

Chương IV

ĐƯỜNG THẲNG & MẶT PHẲNG

QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1.

ĐIỂM – ĐƯỜNG THẲNG MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Các tính chất thừa nhận:

a) Tính chất 1:

Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

b) Tính chất 2:

Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng.

c) Tính chất 3:

Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

d) Tính chất 4:

Tồn tại 4 điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

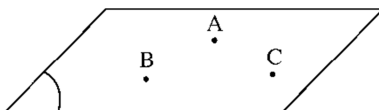
e) Tính chất 5:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa. Từ đó suy ra: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy.

2. Cách xác định một mặt phẳng:

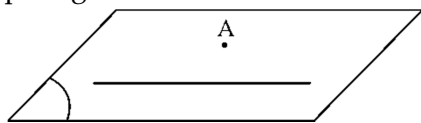
a) Cách 1:

Qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng xác định duy nhất một mặt phẳng.



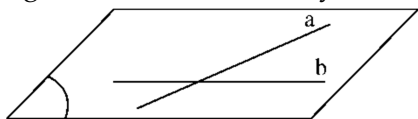
b) Cách 2:

Qua một đường thẳng và một điểm nằm ngoài đường thẳng xác định duy nhất một mặt phẳng.



c) *Cách 3:*

Qua hai đường thẳng cắt nhau xác định duy nhất một mặt phẳng.



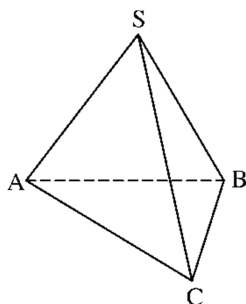
3. Hình chóp và hình tứ diện:

a) *Định nghĩa:*

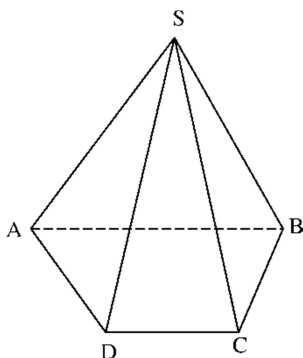
Hình chóp là một hình đa diện có đáy là một đa giác, các mặt còn lại là những tam giác có chung một đỉnh. Hình chóp có đáy là tam giác gọi là hình tứ diện.

b) *Các loại hình chóp :*

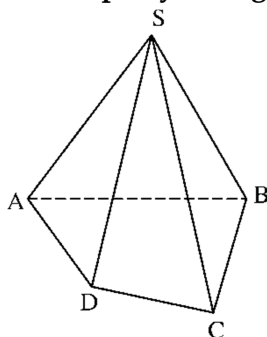
Hình chóp đáy là tam giác :



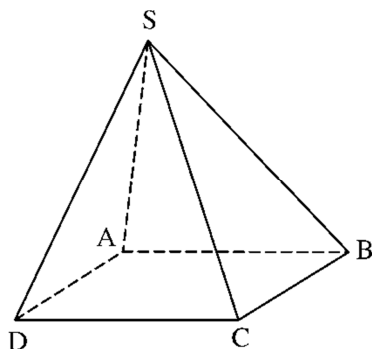
Hình chóp đáy là hình thang



Hình chóp đáy là tứ giác :



Hình chóp đáy là hình bình hành,
hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông



B. CÁC DẠNG TOÁN.

DẠNG 1:

TÌM GIAO TUYẾN HAI MẶT PHẪNG

Phương pháp:

a) Định nghĩa :

Giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng chung của hai mặt phẳng.

b) Cách tình giao tuyến của hai mặt phẳng:

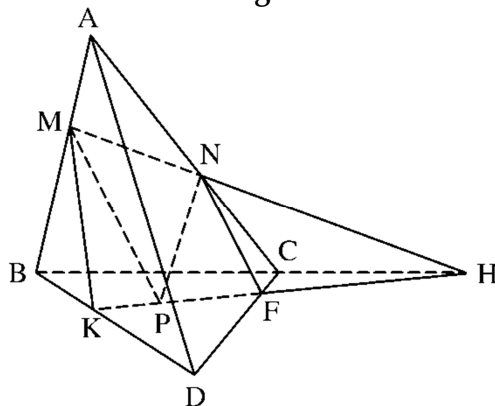
Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng ta tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng rồi nối lại. Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.

$$\begin{cases} A \in (\alpha) \cap (\beta) \\ B \in (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow AB = (\alpha) \cap (\beta)$$

Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi M là điểm trên cạnh AB , N là điểm thuộc cạnh AC sao cho MN không song song với BC. Gọi P là điểm nằm trong $\triangle BCD$.

- $\text{Tìm } (MNP) \cap (BCD).$
- $\text{Tìm } (MNP) \cap (ABD).$
- $\text{Tìm } (MNP) \cap (ACD).$

Lời giải



- a) Trong (ABC) gọi $\{H\} = MN \cap BC$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \begin{cases} H \in MN \subset (MNP) \\ H \in BC \subset (BCD) \end{cases} \\ \Rightarrow & H \in (MNP) \cap (BCD) \quad (1) \end{aligned}$$

Lại có: $\begin{cases} P \in (MNP) \\ P \in (BCD) \end{cases}$

$$\Rightarrow P \in (MNP) \cap (BCD) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $HP = (MNP) \cap (BCD)$

b) Trong (BCD) gọi $\{K\} = HP \cap BD$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} K \in BD \subset (ABD) \\ K \in HP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow K = (MNP) \cap (ABD) \quad (1)$$

Lại có:

$$\begin{cases} M \in (MNP) \\ M \in AB \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow M \in (MNP) \cap (ABD) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $MK = (MNP) \cap (ABD)$

c) Trong (BCD) gọi $\{F\} = HK \cap DC$

Trình bày tương tự như hai câu trên ta được $NF = (MNP) \cap (ACD)$

DẠNG 2:

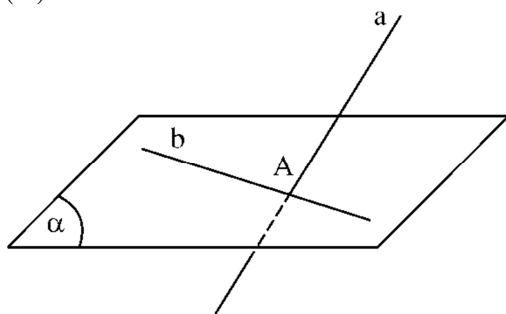
TÌM GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Phương pháp:

► **Bài toán :** Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng a cắt (α) . Muốn tìm giao điểm của a và (α) ta làm như sau :

+ Tìm trong mặt phẳng (α) đường thẳng b sao cho b cắt a tại A .

$$\text{+ Ta có: } \begin{cases} A \in a \\ A \in b \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow A = a \cap (\alpha)$$

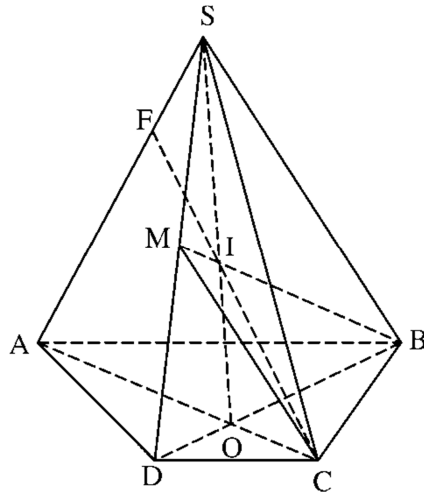


Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi O là giao điểm của AC và BD và M là một điểm bất kỳ trên đoạn SD .

a) Tìm $SO \cap (MBC)$.

b) Tìm $SA \cap (MBC)$

Lời giải



a) Trong mp (SBD) gọi $\{I\} = SO \cap BM$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} I \in SO \\ I \in MB \subset (MBC) \Rightarrow I \in (MBC) \end{cases} \Rightarrow I = SO \cap (MBC)$$

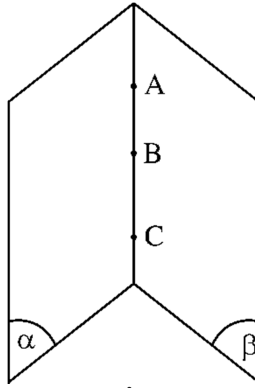
b) Trong mp (SAC) gọi $F = CI \cap SA$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} F \in SA \\ F \in CI \subset (MBC) \end{cases} \Rightarrow F = SA \cap (MBC)$$

DẠNG 3:

CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Phương pháp :



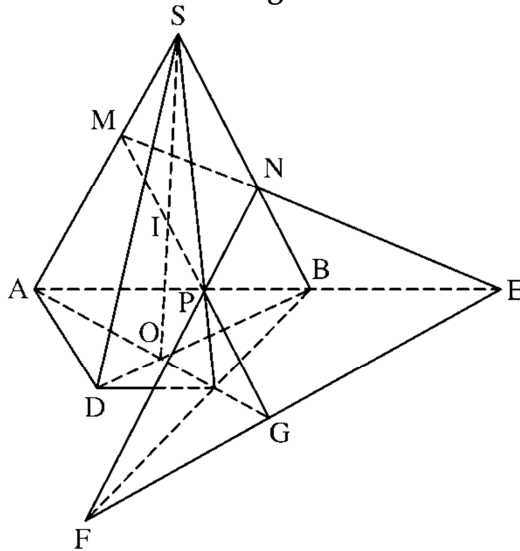
Muốn chứng minh ba điểm thẳng hàng ta chứng minh ba điểm này thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt.

$$\begin{cases} A \in (\alpha) \cap (\beta) \\ B \in (\alpha) \cap (\beta) \Rightarrow A, B, C \in (\alpha) \cap (\beta) \Rightarrow A, B, C \text{ thẳng hàng.} \\ C \in (\alpha) \cap (\beta) \end{cases}$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang đáy lớn AB. Lấy điểm M trên đoạn SA, lấy điểm N trên đoạn SB và điểm P trên đoạn SC sao cho MN cắt AB tại E. NP cắt BC tại F và MP cắt AC tại G. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

- Tìm $SO \cap (MNP)$
- Chứng minh 3 điểm E, F, G thẳng hàng.

Lời giải



- Trong mp (SAC) gọi $\{I\} = SO \cap MP$

Ta có : $\begin{cases} I \in SO \\ I \in MP \subset (MNP) \Rightarrow I \in (MNP) \end{cases}$
 $\Rightarrow I = SO \cap (MNP)$

b) Ta có : $\begin{cases} G \in MP \subset (MNP) \Rightarrow G \in (MNP) \\ G \in AC \subset (ABCD) \Rightarrow G \in (ABCD) \end{cases}$
 $\Rightarrow G \in (MNP) \cap (ABCD) \quad (1)$

$\begin{cases} E \in MN \subset (MNP) \Rightarrow E \in (MNP) \\ E \in AB \subset (ABCD) \Rightarrow E \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow E \in (MNP) \cap (ABCD) \quad (2)$

$\begin{cases} F \in NP \subset (MNP) \Rightarrow F \in (MNP) \\ F \in BC \subset (ABCD) \Rightarrow F \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow F \in (MNP) \cap (ABCD) \quad (3)$

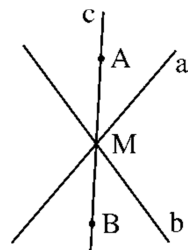
Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow G, E, F$ thẳng hàng.

DẠNG 4:

CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG ĐỒNG QUY

Phương pháp:

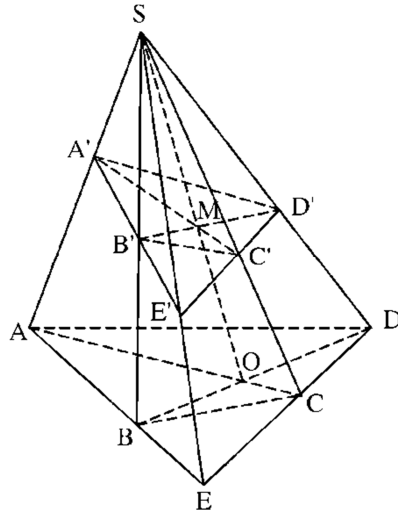
- Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng bất kì.
- Chứng minh điểm M thuộc đường thẳng còn lại ta đưa về bài toán chứng minh ba điểm thẳng hàng.



Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Giả sử AB cắt CD tại E và A'B' cắt C'D' tại E'.

- a) Chứng minh : S, E, E' thẳng hàng.
- b) Chứng minh A'C', B'D', SO đồng quy.

Lời giải



a) Ta có: $\begin{cases} E' \in A'B' \subset (SAB) \\ E' \in C'D' \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow E' \in (SAB) \cap (SCD)$

Ta có: $\begin{cases} E \in AB \subset (SAB) \\ E \in CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow E \in (SAB) \cap (SCD)$

Vậy: $EE' = (SAB) \cap (SCD)$ Mà $S \in (SAB) \cap (SCD)$
 $\Rightarrow S \in EE'$ hay S, E, E' thẳng hàng.

b) Trong (α) gọi $\{M\} = A'C' \cap B'D'$

Ta có:

$\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$

Mà $S \in (SAC) \cap (SBD) \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$

Lại có:

$\begin{cases} M \in A'C' \subset (SAC) \\ M \in B'D' \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow M \in (SAC) \cap (SBD)$

Vậy $M \in SO$ hay $A'C', B'D', SO$ đồng quy tại M.

DẠNG 5: **THIẾT DIỆN**

Phương pháp:

a) Định nghĩa :

+ Thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mp (α) là một đa giác phẳng có các cạnh là các đoạn giao tuyến của (α) với các mặt bên hay mặt đáy của hình chóp.

b) Cách xác định thiết diện :

- + Ta tìm các đoạn giao tuyến của (α) với các mặt bên hay mặt đáy của chóp cho tới khi các đoạn giao tuyến khép kín ta được hình thiết diện.

Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi. Gọi M là một điểm nằm trong ΔSCD .

- Tìm $(SMB) \cap (SAC)$.
- Tìm $BM \cap (SAC)$.
- Tìm thiết diện hình chóp với (ABM) .

Lời giải

- Trong (SDC) gọi $\{I\} = SM \cap DC$

Trong $(ABCD)$ gọi $\{N\} = BI \cap AC$

Ta có:

$$\begin{cases} N \in BI \subset (SBM) \\ N \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow N \in (SAC) \cap (SBM)$$

Mà $S \in (SAC) \cap (SBM)$

Vậy $SN = (SAC) \cap (SBM)$

- Trong (SBI) gọi $\{K\} = BM \cap SN$

Ta có:

$$\begin{cases} K \in BM \\ K \in SN \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow K = BM \cap (SAC)$$

Vậy $K = BM \cap (SAC)$

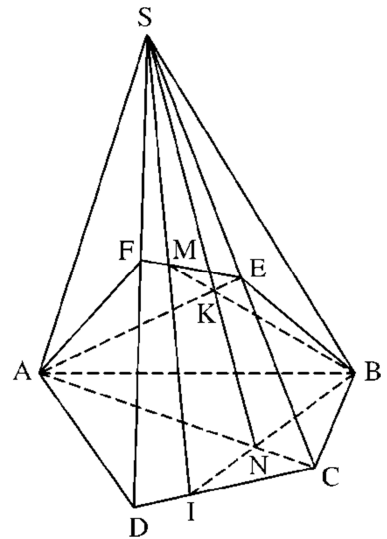
- Trong (SAC) gọi $E = SC \cap AK$.

Trong (SDC) gọi $F = ME \cap SD$

Ta có: giao điểm của (MAB) với các cạnh SC, SD lần lượt là E, F từ đó suy ra:

$$(MAB) \cap (SAB) = AB; (MAB) \cap (SBC) = BE; (MAB) \cap (SDC) = EF$$

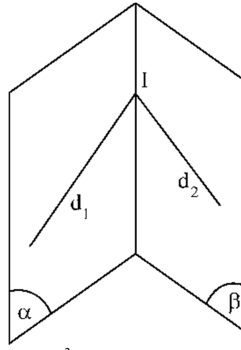
$$(MAB) \cap (SAD) = FE. \text{ Vậy thiết diện là tứ giác ABEF.}$$



DẠNG 6:

TÌM QUỸ TÍCH CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG LƯU ĐỘNG d_1 VÀ d_2

Phương pháp:



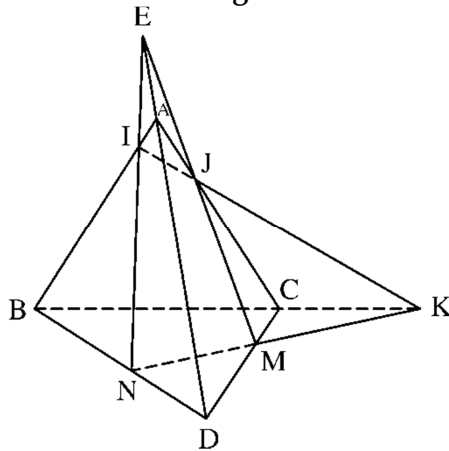
Cho d_1 và d_2 là hai đường thẳng di động cắt nhau tại I . Muốn tìm quỹ tích điểm I ta làm như sau:

- + Chọn hai mặt phẳng (α) và (β) cố định lần lượt chứa d_1 và d_2 .
- + Suy ra $I \in (\alpha) \cap (\beta)$ hay I điểm động trên giao tuyến cố định của (α) và (β) .

Ví dụ 6: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là hai điểm cố định trên AB, AC và IJ không song song với BC . Mặt phẳng (α) quay quanh IJ cắt các cạnh CD, BD lần lượt tại M, N .

- a) Chứng minh MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.
- b) Tìm tập hợp giao điểm của IN và JM .

Lời giải



- a) Trong (α) gọi $\{K\} = IN \cap JM$

$$\text{Ta có } \begin{cases} K \in IN \subset (ABD) \\ K \in JM \subset (ACD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow K \in (ABD) \cap (ACD)$$

$$\text{Mà } AD = (ABD) \cap (ACD) \Rightarrow K \in AD$$

Do BC, IJ cố định và $\{K\} = IJ \cap BC$

K cố định. Vậy MN luôn đi qua điểm K cố định.

b) Trong (α) gọi $\{E\} = IN \cap JM$

Ta có :
$$\begin{cases} E \in IN \subset (ABD) \\ E \in JM \subset (ADC) \end{cases}$$

$\Rightarrow E \in (ABD) \cap (ADC)$

Mà $AD = (ABD) \cap (ADC) \Rightarrow E \in AD$

Do hai mặt phẳng cố định nên AD cố định.

Vậy giao điểm của IN và JM di động trên đường thẳng AD cố định.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Cho điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa tứ giác $ABCD$ (không có cặp cạnh đối song song). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

Bài 2: Cho điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa hình thang $ABCD$, biết $AB \parallel CD$, đáy lớn AB . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

Bài 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm AB , J là điểm thuộc cạnh AD sao cho $JD = \frac{1}{3}JA$. Tìm giao điểm của đường thẳng IJ và mp (BCD) .

Bài 4: Cho tứ diện $ABCD$. Lấy hai điểm M, N lần lượt trên AC, AD sao cho MN không song song CD . Lấy điểm O bên trong ΔBCD . Tìm giao điểm của đường thẳng BC và mp (OMN) .

Bài 5: Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và không thuộc mp (Q) , các đường thẳng BC, CA, AB cắt (Q) lần lượt tại F, E, D . Chứng minh D, E, F thẳng hàng.

Bài 6: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I là trung điểm của SD , J là điểm trên SC và không trùng trung điểm SC . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (AIJ) .

Bài 7: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$.

a) Tìm $CD \cap (MNP)$.

b) Tìm $AD \cap (MNP)$.

Bài 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và CD . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (ABN) .

Bài 9: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tung ứng tại các điểm M, N, P, Q . Chứng minh: MP, NQ, SO đồng qui.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Xét các khẳng định sau :

A: “Qua ba điểm xác định một mặt phẳng”.

B: “Qua một điểm và một đường thẳng xác định một mặt phẳng”.

C: “Qua hai đường thẳng xác định một mặt phẳng”.

D: “Qua ba đường thẳng a, b, c phân biệt đồng qui tại một điểm thì xác định một mặt phẳng”.

Chọn khẳng định đúng :

A) A, B đúng; C, D sai.

B) A, B, C đúng; D sai.

C) A đúng; B, C, D sai.

D) A, B, C, D sai.

Câu 2: Tìm khẳng định đúng :

A) Nếu hai mặt phẳng có hai điểm chung là A, B thì giao tuyến là đường thẳng AB.

B) Nếu hai mặt phẳng phân biệt có 1 điểm chung thì cắt nhau.

C) Hai mặt phẳng có ba điểm chung thì trùng nhau.

D) Hai mặt phẳng có chung một điểm và một đường thẳng thì trùng nhau.

Câu 3: Tìm khẳng định đúng :

A) Hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

B) Hai đường thẳng có hai điểm chung thì trùng nhau.

C) Hai đường thẳng không đồng phẳng và không có điểm chung thì chéo nhau.

D) Hai đường thẳng có một điểm chung thì cắt nhau.

Câu 4: Tìm khẳng định sai :

A) Nếu một đường thẳng không có điểm chung với mặt phẳng thì đường thẳng đó song song với mặt phẳng.

B) Nếu một đường thẳng có hai điểm thuộc mặt phẳng thì đường thẳng đó nằm trong mặt phẳng.

C) Nếu một đường thẳng không nằm trong mặt phẳng và cắt một đường thẳng nằm trong mặt phẳng thì đường thẳng đó cắt mặt phẳng.

D) Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng phân biệt a và b nằm trong mặt phẳng (α) tại hai điểm phân biệt thì c nằm trong mặt phẳng (α) .

Câu 5. Hãy nối một ý ở vế trái với một ý ở vế phải để được khẳng định đúng :

A)	Hình chóp A.BCD
B)	Hình chóp S.ABCDE
C)	Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật
D)	Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi

1)	Có 5 đường chéo ở đáy
2)	Có 2 đường chéo bằng nhau
3)	Không có đường chéo ở đáy
4)	Có 7 đường chéo ở đáy
5)	Có 2 đường chéo ở đáy vuông góc

Câu 6: Thiết diện của một tứ diện với một mặt phẳng là một đa giác có số cạnh nhiều nhất là :

A) 3 cạnh

B) 4 cạnh

C) 5 cạnh

D) 6 cạnh

Câu 7: Cho tứ diện A.BCD. Gọi E, F, I lần lượt là 3 điểm trên 3 cạnh AB, AD và AC. Gọi M là giao điểm của CE và BI, N là giao điểm của CF và DI. Hãy nối một ý ở vế trái với một ý ở vế phải để được khẳng định đúng :

A)	$(CEF) \cap (IBD) =$
B)	$(CEF) \cap (ABD) =$
C)	$(EMD) \cap (BCD) =$
D)	$(ABD) \cap (IMN) =$

1)	BD
2)	MN
3)	CD
4)	EF
5)	EN

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AB. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình thang ABCD. Gọi M là trung điểm của SC. AM cắt SO tại E, DE cắt SB tại F. Các khẳng định sau đúng hay sai ?

A) $E = AM \cap (SBD)$

Đúng

☐

Sai

☐

B) Mặt phẳng (ADE) cắt hình chóp S.ABCD

theo thiết diện là tứ giác AFMD



C) $(AED) \cap (SBC) = EM$



D) Ba đường thẳng SO, AM, DF đồng qui tại E



Câu 9: Cho tứ diện A.BCD. Gọi M, N, I lần lượt là các điểm bất kì trên AB, AC, AD. Giao tuyến của (IBC) và (DMN) là đường thẳng :

A) Đường thẳng đi qua giao điểm của BI và MD và qua giao điểm của IC và ND.

B) Đường thẳng đi qua giao điểm của BI và AC và qua giao điểm của IC và AB.

C) Đường thẳng đi qua giao điểm của MD và BC và qua giao điểm của IC và MD.

D) Đường thẳng đi qua giao điểm của BI và ND và qua giao điểm của IC và MD.

Câu 10: Cho tứ diện S.ABC. Gọi M, N lần lượt là các điểm bất kì trên SB, SC sao cho MN không song song với BC. Giao tuyến của (ABN) và (AMC) là đường thẳng :

A) Đường thẳng qua A và qua giao điểm của BN và AC.

B) Đường thẳng qua A và qua giao điểm của BN và MC.

C) Đường thẳng qua A và qua giao điểm của MC và AB.

D) Đường thẳng qua A và qua giao điểm của AN và SB.

Câu 11: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang đáy lớn AB. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Gọi M là một điểm bất kì trên SD. Giao điểm của SO với (MBC) là :

A) Giao điểm của SO và BC.

B) Giao điểm của SO và MC.

C) Giao điểm của SO và MB.

D) Giao điểm của SO và MA.

Câu 12: Cho tứ diện A.BCD. Gọi E, F, G lần lượt là ba điểm trên AB, AC, BD sao cho EF không song song với BC. EG cắt AD tại R. Gọi S là giao điểm của (EFG) với CD. Ba điểm F, S, R nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng :

A) (CEG) với (ACD).

B) (EFG) với (ACD).

C) (EFD) với (ACD).

D) (DEF) với (ABD).

Câu 13: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang đáy lớn AB. Lấy M trên đoạn SA, N trên đoạn SB và P trên đoạn SC. Gọi $\{E\} = MN \cap AB$, $\{G\} = MP \cap AC$, $\{F\} = NP \cap BC$. Ba điểm E, F, G nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng :

A) (APB) với (SCD).

