

TUYỂN CHỌN MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẶC SẮC VỀ TỔ HỢP

Câu 1. Cho triển khai $(x-1)^{2n} + x(x+1)^{2n-1} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$ với n là số tự nhiên và $n \geq 3$.

Biết $\sum_{k=0}^n a_{2k} = 768$, tính a_5 .

- A. $a_5 = -378$ B. $a_5 = -252$ C. $a_5 = -126$ D. $a_5 = 378$

Lời giải:

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} \\ f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{2n} \end{cases} \longrightarrow f(1) + f(-1) = 2 \cdot \sum_{k=0}^n a_{2k} = 1536$$

Hay $2^{2n-1} + 2^{2n} = 1536 \longrightarrow n = 5 \longrightarrow$ hệ số $a_5 = C_{10}^5 (-1)^5 + C_9^4 = -126$. **Chọn C.**

Câu 2. Gọi S là tổng các hệ số của các lũy thừa bậc nguyên dương của x trong khai triển nhị thức

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2018}. \text{ Tính } S + \frac{1}{2} C_{2018}^{1009}.$$

- A. $S = 2^{2016}$ B. $S = 2^{2017}$ C. $S = 2^{2018}$ D. $S = 2^{2019}$

Lời giải:

$$\text{Ta có } \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k \cdot x^{2018-2k}.$$

Để lũy thừa với số mũ nguyên dương thì $2018 - 2k > 0 \Leftrightarrow k < 1009$.

$$\text{Suy ra } S = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + \dots + C_{2018}^{1008}.$$

$$\text{Suy ra } S + \frac{1}{2} C_{2018}^{1009} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + \dots + C_{2018}^{1008} + \frac{1}{2} C_{2018}^{1009}$$

$$\xrightarrow{C_n^k - C_n^{n-k}} 2 \left(S + \frac{1}{2} C_{2018}^{1009} \right) = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + \dots + C_{2018}^{1008} + \frac{1}{2} C_{2018}^{1009} + C_{2018}^{2018} + C_{2018}^{2017} + \dots + C_{2018}^{1010} + \frac{1}{2} C_{2018}^{1009}$$

$$= C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + \dots + C_{2018}^{2017} + C_{2018}^{2018} = 2^{2018}.$$

$$\text{Vậy } S + \frac{1}{2} C_{2018}^{1009} = 2^{2017}. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 3. Cho khai triển $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Hỏi có bao nhiêu giá trị $n \leq 2018$ sao

cho tồn tại k thỏa mãn $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{7}{15}$.

- A. 21 B. 90 C. 91 D. 642

Lời giải:

$$\text{Ta có } (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \longrightarrow \text{hệ số của } x^k \text{ là } C_n^k.$$

$$\text{Từ giả thiết } \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{7}{15} \longrightarrow \frac{C_n^k}{C_n^{k+1}} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow n = \frac{22k+15}{7} = 3k+2 + \frac{k+1}{7}.$$

Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên $(k+1):7 \longrightarrow k = 6 + 7m$ với $m \in \mathbb{N}$.

Khi đó $n = 21 + 22m \leq 2018 \xrightarrow{m \in \mathbb{N}} m = \{0; 1; 2; \dots; 90\} \longrightarrow$ có 91 số. **Chọn C.**

Câu 4. Tìm n , biết rằng hệ số của x^4 trong khai triển $(x^3 + 2x^2 + 3x)(x+1)^n$ bằng 804.

A. $n = 8$

B. $n = 10$

C. $n = 12$

D. $n = 14$

Lời giải:

Ta có $(x^3 + 2x^2 + 3x)(x+1)^n = x^3(1+x)^n + 2x^2(1+x)^n + 3x(1+x)^n$.

Do đó $a_4 = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 = 804 \Leftrightarrow n + \frac{2 \cdot (n-1)n}{2!} + \frac{3 \cdot n(n-1)(n-2)}{3!} = 804 \Leftrightarrow n = 12$. **Chọn C.**

Câu 5. Cho khai triển $a_n(x-1)^n + a_{n-1}(x-1)^{n-1} + \dots + a_1(x-1) + a_0 = x^n$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 5$.
Tìm n , biết $a_2 + a_3 + a_4 = 83n$.

A. $n = 12$

B. $n = 13$

C. $n = 14$

D. $n = 15$

Lời giải:

Ta có $x^n = [(x-1)+1]^n = C_n^0(x-1)^n + C_n^1(x-1)^{n-1} + C_n^2(x-1)^{n-2} + \dots + C_n^{n-1}(x-1) + C_n^n$.

Vì $a_2 + a_3 + a_4 = 83n \longrightarrow C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 = 83n \longrightarrow n = 13$. **Chọn B.**

Câu 6. Sau khi khai triển và rút gọn thì biểu thức $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10}$, có tất cả bao nhiêu số hạng?

A. 28

B. 29

C. 30

D. 32

Lời giải:

Ta có $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^{20-k} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k + \sum_{m=0}^{10} C_{10}^m x^{3(10-m)} \left(-\frac{1}{x}\right)^m$
 $= \sum_{k=0}^{20} (-1)^k C_{20}^k x^{20-3k} + \sum_{m=0}^{10} (-1)^m C_{10}^m x^{30-4m}$.

Ta tìm các số hạng có cùng lũy thừa của x :

$\begin{cases} 0 \leq m \leq 10, 0 \leq k \leq 20 \\ 20 - 3k = 30 - 4m \Leftrightarrow 4m - 3k = 10 \end{cases} \Leftrightarrow (k; m) = (2; 4), (6; 7), (10; 10).$

Vậy trong khai triển đã cho có tất cả $21 + 11 - 3 = 29$ số hạng. **Chọn B.**

Câu 7. Có bao nhiêu số thực x để khi khai triển nhị thức $\left(2^x + 2^{\frac{1}{2}-x}\right)^n$ có tổng số hạng thứ 3 và thứ 5 bằng 135, còn tổng của ba số hạng cuối bằng 22.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải:

Số hạng thứ $(k+1)$ trong khai triển là $T_k = C_n^k (2^x)^{n-k} \left(2^{\frac{1}{2}-x}\right)^k$.

Từ đó suy ra:

- Tổng hai số hạng thứ 3 và thứ 5 bằng 135

$$\longrightarrow T_2 + T_4 = C_n^2 (2^x)^{n-2} \left(2^{\frac{1}{2}-x} \right)^2 + C_n^4 (2^x)^{n-4} \left(2^{\frac{1}{2}-x} \right)^4 = 135. \quad (1)$$

- Tổng ba hệ số của ba số cuối bằng 22

$$\longrightarrow C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 22 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} + n + 1 = 22 \Leftrightarrow n = 6.$$

Thay $n = 6$ vào (1), ta được $C_6^2 \cdot 2^{4x} \cdot 2^{1-2x} + C_6^4 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{2-4x} = 135 \Leftrightarrow 2^{2x+1} + 2^{2-2x} = 9$.

Đặt $0 < u = 2^{2x}$, ta được $2u + \frac{4}{u} = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \longrightarrow x = 1 \\ u = \frac{1}{2} \longrightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$. Vậy $x \in \left\{ 1; -\frac{1}{2} \right\}$. **Chọn C.**

Câu 8. Trong khai triển của biểu thức $(x^3 - x - 2)^{2017}$, tính tổng S của các hệ số của x^{2k+1} với k nguyên dương.

A. $S = 2^{2017}$ B. $S = 2017 \cdot 2^{2016}$ C. $S = \frac{2^{2017} - 2^{2016}}{2}$ D. $S = \frac{2^{2017} + 2^{2016}}{2}$

Lời giải:

Ta có $(x^3 - x - 2)^{2017} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{6051} x^{6051}$. (1)

Ta cần tính $S = a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{6051}$.

Thay $x = 1$ vào (1), ta được $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{6051} = -2^{2017}$. (2)

Thay $x = -1$ vào (1), ta được $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{6051} = -2^{2017}$. (3)

Trừ vế theo vế (2) và (3), ta được $2(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{6051}) = 0 \iff 2S + 2a_1 = 0 \iff S = -a_1$.

Theo khai triển nhị thức Niuton, ta có $(x^3 - x - 2)^{2017} = \sum_{k=0}^{2017} C_{2017}^k (x^3 - x)^k (-2)^{2017-k} \longrightarrow$ số hạng $a_1 x$ chỉ xuất hiện trong $C_{2017}^1 (x^3 - x)^1 (-2)^{2017-1}$.

Mà $C_{2017}^1 (x^3 - x)^1 (-2)^{2017-1} = 2017 \cdot 2^{2016} \cdot (x^3 - x) \rightarrow a_1 = -2017 \cdot 2^{2016} \longrightarrow S = 2017 \cdot 2^{2016}$. **Chọn B.**

Câu 9. Kí hiệu a_{5n-10} là hệ số của số hạng chứa x^{5n-10} trong khai triển $(x^3 + 1)^n (x^2 + 2)^n$. Biết $a_{5n-10} = 1000n(n-1)$, tìm n .

