le 0 \\ (y-1)(y-2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \le 3x-2 \\ y^2 \le 3y-2 \end{cases}$ Đây gọi là đánh giá ở Biên, nếu dấu "=" xảy ra tại Biên thì ta sử dụng luôn còn không thì toạch :3 keke, phải nghĩ sang hướng khác

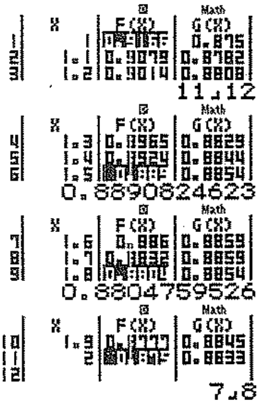
Lại bấm máy thần trưởng, ôi mệt......

Ta chỉ cần xét $y=1, y=2$ thôi

Tới đây mới bật mí: Thường người ta cho dấu "=" của BĐT xảy ra tại biên như vậy các biến lệch nhau mới khó nên anh thường cho y kẹp 2 đầu mút khi bấm 1 lần là do thế, khi nào không thấy giá trị đẹp hay cẩn thận thì mới chia nhỏ thêm y ra mà bấm

$f(x)=\frac{x+2}{x^2+8}+\frac{1+2x}{6+3x}+\frac{1}{4x}$ $\quad g(x)=\frac{x+4}{x^2+11}+\frac{2+2x}{3x+9}+\frac{1}{4(x+1)}$

với Start 1 = End 2 = và Step 0.1 =



Nhìn vào cột F(X) trước ta thấy nó giảm dần có các giá trị đẹp là

$X=1 \to P=11/12 \qquad X=2 \to P=7/8$

Nhìn cột G(X) ta thấy nó tăng giảm lẫn lộn @@

Nhưng có giá trị đẹp là :

$X=1 \to P=7/8 \qquad\qquad X=2, P=53/60$

Giá trị 7/8 cứ được lặp lại do tính chất đối xứng của biến và nó cũng nhỏ nhất hội

Vậy gia cát dự là $P_{min}=\dfrac{7}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=1 \\ x=1, y=2 \end{array}\right.$

Vậy ta cần áp dụng BĐT biên vào P

$$P \geq \frac{x+2y}{3(x+y)+3}+\frac{y+2x}{3(x+y)+3}+\frac{1}{4(x+y-1)} = \frac{x+y}{x+y+1}+\frac{1}{4(x+y-1)}=\frac{t}{t+1}+\frac{1}{4(t-1)}$$

Đặt $t = x + y$, ĐK: $2 \leq t \leq 4$

$$f(t)=\frac{t}{t+1}+\frac{1}{4(t-1)},\ t \in [2;\ 4]$$

$$f'(t)=\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{4(t-1)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2(t-1)=t+1 \Leftrightarrow t=3$$

Ta có $f(3)=\dfrac{7}{8}$. Khi $t = 3 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \vee x=2 \\ y=1 \vee y=2 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$.

Vậy $P_{min}=\dfrac{7}{8}$ tại $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Bài 2 (D-2013): Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy \leq y-1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\dfrac{x-2y}{6(x+y)}$.

Phân tích:

Đây là 1 dạng toán BĐT cơ bản, chia đi rồi đặt ẩn phụ và xét hàm đơn thuần nên không cần thiết phải sử dụng máy tính.

Từ giả thiết ta có: $xy \leq y-1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} \leq \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y^2}=-\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{4}$

$$P=\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\frac{x-2y}{6(x+y)}=\frac{\dfrac{x}{y}+1}{\sqrt{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-\dfrac{x}{y}+3}}-\frac{\dfrac{x}{y}-2}{6\left(\dfrac{x}{y}+1\right)}$$

Đặt $t=\frac{x}{y}$, điều kiện $0<t\le\frac{1}{4}$

$P=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\frac{t-2}{6(t+1)}$

Xét $f(t)=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\frac{t-2}{6(t+1)}$ với $0<t\le\frac{1}{4}$

$f'(t)=\frac{-3t+7}{2\sqrt{\left(t^2-t+3\right)^3}}-\frac{1}{2\left(t+1\right)^2}$

$\forall t\in\left(0;\frac{1}{4}\right]:\frac{-3t+7}{2\sqrt{\left(t^2-t+3\right)^3}}\ge\frac{8\sqrt{5}}{27},\ \frac{1}{2\left(t+1\right)^2}<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f'(t)>0\ \ \forall t\in\left(0;\frac{1}{4}\right]\Rightarrow f$ đồng biến trên $\left(0;\frac{1}{4}\right]\Rightarrow f(t)\le f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{7+10\sqrt{5}}{30}$

Vậy $P_{max}=\frac{7+10\sqrt{5}}{30}$ khi $x=\frac{1}{2},\ y=2$

Tổng kết phương pháp:

Phương pháp này xây dựng trên ý tưởng dựa vào thống kê giá trị của hàm số 1 biến và dựa vào yếu tố "đẹp" của giá trị biểu thức cũng như giá trị các biến từ đó có thể tìm ra dấu "=" của BĐT và khi đã biết dấu "=" xảy ra tại đâu thì ta sẽ áp dụng các đánh giá cho đúng đắn phù hợp điều này cần tới kiến thức của chúng ta do đó nó không phải là chìa khóa vạn năng và có 2 điểm yếu cơ bản : 1 là chọn giá trị ban đầu, 2 là khoảng xét quá rộng.

Do đó các em cần nắm được thế mạnh cũng như điểm yếu của nó để vận dụng cho phù hợp với từng bài từng dạng.

***Phần bổ trợ**

- **Một số đánh giá tại biên các em nên biết để ứng dụng xử lí điều kiện cho bài toán:**

Bài 1 Cho $x,y,z\in[0;1]$

$P=2(x^3+y^3+z^3)-(x^2y+y^2z+z^2x)$

Tìm max P.

Giải:

Do $x,y,z\in[0;1]\Rightarrow x^3\le x^2\le x, y^3\le y^2\le y, z^3\le z^2\le z$

$\Rightarrow P\le(x+y+z)+(x^2+y^2+z^2)-(x^2y+y^2z+z^2x)$

Ta có: $(1-y)(1-x^2)\ge0\Leftrightarrow 1-x^2-y+x^2y\ge0$

$\Rightarrow y+x^2-x^2y\le 1$

Tương tự:

$z+y^2-y^2z\le 1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad x+z^2-z^2x\le 1$

$\Rightarrow P\le 3$

Vậy $Max_P=3$ khi (x,y,z) là 1 trong các bộ số

(0,0,1);(0,1,0);(0,0,1);(1,1,0);(1,0,1);(0,1,1);(1,1,1)

Bài 2. Cho $x,y,z\in[0;1]$

$$P=\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}$$

Tìm max P.

Giải:

Giả sử : $x\le y\le z$

$\Rightarrow 1+yz\ge 1+zx\ge 1+xy$

$$\Rightarrow P\le\frac{x+y+z}{1+xy}$$

Mặt khác: $(1-x)(1-y)\ge 0\Leftrightarrow 1+xy\ge x+y$

$$\Rightarrow P\le\frac{1+xy+z}{1+xy}\le\frac{2+xy}{1+xy}\le\frac{2+2xy}{1+xy}\le 2$$

Vậy $Max_P=2\Leftrightarrow z=1,x=y=0$ và các hoán vị

Bài 3 Cho $x,y,z\in[0;1]$

$P=x+y^2+z^3-(xy+yz+zx)$

Tìm max P.

