CHỦ ĐỀ 3: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN TÌM NGUYÊN HÀM

DẠNG 1. ĐỔI BIẾN SỐ HÀM SỐ VÔ TỈ (Đặt t = hàm theo biến x)

✍ **Mẫu 1:** Đổi biến hàm số vô tỷ đơn giản

Nguyên hàm $\int f\left(x\right)dx$ trong đó $f\left(x\right)=\sqrt[n]{g\left(x\right)}$ ta đặt $t=\sqrt[n]{g\left(x\right)}\Rightarrow t^n=g\left(x\right)$

$\Rightarrow nt^{n-1}dt=g'\left(x\right)dx$. Khi đó $\int f\left(x\right)dx=\int h\left(t\right)dt.$

✍ **Mẫu 2:** Nguyên hàm dạng $\int f\left(a^x\right)dx.$

Ta đặt $t=a^x\Rightarrow dt=a^x\ln adx\Rightarrow dx=\dfrac{dt}{t.\ln a}\Rightarrow\int f\left(a^x\right)dx=\int\dfrac{f\left(t\right).dt}{t.\ln a}.$

✍ **Mẫu 3:** Nguyên hàm dạng $\int\dfrac{f\left(\ln x\right)dx}{x}.$

Ta đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\dfrac{1}{x}dx.$ Khi đó $\int\dfrac{f\left(\ln x\right)dx}{x}=\int f\left(t\right)dt.$

Chú ý: Nếu nguyên hàm Mẫu 2 và Mẫu 3 có chứa căn thức, ta nên đặt *t* bằng căn thức.

Ví dụ với nguyên hàm $I=\int\dfrac{\ln x.dx}{x\sqrt{\ln^2x+1}}$ ta nên đặt $t=\sqrt{\ln^2x+1}\Rightarrow t^2=\ln^2x+1.$

$\Rightarrow 2tdt=2\ln x.\dfrac{1}{x}dx\Rightarrow tdt=\ln x.\dfrac{1}{x}dx.$ Khi đó $I=\int\dfrac{tdt}{t}=\int dt=t+C=\sqrt{\ln^2x+1}+C.$

Ví dụ 1: Tìm các nguyên hàm sau:

a) $I=\int x^3\sqrt{x^2+4}dx.$ **b)** $I=\int x\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}dx.$

c) $I=\int\dfrac{dx}{x\left(1+\sqrt{x}\right)}.$ **d)** $I=\int\dfrac{1}{x\sqrt{x^3+9}}dx.$

Lời giải

a) Đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t^2=x^2+4\Rightarrow 2tdt=2xdx\Leftrightarrow tdt=xdx.$

Khi đó $I=\int x^2\sqrt{x^2+4}xdx=\int\left(t^2-4\right)t.tdt=\int\left(t^4-4t^2\right)dt$

$$=\frac{t^5}{5}-\frac{4t^3}{3}+C=\frac{\sqrt{\left(x^2+4\right)^5}}{5}-\frac{4\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}}{3}+C.$$

b) Đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t^2=x^2+4\Rightarrow 2tdt=2xdx\Leftrightarrow tdt=xdx.$

Khi đó $I=\int x\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}dx=\int t^3.tdt=\int t^4dt=\dfrac{t^5}{5}+C=\dfrac{\sqrt{\left(x^2+4\right)^5}}{5}+C.$

c) Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow 2tdt=dx$

Khi đó $I=\int\frac{2tdt}{t^2\left(1+t\right)}=\int\frac{2dt}{t\left(t+1\right)}=\int\frac{2\left(t+1-t\right)dt}{t\left(t+1\right)}=2\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt.$

$=2\ln|t|-2\ln|t+1|+C=2\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C=2\ln\left|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right|+C.$

d) Đặt $t=\sqrt{x^3+9}\Rightarrow t^2=x^3+9\Rightarrow 2tdt=3x^2dx$

Ta có: $I=\int\frac{1}{x\sqrt{x^3+9}}dx=\int\frac{3x^2}{3x^3\sqrt{x^3+9}}dx=\int\frac{2tdt}{3\left(t^2-9\right).t}$

$=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2-9}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{\left(t-3\right)\left(t+3\right)}=\frac{1}{9}\int\frac{\left[\left(t+3\right)-\left(t-3\right)\right]dt}{\left(t-3\right)\left(t+3\right)}=\frac{1}{9}\int\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+3}\right)$

$=\frac{1}{9}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C=\frac{1}{9}\ln\left|\frac{\sqrt{x^3+9}-3}{\sqrt{x^3+9}+3}\right|+C.$

Ví dụ 2: Tìm các nguyên hàm sau:

a) $I=\int\frac{2e^x+1}{e^x+1}dx.$

b) $I=\int\frac{\ln^2x+1}{x\ln x}dx.$

c) $I=\int\frac{\ln x.\sqrt{2\ln x+1}}{x}dx.$

d) $I=\int\frac{\ln x}{x.\sqrt{\ln x+2}}dx.$

Lời giải

a) Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^xdx\Rightarrow dt=tdx$

Khi đó $I=\int\frac{\left(2t+1\right)dt}{t\left(t+1\right)}=\int\frac{\left(2t+1\right)dt}{t^2+t}=\int\frac{d\left(t^2+t\right)}{t^2+t}=\ln\left|t^2+t\right|+C=\ln\left(e^{2x}+e^x\right)+C$

$=\ln e^x+\ln\left(e^x+1\right)+C=x+\ln\left(e^x+1\right)+C.$

Cách 2: $I=\int\frac{2e^x+1}{e^x+1}dx=\int\frac{e^x+e^x+1}{e^x+1}dx=\int\left(\frac{e^x}{e^x+1}+1\right)dx=\int\frac{e^xdx}{e^x+1}+\int dx$

$=\int\frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1}+x=\ln\left(e^x+1\right)+x+C.$

b) Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$

Khi đó $I=\int\frac{t^2+1}{t}dt=\int\left(t+\frac{1}{t}\right)dt=\frac{t^2}{2}+\ln|t|+C=\frac{\ln^2x}{2}+\ln|\ln x|+C.$

c) Đặt $t=\sqrt{2\ln x+1}\Rightarrow t^2=2\ln x+1\Rightarrow 2tdt=\frac{2dx}{x}\Leftrightarrow tdt=\frac{dx}{x}.$

Khi đó: $I=\int \frac{t^2-1}{2}tdt=\frac{1}{2}\int\left(t^4-t^2\right)dt=\frac{t^5}{10}-\frac{t^3}{6}+C$

$\Rightarrow t=\frac{\sqrt{\left(2\ln x+1\right)^5}}{10}-\frac{\sqrt{\left(2\ln x+1\right)^3}}{6}+C.$

d) Đặt $t=\sqrt{\ln x+2}\Rightarrow t^2=\ln x+2\Rightarrow 2tdt=\frac{dx}{x}$

Khi đó $I=\int \frac{t^2-2}{t}.2tdt=2\int\left(t^2-2\right)dt=\frac{2t^3}{3}-4t+C=\frac{2\sqrt{\left(\ln x+2\right)^3}}{3}-4\sqrt{\ln x+2}+C.$

Ví dụ 3: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $I_1=\int \frac{xdx}{\sqrt{4x+1}}$ **b)** $I_2=\int x^3\sqrt{x^2+2}dx$ **c)** $I_3=\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x}}$