A. $n = 15$ B. $n = 17$ C. $n = 19$ D. $n = 20$

Lời giải:

Ta có $(x^3 + 1)^n (x^2 + 2)^n = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^{3(n-k)} \right) \left(\sum_{i=0}^n C_n^i x^{2(n-i)} 2^i \right) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n C_n^k C_n^i 2^i x^{5n-3k-2i}$.

Chọn $5n - 3k - 2i = 5n - 10 \Leftrightarrow 3k + 2i = 10 \longrightarrow (k; i) \in \{(0; 5), (2; 2)\}$.

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^{5n-10} là $C_n^0 \cdot C_n^5 \cdot 2^5 + C_n^2 \cdot C_n^2 \cdot 2^2$.

Theo giả thiết $C_n^0.C_n^5.2^5 + C_n^2.C_n^2.2^2 = 1000n(n-1) \rightarrow n = 17$. **Chọn B.**

Câu 10. Cho khai triển $x(x+1)^n + 2(x+1)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n+1}x^{n+1}$ với n là số tự nhiên và $n \geq 2$. Tìm n , biết rằng $a_2 - 7n$; na_n ; a_{n-2} theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

A. $n = 7$

B. $n = 10$

C. $n = 12$

D. $n = 14$

Lời giải:

Ta có $x(x+1)^n + 2(x+1)^n = (x+1)^n(x+2) = (x+1)^n[(x+1)+1] = (x+1)^{n+1} + (x+1)^n$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a_2 = C_{n+1}^2 + C_n^2 = \frac{(n+1)n}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 \\ a_n = C_{n+1}^n + C_n^n = (n+1) + 1 = n+2 \\ a_{n-2} = C_{n+1}^{n-2} + C_n^{n-2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n+4)}{6} \end{cases}$$

Theo giả thiết ta có

$$n(n+2) - (n^2 - 7n) = \frac{n(n-1)(n+4)}{6} - n(n+2) \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \text{ (loại)} \\ n = -7 \text{ (loại)} \\ n = 10 \text{ (thỏa)} \end{cases}$$

Vậy $n = 10$. **Chọn B.**

Câu 11. Xác định n biết rằng hệ số của x^n trong khai triển $(1+x+2x^2+\dots+nx^n)^2$ bằng $6n$.

A. $n = 5$

B. $n = 6$

C. $n = 8$

D. $n = 13$

Lời giải:

Ta có $(1+x+2x^2+\dots+nx^n)^2 = (1+x+2x^2+\dots+nx^n).(1+x+2x^2+\dots+nx^n)$

Hệ số của x^n là: $1.n+1.(n-1)+2.(n-2)+\dots+(n-1).1+n.1$

$$= 1.n+1.(n-1)+2.(n-2)+\dots+(n-1).[n-(n-1)]+n.1$$

$$= 2n+n[1+2+3+\dots+(n-1)] - [1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2]$$

$$= 2n+n\left[\frac{1+(n-1)}{2} \cdot (n-1)\right] - \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2\right] = \frac{n^3+11n}{6}.$$

Theo giả thiết, ta có $\frac{n^3+11n}{6} = 6n \rightarrow n = 5$. **Chọn A.**

Câu 12. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{n+1}^{n-1} + C_{n+1}^n = 171$. Hệ số lớn nhất của biểu thức $P(x) = (1+x)(1+2x)^n$ sau khi khai triển và rút gọn bằng

A. 25346048

B. 2785130

C. 5570260

D. 50692096

Lời giải:

$$\text{Ta có } C_{n+1}^{n-1} + C_{n+1}^n = 171 \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + \frac{(n+1)!}{n!} = 171$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = 171 \Leftrightarrow n^2 + 3n - 340 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 17 \\ n = -20 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } P(x) = (1+x)(1+2x)^{17} = (1+x) \sum_{k=0}^{17} C_{17}^k 2^k x^k = \sum_{k=0}^{17} C_{17}^k 2^k x^k + \sum_{k=0}^{17} C_{17}^k 2^k x^{k+1}.$$

Suy ra hệ số của x^k trong khai triển là $C_{17}^k 2^k + C_{17}^{k-1} 2^{k-1}$.

$$\text{Hệ số của } x^k \text{ là lớn nhất khi } \begin{cases} C_{17}^k 2^k + C_{17}^{k-1} 2^{k-1} \geq C_{17}^{k+1} 2^{k+1} + C_{17}^k 2^k \\ C_{17}^k 2^k + C_{17}^{k-1} 2^{k-1} \geq C_{17}^{k-1} 2^{k-1} + C_{17}^{k-2} 2^{k-2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_{17}^{k-1} 2^{k-1} \geq C_{17}^{k+1} 2^{k+1} \\ C_{17}^k 2^k \geq C_{17}^{k-2} 2^{k-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!(18-k)!} \geq \frac{2^2}{(k+1)!(16-k)!} \\ \frac{2^2}{k!(17-k)!} \geq \frac{1}{(k-2)!(19-k)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{(18-k)(17-k)} \geq \frac{4}{k(k+1)} \\ \frac{4}{(k-1)k} \geq \frac{1}{(18-k)(19-k)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k^2 - 141k + 1224 \leq 0 \\ 3k^2 - 147k + 1368 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{k \in \mathbb{N}^*} k = 12$$

Vậy hệ số lớn nhất cần tìm là $C_{17}^{12} 2^{12} + C_{17}^{11} 2^{11} = 50692096$. **Chọn D.**

Câu 13. Khai triển $(1+x+x^2+\dots+x^{10})^{11}$ được viết thành $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{110}x^{110}$. Tính tổng

$$S = C_{11}^0 a_0 - C_{11}^1 a_1 + C_{11}^2 a_2 - C_{11}^3 a_3 + \dots + C_{11}^{10} a_{10} - C_{11}^{11} a_{11}.$$

A. $S = 0$

B. $S = 10$

C. $S = 11$

D. $S = 110$

Lời giải:

Xét $x \neq 1$, từ khai triển nhân hai vế cho $(x-1)^{11}$, ta được

$$(x^{11} - 1)^{11} = (x-1)^{11} \cdot [a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{110}x^{110}]$$

- Vế trái $= \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k (-1)^{11-k} x^{11k} \longrightarrow$ hệ số của x^{11} bằng $C_{11}^1 = 11$.
- Vế phải $\left(\sum_{k=0}^{11} C_{11}^k x^{11-k} (-1)^k \right) \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{110}x^{110})$
- $\longrightarrow$ hệ số của x^{11} bằng $C_{11}^0 a_0 - C_{11}^1 a_1 + C_{11}^2 a_2 - C_{11}^3 a_3 + \dots + C_{11}^{10} a_{10} - C_{11}^{11} a_{11}$.
- Vậy $S = C_{11}^0 a_0 - C_{11}^1 a_1 + C_{11}^2 a_2 - C_{11}^3 a_3 + \dots + C_{11}^{10} a_{10} - C_{11}^{11} a_{11} = 11$. **Chọn C.**

Câu 14. Biết rằng trong khai triển nhị thức Niu-tơn của đa thức $P(x) = (2+x+2x^2+x^3)^n$ thì hệ số của x^5 là 1001. Tổng các hệ số trong khai triển của $P(x)$ bằng

A. 1296

B. 7776

C. 46656

D. 279936

Lời giải:

$$\text{Ta có } P(x) = (2+x+2x^2+x^3)^n = (2+x)^n (1+x^2)^n$$

$$= \left(\sum_{k=0}^n C_n^k 2^{n-k} x^k \right) \left(\sum_{l=0}^n C_n^l x^{2l} \right) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n (C_n^k C_n^l 2^{n-k}) x^{k+2l}$$

Hệ số của x^5 ứng với $k+2l$ thỏa mãn $k+2l=5 \longrightarrow (k;l) = \{(5;0), (3;1), (1;2)\}$.

- Trường hợp 1. Với $n \geq 5$ khi đó $(k;l) = \{(5;0), (3;1), (1;2)\}$.

$\longrightarrow$ Hệ số của x^5 là $C_n^5 C_n^0 2^{n-5} + C_n^3 C_n^1 2^{n-3} + C_n^1 C_n^2 2^{n-1} = 1001$.

Vì vế trái lẻ mà vế phải luôn chẵn nếu $n > 5$ do đó chỉ có thể chọn $n = 5$.

Thử lại vào phương trình ta thấy $n = 5$ thỏa mãn điều kiện.

- Trường hợp 2. Với $3 \leq n < 5$ khi đó $(k;l) = \{(3;1), (1;2)\}$.

$\longrightarrow$ Hệ số của x^5 là $C_n^3 C_n^1 2^{n-3} + C_n^1 C_n^2 2^{n-1} = 1001$.

Vì vế trái lẻ mà vế phải luôn chẵn nếu $n > 3$ do đó chỉ có thể chọn $n = 3$.

Thử lại vào phương trình ta thấy $n = 3$ không thỏa mãn điều kiện.