Giải:

Do $y,z\in[0;1]$ nên $y^2\le y,z^3\le z$

$\Rightarrow P\le x+y+z-(xy+yz+xz)$

Mặt khác:

$(1-x)(1-y)(1-z)\ge 0\Leftrightarrow(1-x-y+xy)(1-z)\ge 0$

$\Leftrightarrow 1+xy+yz+xz-xyz-z-y-z\ge 0$

$\Leftrightarrow x+y+z-(xy+yz+xz)\le 1-xyz\le 1$

$\Leftrightarrow P\le 1$

Vậy $Max_P=1\Leftrightarrow x=y=1,z=0$ và các hoán vị

KINH NGHIỆM BẤT ĐẲNG THỨC

Nguyễn Thế Lực & Nguyễn Văn Nam

I. MỘT SỐ KĨ THUẬT BẮT BUỘC

1. Phân tích thành nhân tử

Mục đích:

- Làm gọn biểu thức (Rút gọn trong phân số), biểu thức ở đây có thể là dữ kiện đề bài cho, hoặc biểu thức ta cần chứng minh hay tìm cực trị (min, max).
- Xuất hiện dạng tích để áp dụng các bất đẳng thức Cauchy, Bunhiacopski,...
- Đối với bài toán mức độ trung bình trở lên, ta không áp dụng được kĩ thuật này đầu tiên, mà phải trải qua 1 vài kĩ thuật khác như kĩ thuật thế, đặt ẩn phụ, hay nhóm và tách,...

Các em sẽ hiểu rõ hơn kĩ thuật này trong các ví dụ được trình bày lồng với kĩ thuật khác.

2. Kĩ thuật thế

Khi nào cần thế? Khi ta có dữ kiện đề bài và đang gặp bí đối với biểu thức đang cần tìm cực trị.

Thế như thế nào?

- Trước hết, cần quan sát dữ kiện đề bài, hãy dùng các kĩ thuật khác để cho nó đơn giản, dễ nhìn, dễ sử dụng.
- Dùng kĩ thuật nhóm và tách đối với biểu thức cần tìm cực trị để làm xuất hiện dữ kiện đề bài sau khi đã đơn giản hóa.
- Một số ít bài, sử dụng thế lượng giác để đưa về tìm cực trị của biểu thức lượng giác. Dạng này chiếm khá ít trong các đề thi ĐH.

3. Kĩ thuật đặt ẩn phụ

Kĩ thuật này đã quá rõ, rất hay dùng trong phương pháp xét hàm. Những có khá ít bài toán có thể áp dụng trực tiếp luôn kĩ thuật này, mà phải trải qua các kĩ thuật khác.

4. Kĩ thuật nhóm và tách

Tùy vào mục đích là thế, hay phân tích nhân tử, hay áp dụng Cauchy, Bunhiacopski mà ta nhóm, tách khác nhau.

5. Kĩ thuật xét dấu bằng

Đối với bài toán cho 3 số thực x, y, z.

- Nếu điều kiện cho $x, y, z \geq 0$, thì nhiều khả năng dấu "=" xảy ra khi ít nhất 1 trong 3 số bằng 0.
- Nếu giữ nguyên x, đổi chỗ y và z, biểu thức không đổi (ta nói y,z có vai trò như nhau), giữ nguyên y, đổi chỗ z, x, biểu thức thay đổi (ta nói z,x có vai trò khác nhau), giữ nguyên z, đổi chỗ x, y, biểu thức thay đổi thì nhiều khả năng dấu bằng xảy ra khi $y=z$ (Biểu thức ở đây là cả dữ kiện đề bài và biểu thức cần tìm min, max).

- Nếu x, y, z có vai trò như nhau thì nhiều khả năng dấu "=" xảy ra khi x=y=z
- Nếu x, y, z ∈ [a, b] thì có thể dấu "=" đạt tại 2 đầu mút a, b hay điểm chính giữa $\frac{a+b}{2}$.

6. Nắm vững bất đẳng thức Cauchy, Bunhiacopski

- Kĩ thuật chọn điểm rơi
- Kết hợp tốt kĩ thuật khác để tạo sự tinh tế khi áp dụng bất đẳng thức

⇨ **Tóm lại, các kĩ thuật đều có mối quan hệ mật thiết với nhau, phục vụ lẫn nhau. Bởi vậy, đối với mỗi bài toán, các kĩ thuật trên cần được áp dụng một cách linh hoạt, kĩ thuật này bí cần chuyển hướng sang kĩ thuật khác. Hãy trau dồi, luyện tập để thành thạo các kĩ thuật cơ bản trên nếu muốn làm chủ phần bất đẳng thức trong TSĐH.**

Ví dụ 1.(TSĐH2008-Khối B) Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}$$

Giải

Nhìn vào dữ kiện và biểu thức P, ta đang gặp bí trong các kĩ thuật như phân tích thành nhân tử, đặt ẩn phụ hay áp dụng Cauchy, Bunhicopski.

Nghĩ đến kĩ thuật thế, với bài này khá dễ là ta không cần phải tách và nhóm, ta nhận thấy số 1 ở mẫu của biểu thức P, ta thế ngay dữ kiện vào:

$$P = \frac{2(x^2+6xy)}{x^2+y^2+2xy+2y^2} = \frac{2(x^2+6xy)}{x^2+2xy+3y^2}$$

Đến đây ta sử dụng được kĩ thuật đặt ẩn phụ bởi tử và mẫu có bậc bằng nhau

- Nếu y=0, thì $x^2 = 1$. Suy ra P=2
- Nếu y≠ 0. Đặt x=ty. Khi đó, biểu thức P trở thành :
  $P = \frac{2t^2+12t}{t^2+2t+3} \Leftrightarrow (P-2)t^2 + 2(P-6)t + 3P = 0$ (1)
- $Với\ P = 2, phương\ trình\ (1) có\ nghiệm\ t = \frac{3}{4}$.
- $Với\ P \neq 2, phương\ trình\ (1) có\ nghiệm\ khi\ và\ chỉ\ khi:$
  $\Delta' = -2P^2 - 6P + 36 \geq 0 \Leftrightarrow -6 \leq P \leq 3$

$$P = 3\ khi\ x = \frac{3}{\sqrt{10}}, y = \frac{1}{\sqrt{10}}\ hoặc\ x = -\frac{3}{\sqrt{10}}, y = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$P = -6\ khi\ x = \frac{3}{\sqrt{13}}, y = -\frac{2}{\sqrt{13}}\ hoặc\ x = \frac{3}{\sqrt{10}}, y = -\frac{2}{\sqrt{10}}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3, giá trị nhỏ nhất của P là -6.