B) (MNF) với (SCD).

C) (MNP) với (ABCD).

D) (AMB) với (ABCD).

Câu 14: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi. Gọi M là trung điểm của SC. Gọi $\{F\} = AD \cap BC$, $\{O\} = BD \cap AC$, $\{N\} = SD \cap (ABM)$. Ba điểm S, O, và giao điểm của AM và BN thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng:

A) (SOF) với (NBC).

B) (SBD) với (CMN).

C) (SAC) với (MAB).

D) (SAC) với (SBD).

Câu 15: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi N là một điểm trên đoạn SC sao cho $SC=3NS$. Gọi K là giao điểm của AN và SO. Tìm khẳng định đúng.

A) $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SO}$.

B) $\overrightarrow{KS} = -\overrightarrow{KO}$.

C) $\overrightarrow{SK} = 3\overrightarrow{KO}$.

D) $\overrightarrow{KS} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{KO}$.

Câu 16: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi P là điểm trên đoạn AD sao cho $AP > PD$. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng MNP là:

A) Tam giác.

B) Hình bình hành.

C) Hình thang.

D) Tứ giác lồi.

Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi. Gọi M là một điểm trong ΔSCD . SM cắt DC tại K. Dùng kết quả trên để giải các bài tập 17, 18 và 19 sau:

Câu 17: Giao tuyến của (SBM) và (SAC) là:

A) Đường thẳng qua S và qua giao điểm của SC với MB.

B) Đường thẳng qua S và qua giao điểm của AC với BK.

C) Đường thẳng qua S và qua giao điểm của SK với AC.

D) Đường thẳng qua S và qua giao điểm của SA với MB.

Câu 18: Giao điểm của BM với (SAC) là:

A) Giao điểm của đường thẳng BM với đường thẳng SA.

B) Giao điểm của đường thẳng BM với đường thẳng SC.

C) Giao điểm của đường thẳng BM với đường thẳng đi qua S và giao điểm của BK với AC.

D) Giao điểm của đường thẳng BM với đường thẳng AC.

Câu 19: Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (ABM) là:

A) Tam giác

B) Tứ giác

C) Hình thang cân

D) Hình bình hành.

Câu 20: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, H, K lần lượt là ba điểm trên SA, BC và DC. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MHK) là:

- A) Tam giác. B) Tứ giác. C) Ngũ giác. D) Lục giác.

Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Gọi K là điểm trên đoạn BD sao cho $BK = 2KD$. Dùng giả thiết trên để giải câu 21, 22, 23, 24 và 25.

Câu 21: Gọi E là giao điểm của JK và CD. Chọn khẳng định đúng:

- A) $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{DC}$. B) $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DE}$.
C) $\overrightarrow{DE} = -2\overrightarrow{DC}$. D) $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{CD}$.

Câu 22: Giao điểm F của AD với (IJK) là:

- A) Giao điểm của đường thẳng AD với đường thẳng JK.
B) Giao điểm của đường thẳng AD với đường thẳng IK.
C) Giao điểm của đường thẳng AD với đường thẳng IJ.
D) Giao điểm của đường thẳng AD với đường thẳng EI.

Câu 23: Tìm khẳng định đúng:

- A) IJ cắt FK. B) $FK \parallel IJ$.
C) IJ, FK, MN đồng quy tại một điểm. D) $FK = \frac{1}{2}IJ$

Câu 24: Gọi M, N là hai điểm trên AB và CD. Giao điểm của MN với mặt phẳng (IJK) là

- A) Giao điểm của đường thẳng MN và đường thẳng đi qua $\{P\} = IJ \cap BD$ và $\{Q\} = IJ \cap KF$.
B) Giao điểm của đường thẳng MN với đường thẳng IK.
C) Giao điểm của đường thẳng MN với đường thẳng IJ.
D) Giao điểm của đường thẳng MN với đường thẳng đi qua $\{P\} = PN \cap JK$ và $\{Q\} = AN \cap IF$

Câu 25: Thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (IJK) là :

- A) Hình thang. B) Hình bình hành.
C) Tam giác. D) Tứ giác lồi.

E. HƯỚNG DẪN GIẢI



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Trong (ABCD) gọi $O = AC \cap BD$.

$$\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD).$$

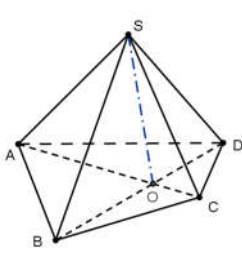
Mà $S \in (SAC) \cap (SBD) \Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$ (Hình 1).

Bài 2: Trong $(ABCD)$ gọi $E = AD \cap BC$. Ta có: $\begin{cases} E \in AD \subset (SAD) \\ E \in BC \subset (SBC) \end{cases}$

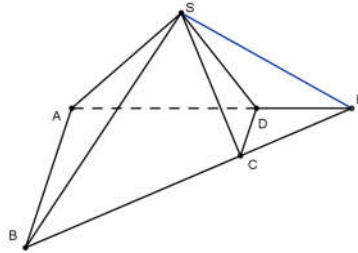
$\Rightarrow E \in (SAD) \cap (SBC)$. Mà $E \in (SAD) \cap (SBC) \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = SE$. (Hình 2).

Bài 3: Trong (ABD) gọi $E = IJ \cap BD$. Ta có: $\begin{cases} E \in IJ \\ E \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow E = IJ \cap (BCD)$

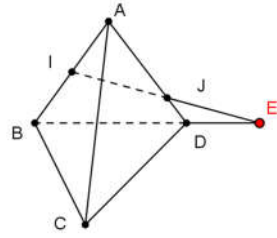
(Hình 3).



Hình 1



Hình 2

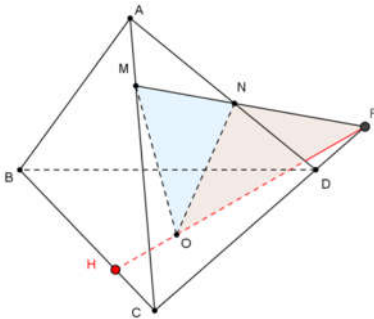


Hình 3

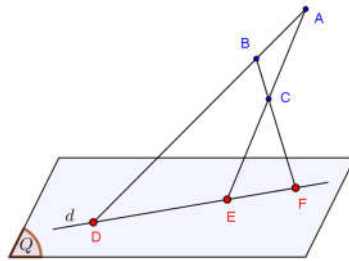
Bài 4: Trong (ACD) , gọi $F = MN \cap CD$. Trong (BCD) , gọi $H = OF \cap BC$.

Ta có: $\begin{cases} H \in BC \\ F \in OF \subset (OMN) \end{cases} \Rightarrow H = BC \cap (OMN)$. (Hình 4)

Bài 5: Ta có F, E, D lần lượt thuộc hai mặt phẳng (Q) và (ABC) nên F, E, D thuộc giao tuyến d của (Q) và (ABC) . Vậy D, E, F thẳng hàng. (Hình 5).



Hình 4



Hình 5

Bài 6: (Hình 6). Trong (SCD) gọi $F = IJ \cap CD$. Ta có:

$$\begin{cases} E \in IJ \subset (AIJ) \\ E \in CD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow F \in (AIJ) \cap (ABCD). \text{ Mà } A \in (AIJ) \cap (ABCD) \\ \Rightarrow AF = (AIJ) \cap (ABCD).$$

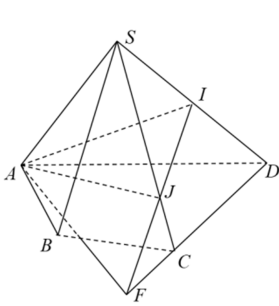
Bài 7: (Hình 7).

a) Trong (BCD) gọi $E = NP \cap CD$. Ta có: $\begin{cases} E \in CD \\ E \in NP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow E = CD \cap (MNP)$

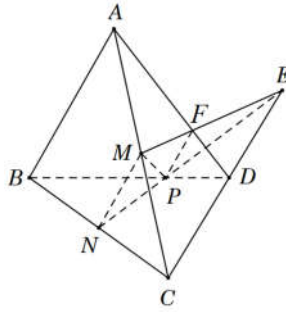
b) Trong (ACD) gọi $F = AD \cap ME$. Ta có: $\begin{cases} F \in AD \\ F \in ME \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow F = AD \cap (MNP)$

Bài 8: Trong (ACD) gọi $G = AN \cap DM$. $\begin{cases} G \in AN \subset (ANB) \\ G \in MD \subset (AMD) \end{cases} \Rightarrow G \in (ANB) \cap (AMD)$

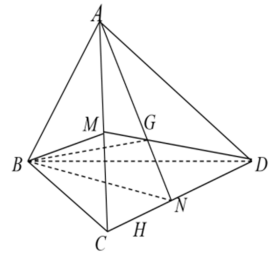
Mà $B \in (ABN) \cap (BMD) \Rightarrow (ABN) \cap (BMD) = BG$. (Hình 8).



Hình 6



Hình 7



Hình 8

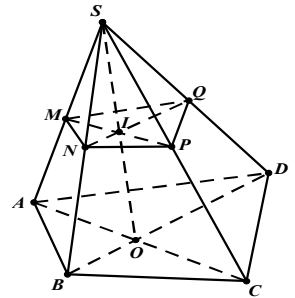
Bài 9: Trong mặt phẳng $(MNPQ)$ gọi $I = MP \cap NQ$.

Ta sẽ chứng minh $I \in SO$.

Để thấy $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

$$\begin{cases} I \in MP \subset (SAC) \\ I \in NQ \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD)$$

$\Rightarrow I \in SO$. Vậy MP, NQ, SO đồng qui tại I .



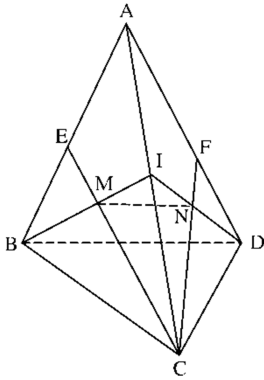
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1.D	2.B	3.C	4.B	4b	5	A.3	B.1	C.2	D.5
7	A.2	B.4	C.3	D.1	8	A.Đ	B.Đ	C.S	D.Đ
9.A	10.B	11.C	12.B	13.C	14.D	15.B	16.D	17.B	18.C
19.B	20.C	21.A	22.D	23.B	24.D	25.A			

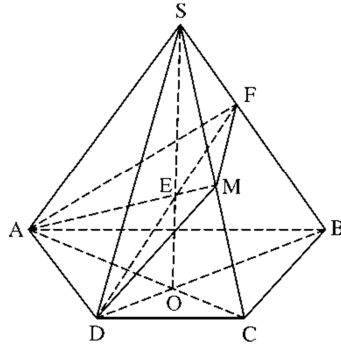
Câu 7: $(CEF) \cap (IBD) = MN; (CEF) \cap (ABD) = EF.$

$(EMD) \cap (BCD) = CD; (ABD) \cap (IMN) = BD.$ (Hình 1)

Câu 8: $(AED) \cap (SBC) = FM.$ (Hình 2)



Hình 1

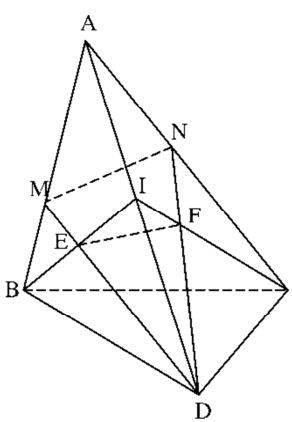


Hình 2

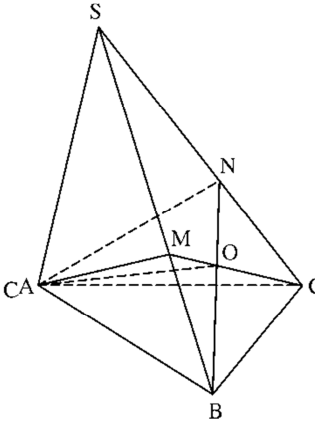
Câu 9: Chọn A. Trong (ABD) gọi $\{E\} = BI \cap DM$, trong (ACD) gọi $\{F\} = CI \cap DN$.

Vậy $EF = (IBC) \cap (DMN).$ (Hình 3)

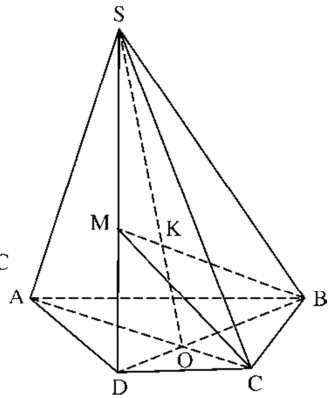
Câu 10: Chọn B. Trong (SBC) gọi $\{O\} = MC \cap BN \Rightarrow AO = (ABN) \cap (ACM).$ (Hình 4)



Hình 3



Hình 4



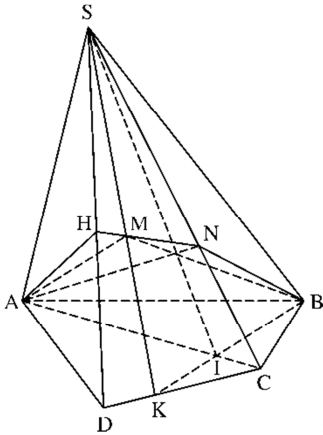
Hình 5

Câu 11: Chọn C. Trong (SBD) gọi $\{K\} = MN \cap SO \Rightarrow K = SO \cap (MBC).$ (Hình 5).

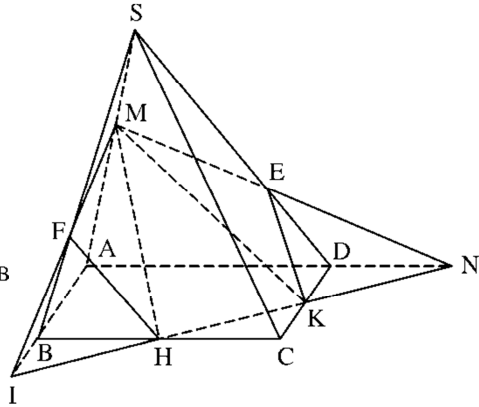
Câu 12: Chọn B. Ba điểm F, S, R thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (EFG) với $(ACD).$ (Hình 6).

Câu 13: Chọn C. $F, G, E \in (MNP) \cap (ABCD).$ (Hình 7).

Câu 14: Chọn D. Giao điểm của AM và BN và hai điểm S, O cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) với $(SBD).$ (Hình 8).



Hình 11



Hình 12

Câu 20: Chọn C. $\{N\} = HK \cap AD$, $\{E\} = MN \cap SD$, $\{I\} = AB \cap HK$, $\{F\} = MI \cap SB$.

Vậy thiết diện là hình ngũ giác MEKHF. (Hình 12).

Câu 21: Chọn A. Gọi Q là trung điểm của BD. $\Delta KQJ \sim \Delta KDE \Rightarrow DE = 2QJ$

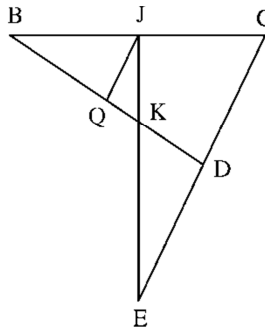
Mà $DC = 2QJ$ (QJ là đường trung bình của ΔBCD)

Nên D là trung điểm của CE $\Rightarrow \overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{DC}$. (Hình 13 và 14).

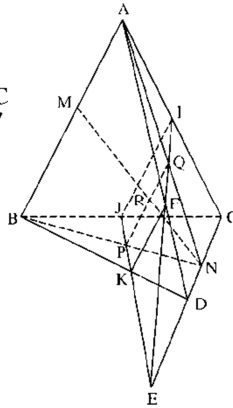
Câu 22: Chọn D. Trong (ACD) gọi $\{F\} = AD \cap CD \Rightarrow F = AD \cap (IJK)$ (Hình 2.31).

Câu 23: Chọn B. K là trọng tâm của $\Delta BCE \Rightarrow \frac{EK}{KJ} = 2$; F là trọng tâm của

$$\Delta ACE \Rightarrow \frac{EF}{FI} = 2 \Rightarrow \frac{EK}{KJ} = \frac{EF}{FI} = 2 \Rightarrow KF \parallel IJ. \text{ (Hình 14).}$$



Hình 13



Hình 14.31

Câu 24: Chọn D. $\{P\} = BN \cap JK$, $\{Q\} = AN \cap FI$. Trong (ABN) gọi $\{R\} = MN \cap PQ$.
Vậy $\{R\} = MN \cap (IJK)$. (Hình 12).

Câu 25: Chọn A. Thiết diện là tứ giác IJKF, mà $IJ \parallel KF$ nên thiết diện là hình thang.
(Hình 14).

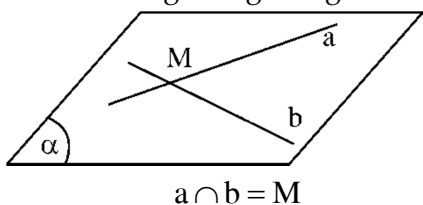
Bài 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

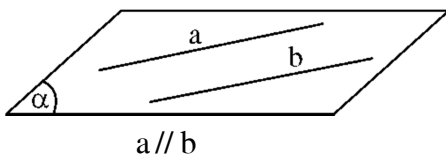
1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian:

a) Trường hợp 1: có một mặt phẳng chứa a và b

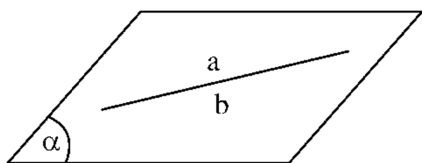
- + Hai đường thẳng cắt nhau.
- + Hai đường thẳng song song với nhau.
- + Hai đường thẳng trùng nhau.



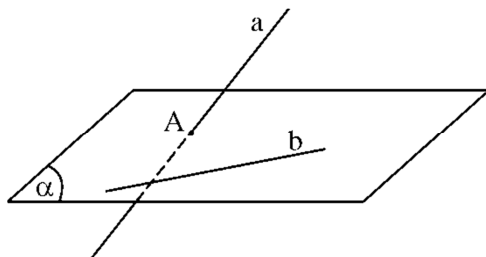
$$a \cap b = M$$



$$a // b$$



$$a \equiv b$$



a và b chéo nhau

b) Trường hợp 2: không có mặt phẳng nào chứa a và b. Ta nói a và b chéo nhau hay a chéo với b.

2. Tính chất:

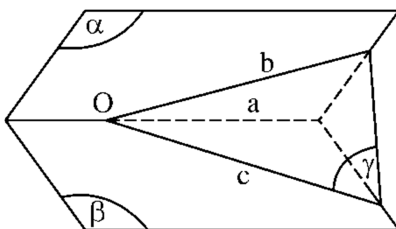
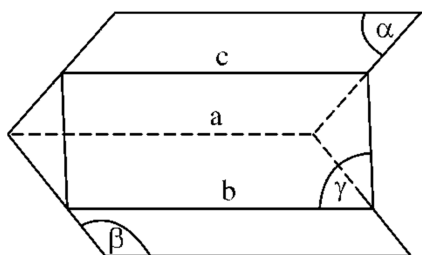
a) Định lý 1:

- + Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.



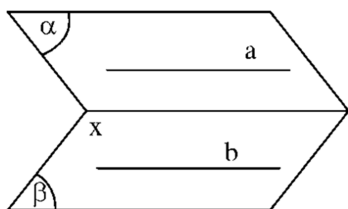
b) Định lý 2: (Về giao tuyến của ba mặt phẳng)

- + Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.



c) Hệ quả:

- + Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



$$\begin{cases} a // b \\ a \in (\alpha) \\ b \in (\beta) \\ x = (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow x // a // b$$

d) Định lý 3:

- + Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1:

CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

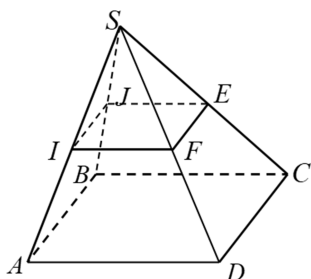
Phương pháp:

Có thể sử dụng 1 trong các cách sau:

1. Chứng minh 2 đường thẳng đó đồng phẳng, rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (như tính chất đường trung bình, định lý Talét đảo, ...)
2. Chứng minh 2 đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba.
3. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.
4. Áp dụng định lý về giao tuyến song song.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Chứng minh: $IJ // EF$.

Lời giải



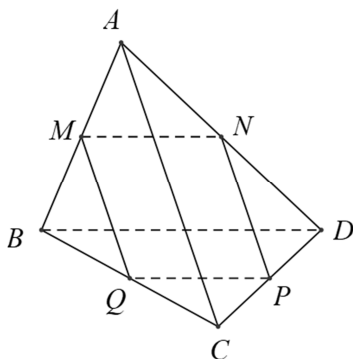
Ta có IJ là đường trung bình tam giác SAB nên $IJ \parallel AB$.

$ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$. Suy ra $IJ \parallel CD$.

EF là đường trung bình tam giác SCD nên $EF \parallel CD$. Suy ra $IJ \parallel EF$.

Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, CD, BC . Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.

Lời giải



Có MN, PQ lần lượt là đường trung bình tam giác ABD, BCD nên

$$\begin{cases} MN \parallel BD, MN = \frac{1}{2}BD \\ PQ \parallel BD, PQ = \frac{1}{2}BD \end{cases}.$$

Nên $MN \parallel PQ, MN = PQ$

$\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

DẠNG 2:

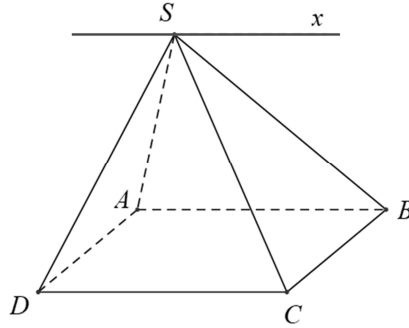
**TÌM GIAO TUYẾN HAI MẶT PHẶNG
CHỨA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG**

Phương pháp:

Áp dụng hệ quả định lí 2.

Ví dụ 1: Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm S không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

Lời giải



Do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Sx = (SAB) \cap (SCD) \\ Sx \parallel AB \parallel CD \end{cases}$$

Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$. I và J theo thứ tự là trung điểm của AD và AC , G là trọng tâm tam giác BCD . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) . Tìm thiết diện của mặt phẳng (GIJ) với hình chóp $A.BCD$. Thiết diện là hình gì?

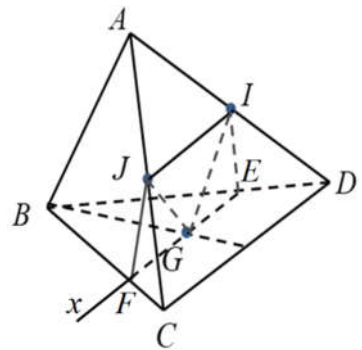
Lời giải

IJ là đường trung bình $\triangle ACD$ nên $IJ \parallel CD$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} IJ \parallel CD \\ IJ \subset (GIJ) \\ CD \subset (BCD) \\ G \in (IJG) \cap (BCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Gx = (GIJ) \cap (BCD) \\ Gx \parallel IJ \parallel CD \end{cases}$$

Trong (BCD) gọi E, F lần lượt là giao điểm của Gx với BD và BC .

Tứ giác $IJFE$ có $IJ \parallel FE$ nên là hình thang.



Ta có:
$$\begin{cases} IJ = (GIJ) \cap (ACD) \\ JE = (GIJ) \cap (ABD) \\ EF = (GIJ) \cap (BCD) \\ FJ = (GIJ) \cap (ABC) \end{cases}.$$

Tìm thiết diện của mặt phẳng (GIJ) với hình chóp $A.BCD$ là hình thang $IJFE$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông. Trên các cạnh BC, AD, SD lần lượt lấy các điểm M, N, P di động sao cho :

$$\frac{BM}{BC} = \frac{AN}{AD} = \frac{SP}{SD}.$$

- Tìm $(MNP) \cap (SCD)$.
- Gọi $Q = SC \cap (MNP)$. Xét hình tính tứ giác MNPQ.
- Tìm tập hợp giao điểm I của MQ và NP.
- Chứng minh $SB \parallel MQ$.

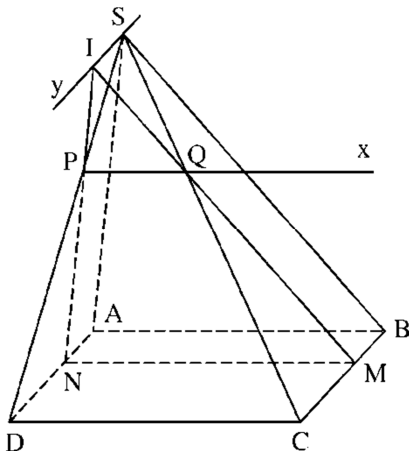
Lời giải

- a) Ta có: $\frac{BM}{BC} = \frac{AN}{AD}$ mà $BC = AD$
 $\Rightarrow BM = AN$
 $\Rightarrow$ tứ giác ANMB là hình bình hành
 $\Rightarrow AB \parallel MN$.