- Trường hợp 3. Với $n = 2$ khi đó $(k;l) = (1;2)$.

$\longrightarrow$ Hệ số của x^5 là $C_1^2 C_2^2 2 = 1001$: vô lý.

Do đó chỉ có $n = 5$ thỏa mãn $\longrightarrow$ tổng các hệ số trong khai triển là $\xrightarrow{\text{cho } x=1} 6^5 = 7776$. **Chọn B**

Câu 15. Cho khai triển $P(x) = (1+x)(2+x)\dots(1+2017x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2017}x^{2017}$. Kí hiệu $P'(x)$ và $P''(x)$ lần lượt là đạo hàm cấp 1 và đạo hàm cấp 2 của đa thức $P(x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a_2 = P'(0)$ B. $a_2 = \frac{P'(0)}{2}$ C. $a_2 = P''(0)$ D. $a_2 = \frac{P''(0)}{2}$

Lời giải:

Ta có $P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + 2017a_{2017}x^{2016}$.

Tiếp tục đạo hàm lần nữa, ta có $P''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \dots + 2017 \cdot 2016a_{2017}x^{2015}$.

Cho $x = 0$, ta được $P''(0) = 2a_2 \longrightarrow a_2 = \frac{P''(0)}{2}$. **Chọn D.**

Chú ý: $P'(x) = P(x) \cdot \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x} + \dots + \frac{2017}{1+2017x} \right)$;

$P'' = P(x) \cdot \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x} + \dots + \frac{2017}{1+2017x} \right)^2 + P(x) \left(-\frac{1^2}{1+x} - \frac{2^2}{2+x} - \dots - \frac{2017^2}{1+2017x} \right)$.

Câu 16. Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển

$$\left(1 - 2x + 2015x^{2016} - 2016x^{2017} + 2017x^{2018} \right)^{60}$$

- A. $-8.C_{60}^3$ B. $-C_{60}^3$ C. C_{60}^3 D. $8.C_{60}^3$

Lời giải:

$$\text{Đặt } \begin{cases} f(x) = (1 - 2x + 2015x^{2016} - 2016x^{2017} + 2017x^{2018})^{60} \\ g(x) = 2015x^{2016} - 2016x^{2017} + 2017x^{2018} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } f(x) = [1 + (-2x + g(x))]^{60} = \sum_{k=0}^{60} C_{60}^k [-2x + g(x)]^k$$

$$= \sum_{k=0}^{60} C_{60}^k \sum_{i=0}^k C_k^i (-2x)^i [g(x)]^{k-i} \quad (0 \leq i \leq k \leq 60).$$

$$\text{Vì bậc của đa thức } g(x) \text{ là } 2018 \longrightarrow \text{số hạng chứa } x^3 \text{ ứng với } \begin{cases} k-i=0 \\ i=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ i=3 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy hệ số cần tìm là } C_{60}^3 \cdot C_3^3 \cdot (-2)^3 = -8 \cdot C_{60}^3. \text{ Chọn A.}$$

Câu 17*. Cho khai triển

$$\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} \right)^{2018} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2018}x^{2018} + \frac{b_1}{x+1} + \frac{b_2}{(x+1)^2} + \frac{b_3}{(x+1)^3} + \dots + \frac{b_{2018}}{(x+1)^{2018}}$$

$$\text{với } x \neq -1. \text{ Tính tổng } S = \sum_{k=1}^{2018} b_k.$$

$$\text{A. } S = 2^{2018} \quad \text{B. } S = 2^{2017} - \frac{1}{2} C_{2018}^{1009} \quad \text{C. } S = 2^{2017} + \frac{1}{2} C_{2018}^{1009} \quad \text{D. } S = 2^{2018} - \frac{1}{2} C_{2018}^{1009}$$

Lời giải:

$$\text{Đặt } f(x) = \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} \right)^{2018}, \text{ ta có } f(0) = a_0 + b_1 + \dots + b_{2018} = 2^{2018}.$$

$$\text{Suy ra } a_0 + S = 2^{2018}. \quad (1)$$

$$\text{Lại có } f(x) = \left(x+1 + \frac{1}{x+1} \right)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k (x+1)^{2k-2018}$$

$$= \sum_{k=0}^{1008} \frac{C_{2018}^k}{(x+1)^{2018-2k}} + \sum_{k=1009}^{2018} C_{2018}^k (x+1)^{2k-2018}.$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \bullet \quad b_1 = b_3 = \dots = b_{2017} = 0 &\longrightarrow S = b_2 + b_4 + \dots + b_{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + \dots + C_{2018}^{1007} + C_{2018}^{1008}. \\ \bullet \quad a_0 = C_{2018}^{1009} + C_{2018}^{1010} + \dots + C_{2018}^{2017} + C_{2018}^{2018} &= C_{2018}^{1009} + S. \text{ (vì } C_n^k = C_n^{n-k}). \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra } S = 2^{2017} - \frac{1}{2} C_{2018}^{1009}. \text{ Chọn B.}$$

$$\text{Câu 18. Với } n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ và thỏa mãn } \frac{1}{C_2^2} + \frac{1}{C_3^2} + \frac{1}{C_4^2} + \dots + \frac{1}{C_n^2} = \frac{9}{5}. \text{ Tính } P = \frac{C_n^5 + C_{n+2}^3}{(n-4)!}.$$

$$\text{A. } P = \frac{29}{45} \quad \text{B. } P = \frac{53}{90} \quad \text{C. } P = \frac{59}{90} \quad \text{D. } P = \frac{61}{90}$$

Lời giải:

Ta có $\frac{1}{C_2^2} + \frac{1}{C_3^2} + \frac{1}{C_4^2} + \dots + \frac{1}{C_n^2} = \frac{9}{5} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{2}{n(n-1)} = \frac{9}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{2}{n(n-1)} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \dots + \frac{2}{n(n-1)} = \frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow n = 10.$

Với $n = 10 \longrightarrow P = \frac{C_{10}^5 + C_{12}^3}{6!} = \frac{59}{90}$. **Chọn C.**

Câu 19. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots + nP_n = P_{2014}$, với P_n là số các hoán vị của tập hợp có n phần tử.

A. 2013 **B.** 2014 **C.** 2015 **D.** 2016

Lời giải:

Ta có $P_k - P_{k-1} = k! - (k-1)! = (k-1)!(k-1) = (k-1)P_{k-1}$ với $k = 1; 2; \dots$ (1)

Áp dụng (1) ta có
$$\begin{cases} P_2 - P_1 = P_1 \\ P_3 - P_2 = 2P_2 \\ \dots \\ P_{n+1} - P_n = nP_n \end{cases} \quad (2)$$

Cộng các đẳng thức ở (2) ta được $P_{n+1} - P_1 = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots + nP_n$.

Do $P_1 = 1 \longrightarrow P_{n+1} = 1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots + nP_n$.

Theo đề, ta có $P_{n+1} = P_{2014} \Leftrightarrow n+1 = 2014 \longrightarrow n = 2013$. **Chọn A.**

Câu 20. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{2017}{A_{2017}^0} + \frac{2016}{A_{2017}^1} + \dots + \frac{2}{A_{2017}^{2015}} + \frac{1}{A_{2017}^{2016}}$.

A. $P = 2017 - \frac{1}{2018!}$ **B.** $P = 2017 - \frac{1}{2017!}$

C. $P = 2018 - \frac{1}{2017!}$ **D.** $P = 2018 - \frac{1}{2018!}$

Lời giải:

Ta có $P = \frac{2017.2017!}{2017!} + \frac{2016.2016!}{2017!} + \dots + \frac{2.2!}{2017!} + \frac{1.1!}{2017!}$

$= \frac{2017.2017! + 2016.2016! + \dots + 2.2! + 1.1!}{2017!}$

$= \frac{(2018-1)2017! + (2017-1)2016! + \dots + (3-1)2! + (2-1)1!}{2017!}$

$= \frac{(2018! - 2017!) + (2017! - 2016!) + \dots + (3! - 2!) + (2! - 1!)}{2017!}$

$$= \frac{2018! - 1!}{2017!} \longrightarrow P = 2018 - \frac{1}{2017!}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 21. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn

$$\frac{1}{2!.2017!} + \frac{1}{4!.2015!} + \frac{1}{6!.2013!} + \dots + \frac{1}{2016!.3!} + \frac{1}{2018!.1!} = \frac{2^{2018} - 1}{P_n}$$

A. $n = 2017$

B. $n = 2018$

C. $n = 2019$

D. $n = 2020$

Lời giải:

$$\text{Ta có } \frac{1}{2!.2017!} + \frac{1}{4!.2015!} + \frac{1}{6!.2013!} + \dots + \frac{1}{2016!.3!} + \frac{1}{2018!.1!} = \frac{2^{2018} - 1}{P_n}$$

Nhân hai vế cho $2019!$, ta được

$$\frac{2019!}{2!.2017!} + \frac{2019!}{4!.2015!} + \frac{2019!}{6!.2013!} + \dots + \frac{2019!}{2016!.3!} + \frac{2019!}{2018!.1!} = 2019! \cdot \frac{2^{2018} - 1}{P_n}$$

$$\Leftrightarrow C_{2019}^2 + C_{2019}^4 + \dots + C_{2019}^{2018} = 2019! \cdot \frac{2^{2018} - 1}{n!}$$

$$\Leftrightarrow C_{2019}^0 + C_{2019}^2 + C_{2019}^4 + \dots + C_{2019}^{2018} = 2019! \cdot \frac{2^{2018} - 1}{n!} + C_{2019}^0$$

$$\Leftrightarrow 2^{2018} = 2019! \cdot \frac{2^{2018} - 1}{n!} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{2018} \cdot n! = 2019! (2^{2018} - 1) + n! \Leftrightarrow (2^{2018} - 1)(n! - 2019!) = 0 \longrightarrow n = 2019. \text{ Chọn C.}$$

Câu 22. Biết $S = 3^0 C_{2018}^0 + 3^2 C_{2018}^2 + 3^4 C_{2018}^4 + \dots + 3^{2018} C_{2018}^{2018} = 2^a + 2^b$ với a, b ($a > b$) là các số nguyên dương và không chia hết cho 2. Tính $a - b$.