Ví dụ 2.(TSĐH2012-Khối B) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện x+y+z=0 ; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^5 + y^5 + z^5$

Giải

Bài này có khó hơn ví dụ 1, bởi ta phải dùng kĩ thuật nhóm và tách trước khi dùng kĩ thuật thế.

$$P = x^5 + (y^2 + z^2)(y^3 + z^3) - y^2z^2(y + z)$$

$$= x^5 + (y^2 + z^2)[(y^2 + z^2)(y + z) - yz(y + z)]$$

$$- \left[\frac{(y + z)^2 - (y^2 + z^2)}{2}\right]^2 (y + z)$$

Từ dữ kiện đề bài, ta có: $y + z = -x; y^2 + z^2 = 1 - x^2$

Thế vào biểu thức P, ta được:

$$P = x^5 + (1 - x^2)\left[-x(1 - x^2) + x\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\right] + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 x = \frac{5}{4}(2x^3 - x)$$

Bây giờ, ta đi tìm điều kiện cho x. Ta xuất phát từ bất đẳng thức hiển nhiên:

$(y - z)^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + z^2 \geq 2yz \Leftrightarrow 2(y^2 + z^2) \geq (y + z)^2$

Dựa vào dữ kiện đề bài, ta có:

$2(1 - x^2) \geq x^2 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{6}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$

Xét hàm $f(x) = (2x^3 - x)$ *với* $-\frac{\sqrt{6}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$

suy ra $f'(x) = 6x^2 - 1; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$

$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{9}, f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{9}$

Do đó, $f(x) \leq \frac{\sqrt{6}}{9}$. Suy ra $P \leq \frac{5\sqrt{6}}{36}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}, y = z = -\frac{\sqrt{6}}{6}$

Ví dụ 3. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn x+y-z=-1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x^3y^3}{(x+yz)(y+xz)(z+xy)^2}$

Giải

Đến đây, nếu sử dụng luôn kĩ thuật phân tích nhân tử hay sử dụng bất đẳng thức, ta thấy quá khó để triển khai. Từ đó, ta lại nghĩ đến kĩ thuật thế.

Xét dữ kiện đề bài : $x + y - z = -1 \Leftrightarrow z = x + y + 1$ (1)

Mục đích của kĩ thuật thế là biến đổi dữ kiện xuất hiện 1 thừa số, hay số hạng của biểu thức P

(1)=> $z + xy = xy + x + y + 1 = (x+1)(y+1)$ (*Kĩ thuật phân tích nhân tử*)

(1)=> $yz = y(x+y+1) = y^2 + xy + y \Leftrightarrow x + yz = y^2 + xy + y + x = (x+y)(y+1)$

(1)=> $zx = x(x+y+1) = x^2 + xy + x \Leftrightarrow y + zx = y + xy + x^2 + x = (x+1)(x+y)$

Đến đây, ta thế vào biểu thức P :

$$P = \frac{x^3y^3}{(x+y)(y+1)(x+1)(x+y)(x+1)^2(y+1)^2}$$
$$= \frac{x^3y^3}{(x+y)^2(x+1)^3(y+1)^3} \le \frac{x^3y^3}{4xy(x+1)^3(y+1)^3}$$
$$= \frac{x^2y^2}{4(x+1)^3(y+1)^3} = \frac{1}{4}f(x).f(y) \text{ trong đó } f(t) = \frac{t^2}{(t+1)^3}, t > 0$$

Xét hàm $f(t) = \frac{t^2}{(t+1)^3}$ *với* $t > 0$;

⇨ $f'(t) = \frac{t(t+1)^2(2-t)}{(t+1)^6}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow$ t=2

Vẽ bảng biến thiên, ta có $f(t) \le f(2) = \frac{4}{27}$

⇨ $P \le \frac{1}{4}.\frac{4}{27}.\frac{4}{27} = \frac{4}{729}$ dấu '=' xảy ra ⇔ x=y=2 ; z=5

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{4}{729}$

Nhận xét : Bài này dễ thấy dấu « = » xảy ra khi x=y bởi theo kĩ thuật dấu bằng, x, y có vai trò như nhau, (y,z) hay (x, z) có vai trò khác nhau

Ví dụ 4. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ac + b^2 = 2bc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2a^2+b^2}{\sqrt{a^2b^2-ab^3+4b^4}} + \frac{2b^2+c^2}{\sqrt{b^2c^2-bc^3+4c^4}}$

Giải

Nhìn vào biểu thức trên, ta nhận xét biểu thức P có tử và mẫu đồng bậc => Đặt ẩn phụ. Chia cả tử và mẫu của phân thức thứ nhất cho b^2, của phân thức thứ hai cho c^2, ta có :

$$P = \frac{2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 4}} + \frac{2\left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1}{\sqrt{\left(\frac{b}{c}\right)^2 - \frac{b}{c} + 4}}$$

Đặt $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}$ suy ra, $P = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2-x+4}} + \frac{2y^2+1}{\sqrt{y^2-y+4}}$

Từ dữ kiện, ta có : $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} = 2$ => x+y=2

Xét hàm $f(t) = \frac{2t^2+1}{\sqrt{t^2-t+4}}$ với $t \in (0, 2)$

Dến đây, ta sử dụng phương pháp tiệm cận, ta có thể đưa ra bất đẳng thức phụ sau :

$$f(t) = \frac{2t^2+1}{t^2-t+4} \geq \frac{29}{16}(t-1) + \frac{3}{2}$$

Dấu « = » xảy ra ⇔ t=1

Vậy $P \geq f(x) + f(y) \geq \frac{29}{16}(x + y - 2) + 3 = 3$ đạt tại x=y=1

Ví dụ 5. Cho 2 số thực a, b thuộc khoảng (0,1) thỏa mãn $(a^3 + b^3)(a + b) - ab(a-1)(b-1) = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của :

$$P = \frac{12}{\sqrt{36 + (1 + 9a^2)(1 + 9b^2)}} + 3ab - \frac{a^4 + b^4}{ab}$$

Giải

Nhìn vào biểu thức P, ta thấy xuất hiện dạng khá quen thuộc của bất đẳng thức Bunhiacopski và Cauchy, nhưng bài này ta nên áp dụng Cauchy. Còn dữ kiện đề bài vẫn hơi cồng kềnh.

$(a^3 + b^3)(a + b) = ab(a-1)(b-1) \Leftrightarrow (a-1)(b-1) = \frac{(a^3+b^3)(a+b)}{ab} = \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}\right)(a + b) \geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{ab} = 4ab$

Mặt khác, $(a-1)(b-1) = ab - (a + b) + 1 \leq ab - 2\sqrt{ab} + 1$

Do đó, $4ab \leq ab - 2\sqrt{ab} + 1$ (1)

Áp dụng Cauchy cho biểu thức P, ta có :

$$P \leq \frac{12}{\sqrt{36 + 6a.6b}} + 3ab - \frac{2a^2b^2}{ab} = \frac{12}{\sqrt{36 + 36ab}} + 3ab - 2ab$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1 + ab}} + ab$$

Đặt t=ab từ (1) suy ra $4t \leq t - 2\sqrt{t} + 1 \Leftrightarrow 0 < t \leq \frac{1}{9}$

Biểu thức P trở thành: $P = \frac{2}{\sqrt{1+t}} + t$

Xét hàm $f(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t}} + t$ *với* $0 < t \leq \frac{1}{9}$

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{(1+t)\sqrt{1+t}} > 0\ \forall t \in (0; \frac{1}{9}]$$

⇨ $f(t) \leq f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{6}{\sqrt{10}} + \frac{1}{9}$ dấu « = » xảy ra ⇔ $a = b = \frac{1}{3}$

$$Vậy\ MaxP = \frac{6}{\sqrt{10}} + \frac{1}{9}$$

II. XÉT HÀM

Các bước của phương pháp này:

B1. Biến đổi biểu thức đã cho về dạng 1 biến

- Sử dụng các kĩ thuật bắt buộc
- Sử dụng kĩ thuật xét phần tử ở biên
- Sử dụng bất đẳng thức phụ

B2. Tìm điều kiện cho biến

- Sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc: Cauchy, Bunhiacopski,…
- Sử dụng bất đẳng thức hiển nhiên đúng: $A^2 \geq 0, (a-b)^2 \geq 0, ...$
- Sử dụng dữ kiện đề bài