Lời giải

a) Đặt $t=\sqrt{4x+1}\Leftrightarrow t^2=4x+1\longrightarrow\begin{cases}2tdt=4dx\\ x=\frac{t^2-t}{4}\end{cases}\longrightarrow I_1=\int \frac{xdx}{\sqrt{4x+1}}=\int \frac{\frac{t^2-1}{4}.\frac{tdt}{2}}{t}=\frac{1}{8}\int\left(t^2-1\right)dt$

$=\frac{1}{8}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C=\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{\left(4x+1\right)^3}}{3}-\sqrt{4x+1}\right)+C.$

b) Đặt $t=\sqrt{x^2+2}\Leftrightarrow t^2=x^2+2\longrightarrow x^2=t^2-2\Leftrightarrow 2xdx=2tdt\longrightarrow x^3dx=x^2.xdx=\left(t^2-2\right).tdt$

$I_2=\int\sqrt{x^2+2}.x^3dx=\int t.\left(t^2-2\right)tdt=\int\left(t^4-2t^2\right)dt=\frac{t^5}{5}-2.\frac{t^3}{3}+C=\frac{\sqrt{\left(x^2+2\right)^5}}{5}-\frac{2\sqrt{\left(x^2+2\right)^3}}{3}+C$

c) Đặt $t=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow t^2=1-x\Leftrightarrow x=1-t^2\longrightarrow\begin{cases}dx=-2tdt\\ x^2=\left(1-t^2\right)^2\end{cases}\longrightarrow I_3=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x}}=-2\int\frac{\left(1-t^2\right)^2tdt}{t}$

$=-2\int\left(1-t^2\right)^2dt=-2\int\left(t^4-2t^2+1\right)dt=-2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t\right)+C=-2\left(\frac{\sqrt{\left(1-x\right)^5}}{5}-\frac{2\sqrt{\left(1-x\right)^3}}{3}+\sqrt{1-x}\right)+C$

$I_3=\int\sqrt{x^2+2}.x^3dx=\int t.\left(t^2-2\right)tdt=\frac{t^5}{5}-2.\frac{t^3}{3}+C=\frac{\sqrt{\left(x^2-2\right)^5}}{5}-\frac{2\sqrt{\left(x^2+2\right)^3}}{3}+C.$

Ví dụ 4: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $I_4=\int\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$ **b)** $I_5=\int\frac{dx}{1+\sqrt{1+3x}}$

Lời giải

a) Đặt $t=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow t^2=x+1\Leftrightarrow \begin{cases}2tdt=dx\\ x=t^2-1\end{cases}\Leftrightarrow I_4=\int\frac{2t^2dt}{t^2-1}=\int\left(2+\frac{2}{(t-1)(t+1)}\right)dt$

$I_4=2t+\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\sqrt{x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$

b) Đặt $t=\sqrt{1+3x}\Rightarrow t^2=1+3x\Leftrightarrow \begin{cases}2tdt=3dx\\ x=\dfrac{t^2-1}{3}\end{cases}\Rightarrow I_5=\int\frac{2tdt}{3(1+t)}=\frac{2}{3}\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$I_5=\frac{2}{3}\left(t-\ln|t+1|\right)+C=\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+3x}-\ln\left|\sqrt{1+3x}+1\right|\right)$

Ví dụ 5: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $I_6=\int\frac{e^{2x}dx}{1+\sqrt{e^x-1}}$ **b)** $I_7=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$

Lời giải

a) Đặt $t=\sqrt{e^x-1}\Leftrightarrow t^2=\left(e^x-1\right)\Leftrightarrow \begin{cases}2tdt=e^xdx\\ e^x=t^2+1\end{cases}\Rightarrow I_6=\int\frac{2t\left(t^2+1\right)dt}{1+t}=2\int\left(t^2-t+2-\frac{2}{t+1}\right)dt$

$=2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+2t-2\ln|t+1|\right)+C=2\left(\frac{\sqrt{\left(e^x-1\right)^3}}{3}-\frac{e^x-1}{2}-2\sqrt{e^x-1}-2\ln\left(\sqrt{e^x-1}+1\right)\right)+C$

b) Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}2tdt=dx\\ t^2=x\end{cases}\Rightarrow I_7=\int\frac{2tdt}{t(1+t)^2}=\frac{-2}{1+t}+C=\frac{-2}{1+\sqrt{x}}+C$

Ví dụ 6: Tìm nguyên hàm $I=\int x\sqrt{x+1}dx.$

A. $I=\frac{2}{3}(x+1)(3x+2)\sqrt{x+1}+C.$

B. $I=\frac{2(x+1)(3x-2)\sqrt{x+1}}{15}+C.$

C. $I=\frac{2(x+1)^2\sqrt{x+1}}{15}+C.$

D. $I=\frac{3(x+1)(3x-2)\sqrt{x+1}}{5}+C.$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2tdt=dx$

Ta có: $I=\int\left(t^2-1\right)t.2tdt=\int\left(2t^4-2t^2\right)dt=\frac{2t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+C=\frac{2t^3}{15}\left(3t^2-5\right)$

$=\frac{2(x+1)(3x+2)\sqrt{x+1}}{15}+C.$ **Chọn B.**

Ví dụ 7: Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{2x}{\sqrt{x-2}}dx.$

A. $I=\frac{4}{3}(x+4)\sqrt{x-2}+C.$ **B.** $I=\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x-2}+C.$

C. $I=\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x-2}+C.$ **D.** $I=\frac{4}{3}(x+2)\sqrt{x-2}+C.$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x-2}\Rightarrow t^2=x-2\Rightarrow 2tdt=dx$

Khi đó $I=\int \frac{2\left(t^2+2\right)}{t}.2tdt=\int \left(4t^2+8\right)dt=\frac{4t^3}{3}+8t+C=\frac{4}{3}t\left(t^2+6\right)+C$

$=\frac{4}{3}\sqrt{x-2}\left(x+4\right)+C.$ **Chọn A.**

Ví dụ 8: Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{dx}{x+2+3\sqrt{x+2}}.$

A. $I=\ln\left(\sqrt{x+2}+3\right)+C.$ **B.** $I=2\ln\left(\sqrt{x+2}+3\right)+C.$

C. $I=x+2\ln\left(\sqrt{x+2}+3\right)+C.$ **D.** $I=\frac{2}{3}\ln\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+3}+C.$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x+2}\Rightarrow t^2=x+2\Rightarrow 2tdt=dx$

Khi đó $I=\int \frac{2tdt}{t^2+3t}=\int \frac{2dt}{t+3}=2\ln\left|t+3\right|+C=2\ln\left(\sqrt{x+2}+3\right)+C.$ **Chọn B.**

Ví dụ 9: Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{xdx}{1+\sqrt{x+1}}.$

A. $I=\frac{2}{3}\sqrt{\left(x+1\right)^3}-x+C.$ **B.** $I=\frac{2}{3}\sqrt{\left(x+1\right)^3}-2x-1+C.$

C. $I=\frac{3}{2}\sqrt{\left(x+1\right)^3}-x-1+C.$ **D.** $I=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x+1\right)^3}-x-1+C.$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2tdt=dx$