A. $a - b = 1$

B. $a - b = 2$

C. $a - b = 2017$

D. $a - b = 2018$

Lời giải:

$$\text{Xét khai triển } (1+x)^{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 x + C_{2018}^2 x^2 + \dots + C_{2018}^{2017} x^{2017} + C_{2018}^{2018} x^{2018}. \quad (1)$$

$$\text{Thay } x = 3 \text{ vào (1), ta được: } 4^{2018} = C_{2018}^0 + 3C_{2018}^1 + 3^2 C_{2018}^2 + \dots + 3^{2017} C_{2018}^{2017} + 3^{2018} C_{2018}^{2018}. \quad (2)$$

$$\text{Thay } x = -3 \text{ vào (1), ta được: } 2^{2018} = C_{2018}^0 - 3C_{2018}^1 + 3^2 C_{2018}^2 - \dots - 3^{2017} C_{2018}^{2017} + 3^{2018} C_{2018}^{2018}. \quad (3)$$

$$\text{Cộng vế theo vế của (2) và (3), ta được: } 2S = 4^{2018} + 2^{2018} \longrightarrow S = 2^{4035} + 2^{2017}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} a = 4035 \\ b = 2017 \end{cases} \longrightarrow a - b = 2018. \text{ Chọn D.}$$

Câu 23. Gọi $S = C_{2020}^0 + 5C_{2020}^2 + 5^2 C_{2020}^4 + \dots + 5^i C_{2020}^{2i} + \dots + 5^{1010} C_{2020}^{2020}$. Biết rằng S chia hết cho M , M có thể nhận giá trị nào dưới đây?

A. $M = 2^{1010}$

B. $M = 2^{2020}$

C. $M = 5^{1010}$

D. $M = 5^{2020}$

Lời giải:

Theo khai triển nhị thức Niuton ta có

$$(1+x)^{2020} = C_{2020}^0 + C_{2020}^1 x + C_{2020}^2 x^2 + C_{2020}^3 x^3 + C_{2020}^4 x^4 + \dots + C_{2020}^{2019} x^{2019} + C_{2020}^{2020} x^{2020}. \quad (1)$$

Thay $x = \sqrt{5}$ vào (1), ta được:

$$(1 + \sqrt{5})^{2020} = C_{2020}^0 + \sqrt{5}C_{2020}^1 + 5C_{2020}^2 + (\sqrt{5})^3 C_{2020}^3 + 5^2 C_{2020}^4 + \dots + (\sqrt{5})^{2019} C_{2020}^{2019} + 5^{1010} C_{2020}^{2020}.$$

Thay $x = -\sqrt{5}$ vào (1), ta được:

$$(1 - \sqrt{5})^{2020} = C_{2020}^0 - \sqrt{5}C_{2020}^1 + 5C_{2020}^2 - (\sqrt{5})^3 C_{2020}^3 + 5^2 C_{2020}^4 - \dots - (\sqrt{5})^{2019} C_{2020}^{2019} + 5^{1010} C_{2020}^{2020}.$$

Cộng vế theo vế, ta suy ra $S = \frac{(1 + \sqrt{5})^{2020} + (1 - \sqrt{5})^{2020}}{2} = \frac{(6 + 2\sqrt{5})^{1010} + (6 - 2\sqrt{5})^{1010}}{2}$

$$= 2^{1010} \left[\frac{(1 + \sqrt{5})^{1010} + (1 - \sqrt{5})^{1010}}{2} \right] = 2^{1010} (C_{1010}^0 + 5C_{1010}^2 + 5^2 C_{1010}^4 + \dots + 5^{505} C_{1010}^{1010}) : 2^{1010}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 24. Gọi $S = C_{2017}^1 + 3^2 C_{2017}^3 + 3^4 C_{2017}^5 + \dots + 3^{2014} C_{2017}^{2015} + 3^{2016} C_{2017}^{2017}$. Biết S chia hết cho số M, M có thể nhận giá trị nào dưới đây?

- A. $M = 2^{2016}$ B. $M = 2^{2017}$ C. $M = 2^{2018}$ D. $M = 2^{2019}$

Lời giải:

Ta có $3S = 3C_{2017}^1 + 3^3 C_{2017}^3 + 3^5 C_{2017}^5 + \dots + 3^{2015} C_{2017}^{2015} + 3^{2017} C_{2017}^{2017}$.

Xét $(1 + x)^{2017} = C_{2017}^0 + C_{2017}^1 x + C_{2017}^2 x^2 + \dots + C_{2017}^{2016} x^{2016} + C_{2017}^{2017} x^{2017}$. (1)

Thay $x = 3$ vào (1), ta được: $4^{2017} = C_{2017}^0 + 3C_{2017}^1 + 3^2 C_{2017}^2 + \dots + 3^{2016} C_{2017}^{2016} + 3^{2017} C_{2017}^{2017}$. (2)

Thay $x = -3$ vào (1), ta được: $-2^{2017} = C_{2017}^0 - 3C_{2017}^1 + 3^2 C_{2017}^2 - \dots + 3^{2016} C_{2017}^{2016} - 3^{2017} C_{2017}^{2017}$ (3)

Trừ vế theo vế của (2) và (3), ta được: $2(3S) = 4^{2017} + 2^{2017}$

$\longrightarrow 3S = 2 \cdot 4^{2016} + 2^{2016} : 2^{2016} \longrightarrow S : 2^{2016}$. Chọn A.

Câu 25. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + \dots + (3n + 2)C_n^n = 1600$.

- A. $n = 5$ B. $n = 7$ C. $n = 8$ D. $n = 10$

Lời giải:

Đặt $S = 2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + \dots + (3n + 2)C_n^n$. (1)

Viết ngược lại biểu thức của S, ta được

$$S = (3n + 2)C_n^n + (3n - 1)C_n^{n-1} + (3n - 4)C_n^{n-2} + \dots + 2C_n^0. \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế và kết hợp với công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta có

$$2S = (3n + 4)C_n^0 + (3n + 4)C_n^1 + (3n + 4)C_n^2 + \dots + (3n + 4)C_n^n$$

$$= (3n + 4)[C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n] = (3n + 4)(1 + 1)^n = (3n + 4)2^n.$$

Theo giả thiết: $2 \times 1600 = (3n + 4)2^n \longrightarrow n = 7$. Chọn B.

Câu 26. Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $3C_n^0 + 4C_n^1 + 5C_n^2 + \dots + (n + 3)C_n^n = 8192$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $n \in [1; 8)$ B. $n \in [8; 12)$ C. $n \in [12; 16)$ D. $n \in [16; 20]$

Lời giải:

$$\text{Đặt } S = 3C_n^0 + 4C_n^1 + 5C_n^2 + \dots + (n+3)C_n^n. \quad (1)$$

Viết ngược lại biểu thức của S, ta được

$$S = (n+3)C_n^n + (n+2)C_n^{n-1} + (n+1)C_n^{n-2} + \dots + 3C_n^0. \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế và kết hợp với công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta có

$$\begin{aligned} 2S &= (n+6)C_n^0 + (n+6)C_n^1 + (n+6)C_n^2 + \dots + (n+6)C_n^n \\ &= (n+6)[C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n] = (n+6)(1+1)^n = (n+6)2^n \end{aligned}$$

Theo giả thiết: $2 \times 8192 = (n+6)2^n \longrightarrow n = 10$. **Chọn B.**

Câu 27. Tính tổng $S = C_{2018}^3 - 2C_{2018}^4 + 3C_{2018}^5 - 4C_{2018}^6 + \dots - 2016C_{2018}^{2018}$.