B3. Xét hàm và tìm cực trị

- Xét đạo hàm

1. Xét phần tử ở biên

Dạng bài này cho điều kiện của các biến của bất đẳng thức thuộc 1 đoạn hay nửa đoạn. Ví dụ: $1 \leq x \leq 3$, $a \geq 4$,…

Khi đó 1,3 là phần tử biên của x. 4 là phần tử biên của a

__Chú ý__: Kĩ thuật này chỉ được áp dụng khi dấu "=" của bất đẳng thức trùng với 1 trong các phần tử biên.

Khi đó, ta tận dụng các biểu thức suy ra từ điện kiện của đề bài như sau:

- $a \leq x, y, z \leq b$, trong đó a, b là 1 số, x, y, z là các biến. Các biểu thức ta có thể tận dụng là :

  $(x-a)f(x,y,z) \geq 0, (x-b)f(x,y,z) \leq 0$, trong đó $f(x,y,z) \geq 0\ \forall x,y,z \in [a,b]$

$$(x-a)(y-a)(z-a) \geq 0$$

$$(x-b)(y-b)(z-b) \leq 0$$
$$(x-b)^2 \geq 0, (y-b)^2 \geq 0, (z-b)^2 \geq 0$$
$$(x-a)(y-a) \geq 0, (y-a)(z-a) \geq 0, (z-a)(x-a) \geq 0$$
$$(x-b)(y-b) \geq 0, (y-b)(z-b) \geq 0, (z-b)(x-b) \geq 0$$
$$(x-a)(x-b) \leq 0, (y-a)(y-b) \leq 0, (z-a)(z-b) \leq 0$$
$$(x-a)(y-b) \leq 0, (x-b)(z-b) \leq 0, (y-a)(z-b) \leq 0, \ldots$$

- Mở rộng : $x \geq y \geq z$, ta có thể áp dụng các biểu thức sau :

$$(x-y)(x-z) \geq 0$$
$$(x-y)(y-z) \geq 0$$
$$(y-x)(y-z) \leq 0$$
$$(z-y)(z-x) \geq 0$$

Trên đây là những dạng hay được áp dụng nhất, tất nhiên trong từng bài chúng ta phải biến đổi khác nhau.

Ta sẽ đi vào từng ví dụ để hiểu hơn phương pháp này.

<u>Ví dụ 1:</u> Cho các số thực a, b, c ∈ [1,2]. Chứng minh bất đẳng thức:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 6 \leq 3(a+b+c)$$

Giải

Ta nhận thấy các biến a, b, c thuộc 1 đoạn => Dấu hiệu của pp xét phần tử ở biên

Nhận xét : a, b, c đều độc lập trong cả 2 vế của bất đẳng thức (tức không có dạng ab, bc, ca hay abc,...)

Ta chọn cách xét phần tử ở biên như sau :

$$(a-1)(a-2) \leq 0 <=> a^2 - 3a + 2 \leq 0 <=> a^2 + 2 \leq 3a$$

Tương tự với b, c => $b^2 + 2 \leq 3b; c^2 + 2 \leq 3c$

Cộng vế với vế ta được : $a^2 + b^2 + c^2 + 6 \leq 3(a+b+c)$ => đ.p.c.m

<u>Ví dụ 2</u>: (TSĐH2014-Khối D) Cho 2 số thực x, y thỏa mãn các điều kiện $1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x+2y}{x^2+3y+5} + \frac{(y+2x)}{y^2+3x+5} + \frac{1}{4(x+y-1)}$$

Giải

$1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2$ => Dấu hiệu của kĩ thuật xét phần tử ở biên

Nhận xét : x, y, z đều độc lập trong cả 2 vế của bất đẳng thức (tức không có dạng xy, yz, zx hay xyz,...)

⇨ Ta chọn cách xét phần tử ở biên như sau :
$(x-1)(x-2) \leq 0 \Rightarrow x^2 + 2 \leq 3x$
Tương tự: $y^2 + 2 \leq 3y$

⇨ $P \geq \frac{x+2y}{3x+3y+3} + \frac{y+2x}{3x+3y+3} + \frac{1}{4(x+y-1)} = \frac{x+y}{x+y+1} + \frac{1}{4(x+y-1)}$
Đặt $t = x + y$, suy ra $2 \leq t \leq 4$
Xét hàm $f(t) = \frac{t}{1+t} + \frac{1}{4(t-1)}$ với $2 \leq t \leq 4$
Ta có: $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{4(t-1)^2}$ suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow$ t=3
Xét 3 giá trị $f(2) = \frac{11}{12}, f(3) = \frac{7}{8}, f(4) = \frac{53}{60}$ ta thấy $f(t) \geq f(3) = \frac{7}{8}$

⇨ $P \geq \frac{7}{8}$ khi x=1, y=2 (phần tử ở biên)

<u>**Ví dụ 3**</u>: (TSĐH2015-Khối A) Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn [1,3] và thỏa mãn điều kiện a+b+c=6. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc$$

Giải

a,b,c ∈ [1,3] => dấu hiệu của kĩ thuật xét phần tử ở biên

Nhận xét : Trong biểu thức P có xuất hiện ab, bc, ca, abc nên ta chọn cách xét phần tử ở biên như sau: $(a-1)(b-1)(c-1) \geq 0 \Leftrightarrow abc - (ab + bc + ca) + a + b + c - 1 \geq 0$

⇨ $abc \geq ab + bc + ca - 5$
Biến đổi biểu thức (kĩ thuật thế) :

$$P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c) + 72}{ab + bc + ca} - \frac{abc}{2}$$
$$= \frac{(ab + bc + ca)^2 + 72}{ab + bc + ca} - \frac{abc}{2}$$
$$\leq \frac{(ab + bc + ca)^2 + 72}{ab + bc + ca} - \frac{ab + bc + ca - 5}{2}$$

Đặt t=ab+bc+ca

⇨ $P \leq \frac{t^2+72}{t} - \frac{t-5}{2}$
Ta đi tìm điều kiện của t

- $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 = 36$

⇨ $t \le 12$

- $(a-3)(b-3)(c-3) \le 0 \Leftrightarrow 3t = 3(ab+bc+ca) \ge abc + 27 \ge t + 22 \Rightarrow t \ge 11$

⇨ $t \in [11,12]$ (Đây là ý khó vì sử dụng kĩ thuật xét phần tử ở biên để tìm điều kiện cho t, nhưng nó sẽ trở thành dễ nếu ta nhận ra được dấu hiệu của kĩ thuật này)

Ta xét hàm $f(t) = \frac{t^2+72}{t} - \frac{t-5}{2}$ *với* $t \in [11,12]$

⇨ $f'(t) = \frac{t^2-144}{2t^2} \le 0\ \forall t \in [11,12]$

⇨ $f(t) \le f(11) = \frac{160}{11}$ => P đạt giá trị lớn nhất là $\frac{160}{11}$ tại a=1, b=2, c=3

2. Bất đẳng thức phụ

Một số bất đẳng thức phụ hay dùng :

1. $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \ge \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$ *với* $ab \ge 1, a, b \ge 0$
2. $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \ge \frac{1}{1+ab}$ *với* $a, b > 0$

Ví dụ 1. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $-1-2\sqrt{2} < x < -1+2\sqrt{2}, y > 0, z > 0$ *và* $x+y+z=-1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{8-(y+z)^2}$$

Giải

Với bài này, bước đầu tiên ta có 2 hướng :

- Hướng 1 : áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho mẫu
- Hướng 2 : Sử dụng kĩ thuật thế

