3.PHƯƠNG PHÁP XÉT CHIỀU BIẾN THIÊN HÀM SỐ

Bài toán 7(A – 2013). $\begin{cases} \sqrt{1+x}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y & (1) \\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0 & (2) \end{cases}$

Giải: Điều kiện : $x \geq 1$. Phương trình $(1) \Leftrightarrow \sqrt{1+x}+\sqrt[4]{x-1}=y+\sqrt{y^4+2}$.

Đặt $u=\sqrt[4]{x-1}, u \geq 0 \quad \Rightarrow x=u^4+1 \Rightarrow \sqrt{x+1}=u^4+2$

Khi đó,phương trình (1) trở thành :

$u+\sqrt{u^4+2}=y+\sqrt{y^4+2}\,(3)$

Xét phương trình (2) : $x^2+2(y-1)x+y^2-6y+1=0$

Xem x là ẩn, y là tham số, ta có : $\Delta = 4y$

Phương trình có nghiệm $y \geq 0$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^4+2}, t \in [0;+\infty)$

$$f'(t)=1+\frac{2t^2}{\sqrt{t^4+2}}>0, \forall t \in [0;+\infty)$$

Suy ra hàm số liên tục và đồng biến trên $[0;+\infty)$

Từ đó, phương trình $(3) \Leftrightarrow u=y \Leftrightarrow \sqrt[4]{x-1}=y$.

$\Leftrightarrow y^4=x-1 \Leftrightarrow x=y^4+1\,(4)$

Thế (4) vào phương trình (2) ta được :

$$(y^4+1)^2+2(y^4+1)(y-1)+y^2-6y+1=0$$

$$\Leftrightarrow y^8+2y^5+y^2-4y=0 \quad \Leftrightarrow y(y-1)(y^6+y^5+y^4+3y^3+3y^2+3y+4)=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=1 \\ y=1 \Rightarrow x=0, loai \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(1;0)$

Bài toán 11. $\begin{cases} x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=4 & (1) \\ x^2+\sqrt{x-1}=y^2+\sqrt{y-1} & (2) \end{cases}$

Giải:

Điều kiện : $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 1 \end{cases}$. Xét hàm số $f(t)=t^2+\sqrt{t-1}, t \in [1;+\infty)$

$f'(t)=2t+\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}>0, \forall t \in [1;+\infty)$. Suy ra hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$

Từ đó, phương trình $(2) \Leftrightarrow x=y$.

$(1) \Leftrightarrow 2x\sqrt{x-1}=4 \Leftrightarrow x^2(x-1)=4 \Leftrightarrow x^3-x^2-4=0 \Leftrightarrow x=2=y$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(2;2)$.

Bài toán 2. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+x-y=0 & (1) \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{3x+2y}=-1 & (2) \end{cases}$

Giải: Điều kiện : $0 \le x, y \le 1$

Lấy phương trình (1) trừ phương trình (2) vế với vế, ta được :

$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$ $(*)$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}, t \in [0;1]$

$f'(t)=\dfrac{-1}{t^2\sqrt{1-t^2}}<0, \forall t \in [0;1]$

Suy ra hàm số liên tục và nghịch biến trên [0; 1]

Từ đó, phương trình $(*) \Leftrightarrow x = y$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2\left(1-x^2\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -4x^4 + 4x^2 - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, loai \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} = y \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Bài toán 17. $\begin{cases} \sqrt{x^2-1} + 3\sqrt{y^2+1} = \sqrt{10\left(x^2+y^2\right)} & (1) \\ \sqrt{x-2} - \sqrt{16-2x} + 2y^2 - 628 = 0 & (2) \end{cases}$

Giải: Điều kiện : $\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ 16-2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x \le 8$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cop-xki cho 4 số : $1, \sqrt{x^2-1}, 3, \sqrt{y^2+1}$ ta được

$$\sqrt{x^2-1} + 3\left(\sqrt{y^2+1}\right) \le \sqrt{1^2+3^2}.\sqrt{x^2-1+y^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} + 3\left(\sqrt{y^2+1}\right) \le \sqrt{10\left(x^2+y^2\right)}$$

Do phương trình (1) nên dấu “ =” xảy ra. Khi đó ta có :

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{1} = \frac{\sqrt{y^2+1}}{3} \Leftrightarrow 9\left(x^2-1\right) = y^2+1 \Leftrightarrow 9x^2 - 10 = y^2$$

Thế $9x^2 - 10 = y^2$ vào phương trình (2), ta được :

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{16-2x} + 2\left(9x^2-10\right) - 628 = 0 \qquad (3)$$

Xét hàm số : $f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{16-2x} + 2\left(9x^2-10\right) - 628, \ \mathrm{x} \in [2;8]$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{16-2x}} + 36x > 0, \ \forall \mathrm{x} \in (2;8)$$

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên (2; 8) và $f(6)=0$ do đó phương trình (3) có nghiệm duy nhất x = 6. Với x = 6 ta có $y=\pm\sqrt{314}$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm : $\left(6;\sqrt{314}\right);\left(6;-\sqrt{314}\right)$

Bài toán 65. $\begin{cases}\sqrt{x+5}+\sqrt{y-2}=7 & (1)\\ \sqrt{x-2}+\sqrt{y+5}=7 & (2)\end{cases}$

Giải: Điều kiện : $\begin{cases}x\ge 2\\ y\ge 2\end{cases}$

Lấy phương trình (1) trừ đi phương trình (2) vế với vế, ta được :

$\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}=\sqrt{y+5}-\sqrt{y-2}\quad (3)$

Xét hàm số : $f(t)=\sqrt{t+5}-\sqrt{t-2}$,t $\in$ $[2;+\infty)$

$$f'(t)=\frac{\sqrt{t-2}-\sqrt{t+5}}{2\sqrt{t+5}.\sqrt{t-2}}<0,\forall t\ge 2$$

Vậy hàm số nghịch biến trên $[2;+\infty)$.

Phương trình $(3)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$

Khi đó, hệ phương trìnhtrở thành : $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}=7$

$\Leftrightarrow 2x+3+2\sqrt{x+5}.\sqrt{x-2}=49 \quad \Leftrightarrow \sqrt{x+5}.\sqrt{x-2}=23-x$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2\le x\le 23\\ (x+5)(x-2)=(23-x)^2\end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases}2\le x\le 23\\ 49x-539=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{539}{49}=y$

Hệ phương trình có 1 nghiệm $\left(\frac{539}{49};\frac{539}{49}\right)$

Bài toán 78. $\begin{cases}x\left(x^2+y^2\right)=y^4\left(1+y^2\right) & (1)\\ \sqrt{4x-5}+\sqrt{y^2+8}=6 & (2)\end{cases}$

Giải: Điều kiện : $x \geq 0$

Nếu y = 0 thì phương trình(1) tương đương : $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, không thỏa hệ.

Xét $y \neq 0$: phương trình $(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3 + \frac{x}{y} = y^3 + y \quad (3)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, \quad t \in \mathbb{R}$; $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra, hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$

$(3) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2 \quad (4)$. Thế (4) vào phương trình(2) ta được :

$$\sqrt{4y^2+5} + \sqrt{y^2+18} = 6 \quad \Leftrightarrow 2\sqrt{\left(4y^2+5\right)\left(y^2+18\right)} = 23 - 5y^2$$

Điều kiện : $23 - 5y^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{115}}{5} \leq y \leq \frac{\sqrt{115}}{5}$

Bình phương 2 vế của phương trình trên, ta được :

$$4\left(4y^4 + 37y^2 + 40\right) = \left(23 - 5y^2\right)^2 \quad \Leftrightarrow 9y^4 - 378y^2 + 369 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = 1 = x \\ y^2 = 41, loai \end{array}\right. \Leftrightarrow y = \pm 1$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(1;1),(1;-1)$

Bài toán 89. $\begin{cases} 2\left(x^3 + 2x - y - 1\right) = x^2\left(y+1\right) & (1) \\ y^3 + 4x + 1 + \ln\left(y^2 + 2x\right) = 0 & (2) \end{cases}$

Giải: Điều kiện : $y^2 + 2x > 0$

Phương trình(1) $\Leftrightarrow 2\left(x^3 + 2x\right) - 2\left(y+1\right) - x^2\left(y+1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x\left(x^2+2\right) - \left(y+1\right)\left(x^2+2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \left(2x - y - 1\right)\left(x^2+2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 2x - 1 \quad (3)$$

Thế (3) vào phương trình(2) ta được :

$$\left(2x-1\right)^3+4x+1+\ln\left[\left(2x-1\right)^2+2x\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x-1\right)^3+4x+1+\ln\left[\left(2x-1\right)^2+2x\right]=0 \quad (*)$$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\left(2x-1\right)^3+4x+1+\ln\left[\left(2x-1\right)^2+2x\right],\ x\in\mathbb{R}$

$$f'\left(x\right)=3\left(2x-1\right)^2+4+\frac{8x-2}{4x^2-2x+1}$$

$$f'\left(x\right)=\frac{3\left(2x-1\right)^2\left(4x^2-2x+1\right)+16x^2+2}{4x^2-2x+1}>0,\forall x\in\mathbb{R}$$

Suy ra, hàm số f(x) đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$. Mặt khác , f(0) = 0

Vậy phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất x = 0, suy ra y = -1

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\left(0;-1\right)$.

Bài toán 90. $\begin{cases} x^3y-y^4=278 \\ x^2y+2xy^2+y^3=100 \end{cases}$

Giải:

Hệ phương trìnhtương đương với $\begin{cases} y\left(x^3-y^3\right)=278 & (1) \\ y\left(x+y\right)^2=100 & (2) \end{cases}$

Từphương trình (2) suy ra y > 0.Viết lạiphương trình (1) :

$y\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)=278$. . Vì y > 0 và $x^2+xy+y^2>0,\forall x,y\in\mathbb{R}$

nên (1) $x-y>0\Rightarrow x>y>0$ .Phương trình(2) $\Leftrightarrow x=\frac{10}{\sqrt{y}}-y \quad (3)$

Thế (3) vào phương trình(1) ta được :

$y\left[\left(\dfrac{10}{\sqrt{y}}-y\right)^3-y^3\right]=278$. Đặt $t=\sqrt{y}, t>0$, ta có phương trình :

$t^2\left[\left(\dfrac{10}{t}-t^2\right)^3-t^6\right]=278 \quad \Leftrightarrow t^9-\left(10-t^3\right)^3+278t=0 \quad (*)$

Xét hàm số $f(t)=t^9-\left(10-t^3\right)^3+278t=0, t\in(0;+\infty)$

$f'(t)=9t^8+9t^2\left(10-t^3\right)^2+278>0, \forall t\in(0;+\infty)$

Suy ra, hàm số f(t) đồng biến và liên tục trên $(0;+\infty)$. Mặt khác , f(1) = 0

Vậy phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất t = 1.

Từ đó, $\sqrt{y}=1 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=9$. Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(9;1)$.

Bài toán 109. $\begin{cases}(3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0 & (1)\\ 2\sqrt{2-x} - \sqrt{(2y-1)^3} = 1 & (2)\end{cases}$

Giải : Điều kiện : $\begin{cases} y\ge \dfrac{1}{2}\\ x\le 2\end{cases}$. Phương trình (1) $\Leftrightarrow (3-x)\sqrt{2-x}=2y\sqrt{2y-1}$

$\Leftrightarrow (1+2-x)\sqrt{2-x}=(1+2y-1)\sqrt{2y-1}$ (3)

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{2-x}\\ v=\sqrt{2y-1}\end{cases} \Rightarrow u,v\ge 0$

Phương trình (3) $\Leftrightarrow \left(1+u^2\right)u=\left(1+v^2\right)v \Leftrightarrow u^3+u=v^3+v \quad (*)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t, t\ge 0$; $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\ge 0$

Suy ra, hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Phương trình $(*) \Leftrightarrow u=v \Leftrightarrow \sqrt{2-x}=\sqrt{2y-1}$

$\Leftrightarrow 2-x=2y-1 \Leftrightarrow x=3-2y$

Thế : **x = 3 – 2y** vào phương trình (2) ta được : $2\sqrt{2y-1}-\sqrt{(2y-1)^3}=1$

Đặt $X=\sqrt{2y-1}\ge 0$, phương trình trở thành :

$$-X^3+2X-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=1 \\ X=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ X=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}, loai \end{array}\right.$$

$\bullet X=1 \Leftrightarrow \sqrt{2y-1}=1 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=1$

$\bullet X=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2y-1}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\Leftrightarrow 2y-1=\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow y=\dfrac{5-\sqrt{5}}{4} \Rightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm : $(1;1),\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{3};\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}\right)$.

Bài toán 115. $\begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 8-x^3 \\ (x-1)^4 = y \end{cases}$

Giải : Điều kiện : $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge 0 \end{cases}$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 8-x^3 \\ (x-1)^2 = \sqrt{y} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - (x-1)^2 = 8-x^3 \quad (1) \\ (x-1)^2 = \sqrt{y} \end{cases}$$

Xét phương trình (1) : $\sqrt{x-1} - (x-1)^2 = 8-x^3$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}$ - x^2 + 2x - 1= $8-x^3$

$\Leftrightarrow$ x^3 - x^2 + 2x + $\sqrt{x-1}$ - 9= 0 $\quad (*)$

Xét hàm số : $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + \sqrt{x-1} - 9, x \geq 1$

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}, \ x \neq 1$

Xét hàm số : $g(x) = 3x^2 - 2x$, $x \geq 1$

$g'(x) = 6x - 2 > 0$, $\forall x \geq 1$

Hàm số g(x) đồng biến trên $[1;+\infty)$

$\Rightarrow g(x) \geq g(1), \forall x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq 1, \forall x \geq 1$

$\Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \geq 1$

Vậy hàm số f(x) đồng biến trên $[1;+\infty)$

Mặt khác, f(2) = 0.Suy ra, phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất x = 2, y = 1

Hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm : $(2;1)$.