Khi đó $I=\int \frac{\left(t^2-1\right).2tdt}{1+t}=\int (t-1).2tdt=\int \left(2t^2-2t\right)dt=\frac{2t^3}{3}-t^2+C$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x-1+C=\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+C.$$ **Chọn A.**

Ví dụ 10: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{e^x+1}$

A. $I=\ln\frac{e^x}{e^x+1}+C.$

B. $I=\ln\frac{e^x+1}{e^x}+C.$

C. $I=\ln\frac{e^{2x}}{e^x+1}+C.$

D. $I=2\ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|+C.$

Lời giải

Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^xdx=tdx\Rightarrow dx=\frac{dt}{t}$

Khi đó $I=\int\frac{dt}{t(t+1)}=\int\left(\frac{t+1-t}{t(t+1)}\right)dt=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C$

$$=\ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|+C=\ln\frac{e^x}{e^x+1}+C.$$ **Chọn A.**

Ví dụ 11: Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}.$

Biết rằng $F(0)=0,$ tìm $F(x)$

A. $F(x)=\frac{1}{e^x+1}-\frac{1}{2}.$

B. $F(x)=\ln\left(e^x+1\right)-\ln 2.$

C. $F(x)=\frac{-1}{e^x+1}+\frac{1}{2}.$

D. $F(x)=-\ln\left(e^x+1\right)-\ln 2.$

Lời giải

Ta có: $F(x)=\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+2e^x+1}$. Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^xdx$

Khi đó $\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+2e^x+1}=\int\frac{dt}{t^2+2t+1}=\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2}=\frac{-1}{t+1}+C$

Do đó $F(x)=\frac{-1}{e^x+1}+C,$ do $F(0)=0\Rightarrow\frac{-1}{2}+C=0\Leftrightarrow C=\frac{1}{2}$

Suy ra $F(x)=\frac{-1}{e^x+1}+\frac{1}{2}.$ **Chọn C.**

Ví dụ 12: Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{e^x+1}.e^{2x}$. Biết rằng $F(0)=0,$ tìm $F(x)$

A. $F\left(x\right)=\dfrac{2\left(e^x+1\right)\sqrt{e^x+1}\left(3e^x-2\right)-4\sqrt{2}}{15}$.

B. $F\left(x\right)=\dfrac{2\left(e^x+1\right)^2\sqrt{e^x+1}-8\sqrt{2}}{15}$.

C. $F\left(x\right)=\dfrac{2\left(e^x+1\right)\sqrt{e^x+1}\left(5e^x+2\right)-28\sqrt{2}}{15}$.

D. $F\left(x\right)=\dfrac{-2\left(e^x+1\right)\sqrt{e^x+1}\left(3e^x-2\right)+4\sqrt{2}}{15}$.

Lời giải

Ta có: $I=\int\sqrt{e^x+1}.e^{2x}dx$

Đặt $t=\sqrt{e^x+1}\Rightarrow t^2=e^x+1\Rightarrow 2tdt=e^xdx$

Khi đó $I=\int t\left(t^2-1\right).2tdt=\int\left(2t^4-2t^2\right)dt=\dfrac{2t^5}{5}-\dfrac{2t^3}{3}+C=\dfrac{2t^3\left(3t^2-5\right)}{15}+C$

$\Rightarrow F\left(x\right)=\dfrac{2\left(e^x+1\right)\sqrt{e^x+1}\left(3e^x-2\right)}{15}+C$

Lại có: $F\left(0\right)=\dfrac{2.2\sqrt{2}}{15}+C=0\Rightarrow C=\dfrac{-4\sqrt{2}}{15}$

Vậy $F\left(x\right)=\dfrac{2\left(e^x+1\right)\sqrt{e^x+1}\left(3e^x-2\right)-4\sqrt{2}}{15}$. **Chọn A.**

Ví dụ 13: Tìm nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x\left(2+\ln x\right)^2}$

A. $\dfrac{-1}{\ln x+2}-2\ln\left|\ln x+2\right|+C$.

B. $\ln\left|\ln x+2\right|+\dfrac{2}{\ln x+2}+C$.

C. $\left|\ln x+2\right|+\dfrac{2}{\ln x+2}+C$.

D. $\dfrac{1}{\ln x+2}+2\ln\left|\ln x+2\right|+C$.

Lời giải

Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\dfrac{1}{x}dx$

Khi đó $\int\dfrac{\ln xdx}{x\left(2+\ln x\right)^2}=\int\dfrac{tdt}{\left(t+2\right)^2}=\int\dfrac{t+2-2}{\left(t+2\right)^2}dt=\int\left[\dfrac{1}{t+2}-\dfrac{2}{\left(t+2\right)^2}\right]dt$

$=\ln\left|t+2\right|+\dfrac{2}{t+2}+C=\ln\left|\ln x+2\right|+\dfrac{2}{\ln x+2}+C$. **Chọn B.**

DẠNG 2. ĐỔI BIẾN SỐ HÀM VÔ TỈ (Đặt x = hàm theo biến t)

✍ **Mẫu 1:** Nếu $f\left(x\right)$ có chứa $\sqrt{a^2-x^2}$ ta đặt $x=a\sin t$ $\left(t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = a\cos t dt \\ \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = |a|\cos t \end{cases}$$

✍ **Mẫu 2:** Dạng $\sqrt{x^2 + a^2}$ thì đổi biến số $x = a\tan t$, $\left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = \dfrac{adt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2\tan^2 t} = \dfrac{|a|}{\cos t} \end{cases}$$

✍ **Mẫu 3:** Dạng $\sqrt{x^2 - a^2}$ thì ta đặt $x = \frac{a}{\sin t}$ (hoặc $x = \frac{a}{\cos t}$).

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = \dfrac{-a\cos t dt}{\sin^2 t} \\ \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\cot^2 t} \end{cases}$$

✍ **Mẫu 4:** Dạng $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$ thì ta đặt $x = a\tan t$.

✍ **Mẫu 5:** Nếu $f(x)$ có chứa $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ thì đặt $x = a\cos 2t \longrightarrow \begin{cases} dx = d(a\cos 2t) = -2a.\sin 2t dt \\ \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}} = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}} = \sqrt{\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} \end{cases}$

➲ Một số kết quả quan trọng cần lưu ý khi giải trắc nghiệm:

➢ $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$

➢ $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

➢ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C \quad (a \neq 0)$

➢ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}; (a = 2)$

b) $I_2 = \int \sqrt{1 - x^2}dx; (a = 1)$

c) $I_3 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}}; (a = 1)$

d) $I_4 = \int x^2\sqrt{9 - x^2}dx; (a = 3)$

Lời giải

a) Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow \begin{cases} dx = d\left(2\sin t\right) = 2\cos tdt \\ \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\cos t \end{cases} \longrightarrow I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos tdt}{2\cos t} = \int dt = t + C$

Từ phép đặt $x = 2\sin t \Leftrightarrow t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \longrightarrow I_1 = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C$

b) Đặt $x = \sin t \Rightarrow \begin{cases} dx = d\left(\sin t\right) = \cos tdt \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t \end{cases}$

Khi đó $I_2 = \int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos t.\cos tdt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2tdt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C.$

Từ $x = \sin t \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2} \\ t = \arcsin x \end{cases} \longrightarrow \sin 2t = 2\sin t.\cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$

$\longrightarrow I_2 = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$

c) Đặt $x = \sin t \longrightarrow \begin{cases} dx = d\left(\sin t\right) = \cos tdt \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t \end{cases}$