Hướng 1 để cho các bạn thử. Sau đây tôi trình bày theo hướng 2, sử dụng kĩ thuật thế để áp dụng bất đẳng thức phụ

$$P = \frac{1}{(-1-z)^2} + \frac{1}{(-1-y)^2} + \frac{1}{8-(-1-x)^2}$$
$$= \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{8-(1+x)^2}$$

Ta sử dụng bất đẳng thức số 2. Ta có :

$$P \ge \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{8-(1+x)^2} \ge \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{8-(1+x)^2}$$

Ta đi đánh giá yz : $4yz \leq (y+z)^2 = (-1-x)^2 = (1+x)^2 \Rightarrow yz \leq \frac{(1+x)^2}{4}$

Do đó, $P \geq \frac{1}{1+\frac{(1+x)^2}{4}} + \frac{1}{8-(1+x)^2} = \frac{4}{4+(1+x)^2} + \frac{1}{8-(1+x)^2}$

Đặt $t = (x+1)^2$, do $-1-2\sqrt{2} < x < -1+2\sqrt{2}$ nên $0 \leq (x+1)^2 < 8$

Xét hàm $f(t) = \frac{4}{4+t} + \frac{1}{8-t}$ $với\ t \in [0;8)$

$$f'(t) = -\frac{4}{(4+t)^2} + \frac{1}{(8-t)^2} = \frac{-3t^2+72t-240}{(4+t)^2(8-t)^2}$$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2+72t-240 = 0 \Leftrightarrow$ t=4 (loại t=20)

Vẽ bảng biến thiên, ta thu được $f(t) \geq \frac{3}{4}\ khi\ t = 4$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$ $khi\ x = -3; y = z = 1$

Ví dụ 2. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn xyz=1. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2} + \frac{4}{3(z+1)^2}$$

Giải

Ta áp dụng bất đẳng thức phụ :

$$P \geq \frac{1}{xy+1} + \frac{4}{3(z+1)^2} = \frac{1}{\frac{1}{z}+1} + \frac{4}{3(z+1)^2} = \frac{z}{z+1} + \frac{4}{3(z+1)^2}$$
$$= \frac{3z^2+3z+4}{3(z+1)^2}$$

Ta xét hàm $f(t) = \frac{3t^2+3t+4}{3(t+1)^2}$ $với\ t > 0$

$f'(t) = \frac{3t-5}{3(t+1)^3} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{3}$

Vẽ bảng biến thiên, ta thu được $f(t) \geq f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{13}{16}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{13}{16}$, đạt tại $x = y = \sqrt{\frac{3}{5}}, z = \frac{5}{3}$

Ví dụ 3. (TSĐH2011-Khối A) Cho x, y, z là 3 số thực thuộc đoạn [1,4] và $x \geq y, x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$

Giải

Mặc dù có dấu hiệu của kĩ thuật xét phần tử ở biên là x, y, z thuộc đoạn [1,4] nhưng ta không thể tận dụng được.

Chuyển hướng, ta biến đổi biểu thức P về dạng:

$$P = \frac{1}{2 + \frac{3y}{x}} + \frac{1}{1 + \frac{z}{y}} + \frac{1}{1 + \frac{x}{z}}$$

Áp dụng bất đẳng thức phụ 1, ta có:

$$P \geq \frac{1}{2 + \frac{3y}{x}} + \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x}{y}}}$$

Dấu "=" xảy ra ⇔ $\frac{z}{y} = \frac{x}{z}$ hoặc $\frac{x}{y} = 1$ (1)

Đặt $\sqrt{\frac{x}{y}} = t; trong$ đó $t \in [1, 2]$. Khi đó, $P \geq \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}$

Xét hàm $f(t) = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}$ $trong$ đó $t \in [1,2]$

$$f'(t) = \frac{-2(t^3(4t-3) + 3t(2t-1) + 9)}{(2t^2+3)^2(1+t)^2} < 0$$

⇨ $f(t) \geq f(2) = \frac{34}{33}$ dấu "=" xảy ra ⇔ t=2 ⇔ x=4 ;y=1

Vậy $P \geq \frac{34}{33}$ đạt tại $x = 4, y = 1, z = 2$

*Một số bài tập rèn luyện

Bài 1: Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a}{a+2}+\frac{3b}{b+3}+\frac{c}{c+1}\le\frac{6(a+b+c)}{a+b+c+6}\quad(1)$$

Hướng dẫn

Bất đẳng thức tương đương với

$$\left(\frac{a+2}{4}-\frac{2a}{a+2}\right)+\left(\frac{b+3}{4}-\frac{3b}{b+3}\right)+\left(\frac{c+1}{4}-\frac{c}{c+1}\right)\ge\frac{a+b+c+6}{4}-\frac{6(a+b+c)}{a+b+c+6}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-2)^2}{4(a+2)}+\frac{(b-3)^2}{4(b+3)}+\frac{(c-1)^2}{4(c+1)}\ge\frac{(a+b+c-6)^2}{4(a+b+c+6)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-2)^2}{a+2}+\frac{(b-3)^2}{b+3}+\frac{(c-1)^2}{c+1}\ge\frac{(a+b+c-6)^2}{a+b+c+6}\qquad(2)$$

Áp dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** ta có

$$VT(2)\ge\frac{\left[(a-2)+(b-3)+(c-1)\right]^2}{(a+2)+(b+3)+(c+1)}=\frac{(a+b+c-6)^2}{a+b+c+6}=VP(2)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=2;b=3;c=1$.

Vậy bất đẳng thức (2) đúng. Do đó bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Bài 2. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x^2}{2x^2+2yz+1}+\frac{y^2}{2y^2+2xz+1}+\sqrt{x+y}$.

Hướng dẫn

Ta có $2yz+1=x^2+y^2+z^2+2yz=x^2+(y+z)^2\ge2x(y+z)$

Suy ra $2x^2+2yz+1\ge2x^2+2x(y+z)=2x(x+y+z)\Rightarrow\frac{x^2}{2x^2+2yz+1}\le\frac{1}{2}\frac{x}{x+y+z}$

Tương tự $\frac{y^2}{2y^2+2xz+1}\le\frac{1}{2}\frac{y}{x+y+z}$. Suy ra

$$P\le\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{x+y+z}\right)+\sqrt{x+y}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{x+y+z}\right)+\sqrt{x+y}$$

Ta có $x+y\le\sqrt{2(x^2+y^2)}=\sqrt{2(1-z^2)}=\sqrt{2-2z^2}$

Suy ra $P\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{\sqrt{2-2z^2}+z}\right)+\sqrt[4]{2-2z^2}$

Xét hàm số $f(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{\sqrt{2-2z^2}+z}\right)+\sqrt[4]{2-2z^2}$ trên $[0;1]$

$f'(z) = -\dfrac{1}{\sqrt{2-2z^2}\left(\sqrt{2-2z^2}+z\right)^2} - \dfrac{z}{\sqrt[4]{\left(2-2z^2\right)^3}} < 0$ với $\forall c \in (0;1)$.

Do hàm số liên tục trên $[0;1]$, nên $f(z)$ nghịch biến trên $[0;1]$

Suy ra $P \le f(z) \le f(0) = \dfrac{1}{2} + \sqrt[4]{2}$. Dấu = xảy ra khi $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, z = 0$

Vậy GTLN của P là $\dfrac{1}{2} + \sqrt[4]{2}$ đạt được khi $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, z = 0$

Bài 3. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{7}{a^2 + b^2 + c^2} + \dfrac{121}{14(ab + bc + ca)}$

Hướng dẫn

Ta có $1 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$\Rightarrow ab + bc + ca = \dfrac{1 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$.