<u>Bài toán 121(THPTQG 2014-2015).</u> $\begin{cases} \left(1+\sqrt{y}\right)^2 + \dfrac{y^2}{x} = y^2 + 2\sqrt{x-2} & (1) \\ x + \dfrac{x-1}{y} + \dfrac{y}{x} = y^2 + y & (2) \end{cases}$

<u>Giải :</u> Điều kiện : $\begin{cases} x \geq 2 \\ y > 0 \end{cases}$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow x^2y + x(x-1) + y^2 = y^3x + y^2x$

$\Leftrightarrow x(xy+x) + y^2 - x = y^2\left(y^3x + y^2x\right)$

$\Leftrightarrow (xy+x)\left(x-y^2\right) - y^2(xy+x) = 0$

$\Leftrightarrow (xy+x)(x-y^2)-(x-y^2)=0 \ \Leftrightarrow (xy+x-1)(x-y^2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y^2=0 \\ xy+x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y^2 \\ x(y+1)=1 \end{array}\right.$

$\bullet x=y^2 \ge 0$, thế vàophương trình (1) ta được :

$(\sqrt{y}+1)^2+\dfrac{y^2}{y^2}=y^2+2\sqrt{y^2-2} \ \Leftrightarrow y+2\sqrt{y}+2-y^2-2\sqrt{y^2-2}=0$

$\Leftrightarrow y+2\sqrt{y}-(y^2-2)-2\sqrt{y^2-2}=0 \ \Leftrightarrow y+2\sqrt{y}=(y^2-2)+2\sqrt{y^2-2}$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{y} \\ v=\sqrt{y^2-2} \end{cases} \Rightarrow u,v \ge 0$, Phương trình trở thành : $u^2+2u=v^2+3v \quad (*)$

Xét hàm số : $f(x)=t^2+2t,\ \ \mathrm{t}\in[0;+\infty)$

$f'(t)=2t+2>0, \forall t \ge 0$

Suy ra, hàm số f(t) đồng biến và liên tục trên $[0;+\infty)$

Phương trình $(*) \Leftrightarrow u=v \Leftrightarrow \sqrt{y}=\sqrt{y^2-2}$

$\Leftrightarrow y=y^2-2 \Leftrightarrow y^2-y-2=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1, loai \\ y=2 \Rightarrow x=4 \end{array}\right.$

$\bullet x(y+1)=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{y+1}$

Do x ≥ 2 $\Rightarrow \dfrac{1}{y+1} \ge 2 \Leftrightarrow 2y+2 \le 1 \Leftrightarrow y \le -\dfrac{1}{2}$, vô lý.

Vậy hệ phương trình có nghiệm : $(4;2)$

<u>Bài toán 128</u>(Chuyên Lê Hồng Phong) $\begin{cases} xy^2\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)=y+\sqrt{1+y^2} & (1) \\ \dfrac{4y-1}{\sqrt{1+3y}+\sqrt{2-y}}+4\sqrt{\dfrac{1}{xy}+3}=\dfrac{1}{xy}+8 & (2) \end{cases}$

Giải : Phương trình (2) $\Leftrightarrow \dfrac{4y-1}{\sqrt{1+3y}+\sqrt{2-y}} = \dfrac{1}{xy} - 4\sqrt{\dfrac{1}{xy}+3} + 8$ (3)

Với $xy \neq 0$, đặt $u = \sqrt{\dfrac{1}{xy}+3}, u \geq 0$,ta có :

$\dfrac{1}{xy} - 4\sqrt{\dfrac{1}{xy}+3} + 8 = u^2 - 4u + 5 \quad \Leftrightarrow \dfrac{1}{xy} - 4\sqrt{\dfrac{1}{xy}+3} + 8 = (u-2)^2 + 1 \geq 0$

Từ phương trình (3) ta có : $4y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq \dfrac{1}{4}$

Ta lại có : $\begin{cases} \sqrt{y^2+1} \geq \sqrt{y^2} = |y| \\ |y| \geq y \end{cases} \Rightarrow y + \sqrt{y^2+1} \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}$

Từ phương trình (1) ta suy ra : $x \geq 0$. Điều kiện : $\begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{1}{4} \leq y \leq 2 \end{cases}$

Ta có : $xy^2\left(1+\sqrt{x^2+1}\right) = y + \sqrt{1+y^2} \quad \Leftrightarrow x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right) = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\sqrt{1+y^2}}{y}$

$\Leftrightarrow x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right) = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y}\sqrt{\dfrac{1+y^2}{y^2}} \quad \Leftrightarrow x + x\sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y}\sqrt{\left(\dfrac{1}{y}\right)^2+1}$

$\Leftrightarrow f(x) = f\left(\dfrac{1}{y}\right)$. Xét hàm số : $f(t) = t + t\sqrt{t^2+1}$ $t \in \mathbb{R}$

$f'(t) = 1 + \sqrt{t^2+1} + \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra, hàm số f(t) đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$

Xét 2 điểm $M(x, f(x)), N\left(\dfrac{1}{y}, f\left(\dfrac{1}{y}\right)\right)$ thuộc đồ thị hàm số f(t).

Ta có : $y_M = y_N$ và hàm số f(t) đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$ nên

$x_M = x_N \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow xy = 1$ (3)

Xét phương trình (1) : $\sqrt{y+2} + 4\sqrt[4]{y+2} = 3x^3 + 3x - 1$

Thế (3) vào phương trình (1) ta được : $x^4 + 4x^2 = 3x^3 + 3x - 1$

$\Leftrightarrow x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$ (4)

Nếu x = 0, không thỏa phương trình (4), xét x $\neq$ 0.

Chia 2 vế củaphương trình (4) cho x^2 ta được :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 3x - \frac{3}{x} + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \left(x^2 + 2.x.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + 2.x.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$, phương trình trở thành :

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$$

$\bullet t = 1 \Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x} = 1 \quad \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0, \text{VN}$

$\bullet t = 2 \Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x} = 2 \quad \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \text{x} = 1 \Rightarrow \text{y} = -1$ thỏa điều kiện : $y \geq -2$

Hệphương trìnhphương trình có nghiệm duy nhất : $(1;-1)$

<u>Bài toán 134</u>.(Chuyên Hạ long) $\begin{cases} 3y\sqrt{x+2} + 8\sqrt{x+2} = 10y - 3xy + 12 & (1) \\ 5y^3\sqrt{2-x} - 8 = 6y^2 + xy^3\sqrt{2-x} & (2) \end{cases}$

<u>Giải</u> : Điều kiện : $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ 2-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\le x\le 2$

$y=0$ không thỏa phương trình (2).

Chia 2 vế của phương trình (2) cho y^3 ta được :

$$5\sqrt{2-x}-\frac{8}{y^3}=\frac{6}{y}+x\sqrt{2-x} \Leftrightarrow (2-x-2)\sqrt{2-x}+5\sqrt{2-x}=\frac{6}{y}+\left(\frac{2}{y}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2-x}\right)^3+3\sqrt{2-x}=\left(\frac{2}{y}\right)^3+3.\frac{2}{y} \qquad (3)$$

Xét hàm số : $f(t)=t^3+3t, t\in\mathbb{R}$; $f'(t)=3t^2+3>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Hàm số f(t) đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$(3)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{2-x}\right)=f\left(\frac{2}{y}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2-x}=\frac{2}{y} \Leftrightarrow \begin{cases} y>0, x\ne 2 \\ y=\dfrac{2}{\sqrt{2-x}} \end{cases} (4)$$

Thế (4) vào phương trình (1) ta được :

$$\frac{6}{\sqrt{2-x}}\sqrt{x+2}+8\sqrt{x+2} = \frac{20}{\sqrt{2-x}} - x\frac{6}{\sqrt{2-x}} + 12$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x+2} - 6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x \quad (5)$$

Đặt : $t=3\sqrt{x+2} - 6\sqrt{2-x}$

$$t=3\sqrt{x+2} - 6\sqrt{2-x} \Rightarrow t^2=9(x+2)+36(2-x)-36\sqrt{4-x^2} =90-27x-36\sqrt{4-x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{90-27x-t^2}{9}=4\sqrt{4-x^2} \ (6)$$

Thế (6) vào phương trình (5) ta được :

$$t+ \frac{90-27x-t^2}{9} = 10 - 3x \qquad \Leftrightarrow -t^2+9t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=9 \end{array}\right.$$

• $t=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x+2}$ - $6\sqrt{2-x}=0$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x+2}$ = $6\sqrt{2-x} \Leftrightarrow 9\left(x+2\right)=36\left(2-x\right) \quad \Leftrightarrow 45x-54=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{6}{5} \Rightarrow y=\sqrt{5}$

• $t=9 \Leftrightarrow 3\sqrt{x+2}$ - $6\sqrt{2-x}=9 \quad \Leftrightarrow 3\sqrt{x+2}=9+6\sqrt{2-x}$

$\Leftrightarrow 9\left(x+2\right)=81+36\left(2-x\right)+108\sqrt{2-x}$

$\Leftrightarrow 5x-15=12\sqrt{2-x}$, vô nghiệm vì : 5x – 15 < 0, $\forall x \in \left[-2;2\right]$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $\left(\dfrac{6}{5};\sqrt{5}\right)$

<u>Bài toán 135</u>.(THPT Nghi Sơn) $\begin{cases} 2y^3+12y^2+25y+18=\left(2x+9\right)\sqrt{x+4} & \left(1\right) \\ \sqrt{3x+1}+3x^2-14x-8=\sqrt{6-4y-y^2} & \left(2\right) \end{cases}$

<u>Giải</u> : Điều kiện : $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 \ge 0 \\ 6-4y-y^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{3} \\ -2-\sqrt{10} \le y \le -2+\sqrt{10} \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 2\left(y^3+6y^2+\dfrac{25}{2}y+9\right)=2\left(x+\dfrac{9}{2}\right)\sqrt{x+4}$

$\Leftrightarrow 2\left(y^3+6y^2+12y+8+\dfrac{1}{2}y+1\right)=2\left(x+4+\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{x+4}$

$\Leftrightarrow 2\left(y+2\right)^3+\left(y+2\right)=2\left(\sqrt{x+4}\right)^3+\sqrt{x+4} \quad \left(3\right)$

Xét hàm số : $f\left(t\right)=2t^3+t, t \in \mathbb{R}$; $f'\left(t\right)=6t^2+1>0, \forall t \in \mathbb{R}$

Hàm số f(t) đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$ và

Phương trình $\left(3\right) \Leftrightarrow f\left(y+2\right)=f\left(\sqrt{x+4}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+4}=y+2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le y \le -2+\sqrt{10} \\ y^2+4y+4=x+4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le y \le -2+\sqrt{10} \\ -y^2-4y=-x \quad (4) \end{cases}$$

Thế (4) vào phương trình (2) ta được :

$$\sqrt{3x+1}+3x^2-14x-8=\sqrt{6-x} \quad \Leftrightarrow \sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}-4+1-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-5=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(x-5)(3x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \Rightarrow y=1 \\ \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1=0,\ VN\ \forall x \ge -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Hệphương trình có nghiệm duy nhất : $(5;1)$

<u>Bài toán 136</u>.(Sở GDĐT Thanh Hóa) $\begin{cases} x^2y+x^2+1=2x\sqrt{x^2y+2} & (1) \\ y^3\left(x^6-1\right)+3y\left(x^2-2\right)+3y^2+4=0 & (2) \end{cases}$

<u>Giải</u> Điều kiện : $\Leftrightarrow x^2y+2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2y \ge -2$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow y^3x^6-y^3+3yx^2-6y+3y^2+4=0$

$$\Leftrightarrow y^3x^6+3yx^2=y^3-3y^2+6y-4 \quad \Leftrightarrow \left(yx^2\right)^3+3yx^2=(y-1)^3-3(y-1) \qquad (3)$$

Xét hàm số : $f(t)=t^3+3t, t\in\mathbb{R}$; $f'(t)=3t^2+3>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Hàm số f(t) đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$(3) \Leftrightarrow f\left(yx^2\right)=f(y-1) \quad \Leftrightarrow x^2y=y-1 \quad (4)$.Điều kiện : $y-1 \ge -2 \Leftrightarrow y \ge -1$

Thế (4) vào phương trình (1) ta được :

$$y+x^2=2x\sqrt{y+1} \Leftrightarrow y+1+x^2-1-2x\sqrt{y+1}=0 \quad \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{y+1}\right)^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{y+1}+1\right)\left(x-\sqrt{y+1}-1\right)=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\sqrt{y+1}+1=0 \\ x-\sqrt{y+1}-1=0 \end{array}\right.$$

$$\bullet x-\sqrt{y+1}+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{y+1}=x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ y+1=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ y+1=(x+1)^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ y=x^2+2x \quad (5) \end{cases}$$

Thế (5) vàophương trình (4) ta được :

$$x^2\left(x^2+2x\right)=x^2+2x-1 \quad \Leftrightarrow x^4+2x^3+x^2-2x^2-2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x\right)^2-2\left(x^2+x\right)+1=0 \quad \Leftrightarrow \left(x^2+x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow x^2+x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, loai \end{array}\right.$$

$$\bullet x-\sqrt{y+1}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{y+1}=x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ y+1=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ y+1=(x-1)^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ y=x^2-2x \quad (6) \end{cases}$$

Thế (6) vào phương trình (4) ta được :

$$x^2\left(x^2-2x\right)=x^2-2x-1 \quad \Leftrightarrow x^4-2x^3-x^2+2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x^4-2x^3+x^2-2x^2+2x+1=0 \quad \Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, loai \end{array}\right.$$

Hệ phương trình có 2 nghiệm : $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