Khi đó, $I_3 = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\sin^2 t.\cos tdt}{\cos t} = \int \sin^2 tdt = \int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t + C$

Từ $x = \sin t \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2} \\ t = \arcsin x \end{cases} \longrightarrow \sin 2t = 2\sin t.\cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$

$\longrightarrow I_3 = \frac{\arcsin x}{2} - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$

d) Đặt $x = 3\sin t \longrightarrow \begin{cases} dx = d\left(3\sin t\right) = 3\cos tdt \\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = 3\cos t \end{cases}$

$I_4 = \int x^2\sqrt{9-x^2}dx = \int 9\sin^2 t.3\cos tdt = 81\int \sin^2 t.\cos^2 tdt = \frac{81}{4}\int \sin^2 2tdt = \frac{81}{4}\int \frac{1-\cos 4t}{2}dt$

$= \frac{81}{4}\left[\frac{1}{2}\int dt - \frac{1}{2}\int \cos 4tdt\right] = \frac{81}{4}\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{8}\sin 4t\right) + C$

Từ $x = 3\sin t \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{9}} \\ t = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) \end{cases} \longrightarrow \sin 2t = \frac{2x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$

Mà $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t = 1 - 2\left(\frac{x}{3}\right)^2 = 1 - \frac{2x^2}{9} \longrightarrow \sin 4t = 2\sin 2t.\cos 2t = 2.\frac{2x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}.\left(1-\frac{2x^2}{9}\right)$

Từ đó ta được $I_4=\frac{81}{4}\left[\frac{\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)}{2}-\frac{x}{6}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}.\left(1-\frac{2x^2}{9}\right)\right]+C.$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $I_1=\int\frac{dx}{x^2+1};\ (a=1)$ **b)** $I_2=\int\sqrt{x^2+2x+5}dx$ **c)** $I_3=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+4}};\ (a=2)$

Lời giải

a) Đặt $x=\tan x\longrightarrow\begin{cases}dx=d(\tan t)=\frac{dt}{\cos^2 t}=(1+\tan^2 t)dt\\ 1+x^2=1+\tan^2 t\end{cases}\longrightarrow I_1=\int\frac{(1+\tan^2 t)dt}{1+\tan^2 t}=\int dt=t+C$

Từ giả thiết đặt $x=\tan t\Leftrightarrow t=\arctan x\longrightarrow I_1=\arctan x+C.$

b) Ta có $I_2=\int\sqrt{x^2+2x+5}dx=\int\sqrt{(x+1)^2+4}d(x+1)\xrightarrow{t=x+1}I=\int\sqrt{t^2+4}dt$

Đặt $t=2\tan u\longrightarrow\begin{cases}dt=d(2\tan u)=\frac{2du}{\cos^2 u}\\ \sqrt{4+t^2}=\sqrt{4+4\tan^2 u}=\frac{2}{\cos u}\end{cases}\longrightarrow I_2=\int\frac{2du}{\frac{2}{\cos u}.\cos^2 u}=\int\frac{du}{\cos u}=\int\frac{\cos udu}{\cos^2 u}$

$$=\int\frac{d(\sin u)}{1-\sin^2 u}=\frac{1}{2}\int\frac{(1+\sin u)+(1-\sin u)}{(1+\sin u)(1-\sin u)}d(\sin u)=\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin u)}{1-\sin u}+\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin u)}{1+\sin u}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin u}{1-\sin u}\right|+C.$$

Từ phép đặt $t=2\tan u\Leftrightarrow\tan u=\frac{t}{2}\longrightarrow\frac{1}{\cos^2 u}=1+\frac{t^2}{4}\longrightarrow\sin^2 u=1-\cos^2 u=1-\frac{4}{4+t^2}=\frac{t^2}{4+t^2}$

Từ đó ta được $I_2=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin u}{1-\sin u}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{t}{\sqrt{4+t^2}}}{1-\frac{t}{\sqrt{4+t^2}}}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}}{1-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}}\right|+C.$

c) Đặt $x=2\tan t\longrightarrow\begin{cases}dx=d(2\tan t)=\frac{2dt}{\cos^2 t}=2(1+\tan^2 t)dt\\ \sqrt{x^2+4}=\sqrt{4\tan^2 t+4}\end{cases}$

$$\Rightarrow I_3=\int\frac{4\tan^2 t.2(1+\tan^2 t)dt}{2\sqrt{1+\tan^2 t}}=4\int\tan^2 t\sqrt{1+\tan^2 t}dt=4\int\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt$$

$$=4\int\frac{\sin^2 t.\cos tdt}{\cos^4 t}=4\int\frac{\sin^2 t.d(\sin t)}{(1-\sin^2 t)^2}$$

Đặt $u=\sin t\longrightarrow I_3=4\int\frac{u^2}{\left(1-u^2\right)^2}du=4\int\left(\frac{u}{1-u}\right)^2du=4\int\left[\frac{1}{2}\frac{(1+u)-(1-u)}{(1+u)(1-u)}\right]^2du$

$$=\int\left(\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}\right)^2du=\int\frac{du}{(1-u)^2}+\int\frac{du}{(1+u)^2}-\int\frac{2du}{(1-u)(1+u)}$$

$$=-\int\frac{d(1-u)}{(1-u)^2}+\int\frac{d(1+u)}{(1+u)^2}-\int\frac{(1-u)(1+u)du}{(1-u)(1+u)}$$

$$=-\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}-\int\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du=-\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}-\int\frac{du}{1+u}-\int\frac{du}{1-u}$$

$$=-\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}-\ln|1+u|+\ln|u-1|+C=\frac{1}{u-1}-\frac{1}{1+u}+\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C$$

$$\longrightarrow I_3=\frac{1}{u-1}-\frac{1}{1+u}+\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C=\frac{1}{\sin t-t}-\frac{1}{\sin t+1}+\ln\left|\frac{\sin t-1}{\sin t+1}\right|+C.$$

Lại có $x=2\tan t\Leftrightarrow\tan t=\frac{x}{2}\longrightarrow\frac{1}{\cos^2 t}=1+\tan^2 t=1+\frac{x^2}{4}\Leftrightarrow\cos^2 t=\frac{4}{4+x^2}\longrightarrow\sin^2 t=\frac{x^2}{4+x^2}$

$$\Leftrightarrow\sin t=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\longrightarrow I_3=\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}-1}-\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}+1}+\ln\left|\frac{\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}-1}{\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}+1}\right|+C.$$

Ví dụ 3: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$ **b)** $I_2=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}.$ **c)** $I_3=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-2}}.$

Lời giải

a) Đặt $x=\frac{1}{\sin t}\Rightarrow\begin{cases}dx=d\left(\frac{1}{\sin t}\right)=\frac{-\cos tdt}{\sin^2 t}\\ \sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}dx=\frac{-\cos tdt}{\sin^2 t}\\ \sqrt{x^2-1}=\cot t\end{cases}$

$$\Rightarrow I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{-\cos tdt}{\sin^2 t.\cot t}=-\int\frac{\sin tdt}{\sin^2 t}=\int\frac{d(\cos t)}{1-\cos^2 t}$$

$$=\int\frac{d(\cos t)}{(1-\cos t)(1+\cos t)}=\frac{1}{2}\int\frac{(1-\cos t)+(1+\cos t)}{(1-\cos t)+(1+\cos t)}d(\cos t)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right|+C.$$