- A. $S = -2018$ B. $S = -2016$ C. $S = 2016$ D. $S = 2018$

Lời giải:

$$\text{Đặt } T = -(-2).C_{2018}^0 + (-1).C_{2018}^1 - 0.C_{2018}^2 = -2016.$$

$$\text{Xét } P = T + S = -(-2).C_{2018}^0 + (-1).C_{2018}^1 - 0.C_{2018}^2 + 1.C_{2018}^3 - \dots + 2015.C_{2018}^{2017} - 2016.C_{2018}^{2018}. \quad (1)$$

Viết ngược lại biểu thức của P, ta được

$$P = -2016.C_{2018}^{2018} + 2015.C_{2018}^{2017} - 2014.C_{2018}^{2016} + 2013.C_{2018}^{2015} - \dots + (-1).C_{2018}^1 - (-2).C_{2018}^0. \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế và kết hợp với công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta có

$$\begin{aligned} 2P &= -2014C_{2018}^0 + 2014C_{2018}^1 - 2014C_{2018}^2 + 2014C_{2018}^3 - \dots + 2014C_{2018}^{2017} - 2014C_{2018}^{2018} \\ &= -2014(C_{2018}^0 - C_{2018}^1 + C_{2018}^2 - C_{2018}^3 + \dots + C_{2018}^{2018}) \\ &= -2014(1-1)^{2018} = 0 \end{aligned}$$

Suy ra $P = 0 \longrightarrow T + S = 0 \longrightarrow S = -T = 2016$. **Chọn C.**

Câu 28. Tính tổng $S = (C_{100}^1)^2 + (C_{100}^2)^2 + (C_{100}^3)^2 + \dots + (C_{100}^{100})^2$.

- A. $S = 2^{200}$ B. $S = 2^{200} - 1$ C. $S = C_{200}^{100} - 1$ D. $S = C_{200}^{100}$

Lời giải:

$$\text{Xét đa thức: } (1+x)^{100}(x+1)^{100} = (1+x)^{200}.$$

Cân bằng hệ số của x^{100} ở hai vế, ta được

$$C_{100}^0.C_{100}^{100} + C_{100}^1.C_{100}^{99} + C_{100}^2.C_{100}^{98} + C_{100}^3.C_{100}^{97} + \dots + C_{100}^{100}.C_{100}^0 = C_{200}^{100}.$$

Hay

$$C_{100}^0.C_{100}^{100} + S = C_{200}^{100}.$$

Suy ra $S = C_{200}^{100} - C_{100}^0.C_{100}^{100} = C_{200}^{100} - 1$. **Chọn C.**

Câu 29. Tính tổng $S = (C_{2018}^1)^2 + 2(C_{2018}^2)^2 + \dots + 2018(C_{2018}^{2018})^2$

- A. $S = 1009C_{4035}^{2018}$ B. $S = 1009C_{4036}^{2017}$ C. $S = 1009C_{4036}^{2018}$ D. $S = 2018C_{4036}^{2018}$

Lời giải:

$$\text{Ta có } S = 0 \cdot \left(C_{2018}^0\right)^2 + \left(C_{2018}^1\right)^2 + 2\left(C_{2018}^2\right)^2 + \dots + 2018\left(C_{2018}^{2018}\right)^2. \quad (1)$$

Viết ngược lại biểu thức của S, ta được

$$S = 2018\left(C_{2018}^{2018}\right)^2 + 2017\left(C_{2018}^{2017}\right)^2 + 2016\left(C_{2018}^{2016}\right)^2 + \dots + 0 \cdot \left(C_{2018}^0\right)^2. \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) về theo vế và kết hợp với công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta có

$$2S = 2018 \cdot \left[\left(C_{2018}^0\right)^2 + \left(C_{2018}^1\right)^2 + \left(C_{2018}^2\right)^2 + \dots + \left(C_{2018}^{2018}\right)^2 \right] = 2018 \cdot C_{4036}^{2018}.$$

$$S = 1009 C_{4036}^{2018}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 30. Tính tổng $S = \left(C_{2018}^1\right)^2 + \left(2C_{2018}^2\right)^2 + \left(3C_{2018}^3\right)^2 + \dots + \left(2018C_{2018}^{2018}\right)^2$.

$$\text{A. } S = \frac{2018^2}{2} \cdot C_{4036}^{2018}$$

$$\text{B. } S = \frac{2018^2}{2} \cdot \left(C_{4036}^{2018} - 1\right)$$

$$\text{C. } S = 2018^2 \cdot C_{4034}^{2017}$$

$$\text{D. } S = 2018^2 \cdot \left(C_{4034}^{2017} - 1\right)$$

Lời giải:

$$\text{Áp dụng công thức } kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}, \text{ ta được } \begin{cases} C_{2018}^1 = 2018C_{2017}^0 \\ 2C_{2018}^2 = 2018C_{2017}^1 \\ 3C_{2018}^3 = 2018C_{2017}^2 \\ \dots \\ 2018C_{2018}^{2018} = 2018C_{2017}^{2017} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } S &= \left(2018 \cdot C_{2017}^0\right)^2 + \left(2018 \cdot C_{2017}^1\right)^2 + \left(2018 \cdot C_{2017}^2\right)^2 + \dots + \left(2018 \cdot C_{2017}^{2017}\right)^2 \\ &= 2018^2 \cdot \left[\left(C_{2017}^0\right)^2 + \left(C_{2017}^1\right)^2 + \left(C_{2017}^2\right)^2 + \dots + \left(C_{2017}^{2017}\right)^2 \right] = 2018^2 \cdot C_{4034}^{2017}. \text{ Chọn C.} \end{aligned}$$

Câu 31. Cho tổng $S = 4C_{100}^2 + 8C_{100}^4 + 12C_{100}^6 + \dots + 200C_{100}^{100}$, biết $S = a \cdot 2^b$ với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị biểu thức $P = a + b$.

$$\text{A. } P = 1$$

$$\text{B. } P = 99$$

$$\text{C. } P = 199$$

$$\text{D. } P = 200$$

Lời giải:

Ta có

$$(1+x)^{100} = C_{100}^0 + C_{100}^1 x + C_{100}^2 x^2 + \dots + C_{100}^{100} x^{100}; \quad (1)$$

$$(1-x)^{100} = C_{100}^0 - C_{100}^1 x + C_{100}^2 x^2 - C_{100}^3 x^3 + \dots + C_{100}^{100} x^{100}. \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) về theo vế, ta được

$$(1+x)^{100} + (1-x)^{100} = 2C_{100}^0 + 2C_{100}^2 x^2 + 2C_{100}^4 x^4 + \dots + 2C_{100}^{100} x^{100}. \quad (3)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (3) theo ẩn x ta được

$$100(1+x)^{99} - 100(1-x)^{99} = 4C_{100}^2 x + 8C_{100}^4 x^3 + \dots + 200C_{100}^{100} x^{99}. \quad (4)$$

Thay $x=1$ vào (4), ta được $100 \cdot 2^{99} = 4C_{100}^2 + 8C_{100}^4 + \dots + 200C_{100}^{100}$ hay $S = 100 \cdot 2^{99}$

$$\longrightarrow \begin{cases} a = 100 \\ b = 99 \end{cases} \Rightarrow a + b = 199. \text{ Chọn C.}$$

Câu 32. Tổng $S = \frac{1}{2017} (2.3C_{2017}^2 + 3.3^2 C_{2017}^3 + 4.3^3 C_{2017}^4 + \dots + k.3^{k-1} C_{2017}^k + \dots + 2017.3^{2016} C_{2017}^{2017})$ bằng:

- A. $3^{2016} - 1$ B. 3^{2016} C. $4^{2016} - 1$ D. 4^{2016}

Lời giải:

$$\text{Xét } (1+x)^{2017} = C_{2017}^0 + C_{2017}^1 x + C_{2017}^2 x^2 + \dots + C_{2017}^{2017} x^{2017}.$$

Đạo hàm hai vế ta được:

$$2017(1+x)^{2016} = C_{2017}^1 + 2C_{2017}^2 x + 3C_{2017}^3 x^2 + \dots + kC_{2017}^k x^{k-1} + \dots + 2017C_{2017}^{2017} x^{2016}.$$

Thay $x = 3$ vào biểu thức trên ta được:

$$2017(1+3)^{2016} = C_{2017}^1 + 2.3C_{2017}^2 + 3.3^2 C_{2017}^3 + 4.3^3 C_{2017}^4 + \dots + k.3^{k-1} C_{2017}^k + \dots + 2017.3^{2016} C_{2017}^{2017}$$

$$\Leftrightarrow 2017.4^{2016} - C_{2017}^1 = 2.3C_{2017}^2 + 3.3^2 C_{2017}^3 + 4.3^3 C_{2017}^4 + \dots + k.3^{k-1} C_{2017}^k + \dots + 2017.3^{2016} C_{2017}^{2017}$$

$$\Leftrightarrow 2017.(4^{2016} - 1) = 2.3C_{2017}^2 + 3.3^2 C_{2017}^3 + 4.3^3 C_{2017}^4 + \dots + k.3^{k-1} C_{2017}^k + \dots + 2017.3^{2016} C_{2017}^{2017}.$$

Suy ra $S = 4^{2016} - 1$. **Chọn C.**

Câu 33. Tính tổng $S = C_{2018}^0 C_{2018}^{2017} + C_{2018}^1 C_{2018}^{2016} + \dots + C_{2018}^k C_{2018}^{2017-k} + \dots + C_{2018}^{2017} C_{2018}^0$.