Bài toán 139.(THPT Can Lộc) $\begin{cases} 2x\left(x^2+3\right) - y\left(y^2+3\right) = 3xy\left(x-y\right) & (1) \\ \left(x^2-2\right)^2 = 4\left(2-y\right) & (2) \end{cases}$

Giải : Từ phương trình (2) suy ra : $2-y\ge 0 \Leftrightarrow y\le 2$

(1) $\Leftrightarrow 2x^3+6x - y^3 - 3y - 3x^2y + 3xy^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^3+3x + \left(x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2\right) - 3y + 3x = 0$

$\Leftrightarrow x^3+3x + \left(x - y\right)^3 - 3y + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow x^3+3x = \left(y - x\right)^3 + 3\left(y-x\right) \quad (3)$

Xét hàm số : $f\left(t\right)=t^3+3t, t\in\mathbb{R}$; $f'\left(t\right)=3t^2+3>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Hàm số f(t) đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$(3)\Leftrightarrow f\left(x\right) = f\left(y-x\right) \Leftrightarrow x = y - x \Leftrightarrow y = 2x$.Điều kiện : $2x\le 2\Leftrightarrow x\le 1$

Thế y = 2x vào phương trình (2) ta được :

$\left(x^2-2\right)^2 = 4\left(2-2x\right) \Leftrightarrow x^4 = 4\left(x-1\right)^2 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 2\left(x-1\right) \\ x^2 = -2\left(x-1\right) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+2=0, VN \\ x^2+2x-2=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1+\sqrt{3} \Rightarrow y=-2+2\sqrt{3} \\ x=-1-\sqrt{3} \Rightarrow y=-2-2\sqrt{3} \end{array}\right.$

Hệ có 2 nghiệm : $\left(-1+\sqrt{3};-2+2\sqrt{3}\right);\left(-1-\sqrt{3};-2-2\sqrt{3}\right)$

Bài toán 142. $\begin{cases} xy+2 = y\sqrt{x^2+2} & (1) \\ y^2+2\left(x+1\right)\sqrt{x^2+2x+3} = 2x^2 - 4x & (2) \end{cases}$

Giải : (1) $\Leftrightarrow y\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=2 \quad (3)$. Vì $\sqrt{x^2+2}-x>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow y>0$

Phương trình (3) $\Leftrightarrow \frac{2y}{\sqrt{x^2+2}+x}=2 \Leftrightarrow y=\sqrt{x^2+2}+x \quad (4)$

Thế (4) vào phương trình (2), ta được :

$$\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)^2+2(x+1)\sqrt{x^2+2x+3} = 2x^2 - 4x.$$

$$\Leftrightarrow 1+x\sqrt{x^2+2}+2x+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+2}+x=-(x+1)\sqrt{\left[-(x+1)\right]^2+2} -(x+1) \quad (5)$$

Xét hàm số : $f(t)=t\sqrt{t^2+2}+t, t\in\mathbb{R}$ $\quad f'(t)=\sqrt{t^2+2}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Hàm số f(t) đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$ và

Phương trình $(5) \Leftrightarrow f(x)=f\left(-(x+1)\right) \Leftrightarrow x=-x-1 \quad \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=1$

Hệ phương trình có 1 nghiệm : $\left(-\frac{1}{2};1\right)$

Bài toán 143.(THPT Triệu Sơn 4) $\begin{cases} 2y^3+y+2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} & (1) \\ \sqrt{2y^2+1} - y = 2 - x & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} 1-x\ge 0 \\ y+2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ y+2-x>0 \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 2y^3+y = 3\sqrt{1-x}-(2x - 1 + 1)\sqrt{1-x}$

$$\Leftrightarrow 2y^3+y = \sqrt{1-x}+2(1-x)\sqrt{1-x} \qquad \Leftrightarrow 2y^3+y = 2\left(\sqrt{1-x}\right)^3+\sqrt{1-x} \quad (3)$$

Xét hàm số : $f(t)=2t^3+t, t\in\mathbb{R}$ $\quad f'(t)=6t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Hàm số f(t) đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$ và

Phương trình $(3) \Leftrightarrow f(y) = f\left(\sqrt{1-x}\right) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x}, y \geq 0$

$\Leftrightarrow y^2 = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - y^2 \quad (4)$

Thế (4) vào phương trình (2), ta được :

$\sqrt{2y^2+1}$ - y = 2 - $\left(1-y^2\right)$ $\Leftrightarrow \sqrt{2y^2+1}$ - y - y^2- 1= 0

$$\Leftrightarrow \frac{y^2+1}{\sqrt{2y^2+1}+y} - \left(y^2+1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2y^2+1}+y} - 1\right)\left(y^2+1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2y^2+1}+y} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2y^2+1} + y = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2y^2+1} = 1 - y \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 1 \\ 2y^2+1 = (1-y)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 1 \\ y^2 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2, loai \\ y = 0 \Rightarrow x = 1 \end{array}\right.$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $(1;0)$

Bài toán 144. $\begin{cases} x^2 - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{x}{y} \\ \sqrt{5y-1} - x\sqrt{y} = 1 \end{cases}$

Giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \geq \dfrac{1}{5} \end{cases}$. Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^3y - y = xy^2 - x^2$

$$\Leftrightarrow x^2(xy+1) - y(xy+1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \left(x^2 - y\right)(xy+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = y \\ xy = -1 \end{array}\right.$$

• $x^2 = y$. Thế vào phương trình (2) ta được :

$\sqrt{5x^2-1}$ - x$|x|$ = 1 $\Leftrightarrow \sqrt{5x^2-1}$ = 1 + x$|x|$ $\quad (3)$

TH 1 : $x>0:(3)\Leftrightarrow\sqrt{5x^2-1}=1+x^2\quad\Leftrightarrow 5x^2-1=1+2x^2+x^4$

$$\Leftrightarrow x^4-3x^2+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=2\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=1\\x=\sqrt{2}\Rightarrow y=2\end{array}\right.$$

TH 2 : $x<0:(3)\Leftrightarrow\sqrt{5x^2-1}=1-x^2\quad\Leftrightarrow 5x^2-1=1-2x^2+x^4$

$$\Leftrightarrow x^4-7x^2+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\dfrac{7+\sqrt{41}}{2}\\x^2=\dfrac{7-\sqrt{41}}{2}\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{\dfrac{7+\sqrt{41}}{2}}\Rightarrow y=\dfrac{7+\sqrt{41}}{2}\\x=-\sqrt{\dfrac{7-\sqrt{41}}{2}}\Rightarrow y=\dfrac{7-\sqrt{41}}{2}\end{array}\right.$$

$\bullet xy=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{y}$ .Thế vào (2) ta được :

$$\sqrt{5y-1}+\frac{1}{y}\sqrt{y}=1\Leftrightarrow\sqrt{5y-1}+\frac{1}{\sqrt{y}}=1\quad\Leftrightarrow\sqrt{y(5y-1)}+1=\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow y(5y-1)+1+2\sqrt{y(5y-1)}=y$$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{y(5y-1)}=-5y^2+2y-1,VN$ (do vế trái không âm, vế phải âm)

Hệ phương trình có 4 nghiệm : $(1;1);\left(\sqrt{2};2\right);\left(-\sqrt{\dfrac{7+\sqrt{41}}{2}};\dfrac{7+\sqrt{41}}{2}\right);\left(-\sqrt{\dfrac{7-\sqrt{41}}{2}};\dfrac{7-\sqrt{41}}{2}\right)$

Bài toán 145. $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2 & (1)\\ 12y^2-10y+2=2\sqrt[3]{x^3+1} & (2)\end{cases}$

Giải : Phương trình (1) $\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=\dfrac{2}{y+\sqrt{y^2+1}}$ (3)

Vì : $y-\sqrt{y^2+1}\neq 0,\forall y\in\mathbb{R}$ nên : $(3)\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=\dfrac{2\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)}{-1}$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=\sqrt{(-2y)^2+4}+(-2y)\quad(4)$$

Xét hàm số : $f(t)=t+\sqrt{t^2+4}, t\in\mathbb{R}$ $\quad f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Hàm số f(t) đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$(4)\Leftrightarrow f(x)=f(-2y)\Leftrightarrow x=-2y$

Thế **x = -2y** vào phương trình (2), ta được :

$3x^2+5x+2=2\sqrt[3]{x^3+1} \quad \Leftrightarrow (x+1)^3+2(x+1)=(x^3+1)+2\sqrt[3]{x^3+1} \quad (5)$

Xét hàm số : $g(t)=t^3+2t, t\in\mathbb{R}$ $\quad g'(t)=3t^2+2>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Hàm số g(t) đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$ và

Phương trình $(5)\Leftrightarrow g(x+1)=g\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{x^3+1}$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3=x^3+1\Leftrightarrow 3x^2+3x=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=0 \\ x=-1\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Hệ phương trình có 2 nghiệm : $(0;0);\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$

Bài toán 146.

$$\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x-2=0 & (1) \\ -x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+2=0 & (2)\end{cases}$$

Giải : Điều kiện : $\begin{cases} 1-x^2\ge 0 \\ 2y-y^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ 0\le y\le 2\end{cases}\Rightarrow -1\le y-1\le 1$

phương trình (1) $\Leftrightarrow x^3-3x=y^3-3y^2+3y-1+3-3y$

$\Leftrightarrow x^3-3x=(y-1)^3-3(y-1) \quad$ (3)

Xét hàm số : $f(t)=t^3-3t, t\in[-1;1]$ $\quad f'(t)=3t^2-3, t\in[-1;1]$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow 3t^2-3=0 \Leftrightarrow t=\pm 1$ $\quad\quad\quad \Rightarrow f'(t)<0, \forall t \in [-1;1]$

t	-1		1
f'(t)		-	0
f(t)	2	$\searrow$	-2

Hàm số f(t) nghịch biến và liên tục trên $[-1;1]$ và

Phương trình $(3) \Leftrightarrow f(x)=f(y-1) \Leftrightarrow x=y-1 \Leftrightarrow y=x+1$

Thế **x +1 = y** vào phương trình (2), ta được :

$-x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{1-x^2}+2=0 \quad\quad \Leftrightarrow -x^2-2\sqrt{1-x^2}+2=0$

$\Leftrightarrow 1-x^2-2\sqrt{1-x^2}+1=0 \quad\quad \Leftrightarrow \left(1-\sqrt{1-x^2}\right)=0 \Leftrightarrow 1-x^2=1 \Leftrightarrow x=0$

Hệ phương trình có 1 nghiệm : $(0;1)$

<u>Bài toán 146</u>

$$\begin{cases} y^3\left(3x^2+2x-1\right)+4y=8 & (1) \\ y^2x^3+4y^2x-6y+5y^2=4 & (2) \end{cases}$$

<u>Giải</u> : Do y = 0 không thõa hệ phương trình nên $y \neq 0$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+2x-1=\dfrac{8}{y^3}-\dfrac{4}{y^2} \\ x^3+4x+5=\dfrac{4}{y^2}+\dfrac{6}{y} \quad\quad (*) \end{cases}$

Cộng 2 phương trình của hệ với nhau ta được :

$\Leftrightarrow x^3+3x^2+6x+4=\dfrac{8}{y^3}+\dfrac{6}{y} \quad\quad \Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1+3x+3=\left(\dfrac{2}{y}\right)^3+3\left(\dfrac{2}{y}\right)$

$\Leftrightarrow (x+1)^3+3(x+1)=\left(\dfrac{2}{y}\right)^3+3\left(\dfrac{2}{y}\right)$ $\quad\quad$ (3)

Xét hàm số : $f(t)=t^3+3t, t\in\mathbb{R}$ $\quad f'(t)=3t^2+3>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Hàm số f(t) đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$\Leftrightarrow f(x+1)=f\left(\frac{2}{y}\right)\Leftrightarrow x+1=\frac{2}{y} \quad (4)$$

Thế **(4)** vào phương trình $(*)$, ta được :

$$x^3+4x+5=(x+1)^2+3(x+1) \quad \Leftrightarrow x^3-x^2-x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=1 \\ x=-1, loai \end{array}\right.$$

Hệ phương trình có nghiệm : $(1;1)$

<u>Bài toán 155.</u> $\begin{cases} 2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x} & (1) \\ \sqrt{9-4y^2}=2x^2+6y^2-7 & (2) \end{cases}$

<u>Giải</u> : Điều kiện : $\begin{cases} 1-x\ge 0 \\ 9-4y^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ -\frac{3}{2}\le y\le\frac{3}{2} \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 2y^3+y=3\sqrt{1-x}+(2-2x-2)\sqrt{1-x}$

$$\Leftrightarrow 2y^3+y=2(1-x)\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x} \quad \Leftrightarrow 2y^3+y=2\left(\sqrt{1-x}\right)^3+\sqrt{1-x} \text{ (3)}$$

Xét hàm số : $f(t)=2t^3+t, t\in\mathbb{R}$ $\quad f'(t)=6t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Hàm số f(t) đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$

Phương trình $(3)\Leftrightarrow f(y)=f\left(\sqrt{1-x}\right)\Leftrightarrow y=\sqrt{1-x}\ge 0$

Thế vào phương trình (2) ta được : $\sqrt{4x+5}=2x^2-6x-1$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{4x+5}=4x^2-12x-2 \Leftrightarrow 2\sqrt{4x+5}+4x+5+1=4x^2-8x+4$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{4x+5}+1\right)^2=(2x-2)^2 \quad \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \sqrt{4x+5}+1=2-2x \\ \sqrt{4x+5}+1=2x-2, loai \text{ vì}: 2x-2\le 0, \forall x\le 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-2x\ge 0\\ 4x+5=(1-2x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{1}{2}\\ 4x^2-8x-4=0\end{cases}\begin{cases}x\le\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{2}, loai\\ x=1-\sqrt{2}\Rightarrow y=\pm\sqrt[4]{2}\end{array}\right.\end{cases}$$