Từ phép đặt $x=\dfrac{1}{\sin t}\Rightarrow \cos^2 t=1-\sin^2 t=1-\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow \cos t=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}\Rightarrow I_1=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}}{1-\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}}\right|+C.$

b) Đặt $x=\dfrac{2}{\sin t}\longrightarrow\begin{cases} dx=d\left(\dfrac{2}{\sin t}\right)=\dfrac{-2\cos tdt}{\sin^2 t}\\ \sqrt{x^2-4}=\sqrt{\dfrac{4}{\sin^2 t}-4}\end{cases}\longleftrightarrow\begin{cases} dx=\dfrac{-2\cos tdt}{\sin^2 t}\\ \sqrt{x^2-4}=2\cos t\Rightarrow x^2\sqrt{x^2-4}=\dfrac{8\cot t}{\sin^2 t}\end{cases}$

Khi đó, $I_2=\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}=\int\frac{-2\cos tdt}{\sin^2 t.\dfrac{8\cot t}{\sin^2 t}}=-\frac{1}{4}\int\sin tdt=\frac{1}{4}\cos t+C.$

Từ $x=\dfrac{2}{\sin t}\longrightarrow\cos^2 t=1-\sin^2 t=1-\dfrac{4}{x^2}\Leftrightarrow\cos t=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}\longrightarrow I_2=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{4x}+C.$

c) $I_3=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-2}}=\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2-3}}\xrightarrow{t=x-1}I_3=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-3}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}}.$

Đặt $t=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin u}\longrightarrow\begin{cases} dt=d\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sin u}\right)=\dfrac{-\sqrt{3}\cos udu}{\sin^2 u}\\ \sqrt{t^2-3}=\sqrt{\dfrac{3}{\sin^2 u}-3}\end{cases}\longleftrightarrow\begin{cases} dt=\dfrac{-\sqrt{3}\cos udu}{\sin^2 u}\\ \sqrt{t^2-3}=\sqrt{3}\cot u\end{cases}$

$\longrightarrow I_3=\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-3}}=\int\frac{-\sqrt{3}\cos udu}{\sin^2 u.\sqrt{3}\cot u}=-\int\frac{\sin udu}{\sin^2 u}=\int\frac{d(\cos u)}{1-\cos^2 u}=\int\frac{d(\cos u)}{(1-\cos u)(1+\cos u)}$

$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{(1-\cos u)+(1+\cos u)}{(1-\cos u)(1+\cos u)}d(\cos u)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos u}{1-\cos u}\right|+C.$

$t=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin u}\Rightarrow\cos^2 u=1-\dfrac{3}{t^2}\Leftrightarrow\cos t=\dfrac{\sqrt{t^2-3}}{t}\Rightarrow I_3=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{t^2-3}}{t}}{1-\dfrac{\sqrt{t^2-3}}{t}}\right|+C=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{x^2-2x-2}}{x-1}}{1-\dfrac{\sqrt{x^2-2x-2}}{x-1}}\right|+C.$

Ví dụ 4: Cho nguyên hàm $I=\int x^2\sqrt{1-x^2}dx.$ Bằng cách đặt $x=\sin t$ $\left(t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $I=\int(1-\cos 4t)dt.$

B. $I=\int(1+\cos 4t)dt.$

C. $I=\dfrac{t}{8}-\dfrac{\sin 4t}{32}+C.$

D. $I=\dfrac{t}{8}+\dfrac{\sin 4t}{32}+C.$

Lời giải

Ta có: $x=\sin t\left(t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)\Rightarrow\begin{cases}dx=\cos tdt\\ \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=|\cos t|=\cos t\end{cases}$

Khi đó $I=\int\sin^2 t.\cos^2 tdt=\frac{1}{4}\int\sin^2 2tdt=\frac{1}{8}\int(1-\cos 4t)dt\Rightarrow I=\frac{t}{8}-\frac{\sin 4t}{32}+C.$ **Chọn C.**

Ví dụ 5: Cho nguyên hàm $I=\int\sqrt{x^2-9}dx$. Bằng cách đặt $x=\frac{3}{\cos t}$, với $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $I=-9\int\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt.$ **B.** $I=9\int\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt.$ **C.** $I=-9\int\frac{\sin^2 t}{\cos^4 t}dt.$ **D.** $I=9\int\frac{\sin^2 t}{\cos^4 t}dt.$

Lời giải

Ta có $I=\int\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}-9}d\left(\frac{3}{\cos t}\right)=\int 3\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}.\frac{-9}{\cos^2 t}.(-\sin t)dt$

$=9\int\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}.\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt=9\int\frac{\sin^2 t}{\cos^3}dt.$ **Chọn B.**

Ví dụ 6: Tính nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

A. $I=\arcsin\frac{x}{2}+C.$ **B.** $I=x+C.$ **C.** $I=\arccos\frac{x}{2}+C.$ **D.** $I=\arcsin x+C.$

Lời giải

Đặt $x=2\sin t\left(t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right)\Rightarrow\begin{cases}dx=2\cos tdt\\ \sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-\sin^2 t}=2|\cos t|=2\cos t\end{cases}$

Khi đó $I=\int\frac{2\cos tdt}{2\cos t}=\int dt=t+C=\arcsin\frac{x}{2}+C.$ **Chọn A.**

Tổng quát: $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C\ (a>0)$

Ví dụ 7: Tính nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$.

A. $I=\arcsin\frac{x+1}{\sqrt5}+C.$ **B.** $I=\arcsin\frac{2x+1}{2\sqrt5}+C.$

C. $I=\arcsin(2x+1)+C.$ **D.** $I=\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt5}+C.$

Lời giải

Ta có: $I=\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2}+x\right)^2}}=\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2}+x\right)^2}}$

$=\arcsin \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}+C=\arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C.$ **Chọn D.**

Ví dụ 8: Tính nguyên hàm $I=\int \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^5}}$ bằng cách đặt $x=\sin t\left(t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right)$ ta được:

A. $I=2\tan^2 t+C.$ **B.** $I=\frac{\tan^3 t}{3}+C.$ **C.** $I=\frac{\tan^2 t}{2}+C.$ **D.** $I=\frac{\tan^5 t}{5}+C.$

Lời giải

Đặt $x=\sin t\left(t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right)\Rightarrow \begin{cases} dx=\cos tdt \\ \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\left|\cos t\right|=\cos t \end{cases}.$

Khi đó: $I=\int \frac{\sin^2 t.\cos tdt}{\cos^5 t}=\int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}.\frac{1}{\cos^2 t}dt=\int \tan^2 td\left(\tan t\right)=\frac{\tan^3 t}{3}+C.$ **Chọn B.**

Ví dụ 9: Tính nguyên hàm $I=\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ bằng cách đặt $x=\cos 2t\left(t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right)$ ta được:

A. $I=-4\int \cos^2 tdt.$ **B.** $I=-2\int \cos^2 tdt.$ **C.** $I=-4\int \sin^2 tdt.$ **D.** $I=-4\int \frac{\cos^3 t}{\sin t}dt.$

Lời giải

Đặt $x=\cos 2t\Rightarrow dx=-2\sin 2tdt=-4\sin t\cos tdt.$

Mặt khác $\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}}=\sqrt{\frac{2\cos^2 t}{2\sin^2 t}}=\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}=\left|\frac{\cos t}{\sin t}\right|=\frac{\cos t}{\sin t}$

Khi đó $I=\int \frac{\cos t}{\sin t}.\left(-4\sin t\cos t\right)dt=-4\int \cos^2 tdt.$ **Chọn A.**

Ví dụ 10: Tính nguyên hàm $I=\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$ bằng cách đặt $x=\frac{1}{\cos t}\left(t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right)$ ta được.