Do đó $A = \dfrac{7}{a^2 + b^2 + c^2} - \dfrac{121}{7(1 - (a^2 + b^2 + c^2))}$

Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2$.

Vì $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$ nên $0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$

Suy ra $t = a^2 + b^2 + c^2 < a + b + c = 1$

Mặt khác $1 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$

Suy ra $t = a^2 + b^2 + c^2 \ge \dfrac{1}{3}$. Vậy $t \in \left[\dfrac{1}{3};1\right)$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{7}{t} + \dfrac{121}{7(1-t)}, t \in \left[\dfrac{1}{3};1\right)$ $\quad f'(t) = -\dfrac{7}{t^2} + \dfrac{121}{7(1-t)^2} = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{7}{18}$

BBT

t	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	1
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$\frac{324}{7}$	$\nearrow$

Suy ra $f(t) \ge \dfrac{324}{7}, \forall t \in \left[\dfrac{1}{3};1\right)$. Vậy $A \ge \dfrac{324}{7}$ với mọi a, b, c thỏa điều kiện đề bài. Hơn nữa, với $a = \dfrac{1}{2}; b = \dfrac{1}{3}; c = \dfrac{1}{6}$ thì $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{7}{18} \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ và $A = \dfrac{324}{7}$

Vậy $\min A = \frac{324}{7}$

Bài 4. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn: $x+y+z \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2}{yz+\sqrt{8+x^3}} + \frac{y^2}{zx+\sqrt{8+y^3}} + \frac{z^2}{xy+\sqrt{8+z^3}}$.

Hướng dẫn

Ta có BĐT: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ (*) với $a,b,c,x,y,z>0$ và chứng minh

Áp dụng (*) ta có: $P \geq \frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx+\sqrt{8+x^3}+\sqrt{8+y^3}+\sqrt{8+z^3}}$

Ta có: $\sqrt{8+x^3} = \sqrt{(2+x)(4-2x+x^2)} \leq \frac{2+x+4-2x+x^2}{2} = \frac{6-x+x^2}{2}$

$$\sqrt{8+y^3} = \sqrt{(2+y)(4-2y+y^2)} \leq \frac{2+y+4-2y+y^2}{2} = \frac{6-y+y^2}{2}$$

$$\sqrt{8+z^3} = \sqrt{(2+z)(4-2z+z^2)} \leq \frac{2+z+4-2z+z^2}{2} = \frac{6-z+z^2}{2}$$

Suy ra: $P \geq \frac{2(x+y+z)^2}{2xy+2yz+2zx+18-(x+y+z)+x^2+y^2+z^2}$

$$= \frac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2-(x+y+z)+18}$$

Đặt $t = x+y+z$ $(t \geq 3)$. Khi đó: $P \geq \frac{2t^2}{t^2-t+18}$

Xét hàm số: $f(t) = \frac{2t^2}{t^2-t+18}$ với $t \geq 3$.

Ta có: $f'(t) = \frac{2(-t^2+36t)}{(t^2-t+18)}$, $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=36$

x	3		36		$+\infty$
y'		+	0	−	
y	3/4	↗	144/71	↘	2

Từ BBT ta có: GTNN của P là: $\frac{3}{4}$ khi $t=3$.

Vậy GTNN của P là: 3/4 khi $x=y=z=1$.

Bài 5. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y-1 = \sqrt{2x-4}+\sqrt{y+1}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = (x+y)^2 - \sqrt{9-x-y} + \frac{1}{\sqrt{x+y}}$

Hướng dẫn

Điều kiện: $x \ge 2; y \ge -1; 0 < x+y \le 9$; Ta có

$0 \le x+y-1 = \sqrt{2}.\sqrt{x-2} + 1.\sqrt{y+1} \le \sqrt{3(x+y-1)} \Rightarrow (x+y-1)^2 \le 3(x+y-1)$

$\Rightarrow 0 \le x+y-1 \le 3 \Leftrightarrow 1 \le x+y \le 4.$

Đặt $t = x+y, t \in [1;4]$, ta có $S = t^2 - \sqrt{9-t} + \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

$S'(t) = 2t + \dfrac{1}{2\sqrt{9-t}} - \dfrac{1}{2t\sqrt{t}} > 0, \forall t \in [1;4]$. Vậy S đồng biến trên $[1;4]$.

Suy ra

$S_{max} = S(4) = 4^2 - \sqrt{9-4} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{33-2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = 4; y = 0;$

$S_{min} = S(1) = 2 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2; y = -1.$

Bài 6. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2+y^2+z^2 = 9$, $xyz \le 0$. Chứng minh rằng

$$2(x+y+z) - xyz \le 10.$$

Hướng dẫn

Giả sử $x \le y \le z$, do $xyz \le 0$ nên $x \le 0$.

Do $x^2+y^2+z^2 = 9 \Rightarrow x^2 \le 9 \Rightarrow x \in [-3;0]$. Ta có $yz \le \left(\dfrac{y+z}{2}\right)^2 \le \dfrac{y^2+z^2}{2}$, do đó

$2(x+y+z) - xyz \le 2x + 2\sqrt{2(y^2+z^2)} - x.\dfrac{y^2+z^2}{2}$

$= 2x + 2\sqrt{2(9-x^2)} - \dfrac{x(9-x^2)}{2} = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{5x}{2} + 2\sqrt{2(9-x^2)}$

Xét $f(x) = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{5x}{2} + 2\sqrt{2(9-x^2)}$ với $x \in [-3;0]$ $\Rightarrow f'(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{5}{2} - \dfrac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{9-x^2}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{5}{2} - \dfrac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9-x^2}(5-3x^2) = -4\sqrt{2}x$

$\Leftrightarrow (9-x^2)(5-3x^2)^2 = 32x^2$ (Điều kiện $5-3x^2 \ge 0$)

$\Leftrightarrow 9x^6 - 111x^4 + 327x^2 - 225 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1, x^2 = 3, x^2 = \dfrac{25}{3}$

Do $x^2 \le \dfrac{5}{3}$ nên $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1, x = 1$ (loại).

$f(-3) = -6, f(-1) = 10, f(0) = 6\sqrt{2}$ suy ra $\max\limits_{[-3;0]} f(x) = f(-1) = 10$

Như vậy $2(x+y+z) - xyz \le f(x) \le 10$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x=-1 \\ y=z \\ y+z=\sqrt{2(y^2+z^2)}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=z=2 \end{cases}$

Vậy $2(x+y+z)-xyz\le 10$. Đẳng thức xảy ra khi $(x; y; z)$ là một hoán vị của (-1; 2; 2)

Bài 7. Cho các số dương a, b, c thay đổi thỏa mãn $a+b+c\le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{a^2}{\sqrt{b^3+8}-(c-1)^2}+\dfrac{b^2}{\sqrt{c^3+8}-(a-1)^2}+\dfrac{c^2}{\sqrt{a^3+8}-(b-1)^2}$

Hướng dẫn

Ta có $P\ge \dfrac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a^3+8}+\sqrt{b^3+8}+\sqrt{c^3+8}-(a-1)^2-(b-1)^2-(c-1)^2}$