Hệ phương trình có 2 nghiệm : $\left(1-\sqrt{2};\sqrt[4]{2}\right);\left(1-\sqrt{2};-\sqrt[4]{2}\right)$

<u>Bài toán 156</u>.

$$\begin{cases}2x^2+x+\sqrt{x+2}=2y^2+y+\sqrt{2y+1} & (1)\\ x^2+2y^2-2x+y-2=0 & (2)\end{cases}$$

<u>Giải</u> : Điều kiện : $\begin{cases}x+2\ge 0\\ 2y+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ y\ge -\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow x^2=-2y^2+2x-y+2$ (3)

Thế (3) vào phương trình (1) ta được :

$$x^2+\left(-2y^2+2x-y+2\right)+x+\sqrt{x+2}=2y^2+y+\sqrt{2y+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x+2+\sqrt{x+2}=4y^2+2y+\sqrt{2y+1}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+x+1+\sqrt{(x+1)+1}=(2y)^2+2y+\sqrt{2y+1}\ (4)$$

Xét hàm số : $f(t)=t^2+t+\sqrt{t+1}, t\in[-1;+\infty)$ $\quad f'(t)=2t+1+\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}, t\ne -1$

$f''(t)=2-\dfrac{1}{4(t+1)\sqrt{t+1}}$ $\quad f''(t)=0\Leftrightarrow 2-\dfrac{1}{4(t+1)\sqrt{t+1}}=0$

$\Leftrightarrow 8(t+1)\sqrt{t+1}=1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{t+1}\right)^3=\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \sqrt{t+1}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow t=-\dfrac{3}{4}$

Bảng biến thiên :

t	-1		-3/4		+∞
f''(t)		-	0	+	
f'(t)	+∞	↘	1/2	↗	+∞

Ta thấy $f'(t) > 0, \forall t \in [-1;+\infty)$. Hàm số f(t) đồng biến và liên tục trên $[-1;+\infty)$

Phương trình $(4) \Leftrightarrow f(x+1) = \mathrm{f}(2\mathrm{y}) \Leftrightarrow x+1 = 2y \Leftrightarrow x = 2y-1$

Thế vào phương trình (2) ta được :

$$(2y-1)^2 + 2y^2 - 2(2y-1) + y - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow 6y^2 - 7y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = \dfrac{1}{6} \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Hệ phương trình có 2 nghiệm : $(1;1);\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{6}\right)$

Bài toán 157.

$$\begin{cases} (2x+2)\sqrt{2x-1} = \mathrm{y}^3 + 3\mathrm{y} & (1) \\ y^2 - xy + 5 = 5x - 6y & (2) \end{cases}$$

Giải : Điều kiện : $x \geq \dfrac{1}{2}$**.** Phương trình (1)

$$\Leftrightarrow (2x-1+3)\sqrt{2x-1} = \mathrm{y}^3 + 3\mathrm{y} \quad \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1}\right)^3 + 3\sqrt{2x-1} = \mathrm{y}^3 + 3\mathrm{y} \text{ (3)}$$

Xét hàm số : $f(t) = t^3 + 3t, t \in \mathbb{R}$ $\qquad f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall \mathrm{t} \in \mathbb{R}$

Hàm số f(t) đồng biến và liên tục trên $[-1;+\infty)$

Phương trình $(3) \Leftrightarrow y = \sqrt{2x-1}, y \geq 0 \Leftrightarrow y^2 = 2x-1 \Leftrightarrow x = \dfrac{y^2+1}{2}$

Thế vào phương trình (2) ta được :

$$y^2 - \frac{(y^2+1)y}{2} + 5 = 5\frac{y^2+1}{2} - 6y \qquad \Leftrightarrow y^3 + 3y^2 - 11y - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+5)(y^2-2y-1)=0 \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-5, loai \\ y=1+\sqrt{2} \Rightarrow x=2+\sqrt{2} \\ y=1-\sqrt{2}, loai \end{array}\right.$$

Hệ phương trình có 1 nghiệm : $\left(2+\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$

Bài toán 158

$$\begin{cases} x+\sqrt{x\left(x^2-3x+3\right)}=\sqrt[3]{y+2}+\sqrt{y+3}+1 & (1) \\ 3\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-6x+6}=\sqrt[3]{y+2}+1 & (2) \end{cases}$$

Giải :Điều kiện : $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x^2-6x+6\geq 0 \\ y+3\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x\leq 3-\sqrt{3} \\ x\geq 3+\sqrt{3} \end{array}\right. \\ y\geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\leq x\leq 3-\sqrt{3} \\ x\geq 3+\sqrt{3} \\ y\geq -3 \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x-1)+\sqrt{(x-1)^3+1}=\sqrt[3]{y+2}+\sqrt{(y+2)+1}$ (3)

Xét hàm số : $f(t)=\sqrt{t^3+1}+t, t\in\mathbb{R}$ $\qquad f'(t)=\dfrac{3t^2}{2\sqrt{t^3+1}}+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Hàm số f(t) đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$

Phương trình $(3)\Leftrightarrow f(x-1)=f\left(\sqrt[3]{y+2}\right)\Leftrightarrow x-1=\sqrt[3]{y+2}$

Thế vào phương trình (2) ta được :

$$3\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-6x+6}=x \qquad \Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}=(x-1)+1+\sqrt{(x-1)^2-4(x-1)}$$

Xét : $x=1$ không thỏa phương trình trên.

Chia 2 vế của phương trình trên cho $\sqrt{x-1}$ ta được

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1-4+\frac{1}{x-1}}=3$$

Đặt : $t=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}>0$,phương trình trên trở thành :

$t+\sqrt{t^2-6}=3 \Leftrightarrow \sqrt{t^2-6}=3-t \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 3-t \ge 0 \\ t^2-6=(3-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 3 \\ 6t-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow 2\left(\left(\sqrt{x-1}\right)^2-5\sqrt{x-1}+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}=2 \\ \sqrt{x-1}=\frac{1}{2} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \Rightarrow y=62 \\ x=\frac{5}{4} \Rightarrow y=\frac{127}{64} \end{array}\right.$

Hệ phương trình có 2 nghiệm : $(5;62);\left(\frac{5}{4};-\frac{127}{64}\right)$

Bài toán 159.

$$\begin{cases} 3xy\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} & (1) \\ x^3\left(9y^2+1\right)+4\left(x^2+1\right)\sqrt{x}=10 & (2) \end{cases}$$

Giải : Điều kiện : $x \ge 0$. Ta thấy $x=0$ không thỏa hệ phương trình.

Xét $x>0$, Phương trình (1) $\Leftrightarrow 3y\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right)=\dfrac{1}{x\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}$, suy ra $y>0$

$\Leftrightarrow 3y+3y\sqrt{9y^2+1}=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x} \quad \Leftrightarrow 3y+3y\sqrt{(3y)^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow 3y+3y\sqrt{(3y)^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+1} \qquad (3)$

Xét hàm số : $f(t)=t+t\sqrt{t^2+1}, t>0 \qquad f'(t)=1+\sqrt{t^2+1}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0, \forall t>0$

Hàm số f(t) đồng biến và liên tục trên $(0;+\infty)$

Phương trình $(3) \Leftrightarrow f(3y)=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \Leftrightarrow 3y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Thế vào phương trình (2) ta được :

$$x^3\left(\frac{1}{x}+1\right)+4\left(x^2+1\right)\sqrt{x}=10 \qquad \Leftrightarrow x^3+x^2+4\left(x^2+1\right)\sqrt{x} - 10 = 0\ (4)$$

Xét hàm số : $g\left(x\right)=x^3+x^2+4\left(x^2+1\right)\sqrt{x} - 10,\ \text{x} > 0$

$$g'\left(x\right)=3x^2+2x+\frac{2}{\sqrt{x}}\left(x^2+1\right)+8x\sqrt{x} > 0,\ \forall \text{x} > 0$$

Hàm số f(t) đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$ và g(1) = 0. Vậy (4) có nghiệm duy nhất : $x=1\Rightarrow y=\frac{1}{3}$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $\left(1;\frac{1}{3}\right)$

Bài toán 160.

$$\begin{cases}\left(x+1\right)^2+y^2=2\left(1+\dfrac{1-y^2}{x}\right) & (1)\\ 4y^2=\left(y^2-x^3+3x-2\right)\left(\sqrt{2-x^2}+1\right) & (2)\end{cases}$$

Giải : Điều kiện : $\begin{cases}x\neq 0\\ 2-x^2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ -\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}\end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x\left(x^2+2x+1\right)+xy^2=2x-2y^2+2$

$$\Leftrightarrow x^3+2x^2-x+xy^2+2y^2-2=0 \qquad \Leftrightarrow x\left(x^2+y^2\right)+2\left(x^2+y^2\right)-\left(x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+2\right)\left(x^2+y^2\right)-\left(x+2\right)=0 \qquad \Leftrightarrow\left(x+2\right)\left(x^2+y^2-1\right)=0$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2, loai\\ x^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow x^2=1-y^2$. Ta có : $\begin{cases}\left|x\right|\leq 1\\ \left|y\right|<1\end{cases}$

Thế vào phương trình (2) ta được : $4y^2=\left(-y^2-x^3+3x-2\right)\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)$

$$\Leftrightarrow 4\left(y^2+1-1\right)=\left(-y^2-x^3+3x-2\right)\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)=\left(-y^2-x^3+3x-2\right)\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)=-y^2-x^3+3x-2 \qquad \Leftrightarrow y^2-4\sqrt{y^2+1}=x^3-3x-2 \qquad (3)$$

Xét hàm số : $f\left(x\right)=x^3-3x-2, x\in\left[-1;0\right)\cup\left(0;1\right]$

$f'\left(x\right)=3x^2-3$ $\qquad$ $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm 1$

Bảng biến thiên :

x	-1	0	1
f'(x)		-	
f(x)	0	-2	-4

Theo Bảng biến thiên ta có : $f\left(x\right)\ge -4, \forall x\in\left[-1;0\right)\cup\left(0;1\right]$ và $\min\limits_{[-1;0)\cup(0;1]} f\left(x\right)=-4\Leftrightarrow x=1$

Xét hàm số : $g\left(y\right)=y^2-4\sqrt{y^2+1}, y\in\left(-1;1\right)$

$g'\left(y\right)=2y-\dfrac{4y}{\sqrt{y^2+1}}$ $\qquad$ $g'\left(y\right)=0\Leftrightarrow 2y-\dfrac{4y}{\sqrt{y^2+1}}=0$

$$\Leftrightarrow 2y\left(1-\frac{2}{\sqrt{y^2+1}}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ 1-\dfrac{2}{\sqrt{y^2+1}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=\pm\sqrt{3}, loai \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

y	-1		0		1
g'(y)		+	0	-	
g(y)	1-4√2		-4		1-4√2

Theo Bảng biến thiên ta có : $g(y) \le -4, \forall y \in (-1;1)$ và $\max\limits_{(-1;1)} g(y) = -4 \Leftrightarrow y = 0$

$\Rightarrow (3) \Leftrightarrow f(x) = g(y) = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $(1;0)$

<u>Bài toán 161</u>.

$$\begin{cases} \left(x^2+5y^2\right)^2 = 2\sqrt{xy}\left(6-x^2-5y^2\right)+36 & (1) \\ \sqrt{5y^4-x^4} = 6x^2 + 2xy - 6y^2 & (2) \end{cases}$$

<u>Giải</u> : Điều kiện : $\begin{cases} xy \ge 0 \\ 5y^4 - x^4 \ge 0 \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left(x^2+5y^2\right)^2 + 2\sqrt{xy}\left(x^2+5y^2\right) - 12\sqrt{xy} - 36 = 0$ (3)

Xem phương trình (3) là phương trình theo ẩn $\left(x^2+5y^2\right)$, còn $\sqrt{xy}$ là tham số.

$\Delta' = \left(\sqrt{xy}+6\right)^2$. Phương trình có nghiệm : $\left[\begin{array}{l} x^2+5y^2 = 6 \\ x^2+5y^2 = -2\sqrt{xy}-6, loai \end{array}\right.$

Thế vào (2) ta được : $\sqrt{5y^4-x^4} = \left(x^2+5y^2\right)\left(x^2-y^2\right) + 2xy$

$\Leftrightarrow \sqrt{5y^4-x^4} = x^4+4x^2y^2-5y^4+2xy \quad \Leftrightarrow \sqrt{5y^4-x^4} + \left(5y^4-x^4\right) = 4x^2y^2+2xy$

$\Leftrightarrow \sqrt{5y^4-x^4} + \left(\sqrt{5y^4-x^4}\right)^2 = (2xy)^2 + 2xy$ (4)

Xét hàm số : $f(t) = t^2 + t, t \in [0;+\infty)$ $\qquad f'(t) = 2t+1 > 0, \forall t \ge 0$

Hàm số f(t) đồng biến trên $[0;+\infty)$

$(4) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{5y^4-x^4}\right) = f(2xy) \Leftrightarrow 2xy = \sqrt{5y^4-x^4}$

$\Leftrightarrow x^4+4x^2y^2-5y^4 = 0$ (5)

Nếu $y=0 \Rightarrow x=0$, không thỏa hệ đã cho.