- A. $S = 1009.2^{2017}$ B. $S = 2018.2^{2017}$ C. $S = 2018.2^{2018}$ D. $S = 2018.2^{2019}$

Lời giải:

$$\text{Ta có } S = C_{2018}^0 C_{2018}^{2017} + C_{2018}^1 C_{2018}^{2016} + C_{2018}^2 C_{2018}^{2015} + \dots + C_{2018}^k C_{2018}^{2017-k} + \dots + C_{2018}^{2017} C_{2018}^0$$

$$= C_{2018}^{2018} C_{2018}^1 + C_{2018}^{2017} C_{2018}^1 + C_{2018}^{2016} C_{2018}^1 + \dots$$

$$= 2018C_{2018}^{2018} + 2017.C_{2018}^{2017} + 2016.C_{2018}^{2016} + \dots + 1.C_{2018}^1 = \left[(1+x)^{2018} \right]'_{x=1} = 2018.2^{2017}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 34. Tính tổng $S = C_{2018}^3 - 2C_{2018}^4 + 3C_{2018}^5 - 4C_{2018}^6 + \dots - 2016C_{2018}^{2018}$.

- A. $S = 2016$ B. $S = 2017$ C. $S = 2018$ D. $S = 2019$

Lời giải:

$$\text{Xét } (1+x)^{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 x + C_{2018}^2 x^2 + \dots + C_{2018}^{2018} x^{2018}.$$

$$\text{Chia hai vế cho } x^2 \text{ ta được } \frac{(1+x)^{2018}}{x^2} = \frac{C_{2018}^0}{x^2} + \frac{C_{2018}^1}{x} + C_{2018}^2 + 2C_{2018}^3 x + \dots + C_{2018}^{2018} x^{2016}$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$\frac{(2018x - 2)(1+x)^{2017}}{x^3} = -\frac{2C_{2018}^0}{x^3} - \frac{C_{2018}^1}{x^2} + C_{2018}^3 + 2C_{2018}^4 x + \dots + 2016C_{2018}^{2018} x^{2015}.$$

Thay $x = -1$ vào biểu thức trên ta được $0 = 2C_{2018}^0 - C_{2018}^1 + S \longrightarrow S = 2016$. **Chọn A.**

Câu 35. Cho đa giác có 12 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đó. Xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho bằng

A. $\frac{12.8}{C_{12}^3}$ B. $\frac{C_{12}^8 - 12.8}{C_{12}^3}$ C. $\frac{C_{12}^3 - 12 - 12.8}{C_{12}^3}$ D. $\frac{12 + 12.8}{C_{12}^3}$

Lời giải:

Ta có $\begin{cases} n(\Omega) = C_{12}^3 \\ n(A) = C_{12}^3 - 12 - 8.12 \end{cases} \longrightarrow P = \frac{C_{12}^3 - 12 - 12.8}{C_{12}^3}$. **Chọn C.**

- Số tam giác được tạo từ 3 đỉnh trong 12 đỉnh: C_{12}^3 .
- Số tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác và 2 cạnh là cạnh của đa giác: cứ 3 đỉnh liên tiếp cho 1 tam giác thỏa mãn đề bài, nên có 12 tam giác. (hoặc hiểu theo cách khác: tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh liên tiếp của đa giác tức là có 2 cạnh là 2 cạnh liên tiếp của đa giác, 2 cạnh này cắt nhau tại 1 đỉnh, mà đa giác này có 12 đỉnh nên có 12 tam giác thỏa trường hợp này)
- Số tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của đa giác và 1 cạnh là cạnh của đa giác: Trước tiên ta chọn 1 cạnh trong 12 cạnh của đa giác nên có 12 cách chọn; tiếp theo chọn 1 đỉnh còn lại trong 8 đỉnh (trừ 2 đỉnh tạo nên cạnh đã chọn và 2 đỉnh liên kề với cạnh đã chọn). Do đó trong trường hợp này có 8.12 tam giác.

Câu 36. Cho đa giác lồi (H) có 22 cạnh. Gọi X là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của (H). Chọn ngẫu nhiên 2 tam giác trong X , xác suất để chọn được 1 tam giác có đúng 1 cạnh là cạnh của đa giác (H) và 1 tam giác không có cạnh nào là cạnh của (H) bằng

A. $\frac{69}{70}$ B. $\frac{23}{17955}$ C. $\frac{748}{1995}$ D. $\frac{35}{10098}$

Lời giải:

Ta có $\begin{cases} |X| = C_{22}^3 = 1540 \\ n(\Omega) = C_{1540}^2 = 1185030 \\ n(A) = C_{22 \times 18}^1 \times C_{1540 - (22 \times 18 + 22)}^1 = 444312 \end{cases} \longrightarrow P = \frac{748}{1995}$. **Chọn C.**

Câu 37. Cho đa giác đều có 20 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đều, xác suất để 3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác vuông không cân là

A. $\frac{3}{19}$ B. $\frac{2}{35}$ C. $\frac{8}{57}$ D. $\frac{17}{114}$

Lời giải:

Ta có $\begin{cases} n(\Omega) = C_{20}^3 = 1140 \\ n(A) = 10.18 - 10.2 = 160 \end{cases} \longrightarrow P = \frac{160}{1140} = \frac{8}{57}$. **Chọn C.**

- Số tam giác vuông là 10.18.
- Số tam giác vuông cân: Cứ mỗi cách chọn 1 đường kính là có 2 tam giác cân (2 điểm tạo nên tam giác cân là giao điểm của đường thẳng qua tâm vuông góc với đường kính đã chọn với đường tròn). Do đó có 10.2 tam giác vuông cân.

Ví dụ 38. Cho đa giác đều có 15 đỉnh. Gọi M là tập tất cả các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đã cho. Chọn ngẫu nhiên một tam giác thuộc tập M , xác suất để tam giác được chọn là một tam giác cân nhưng không phải là tam giác đều là

A. $\frac{8}{91}$

B. $\frac{18}{91}$

C. $\frac{20}{91}$

D. $\frac{73}{91}$

Lời giải:

Ta có $\begin{cases} n(\Omega) = C_{15}^3 = 455 \\ n(A) = 7.15 - 3.5 = 90 \end{cases} \longrightarrow P = \frac{90}{455} = \frac{18}{91}$. **Chọn B.**

- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đều. Xét một đỉnh A bất kỳ của đa giác: Có 7 cặp đỉnh của đa giác đối xứng với nhau qua đường thẳng OA, hay có 7 tam giác cân tại đỉnh A. Như vậy, với mỗi một đỉnh của đa giác có 7 tam giác nhận nó làm đỉnh tam giác cân.
- Số tam giác đều có 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác là $\frac{15}{3} = 5$ tam giác.
- Tuy nhiên, trong các tam giác cân đã xác định ở trên có cả tam giác đều, do mọi tam giác đều thì đều cân tại 3 đỉnh nên tam giác đều được đếm 3 lần.
- Suy ra $n(A) = 7.15 - 3.5 = 90$.

Ví dụ 39. Cho một đa giác đều 12 đỉnh nội tiếp đường tròn. Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của đa giác, xác suất để 4 đỉnh được chọn ra tạo thành một hình chữ nhật bằng

A. $\frac{2}{15}$

B. $\frac{13}{15}$

C. $\frac{1}{33}$

D. $\frac{32}{33}$

Lời giải:

Ta có $\begin{cases} n(\Omega) = C_{12}^4 \\ n(A) = C_6^2 \end{cases} \longrightarrow P = \frac{1}{33}$. **Chọn C.**

- Đa giác đều đã cho có $\frac{12}{2} = 6$ đường chéo lớn.
- Mỗi hình chữ nhật có các đỉnh là 4 đỉnh trong 12 đỉnh có các đường chéo là 2 đường chéo lớn. Suy ra số phần tử của biến cố là $n(A) = C_6^2$.

Câu 40. Trong không gian cho $2n$ điểm phân biệt ($4 < n \in \mathbb{N}$), trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và trong $2n$ điểm đó có đúng n điểm cùng nằm trên một mặt phẳng và không có 4 điểm nào ngoài 4 điểm trong n điểm này là đồng phẳng. Tìm giá trị của n sao cho từ $2n$ điểm đã cho tạo ra đúng 505 mặt phẳng phân biệt.

A. $n = 6$

B. $n = 8$

C. $n = 10$

D. $n = 16$

Lời giải:

Ta có:

- n điểm đồng phẳng tạo ra một mặt phẳng.
- n điểm còn lại như giả thiết tạo ra C_n^3 mặt phẳng.
- 2 điểm trên n điểm đồng phẳng với n điểm còn lại tạo ra $C_n^2 \times n$ mặt phẳng.
- 2 điểm trên n điểm còn lại với n điểm đồng phẳng tạo ra $C_n^2 \times n$ mặt phẳng.