Ta có: $\begin{cases} P \in (MNP) \\ P \in SD \subset (SCD) \end{cases}$

$$\Rightarrow P \in (MNP) \cap (SCD)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \text{MN} // \text{DC} (\text{MN} // \text{AB}, \text{AB} // \text{DC}) \\ \text{MN} \subset (\text{MNP}) \\ \text{DC} \subset (\text{SCD}) \\ \text{P} \in (\text{MNP}) \cap (\text{SCD}) \end{cases}$$



Vậy giao tuyến của (MNP) và (SCD) là đường thẳng P_x qua P và song song với DC.

- b) Trong (SCD) gọi $Q = P_x \cap SC \Rightarrow Q = SC \cap (MNP)$

Vậy tứ giác MNPQ có $MN \parallel PQ$ ($MN \parallel DC$, $PQ \parallel DC$) nên tứ giác MNPQ là hình thang.

- c) Trong (MNPQ) gọi $\{I\} = MQ \cap NP$

$$\text{Ta có } \begin{cases} AD // BC & (\text{ABCD là hình vuông}) \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ S \in (SAD) \cap (SBC) \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của (SAD) và (SBC) là đường thẳng S_y qua S và song song với AD và BC.

$$\text{Ta lại có: } \begin{cases} I \in PN \subset (SAD) \\ I \in QM \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAD) \cap (SBC) \Rightarrow I \in S_y$$

Vậy giao điểm I của MQ và NP di động trên giao tuyến S_y của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC)

$$\text{d) Xét } \triangle SDC \text{ ta có } PQ // DC \Rightarrow \frac{SQ}{SC} = \frac{SP}{SD} \text{ (định lý thales)}$$

$$\text{mà } \frac{SP}{SD} = \frac{AN}{AD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{SQ}{SC} = \frac{BM}{BC}$$

$$\text{Vậy xét } \triangle SBC \text{ ta có } \frac{SQ}{SC} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow QM // SB \text{ (định lý thales đảo)}$$

DẠNG 2:

XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN QUA MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

Phương pháp :

Áp dụng hệ quả định lý 2.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành tâm O.

a) Gọi (α) là mặt phẳng qua DC cắt SA và SB tại M, N. Chứng minh CDMN là hình thang.

b) Gọi I là giao điểm của MC và DN. Chứng minh S, I, O thẳng hàng.

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} MN = (\alpha) \cap (SAB) \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (\alpha) \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow MN // AB // CD$$

Vậy tứ giác CDMN là hình thang

b) Ta có:

$$\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$$

$$S \in (SAC) \cap (SBD)$$

$$\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$$

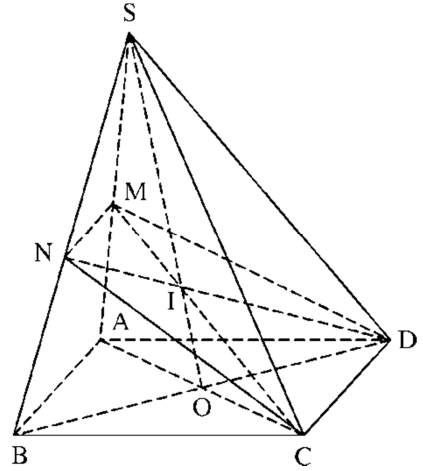
Lại có :

$$\begin{cases} I \in MC \subset (SAC) \\ I \in ND \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD)$$

$$\Rightarrow I \in SO$$

$$\Rightarrow S, I, O \text{ thẳng hàng.}$$



C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành.

- Xác định giao tuyến của (SAB) và (SCD) ; (SAD) và (SBC) .
- Gọi $M \in SC$, tìm giao tuyến của (ABM) và (SCD) .
- Gọi $N \in SB$, tìm giao tuyến của (SAB) và (NCD) .

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là một hình bình hành tâm O. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của SB và SD.

- Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD) .
- Tìm giao điểm J của SA với (CKB) .
- Tìm giao tuyến của (OIA) và (SCD) .
- Chứng minh $DC \parallel (IJK)$.

Bài 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của SA và SC, G là trọng tâm của tam giác ABC.

- Tìm giao tuyến của (GHK) và $(ABCD)$.
- Tìm giao điểm M của SD và (GHK) .
- Gọi E trung điểm của HK. Chứng minh G, E, M thẳng hàng.

Bài 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một hình tứ giác lồi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và CD. Gọi (α) là mặt phẳng qua M, N và song song với đường thẳng AC.

- Tìm giao tuyến của (α) với $(ABCD)$.

- b) Tìm giao điểm của đường thẳng SB với mặt phẳng (α) .
- c) Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) .

Bài 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang (AD là đáy lớn, BC là đáy nhỏ). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SD. K là giao điểm của các đường thẳng AB và CD.

- a) Tìm giao điểm M của đường thẳng SB và mặt phẳng (CDE) .
- b) Đường thẳng SC cắt mặt phẳng (EFM) tại N. Tứ giác EFNМ là hình gì?
- c) Chứng minh các đường thẳng AM, DN, SK đồng quy.
- d) Cho biết $AD = 2BC$. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác KMN và KEF.

Bài 6: Hình chóp S.ABCD có O là tâm của hình bình hành ABCD, điểm M thuộc cạnh SA sao cho $SM = 2MA$, N là trung điểm của AD.

- a) Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (SAD) và (MBC) .
- b) Tìm giao điểm I của SB và (CMN) ; giao điểm J của SA và (ICD) .
- c) Chứng minh ID, JC và SO đồng quy tại E. Tính tỉ số $\frac{SE}{SO}$.

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang (AD là đáy lớn, BC là đáy nhỏ). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SD. K là giao điểm của các đường thẳng AB và CD.

- a) Tìm giao điểm M của đường thẳng SB và mặt phẳng (CDE) .
- b) Đường thẳng SC cắt mặt phẳng (EFM) tại N. Tứ giác EFNМ là hình gì?
- c) Chứng minh các đường thẳng AM, DN, SK đồng quy.
- d) Cho biết $AD = 2BC$. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác KMN và KEF.

Bài 8: Cho tứ diện ABCD. Gọi M là trung điểm của CD, I là một điểm thuộc cạnh AD thỏa $IA = 3ID$; (α) là mặt phẳng qua M, (α) song song với CI và BD; (α) cắt các cạnh AD; AB; BC lần lượt tại N; P; Q.

- a) Chứng minh $MN \parallel CI$.
- b) MNPQ là hình gì?
- c) Gọi R là giao điểm của MP và NQ. Tính $\frac{RP}{RM}$ và $\frac{RN}{RQ}$.

d) Khi I di động trên cạnh AD. Chứng minh R chạy trên một đường thẳng cố định.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm khẳng định đúng :

- A) Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- B) Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng chỉ có duy nhất một mặt phẳng song song với đường thẳng đã cho.
- C) Cho hai đường thẳng song song. Tồn tại vô số hai cặp mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó song song với nhau.
- D) Cho hai đường thẳng chéo nhau. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và cắt đường thẳng kia.

Câu 2: Các khẳng định sau đúng hay sai ?

	Đúng	Sai
A) $\begin{cases} a // b \\ a \subset (\alpha) \\ b \subset (\beta) \\ c = (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow a // b // c$	☐	☐
B) $\begin{cases} a = (\alpha) \cap (\beta) \\ b = (\beta) \cap (\gamma) \\ c = (\alpha) \cap (\gamma) \\ M = a \cap b \end{cases} \Rightarrow M \notin c$	☐	☐
C) $A \notin a \Rightarrow \exists! (\alpha): \begin{cases} A \in (\alpha) \\ a // (\alpha) \end{cases}$	☐	☐
D) $\begin{cases} a \text{ và } b \text{ chéo nhau} \\ c \text{ cắt } a \text{ và } b \\ d \text{ cắt } a \text{ và } b \end{cases} \Rightarrow d \equiv c$	☐	☐

Câu 3: Xét các khẳng định sau :

- A: "Hai đường thẳng không chéo nhau thì đồng phẳng".
- B: "Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau".
- C: "Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau".
- D: "Hai đường thẳng cùng chéo nhau với đường thẳng thứ ba thì đồng phẳng".

Chọn khẳng định đúng :

A) D đúng; A, B, C sai

B) B đúng; A, C, D sai

C) A đúng; B, C, D sai

D) C đúng; A, B, D sai

Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, $AB \parallel CD$. Gọi I là giao điểm của AD và BC, O là giao điểm của AC và BD. Hãy nối một ý ở vế trái với một ý ở vế phải để được khẳng định đúng :

A)	$(SAD) \cap (SBC) =$
B)	$(SAC) \cap (SBD) =$
C)	$(SAB) \cap (SCD) =$
D)	$(SOB) \cap (SAI) =$

1)	$Sx, Sx \parallel AB \parallel CD$
2)	SI
3)	SO
4)	SA
5)	SD

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O. Gọi M là một điểm bất kỳ trên SC. Hãy nối một ý ở vế trái với một ý ở vế phải để được đẳng thức đúng:

A)	$(SAB) \cap (SCD) =$
B)	$(SAC) \cap (SBD) =$
C)	$(SAD) \cap (SBC) =$
D)	$(MAD) \cap (SBC) =$

1)	$Sx, Sx \parallel AD \parallel BC$
2)	$Sy, Sy \parallel AB \parallel CD$
3)	$Mz, Mz \parallel AD \parallel BC$
4)	SO
5)	$Mt, Mt \parallel AC \parallel BD$

Cho hình chóp S ABCD có đáy ABCD là hình bình hành.gọi H,K,I,J lần lượt là trung điểm của SA,SB,SC,SD. Dùng giả thiết trên để giải câu 6 và 7.

Câu 6: Tứ giác HKIJ là

A) Hình thang

B) Hình bình hành

C) Hình chữ nhật

D) Tứ giác lồi

Câu 7: Gọi O là tâm hình bình hành ABCD. Mặt phẳng (OHK) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì ?

A) Hình thang

B) Hình bình hành

C) Hình chữ nhật

D) Tứ giác

Cho hình chóp S ABCD có đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AB gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB. Dùng giả thiết trên để giải câu 8, 9 và 10.

Câu 8: Giao điểm P của SC với (AND) là:

- A) Giao điểm của SC và AN B) Giao điểm của SC và DN
C) Giao điểm của SC và đường thẳng đi qua N và giao điểm của AD và BC
D) Giao điểm của SC và đường thẳng đi qua D và giao điểm của BM và AN

Câu 9: Gọi I là giao điểm của AN và DP tìm khẳng định đúng:

- A) SI // AB B) SI // AD C) SI // BC D) SI // AC

Câu 10: Tứ giác SABI là:

- A) Hình thang B) Tứ giác lồi
C) Hình bình hành D) Hình thoi

Câu 11: Cho tứ diện ABCD gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD AC, BD. Tìm khẳng định sai?

- A) Tứ giác MQNP là hình bình hành
B) Tứ giác MRNS là hình bình hành
C) Tứ giác RQSP là hình bình hành
D) Tứ giác MRSP là hình bình hành

Câu 12: Với giả thiết như bài 11 gọi O là giao điểm của MN và PQ các khẳng định sau đúng hay sai

	Đúng	Sai
A) O là trung điểm SR	☐	☐
B) $O \in (MRD)$	☐	☐
C) $O \in (ABD)$	☐	☐
D) $O \in (MRS)$	☐	☐

Cho hình chóp S ABCD có đáy ABCD là hình vuông. Trên các cạnh BC, AD, SD lần lượt lấy các điểm M, N, P di động sao cho $\frac{BM}{BC} = \frac{AN}{AD} = \frac{SP}{SD}$.

Dùng giả thiết trên để giải các câu 13,14 và 15.

Câu 13: Giao tuyến của (MNP) và (SCD) là đường thẳng:

- A) Đi qua P và giao điểm 2 đường thẳng SC và MN

- B) Đi qua P và song song AD
 C) Đi qua P và song song CD
 D) Đi qua P và giao điểm 2 đường thẳng SC và PM

Câu 14: Qua P kẻ đường thẳng song song CD cắt SC tại Q. Gọi I là giao điểm của MQ và NP quỹ tích điểm I là:

- A) Nửa đường thẳng B) Đường thẳng
 C) Tập hợp rỗng D) Đoạn thẳng song song với AD

Câu 15: Các khẳng định sau đây đúng hay sai

	Đúng	sai
A) $QM \parallel SB$	☐	☐
B) QM cắt SB	☐	☐
C) $QM = \frac{1}{2}SB$	☐	☐
D) QM và SB chéo nhau	☐	☐

Cho tứ diện ABCD có M, N lần lượt là trung điểm AB, AC. Mặt phẳng (α) chứa MN cắt CD, BD lần lượt tại E, F. Dùng giả thiết trên để giải các câu 16 và 17.

Câu 16: Tứ giác MNEF là hình gì ?

- A) Tứ giác lồi B) Hình bình hành
 C) Hình thoi D) Hình thang

Câu 17: Tìm điều kiện để MNEF là hình bình hành . Các khẳng định sau đúng hay sai?

	Đúng	sai
A) E là trung điểm CD	☐	☐
B) $AD \parallel MF$	☐	☐
C) $EF = \frac{2}{3}BC$	☐	☐
D) E nằm ngoài đoạn DC	☐	☐

Cho hai hình vuông ABCD và ABEF có chung cạnh AB và không cùng nằm trên một mặt phẳng. M nằm trên đường chéo AC và N nằm trên đường chéo BF và $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$. Dùng giả thiết trên để giải câu 18 và 19.

Câu 18: Gọi I là trung điểm AB các khẳng định sau đúng hay sai

	Đúng	Sai
A) $I \in DM, MD = 2MI$	☐	☐
B) $I \in NE, IN = 2NE$	☐	☐
C) DN, EM, AB đồng quy tại I	☐	☐
D) EN, DM, AB đồng quy tại I	☐	☐

Câu 19: Tìm khẳng định đúng

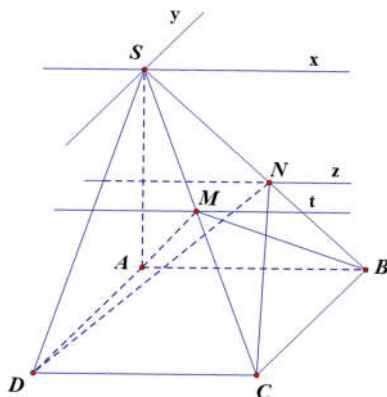
- | | |
|----------------------|----------------------|
| A) $MN \parallel CE$ | B) $MN \parallel DE$ |
| C) $MN \parallel DF$ | D) $MN \parallel CF$ |

E. HƯỚNG DẪN GIẢI



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:



a) Tứ giác ABCD là hình bình hành nên $AB \parallel CD; AD \parallel BC$.

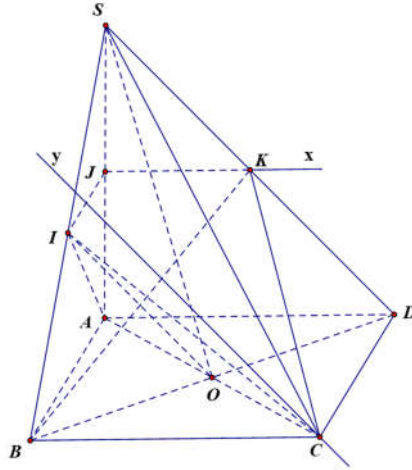
$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Sx = (SAB) \cap (SCD) \\ Sx \parallel AB \parallel CD \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ S \in (SAD) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Sx = (SAD) \cap (SBC) \\ Sx \parallel AD \parallel BC \end{cases}.$$

$$\text{b) Ta có: } \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \subset (MAB) \\ CD \subset (SCD) \\ M \in (MAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Mt = (MAB) \cap (SCD) \\ Mt \parallel AB \parallel CD \end{cases}.$$

$$\text{c) Ta có: } \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (NCD) \\ N \in (SAB) \cap (NCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Nz = (SAB) \cap (NCD) \\ Nz \parallel AB \parallel CD \end{cases}.$$

Bài 2:



$$\text{a) } \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAB) \cap (SCD); S \in (SAB) \cap (SCD) \\ \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD).$$

b) Tứ giác ABCD là hình bình hành nên $AB \parallel CD; AD \parallel BC$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AD \parallel CB \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ K \in (KBC) \cap (SAD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Kx = (KBC) \cap (SAD) \\ Kx \parallel AD \parallel BC \end{cases}.$$

Trong (SAD) gọi $J = Kx \cap SA$,

$$\text{có } \begin{cases} J \in SA \\ J \in Kx \subset (BKC) \end{cases} \Rightarrow J = SA \cap (BKC)$$

c) Có OI là đường trung bình của $\triangle SBD \Rightarrow OI \parallel SD$.

$$\text{Ta có : } \begin{cases} OI \parallel SD \\ OI \subset (OIA) \\ SD \subset (SCD) \\ C \in (OIA) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Cy = (OIA) \cap (SCD) \\ Cy \parallel SD \parallel OI \end{cases}.$$

d) Ta có

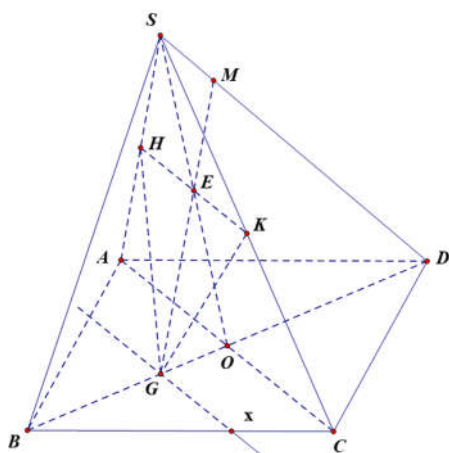
$IJ \parallel AB$ (IJ là đường trung bình của $\triangle SAB$)

$AB \parallel CD$ (tứ giác $ABCD$ là hình bình hành)

$\Rightarrow CD \parallel IJ$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} CD \parallel IJ \\ CD \not\subset (IJK) \Rightarrow CD \parallel (IJK). \\ IJ \subset (IJK) \end{cases}$$

Bài 3:



a) HK là đường trung bình của $\triangle SAC$ nên $HK \parallel AC$.

$$\text{Ta có : } \begin{cases} HK \parallel AC \\ HK \subset (GHK) \\ AC \subset (ABCD) \\ G \in (GHK) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Gx = (GHK) \cap (ABCD) \\ Gx \parallel AC \parallel HK \end{cases}.$$

b) Trong $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD$. Trong (SAC) gọi $E = HK \cap SO$.

Trong (SBD) gọi $M = GE \cap SD$.

$$\text{Ta có : } \begin{cases} M \in SD \\ M \in GE \subset (GHK) \end{cases} \Rightarrow M = SD \cap (GHK).$$

c) Từ cách tìm giao tuyến của câu b) suy ra 3 điểm G, E, M thẳng hàng.

Bài 4:

$$a) \text{ Có } \begin{cases} N \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha) // AC \subset (ABCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = NE // AC; E \in AD.$$

b) Có MN là đường trung bình của $\triangle SCD \Rightarrow MN // SD$.

Trong mp(ABCD) gọi $F = BD \cap NE$.

$$\text{Có } \begin{cases} F \in (\alpha) \cap (SBD) \\ MN // SD; MN \subset (\alpha), SD \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha) \cap (SBD) = Fx // MN // SD$$

$$\text{Trong mp(SBD) gọi } H = Fx \cap SB, \text{ vì } \begin{cases} H \in SB \\ H \in Fx \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow H = SB \cap (\alpha).$$

$$c) \text{ Có } \begin{cases} E \in (\alpha) \cap (SAD) \\ MN // SD; MN \subset (\alpha), SD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = EK // SD; K \in SA.$$

Từ đó suy ra thiết diện cần tìm là ngũ giác MNEKH.

Bài 5:

a) Có $SK = (SAB) \cap (SCD)$.

Trong mp(SAB), gọi $M = KE \cap SB$, có $KE \subset (CDE)$.

Do đó $SB \cap (CDE) = M$.

b) Trong mp(SCD), gọi $N = KF \cap SC$, có $KF \subset (EFM)$.

Do đó $SC \cap (EFM) = N$.

$$\text{Có } \begin{cases} MN = (EFK) \cap (SBC) \\ EF // BC; EF \subset (EFK), BC \subset (SBC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow MN // EF // BC.$$

Suy ra tứ giác EFMN là hình thang.

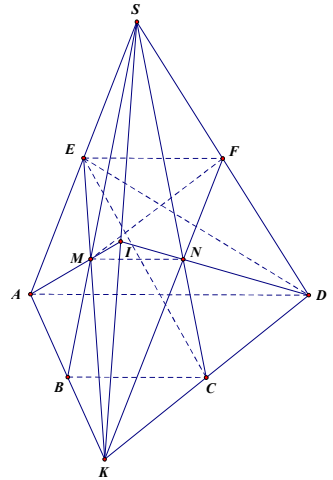
c) Trong mp(ADNM), gọi $I = AM \cap DN$. Mà

$$\begin{cases} I \in AM, AM \subset (SAB) \\ I \in DN, DN \subset (SCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$, hay $I \in SK$. Kết luận 3 đường thẳng AM, DN, SK đồng quy tại điểm I.

d) Khi $AD = 2BC$ dễ dàng chứng minh được B, C lần lượt là trung điểm của KA và KD. Suy ra M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác SAK và SDK.

Do đó $MN = \frac{2}{3}EF$, gọi h_1, h_2 lần lượt là độ dài



đường cao xuất phát từ đỉnh K xuống hai đáy MN và EF dễ thấy $h_1 = \frac{2}{3}h_2$. Vậy

$$\frac{S_{\Delta KMN}}{S_{\Delta KEF}} = \frac{\frac{1}{2}MN \cdot h_1}{\frac{1}{2}EF \cdot h_2} = \frac{\frac{2}{3}EF \cdot \frac{2}{3}h_2}{EF \cdot h_2} = \frac{4}{9}.$$

Bài 6:

a) Có $\begin{cases} M \in (SAD) \cap (MBC) \\ AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD); BC \subset (MBC) \end{cases}$
 $\Rightarrow (SAD) \cap (MBC) = Mx \parallel AD \parallel BC$

b) Trong mp(ABCD) gọi $L = CN \cap AB$. Suy ra LM là giao tuyến của hai mặt phẳng (CMN) và (SAB), điểm I cần tìm là giao điểm của LM và SB.

Có $\begin{cases} I \in (ICD) \cap (SAB) \\ CD \parallel AB \\ CD \subset (ICD); AB \subset (SAB) \end{cases}$
 $\Rightarrow (ICD) \cap (SAB) = Iy \parallel CD \parallel AB$

Điểm J cần tìm là giao điểm của Iy với SD.

c) Có $SO = (SAC) \cap (SBD)$. Trong mp(ICD) gọi $E = JC \cap ID$, có

$$\begin{cases} E \in JC \subset (SAC) \\ E \in ID \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow E \in (SAC) \cap (SBD), \text{ hay } E \text{ thuộc } SO.$$

Có AN là đường trung bình của tam giác LBC, nên A trung điểm của LB. Trong tam giác SBL có SA là đường trung tuyến và $SM = \frac{2}{3}SA \Rightarrow M$ là trọng tâm của tam giác SBL.

Nên I trung điểm của SB.

Trong tam giác SBD có E là trọng tâm của tam

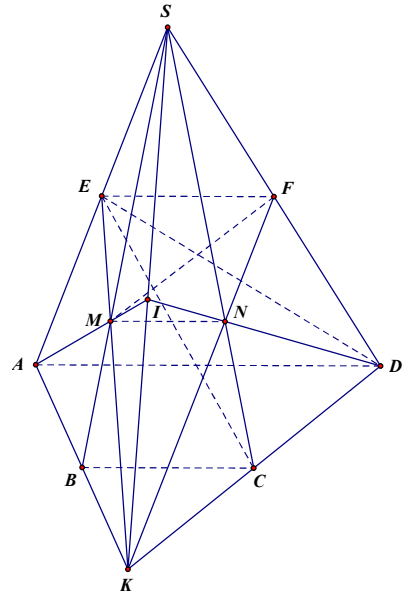
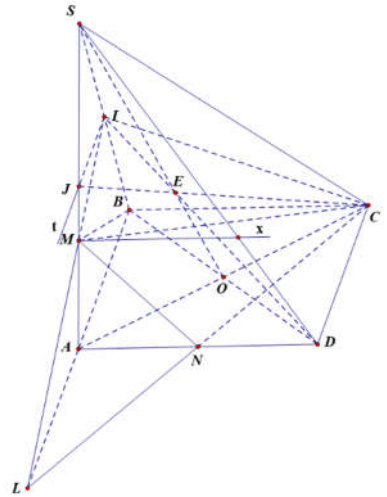
giác. Do đó $\frac{SE}{SO} = \frac{2}{3}$.

Bài 7.

a) Có $SK = (SAB) \cap (SCD)$.

Trong mp(SAB), gọi $M = KE \cap SB$, có $KE \subset (CDE)$. Do đó $SB \cap (CDE) = M$.

b) Trong mp(SCD), gọi $N = KF \cap SC$, có $KF \subset (EFM)$. Do đó $SC \cap (EFM) = N$.



$$\text{Có } \begin{cases} MN = (EFK) \cap (SBC) \\ EF \parallel BC; EF \subset (EFK), BC \subset (SBC) \end{cases} \\ \Rightarrow MN \parallel EF \parallel BC.$$

Suy ra tứ giác EFNМ là hình thang.