Xét $y \neq 0$, chia 2 vế của phương trình (5) cho y^4 ta được :

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^4 + 4\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{x}{y}\right)^2 = -5, loai \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y$$

Từ $x^2+5y^2=6 \Rightarrow 6x^2=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1=y \\ x=-1=y \end{array}\right.$

Hệ phương trình có 2nghiệm : $(1;1);(-1;-1)$

Bài toán 162. $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x=2 & (1) \\ \sqrt{1-x^2}+x^2-3\sqrt{2y-y^2}=2 & (2) \end{cases}$

Giải : Điều kiện : $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 2y-y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^3-3x-2=y^3-3y^2$

$$\Leftrightarrow \left(x^3+3x^2+3x+1\right)-3\left(x^2+2x+1\right)=y^3-3y^2$$

$\Leftrightarrow (x+1)^3-3(x+1)^2=y^3-3y^2$ (3). Dễ thấy : $\begin{cases} 0 \leq x+1 \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$

Xét hàm số : $f(t)=t^3-3t^2, t\in[0;2]$

$f'(t)=3t^2-6t \qquad f'(t)=0 \Leftrightarrow 3t^2-6t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên :

t	0		2
f'(t)	0	-	0

Hàm số f(t) nghịch biến trên $[0;2]$. $(3) \Leftrightarrow f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow x+1 = y$

Thế vào phương trình (2) ta được :

$\sqrt{1-x^2} + x^2 - 3\sqrt{2(x+1) - (x+1)^2} = 2 \qquad \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{1-x^2} = 2$

$\Leftrightarrow 1 - x^2 + 2\sqrt{1-x^2} + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \left(\sqrt{1-x^2} + 1\right)^2 = 0$, loai.

Hệ phương trình vô nghiệm.

Bài toán 163.

$$\begin{cases} x^2 y\left(2 + 2\sqrt{4y^2+1}\right) = x + \sqrt{x^2+1} & (1) \\ (4y^2+1)x^2 + 2(x^2+1)\sqrt{x} = 6 & (2) \end{cases}$$

<u>Giải</u> **:**Điều kiện : $x \ge 0$. Ta thấy $x = 0$ không thỏa hệ phương trình.

Xét $x > 0$,Phương trình (1) $\Leftrightarrow y\left(2 + 2\sqrt{4y^2+1}\right) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{x^2}$

$\Leftrightarrow 2y + 2y\sqrt{4y^2+1} = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{x^2}$, suy ra $y > 0$

$\Leftrightarrow 2y + 2y\sqrt{(2y)^2+1} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}} \qquad \Leftrightarrow 2y + 2y\sqrt{(2y)^2+1} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\sqrt{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + 1}$ (3)

Xét hàm số : $f(t) = t + t\sqrt{t^2+1}, \ t \in (0;+\infty) \qquad f'(t) = 1 + \sqrt{t^2+1} + \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \ \forall t \in (0;+\infty)$

Hàm số f(t) đồng biến và liên tục trên $(0;+\infty)$

Phương trình $(3) \Leftrightarrow f(2y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2x}$

Thế vào phương trình (2) ta được :

$$\left(\frac{1}{x^2}+1\right)x^2 + 2\left(x^2+1\right)\sqrt{x} = 6 \qquad \Leftrightarrow 1+x^2 + 2x^2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 6 = 0 \ (4)$$

Xét hàm số : $g(x) = 1+x^2 + 2x^2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 6 = 0, x > 0$

$$g'(x) = 2x + 4x\sqrt{x} + \frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 0, \forall x > 0$$

Hàm số g(x) đồng biến trên $(0;+\infty)$ và g(1) = 0. Vậy (4) có nghiệm duy nhất : $x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $\left(1;\frac{1}{2}\right)$

<u>Bài toán 164</u>.

$$\begin{cases} x^3+3x^2+6x+4 = y^3+3y & (1) \\ (3y-7)x^3 = 1 - \sqrt{\left(1+x^2\right)^3} & (2) \end{cases}$$

<u>Giải</u> : Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left(x^3+3x^2+3x+1\right)+3(x+1) = y^3+3y$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) = y^3+3y \quad (3)$$

Xét hàm số : $f(t) = t^3+3t, t \in \mathbb{R}$ $\qquad f'(t) = 3t^2+3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$. Phương trình $(3) \Leftrightarrow f(y) = f(x+1) \Leftrightarrow y = x+1$

Thế vàophương trình (2) ta được : $\left[3(x+1)-7\right]x^3 = 1 - \sqrt{\left(1+x^2\right)^3}$

$$\Leftrightarrow (3x-4)x^3 = 1 - \sqrt{\left(1+x^2\right)^3} \qquad \Leftrightarrow (3x-4)x^3 = \left(1 - \sqrt{1+x^2}\right)\left(1 + x^2 + \sqrt{1+x^2} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow (3x-4)x^3 + \frac{x^2\left(1+x^2+\sqrt{1+x^2}+1\right)}{1+\sqrt{1+x^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow x^2\left(3x^2 - 4x + \frac{1+x^2+\sqrt{1+x^2}+1}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=1 \\ 3x^2 - 4x + \dfrac{1+x^2+\sqrt{1+x^2}+1}{1+\sqrt{1+x^2}} = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Xét phương trình : $3x^2 - 4x + \dfrac{1+x^2+\sqrt{1+x^2}+1}{1+\sqrt{1+x^2}} = 0$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2 - 2.\frac{2}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) + \frac{1+x^2+\sqrt{1+x^2}+1}{1+\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} + \frac{1 - 2\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2 + 3\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} + 3 + \frac{\left(1 - \sqrt{1+x^2}\right)^2 - 3}{1+\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} - \frac{3}{1+\sqrt{1+x^2}} + \frac{\left(1 - \sqrt{1+x^2}\right)^2}{1+\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5\sqrt{1+x^2} - 4}{1+\sqrt{1+x^2}} + \frac{\left(1 - \sqrt{1+x^2}\right)^2}{1+\sqrt{1+x^2}} = 0$$

Vì $5\sqrt{1+x^2} \geq 5, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 5\sqrt{1+x^2} - 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên vế trái của phương trình trên luôn dương.

Vậy phương trình trên vô nghiệm. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất : (0; 1)

Bài toán 165.

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x+y+3} = (x+y)^2 + 2\sqrt{x+y} & (1) \\ \sqrt{x^2+x+y+2} + \sqrt{x-y} = 3 & (2) \end{cases}$$

Giải : Điều kiện : $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \pm y$

Đặt : $t = x + y, t \geq 0$,Phương trình (1) trở thành :

$$t + \sqrt{t+3} = t^2 + 2\sqrt{t} \qquad \Leftrightarrow t^2 - t + 2\sqrt{t} - \sqrt{t+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow t(t-1) + \frac{3(t-1)}{2\sqrt{t} + \sqrt{t+3}} = 0 \qquad \Leftrightarrow (t-1)\left(t + \frac{3}{2\sqrt{t} + \sqrt{t+3}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t + \dfrac{3}{2\sqrt{t} + \sqrt{t+3}} = 0, VN \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x \leq x \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

Thế : y = 1- x vào phương trình (2) ta được :

$$\sqrt{x^2+3} + \sqrt{2x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} - 2 + \sqrt{2x-1} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}+2} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1} = 0 \qquad \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} + \frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} + \dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1} = 0, VN \end{array}\right.$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất : (1; 0)

Bài toán 166.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{y^2 + xy + 2x^2} = 2(x+y) & (1) \\ (8y-6)\sqrt{x-1} = \left(2 + \sqrt{y-2}\right)\left(y + 4\sqrt{x-2} + 3\right) & (2) \end{cases}$$

Giải : Điều kiện : $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ y - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 2 \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x^2 + xy + 2y^2}{y^2}} + \sqrt{\dfrac{y^2 + xy + 2x^2}{y^2}} = \dfrac{2(x+y)}{y}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right) + 2} + \sqrt{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right) + 1} = 2\left(\frac{x}{y}\right) + 2$$

Đặt $t = \dfrac{x}{y}, t \geq 1$, phương trình trên trở thành :

$$\sqrt{t^2+t+2}+\sqrt{2t^2+t+1}=2t+2$$

Bình phương 2 vế của phương trình trên, ta được :

$$3t^2+2t+3+2\sqrt{t^2+t+2}\sqrt{2t^2+t+1}=4t^2+8t+4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{t^2+t+2}\sqrt{2t^2+t+1}=t^2+6t+1$$

$$\Leftrightarrow 4\left(t^2+t+2\right)\left(2t^2+t+1\right)=\left(t^2+6t+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 7t^4-14t^2+7=0 \Leftrightarrow t^2=1 \Leftrightarrow t=1$$

$\Leftrightarrow x=y$, thế : **y = x vào** phương trình (2) ta được :

$$(8x-6)\sqrt{x-1}=\left(2+\sqrt{x-2}\right)\left(x+4\sqrt{x-2}+3\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[8(x-1)+2\right]\sqrt{x-1}=\left(2+\sqrt{x-2}\right)\left(x-2+4\sqrt{x-2}+5\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x-1}\right)^3+2\sqrt{x-1}=\left(2+\sqrt{x-2}\right)\left(\left(\sqrt{x-2}\right)^2+4\sqrt{x-2}+4+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x-1}\right)^3+2\sqrt{x-1}=\left(2+\sqrt{x-2}\right)\left(\left(2+\sqrt{x-2}\right)^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x-1}\right)^3+\left(2\sqrt{x-1}\right)=\left(2+\sqrt{x-2}\right)^3+\left(2+\sqrt{x-2}\right) \qquad (3)$$

Xét hàm số : $f(t)=t^3+t, t\ge 2$ $\qquad f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\ge 2$

Hàm số f(t) đồng biến trên $[2;+\infty)$. $\qquad (3)\Leftrightarrow f\left(2\sqrt{x-1}\right)=f\left(2+\sqrt{x-2}\right)$

$(3)\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=2+\sqrt{x-2}$ $\qquad \Leftrightarrow 4(x-1)=4+4\sqrt{x-2}+x-2$

$$\Leftrightarrow 3x-6=4\sqrt{x-2} \Leftrightarrow (3x-6)^2=16(x-2) \Leftrightarrow 9x^2-52x+68=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{34}{9}=y \\ x=2=y \end{array}\right.$$

Hệ phương trình có 2 nghiệm : $(2;2);\left(\dfrac{39}{4};\dfrac{39}{4}\right)$

Bài toán 167.

$$\begin{cases} x^4+4y^3+\left(x^4-1\right)y+4y^2=1 \qquad (1) \end{cases}$$

<u>Giải</u> : Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^4 + x^4 y + 4y^3 + 4y^2 - y = 1$

$$\Leftrightarrow x^4\left(y+1\right)+4y^2\left(y+1\right)-\left(y+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^4+4y^2-1\right)\left(y+1\right)=0 \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ x^4+4y^2-1=0 \end{array}\right.$$

• $y=-1$, thay vào phương trình (2) ta được :

$$4\sqrt{x^2+1}=x^2+4 \qquad \Leftrightarrow 16\left(x^2+1\right)=\left(x^2+4\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^4-8x^2=0 \Leftrightarrow x=0; x=\pm 2\sqrt{2}$$

$$\bullet x^4+4y^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x^4\le 1 \\ 4y^2\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\ge x\le 1 \\ -\dfrac{1}{2}\le y\le \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left(2\right)\Leftrightarrow 8y^3-6y-2=x^2-4\sqrt{x^2+1} \qquad (3)$$

Xét hàm số : $f\left(x\right)=x^2-4\sqrt{x^2+1}, x\in\left[-1;1\right]$ $\qquad f'\left(x\right)=2x-\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow 2x-\frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}=0 \Leftrightarrow 2x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 1-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{x^2+1}=2 \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{x^2+1}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3}, loai \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

x	-1		0		1
f'(x)		+	0	-	
f(x)			-4		

Theo Bảng biến thiên ta có : $f\left(x\right)\le f\left(0\right)=-4,\forall x\in\left[-1;1\right]$

Xét hàm số : $g\left(y\right)=8y^{3}-6y-2, y\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

$g'\left(y\right)=24y^{2}-6$ $\qquad$ $g'\left(y\right)=0\Leftrightarrow 24y^{2}-6=0\Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{2}$

Bảng biến thiên :

y	-1/2		1/2
g'(y)		-	
g(y)	0	$\searrow$	-4

Theo Bảng biến thiên ta có : $g\left(y\right)\ge g\left(\frac{1}{2}\right)=-4,\forall y\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

Phương trình (3) $\Leftrightarrow f\left(x\right)=g\left(y\right)\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(x\right)=-4\\ g\left(y\right)=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$

Hệ phương trình có 4 nghiệm : $\left(0;\frac{1}{2}\right);\left(0;-1\right);\left(2\sqrt{2};-1\right);\left(-2\sqrt{2};-1\right)$

Bài toán 168. $\begin{cases}x^{3}+12y^{2}+x+2=8y^{3}+8y & (1)\\ \sqrt{x^{2}+8y^{3}}=5x-2y & (2)\end{cases}$

Giải : Điều kiện : $x^{2}+8y^{3}\ge 0$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^{3}+x+1=8y^{3}-12y^{2}+8y-1$

$\Leftrightarrow x^{3}+x+1=\left(2y\right)^{3}-12y^{2}+6y-1+2y-1+1$

$\Leftrightarrow x^3+x+1=(2y-1)^3+(2y-1)+1$(3)

Xét hàm số : $f(t)=t^3+t+1, t\in\mathbb{R}$ $\qquad f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$. Phương trình $(3)\Leftrightarrow f(x)=f(2y-1)\Leftrightarrow x=2y-1$

Thế : 2**y – 1 = x vào** phương trình (2) ta được :

$$\sqrt{(2y-1)^2+8y^3}=5(2y-1)-2y \qquad \Leftrightarrow \sqrt{8y^3+4y^2-4y+1}=8y-5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8y-5\geq 0 \\ 8y^3+4y^2-4y+1=(8y-5)^2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq \dfrac{5}{8} \\ 8y^3-60y^2+76y-24=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\geq \dfrac{5}{8} \\ \left[\begin{array}{l} y=6\Rightarrow x=11 \\ y=1\Rightarrow x=1 \\ y=\dfrac{1}{2}, loai \end{array}\right. \end{cases}.$$ Hệ phương trình có 2 nghiệm : $(11;6);(1;1)$