A. $I=\int \tan^3 xdx.$ **B.** $I=\int \tan^2 xdx.$ **C.** $I=\int \cot^3 xdx.$ **D.** $I=\int \cot^2 xdx.$

Lời giải

Đặt $x=\frac{1}{\cos t}\left(t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right)\Rightarrow dx=\frac{-(\cos t)'}{\cos^2 t}dt=\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$

Lại có: $\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=\sqrt{\tan^2 t}=\left|\tan t\right|=\tan t$

Do đó $I=\int\frac{\tan t}{\frac{1}{\cos t}}.\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt=\int\tan^2 tdt$. **Chọn B.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Xét $I=\int x^3\left(4x^4-3\right)^5dx$. Bằng cách đặt $u=4x^4-3,$ hỏi khẳng định nào đúng?

A. $I=\frac{1}{4}\int u^5du.$ **B.** $I=\frac{1}{21}\int u^5du.$ **C.** $I=\frac{1}{16}\int u^5du.$ **D.** $I=\int u^5du.$

Câu 2: Cho $I=\int x\left(1-x^2\right)^{10}dx.$ Đặt $u=1-x^2,$ hỏi khẳng định nào đúng?

A. $I=\int 2u^{10}du$ **B.** $I=-\int 2u^{10}du$ **C.** $I=-\frac{1}{2}\int u^{10}du$ **D.** $I=\frac{1}{2}\int u^{10}du$

Câu 3: Xét $I=\int\frac{x}{\sqrt{4x+1}}dx,$ bằng cách đặt $t=\sqrt{4x+1},$ mệnh đề nào sau đúng?

A. $I=\frac{1}{8}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)+C.$ **B.** $I=\frac{1}{4}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C.$ **C.** $I=\frac{1}{8}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C.$ **D.** $I=\frac{1}{4}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)+C.$

Câu 4: Tìm nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x\sqrt{1+x^2}.$

A. $\frac{1}{2}x^2\sqrt{1+x^2}+C.$ **B.** $\frac{1}{3}\left(x^2\sqrt{1+x^2}\right)^3+C.$ **C.** $\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3+C.$ **D.** $\frac{1}{3}x^2\sqrt{1+x^2}+C.$

Câu 5: Tìm nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\cos^5x.\sin x$

A. $-\frac{1}{6}\cos^6x+C$ **B.** $-\frac{1}{6}\sin^6x+C$ **C.** $\frac{1}{6}\cos^6x+C$ **D.** $-\frac{1}{4}\cos^4x+C$

Câu 6: Tìm một nguyên hàm $F\left(x\right)$ của hàm số $f\left(x\right)=2x\left(x^2+1\right)^4$ thỏa mãn $F\left(1\right)=6.$

A. $F\left(x\right)=\frac{x^2\left(x^2+1\right)^5}{5}-\frac{2}{5}$ **B.** $F\left(x\right)=\frac{\left(x^2+1\right)^5}{5}-\frac{2}{5}$

C. $F\left(x\right)=\frac{x^2\left(x^2+1\right)^5}{5}+\frac{2}{5}$ **D.** $F\left(x\right)=\frac{\left(x^2+1\right)^4}{5}-\frac{2}{5}$

Câu 7: Tìm một nguyên hàm $F\left(x\right)$ của hàm số $f\left(x\right)=x\left(x^2+1\right)^9$ thỏa mãn $F\left(0\right)=\frac{21}{20}.$

A. $F\left(x\right)=-\frac{1}{20}\left(x^2+1\right)^{10}+1$ **B.** $F\left(x\right)=\frac{1}{20}\left(x^2+1\right)^{10}+1$

C. $F\left(x\right)=2\left(x^2+1\right)^{10}-1$ **D.** $F\left(x\right)=\left(x^2+1\right)^{10}+2$

Câu 8: Tìm nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x\left(3-x\right)^5.$

A. $\left(3-x\right)^6\left(\frac{3-x}{6}-\frac{1}{2}\right)+C$ **B.** $\left(3-x\right)^6\left(\frac{3-x}{7}+\frac{1}{2}\right)+C$

C. $\left(3-x\right)^6\left(\frac{3-x}{7}-\frac{1}{2}\right)+C$ **D.** $\left(3+x\right)^6\left(\frac{3-x}{7}-\frac{1}{2}\right)+C$

Câu 9: Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}\sqrt{\ln^2 x+1}$ thỏa $F\left(1\right)=\frac{1}{3}$. Tính $\left[F\left(e\right)\right]^2$.

A. $\left[F\left(e\right)\right]^2=\frac{8}{3}$. **B.** $\left[F\left(e\right)\right]^2=\frac{8}{9}$. **C.** $\left[F\left(e\right)\right]^2=\frac{1}{3}$. **D.** $\left[F\left(e\right)\right]^2=\frac{1}{9}$.

Câu 10: Gọi $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ thỏa $F\left(2\right)=0$. Tìm tổng các nghiệm phương trình $F\left(x\right)=x$.

A. $1+\sqrt{3}$ **B.** 2. **C.** 1. **D.** $1-\sqrt{3}$

Câu 11: Tìm một nguyên hàm $F\left(x\right)$ của hàm số $f\left(x\right)=\frac{2x}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

A. $F\left(x\right)=\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}$ **B.** $F\left(x\right)=\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}$

C. $F\left(x\right)=\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2-1}$ **D.** $F\left(x\right)=\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2-1}$

Câu 12: Hàm số $f\left(x\right)=\frac{\ln x\sqrt{\ln^2 x+1}}{x}$ có 1 nguyên hàm $F\left(x\right)$ là thỏa $F\left(1\right)=\frac{1}{3}$. Tìm $F^2\left(e\right)$.

A. $F^2\left(e\right)=\frac{1}{3}$. **B.** $F^2\left(e\right)=\frac{8}{3}$. **C.** $F^2\left(e\right)=\frac{8}{9}$. **D.** $F^2\left(e\right)=\frac{1}{9}$.

Câu 13: Tìm một nguyên hàm $F\left(x\right)$ của hàm số $f\left(x\right)=\frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}$ thỏa $F\left(0\right)=\sqrt{27}$.

A. $F\left(x\right)=2\sqrt{e^x+3}-\sqrt{3}$ **B.** $F\left(x\right)=\sqrt{e^x+3}-\sqrt{3}$

C. $F\left(x\right)=2\sqrt{e^x+3}+\sqrt{3}$ **D.** $F\left(x\right)=\sqrt{e^x+3}+\sqrt{3}$

Câu 14: Hàm số $f\left(x\right)=\frac{x^3}{\sqrt{2x-x^2}}$ có một nguyên hàm là $F\left(x\right)$ thỏa $F\left(-1\right)=\frac{1}{3}$. Tính $F\left(1\right)$.