- c) Trong mp(ADNM), gọi $I = AM \cap DN$. Mà $\begin{cases} I \in AM, AM \subset (SAB) \\ I \in DN, DN \subset (SCD) \end{cases}$
 $\Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$, hay $I \in SK$. Kết luận 3 đường thẳng AM, DN, SK đồng quy tại điểm I.
- d) Khi $AD = 2BC$ dễ dàng chứng minh được B, C lần lượt là trung điểm của KA và KD. Suy ra M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác SAK và SDK. Do đó $MN = \frac{2}{3}EF$, gọi h_1, h_2 lần lượt là độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh K xuống

$$\text{hai đáy MN và EF dễ thấy } h_1 = \frac{2}{3}h_2. \text{ Vậy } \frac{S_{\Delta KMN}}{S_{\Delta KEF}} = \frac{\frac{1}{2}MN \cdot h_1}{\frac{1}{2}EF \cdot h_2} = \frac{\frac{2}{3}EF \cdot \frac{2}{3}h_2}{EF \cdot h_2} = \frac{4}{9}.$$

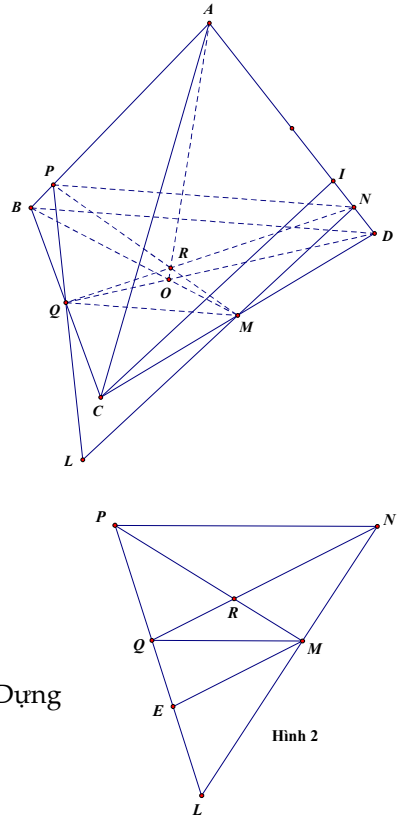
Bài 8:

- a) Có $\begin{cases} MN = (\alpha) \cap (ACD) \\ (\alpha) \parallel CI \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel CI;$
 $\begin{cases} NP = (\alpha) \cap (ABD) \\ (\alpha) \parallel BD \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow NP \parallel BD \quad (1) \text{ và}$
 $\begin{cases} MQ = (\alpha) \cap (BCD) \\ (\alpha) \parallel BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel BD \quad (2).$
- b) Từ (1) và (2) suy ra $NP \parallel MQ$. Kết luận tứ giác MNPQ là hình thang.
- c) Áp dụng định lý Ta lét trong hai tam giác ABD và CBD được:
- $$\frac{PN}{BD} = \frac{AN}{AD} = \frac{7}{8} \Rightarrow PN = \frac{7}{8}BD;$$
- $$\frac{QM}{BD} = \frac{CM}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow QM = \frac{1}{2}BD, \quad \text{do đó}$$
- $$\frac{PN}{QM} = \frac{7}{4}.$$

Trong mp(MNPQ) gọi $L = MN \cap PQ$.

Mặt phẳng (MNPQ) được vẽ lại ở hình 2. Dựng $EM \parallel NQ, (E \in PQ)$, có

$$\frac{LE}{LQ} = \frac{LM}{LN} = \frac{LQ}{LP} = \frac{MQ}{NP} = \frac{4}{7}.$$



Vì $\frac{LE}{LQ} = \frac{4}{7} \Rightarrow QE = \frac{3}{7}LQ$; $\frac{LQ}{LP} = \frac{4}{7} \Rightarrow LQ = \frac{4}{7}LP$ và

$\frac{QP}{LP} = \frac{3}{7}$. Ngoài ra $\frac{RP}{RM} = \frac{QP}{QE} = \frac{7}{4}$.

Chứng minh hoàn tương tự được $\frac{RN}{RQ} = \frac{7}{4}$.

d) Gọi $O = BM \cap DQ$, vì M, Q lần lượt trung điểm của CD và BC nên hai điểm này cố định. Suy ra O cố định, có $SO = (ABM) \cap (ADQ)$.

Có $R = MP \cap QN \Rightarrow \begin{cases} R \in MP \subset (ABM) \\ R \in QN \subset (ADQ) \end{cases} \Rightarrow R \in (ABM) \cap (ADQ)$ hay $R \in SO$ cố định. Vậy khi I chạy trên đoạn thẳng AD thì R chạy trên đoạn thẳng AO cố định.

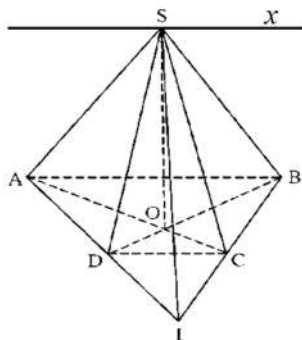


BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

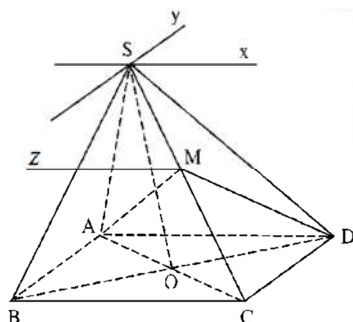
1.C	2.	A.Đ	B.S	C.Đ	D.Đ	3.C	4.	A.2	B.3
C.1	D.5	5.	A.2	B.4	C.1	D.3	6.B	7.A	8.C
9.A	10.C	11.D	12.	A.Đ	B.S	C.S	D.Đ	13.C	14.D
15.	A.Đ	B.S	C.S	D.S	16.D	17.	A.Đ	B.Đ	C.S
D.S	18.	A.Đ	B.S	C.S	D.Đ	19.B			

Câu 4: (Hình 1). $(SAD) \cap (SBC) = SI$; $(SAC) \cap (SBD) = SO$;

$(SAB) \cap (SCD) = Sx, Sx \parallel AB \parallel CD$; $(SOB) \cap (SAI) = SD$



Hình 1



Hình 2

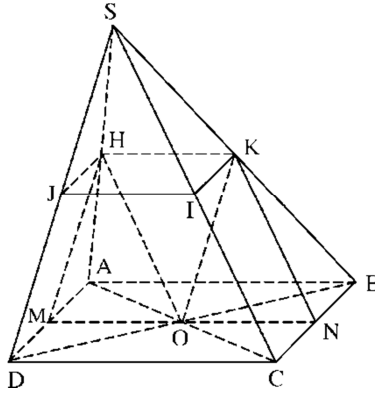
Câu 5: (Hình 2). $(SAB) \cap (SCD) = Sy, Sy \parallel AB \parallel CD$; $(SAC) \cap (SDB) = SO$

$(SAD) \cap (SBC) = Sx, Sx \parallel AD \parallel BC$; $(MAD) \cap (SBC) = Mz, Mz \parallel AD \parallel BC$

Câu 6: Chọn B. Hai đường thẳng HK, IJ lần lượt là hai đường trung bình của $\Delta SAB, \Delta SCD \Rightarrow HK \parallel IJ, HK = IJ \Rightarrow$ tứ giác HKIJ là hình bình hành.

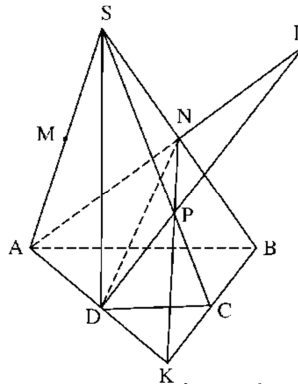
Câu 7: Chọn A. Mặt phẳng (OHK) và (ABCD) có chứa hai đường thẳng song song là HK và AB và có điểm O chung nên giao tuyến là đường thẳng qua O và song song với HK và AB cắt AD, BC tại M, N. Vậy thiết diện là hình thang HKNM.

Câu 8: Chọn C. Gọi $\{K\} = AD \cap BC$ trong (SBC) gọi $P = SC \cap NK \Rightarrow P = SC \cap (AND)$

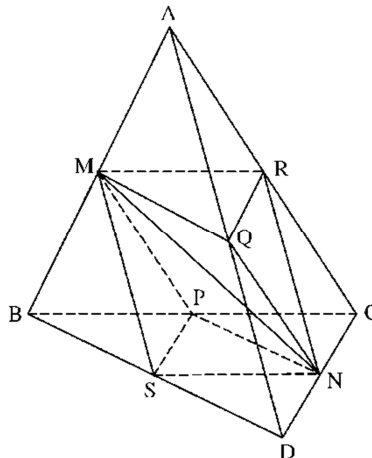


Câu 9: Chọn A. Mặt phẳng (SAB) và (SDC) chứa hai đường thẳng song song là AB và DC và có giao tuyến SI $\Rightarrow SI \parallel AB \parallel DC$.

Câu 10: Chọn C. Tứ giác SABI có N là trung điểm của hai đường chéo SB và AI nên là hình bình hành. (Hình 2.41).



Câu 11: Chọn D. Bốn điểm M, R, S, P không đồng phẳng nên tứ giác MRSP không là hình bình hành.



Câu 12: Tứ giác MQNP là hình bình hành nên O là trung điểm MN, PQ. Tứ giác MSNR là hình bình hành nên MN cắt SR tại trung điểm của mỗi đường nên O là trung điểm của SR.

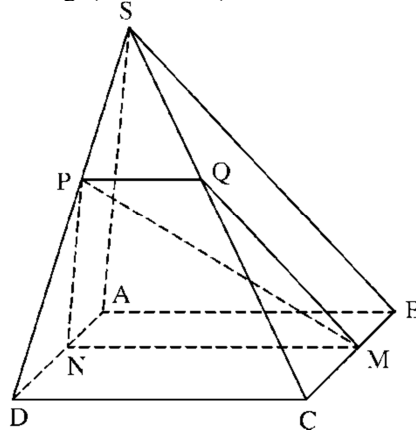
B) Hiển nhiên $O \notin (MRD)$

C) Hiển nhiên $O \notin (ABD)$

D) O là trung điểm SR $\Rightarrow O \in (MRS)$.

Câu 13: Chọn C. Mặt phẳng (MNP) và (SCD) có chung điểm P và chứa hai đường thẳng song song là MN và CD nên giao tuyến là đường thẳng đi qua P và song song với MN và CD. (Hình 2.43).

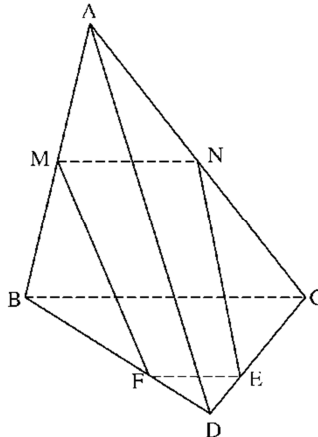
Câu 14: Chọn D. Ta dễ dàng thấy rằng $SI \parallel AD$ do N chỉ di động trên đoạn AD nên quỹ tích điểm I là một đoạn thẳng. (Hình 2.431).



Câu 15: Ta dễ dàng chứng minh được $QM \parallel SB$.

Câu 16: Chọn D. Mặt phẳng (MNEF) và (BCD) chứa hai đường thẳng song song là MN và BC có giao tuyến là EF nên $EF \parallel MN \parallel BC \Rightarrow$ tứ giác MNEF là hình thang.

Câu 17:



A) E là trung điểm CD thì MF và NE là đường trung bình của $\triangle ABD$ và $\triangle ACD \Rightarrow MF = NE = \frac{1}{2}AD, MF \parallel AD \Rightarrow$ tứ giác MNEF là hình bình hành.

B) $AC \parallel (MNEF)$ thì $MF \parallel NE \parallel AC \Rightarrow$ tứ giác MNEF là hình bình hành

C) Khi $EF = \frac{2}{3}BC$ thì E không là trung điểm DC do đó tứ giác MNEF không là hình bình hành.

D) Khi E nằm ngoài đoạn DC thì NE không song song AD do đó tứ giác MNEF không là hình bình hành.

Câu 18:

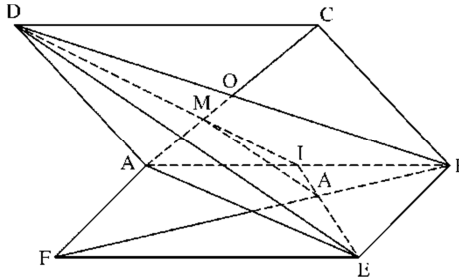
A) M là trọng tâm $\triangle DAB \Rightarrow MD = 2MI$

B) N là trọng tâm $\triangle ABE \Rightarrow NE = 2NI$

C) EM và AB chéo nhau nên EM, AB, DN không đồng quy tại I.

D) DM, EN, AB cắt nhau tại I nên chúng đồng quy tại I.

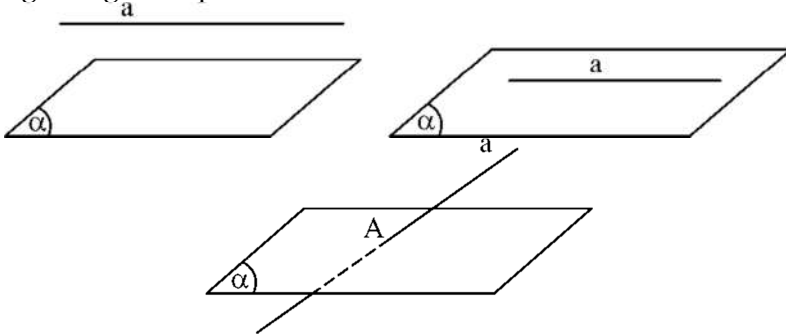
Câu 19: Chọn B. $\triangle IDE$ có $\frac{IM}{ID} = \frac{IN}{IE} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN \parallel DE$.



A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng:

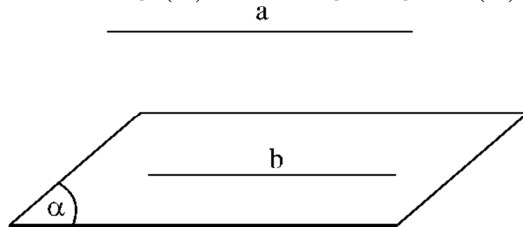
- + Đường thẳng song song với mp.
- + Đường thẳng nằm trong mp.
- + Đường thẳng cắt mp.



2. Tính chất:

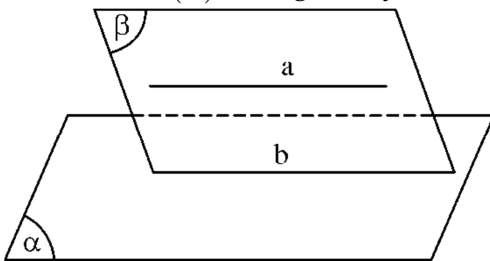
a) Định lý 1 :

Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (α) và a song song với đường thẳng b nằm trong (α) thì a song song với (α) .



b) Định lý 2 :

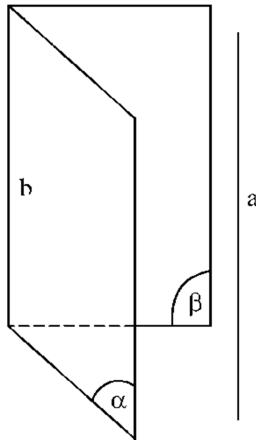
Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a .



$$\begin{cases} a // (\alpha) \\ a \subset (\beta) \\ b = (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow a // b$$

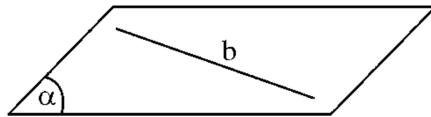
c) Hệ quả :

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



d) Định lý 3 :

Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



3. Lưu ý: Định lý Thales đảo:

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì nó song song với cạnh còn lại.

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1:

**CHỨNG MINH 2 ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG
ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG**

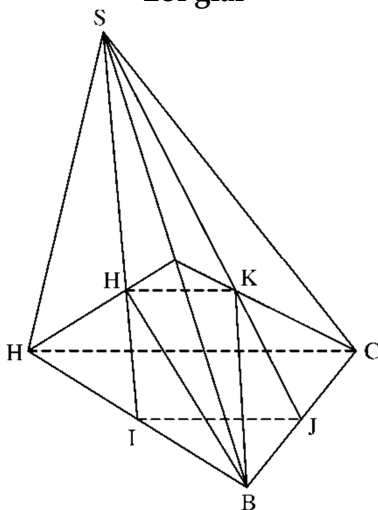
Phương pháp :

- Áp dụng định lý 2 và hệ quả của định lý 2 để chứng minh hai đường thẳng song song ngoài ra có thể dùng định lý thales đảo.
- Áp dụng định lý 1 để chứng minh đường thẳng song song mặt phẳng.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của ΔSAB và ΔSBC .

- a) Chứng minh : $AC \parallel (SIJ)$.
- b) Chứng minh : $HK \parallel (SAC)$.
- c) Tìm giao tuyến của (BHK) và (ABC) .

Lời giải



a) IJ là đường trung bình ΔHBC nên $IJ \parallel HC$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AC \parallel IJ \\ IJ \subset (SIJ) \Rightarrow AC \parallel (SIJ). \\ AC \not\subset (SIJ) \end{cases}$$

b) Ta có $\frac{SH}{HI} = \frac{SK}{KJ} = 2$ (H, K lần lượt là trọng tâm ΔSAB và ΔSAC)
 $\Rightarrow HK \parallel IJ$

$$\text{Lại có } \begin{cases} HK \parallel AC \quad (HK \parallel IJ, AC \parallel IJ) \\ AC \subset (SAC) \\ HK \not\subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow HK \parallel (SAC)$$

$$\text{c) Ta có } \begin{cases} HK \parallel AC \\ HK \subset (BHK) \\ AC \subset (ABC) \\ B \in (BHK) \cap (ABC) \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của (BHK) và (ABC) là đường thẳng Bx đi qua B và song song với AC và HK.

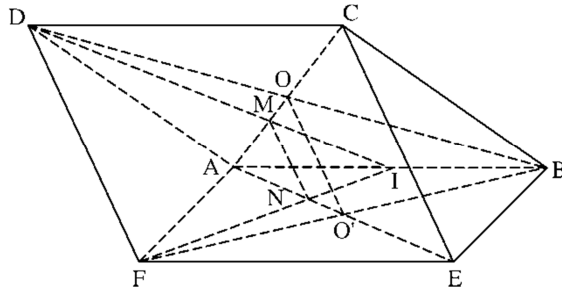
Ví dụ 2: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai hình vuông ABCD và ABEF.

a) Tìm $(BDF) \cap (ACE)$.

b) Chứng minh : $OO' \parallel (ADF)$ và (BCE) .

c) Gọi M và N là trọng tâm ΔABD và ΔABF . Chứng minh : $MN \parallel (DCEF)$.

Giải



a) Ta có $\begin{cases} O \in BD \subset (BDF) \\ O \in AC \subset (ACE) \end{cases} \Rightarrow O \in (BDF) \cap (ACE)$

Lại có $\begin{cases} O' \in BF \subset (BDF) \\ O' \in AE \subset (ACE) \end{cases} \Rightarrow O' \in (BDF) \cap (ACE)$

Vậy ta có $OO' = (BDF) \cap (ACE)$

b) OO' là đường trung bình $\triangle BDF$ nên $OO' \parallel DF$.

Ta có $\begin{cases} OO' \parallel DF \\ DF \in (ADF) \\ OO' \notin (ADF) \end{cases} \Rightarrow OO' \parallel (ADF)$

Chứng minh tương tự ta có $OO' \parallel (BCE)$

c) Gọi I là trung điểm AB

Ta có $\frac{IM}{ID} = \frac{IN}{IF} = \frac{1}{3}$ (M, N lần lượt là trọng tâm $\triangle ABD$ và $\triangle ABF$)

$\Rightarrow MN \parallel DF$

Ta có $\begin{cases} MN \parallel DF \\ DF \subset (CDFE) \\ MN \not\subset (CDFE) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (CDFE).$

DANG 2:

THIẾT DIỆN QUA MỘT ĐIỂM VÀ SONG SONG VỚI HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU CHO TRƯỚC

Phương pháp :

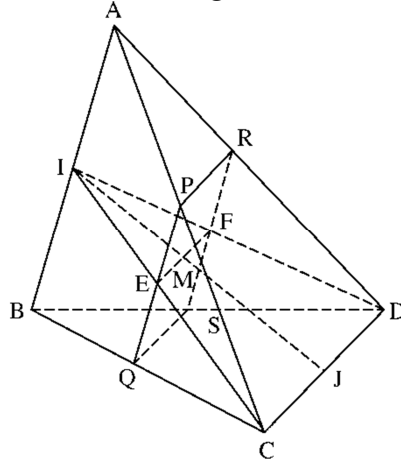
Áp dụng định lý 1 và định lý 2 để tìm thiết diện.

Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD có $AB = a$, $CD = b$. Đoạn IJ nối trung điểm I của AB và trung điểm J của CD. Giả sử AB vuông góc với CD. Gọi (α) là mặt phẳng qua M trên đoạn IJ và song song với AB và CD.

a) Tìm giao tuyến của (α) với mặt phẳng (ICD).

- b) Xác định thiết diện của ABCD với mặt phẳng (α) . Chứng minh thiết diện là hình chữ nhật.
- c) Tính diện tích hình chữ nhật nếu biết $IM = \frac{1}{3}IJ$.

Lời giải



- a) Ta có
$$\begin{cases} CD // (\alpha) \\ CD \in (ICD) \\ M \in (\alpha) \cap (ICD) \end{cases} \Rightarrow \text{giao tuyến của } (\alpha) \text{ và mặt phẳng } (ICD) \text{ là}$$

đường thẳng qua M song song CD cắt IC, ID tại E, F.

- b) Ta có
$$\begin{cases} AB // (\alpha) \\ AB \subset (ABC) \\ E \in (\alpha) \cap (ABC) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ giao tuyến của (α) với (ABC) là đường thẳng qua E song song AB cắt AC, BC lần lượt tại P và Q.

Chứng minh tương tự ta có giao tuyến của (α) và (ABD) là đường thẳng qua F song song AB cắt AD và BD lần lượt tại R và S.

Vậy thiết diện của hình chóp bị cắt bởi (α) là tứ giác RPQS

- Ta có
$$\begin{cases} CD // (\alpha) \\ CD \subset (ACD) \\ RP \in (\alpha) \cap (ACD) \end{cases} \Rightarrow RP // CD$$

Chứng minh tương tự ta có $SQ // CD$.

Vậy tứ giác RPQS có $SR // QP$ (cùng song song với AB)

$RP // SQ$ (cùng song song với CD) nên PRQS là hình bình hành

$$\text{Lại có } \begin{cases} QS \parallel CD \\ QP \parallel AB \Rightarrow QS \perp QP \Rightarrow \widehat{PQS} = 90^\circ \\ CD \perp AB \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hình bình hành PRSQ là hình chữ nhật

$$c) \Delta IJC \text{ có } ME \parallel JC \Rightarrow \frac{IM}{IJ} = \frac{IE}{IC} = \frac{1}{3} \text{ (hệ quả định lý Thales)}$$

$$\Delta ICD \text{ có } EF \parallel CD \Rightarrow \frac{EF}{CD} = \frac{IE}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow EF = \frac{b}{3} \Rightarrow SQ = \frac{b}{3}$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có } PQ = \frac{2}{3} AB = \frac{2a}{3}$$

$$\text{Vậy diện tích hình chữ nhật PRSQ là } QP \cdot QS = \frac{b}{3} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{2ab}{9}.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai hình bình hành ABCD và ABEF.

- Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).
- Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD và ABF. Chứng minh $GG' \parallel (DCEF)$.

Bài 2: Cho tứ diện ABCD, G là trọng tâm tam giác ABD. M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh $MG \parallel (ACD)$.

Bài 3: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và BCD. Chứng minh rằng $MN \parallel (ABD)$ và $MN \parallel (ACD)$.

Bài 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh BC; (α) là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD, cắt các cạnh BD, AD, AC lần lượt tại N, P, Q. Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành.

Bài 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là ABCD là hình bình hành; F, G lần lượt là trung điểm của AB và CD.

- Chứng minh rằng FG song song với các mặt phẳng (SAD) và (SBC).
- Gọi E là trung điểm của SA. Chứng minh rằng SB, SC song song với mặt phẳng (FGE).

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. (α) là mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh SB, song song với cạnh AB, cắt các cạnh SA, SD, SC lần lượt tại Q, P và N. Hãy xác định hình tính của tứ giác MNPQ?

Bài 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SD.

- a) Chứng minh $MN \parallel (SBC)$, $SB \parallel (OMN)$, $SC \parallel (OMN)$.
- b) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (OMN) . Thiết diện là hình gì?

Bài 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD , M là một điểm trên đoạn IJ . Gọi (P) là mặt phẳng qua M , song song với AB và CD .

- a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ICD) .
- b) Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P) . Thiết diện là hình gì?

Bài 9: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là hai điểm bất kì trên SB, CD . Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC .

- a) Tìm các giao tuyến của (P) với các mặt phẳng (SBC) , (SCD) , (SAC) .
- b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) .

Bài 10: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo. Cho M là trung điểm của SC .

- a) Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBA) .
- b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD) .

Bài 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và một điểm M di động trên cạnh AD . Một mặt phẳng (α) qua M , song song với CD và SA , cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q .

- a) $MNPQ$ là hình gì?
- b) Gọi $I = MQ \cap NP$. Chứng minh rằng I luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di động trên AD .

Bài 12: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AB . Gọi (α) là mặt phẳng qua M , song song với hai đường thẳng BC và AD . Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các cạnh AC, CD và DB .

- a) Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.
- b) Trong trường hợp nào thì $MNPQ$ là hình thoi?

Bài 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm của CD , (P) là mặt phẳng qua M song song với SA và BC . Tìm giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và (P) ?

- A) 2. B) 3. C) 1. D) 4.

Câu 2: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel b$, $b \parallel (\alpha)$. Khi đó:

- A) $a \parallel (\alpha)$. B) $a \subset (\alpha)$.
C) a cắt (α) . D) $a \parallel (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$.

Câu 3: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel (\alpha)$, $b \subset (\alpha)$. Khi đó:

- A) $a \parallel b$. B) a, b chéo nhau.
C) $a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau. D) a, b cắt nhau.

Câu 4: Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) . Giả sử $b \not\subset (\alpha)$.

Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A) Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$. B) Nếu b cắt (α) thì b cắt a .
C) Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.
D) Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b .

Câu 5: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A) a và b không có điểm chung.
B) a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.
C) a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.
D) a và b chéo nhau.

Câu 6: Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a và b . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A) Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b .
B) Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b .
C) Nếu (P) chứa a thì (P) cũng chứa b .
D) Các khẳng định A, B, C đều sai.

Câu 7: Cho $d \parallel (\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d' . Khi đó:

- A) $d \parallel d'$. B) d cắt d' . C) d và d' chéo nhau. D) $d \equiv d'$.

Câu 8: Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

- A) 1. B) 2. C) 3. D) Vô số.

Câu 9: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Khẳng định nào sau đây sai?

- A) Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b .
B) Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b .
C) Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M , song song với a và b (với M là điểm cho trước).
D) Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b .

Câu 10: Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c . Gọi (P) là mặt phẳng qua a , (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c . Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn yêu cầu trên?

- A) Một mặt phẳng (P) , một mặt phẳng (Q) .
B) Một mặt phẳng (P) , vô số mặt phẳng (Q) .
C) Một mặt phẳng (Q) , vô số mặt phẳng (P) .
D) Vô số mặt phẳng (P) và (Q) .

Câu 11: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A) $MN \parallel mp(ABCD)$. B) $MN \parallel mp(SAB)$.
C) $MN \parallel mp(SCD)$. D) $MN \parallel mp(SBC)$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N là hai điểm trên SA, SB sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}$. Vị trí tương đối giữa MN và $(ABCD)$ là:

- A) MN nằm trên $mp(ABCD)$. B) MN cắt $mp(ABCD)$.
C) MN song song $mp(ABCD)$. D) MN và $mp(ABCD)$ chéo nhau.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , Q thuộc cạnh AB sao cho $AQ = 2QB$, P là trung điểm của AB . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A) $MN \parallel (BCD)$. B) $GQ \parallel (BCD)$.
C) MN cắt (BCD) . D) Q thuộc mặt phẳng (CDP) .

Câu 14: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của $ABCD, ABEF$. M là trung điểm của CD . Khẳng định nào sau đây sai?

- A) $OO_1 \parallel (BEC)$. B) $OO_1 \parallel (AFD)$.
C) $OO_1 \parallel (EFM)$. D) MO_1 cắt (BEC) .

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AC, BD, AB, CD, AD, BC . Bốn điểm nào sau đây không đồng phẳng?

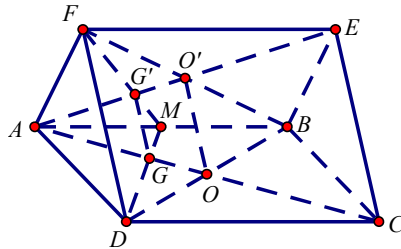
- A) P, Q, R, S . B) M, P, R, S . C) M, R, S, N . D) M, N, P, Q .

E. HƯỚNG DẪN GIẢI



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:



- a) Ta có OO' là đường trung bình của tam giác ACE và tam giác BDF nên:
 $OO' \parallel CE$ và $OO' \parallel DF$.

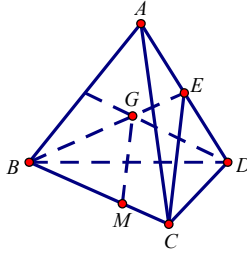
Mà $CE \subset (BCE)$, $DF \subset (ADF)$ nên $OO' \parallel (BCE)$ và $OO' \parallel (ADF)$.

- b) Theo tính chất của trọng tâm tam giác, ta có: $\frac{AG}{AO} = \frac{AG'}{AO'} = \frac{2}{3}$

Vậy $GG' \parallel OO'$ và $OO' \parallel CE$ nên $GG' \parallel CE$.

Mà $CE \subset (CDEF)$ nên $GG' \parallel (CDEF)$.

Bài 2:



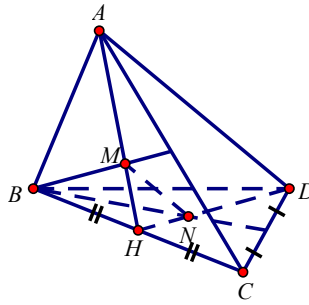
Gọi E là trung điểm của AD. Ta có: $\frac{BG}{BE} = \frac{2}{3}$ (do G là trọng tâm của tam giác ABD).

Mà $\frac{BM}{BC} = \frac{2}{3}$ (do $MB = 2MC$) nên $\frac{BG}{BE} = \frac{BM}{BC}$.

Suy ra $MG \parallel CE$.

Mà $CE \subset (ACD)$ do đó $MG \parallel (ACD)$.

Bài 3:

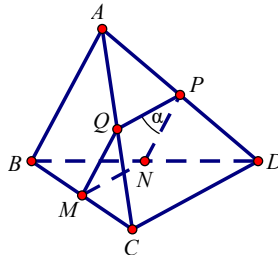


Gọi H là trung điểm của BC, ta có: $M \in AH, N \in DH$. Do đó:

$$\frac{HM}{HA} = \frac{HN}{HD} = \frac{1}{3} \text{ (tính chất trọng tâm tam giác)} \Rightarrow MN \parallel AD.$$

Như vậy: $\left. \begin{array}{l} MN \parallel AD \\ AD \subset (ABD) \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel (ABD); \left. \begin{array}{l} MN \parallel AD \\ AD \subset (ACD) \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel (ACD).$

Bài 4:



$$\left. \begin{array}{l} AB // (\alpha) \\ \text{Ta có: } (ABC) \supset AB \\ (ABC) \cap (\alpha) = MQ \end{array} \right\} \Rightarrow MQ // AB \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, ta có: } NP // AB \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} CD // (\alpha) \\ (ACD) \supset CD \\ (ACD) \cap (\alpha) = PQ \end{array} \right\} \Rightarrow PQ // CD \quad (3)$$

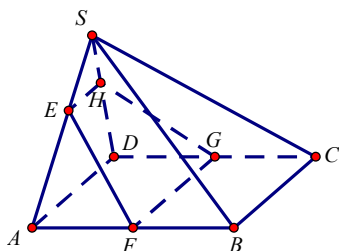
$$\text{Tương tự, ta có: } MN // CD \quad (4)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } MQ // NP \quad (5)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra: } PQ // MN \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra MNPQ là hình bình hành.

Bài 5:



$$\text{a) Ta có: } \left. \begin{array}{l} FG // AD \\ AD \subset (SAD) \end{array} \right\} \Rightarrow FG // (SAD)$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có: $FG // (SBC)$

$$\text{b) Gọi } (EFG) \cap SD = H. \text{ Ta có:}$$

$$\left. \begin{array}{l} (ABCD) \cap (EFG) = FG \\ (ABCD) \cap (SAD) = AD \\ (SAD) \cap (EFG) = EH \\ FG // AD \end{array} \right\} \Rightarrow EH // AD // FG$$

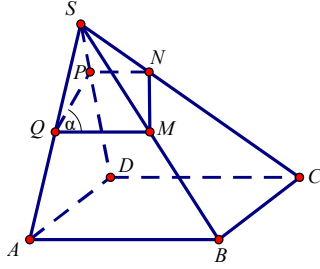
Suy ra H là trung điểm của SD.

Như vậy:

$$\left. \begin{array}{l} GH // SC \text{ (tính chất trung bình)} \\ HG \subset (EFG) \end{array} \right\} \Rightarrow SC // (EFG).$$

Tương tự, ta có: $SB // (EFG).$

Bài 6:



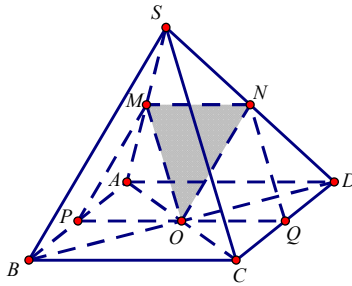
Ta có: $\left. \begin{array}{l} AB \parallel (\alpha) \\ M \in (\alpha) \cap (SAB) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MQ \parallel AB \quad (1)$

Mặt khác: $\left. \begin{array}{l} DC \parallel AB \Rightarrow DC \parallel QM (*) \\ QM \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow DC \parallel (\alpha)$

Như vậy: $\left. \begin{array}{l} DC \parallel (\alpha) \\ PN = (\alpha) \cap (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow PN \parallel DC \quad (2)$

Từ (*) và (2) suy ra MNPQ là hình bình thang.

Bài 7:



- a) Ta có $MN \parallel AD$ (MN là đường trung bình của tam giác SAD) và $AD \parallel BC$ (tứ giác ABCD là hình bình hành), suy ra $MN \parallel BC$.

Mà $BC \subset (SBC)$ nên $MN \parallel (SBC)$.

Ta có: $ON \parallel SB$ (ON là đường trung bình của tam giác SBD) nên $ON \subset (OMN)$.

Do đó: $SB \parallel (OMN)$.

Ta có $OM \parallel SC$ (OM là đường trung bình của ΔSAC) và $OM \subset (OMN)$.

Vậy $SC \parallel (OMN)$.

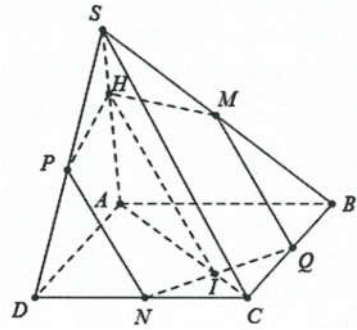
- b) Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Từ đó có: $PQ \parallel AD$, suy ra $PQ \parallel MN$.

Vậy MN và PQ đồng phẳng, nghĩa là $(OMN) \equiv (MNPQ)$.

Ta có thiết diện do mp(OMN) cắt hình chóp là hình thang MNPQ ($MN \parallel PQ$).

Bài 8:

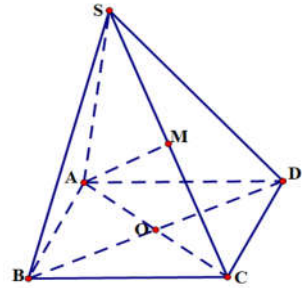
- a) Trong mặt phẳng (SBC) , từ M kẻ đường thẳng song song với SC cắt BC tại Q .
 Trong mặt phẳng (SCD) , từ N kẻ đường thẳng song song với SC cắt SD tại P .
 Khi đó giao tuyến của (P) với (SBC) và (SCD) lần lượt là MQ và NP .
 Gọi $I = AC \cap NQ$. Từ I kẻ đường thẳng song song với SC cắt SA tại H .
 Khi đó $(P) \cap (SAC) = IH$.



- b) Thiết diện của mặt phẳng (P) với khối chóp là ngũ giác $MQNPH$.

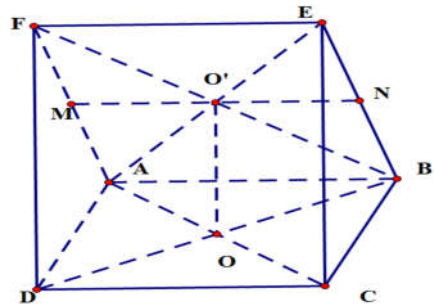
Bài 10:

- a) Trong tam giác SAC , O và M lần lượt là trung điểm của AC và SC nên $OM \parallel SA$.
 Mà $SA \subset (SAD)$; $SA \subset (SBA)$.
 Nên $OM \parallel (SAD)$, $OM \parallel (SBA)$.
 b) Hai mặt phẳng (SAD) và (OMD) có $SA \parallel OM$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng đi qua D song song với SA và OM .



Bài 11:

- a) Trong tam giác FBD , O và O' lần lượt là trung điểm của BD và BF nên $OO' \parallel FD$. Mà $FD \subset (EFDC)$, $FD \subset (ADF)$ nên $OO' \parallel (EFDC)$, $OO' \parallel (ADF)$.
 Trong tam giác AEC , O và O' lần lượt là trung điểm của AE và AC nên $OO' \parallel EC$.
 Mà $EC \subset (BCE)$ nên $OO' \parallel (BCE)$.
 b) Trong hình bình hành $ABEF$ có M, N lần lượt là trung điểm của AE và BF nên $MN \parallel EF \parallel AB$.
 Mà $EF \subset (CDFE)$ nên $MN \parallel (CDFE)$.
 c) Hai mặt phẳng (OMN) và $(ABCD)$ có điểm O chung, $MN \parallel AB$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng đi qua O và song song với AB .



Bài 12:

- a) $CD \parallel (\alpha)$, (SCD) chứa CD cắt (α) tại PQ
nên $PQ \parallel CD$, $CD \parallel (\alpha)$, $(ABCD)$ chứa
 CD cắt (α) tại MN nên $MN \parallel CD$.

Suy ra $MN \parallel PQ$.

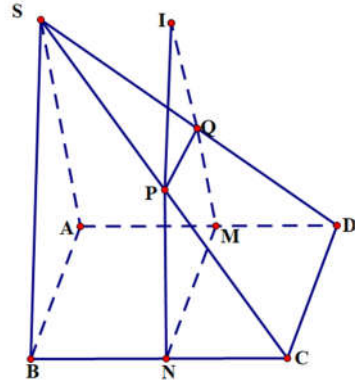
- b) Mặt phẳng (SBC) và (SAD) giao nhau
tại đường thẳng đi qua S và song song với
 BC và AD . $I \in NP$, $NP \subset (SBC)$ nên

$$I \in (SBC)$$

$$I \in QM, QM \subset (SAD) \text{ nên } I \in (SAD).$$

Do đó I là điểm chung của hai mặt phẳng
 (SBC) và (SAD) nên I nằm trên giao tuyến
của hai mặt phẳng đó.

Suy ra I nằm trên đường thẳng đi qua S và song song với BC .



Bài 13:

- a) $(\alpha) \parallel BC$, $BC \subset (ABC)$ và (α) cắt (ABC) tại MN
nên $MN \parallel BC$.

$(\alpha) \parallel BC$, $BC \subset (BCD)$ và (α) cắt (BCD) tại PQ
nên $PQ \parallel BC$.

Suy ra: $MN \parallel PQ$.

$(\alpha) \parallel AD$, $AD \subset (ABD)$ và (α) cắt (ABD) tại MQ
nên $MQ \parallel AD$.

$(\alpha) \parallel AD$, $AD \subset (ACD)$ và (α) cắt (ACD) tại NP
nên $NP \parallel BC$.

Suy ra: $MQ \parallel NP$. Do đó, $MNPQ$ là hình bình hành.

- b) $MNPQ$ là hình thoi khi $MN = NP$.

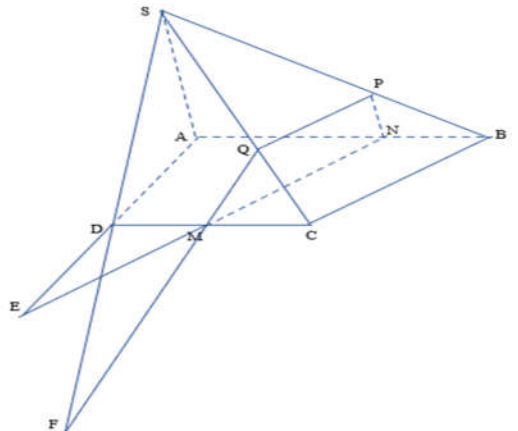
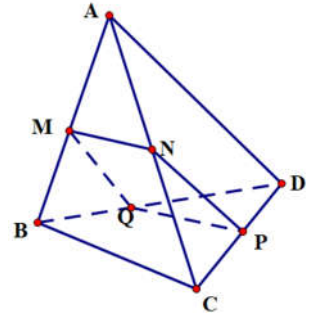
$$\text{Ta có: } \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}; \frac{NP}{AD} = \frac{CN}{AC}$$

$$\text{hay } \frac{MN}{AD} = \frac{CN}{AC}.$$

$$\text{Mà } \frac{AN}{AC} + \frac{CN}{AC} = 1 \text{ nên}$$

$$\frac{MN}{BC} + \frac{MN}{AD} = 1. \text{ Suy ra:}$$

$$MN = \frac{AD \cdot BC}{AD + BC}.$$



- Bài 14:** Qua M kẻ đường thẳng
song song với BC cắt AB tại
 N .

Qua N kẻ đường thẳng song song với SA cắt AB tại P .

Qua P kẻ đường thẳng song song với BC cắt SC tại Q .

Mặt phẳng $(MNPQ)$ có $MN \parallel SB, NP \parallel SA$ nên mặt phẳng $(MNPQ)$ là mặt phẳng (P) .

Giao tuyến của (P) với $(ABCD), (SAB), (SBC), (SCD)$ lần lượt là MN, NP, PQ và QM .

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi E là giao điểm của MN và AD .

Trong mặt phẳng (ACD) , gọi F là giao điểm của MQ và SD .

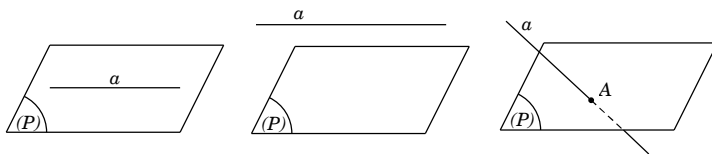
Ta có: E và F là hai điểm chung của mặt phẳng (P) và (SAD) nên giao tuyến của (P) với (SAD) là EF .



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

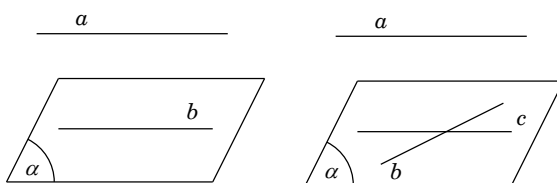
1.B	2.D	3.C	4.C	5.C	6.B	7.D	8.A	9.D	10.A
11.A	12.C	13.B	14.D	15.C					

Câu 1: Chọn B.



Có 3 vị trí tương đối của a và (P) , đó là: a nằm trong (P) , a song song với (P) và a cắt (P) .

Câu 3: Chọn C.



Vì $a \parallel (\alpha)$ nên tồn tại đường thẳng $c \subset (\alpha)$ thỏa mãn $a \parallel c$. Suy ra b, c đồng phẳng và xảy ra các trường hợp sau:

- Nếu b song song hoặc trùng với c thì $a \parallel b$.
- Nếu b cắt c thì b cắt $(\beta) \equiv (a, c)$ nên a, b không đồng phẳng. Do đó a, b chéo nhau.

Câu 4: Chọn C.

- A sai. Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$ hoặc a, b chéo nhau.

- B sai. Nếu b cắt (α) thì b cắt a hoặc a, b chéo nhau.
- D sai. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt a hoặc song song với a .

Câu 5: Chọn C.

Câu 6: Chọn B. Gọi $(Q) \equiv (a, b)$.

- A sai. Khi $b = (P) \cap (Q) \Rightarrow b \subset (P)$.
- C sai. Khi $(P) \neq (Q) \Rightarrow b \parallel (P)$.
- Xét khẳng định B, giả sử (P) không cắt b khi đó $b \subset (P)$ hoặc $b \parallel (P)$. Khi đó, vì $b \parallel a$ nên $a \subset (P)$ hoặc a cắt (P) (mâu thuẫn với giả thiết (P) cắt a). Vậy khẳng định B đúng.

Câu 7: Chọn A. Ta có: $d' = (\alpha) \cap (\beta)$. Do d và d' cùng thuộc (β) nên d cắt d' hoặc $d \parallel d'$. Nếu d cắt d' . Khi đó, d cắt (α) (mâu thuẫn với giả thiết). Vậy $d \parallel d'$.

Câu 8: Chọn D. Gọi a và b là 2 đường thẳng chéo nhau, c là đường thẳng song song với a và cắt b .

Gọi $(\alpha) \equiv (b, c)$. Do $a \parallel c \Rightarrow a \parallel (\alpha)$.

Giả sử $(\beta) \parallel (\alpha)$. Mà $b \in (\alpha) \Rightarrow b \parallel (\beta)$.

Mặt khác, $a \parallel (\alpha) \Rightarrow a \parallel (\beta)$.

Có vô số mặt phẳng $(\beta) \parallel (\alpha)$. Vậy có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau.

Câu 9: Chọn A. Có có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau. Do đó A sai.

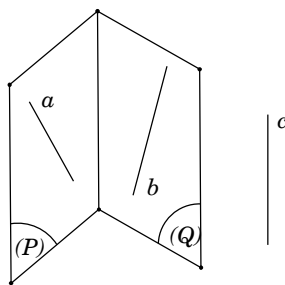
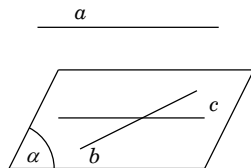
Câu 10: Chọn A. Vì c song song với giao tuyến của (P) và (Q) nên $c \parallel (P)$ và $c \parallel (Q)$.

Khi đó, (P) là mặt phẳng chứa a và song song với c , mà a và c chéo nhau nên chỉ có một mặt phẳng như vậy.

Tương tự cũng chỉ có một mặt phẳng (Q) chứa b và song song với c .

Vậy có nhiều nhất một mặt phẳng (P) và một mặt phẳng (Q) thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 11: Chọn A. Xét tam giác SAC có M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC . Suy ra $MN \parallel AC$ mà $AC \subset (ABCD) \longrightarrow MN \parallel mp(ABCD)$.



Câu 12: Chọn C. Theo định lí Talet, ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB}$ suy ra MN song song với AB .

Mà AB nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ suy ra $MN \parallel (ABCD)$.

Câu 13: Chọn B.

Gọi M là trung điểm của BD .

Vì G là trọng tâm tam giác $ABD \Rightarrow \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$.

Điểm $Q \in AB$ sao cho $AQ = 2QB \Leftrightarrow \frac{AQ}{AB} = \frac{2}{3}$. Suy

ra $\frac{AG}{AM} = \frac{AQ}{AB} \longrightarrow GQ \parallel BD$. Mặt khác BD

nằm trong mặt phẳng (BCD) suy ra $GQ \parallel (BCD)$.

Câu 14: Chọn D. Xét tam giác ACE có O, O_1 lần lượt là trung điểm của AC, AE .

Suy ra OO_1 là đường trung bình trong tam giác $ACE \Rightarrow OO_1 \parallel EC$.

Tương tự, OO_1 là đường trung bình của tam giác BFD nên $OO_1 \parallel FD$.

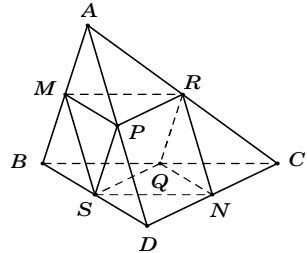
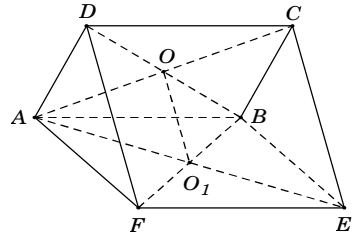
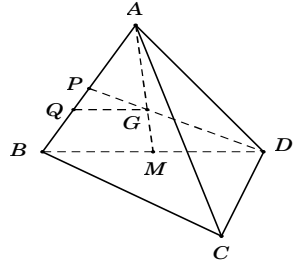
Vậy $OO_1 \parallel (BEC), OO_1 \parallel (AFD)$ và $OO_1 \parallel (EFC)$. Chú ý rằng: $(EFC) = (EFM)$.

Câu 15: Chọn C. Theo tính chất của đường trung bình của tam giác ta có

$PS \parallel AC \parallel QR$ suy ra P, Q, R, S đồng phẳng.

Tương tự, ta có được $PM \parallel BC \parallel NQ$ suy ra P, M, N, Q đồng phẳng.

Và $NR \parallel CD \parallel SN$ suy ra M, R, S, N đồng phẳng.



A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa hai mặt phẳng song song :

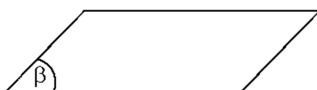
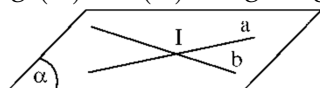
Hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.