Theo đề bài ta có phương trình: $1 + 2nC_n^2 + C_n^3 = 505 \longrightarrow n = 8$. **Chọn B.**

Câu 41. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên có 7 chữ số và chia hết cho 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ S , xác suất để các chữ số của nó đôi một khác nhau bằng

- A. $\frac{171}{3125}$ B. $\frac{198}{3125}$ C. $\frac{207}{6250}$ D. $\frac{396}{6250}$

Lời giải:

Số có 7 chữ số, 6 chữ số sau đều có 10 cách chọn, còn chữ số đầu phụ thuộc vào tổng 6 chữ số sau nên chỉ có một cách chọn $\longrightarrow$ Không gian mẫu: $n(\Omega) = 10^6$.

Vì tổng các chữ số từ 0 đến 9 bằng 45 chia hết cho 9, nên muốn viết số có 7 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 9 thì ta cần bỏ 3 chữ số trong các chữ số từ 0 đến 9 sao cho tổng của 3 số đó chia hết cho 9. Các bộ ba số có tổng chia hết cho 9 là:

$(0;1;8), (0;2;7), (0;3;6), (0;4;5),$

$(1;2;6), (1;3;5), (1;8;9), (2;3;4), (2;7;9), (3;6;9), (3;7;8), (4;5;9), (4;6;8), (5;6;7).$

- **TH1:** Bỏ một trong các bộ số: $(0;1;8), (0;2;7), (0;3;6), (0;4;5)$: có 4 cách chọn.

Trong 7 chữ số còn lại không có chữ số 0, nên mỗi bộ 7 số còn lại viết được: $7!$ số.

Do đó trường hợp này có $4.7!$ số.

- **TH2:** Bỏ một trong các bộ số: $(1;2;6), (1;3;5), (1;8;9), (2;3;4), (2;7;9), (3;6;9), (3;7;8), (4;5;9), (4;6;8), (5;6;7)$: có 10 cách chọn.

Với mỗi cách bỏ ba số đi, trong 7 số còn lại viết được: $6.6!$ số.

Do đó trong trường hợp này có $10.6.6!$ số.

Suy ra $n(A) = 4.7! + 10.6.6!$.

Vậy xác suất cần tính $P = \frac{4.7! + 10.6.6!}{10^6} = \frac{198}{3125}$. **Chọn B.**

Câu 42. Trong buổi sinh hoạt nhóm của lớp, tổ một có 12 học sinh gồm 4 học sinh nữ trong đó có Hoa và 8 học sinh nam trong đó có Vinh. Chia tổ thành 3 nhóm, mỗi nhóm gồm 4 học sinh và phải có ít nhất 1 học sinh nữ. Xác suất để Hoa và Vinh cùng một nhóm là

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{7}{8}$ C. $\frac{7}{32}$ D. $\frac{25}{32}$

Lời giải:

Không gian mẫu là số cách chia 12 học sinh thành 3 nhóm và phải đảm bảo mỗi nhóm có ít nhất 1 học sinh nữ. Giả sử

- Nhóm thứ nhất có 2 nữ và 2 nam, có $C_4^2.C_8^2$ cách.
- Nhóm thứ hai có 1 nữ và 3 nam, có $C_2^1.C_6^3$ cách.
- Sau khi chia nhóm thứ nhất và thứ hai xong thì còn lại 1 nữ và .. nam nên nhóm thứ ba có duy nhất 1 cách.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_4^2.C_8^2.C_2^1.C_6^3 = 6720$.

Gọi A là biến cố “Hoa và Vinh cùng một nhóm”. Ta mô tả các khả năng thuận lợi cho biến cố A như sau:

- **TH1:** Hoa và Vinh cùng với 1 bạn nam và 1 bạn nữ thành một nhóm nên có $C_7^1 \cdot C_3^1$ cách. Nhóm thứ hai có 3 bạn nam và 1 bạn nữ nên có $C_6^3 \cdot C_2^1$. Cuối cùng còn lại 3 bạn nam và 1 bạn nữ nên có 1 cách duy nhất cho nhóm thứ ba. Do đó trong trường hợp này có $C_7^1 \cdot C_3^1 \cdot C_6^3 \cdot C_2^1 = 840$ cách.
- **TH2:** Hoa và Vinh cùng với 2 bạn nam thành một nhóm nên có C_7^2 cách. Nhóm thứ hai có 2 bạn nam và 2 bạn nữ nên có $C_5^2 \cdot C_3^2$. Cuối cùng còn lại 3 bạn nam và 1 bạn nữ nên có 1 cách duy nhất cho nhóm thứ ba. Do đó trong trường hợp này có $C_7^2 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 = 630$ cách.
- **TH3:** Hoa và Vinh cùng với 2 bạn nam thành một nhóm. Nhóm thứ hai có 3 bạn nam và 1 bạn nữ. Suy ra nhóm thứ ba có 2 bạn nam và 2 bạn nữ. Trường hợp này trùng với trường hợp thứ hai nên ta không tính.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $n(A) = 840 + 630 = 1470$.

Vậy xác suất cần tính $P = \frac{1470}{6720} = \frac{7}{32}$. **Chọn C.**

Câu 43. Hai thí sinh A và B tham gia một buổi thi vấn đáp. Cán bộ hỏi thi đưa cho mỗi thí sinh một bộ câu hỏi thi gồm 10 câu hỏi khác nhau, được đựng trong 10 phong bì dán kín, có hình thức giống hệt nhau, mỗi phong bì đựng 1 câu hỏi; thí sinh chọn 3 phong bì trong đó để xác định câu hỏi thi của mình. Biết rằng bộ 10 câu hỏi thi dành cho các thí sinh là như nhau, xác suất để 3 câu hỏi A chọn và 3 câu hỏi B chọn có ít nhất 1 câu hỏi giống nhau là

- A. $\frac{7}{24}$ B. $\frac{17}{24}$ C. $\frac{19}{40}$ D. $\frac{21}{40}$

Lời giải:

Không gian mẫu là tập hợp gồm các cặp hai bộ 3 câu hỏi, mà ở vị trí thứ nhất của cặp là bộ 3 câu hỏi thí sinh A chọn và ở vị trí thứ hai của cặp là bộ 3 câu hỏi thí sinh B chọn.

- Thí sinh A có C_{10}^3 cách chọn 3 câu hỏi từ bộ gồm 10 câu hỏi.
- Thí sinh B có C_{10}^3 cách chọn 3 câu hỏi từ bộ gồm 10 câu hỏi.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{10}^3 \cdot C_{10}^3$.

Gọi X là biến cố “3 câu hỏi A chọn và 3 câu hỏi B chọn có ít nhất 1 câu hỏi giống nhau”. Để tìm số phần tử của X, ta đi tìm số phần tử của $\overline{X}$ như sau

- Giả sử A chọn trước nên có C_{10}^3 cách chọn 3 câu hỏi từ bộ gồm 10 câu hỏi.
- Để B chọn khác A thì B phải chọn 3 trong 7 câu hỏi còn lại từ bộ 10 câu hỏi nên có C_7^3 cách chọn.
- Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{X}$ là $|\Omega_{\overline{X}}| = C_{10}^3 \cdot C_7^3$.

- Vậy xác suất cần tính $P(X) = \frac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |\Omega_{\overline{X}}|}{|\Omega|} = \frac{C_{10}^3 \cdot C_{10}^3 - C_{10}^3 \cdot C_7^3}{C_{10}^3 \cdot C_{10}^3} = \frac{17}{24}$. **Chọn B.**

Ví dụ 44. An và Bình cùng tham gia kỳ thi THPT Quốc Gia, ngoài thi ba môn Văn, Toán, Anh bắt buộc thi An và Bình đều đăng ký thêm 2 môn tự chọn khác trong 3 môn: Hóa Học, Vật Lí, Sinh học dưới hình thức trắc nghiệm. Mỗi môn tự chọn trắc nghiệm có 6 mã đề thi khác nhau và mã đề thi của các môn khác nhau thì khác nhau. Xác suất để An và Bình chỉ có chung đúng một môn thi tự chọn và một mã đề thi là

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{9}$

C. $\frac{3}{18}$

D. $\frac{5}{18}$

Lời giải:

Không gian mẫu là số cách chọn môn tự chọn và số mã đề thi có thể nhận được của An và Bình.

- An có C_3^2 cách chọn môn tự chọn, có $C_6^1.C_6^1$ mã đề thi có thể nhận cho 2 môn tự chọn của An.
- Bình có C_3^2 cách chọn môn tự chọn, có $C_6^1.C_6^1$ mã đề thi có thể nhận cho 2 môn tự chọn của Bình

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = (C_3^2.C_6^1.C_6^1)^2$.