A. $F\left(1\right)=2$ **B.** $F\left(1\right)=\frac{1}{3}$ **C.** $F\left(1\right)=-\frac{5}{3}$ **D.** $F\left(1\right)=-\frac{3}{5}$

Câu 15: Tìm một nguyên hàm $F\left(x\right)$ của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x}{\sqrt{x-2}}$ thỏa mãn $F\left(3\right)=\frac{2}{3}$.

A. $F\left(x\right)=\frac{2}{3}\sqrt{\left(x-2\right)^3}-4\sqrt{x-2}+4$. **B.** $F\left(x\right)=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x-2\right)^3}+4\sqrt{x-2}+4$.

C. $F\left(x\right)=\frac{2}{3}\sqrt{\left(x-2\right)^3}+4\sqrt{x-2}-4$. **D.** $F\left(x\right)=\frac{2}{3}\sqrt{\left(x-2\right)^3}+2\sqrt{x-2}-4$.

Câu 16: Hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ có một nguyên hàm là $F\left(x\right)$ thỏa $F\left(0\right)=2\ln 2$. Tính $F\left(1\right)$.

A. $F\left(1\right)=-2\ln 2$. **B.** $F\left(1\right)=2\ln 2$. **C.** $F\left(1\right)=2$. **D.** $F\left(1\right)=0$.

Câu 17: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}+4}$ thỏa $F(1)=2-4\ln 5.$

A. $\sqrt{2x+1}+1-4\ln\left(\sqrt{2x+1}+4\right)$

B. $\sqrt{2x-1}+1-4\ln\left(\sqrt{2x-1}+4\right)$

C. $\sqrt{2x-1}-1-\dfrac{7}{2}\ln\left(\sqrt{2x-1}+4\right)$

D. $\sqrt{2x-1}-1+\dfrac{7}{2}\ln\left(\sqrt{2x+1}+4\right)$

Câu 18: Hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F(0)=\dfrac{2}{3}$. Tính $F(1)$.

A. $F(1)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}.$ **B.** $F(1)=\dfrac{3}{2}.$ **C.** $F(1)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}.$ **D.** $F(1)=\dfrac{2}{3}.$

Câu 19: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{2}{x}.$

A. $-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2}{x}+C$ **B.** $-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{2}{x}+C$ **C.** $\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2}{x}+C$ **D.** $\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{2}{x}+C$

Câu 20: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{e^x+3}$ thỏa mãn $F(0)=-\dfrac{1}{3}\ln 4$. Tìm tập nghiệm S của phương trình $3F(x)+\ln\left(e^x+3\right)=2.$

A. $S=\{2\}$ **B.** $S=\{-2;\,2\}$ **C.** $S=\{1;\,2\}$ **D.** $S=\{-2;\,1\}$

Câu 21: Giả sử $\int x(1-x)^{2017}\,dx=\dfrac{(1-x)^a}{a}-\dfrac{(1-x)^b}{b}+C,$ với *a, b* là các số nguyên dương. Tính $2a-b.$

A. $2a-b=2017$ **B.** $2a-b=2018$ **C.** $2a-b=2019$ **D.** $2a-b=2020$

Câu 22: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}.$

A. $e^x-\ln\left(e^x+1\right)+C$ **B.** $e^x+\ln\left(e^x+1\right)+C$ **C.** $\ln\left(e^x+1\right)+C$ **D.** $e^{2x}-e^x+C$

Câu 23: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}.$

A. $2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$

B. $2\sqrt{x}+2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$

C. $\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$

D. $2+2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$

Câu 24: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}.$

A. $\dfrac{3}{4}(x+4)\sqrt{x+1}+C$

B. $\dfrac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+1}+C$

C. $\dfrac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}+C$

D. $\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+C$

Câu 25: Tìm nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{1-x}}$.

A. $-2\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}+C$

B. $\dfrac{2}{3}\left(2x+1\right)\sqrt{1-x}+C$

C. $-\dfrac{2}{3}\left(2x+1\right)\sqrt{1-x}+C$

D. $-\dfrac{2}{3}\left(2x-1\right)\sqrt{1-x}+C$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đặt $u = 4x^4 - 3 \Leftrightarrow du = 16x^3 dx \Leftrightarrow x^3 dx = \frac{1}{16}du$

Khi đó $I = \int \frac{1}{16}u^5 du = \frac{1}{16}\int u^5 du$. **Chọn C.**

Câu 2: Đặt $u = 1 - x^2 \Leftrightarrow du = -2xdx \Leftrightarrow xdx = -\frac{1}{2}du$. Khi đó $I = -\frac{1}{2}\int u^{10} du$. **Chọn C.**

Câu 3: Đặt $t = \sqrt{4x+1} \Leftrightarrow t^2 = 4x+1 \Leftrightarrow 4dx = 2tdt \Leftrightarrow dx = \frac{t}{2}dt$

Khi đó $I = \int \frac{\frac{t^2-1}{4}}{t}.\frac{t}{2}dt = \int \frac{t^2-1}{8}dt = \frac{1}{8}\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + C$. **Chọn C.**

Câu 4: $\int f(x)dx = \int x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+x^2}\, d\left(1+x^2\right) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3 + C$. **Chọn C.**

Câu 5: $\int f(x)dx = \int \cos^5 x.\sin x dx = -\int \cos^5 x d(\cos x) = -\frac{1}{6}\cos^6 x + C$. **Chọn A.**

Câu 6: $\int f(x)dx = \int 2x\left(x^2+1\right)^4 dx = \int \left(x^2+1\right)d\left(x^2+1\right) = \frac{\left(x^2+1\right)^5}{5} + C.$

Suy ra $F(x) = \frac{\left(x^2+1\right)^5}{5} + C$ mà $F(1) = 6 \longrightarrow C = -\frac{2}{5}$. Vậy $F(x) = \frac{\left(x^2+1\right)^5}{5} - \frac{2}{5}$. **Chọn B.**

Câu 7: $F(x) = \int f(x)dx = \int x\left(x^2+1\right)^9 dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+1\right)^9 d\left(x^2+1\right) = \frac{\left(x^2+1\right)^{10}}{20} + C.$

Mà $F(0) = \frac{21}{20} \longrightarrow C = 1$. Vậy $F(x) = \frac{1}{20}\left(x^2+1\right)^{10} + 1$. **Chọn B.**

Câu 8: $f(x) = x(3-x)^5 = -(3-x-3).(3-x)^5 = -(3-x)^6 + 3.(3-x)^5$.