2. Các định lý:

a) Định lý 1 :

Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β) .

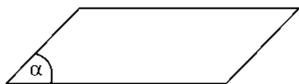
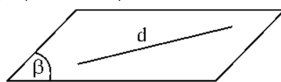
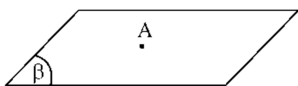


b) Định lý 2 :

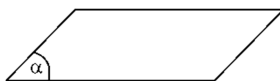
Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho. (Hình 1)

• Hệ quả 1:

Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α) . (Hình 2).



Hình 1



Hình 2

• Hệ quả 2:

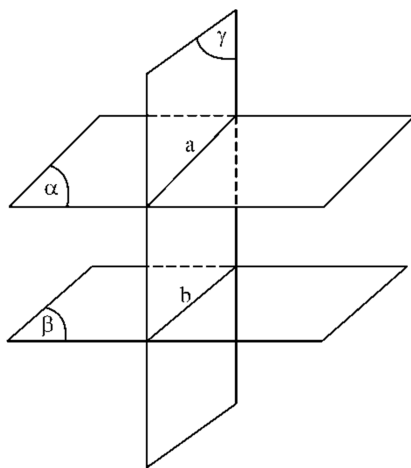
Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

• **Hệ quả 3:**

Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) . Đường thẳng qua A và song song với (α) đều nằm trong một mặt phẳng đi qua A và song song với (α) .

c) **Định lý 3 :**

Cho hai mặt phẳng song song với nhau. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



• **Hệ quả:**

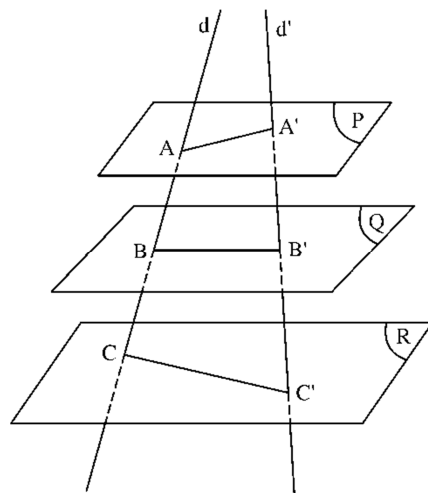
Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng tương ứng bằng nhau.

3. **Định lý THALES:**

Ba mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến bất kỳ những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

• Nếu d, d' là hai cát tuyến bất kỳ cắt ba mặt phẳng song song (P), (Q), (R)

lần lượt tại A, B, C và A', B', C' thì : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.



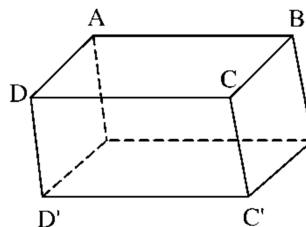
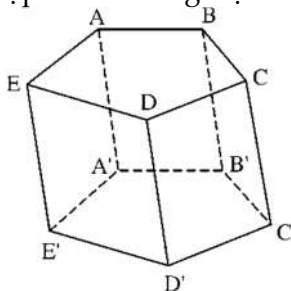
4. Hình lăng trụ và hình hộp:

- Định nghĩa hình lăng trụ :

Hình lăng trụ là một hình đa diện có hai đáy là hai đa giác nằm trong hai mặt phẳng song song, tất cả các cạnh bên thì song song với nhau.

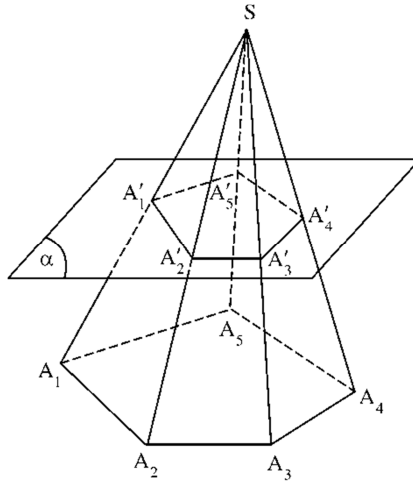
- Định nghĩa hình hộp :

Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.



5. Hình chóp cụt:

Là phần của hình chóp nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt tất cả các cạnh của hình chóp được gọi là hình chóp cụt.



B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1.

CHỨNG MINH HAI MẶT PHẶNG SONG SONG

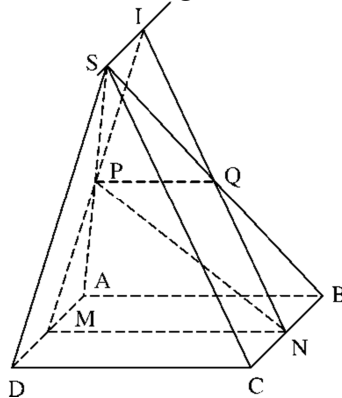
Phương pháp :

Áp dụng định lí 1 để chứng minh hai mặt phẳng song song

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P là trung điểm của AD, BC và SA .

- Chứng minh $(MNP) \parallel (SCD)$.
- (MNP) cắt SB tại Q . Chứng minh Q là trung điểm SB .
- MP và NQ cắt nhau tại I . Chứng minh $SI \parallel DA$ và BC .

Lời giải



a) MP là đường trung bình của ΔSAD nên $MP \parallel SD$.

MN là đường trung bình của hình bình hành ABCD nên $MN \parallel DC$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MP \parallel SD \\ MN \parallel DC \\ MP, MN \subset (MNP) \\ SD, SC \subset (SDC) \end{cases} \Rightarrow (MNP) \parallel (SDC)$$

$$\text{b) Ta có: } \begin{cases} MN \parallel AB \\ MN \subset (MNP) \\ AB \subset (SAB) \\ PQ = (MNP) \cap (SAB) \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel AB \parallel MN$$

$\Rightarrow$ PQ là đường trung bình của ΔSAB

$\Rightarrow$ Q là trung điểm của SB.

c) Tứ giác ABCD là hình bình hành nên $AD \parallel BC$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ SI = (SAD) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow SI \parallel AD \parallel BC$$

DẠNG 2.

DÙNG ĐỊNH LÝ 3 ĐỂ CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

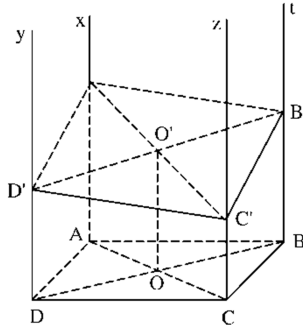
Ví dụ 2: Cho hình bình hành ABCD. Gọi Ax, By, Cz, Dt là 4 nửa đường thẳng song song cùng chiều và không nằm trong mặt phẳng ABCD. Một mặt phẳng (α) cắt 4 nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D'.

a) Chứng minh: $(AA'B'B) \parallel (CC'D'D)$.

b) Chứng minh: A'B'C'D' là hình bình hành.

c) Chứng minh: $AA' + CC' = BB' + DD'$.

Lời giải



- a) Ta có:
$$\begin{cases} AA' // DD' \\ AB // DC \text{ (ABCD là hình bình hành)} \\ AB, AA' \subset (AA'B'B) \\ DD', DC \subset (DD'C'C) \end{cases} \Rightarrow (AA'B'B) // (DD'C'C)$$
- b) Ta có:
$$\begin{cases} (AA'B'B) // (DD'C'C) \\ A'B' = (AA'B'B) \cap (A'B'C'D') \Rightarrow A'B' // D'C' \\ C'D' = (DD'C'C) \cap (A'B'C'D') \end{cases}$$

Chúng minh tương tự ta có $A'D' // B'C'$.

Vậy tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

- c) Gọi O, O' lần lượt là tâm hình bình hành ABCD và $A'B'C'D'$.

Ta có $AA' // CC'$ nên tứ giác $AA'C'C$ là hình thang. Mà O, O' lần lượt là trung điểm của hai cạnh bên $A'C'$ và AC nên OO' là đường trung bình của hình thang $AA'C'C$. Do đó, $AA' + CC' = 2OO'$.

Chúng minh tương tự ta có OO' là đường trung bình của hình thang $DD'B'B$ nên $2OO' = BB' + DD'$.

Vậy $AA' + CC' = BB' + DD'$:

DẠNG 3.

THIẾT DIỆN QUA MỘT ĐIỂM VÀ SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẪNG CHO TRƯỚC

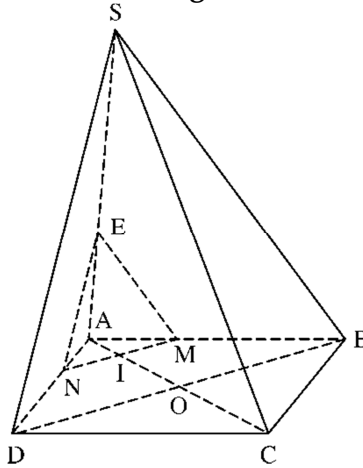
Phương pháp :

Áp dụng định lý 3 về hai mặt phẳng song song hoặc chuyển về bài toán tìm thiết diện đi qua một điểm và song song với hai đường thẳng cho trước.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O có $AC = a$, $BD = b$. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và qua điểm I trên đoạn AO .

- a) Xác định thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α) . Thiết diện là hình gì?
b) Tính diện tích thiết diện theo a , b và $x = AI$.

Lời giải



- a) Gọi M, N, E lần lượt là giao điểm của AB, AD, SA với (α) .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (\alpha) \parallel (SBD) \\ (\alpha) \cap (ABCD) = MN \\ (SBD) \cap (ABCD) = BD \end{cases} \Rightarrow MN \parallel BD.$$

Chúng minh tương tự ta có: $EN \parallel SD, EM \parallel SB$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MN \parallel BD \\ EN \parallel SD \\ \widehat{(DB, DS)} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{(NM, NE)} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ENM} = 60^\circ$$

Chúng minh tương tự ta có $\widehat{EMN} = 60^\circ$

Vậy thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α) là tam giác đều $\triangle EMN$.

- b) Xét $\triangle ABD$ ta có $MN \parallel BD \Rightarrow \frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ (Hệ quả định lí Thalet)

Xét ΔAOD ta có $NI \parallel OD \Rightarrow \frac{AI}{AO} = \frac{AN}{AD}$ (Hệ quả định lý Thalet)

$$\Rightarrow \frac{MN}{BD} = \frac{AI}{AO} \Rightarrow MN = \frac{BD \cdot AI}{AO} = \frac{b \cdot x}{\frac{a}{2}} = \frac{2 \cdot b \cdot x}{a}$$

Diện tích thiết diện ΔEMN là: $\frac{MN^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{4 \cdot b^2 \cdot x^2}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3} \cdot b^2 \cdot x^2}{a^2}$ (ñvdt)

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ACBD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AD, BC, SA . Chứng minh: $(MNP) \parallel (SCD)$.

Bài 2: Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm ở hai mặt phẳng khác nhau.

- 1) Chứng minh rằng: $(ADF) \parallel (BCE)$.
- 2) Gọi M là trọng tâm ΔABE . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt (ADF) . Lấy N là giao điểm của (P) và AC . Tính $\frac{AN}{NC}$.

Bài 3: Cho hình chóp $S.ABC$. Các điểm I, J, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCA . Chứng minh rằng: $(IJK) \parallel (ABC)$.

Bài 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD .

- 1) Chứng minh: $(OMN) \parallel (SBC)$.
- 2) Gọi P và Q là trung điểm của AB và ON . Chứng minh: $PQ \parallel (SBC)$
- 3) Gọi R là trung điểm AD . Chứng minh: $(MOR) \parallel (SCD)$.

Bài 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I, H, K lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC . Gọi M là giao điểm của AH và DK, N là giao điểm của DI và CH .

- 1) Chứng minh: $(IHK) \parallel (ABCD)$.
- 2) Chứng minh: $(SMN) \parallel (IHK)$.

Bài 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi J là trung điểm SD và $O = AC \cap BD$. Tìm giao điểm của đường thẳng SA với mặt phẳng (BCJ) .

Bài 7: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại I, K .

- 1) Chứng minh $(CBE) \parallel (ADF)$.
- 2) Chứng minh $(DEF) \parallel (MNKI)$.

Bài 8: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$.

- 1) Chứng minh: $CB' \parallel (AHC')$.
- 2) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'BC)$. Chứng minh: $d \parallel (BB'C'C)$.
- 3) Tìm giao tuyến của AC' với (BCH) .
- 4) Mặt phẳng (α) qua trung điểm của CC' và song song với AH và $C'B$. Xác định thiết diện của (α) với lăng trụ.

Bài 9: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh AA', BB', CC', DD' song song với nhau.

- 1) Chứng minh: $(BDA') \parallel (B'D'C)$.
- 2) Chứng minh đường chéo AC' qua trọng tâm G_1, G_2 của tam giác BDA' và $B'D'C$.
- 3) Chứng minh G_1, G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.
- 4) Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng $(A'B'G_2)$. Thiết diện là hình gì?

Bài 10: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- 1) Tìm giao tuyến của $(AB'C')$ và $(BA'C)$.
- 2) Gọi M, N lần lượt là hai điểm bất kỳ trên AA' và BC . Tìm giao điểm của $B'C'$ với mặt phẳng $(AA'N)$ và giao điểm của MN với mặt phẳng $(AB'C')$.

Bài 11: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi I và I' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$.

- 1) Chứng minh: $AI \parallel A'I'$.
- 2) Tìm giao điểm của đường thẳng IA' với $(AB'C')$.
- 3) Tìm giao tuyến của $(AB'C')$ và $(A'BC)$.

Bài 12: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AA' và AC .

- 1) Dụng thiết diện của lăng trụ với (MNB') .
- 2) Gọi P là trung điểm của cạnh $B'C'$. Dụng thiết diện của lăng trụ với (MNP) .

Bài 13: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CC' , P là điểm đối xứng của C qua A .

- 1) Xác định thiết diện của lăng trụ với $(A'MN)$. Tính tỉ số mà thiết diện chia cạnh AB .
- 2) Xác định thiết diện của lăng trụ với (MNP) . Tính tỉ số mà thiết diện chia cạnh AA' và AB .

Bài 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Điểm $M \in AD$, điểm $N \in C'D'$ sao cho $\frac{MA}{MD} = \frac{D'N}{NC'}$.

- 1) Chứng minh: $MN \parallel (BDC')$.
- 2) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mp (P) qua MN và song song với (BDC') .

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A) Hai mặt phẳng không cắt nhau thì song song.
- B) Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì cắt nhau.
- C) Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.
- D) Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có vô số mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Câu 2: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận $mp(\alpha) \parallel mp(\beta)$?

- A) $(\alpha) \parallel (\gamma)$ và $(\beta) \parallel (\gamma)$ ((γ) là mặt phẳng nào đó).
- B) $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β) .
- C) $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β) .
- D) $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc (β) .

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A) Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β) .

B) Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) cũng song song với bất kì đường thẳng nào nằm trong (β) .

C) Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (α) và (β) phân biệt thì $a \parallel (\beta)$.

D) Nếu đường thẳng d song song với $mp(\alpha)$ thì nó song song với mọi đường thẳng nằm trong $mp(\alpha)$.

Câu 4: Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β) , đường thẳng $a \parallel (\alpha)$. Có mấy vị trí tương đối của a và (β) .

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

Câu 5: Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) . Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên (P) và (Q) . Gọi I là trung điểm của MN . Chọn khẳng định đúng.

A) Tập hợp các điểm I là đường thẳng song song và cách đều (P) và (Q) .

B) Tập hợp các điểm I là mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q) .

C) Tập hợp các điểm I là một mặt phẳng cắt (P) .

D) Tập hợp các điểm I là một đường thẳng cắt (P) .

Câu 6: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) ?

A) $a \parallel b$ và $b \subset (P)$.

B) $a \parallel b$ và $b \parallel (P)$.

C) $a \parallel (Q)$ và $(Q) \parallel (P)$.

D) $a \subset (Q)$ và $b \subset (P)$.

Câu 7: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A) Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $a \parallel b$.

B) Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì a và b chéo nhau.

C) Nếu $a \parallel b$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

D) Nếu $(\gamma) \cap (\alpha) = a, (\gamma) \cap (\beta) = b$ và $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì $a \parallel b$.

Câu 8: Cho đường thẳng $a \subset mp(P)$ và đường thẳng $b \subset mp(Q)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A) $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$.

B) $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$.

C) $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel (Q)$ và $b \parallel (P)$.

D) a và b chéo nhau.

Câu 9: Hai đường thẳng a và b nằm trong $mp(\alpha)$. Hai đường thẳng a' và b' nằm trong $mp(\beta)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A) Nếu $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

B) Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$.

C) Nếu $a \parallel b$ và $a' \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

D) Nếu a cắt b và $a \parallel a', b \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

Câu 10: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ . Hai đường thẳng p và q lần lượt nằm trong (P) và (Q) . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A) p và q cắt nhau.

B) p và q chéo nhau.

C) p và q song song.

D) Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB . Khẳng định nào sau đây đúng?

A) (NOM) cắt (OPM) .

B) $(MON) \parallel (SBC)$.

C) $(PON) \cap (MNP) = NP$.

D) $(NMP) \parallel (SBD)$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Tam giác SBD đều. Một mặt phẳng (P) song song với (SBD) và qua điểm I thuộc cạnh AC (không trùng với A hoặc C). Thiết diện của (P) và hình chóp là hình gì?

A) Hình hình hành.

B) Tam giác cân.

C) Tam giác vuông.

D) Tam giác đều.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB = AC = 4$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho $SM = 2MA$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

A) $\frac{16}{9}$.

B) $\frac{14}{9}$.

C) $\frac{25}{9}$.

D) 1.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC = 2$, hai đáy $AB = 6$, $CD = 4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA = 3SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C) 2.

D) $\frac{7\sqrt{3}}{9}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có tâm O , $AB = 8$, $SA = SB = 6$. Gọi (P) là mặt phẳng qua O và song song với (SAB) . Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là:

A) $5\sqrt{5}$.

B) $6\sqrt{5}$.

C) 12.

D) 13.

Câu 16: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A) Hình lăng trụ có các cạnh bên song song và bằng nhau.

B) Hai mặt đáy của hình lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song.

C) Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác đều.

D) Các mặt bên của lăng trụ là các hình bình hành.

Câu 17: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A) Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.

B) Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.

C) Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành bằng nhau.

D) Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

Câu 18: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A) Các cạnh bên của hình chóp cắt đôi một song song.

B) Các cạnh bên của hình chóp cắt là các hình thang.

C) Hai đáy của hình chóp cắt là hai đa giác đồng dạng.

D) Cả 3 mệnh đề trên đều sai.

Câu 19: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A) Trong hình chóp cắt thì hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.

B) Các mặt bên của hình chóp cắt là các hình thang.

C) Các mặt bên của hình chóp cắt là các hình thang cân.

D) Đường thẳng chứa các cạnh bên của hình chóp cắt đồng quy tại một điểm.

Câu 20: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC' . Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và $(A'B'C')$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A) $\Delta \parallel AB$.

B) $\Delta \parallel AC$.

C) $\Delta \parallel BC$.

D) $\Delta \parallel AA'$.

Câu 21: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$. Đường thẳng $B'C$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

A) (AHC') .

B) $(AA'H)$.

C) (HAB) .

D) $(HA'C)$.

Câu 22: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$. Mặt phẳng (AHC') song song với đường thẳng nào sau đây?

A) CB' .

B) BB' .

C) BC .

D) BA' .

Câu 23: Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A) $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$.

B) $AA_1 \parallel (BCC_1)$.

C) $AB \parallel (A_1B_1C_1)$.

D) AA_1B_1B là hình chữ nhật.

Câu 24: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A) $ABCD$ là hình bình hành.

B) Các đường thẳng A_1C, AC_1, DB_1, D_1B đồng quy.

C) $(ADD_1A_1) \parallel (BCC_1B_1)$.

D) AD_1CB là hình chữ nhật.

Câu 25: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bên AA', BB', CC', DD' .

Khẳng định nào dưới đây sai?

A) $(AA'B'B) \parallel (DD'C'C)$.

B) $(BA'D') \parallel (ADC')$.

C) $A'B'CD$ là hình bình hành.

D) $BB'D'D$ là một tứ giáC)

Câu 26: Nếu thiết diện của một lăng trụ tam giác và một mặt phẳng là một đa giác thì đa giác đó có nhiều nhất mấy cạnh?

A) 3 cạnh.

B) 4 cạnh.

C) 5 cạnh.

D) 6 cạnh.

Câu 27: Nếu thiết diện của một hình hộp và một mặt phẳng là một đa giác thì đa giác đó có nhiều nhất mấy cạnh ?

A) 4 cạnh.

B) 5 cạnh.

C) 6 cạnh.

D) 7 cạnh.

Câu 28: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm của AB . Mặt phẳng $(IB'D')$ cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

A) Tam giáC)

B) Hình thang.

C) Hình bình hành.

D) Hình chữ nhật.

Câu 29: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua một cạnh của hình hộp và cắt hình hộp theo thiết diện là một tứ giác (T) . Khẳng định nào sau đây không sai?

A) (T) là hình chữ nhật.

B) (T) là hình bình hành.

C) (T) là hình thoi.

D) (T) là hình vuông.

Câu 30: Cho hình chóp cắt tam giác $ABC.A'B'C'$ có 2 đáy là 2 tam giác vuông tại A và A' và có $\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2}$. Khi đó tỉ số diện tích $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}$ bằng

A) $\frac{1}{2}$.

B) $\frac{1}{4}$.

C) 2.

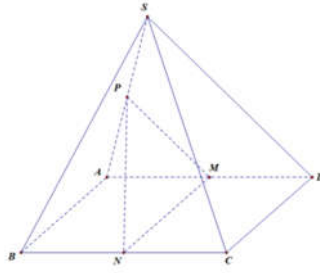
D) 4.

E. HƯỚNG DẪN GIẢI



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

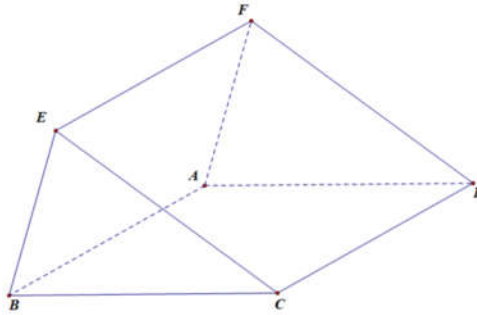


Ta có $MN \parallel CD$ (MN là đường trung bình hình bình hành ABCD).

Ta có $PM \parallel SD$ (PM là đường trung bình $\triangle SAD$).

$$\text{Ta có } \begin{cases} MN \parallel CD; PM \parallel SD \\ MN, PM \subset (MNP); MN \cap PM = M \Rightarrow (MNP) \parallel (SCD) \\ CD, SD \subset (SCD); CD \cap SD = D \end{cases}$$

Bài 2:



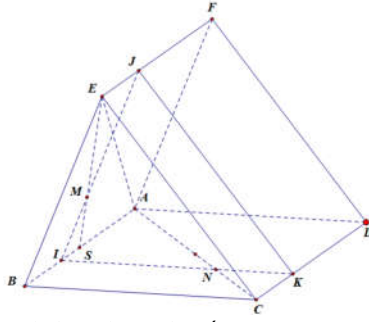
$$\text{Ta có } \begin{cases} EF \parallel CD (\parallel AB) \\ EF = CD (= AB) \end{cases}$$

$\Rightarrow EFDC$ là hình bình hành $\Rightarrow FD \parallel EC$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AD \parallel BC; AF \parallel BE \\ AD, AF \subset (ADF); AD \cap AF = A \\ BC, BE \subset (BCE); BC \cap BE = B \end{cases}$$

$\Rightarrow (ADF) \parallel (BCE)$

2)



Vẽ mp (P) chứa M và $(P) \parallel (ADF)$ cắt AB, AC, CD, EF lần lượt tại I, N, K, J

Ta có: $\frac{AI}{BI} = \frac{AN}{NC}$ ($IN \parallel BC$)

Ta có: $\frac{EJ}{IS} = \frac{ME}{MS} = 2$ ($IS \parallel JE$); $BI = EJ$ (tứ giác $BIJE$ là hình bình hành)

$$\Rightarrow \frac{BI}{IS} = 2 \Rightarrow \frac{BI}{2} = \frac{IS}{1} = \frac{BI + IS}{2+1} = \frac{BS}{3}$$

$$\Rightarrow BI = \frac{2}{3}BS; IS = \frac{1}{3}BS$$

Ta có: $AI = AS + AI = BS + \frac{1}{3}BS = \frac{4}{3}BS \Rightarrow \frac{AI}{BI} = \frac{\frac{4}{3}BS}{\frac{2}{3}BS} = 2 \Rightarrow \frac{AN}{NC} = 2$

Bài 3: Ta có $\frac{SI}{SD} = \frac{SK}{SE} \left(= \frac{2}{3} \right) \Rightarrow IK \parallel DE$ (ta-

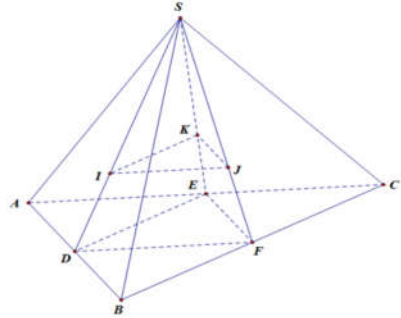
lét đảo).