Bài toán 169.

$$\begin{cases} \sqrt{3y+1}+\sqrt{5x+4}=3xy-y+3 & (1) \\ \sqrt{2x^2+2y^2}+\sqrt{\dfrac{4(x^2+xy+y^2)}{3}}=2(x+y) & (2) \end{cases}$$

Giải : Điều kiện : $\begin{cases} 3y+1\geq 0 \\ 5x+4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq -\dfrac{1}{3} \\ x\geq -\dfrac{4}{5} \end{cases}$

Từ phương trình (2) $\Rightarrow x+y\geq 0$. Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{2x^2+2y^2} \\ v=\sqrt{\dfrac{4(x^2+xy+y^2)}{3}} \end{cases}; u,v\geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^2 = 2x^2 + 2y^2 \\ v^2 = \dfrac{4\left(x^2 + xy + y^2\right)}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}v^2 = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = u^2 + 2xy$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}v^2 - u^2 = 2xy \quad (*)$$

$$x + y = \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} = \sqrt{\frac{u^2}{2} + \frac{3}{2}v^2 - u^2} = \sqrt{\frac{3}{2}v^2 - \frac{u^2}{2}}$$

Phương trình (2) trở thành : $u + v = 2\sqrt{\frac{3}{2}v^2 - \frac{u^2}{2}}$

$$\Leftrightarrow 3u^2 + 2uv - 5v^2 = 0 \;\Leftrightarrow 3u^2 + 2uv - 2v^2 - 3v^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2v(u - v) + 3\left(u^2 - v^2\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow (u - v)(3u + 5v) = 0 \;\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ 3u + 5v = 0 \end{array}\right.$$

$\bullet u = v \;\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$

Thế : **y = x vào** phương trình (1) ta được : $\sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} = 3x^2 - x + 3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - (x+1) + \sqrt{5x+4} - (x+2) = 3x^2 - 3x \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+1-(x+1)^2}{\sqrt{3x+1}+(x+1)} + \frac{5x+4-(x+2)^2}{\sqrt{5x+4}+(x+2)} = 3x^2 - 3x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - x^2}{\sqrt{3x+1}+(x+1)} + \frac{x - x^2}{\sqrt{5x+4}+(x+2)} + 3\left(x - x^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - x^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}+(x+1)} + \frac{1}{\sqrt{5x+4}+(x+2)} + 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - x^2 = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}+(x+1)} + \dfrac{1}{\sqrt{5x+4}+(x+2)} + 3 = 0, VN \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 = y \\ x = 1 = y \end{array}\right.$$

$\bullet 3u + 5v = 0$. Vì $u, v \geq 0 \Rightarrow u = v = 0$. Từ $(*) \Rightarrow xy = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

Hệ phương trình có 2 nghiệm : $(0;0);(1;1)$

Chú ý. *Để có phương trình (3) ta làm như sau : Dùng máy tính ta biết được phương trình có 2 nghiệm :* ***0*** và ***1và cũng là nghiệm của*** *phương trình :* $-x^2+x=0$. *Ta biến đổi phương trình :* $\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}=3x^2-x+3$ *như sau:*

$$\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}=3x^2-x+3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}-(x+a)+\sqrt{5x+4}-(x+b)=3x^2-x+3-(x+a)-(x+b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+1-(x+a)^2}{\sqrt{3x+1}+(x+a)}+\frac{5x+4-(x+b)^2}{\sqrt{5x+4}+(x+b)}=3x^2-3x+3-a-b$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+(3-2a)x+1-a^2}{\sqrt{3x+1}+(x+a)}+\frac{-x^2+(5-2b)x+4-b^2}{\sqrt{5x+4}+(x+b)}=3x^2-3x+3-a-b$$

Ta phải có : $\begin{cases}-x^2+(3-2a)x+1-a^2\equiv -x^2+x\\ -x^2+(5-2b)x+4-b^2\equiv -x^2+x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3-2a=1\\ 1-a^2=0\\ 5-2b=1\\ 4-b^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}$

Bài toán 172.

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{y^2-2y+5}=y-3x-3 & (1)\\ y^2-3y+3=x^2-x & (2)\end{cases}$$

Giải : Phương trình (2) $\Leftrightarrow y^2-x^2-2y-2x=y-3x-3$ (3)

Thế phương trình (3) vào phương trình (1) ta được :

$$\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{y^2-2y+5}=y^2-x^2-2y-2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+4}-\sqrt{(y-1)^2+4}=(y-1)^2-(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+4}+(x+1)^2=\sqrt{(y-1)^2+4}+(y-1)^2 \qquad (4)$$

Xét hàm số : $f(t)=\sqrt{t+4}+t, t\in[0;+\infty)$ $\quad f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t+4}}+1>0, \forall t\in[0;+\infty)$

Hàm số f(t) đồng biến trên $[0;+\infty)$ $\quad (4)\Leftrightarrow (x+1)^2=(y-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x=y-2 \end{array}\right.$

• $x=-y$,thế **vào** phương trình (2) ta được :

$$-4y+3=0\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}\Rightarrow x=-\frac{3}{4}$$

• $x=y-2$,thế **vào** phương trình (2) ta được :

$$y^2-3y+3=(y-2)^2-(y-2) \quad \Leftrightarrow 2y-3=0\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Hệ phương trình có 2 nghiệm : $\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right);\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$

Bài toán 173.

$$\begin{cases} x^3-3x^2+2=\sqrt{y^3+3y^2} & (1) \\ 3\sqrt{x-2}=\sqrt{y^2+8y} & (2) \end{cases}$$

Giải Điều kiện : $\begin{cases} y^3+3y^2\ge 0 \\ y^2+8y\ge 0 \\ x-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ y\ge 0 \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^3-3x^2+2=y\sqrt{y+3}$

$$\Leftrightarrow (x^3-3x^2+3x-1)-3(x-1)=(y+3-3)\sqrt{y+3}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3-3(x-1)=\left(\sqrt{y+3}\right)^3-3\sqrt{y+3} \text{ (3)}$$

Xét hàm số : $f(t)=t^3-3t, t\in[1;+\infty)$ $\quad f'(t)=3t^2-3>0, \forall t\in[1;+\infty)$

Hàm số f(t) đồng biến trên $[1;+\infty)$

Phương trình $(3)\Leftrightarrow f(x-1)=f\left(\sqrt{y+3}\right)\Leftrightarrow x-1=\sqrt{y+3}$ (4)

Phương trình (2) $\Leftrightarrow 9\left(x-2\right)=y^2+8y$ (5)

Thế (4) vàophương trình (5) ta được :

$$9\left(\sqrt{y+3}-1\right)=y^2+8y \Leftrightarrow y^2+8y+9=9\sqrt{y+3}$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2+8y+9\right)^2=81\left(y+3\right) \qquad \Leftrightarrow y^4+16y^3+82y^2+63y-162=0$$

$$\Leftrightarrow \left(y-1\right)\left(y^3+17y^2+99y+162\right)=0 \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow x=3 \\ y^3+17y^2+99y+162=0, VN \end{array}\right.$$

Hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất : $\left(3;1\right)$

Bài toán 174. $\begin{cases} x^2-y^2+2\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+y^3=2y\sqrt{y-1}\left(x+\sqrt[3]{x}\right) & (1) \\ x^4+\sqrt{x^3-x^2+1}=x\left(y-1\right)^3+1 & (2) \end{cases}$

Giải : Điều kiện : $\begin{cases} y-1\ge 0 \\ x^3-x^2+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 1 \\ x^3-x^2+1\ge 0 \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left(x+\sqrt[3]{x}\right)^2+\left(y\sqrt{y-1}\right)^2=2\left(x+\sqrt[3]{x}\right)y\sqrt{y-1}$

$$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt[3]{x}-y\sqrt{y-1}\right)^2=0 \qquad \Leftrightarrow x+\sqrt[3]{x}=y\sqrt{y-1}$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt[3]{x}=\left(y-1+1\right)\sqrt{y-1} \qquad \Leftrightarrow x+\sqrt[3]{x}=\left(\sqrt{y-1}\right)^3+\sqrt{y-1} \quad (4)$$

Xét hàm số : $f\left(t\right)=t^3+t, t\in\mathbb{R}$ $\qquad f'\left(t\right)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\left(4\right)\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{x}\right)=f\left(\sqrt{y-1}\right)\Leftrightarrow \sqrt[3]{x}=\sqrt{y-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \sqrt[3]{x^2}=y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2=\left(y-1\right)^3 \quad (5) \end{cases}$$

Thế phương trình (5) vào phương trình (2) ta được :

$x^4+\sqrt{x^3-x^2+1}=x^3+1 \qquad \Leftrightarrow x^4-x^3+\sqrt{x^3-x^2+1}-1=0$

$\Leftrightarrow x^3(x-1)+\dfrac{x^3-x^2}{\sqrt{x^3-x^2+1}+1}=0 \qquad \Leftrightarrow x^2(x-1)\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x^3-x^2+1}+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=1 \\ x=1\Rightarrow y=2 \\ x+\dfrac{1}{\sqrt{x^3-x^2+1}+1}=0, VN \text{ do } x\ge 0 \end{array}\right.$. Hệ phương trình có 2 nghiệm : $(0;1);(1;2)$

Bài toán 175. $\begin{cases} \sqrt{x+3}+\sqrt[4]{x-2}-\sqrt{y^4+5}=y & (1) \\ x^2+2x(y-2)+y^2-8y+4=0 & (2) \end{cases}$

Giải : Điều kiện : $x\ge 2$. Phương trình (2)

$\Leftrightarrow x^2+2x(y-2)+(y-2)^2=4y \qquad \Leftrightarrow (x+y-2)^2=4y$

Từ phương trình trên suy ra : $y\ge 0$

Phương trình $(1)\Leftrightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt[4]{x-2}=\sqrt{y^4+5}+y$ (3)

Đặt : $t=\sqrt[4]{x-2}, t\ge 0\Rightarrow t^4=x-2\Rightarrow x+3=t^4+5\Rightarrow \sqrt{x+3}=\sqrt{t^4+5}$

$(3)\Leftrightarrow \sqrt{t^4+5}+t=\sqrt{y^4+5}+y$ (4)

Xét hàm số : $f(u)=\sqrt{u^4+5}+u, u\in[0;+\infty) \qquad f'(u)=\dfrac{2u^3}{\sqrt{u^4+5}}+1>0, \forall u\in[0;+\infty)$

Hàm số f(u) đồng biến trên $[0;+\infty)$

Phương trình $(3)\Leftrightarrow f(y)=f(t)\Leftrightarrow y=t\Leftrightarrow y=\sqrt[4]{x-2}$

Hệ phương trình có 2 nghiệm : $(0;1);(1;2)$

Bài toán 176. $\begin{cases} \sqrt{2x+y+5}-\sqrt{3-x-y}=x^3-3x^2-10y+6 & (1) \\ x^3-6x^2+13x=y+y^3+10 & (2) \end{cases}$

Giải Điều kiện : $\begin{cases} 2x+y+5\geq 0 \\ 3-x-y\geq 0 \end{cases}$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8+x-2+10=y^3+y+10$

$\Leftrightarrow (x-2)^3+(x-2)+10=y^3+y+10$ (3)

Xét hàm số : $f(t)=t^3+t+10, t\in\mathbb{R}$ $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$. $(3)\Leftrightarrow f(x-2)=f(y)\Leftrightarrow y=x-2$

Thế vàophương trình (1) ta được : $\sqrt{3x+3}-\sqrt{5-2x}=x^3-3x^2-10x+26$ (4)

Xét hàm số : $g(x)=\sqrt{3x+3}-\sqrt{5-2x}-x^3+3x^2+10x-26, x\in\left[-1;\frac{5}{2}\right]$

$g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+3}}+\frac{1}{\sqrt{5-2x}}-3x^3+6x+10, x\in\left(-1;\frac{5}{2}\right)$

Ta có : $-3x^2+6x+10>0, \forall x\in\left[-1;\frac{5}{2}\right]$

Suy ra $g'(x)>0, \forall x\in\left[-1;\frac{5}{2}\right]$, vậy hàm số g(x) đồng biến trên $\left[-1;\frac{5}{2}\right]$

Và g(2) = 0, do đó phương trình (4) có nghiệm duy nhất x = 2 $\Rightarrow y=0$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $(2;0)$

Bài toán 178. $\begin{cases} 7x^3+y^3+3xy(x-y)-12x^2+6x-1=0 & (1) \\ \sqrt[3]{4x+y+1}+\sqrt{3x+2y}=4 & (2) \end{cases}$

Giải : Điều kiện : $3x+2y\geq 0$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow y^3-x^3+3x^2y-3xy^2+8x^3-12x^2+6x-1=0$

$\Leftrightarrow (y-x)^3+(2x-1)^3=0 \Leftrightarrow (x-y)^3=(2x-1)^3 \Leftrightarrow x-y=2x-1 \Leftrightarrow y=x-1$

Thế vào phương trình (2) ta được : $\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt{x+2}-4=0$ (3)

Xét hàm số : $f(x)=\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt{x+2}-4, x\ge -2$

$f'(x)=3.\frac{1}{3}(3x+2)^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{2\sqrt{x+2}}>0, \forall x>-2$

Hàm số f(t) đồng biến trên $(-2;+\infty)$ $f(2)=0$

Phương trình (3) có nghiệm duy nhất $x=2 \Rightarrow y=-1$, thỏa điều kiện

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $(2;-1)$

Bài toán 179. $\begin{cases} x^6+3x^2-4=y^3+3y^2+6y & (1) \\ 2y-(x+1)\sqrt{x^2+y+8}+7=\text{x} & (2) \end{cases}$

Giải : Điều kiện : $x^2+y+8\ge 0$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^6+3x^2-4=y^3+3y^2+3y+1+3y-1$