Ta có $\sqrt{a^3+8}=\sqrt{(a+2)(a^2-2a+4)}\le \frac{1}{2}(a^2-a+6)$

$\sqrt{b^3+8}=\sqrt{(b+2)(b^2-2b+4)}\le \frac{1}{2}(b^2-b+6)$

$\sqrt{c^3+8}=\sqrt{(c+2)(c^2-2c+4)}\le \frac{1}{2}(c^2-c+6)$

$$\Rightarrow P\ge \frac{(a+b+c)^2}{-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{3(a+b+c)}{2}+6}$$

$$\ge \frac{6(a+b+c)^2}{-(a+b+c)^2+9(a+b+c)+36}$$

Đặt $t=(a+b+c)$ với $t\in(0;3]$

Ta có $f(t)=\dfrac{6t^2}{-t^2+9t+36}$

$$\Rightarrow f'(t)=\frac{54(t^2+8t)}{(-t^2+9t+36)^2}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-8 \end{array}\right.$$

Các em tự lập bảng biến thiên

Vậy $P\ge 1$ hay Min $P=1$ dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Bài 8. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $-1-2\sqrt{2} < x < -1+2\sqrt{2}, y > 0, z > 0$ và $x+y+z=-1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{1}{8-(y+z)^2}.$$

Hướng dẫn

Ta có $P=\frac{1}{(-1-z)^2}+\frac{1}{(-1-y)^2}+\frac{1}{8-(-1-x)^2}=\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{8-(1+x)^2}$

Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\geq\frac{1}{1+yz}$

Thật vậy: $\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\geq\frac{1}{1+yz}\Leftrightarrow(1+yz)[(1+z)^2+(1+y)^2]\geq[(1+z)(1+y)]^2$.

$\Leftrightarrow(1+yz)(2+2z+2y+z^2+y^2)\geq(1+zy+z+y)^2$

$\Leftrightarrow 2(z+y)(1+zy)+2(1+yz)+(1+zy)(y-z)^2+2zy(1+yz)$

$\geq(1+zy)^2+2(z+y)(1+zy)+(z+y)^2$

$\Leftrightarrow(1+zy)(y-z)^2+2+4yz+2y^2z^2-(1+yz)^2-(y-z)^2-4yz\geq 0$

$\Leftrightarrow yz(y-z)^2+(1-yz)^2\geq 0$ (hiển nhiên đúng).

Dấu "=" xảy ra khi $y=z=1$.

Ta lại có $\frac{y+z}{2}\geq\sqrt{yz}\Rightarrow yz\leq\left(\frac{y+z}{2}\right)^2=\frac{(-1-x)^2}{4}=\frac{(1+x)^2}{4}$

Do đó $\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\geq\frac{1}{1+yz}\geq\frac{1}{1+\frac{(1+x)^2}{4}}=\frac{4}{4+(1+x)^2}$

$\Rightarrow P\geq\frac{4}{4+(1+x)^2}+\frac{1}{8-(x+1)^2}$

Do $-1-2\sqrt{2}<x<-1+2\sqrt{2}$ nên $(x+1)^2\in[0;8)$.

Đặt $t=(1+x)^2\Rightarrow t\in[0;8)$ và $P\geq\frac{4}{4+t}+\frac{1}{8-t}$

Xét $f(t)=\frac{4}{4+t}+\frac{1}{8-t}$ với $t\in[0;8)$. $f'(t)=-\frac{4}{(4+t)^2}+\frac{1}{(8-t)^2}=\frac{-3t^2+72t-240}{(4+t)^2(8-t)^2}$

$f'(t)=0\Leftrightarrow -3t^2+72t-240=0\Leftrightarrow t=4; t=20$ (loại)

Bảng biến thiên

t	0		4		8
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó $P \geq f(t) \geq \frac{3}{4}$ và $P = \frac{3}{4}$ khi $\begin{cases}(1+x)^2 = 4\\ y = z = 1\\ x+y+z=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3\\ y=z=1\end{cases}$

Vậy $\min P = \frac{3}{4}$ khi $x=-3, y=z=1$

Bài 9. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $5\left(x^2+y^2+z^2\right) = 9\left(xy+2yz+zx\right)$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{y^2+z^2} - \frac{1}{(x+y+z)^3}$$

Hướng dẫn

Từ điều kiện: $5x^2 + 5(y^2+z^2) = 9x(y+z) + 18yz$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 9x(y+z) = 18yz - 5(y^2+z^2)$$

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $yz \leq \frac{1}{4}(y+z)^2; y^2+z^2 \geq \frac{1}{2}(y+z)^2$

$\Rightarrow 18yz - 5(y^2+z^2) \leq 2(y+z)^2$.

Do đó: $5x^2 - 9x(y+z) \leq 2(y+z)^2 \Leftrightarrow [x-2(y+z)](5x+y+z) \leq 0$

$$\Rightarrow x \leq 2(y+z)$$

$$P = \frac{x}{y^2+z^2} - \frac{1}{(x+y+z)^3} \leq \frac{2x}{(y+z)^2} - \frac{1}{(x+y+z)^3} \leq \frac{4}{y+z} - \frac{1}{27(y+z)^3}$$

Đặt $y + z = t > 0$, ta có: $P \leq 4t - \frac{1}{27}t^3$

Xét hàm $\Rightarrow P \leq 16$.

Vậy MaxP = 16 khi $\begin{cases} y = z = \frac{1}{12}\\ x = \frac{1}{3}\end{cases}$

Bài 10. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x > 2, y > 1, z > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2-2(2x+y-3)}} - \frac{1}{y(x-1)(z+1)}$

Hướng dẫn

Đặt $a = x-2, b = y-1, c = z \Rightarrow a, b, c > 0$

$$P = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}} - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Ta có $a^2+b^2+c^2+1 \geq \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(c+1)^2}{2} \geq \frac{1}{4}(a+b+c+1)^2$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$

Mặt khác $(a+1)(b+1)(c+1) \le \dfrac{(a+b+c+3)^3}{27}$

Khi đó $P \le \dfrac{1}{a+b+c+1} - \dfrac{27}{(a+b+c+3)^3}$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$

Đặt $t = a+b+c+1 > 1$. Khi đó $P \le \dfrac{1}{t} - \dfrac{27}{(t+2)^3}, t>1$

$f(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{27}{(t+2)^3}, t>1; f'(t) = -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{81}{(t+2)^4} = \dfrac{81t^2-(t+2)^4}{t^2(t+2)^4}$

Xét $f'(t)=0 \Leftrightarrow 81t^2-(t+2)^4=0 \Leftrightarrow t^2-5t+4=0 \Leftrightarrow t=4$ (do t>1)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(t) = 0$

Bảng biến thiên

t	1		4		$+\infty$
f'(t)		+	0	-	
f(t)	0	↗	$\frac{1}{8}$	↘	0

Từ BBT Ta có $\max f(x) = f(4) = \dfrac{1}{8}$

Vậy $\max P = f(4) = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c=1 \\ a+b+c+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1 \Rightarrow x=3; y=2; z=1$

Bài 11. Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn: $\dfrac{2}{3x+2y+z+1} + \dfrac{2}{3x+2z+y+1} = (x+y)(x+z)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \dfrac{2(x+3)^2+y^2+z^2-16}{2x^2+y^2+z^2}$.