Ta có $\frac{SK}{SE} = \frac{SJ}{SF} \left(= \frac{2}{3} \right) \Rightarrow JK \parallel FE$ (ta-lét

đảo).

$$\text{Ta có } \begin{cases} IK \parallel DE, JK \parallel FE \\ IK, IJ \subset (IJK); IK \cap JK = K \\ DE, FE \subset (ABC); DE \cap FE = E \end{cases}$$

$$\Rightarrow (IJK) \parallel (ABC).$$



Bài 4:

1) Ta có $OM \parallel SC$ (đường trung bình tam giác SAC).

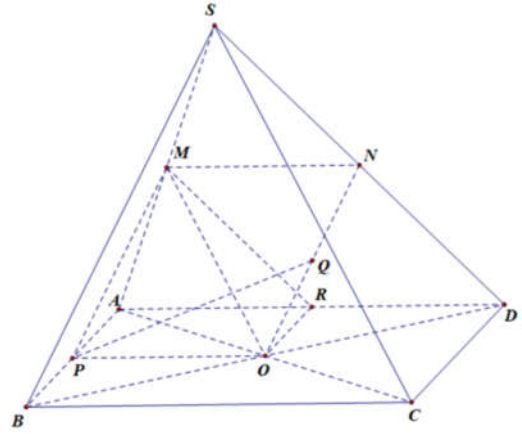
Ta có $ON \parallel SB$ (đường trung bình tam giác SBD).

Ta có :

$$\begin{cases} ON \parallel SB; OM \parallel SC \\ OM, ON \subset (OMN), OM \cap ON = O \\ SB, SC \subset (SBC), SB \cap SC = S \end{cases} \\ \Rightarrow (OMN) \parallel (SBC)$$

- 2) Ta có $\begin{cases} OP \parallel AB \\ AB \parallel MN \end{cases} \Rightarrow OP \parallel MN$
 $\Rightarrow OMPN$ là hình thang
 $\Rightarrow P \in (OMN)$.

Ta có $\begin{cases} NP \subset (OMN) \\ (OMN) \parallel (SBC) \end{cases}$
 $\Rightarrow NP \parallel (SBC)$

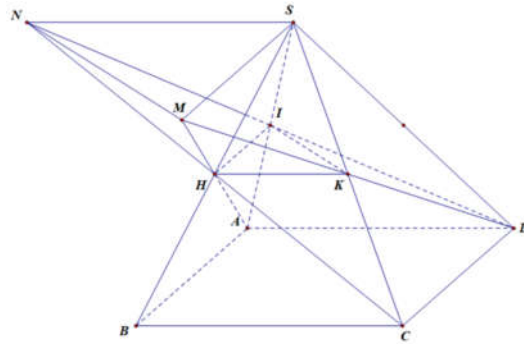


- 3) Gọi R là trung điểm AD . Chứng minh: $(MOR) \parallel (SCD)$

Ta có $OR \parallel CD$ (đường trung bình của tam giác ACD)

Ta có $\begin{cases} OM \parallel SC (cmt) \\ OR \parallel CD (cmt) \\ OM, OR \subset (MOR), OM \cap OR = O \\ SC, SD \subset (SCD), SC \cap SD = S \end{cases} \Rightarrow (MOR) \parallel (SCD).$

Bài 5:



- 1) Ta có $IH \parallel AB, HK \parallel BC$ (đường trung bình).

Ta có $\begin{cases} IH \parallel AB; HK \parallel BC \\ IH, HK \subset (IHK); IH \cap HK = H \\ AB, BC \subset (ABCD); AB \cap BC = B \end{cases}$
 $\Rightarrow (IHK) \parallel (ABCD).$

2) Chứng minh: $(SMN) \parallel (IHK)$

Ta có $\frac{MH}{MA} = \frac{HK}{AD} = \frac{HK}{BC} = \frac{1}{2}$ (Định lý Ta-lét trong tam giác MAD).

Mà $\frac{SI}{SA} = \frac{IH}{AB} = \frac{1}{2}$ (Định lý Ta-lét trong tam giác SAB).

Nên $\frac{MH}{MA} = \frac{SI}{SA} \Rightarrow SM \parallel HI$ (Ta-lét đảo).

Ta có $\frac{MK}{MD} = \frac{HK}{AD} = \frac{HK}{BC} = \frac{1}{2}$ (Định lý Ta-lét trong tam giác MAD).

Mà $\frac{NI}{ND} = \frac{IH}{CD} = \frac{IH}{AB} = \frac{1}{2}$ ((Định lý Ta-lét trong tam giác NCD).

Nên $\frac{MK}{MD} = \frac{NI}{ND} \Rightarrow IK \parallel SN$ (Ta-lét đảo).

Ta có $\begin{cases} SM \parallel HI; SN \parallel IK \\ SM, SN \subset (SMN); SM \cap SN = S \Rightarrow (SMN) \parallel (IHK) \\ IH, IK \subset (IHK); IH \cap IK = I \end{cases}$

Bài 6: Ta có $\begin{cases} J \in SD, SD \subset (SAD) \\ J \in (BCJ) \end{cases}$

$\Rightarrow J \in (SAD) \cap (BCJ)$

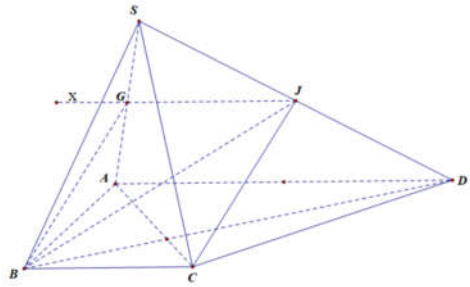
$\begin{cases} J \in (SAD) \cap (BCJ) \\ AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (BCJ) \end{cases}$

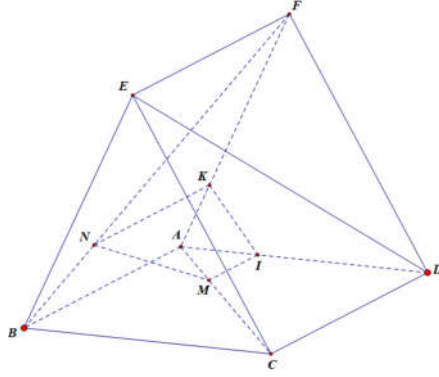
$\Rightarrow (SAD) \cap (BCJ) = Jx \parallel AD \parallel BC$

Trong (SAD) , gọi $G = Jx \cap SA$.

$\Rightarrow \begin{cases} G \in Jx; Jx \subset (BCJ) \\ G \in SA \end{cases} \Rightarrow G = SA \cap (BCJ).$

Bài 7:





1) Tứ giác $ABCD$ và $ABEF$ là hình vuông nên $AD \parallel BC$ và $AF \parallel BE$

Ta có:
$$\begin{cases} BC \parallel AD \\ BE \parallel AF \\ BC, BE \subset (BCE) \\ AD, AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow (BCE) \parallel (ADF)$$

2) Ta có:
$$\begin{cases} \frac{FB}{BN} = \frac{FK}{AK} \\ \frac{MC}{AM} = \frac{ID}{AI} \end{cases} \text{ và } AM = BN, AC = BF$$

$$\Rightarrow \frac{FK}{AK} = \frac{ID}{AI} \Rightarrow KI \parallel DF$$

Mà $NK \parallel EF$ nên $(DEF) \parallel (MNKI)$

Bài 8:

1) Ta gọi M là trung điểm của AB .

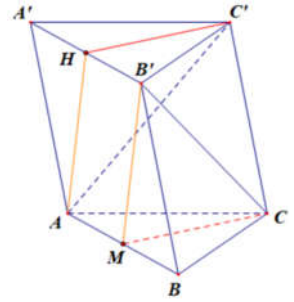
Ta có:
$$\begin{cases} HB' = AM \left(= \frac{1}{2} AB \right) \\ HB' \parallel AM \text{ (} A'B' \parallel AB \text{)} \end{cases}$$

$\Rightarrow AHB'M$ là hình bình hành.

$\Rightarrow AH \parallel B'M$.

Chứng minh tương tự ta có $A'AMH$ là hình bình hành, nên $HM = AA'$ và $HM \parallel AA'$.

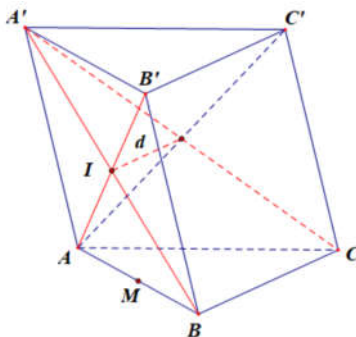
Do đó
$$\begin{cases} HM = CC' \\ HM \parallel CC' \end{cases} \Rightarrow HMCC' \text{ là hình bình hành} \Rightarrow C'H \parallel CM.$$



$$\text{Ta có } \begin{cases} AH \parallel B'M \\ C'H \parallel CM \\ AH, C'H \subset (AHC'); AH \cap C'H = H \\ CM, B'M \subset (B'CM); CM \cap B'M = M \end{cases} \Rightarrow (AHC') \parallel (B'CM).$$

Mà $CB' \subset (B'CM)$, nên $CB' \parallel (AHC')$.

2)



Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, gọi $I = AB' \cap A'B$.

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in A'B; A'B \subset (A'BC) \\ I \in AB'; AB' \subset (AB'C') \end{cases}$$

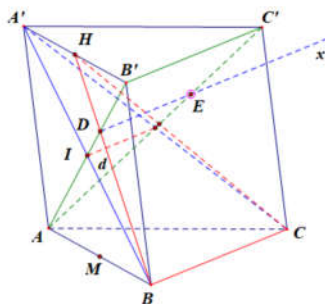
$$\Rightarrow I \in (A'BC) \cap (AB'C').$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} I \in (A'BC) \cap (AB'C') \\ BC \parallel B'C' \\ BC \subset (A'BC); B'C' \subset (AB'C') \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A'BC) \cap (AB'C') = d \parallel BC \parallel B'C' \text{ (với } d \text{ là đường thẳng đi qua } I \text{)}.$$

Mà $BC \subset (BCC'B')$, nên $d \parallel (BCC'B')$.

3) Tìm giao tuyến của AC' với (BCH) .



Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, gọi $D = AB' \cap HB$.

$$\Rightarrow \begin{cases} D \in HB; HB \subset (HBC) \\ D \in AB'; AB' \subset (AB'C') \end{cases}$$

$$\Rightarrow D \in (HBC) \cap (AB'C').$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} D \in (A'BC) \cap (AB'C') \\ BC \parallel B'C' \\ BC \subset (HBC); B'C' \subset (AB'C') \end{cases}$$

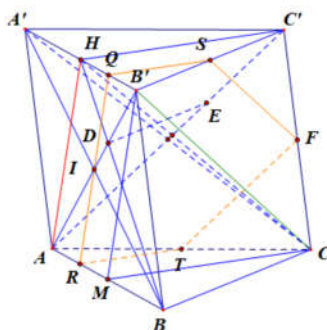
$$\Rightarrow (HBC) \cap (AB'C') = Dx \parallel BC \parallel B'C' \text{ (với } d \text{ là đường thẳng đi qua } I \text{)}.$$

Trong mặt phẳng $(AB'C')$, gọi $E = Dx \cap AC'$.

$$\Rightarrow \begin{cases} E \in Dx; Dx \subset (HBC) \\ E \in AC' \end{cases}$$

$$\Rightarrow E = AC' \cap (BCH).$$

- 4) Mặt phẳng (α) qua trung điểm của CC' và song song với AH và $C'B$. Xác định thiết diện của (α) với lăng trụ.



$$\text{Ta có } \begin{cases} AH \parallel BM \\ AH \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow BM \parallel (\alpha).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} BM \parallel (\alpha) \\ BC' \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (BMC') \parallel (\alpha)$$

$$\text{Mà } (BMC') \parallel (AHC').$$

$$\text{Nên } (\alpha) \parallel (AHC').$$

Gọi F là trung điểm của CC' .

$$\text{Trong } (BCC'B'), \text{ vẽ } FS \parallel B'C' (S \in B'C') \Rightarrow S \in (\alpha).$$

$$\text{Trong } (A'B'C'), \text{ vẽ } SQ \parallel CH (Q \in A'B') \Rightarrow Q \in (\alpha).$$

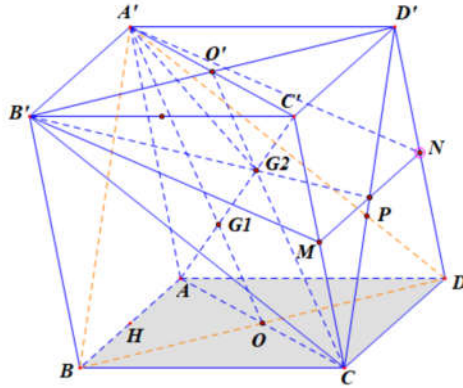
$$\text{Trong } (A'ABB'), \text{ vẽ } QR \parallel AH (R \in AB) \Rightarrow R \in (\alpha).$$

Trong (ABC) , vẽ $RT \parallel CM$ ($T \in AC$) $\Rightarrow T \in (\alpha)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\alpha) \cap (ABC) = RT \\ (\alpha) \cap (A'ACC') = TF \\ (\alpha) \cap (B'BCC') = FS \\ (\alpha) \cap (A'B'C') = SQ \\ (\alpha) \cap (A'ABB') = QR \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Thiết diện của (α) với lăng trụ là ngũ giác $RTFSQ$.

Bài 9.



1) Ta có $BA'D'C$ là hình bình hành nên $BA' \parallel D'C$.

Ta có $BB'D'D$ là hình bình hành nên $B'D' \parallel BD$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BA' \parallel D'C \\ BD \parallel B'D' \\ BA', BD \subset (BA'D); BA' \cap BD = B \\ B'D', D'C \subset (B'D'C); B'D' \cap D'C = D' \end{cases}$$

$\Rightarrow (BDA') \parallel (B'D'C)$.

2) Trong $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.

$$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC; AC \subset (ACC'A') \\ O \in BD; BD \subset (BDA') \end{cases}$$

$\Rightarrow O \in (ACC'A') \cap (BDA')$.

Mà $A' \in (ACC'A') \cap (BDA')$

Nên $A'O = (ACC'A') \cap (BDA')$.

Trong $(ACC'A')$, gọi $E = A'O \cap AC'$.

Ta có $\frac{A'E}{EO} = \frac{A'C'}{AO} = 2$ (Ta-lét)

Suy ra E trùng với trọng tâm G_1 của tam giác BDA' .(1)

Trong $(A'B'C'D')$, gọi $O' = A'C' \cap B'D'$.

$$\Rightarrow \begin{cases} O' \in A'C'; A'C' \subset (ACC'A') \\ O' \in B'D'; B'D' \subset (B'D'C) \end{cases}$$

$$\Rightarrow O' \in (ACC'A') \cap (B'D'C) .$$

$$\text{Mà } C \in (ACC'A') \cap (B'D'C)$$

$$\text{Nên } CO = (ACC'A') \cap (B'D'C) .$$

Trong $(ACC'A')$, gọi $F = CO \cap AC'$.

$$\text{Ta có } \frac{CF}{FO'} = \frac{AC}{C'O'} = 2 \text{ (Ta-lét)}$$

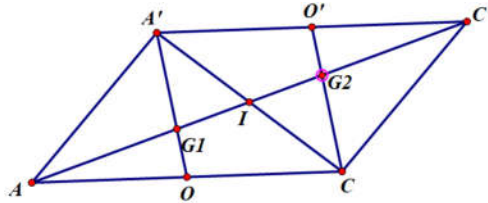
Suy ra F trùng với trọng tâm G_2 của tam giác $B'D'C$.(2)

Từ (1) và (2) suy ra AC' qua trọng tâm G_1, G_2 của tam giác BDA' và $B'D'C$.

3) Trong $(AA'C'C)$, gọi $I = A'C \cap AC'$.

$$\text{Ta có } G_1 \text{ là trọng tâm của tam giác } A'AC \text{ nên } AG_1 = \frac{2}{3} AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AC' = \frac{1}{3} AC' .$$

$$\text{Ta có } G_2 \text{ là trọng tâm của tam giác } A'CC' \text{ nên } AG_2 = \frac{2}{3} CI = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AC' = \frac{1}{3} AC' .$$



$$\text{Ta có } G_1G_2 = AC' - AG_1 - C'G_2 = AC' - \frac{1}{3} AC' - \frac{1}{3} AC' = \frac{1}{3} AC' .$$

$$\text{Từ đó ta có } AG_1 = G_1G_2 = G_2C' \left(= \frac{1}{3} AC' \right) .$$

Suy ra G_1, G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

4) Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng $(A'B'G_2)$. Thiết diện là hình gì?

Xét tam giác $B'D'C$, gọi $P = B'G_2 \cap CD'$.

Suy ra P là trung điểm của CD' .

Trong $(A'B'G_2)$, vẽ $Px \parallel A'B'$

Trong $(CC'D'D)$, Px cắt CC', DD' lần lượt tại M và N .

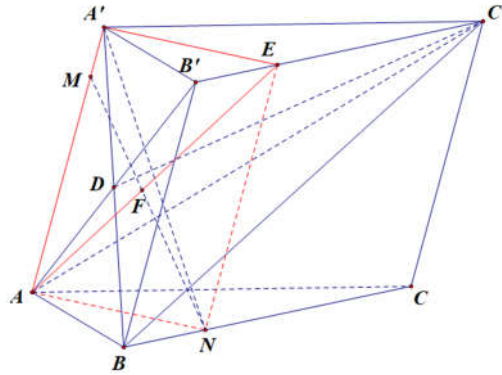
Suy ra $MN \parallel CD$ và $MN = CD$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (A'B'G_2) \cap (A'B'C'D') = A'B' \\ (A'B'G_2) \cap (B'C'CB) = B'M \\ (A'B'G_2) \cap (CC'D'D) = MN \\ (A'B'G_2) \cap (AA'D'D) = NA' \end{cases}$$

$\Rightarrow$ thiết diện của $(A'B'G_2)$ và hình hộp $ABCD$. $A'B'C'D'$ là tứ giác $A'B'MN$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MN \parallel A'B' \\ MN = A'B' (= CD) \end{cases} \Rightarrow \text{thiết diện } A'B'MN \text{ là hình bình hành.}$$

Bài 10.



1) Trong $(AA'B'B)$, gọi $D = A'B \cap AB'$.

$$\Rightarrow (AB'C') \cap (BA'C') = C'D$$

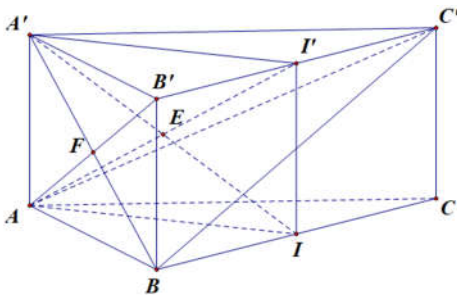
2) Ta có $(AA'N) \cap (BB'C'C) = Nx \parallel AA' \parallel BB'$.

Trong $(BB'C'C)$, gọi $E = Nx \cap B'C'$. Suy ra $E = (AA'N) \cap B'C'$.

Ta có $(AA'EN) \cap (AB'C') = AE$. Trong $(AA'EN)$, gọi $F = MN \cap AE$.

Suy ra $F = MN \cap (AB'C')$.

Bài 11.



1) Ta có I', I là trung điểm của $B'C'$ và BC .

Suy ra II' là đường trung bình của hình bình hành $BB'C'C$.

Suy ra $II' = BB'$ và $II' \parallel BB'$.

Ta có
$$\begin{cases} II' \parallel AA' (\parallel BB') \\ II' = AA' (= BB') \end{cases}$$

$\Rightarrow AA'I'I$ là hình bình hành.

$\Rightarrow AI \parallel A'I'$.

2) Trong $(IAA'I')$, gọi $E = AI' \cap A'I$.

Suy ra
$$\begin{cases} E \in AI'; AI' \subset (AB'C') \\ E \in A'I \end{cases}$$

Suy ra $E = A'I \cap (AB'C')$.

3) Trong $(AA'B'B)$, gọi $F = AB' \cap A'B$.

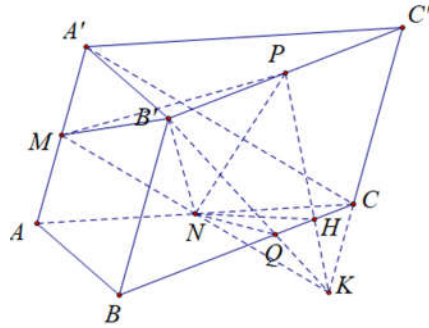
$$\Rightarrow \begin{cases} F \in AB'; AB' \subset (AB'C') \\ F \in A'B; A'B \subset (A'BC') \end{cases} \Rightarrow F \in (AB'C') \cap (A'BC'). \quad (1)$$

Ta có $E = AI' \cap A'I$.

$$\Rightarrow \begin{cases} E \in AI'; AI' \subset (AB'C') \\ E \in A'I; A'I \subset (A'BC') \end{cases} \Rightarrow E \in (AB'C') \cap (A'BC') \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $EF = (AB'C') \cap (A'BC')$.

Bài 12.



1) Trong $(AA'C'C)$, gọi $K = MN \cap CC'$.

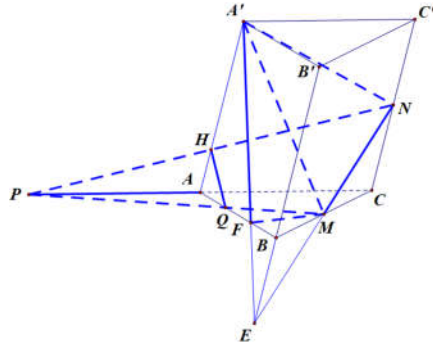
Trong (ABC) , gọi $Q = B'K \cap BC$.

Suy ra thiết diện của lăng trụ với (MNB') là tứ giác $MNQ B'$.

2) Trong $(BB'C'C)$, gọi $H = PK \cap BC$.

Suy ra thiết diện của lăng trụ với (MNP) là tứ giác $MNHP$.

Bài 13.



- 1) Trong $(BB'C'C)$, gọi $E = MN \cap BB'$.

Trong (ABC) , gọi $F = A'E \cap AB$.

Thiết diện của lăng trụ với $(A'MN)$ là tứ giác $A'NMF$.

Ta có $\frac{NC}{BE} = \frac{BM}{CM} = 1$ nên $NC = BE$.

Suy ra $\frac{BE}{BB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{FA}{FB} = \frac{BE}{AA'} = \frac{1}{2}$.

Do đó tỉ số mà thiết diện chia cạnh AB là $\frac{1}{2}$.

- 2) Trong $(AA'C'C)$, gọi $H = PN \cap AA'$.

Trong (ABC) , gọi $Q = PM \cap AB$.

Thiết diện của lăng trụ với (MNP) là tứ giác $HQMN$.

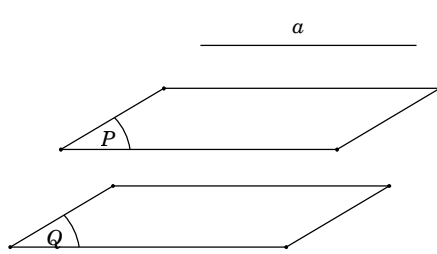
Ta có Q là trọng tâm của tam giác PBC , nên $\frac{AQ}{QB} = \frac{1}{2}$.

Xét tam giác PNC , $\frac{AH}{NC} = \frac{PA}{PC} = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \frac{AH}{AA'} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{AH}{HA'} = \frac{1}{3}$.

Tỉ số mà thiết diện chia cạnh AA' và AB lần lượt là $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{3}$.

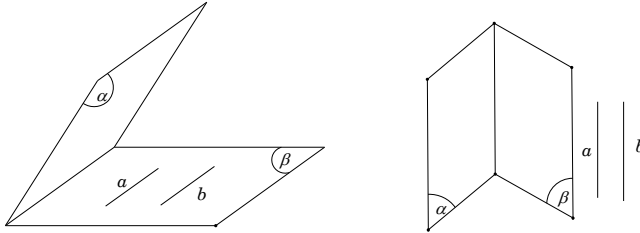
Bài 14.



- + Trong không gian, hai mặt phẳng có 3 vị trí tương đối: trùng nhau, cắt nhau, song song với nhau. Vì vậy, 2 mặt phẳng không cắt nhau thì có thể song song hoặc trùng nhau $\Rightarrow$ A là mệnh đề sai.
- + Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì chúng có thể song song với nhau (hình vẽ) $\Rightarrow$ B là mệnh đề sai.
- + Ta có: $a \parallel (P), a \parallel (Q)$ nhưng (P) và (Q) vẫn có thể song song với nhau.

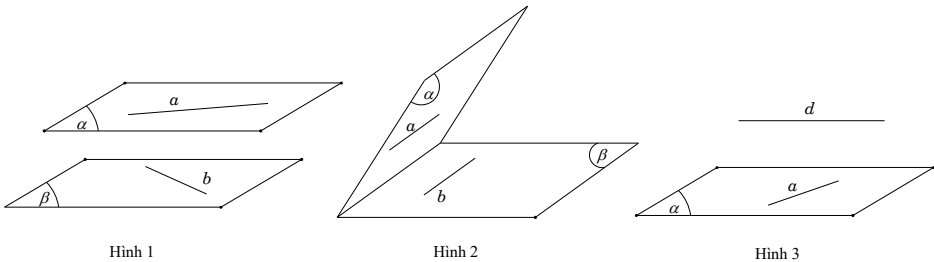
Mệnh đề C là tính chất nên C đúng.