Gọi A là biến cố “An và Bình chỉ có chung đúng một môn thi tự chọn và một mã đề thi”. Để tính số kết quả thuận lợi cho A, ta mô tả cách chọn 2 môn tự chọn của An và Bình và cách nhận mã đề thi thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Cách chọn môn.** Giả sử An chọn trước 2 môn tự chọn trong 3 môn nên có C_3^2 cách. Để Bình chọn 2 trong 3 môn tự chọn nhưng chỉ có đúng 1 môn trùng với An nên Bình phải chọn 1 trong 2 môn An đã chọn và 1 môn còn lại An không chọn, suy ra Bình có $C_2^1.C_1^1$ cách. Do đó $C_3^2.C_2^1.C_1^1$ cách chọn môn thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Cách chọn mã đề.** Vì An chọn trước nên cách chọn mã đề của An là $C_6^1.C_6^1$. Để Bình có chung đúng 1 mã đề với An thì trong 2 môn Bình chọn, môn trùng với An phải chọn mã đề giống như An nên có 1 cách, môn không trùng với An thì được chọn tùy ý nên có C_6^1 cách, suy ra số cách chọn mã đề của Bình là $1.C_6^1$. Do đó có $C_6^1.C_6^1.1.C_6^1$ cách chọn mã đề thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = (C_3^2.C_2^1.C_1^1).(C_6^1.C_6^1.1.C_6^1)$.

Câu 45. Hai tổ chuyên môn của một trường trung học phổ thông có 9 giáo viên nam và 13 giáo viên nữ trong đó có đúng 2 cặp vợ chồng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người trong số 22 người đó nhưng không có cặp vợ chồng nào?

A. 24054

B. 24072

C. 24090

D. 25704

Lời giải:

Ta có các trường hợp sau

- TH1:** chọn 5 người từ 18 người: có C_{18}^5 cách.
- TH2:** chọn 1 người từ 2 cặp vợ chồng và 4 người từ 18 người: có $C_4^1.C_{18}^4$ cách.
- TH3:** chọn 2 người từ 2 cặp vợ chồng sao cho không phải là một cặp và 3 người từ 18 người: có $(C_4^2 - 2).C_{18}^3$ cách.

Vậy có $C_{18}^5 + C_4^1.C_{18}^4 + (C_4^2 - 2).C_{18}^3 = 24072$ cách. **Chọn B.**

Cách 2. Tính theo phần bù. Tính số cách chọn 5 người tùy ý – (cách chọn 5 người có đúng 1 cặp vợ chồng + cách chọn 5 người có đúng 2 cặp vợ chồng).

- Số cách chọn 5 người tùy ý: có $C_{22}^5 = 26334$ cách.
- Số cách chọn 5 người có đúng 1 cặp vợ chồng: Chọn 1 cặp vợ chồng có 2 cách chọn, chọn 3 người còn lại có hai khả năng

Khả năng thứ nhất: 1 người từ cặp vợ chồng còn lại và 2 người từ 18 người

Khả năng thứ 2: 3 người từ 18 người

Do đó trường hợp này có $2.(C_2^1 C_{18}^2 + C_{18}^3)$ cách.

- Số cách chọn 5 có đúng 2 cặp vợ chồng: Chọn 2 cặp vợ chồng có duy nhất 1 cách, chọn thêm 1 người từ 18 người nên có 18 cách: có $1.18=18$ cách.

Vậy có $C_{22}^5 = 26334 - [2.(C_2^1 C_{18}^2 + C_{18}^3) + 18] = 24072$ cách.

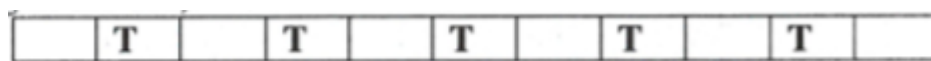
Câu 46. Xếp 10 cuốn sách tham khảo khác nhau gồm: 1 cuốn sách Văn, 3 cuốn sách tiếng Anh và 6 cuốn sách Toán (trong đó có 2 cuốn Toán T_1 và Toán T_2) thành một hàng ngang trên giá sách. Xác suất để mỗi cuốn sách tiếng Anh đều được xếp ở giữa hai cuốn sách Toán, đồng thời hai cuốn Toán T_1 và Toán T_2 luôn được xếp cạnh nhau bằng

- A. $\frac{1}{120}$ B. $\frac{1}{210}$ C. $\frac{1}{300}$ D. $\frac{1}{450}$

Lời giải:

Ta có $\begin{cases} n(\Omega) = 10! \\ n(A) = 5!.2!.A_4^3.3 \end{cases} \longrightarrow P = \frac{1}{210}$. **Chọn B.**

- Xếp 5 quyển toán (coi T_1 và T_2 là một khối) nên có $5!.2!$ cách. Tạo ra 4 khoảng trống giữa các cuốn Toán (không kể hai đầu).



- Xếp 3 cuốn sách tiếng Anh vào 4 khoảng trống có A_4^3 cách.
- Xếp 1 cuốn Văn vào 3 vị trí còn lại (một khoảng trống mà tiếng Anh sắp còn lại, cùng với 2 khoảng trống 2 đầu cuốn Toán) nên có 3 cách.

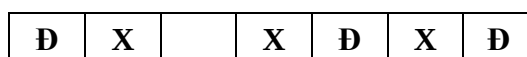
Câu 47. Có 3 bi xanh, 3 bi đỏ, 3 bi trắng và 3 bi vàng (các viên bi cùng màu giống nhau). Hỏi có bao nhiêu cách xếp 12 viên bi thành một hàng ngang sao cho các bi cùng màu không cạnh nhau?

- A. $\frac{1}{22}$ B. $\frac{2}{55}$ C. $\frac{1}{28512}$ D. $\frac{2}{35640}$

Lời giải:

Ta có $\begin{cases} n(\Omega) = \frac{12!}{3!.3!.3!.3!} \\ n(A) = 1.C_4^3.C_7^3.C_{10}^3 - 2.C_6^3.C_9^3 \end{cases} \longrightarrow P = \frac{2}{55}$. **Chọn B.**

- Xếp 3 bi xanh trước: có 1 cách (tạo ra 4 khoảng trống kể cả 2 đầu). Tiếp theo xếp 3 bi đỏ vào 4 khoảng trống: có C_4^3 cách. Bây giờ có tất cả 6 viên bi (gồm 3 bi xanh và 3 bi đỏ) tạo nên 7 khoảng trống, tiếp tục xếp 3 bi trắng vào 7 khoảng trống: có C_7^3 cách. Thời điểm này có tất cả 9 viên bi (gồm 3 bi xanh, 3 bi đỏ và 3 bi trắng), tiếp tục xếp 3 bi vàng vào 10 khoảng trống: có C_{10}^3 cách. Vậy có $1.C_4^3.C_7^3.C_{10}^3$ cách.
- Tuy nhiên khi xếp 3 bi xanh xong, kế tiếp xếp 3 bi đỏ vào 4 khoảng trống như đã trình bày ở trên thì có 2 trường hợp mà 2 bi xanh cạnh nhau



Đ	X	Đ	X		X	Đ
---	---	---	---	--	---	---

Ứng với mỗi trường hợp này sẽ kéo theo việc xếp bi trắng không thỏa mãn là C_6^3 và việc xếp bi vàng không thỏa mãn là C_{10}^3 . Vậy số trường hợp không thỏa mãn (cần phải trừ ra) là $2.C_6^3.C_9^3$ cách.

Câu 48. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 5 học sinh nam (trong đó có Hoàng) và 5 học sinh nữ (trong đó có Lan) thành một hàng ngang. Xác suất để trong 10 học sinh trên không có hai học sinh cùng giới đứng cạnh nhau, đồng thời Hoàng và Lan cũng không đứng cạnh nhau bằng

A. $\frac{1}{350}$

B. $\frac{1}{450}$

C. $\frac{4}{1575}$

D. $\frac{8}{1575}$

Lời giải:

Ta có $\begin{cases} n(\Omega) = 10! \\ n(A) = 18432 \end{cases} \longrightarrow P = \frac{8}{1575}$. **Chọn D.**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Chọn vị trí chẵn hoặc lẻ để xếp 5 nam: có 2 cách.

Ta xét trường hợp 5 nam ở vị trí chẵn (tương tự cho vị trí lẻ).

- **Khả năng 1:** Hoàng đứng ngoài cùng: có 1 cách.

Xếp Lan không cạnh Hoàng: có 4 cách.

Đổi vị trí các nam: có $4!$ cách; Đổi vị trí các nữ: $4!$ cách.

Do đó trong trường hợp này có $2.1.4.4!.4! = 4608$ cách.

- **Khả năng 2:** Hoàng không đứng ngoài cùng: có 4 cách.

Xếp Lan không cạnh Hoàng (bỏ 2 vị trí cạnh Hoàng): có 3 cách.

Đổi vị trí các nam: có $4!$ cách; Đổi vị trí các nữ: có $4!$ cách.

Do đó trong trường hợp này có $2.4.3.4!.4! = 13824$ cách.