$\Leftrightarrow (x^2)^3+3x^2-4=(y+1)^3+3(y+1)-4$ (3)

Xét hàm số : $f(t)=t^3+3t-4, \text{t}\in\mathbb{R}$ $\quad f'(t)=3t^2+3>0, \forall \text{ t}\in\mathbb{R}$

Hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$. Phương trình $(3)\Leftrightarrow f(x^2)=f(y+1)\Leftrightarrow y=\text{x}^2\text{-1}$

Thế vào phương trình (2) ta được :

$2(x^2-1)-(x+1)\sqrt{2x^2+7}+7-\text{x}=0$ $\quad \Leftrightarrow 2x^2-x+5=(x+1)\sqrt{2x^2+7}$ (4)

Do $2x^2-x+5=x^2+4+x^2-x+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$

Từ phương trình (4), suy ra : $x+1>0$; $(4)\Leftrightarrow (2x^2-x+5)=(x+1)^2(2x^2+7)$

$\Leftrightarrow 2x^4-8x^3+12x^2-24x+18=0 \quad \Leftrightarrow (x-3)(x-1)(2x^2+6)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \Rightarrow y=8 \\ x=1 \Rightarrow y=0, loai(khong\ \text{thoa}) \end{array}\right.$ .Hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $(3;8)$

Bài toán 180. $\begin{cases} 2y^3+7y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}+3\left(2y^2+1\right) & (1) \\ \sqrt{2y^2-4y+3}=5-y+\sqrt{x+4} & (2) \end{cases}$

Giải : Điều kiện : $-4 \le x \le 1$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 2\left(y^3-3y^2+3y-1\right)+y-1=3\sqrt{1-x}+2(1-x-1)\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow 2(y-1)^3+y-1=2(1-x)\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}$ (3)

Xét hàm số : $f(t)=2t^3+t, t \in \mathbb{R}$ $f'(t)=6t^2+1>0, \forall t \in \mathbb{R}$

Hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình $(3) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{1-x}\right)=f(y-1) \Leftrightarrow \sqrt{1-x}=y-1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x}+1=y$

Thế vào phương trình (2) ta được :

$\sqrt{3-2x}=4-\sqrt{1-x}+\sqrt{x+4}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}-\sqrt{3-2x}+4=0$ (4)

Xét hàm số : $f(x)=\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}-\sqrt{3-2x}+4, x \in [-4;1]$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+4}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}+\frac{1}{\sqrt{3-2x}}>0, \forall x \in (-4;1)$. Hàm số f(x) đồng biến trên $(-4;1)$ và $f(-3)=0$

Nên phương trình (4) có nghiệm duy nhất : $x=-3 \Rightarrow y=3$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $(-3;3)$

Bài toán 185. $\begin{cases} x^3-3x^2+2=\sqrt{y^3+3y^2} & (1) \\ \sqrt{x-3}=\sqrt{y-x+2} & (2) \end{cases}$

Giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \ge 3 \\ y^3+3y^2 \ge 0 \\ y \ge x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ y \ge x-2 \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^3-3x^2+2 = y\sqrt{y+3}$

$\Leftrightarrow (x-1)^3-3(x-1) = (\sqrt{y+3})^3-3\sqrt{y+3}$ (3)

Ta thấy : $\begin{cases} x \ge 3 \\ y \ge x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 \ge 2 \\ y \ge x-2 \ge 3-2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 \ge 2 \\ \sqrt{y+3} \ge \sqrt{4} = 2 \end{cases}$

Xét hàm số: $f(t) = t^3-3t, \forall t \ge 2$ $f'(t) = 3t^2-3 \ge 3(2)^2-3 > 0, \forall t \ge 2$

Hàm số f(t) đồng biến trên $[2;+\infty)$

$(3) \Leftrightarrow f(x-1) = f\left(\sqrt{y+3}\right) \Leftrightarrow x-1 = \sqrt{y+3} \Leftrightarrow x^2-2x-2 = y$

Thay vào phương trình (2), ta được :

$\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2-3x} \Leftrightarrow x^2-4x+3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, loai \\ x = 3 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $(3;1)$

Bài toán 195. $\begin{cases} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+4}\right) = 1 & (1) \\ (2y+5)^3-\sqrt[3]{5-2y} = 6\sqrt{x^2+1}+10x & (2) \end{cases}$

Giải Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)\left(y+\sqrt{y^2+4}\right) = 1 \quad \left(\sqrt{x^2+1}-x \ne 0, \forall x \in \mathbb{R}\right)$

$\Leftrightarrow y+\sqrt{y^2+4} = \sqrt{x^2+1}-x$ (3). Mặt khác, ta có : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\dfrac{4}{\sqrt{y^2+4}-y}\right) = 1 \quad \left(\sqrt{y^2+4}-y \ne 0, \forall y \in \mathbb{R}\right)$

$\Leftrightarrow 4\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\sqrt{y^2+4}-y$ (4)

Lấy phương trình (3) trừphương trình (4), vế với vế, ta được :

$2y=-3\sqrt{x^2+1}-5x \quad \Rightarrow -4y=6\sqrt{x^2+1}+10x$ (5)

Thế (5) vàophương trình (2) ta có phương trình : $(2y+5)^3-\sqrt[3]{5-2y}=-4y$ (6)

Xét hàm số : $f(y)=(2y+5)^3-\sqrt[3]{5-2y}+4y, y\in\mathbb{R}$

$$f'(y)=6(2y+5)^2+\frac{2}{\sqrt[3]{(5-2y)^2}}+4>0, \forall y\neq\frac{5}{2}$$

Hàm số $f(y)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $f\left(-\frac{3}{2}\right)=0$

Suy ra, phương trình (6) có nghiệm duy nhất $y=-\frac{3}{2}$

$\Rightarrow -3=-3\sqrt{x^2+1}-5x \quad \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+1}=3-5x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3-5x\geq 0\\ 9x^2+1=(3-5x\ )^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq\frac{3}{5}\\ 16x^2-30x=0\end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm $\left(0;-\frac{3}{2}\right)$.

Bài toán 205. $\begin{cases}y^3+y+4=3x+(x+2)\sqrt{x-2} & (1)\\ (x+y-5)\sqrt{x-y}+2y-4=0 & (2)\end{cases}$

Giải : Điều kiện : $\begin{cases}x\geq 2\\ x\geq y\end{cases}$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow (x-y+2y-4-1)\sqrt{x-y}+2y-4=0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-y}\right)^3+(2y-4)\sqrt{x-y}-\sqrt{x-y}+2y-4=0$$

$$\Leftrightarrow (2y-4)\left(\sqrt{x-y}+1\right)+\sqrt{x-y}\left[\left(\sqrt{x-y}\right)^2-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-y}+1\right)\left(2y-4+\sqrt{x-y}\left(\sqrt{x-y}-1\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x+y-4-\sqrt{x-y}=0 \quad \Leftrightarrow x+y=4\sqrt{x-y} \quad \Rightarrow x+y\ge 0$$

$$(1)\Leftrightarrow y^3+y=3(x-2)+(x-2+4)\sqrt{x-2}+2$$

$$\Leftrightarrow y^3+y=\left(\sqrt{x-2}\right)^2+\left(\sqrt{x-2}\right)^3+2\left(\left(\sqrt{x-2}\right)^2+2\sqrt{x-2}+1\right)$$

$$y^3+y=3\left(\sqrt{x-2}\right)^2+\left(\sqrt{x-2}\right)^3+3\sqrt{x-2}+1+\sqrt{x-2}+1$$

$$y^3+y=\left(\sqrt{x-2}+1\right)^3+\left(\sqrt{x-2}+1\right) \qquad (3)$$

Xét hàm số : $f(t)=t^3+t, t\in\mathbb{R}$ $\qquad f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Hàm số : $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ .Phương trình $(3)\Leftrightarrow y=\sqrt{x-2}+1\Leftrightarrow \begin{cases} y-1\ge 0 \\ x-2=y^2-2y+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 1 \\ x=y^2-2y+3 \end{cases}$. Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} x+y-4-\sqrt{x-y}=0 \\ y\ge 1 \\ x=y^2-2y+3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-y-1-\sqrt{y^2-3y+3}=0 \\ y\ge 1 \\ x=y^2-2y+3 \end{cases}$$

Xét phương trình : $y^2-y-1-\sqrt{y^2-3y+3}=0$

$$\Leftrightarrow y^2-y-2+1-\sqrt{y^2-3y+3}=0 \Leftrightarrow y^2-y-2+\frac{-y^2+3y-2}{1+\sqrt{y^2-3y+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)(y-2)-\frac{(y-1)(y-2)}{1+\sqrt{y^2-3y+3}}=0 \Leftrightarrow (y-2)\left(y+1-\frac{y-1}{1+\sqrt{y^2-3y+3}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (y-2)\left(\frac{y\sqrt{y^2-3y+3}+\sqrt{y^2-3y+3}+2}{1+\sqrt{y^2-3y+3}}\right)=0 \Leftrightarrow y=2 \Rightarrow x=3$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $(3;2)$

Bài toán 209. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}=\sqrt{y-1}+\sqrt{y-3}+\sqrt{y-5} & (1) \\ x+y+x^2+y^2=44 & (2) \end{cases}$

Giải Điều kiện : $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 5 \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}=\sqrt{y-5}+\sqrt{(y-5)+2}+\sqrt{(y-5)+4}$ (3)

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t}+\sqrt{t+2}+\sqrt{t+4}$ trên $[0;+\infty)$ $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{1}{2\sqrt{t+2}}+\frac{1}{2\sqrt{t+4}}>0,\ \forall t\in(0;+\infty)$

(3) $\Leftrightarrow f(x)=f(y-5) \Leftrightarrow x=y-5 \Leftrightarrow y=x+5$ (4)

Thay (4) vào phương trình (2) ta được : $x+x+5+x^2+(x+5)^2=44$

$\Leftrightarrow 2x^2+12x-14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=6 \\ x=-7, loai \end{array}\right.$.Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(1;6)$

Bài toán 210. $\begin{cases} x^3-3x=y^3+3y^2-2 & (1) \\ x^2y^2+y^2-2xy^2-x+1=0 & (2) \end{cases}$

Giải Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^3-3x=(y+1)^3-3(y+1)$ (3)

Phương trình (2) $\Leftrightarrow (xy-y)^2=x-1 \Rightarrow x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$

Xét hàm số : $f(t)=t^3-3t, t\in[1;+\infty)$ $f'(t)=3t^2-3\ge 0, \forall t\in[1;+\infty)$

Hàm số f(t) đồng biến trên $[1;+\infty)$

(3) $\Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y+1$. Thay vào phương trình (2) ta được :

$$(y+1)^2 y^2 + y^2 - 2(y+1)y^2 - (y+1) + 1 = 0 \Leftrightarrow y^4 - y = 0 \Leftrightarrow y(y^3-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=1 \\ y=1 \Rightarrow x=2 \end{array}\right.$$

Hệ phương trình có 2 nghiệm : $(1;0);(2;1)$.

Bài toán 216. $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3(x^2+y^2) + 4(x-y) + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2(x+y) = 18 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải : Phương trình $(1) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = y^3 - 3y^2 + 4y$

$\Leftrightarrow (x+1)^3 + x + 1 = (y-1)^3 + y - 1 \qquad (3)$

Xét hàm số : $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R} \qquad f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Phương trình (3) $\Leftrightarrow f(x+1) = f(y-1) \Leftrightarrow x+1 = y-1 \Leftrightarrow y = x+2$

Thay y=x+2 vào phương trình (2) ta có :

$$x^2 + (x+2)^2 - 2(2x+2) = 18 \quad \Leftrightarrow 2x^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \Rightarrow y=5 \\ x=-3 \Rightarrow y=-1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là (-3;-1), (3;5).

Bài toán 220. $\begin{cases} 2x^2 - y^2 - 7x + 2y + 6 = 0 & (1) \\ -7x^3 + 12x^2y - 6xy^2 + y^3 - x + y = 0 & (2) \end{cases}$

Giải : Phương trình (2) $\Leftrightarrow -7x^3 + 12x^2y - 6xy^2 + y^3 - x + y = 0$

$\Leftrightarrow (y^3 - 8x^3 + 12x^2y - 6xy^2) + x^3 - 2x + y + x = 0$

$\Leftrightarrow (y-2x)^3 + (y-2x) = (-x)^3 + (-x) \qquad (3)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R} \qquad f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Phương trình $\left(3\right)\Leftrightarrow y-2x=-x\Leftrightarrow x=y$

Thế vào phương trình (1) ta được : $x^2-5x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=2\end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $\left(2;2\right);\left(3;3\right)$.

<u>Bài toán 221</u>. $\begin{cases}2\sqrt{x+y+6}=1-y & (1)\\9\sqrt{1+x}+xy\sqrt{9+y^2}=0 & (2)\end{cases}$

<u>Giải</u> : Điều kiện: $\begin{cases}x+y+6\geq 0\\x\geq -1\end{cases}$

• Nếu $y\geq 0$, để hệ phương trình có nghiệm thì : $0\leq y\leq 1$.

$\left.\begin{array}{l}VT(1)=2\sqrt{x+y+6}\geq 2\sqrt{5}\\VP(1)=1-y\leq 1\end{array}\right\}\Rightarrow VT(1)>VP(1)$ hệphương trình vô nghiệm.

• Nếu y<0, từ (2) suy ra x>0

Ta có : $9\sqrt{1+x}+xy\sqrt{9+y^2}=0\quad\Leftrightarrow\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{9+\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2}=\left(-y\right)\sqrt{9+\left(-y\right)^2}\quad(3)$

Xét hàm số $f(t)=t\sqrt{9+t^2},t\in\left(0;+\infty\right)$ $\qquad f'(t)=\frac{9+2t^2}{\sqrt{9+t^2}}>0.\forall t>0$

Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$

Phương trình $(3)\Leftrightarrow f\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)=f(-y)\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt{x}}=-y\Leftrightarrow x=\frac{9}{y^2}$

Thế vào phương trình (1) ta có phương trình : $2\sqrt{\frac{9}{y^2}+y+6}=1-y$ (4).