Khi đó $\int f(x)dx = \int \left[-(3-x)^6 + 3.(3-x)^5\right]dx = \frac{(3-x)^7}{7} - \frac{(3-x)^6}{2} + C$. **Chọn C.**

Câu 9: $t = \sqrt{\ln^2 x + 1} \Leftrightarrow t^2 = \ln^2 x + 1 \Leftrightarrow 2tdt = 2.\frac{\ln x}{x}dx \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}dx = tdt.$

Khi đó $\int f(x)dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\left(\sqrt{\ln^2 x + 1}\right)^3}{3} + C$ mà $F(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 0.$

Vậy $F(x) = \frac{\left(\sqrt{\ln^2 x + 1}\right)^3}{3} \longrightarrow F(e) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. **Chọn B.**

Câu 10: Đặt $t = \sqrt{8 - x^2} \Leftrightarrow t^2 = 8 - x^2 \Leftrightarrow xdx = -tdt$

Khi đó $\int f\left(x\right)dx=\int\frac{-t}{t}dt=-\int dt=-t+C=-\sqrt{8-x^2}+C$

Mà $F\left(2\right)=0\longrightarrow C=2.$ Vậy $F\left(x\right)=x\Leftrightarrow 2-\sqrt{8-x^2}=x\Leftrightarrow x=1-\sqrt{3}.$ **Chọn D.**

Câu 11: Ta có $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=1\Leftrightarrow\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=x-\sqrt{x^2-1}$

Khi đó $f\left(x\right)=2x\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=2x^2-2x\sqrt{x^2-1}\Rightarrow\int f\left(x\right)dx=\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}+C.$ **Chọn A.**

Câu 12: Đặt $t=\sqrt{\ln^2x+1}\Leftrightarrow t^2=\ln^2x+1\Leftrightarrow 2tdt=2.\frac{\ln x}{x}dx\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}dx=tdt.$

Khi đó $\int f\left(x\right)dx=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\left(\sqrt{\ln^2x+1}\right)^3}{3}+C$ mà $F\left(1\right)=\frac{1}{3}\Rightarrow C=0.$

Vậy $F\left(x\right)=\frac{\left(\sqrt{\ln^2x+1}\right)^3}{3}\longrightarrow F\left(e\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$ **Chọn C.**

Câu 13: Đặt $t=\sqrt{e^x+3}\Leftrightarrow t^2=e^x+3\Leftrightarrow e^xdx=2tdt$

Khi đó $\int f\left(x\right)dx=\int\frac{2t}{t}dt=2\int dt=2t+C=2\sqrt{e^x+3}+C$

Mà $F\left(0\right)=3\sqrt{3}\longrightarrow C=\sqrt{3}.$ Vậy $F\left(x\right)=2\sqrt{e^x+3}+\sqrt{3}.$ **Chọn C.**

Câu 14: Đặt $t=\sqrt{2-x^2}\Leftrightarrow t^2=2-x^2\Leftrightarrow tdt=-xdx$

Khi đó $\int f\left(x\right)dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}xdx=\int\frac{2-t^2}{t}\left(-t\right)dt=\int\left(t^2-2\right)dt$

$=\frac{t^3}{3}-2t+C=\frac{1}{3}\left(\sqrt{2-x^2}\right)^3-2\sqrt{2-x^2}+C$ mà $F\left(-1\right)=\frac{1}{3}\longrightarrow C=2.$ Vậy $F\left(1\right)=\frac{1}{3}.$**Chọn B.**

Câu 15: Đặt $t=\sqrt{x-2}\Leftrightarrow t^2=x-2\Leftrightarrow dx=2tdt$

Khi đó $\int f\left(x\right)dx=\int\frac{t^2+2}{t}.2tdt=\int\left(2t^2+4\right)dt=\frac{2}{3}t^3+4t+C=\frac{2}{3}\left(\sqrt{2-x}\right)^3+4\sqrt{2-x}+C$

Mà $F\left(3\right)=\frac{2}{3}\longrightarrow C=4.$ Vậy $F\left(x\right)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{2-x}\right)^3+4\sqrt{2-x}+4.$ **Chọn B.**

Câu 16: Đặt $t=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=t^2\Leftrightarrow dx=2tdt$

Khi đó $\int f\left(x\right)dx=\int\frac{2t}{t+1}dt=\int\left(2-\frac{2}{t+1}\right)dt=2t-2\ln\left|t+1\right|+C=2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C.$

Mà $F\left(0\right)=2\ln 2\longrightarrow C=2\ln 2.$ Vậy $F\left(1\right)=2-2\ln 2+2\ln 2=2.$ **Chọn C.**

Câu 17: Đặt $t=\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow t^2=2x-1\Leftrightarrow dx=tdt$

Khi đó $\int f(x)dx=\int \frac{t}{t+4}dt=\int\left(1-\frac{4}{t+4}\right)dt=t-4\ln|t+4|+C=\sqrt{2x-1}-4\ln\left|\sqrt{2x-1}+4\right|+C.$

Mà $F(1)=2-4\ln 5\longrightarrow C=1.$ Vậy $F(x)=\sqrt{2x-1}+1-4\ln\left|\sqrt{2x-1}+4\right|.$ **Chọn B.**

Câu 18: Đặt $t=\sqrt{x^3+1}\Leftrightarrow t^2=x^3+1\Leftrightarrow x^2dx=\frac{2t}{3}dt$

Khi đó $\int f(x)dx=\int\frac{2t}{3}:tdt=\int\frac{2}{3}dt=\frac{2}{3}t+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C.$

Mà $F(0)=\frac{2}{3}\longrightarrow C=0.$ Vậy $F(1)=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$ **Chọn C.**

Câu 19: Ta có $\int f(x)dx=\int\frac{1}{x^2}\cos\frac{2}{x}dx=-\frac{1}{2}.\int\cos\frac{2}{x}d\left(\frac{2}{x}\right)=-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x}+C.$ **Chọn A.**

Câu 20: Đặt $t=e^x\Leftrightarrow dt=e^xdx\Leftrightarrow dx=\frac{dt}{t}.$

Khi đó $\int f(x)dx=\int\frac{dt}{t(t+3)}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t}{t+3}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{e^x}{e^x+3}\right|+C.$

Mà $F(0)=-\frac{1}{3}\longrightarrow C=0.$ Do đó $3F(x)=\ln e^x-\ln\left(e^x+3\right).$

Vậy $3F(x)+\ln\left(e^x+3\right)=2\Leftrightarrow \ln e^x=2\Leftrightarrow x=2.$ **Chọn A.**

Câu 21: Ta có $\int x(1-x)^{2017}dx=-\int(1-x-1)(1-x)^{2017}dx=\int\left[(1-x)^{2018}-(1-x)^{2017}\right]d(1-x)$

$=\frac{(1-x)^{2019}}{2019}-\frac{(1-x)^{2018}}{2018}+C\longrightarrow\begin{cases}a=2019\\b=2018\end{cases}.$ Vậy $2a-b=2020.$ **Chọn D.**

Câu 22: Ta có $\int f(x)dx=\int\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx=\int\frac{e^x}{e^x+1}d\left(e^x\right)=e^x-\ln\left(e^x+1\right)+C.$ **Chọn A.**

Câu 23: Đặt $t=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=t^2\Leftrightarrow dx=2tdt$

Khi đó $\int f(x)dx=\int\frac{2t}{t+1}dt=\int\left(2-\frac{2}{t+1}\right)dt=2t-2\ln|t+1|+C=2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C.$ **Chọn A.**

Câu 24: Đặt $t=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow t^2=x+1\Leftrightarrow dx=2tdt$

Khi đó $\int f(x)dx=\int\frac{t^2+1}{t}.2tdt=\int\left(2t^2+2\right)dt=\frac{2}{3}t^3+2t+C.$ **Chọn B.**

Câu 25: Đặt $t=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow t^2=1-x\Leftrightarrow x=1-t^2\Leftrightarrow dx=-2tdt$

Khi đó $\int f(x)dx=\int\frac{2(1-t)^2-1}{t}.(-2t)dt=-2\int\left(2t^2-4t+1\right)dt=-\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{1-x}+C.$ **Chọn C.**