Hướng dẫn

Ta có: $(x+y)(x+z) \le \dfrac{(x+y+x+z)^2}{4} = \dfrac{(2x+y+z)^2}{4}$

$$2\left(\frac{1}{3x+2y+z+1} + \frac{1}{3x+2z+y+1}\right) \ge \frac{8}{3(2x+y+z)+2}$$

Từ giả thiết suy ra: $\dfrac{8}{3(2x+y+z)+2} \le \dfrac{(2x+y+z)^2}{4}$

Đặt $2x+y+z = t\ (t>0) \Rightarrow \dfrac{8}{3t+2} \le \dfrac{t^2}{4} \Leftrightarrow (t-2)(3t^2+8t+16) \ge 0$

$$\Leftrightarrow t \ge 2 \Rightarrow 2x+y+z \ge 2$$

Mà: $4 \le (2x+y+z)^2 \le (2^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \ge \dfrac{2}{3}$.

Ta có: $P = \dfrac{2x^2 + y^2 + z^2 + 12x + 2}{2x^2 + y^2 + z^2} = 1 + \dfrac{12x + 2}{x^2 + x^2 + y^2 + z^2}$

$$\le 1 + \dfrac{12x + 2}{x^2 + \dfrac{2}{3}} = 1 + \dfrac{36x + 6}{3x^2 + 2}.$$

Xét hàm số: $f(x) = 1 + \dfrac{36x + 6}{3x^2 + 2}$ với $x > 0$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{-36(3x^2 + x - 2)}{(3x^2 + 2)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 10. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	2	$\nearrow$	10	$\searrow$	1

Suy ra: $f(x) \le 10 \Rightarrow P \le 10$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 10. Dấu "=" xảy ra khi: $x = \dfrac{2}{3}, y = z = \dfrac{1}{3}$.

Bài 12.. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{4a + 2b + 4\sqrt{2bc}} - \frac{4}{8 + a + 2b + 3c} + \frac{1}{4 + b + 2c}.$$

Hướng dẫn

Ta có $2\sqrt{2bc} \le b + 2c \Rightarrow \dfrac{1}{4a + 2b + 4\sqrt{2bc}} \ge \dfrac{1}{4a + 4b + 4c}$

và $\quad \dfrac{-4}{8 + a + 2b + 3c} \ge \dfrac{-1}{4 + a + b + c} + \dfrac{-1}{4 + b + 2c}$

Suy ra $P \ge \dfrac{1}{4(a + b + c)} + \dfrac{-1}{4 + (a + c + b)}$, Đặt $t = a + b + c,\ t > 0$

xét $f(t) = \dfrac{1}{4t} + \dfrac{-1}{4 + t}$, $\quad t > 0, \qquad f'(t) = -\dfrac{1}{4t^2} + \dfrac{1}{(4 + t)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$

t	0 4 $+\infty$
f'	- 0 +
f	↘ $-\frac{1}{16}$ ↗

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{1}{16}$ khi $\begin{cases} b = 2c \\ a+b+c = b+2c \\ a+b+c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 1 \\ b = 2 \end{cases}$.

Cho $x, y, z \in [0;2]$ thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^2+y^2+2} + \frac{1}{y^2+z^2+2} + \frac{1}{z^2+x^2+2} + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$$

Ta có $x^2+y^2+2 = (x^2+1)+(y^2+1) \geq 2(x+y), \ldots;\ \sqrt{xy} \leq \frac{xy+1}{2}, \ldots$

Nên $P \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + xy + yz + zx + 3\right]$.

Ta có $(x+y+z)(xy+yz+zx) \geq 9xyz$

$$\Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz \geq \frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = \frac{(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(x+y)(z+x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$= \frac{(x+y+z)^2 + xy + yz + zx}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\leq \frac{(x+y+z)^2 + xy + yz + zx}{\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)} = \frac{27}{8(xy+yz+zx)} + \frac{3}{8}$$

Suy ra $P \leq \frac{1}{2}\left[\frac{27}{8(xy+yz+zx)} + xy + yz + zx + \frac{27}{8}\right]$.

Đặt $t = xy + yz + zx$

Do $x, y, z \in [0;2] \Rightarrow (2-x)(2-y)(2-z) \geq 0 \Leftrightarrow xy + yz + zx \geq \frac{4+xyz}{2} \geq 2 \Rightarrow t \geq 2$

Mặt khác: $xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 = 3 \Rightarrow t \leq 3$.

Vậy $t \in [2;3]$

Ta có $P \leq \frac{1}{2}\left[\frac{27}{8t} + t + \frac{27}{8}\right] = f(t)$

Xét hàm số $f(t)$ với $t \in [0;2]$ ta có $f'(t) = \frac{1}{2}\left[t - \frac{27}{8t^2}\right] = \frac{8t^3 - 27}{16t^2} > 0\ \forall t \in [2;3]$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[2;3]$.

$\Rightarrow f(t) \leq f(3) = \frac{15}{4}$.

Do $P \le f(t) \Rightarrow P \le \frac{15}{4}$. Có $P = \frac{15}{4}$ khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{15}{4}$ đạt được khi $x = y = z = 1$.

- Tổng kết:

Như vậy là chúng ta đã đi tới cuối chặng đường, học toàn bộ các Skill mà anh chia sẻ với các em, anh hi vọng và tin tưởng rằng các em sẽ tiến bộ và không ngại ngần chiến câu 8-9 và có đủ thời gian để chiến chiến câu 10.

Chỉ với khoảng hơn 200 trang, cuốn sách này khá là ngắn nhưng chất tới từng trang, chứa đựng nhiều võ công uyên thâm khiến nội công ngày càng tăng mạnh mẽ. Anh hi vọng rằng, sau khi các em học xong cuốn sách này, hãy rèn luyện nhiều bài tập hơn nữa ngoài đọc sách của anh cũng như xem video và làm bài tập, để tự mình đúc rút ra những kĩ năng, điểm mạnh và điểm yếu của phương pháp. Đây là phiên bản đầu tiên của cuốn sách, nên sẽ không thể tránh khỏi các lỗi sai sót vừa về chính tả và nội dung cũng như có thể lỗi font, hi vọng sự góp ý của các em để cuốn Bí Kíp này lưu danh thiên cổ, ngày càng Bá Đạo hơn. Và cuộc vui nào cũng phải đến hồi kết, Khi mở màn vui bao nhiêu thì giờ lại ngậm ngùi bấy nhiêu, mỗi trang sách qua đi không chỉ là một skill được viết, còn có bước chân anh dẫn dắt các em tới đích cuối.

Cuối sách: Anh xin được cảm ơn tất cả các em là người đã luôn ủng hộ cho anh, cũng như tin tưởng vào anh và phương pháp của anh. Trong cuốn sách này còn có sự động viên to lớn của người thân và gia đình anh cũng như 1 sự góp sức của 1 người bạn học cùng trường với anh là anh Nguyễn Văn Nam có bổ trợ một số phần bổ đề phụ trong bí kíp Oxy và 1 vài kinh nghiệm nhỏ BĐT. Cuốn sách là tâm huyết anh ấp ủ và xây dựng cũng như lên ý tưởng từ rất lâu và là cuốn sách đầu tiên anh viết năm anh 20 tuổi.

Hi vọng các em tôn trọng nó cũng như anh đừng Scan lên mạng nhưng có thể photo cho bạn thân cùng học!

Cảm ơn các em rất nhiều, I love you chụt chụt…<3

Tổng Sư: Nguyễn Thế Lực

Mọi vấn đề hỏi đáp các em liên hệ với anh qua :
Số điện thoại : 0977.543.462
Hệ thống Video đi cùng cuốn sách: http://bikiptheluc.com/ebook
Group : https://www.facebook.com/groups/bikiptheluc/
Fanpage: https://www.facebook.com/bikipcasio
Website: http://bikiptheluc.com hoặc http://luyenthipro.vn
Kênh youtube: https://www.youtube.com/user/MrTheluc95