Xét hàm số : $g(y)=2\sqrt{\frac{9}{y^2}+y+6}$ trên $\left(-\infty;0\right)$

$$g'(y)=\frac{\left(\frac{9}{y^2}+y+6\right)'}{\sqrt{\frac{9}{y^2}+y+6}}=\frac{y^3-18}{y^3\sqrt{\frac{9}{y^2}+y+6}}>0,\forall y<0$$

Suy ra hàm số $g(y)$ đồng biếntrên $(-\infty;0)$

Xét hàm số : $\mathrm{h}(y)=1-y$ trên $(-\infty;0)$ có $\mathrm{h}'(y)=-1<0,\forall y<0$

Suy ra hàm số $\mathrm{h}(y)$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và phương trình (4) có nghiệm duy nhất y= -3, vậy x = 1.

Cách 2. (Dùng lượng liên hợp)

Xét phương trình : $2\sqrt{\frac{9}{y^2}+y+6}=1-y \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{\frac{9}{y^2}+y+6}-2\right)+y+3=0$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{\frac{9}{y^2}+y+6-4}{\sqrt{\frac{9}{y^2}+y+6}+2}\right)+y+3=0 \quad \Leftrightarrow 2\left(\frac{y^3+2y^2+9}{y^2\sqrt{\frac{9}{y^2}+y+6}+2}\right)+y+3=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{(y+3)(y^2-y+3)}{y^2\sqrt{\frac{9}{y^2}+y+6}+2}\right)+y+3=0 \quad \Leftrightarrow 2(y+3)\left(\frac{y^2-y+3}{y^2\sqrt{\frac{9}{y^2}+y+6}+2}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-3\Rightarrow x=1 \\ \dfrac{y^2-y+3}{y^2\sqrt{\frac{9}{y^2}+y+6}+2}+1=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Vì phương trình $y^2-y+3=0$ vô nghiệm và có hệ số a = 1 > 0, nên $y^2-y+3>0,\forall y\in\mathbb{R}$

Do đó vế trái của (*) luôn dương, với mọi y < 0, (*)vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (1;-3).

Bài toán 228. $\begin{cases} 2y^3+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}-y & (1) \\ y+1=2x^2+2xy\sqrt{1+x} & (2) \end{cases}$

Giải : Điều kiện : $-1\le x\le 1$. Phương trình (1) $\Leftrightarrow 2y^3+y=3\sqrt{1-x}+2(1-x-1)\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow 2y^3+y=2\left(\sqrt{1-x}\right)^3+\sqrt{1-x}$ (3)

Xét hàm số : $f(t)=2t^3+t, t\in\mathbb{R}$ $f'(t)=6t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. $(3)\Leftrightarrow f(y)=f\left(\sqrt{1-x}\right)\Leftrightarrow y=\sqrt{1-x}$

Thế vào phương trình (2) ta được : $\sqrt{1-x}+1=2x^2+2x\sqrt{1-x^2}$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}-1=0$

Đặt $x=\cos t$ với $t\in[0;\pi]\Rightarrow \frac{t}{2}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}=\sin\frac{t}{2}$

Ta có $x=\cos t=1-2\sin^2\frac{t}{2}$ $\Rightarrow \sqrt{1-x}=\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$

Khi đó, phương trình (2) trở thành : $2\cos^2 t+2\cos t\sin t-\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}-1=0$

$$\Leftrightarrow 1+\cos 2t+\sin 2t-\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}-1=0\Leftrightarrow \sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{t}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t+\frac{\pi}{4}=\frac{t}{2}+k2\pi \\ 2t+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{t}{2}+k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3}{2}t=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ \frac{5}{2}t=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{\pi}{3}+\frac{k4\pi}{3} \\ t=\frac{3}{10}\pi+\frac{k4\pi}{5} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{3\pi}{10} \\ t=\pi \end{array}\right.\Leftrightarrow \begin{cases} x=\cos\frac{3\pi}{10}\Rightarrow y=\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{5} \\ x=\cos\pi=-1\Rightarrow y=\sqrt{2}, loai \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình là : $\left(\cos\frac{3\pi}{10};\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{5}\right)$.

Bài toán 229. $\begin{cases} 2(2x+1)^3+2x+1=(2y-3)\sqrt{y-2} & (1) \\ \sqrt{4x+2}+\sqrt{2y+4}=6 & (2) \end{cases}$

Giải : Điều kiện : $\begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ y \ge 2 \end{cases}$. Phương trình (1) $\Leftrightarrow 2(2x+1)^3+2x+1=(2y-4+1)\sqrt{y-2}$

$\Leftrightarrow 2(2x+1)^3+(2x+1)=2(y-2)\sqrt{y-2}+\sqrt{y-2}$

$\Leftrightarrow 2(2x+1)^3+(2x+1)=2\left(\sqrt{y-2}\right)^3+\sqrt{y-2}$ (3)

Xét hàm số: $f(t)=2t^3+t,\ t\in[0;+\infty)$ $f'(t)=6t^2+1>0, \forall t\in[0;+\infty)$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

Phương trình $(3) \Leftrightarrow f(2x+1)=f(\sqrt{y-2}) \Leftrightarrow 2x+1=\sqrt{y-2}$

Thay vào phương trình (2) ta được: $\sqrt[4]{4y-8}+\sqrt{2y+4}=6$ (4)

Xét hàm số : $g(y)=\sqrt[4]{4y-8}+\sqrt{2y+4}-6,\quad y\in[2;+\infty)$

$g'(y)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{4y-8}}+\dfrac{1}{\sqrt{2y+4}}>0 \quad \forall y\in(2;+\infty)$ nên g(y) đồng biến trên $(2;+\infty)$

Hơn nữa g(6) = 0 nên phương trình (4) có nghiệm duy nhất là $y=6 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $\left(\dfrac{1}{2};6\right)$.

Bài toán 231. $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2+x-4y+2=0 & (1) \\ x^3+x-3=2\sqrt{x+2}+y & (2) \end{cases}$

Giải : Điều kiện: $x \ge -2$ .Phương trình: $x^3+x+2=y^3-3y^2+4y$

$\Leftrightarrow x^3 + x + 2 = (y-1)^3 + (y-1) + 2$ (3)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t + 2$ trên $[-2;+\infty)$. Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in [-2;+\infty)$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[-2;+\infty)$.

Phương trình $(3) \Leftrightarrow f(x) = f(y-1) \Leftrightarrow x = y-1 \Leftrightarrow y = x+1$

Thay $y = x+1$ vào phương trình (2) ta được:

$x^3 - 3 = 2\sqrt{x+2} + 1 \Leftrightarrow x^3 - 8 = 2\left(\sqrt{x+2} - 2\right)$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x+4\right) = \frac{2\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)} \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x+4\right) = \frac{2(x-2)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[x^2+2x+4-\frac{2}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}\right] = 0 \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2+2x+4-\dfrac{2}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = 0 \end{array}\right.$$

- $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$
- Xét phương trình : $x^2+2x+4-\dfrac{2}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = 0 \Leftrightarrow x^2+2x+4 = \dfrac{2}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$ (*)

Ta có $VT = x^2+2x+4 = (x+1)^2 + 3 \geq 3; VP = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}+2} \leq 1, \forall x \in [-2;+\infty)$

Do đó phương trình (*) vô nghiệm. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(2;3)$.

Bài toán 245. $\begin{cases} 8x\sqrt{x} - 12xy + 12\sqrt{x}y^2 - 4y^3 = x^3y^3 + 3xy^3 \\ 3\sqrt{xy+x+y+1} - \dfrac{8\sqrt{x}}{x+1} = 4 - \dfrac{2\sqrt{x}}{y} \end{cases}$

Giải : Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 8x\sqrt{x}-12xy+12\sqrt{x}y^2-4y^3=x^3y^3+3xy^3 & (1) \\ 3\sqrt{(x+1)(y+1)}-\dfrac{8\sqrt{x}}{x+1}=4-\dfrac{2\sqrt{x}}{y} & (2) \end{cases}$

Điều kiện : $\begin{cases} x\geq 0 \\ (x+1)(y+1)\geq 0 \\ y\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq -1 \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \dfrac{8x\sqrt{x}}{y^3}-\dfrac{12x}{y^2}+\dfrac{12\sqrt{x}}{y}-4=x^3+3x$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2\sqrt{x}}{y}\right)^3-3\left(\frac{2\sqrt{x}}{y}\right)^2.1+3\frac{2\sqrt{x}}{y}.1^2-1^3+3\frac{2\sqrt{x}}{y}-3=x^3+3x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2\sqrt{x}}{y}-1\right)^3+3\left(\frac{2\sqrt{x}}{y}-1\right)=x^3+3x \quad (3)$$

Xét hàm số : $f(t)=t^3+3t, t\in\mathbb{R}$. Ta có : $f'(t)=3t^2+3>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Phương trình (3)

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{2\sqrt{x}}{y}-1\right)=f(x) \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{y}-1=x \quad \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{y}=x+1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x+1}=y\geq 0 \quad (4)$$

Thế vào phương trình (2) ta được : $3\sqrt{(x+1)(y+1)}-4y=4-(x+1)$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{(x+1)(y+1)}-4(y+1)+(x+1)=0 \quad \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{y+1}{x+1}}-4\frac{y+1}{x+1}+1=0$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{y+1}{x+1}}\geq 0$, phương trình trên trở thành :

$$-4t^2+3t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{1}{4}, loai \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{y+1}{x+1}}=1 \Leftrightarrow y+1=x+1 \Leftrightarrow y=x$$

Thế vào phương trình (4) ta được : $\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}=x \Leftrightarrow x^2+x-2\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0=y, loai \\ x=1=y \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(1;1)$

<u>Bài toán 246.</u> $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2+32x=9x^2+8y+36 & (1) \\ 4\sqrt{x+2}+\sqrt{16-3y}=x^2+8 & (2) \end{cases}$

<u>Giải</u> : Điều kiện : $\begin{cases} x+2 \ge 0 \\ 16-3y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ y \le \dfrac{16}{3} \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^3-9x^2+27x-27+5x-15=y^3-3y^2+3y-1+5y-5$

$\Leftrightarrow (x-3)^3+5(x-3)=(y-1)^3+5(y-1)$ (3)

Xét hàm số : $f(t)=t^3+5t, t \in \mathbb{R}$ $f'(t)=3t^2+5>0, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Phương trình (3) $\Leftrightarrow f(x-3)=f(y-1) \Leftrightarrow x-3=y-1 \Leftrightarrow y=x-2$

Ta có : $y \le \dfrac{16}{3} \Rightarrow x-2 \le \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow x \le \dfrac{22}{3}$. Thế : **y = x – 2** vào phương trình (2) ta được :

$$4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8 \quad \Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x+2}-2\right)+\sqrt{22-3x}-4-\left(x^2-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}\right)+\frac{6-3x}{\sqrt{22-3x}+4}-\left(x^2-4\right)=0 \quad \Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{4}{\sqrt{x+2}+2}-\frac{3}{\sqrt{22-3x}+4}-x-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2\Rightarrow y=0 \\ \dfrac{4}{\sqrt{x+2}+2}-\dfrac{3}{\sqrt{22-3x}+4}-x-2=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Xét hàm số : $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x+2}+2}-\dfrac{3}{\sqrt{22-3x}+4}-x-2, \mathrm{x}\in\left[-2;\dfrac{22}{3}\right]$

$$f'(x)=-\frac{2}{\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}+2\right)^2}-\frac{9}{2\sqrt{22-3x}\left(\sqrt{22-3x}+4\right)^2}-1<0, \forall \mathrm{x}\in\left(-2;\frac{22}{3}\right)$$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\left(-2;\dfrac{22}{3}\right)$ và $f(-1)=0$, suy ra phương trình (*) có nghiệm

duy nhất x = -1, khi đó y = -3. Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm : $(2;0);(-1;-3)$

Bài toán 249. $\begin{cases} x^6-3x^4y+3x^2y^2-2y^3+4x^2-8y=0 & (1) \\ 3\sqrt[3]{2y}+\sqrt{x^2+3}-2=\sqrt{2y+8} & (2) \end{cases}$

<u>**Giải**</u> **:** Điều kiện : $2y+8\ge 0\Leftrightarrow y\ge -4$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^6-3x^4y+3x^2y^2-y^3+4x^2-4y=y^3+4y$

$\Leftrightarrow\left(x^2-y\right)^3+4\left(x^2-y\right)=y^3+4y$ (3)

Xét hàm số : $f(t)=t^3+4\mathrm{t}, \mathrm{t}\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=3t^2+4>0, \forall \mathrm{t}\in\mathbb{R}$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Phương trình (3)

$\Leftrightarrow f\left(x^2-y\right)=f(y)\Leftrightarrow x^2-y=y\Leftrightarrow 2y=x^2, y\ge 0$

Thế $2y=x^2$ vào phương trình (2) ta được :

$$3\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^2+3}-2=\sqrt{x^2+8} \quad \Leftrightarrow 3\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)+\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)-\left(\sqrt{x^2+8}-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}\right)+\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}+2}\right)-\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}+2}-\frac{1}{\sqrt{x^2++3}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \Rightarrow y=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}+2}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) : $\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}+2}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}=0$

Vì $\forall x\in\mathbb{R}: \sqrt{x^2+8}>\sqrt{x^2+3} \Rightarrow \sqrt{x^2+8}+3>\sqrt{x^2+3}+2 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}+2}>\dfrac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}$

$\Rightarrow \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}+2}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm : $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right);\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$