Câu 2: Chọn D.



- + Trong trường hợp: $(\alpha) \parallel (\gamma)$ và $(\beta) \parallel (\gamma)$ ((γ) là mặt phẳng nào đó) thì (α) và (β) có thể trùng nhau $\Rightarrow$ Loại A.
- + $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β) thì (α) và (β) vẫn có thể cắt nhau (hình 1) $\Rightarrow$ Loại B.
- + $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β) thì (α) và (β) vẫn có thể cắt nhau (hình 2) $\Rightarrow$ Loại C.

Câu 3: Chọn A.



- + Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì hai đường thẳng bất kì lần lượt thuộc (α) và (β) có thể chéo nhau (Hình 1) $\Rightarrow$ Loại B.
- + Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (α) và (β) phân biệt thì hai mặt phẳng (α) và (β) có thể cắt nhau (Hình 2) $\Rightarrow$ Loại C.
- + Nếu đường thẳng d song song với $mp(\alpha)$ thì nó có thể chéo nhau với một đường thẳng nào đó nằm trong (α) . (Hình 3).

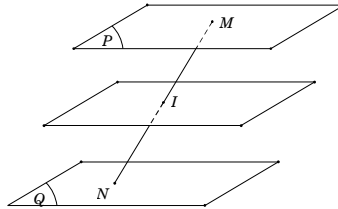
Câu 4: Chọn B.

Trong không gian, giữa đường thẳng và mặt phẳng có 3 vị trí tương đối: đường thẳng cắt mặt phẳng, đường thẳng song song với mặt phẳng, đường thẳng nằm trên mặt phẳng.

$a \parallel (\alpha)$ mà $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow a$ và (β) không thể cắt nhau.

Vậy còn 2 vị trí tương đối.

Câu 5: Chọn B.



Ta có: I là trung điểm của MN

$\Rightarrow$ Khoảng cách từ I đến (P) bằng khoảng cách từ I đến (Q)

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm I là mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q) .

Câu 6: Chọn D.

Ta có: $a \parallel b$ và $b \subset (P)$ suy ra $a \parallel (P)$ hoặc $a \subset (P) \Rightarrow$ Loại A.

$a \parallel b$ và $b \parallel (P)$ suy ra $a \parallel (P)$ hoặc $a \subset (P) \Rightarrow$ Loại B.

$a \parallel (Q)$ và $(Q) \parallel (P)$ suy ra $a \parallel (P)$ hoặc $a \subset (P) \Rightarrow$ Loại C.

Câu 7: Chọn D. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $a \parallel b$ hoặc a chéo $b \Rightarrow A$, B sai.

Nếu $a \parallel b$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$ hoặc (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến song song với a và b . **Chọn D.**

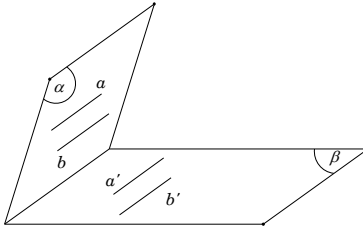
Câu 8: Chọn C.

Với đường thẳng $a \subset mp(P)$ và đường thẳng $b \subset mp(Q)$

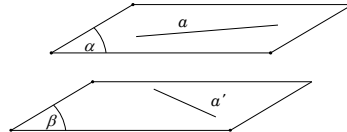
Khi $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau $\Rightarrow A$ sai.

Khi $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$ hoặc $(P), (Q)$ cắt nhau theo giao tuyến song song với a và $b \Rightarrow B$ sai.
 a và b có thể chéo nhau, song song hoặc cắt nhau $\Rightarrow D$ sai.

Câu 9: Chọn D.



Hình 1



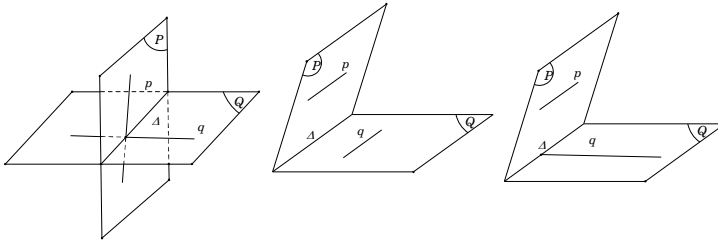
Hình 2

Nếu $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$ hoặc (α) cắt (β) (Hình 1) $\Rightarrow A$ sai.

Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì $a \parallel a'$ hoặc a, a' chéo nhau (Hình 2) $\Rightarrow B$ sai.

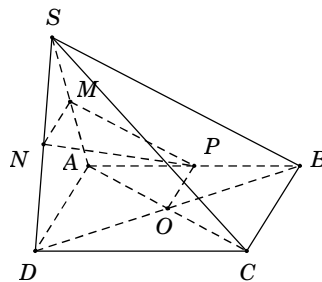
Nếu $a \parallel b$ và $a' \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$ hoặc (α) cắt CC' . (Hình 1) $\Rightarrow C$ sai.

Câu 10: Chọn D.



Ta có p và q có thể cắt nhau, song song, chéo nhau (hình vẽ). **Chọn D.**

Câu 11: Chọn B.

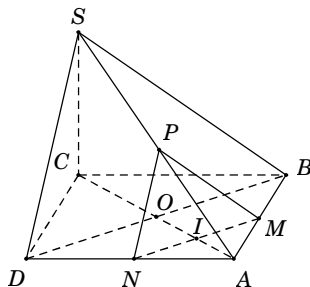


Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAD suy ra $MN \parallel AD$. (1)

Và OP là đường trung bình của tam giác BAD suy ra $OP \parallel AD$. (2)

Từ (1),(2) suy ra $MN \parallel OP \parallel AD \Rightarrow M, N, O, P$ đồng phẳng.

Câu 12: Chọn D.



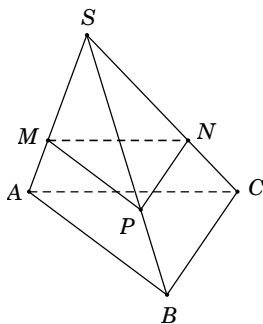
Vi $(P) \parallel (SBD)$, $(P) \cap (ABCD) = MN$ và $(SBD) \cap (ABCD) = MN$ suy ra $MN \parallel BD$.

(P) cắt mặt (SAD) theo đoạn giao tuyến NP với $NP // SD$.

(P) cắt mặt (SAB) theo đoạn giao tuyến MP với $MP \parallel SB$.

Vậy tam giác MNP đồng dạng với tam giác SBD nên thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác đều MNP .

Câu 13: Chọn A.

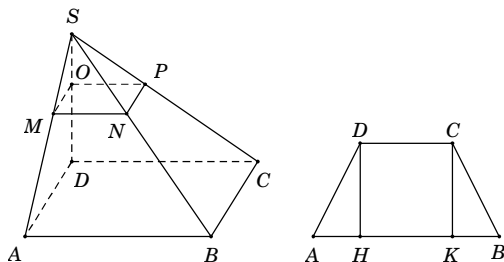


Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2}.4.4.\sin 30^\circ = 4.$

Vì $(P) // (ABC)$ nên theo định lí Talet, ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{2}{3}$.

Khi đó (P) cắt hình chóp $S.ABC$ theo thiết diện là tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $k = \frac{2}{3}$. Vậy $S_{\Delta MNP} = k^2 . S_{\Delta ABC} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 . 4 = \frac{16}{9}$. **Chọn A.**

Câu 14: Chọn A.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D, C trên AB .

$$ABCD \text{ là hình thang cân} \Rightarrow \begin{cases} AH = BK; CD = HK \\ AH + HK + BK = AB \end{cases} \Rightarrow BK = 1.$$

Tam giác BCK vuông tại K , có $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Suy ra diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD} = CK . \frac{AB + CD}{2} = \sqrt{3} . \frac{4 + 6}{2} = 5\sqrt{3}$.

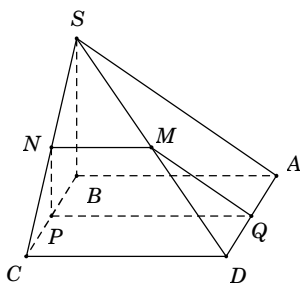
Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (P) và các cạnh SB, SC, SD .

Vì $(P) \parallel (ABCD)$ nên theo định lí Talet, ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{AD} = \frac{1}{3}$.

Khi đó (P) cắt hình chóp theo thiết diện $MNPQ$ có diện tích

$$S_{MNPQ} = k^2 . S_{ABCD} = \frac{5\sqrt{3}}{9}.$$

Câu 15: Chọn B.



Qua O kẻ đường thẳng (d) song song AB và cắt BC, AD lần lượt tại P, Q .

Kẻ PN song song với SB ($N \in SB$), kẻ QM song song với SA ($M \in SA$).

Khi đó $(MNPQ) \parallel (SAB) \Rightarrow$ thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $MNPQ$

Vì P, Q là trung điểm của BC, AD suy ra N, M lần lượt là trung điểm của SC, SD .

Do đó MN là đường trung bình tam giác $SCD \Rightarrow MN = \frac{CD}{2} = \frac{AB}{2} = 4$.

Và $NP = \frac{SB}{2} = 3; QM = \frac{SA}{2} = 3 \Rightarrow NP = QM \Rightarrow MNPQ$ là hình thang cân.

Hạ NH, MK vuông góc với PQ . Ta có $PH = KQ \Rightarrow PH = \frac{1}{2}(PQ - MN) = 2$.

Tam giác PHN vuông, có $NH = \sqrt{5}$.

Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = NH \cdot \frac{PQ + NM}{2} = 6\sqrt{5}$.

Câu 16: Chọn C. Xét hình lăng trụ có đáy là một đa giác (tam giác, tứ giác, ...), ta thấy rằng

Hình lăng trụ luôn có các cạnh bên song song và bằng nhau.

Hai mặt đáy của hình lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song.

Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác bằng nhau (tam giác, tứ giác, ...)

Các mặt bên của lăng trụ là các hình bình hành vì có hai cạnh là hai cạnh bên của hình lăng trụ, hai cạnh còn lại thuộc hai đáy song song.

Câu 17: Chọn C. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành, chúng bằng nhau nếu hình lăng trụ có đáy là tam giác đều.

Câu 18: Chọn C.

Xét hình chóp cụt có đáy là đa giác (tam giác, tứ giác, ...) ta thấy rằng:

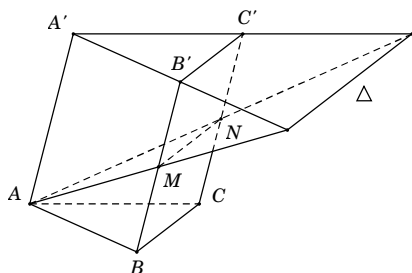
Các cạnh bên của hình chóp cụt đôi một cắt nhau.

Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang cân.

Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng.

Câu 19: Chọn C. Với hình chóp cụt, các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.

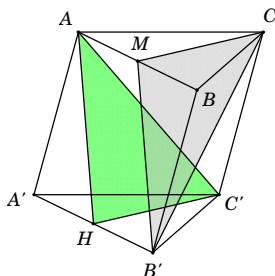
Câu 20: Chọn C.



Ta có
$$\begin{cases} MN \subset (AMN) \\ B'C' \subset (A'B'C') \longrightarrow \Delta \text{ là giao tuyến của hai mặt phẳng } (AMN) \text{ và} \\ MN \parallel B'C' \end{cases}$$

$(A'B'C')$ sẽ song song với MN và $B'C'$. Suy ra $\Delta \parallel BC$.

Câu 21: Chọn A.

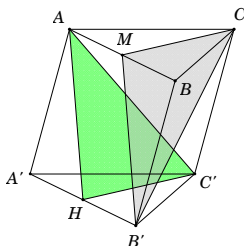


Gọi M là trung điểm của AB suy ra $MB' \parallel AH \longrightarrow MB' \parallel (AHC')$. (1)

Vì MH là đường trung bình của hình bình hành $ABB'A'$ suy ra MH song song và bằng BB' nên MH song song và bằng $CC' \longrightarrow MHC'C$ là hình hình hành $\longrightarrow MC \parallel HC' \longrightarrow MC \parallel (AHC')$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $(B'MC) \parallel (AHC') \longrightarrow B'C \parallel (AHC')$.

Câu 22: Chọn A.



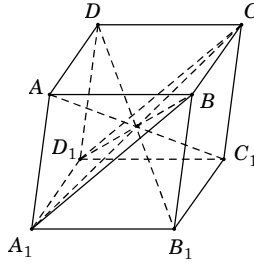
Gọi M là trung điểm của AB suy ra $MB' \parallel AH \longrightarrow MB' \parallel (AHC')$. (1)

Vì MH là đường trung bình của hình bình hành $ABB'A'$ suy ra MH song song và bằng BB' nên MH song song và bằng $CC' \longrightarrow MHC'C$ là hình hình hành $\longrightarrow MC \parallel HC' \longrightarrow MC \parallel (AHC')$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $(B'MC) \parallel (AHC') \longrightarrow B'C \parallel (AHC')$.

Câu 23: Chọn D. Vì mặt bên AA_1B_1B là hình bình hành, còn nó là hình chữ nhật nếu $ABC.A_1B_1C_1$ là hình lăng trụ đứng.

Câu 24: Chọn D.

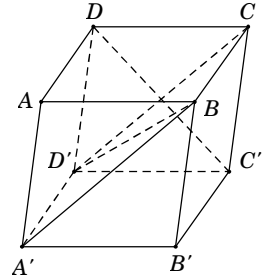


Dựa vào hình vẽ và tính chất của hình hộp chữ nhật, ta thấy rằng:

- Hình hộp có đáy $ABCD$ là hình bình hành.
- Các đường thẳng A_1C , AC_1 , DB_1 , D_1B cắt nhau tại tâm của AA_1C_1C , BDD_1B_1 .
- Hai mặt bên (ADD_1A_1) , (BCC_1B_1) đối diện và song song với nhau.
- AD_1 và CB là hai đường thẳng chéo nhau suy ra AD_1CB không phải là hình chữ nhật.

Câu 25: Chọn B. Dựa vào hình vẽ dưới và tính chất của hình hộp, ta thấy rằng:

- Hai mặt bên $(AA'B'B)$ và $(DD'C'C)$ đối diện, song song với nhau.
- Hình hộp có hai đáy $(ABCD)$, $(A'B'C'D')$ là hình bình hành $\Rightarrow A'B' = CD$ và $A'B' \parallel CD$ suy ra $A'B'CD$ là hình bình hành.
- $BD \parallel B'D'$ suy ra B, B', D', D đồng phẳng $\Rightarrow BB'D'D$ là tứ giác.
- Mặt phẳng $(BA'D')$ chứa đường thẳng CD' mà CD' cắt $C'D$ suy ra $(BA'D')$ không song song với mặt phẳng (ADC') .



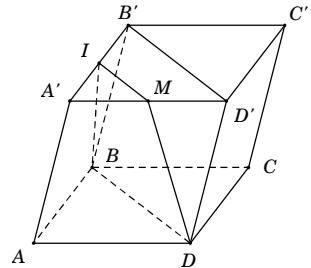
Câu 26: Chọn C. Đa giác thiết diện của một lăng trụ tam giác và một mặt phẳng có nhiều nhất 5 cạnh với các cạnh thuộc các mặt của hình lăng trụ tam giác.

Câu 27: Chọn C. Vì hình hộp là hình lăng trụ có đáy là tứ giác và có 6 mặt nên thiết diện của hình hộp và mặt phẳng bất kì là một đa giác có nhiều nhất 6 cạnh.

Câu 28: Chọn B. Ta có

$$\begin{cases} B'D' \subset (IB'D') \\ BD \subset (ABCD) \\ B'D' \parallel BD \end{cases} \longrightarrow \text{Giao}$$

tuyến của $(IB'D')$ với $(ABCD)$ là đường thẳng d đi qua I và song song với BD .



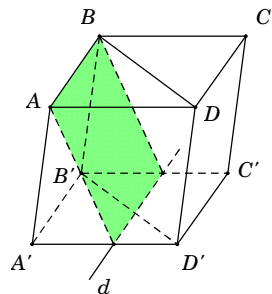
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $M = d \cap AD \longrightarrow IM \parallel BD \parallel B'D'$.

Khi đó thiết diện là tứ giác $IMB'D'$ và tứ giác này là hình thang.

Câu 29: Chọn B. Giả sử mặt phẳng (α) đi qua cạnh AB và cắt hình hộp theo tứ giác (T) .

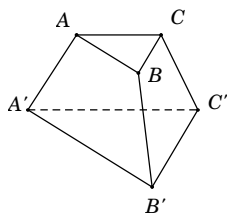
Gọi d là đường thẳng giao tuyến của (α) và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Ta chứng minh được $AB \parallel d$ suy ra tứ giác (T) là một hình bình hành.



Câu 30: Chọn B. Hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$ có hai mặt đáy là hai mặt phẳng song song nên tam giác ABC đồng dạng tam giác $A'B'C'$ suy ra

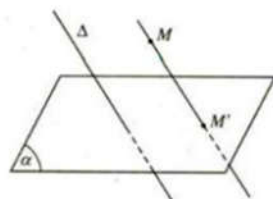
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC}{\frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AC}{A'C'} = \frac{1}{4}.$$



A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

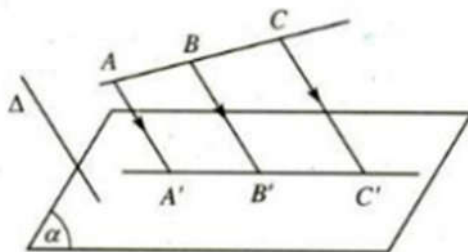
I. Định nghĩa.

- Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α) . Với mỗi điểm M trong không gian vẽ đường thẳng qua M và song song (hoặc trùng) với Δ , cắt (α) tại M' xác định.
- Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' như vậy gọi là phép chiếu song song lên mặt phẳng (α) theo phương Δ .
- (α) : Mặt phẳng chiếu
- Δ : phương chiếu
- M' : Hình chiếu song song của điểm M qua phép chiếu trên.

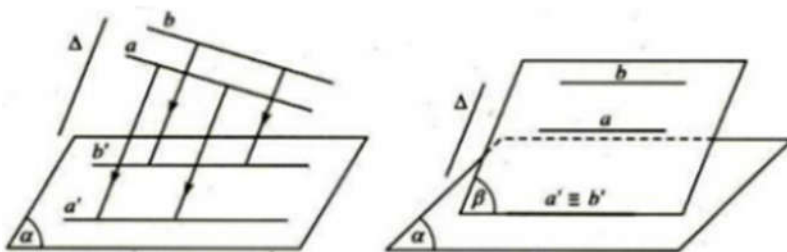


II. Các tính chất của phép chiếu song song.

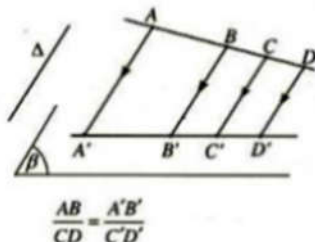
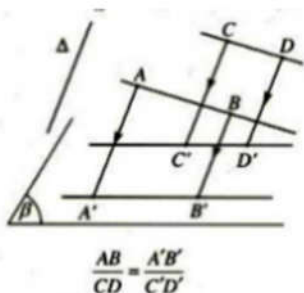
- a) Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.



- b) Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng.



- c) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- d) Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.



III. Hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng

- Hình biểu diễn của hình bình hành nói chung là hình bình hành (trường hợp đặc biệt thì là một đoạn thẳng)
- Hình biểu diễn của hình thang là một hình thang (trường hợp đặc biệt thì là một đoạn thẳng)
- Hình biểu diễn của hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông đều là hình bình hành (đặc biệt là một đoạn thẳng)
- Một tam giác bất kì đều có thể xem là hình biểu diễn của tam giác cân, tam giác vuông, tam giác đều
- Hình biểu diễn của một đường tròn là một đường elip hoặc một đường tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng

B. CÁC DẠNG TOÁN.

DẠNG 1:

VẼ HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH (H) CHO TRƯỚC.

Phương pháp:

Để vẽ hình biểu diễn của hình (H) ta cần xác định các yếu tố bất biến có trong hình (H).

- Xác định các yếu tố song song.
- Xác định tỉ số điểm M chia đoạn AB.
- Trong hình (H') phải đảm bảo tính song song và tỉ số của điểm M chia đoạn AB.

Ví dụ 1: Hình thang có thể là hình biểu diễn của một hình bình hành không?

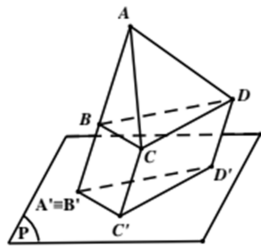
Lời giải

Hình thang không thể coi là hình biểu diễn của hình bình hành vì hai cạnh bên của hình thang không song song còn cặp cạnh đối của hình bình hành thì song song (tính song song không được bảo toàn).

Ví dụ 2: Vẽ hình biểu diễn của tứ diện ABCD lên mặt phẳng (P) theo phương chiếu AB (AB không song song với (P)).

Lời giải

- Vì phương chiếu l là đường thẳng AB nên hình chiếu của A và B chính là giao điểm của AB và (P)
- Do đó $AB \cap (P) = A' \equiv B'$
- Các đường thẳng lần lượt đi qua C, D song song với AB cắt (P) tại C', D' , thì C', D' chính là hình chiếu của C, D lên (P) theo phương AB .
- Vậy hình chiếu của tứ diện $ABCD$ là $\Delta A'C'D'$.



DẠNG 2:

CÁC BÀI TOÁN VỀ TÍNH TỈ SỐ CỦA HAI ĐOẠN THẲNG VÀ CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG.

Phương pháp:

- + Để tính tỉ số của điểm M chia đoạn AB ($\frac{MA}{MB}$) ta xét phép chiếu song

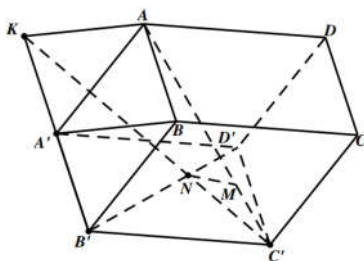
song lên mặt phẳng (α) theo phương l không song song với AB sao cho ảnh của M, A, B là ba điểm M', A', B' mà ta có thể tính được $\frac{M'A'}{M'B'}$

khi đó $\frac{MA}{MB} = \frac{M'A'}{M'B'}$

Ví dụ 3: Cho hình hộp $ABCD A' B' C' D'$. Xác định các điểm M, N , tương ứng trên các đoạn $AC', B' D'$ sao cho MN song song với BA' và tính tỉ số $\frac{MA}{MC'}$

Lời giải

Xét phép chiếu song song lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu BA' . Ta có N là ảnh của M hay M chính là giao điểm của $B'D'$ và ảnh AC' qua phép chiếu này. Do đó ta xác định M, N , như sau:



- + Trên $A'B'$ kéo dài lấy điểm K sao cho $A'K = B'A'$ thì $ABA'K$ là hình bình hành nên $AK \parallel BA'$ suy ra K là ảnh của A trên AC' qua phép chiếu song song.
- + Gọi $N = B'D' \cap KC'$. Đường thẳng qua N và song song với AK cắt AC' tại M . Ta có M, N , là các điểm cần xác định.

+ Theo định lí Thales, ta có $\frac{MA}{MC'} = \frac{NK}{NC'} = \frac{KB'}{C'D'} = 2$

Ví dụ 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N , lần lượt là trung điểm của CD và CC'

a) Xác định đường thẳng Δ đi qua M đồng thời cắt AN và AB' .

b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm của Δ với AN và AB' . Hãy tính tỉ số $\frac{IM}{IJ}$

Lời giải

a) Giả sử đã dựng được đường thẳng Δ

cắt cả AN và AB' . Gọi I, J lần lượt là giao điểm của Δ với AN và AB' .

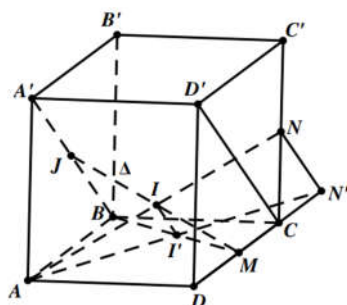
+ Xét phép chiếu song song lên $(ABCD)$ theo phương chiếu AB' . Khi đó ba điểm J, I, M lần lượt có hình chiếu là B, I', M .

Do J, I, M thẳng hàng nên B, I', M cũng thẳng hàng. Gọi N' là hình chiếu của N thì AN' là hình chiếu của AN . Vì $I \in AN \Rightarrow I' \in AN' \Rightarrow I' = BM \cap AN'$

Từ phân tích trên suy ra cách dựng:

- Lấy $I' = AN' \cap BM$.
 - Trong (ANN') dựng $II' \parallel NN'$ (đã có $NN' \parallel CD'$) cắt AN tại I .
 - Vẽ đường thẳng MI , đó chính là đường thẳng cần dựng.
- b) Ta có $MC = CN'$ suy ra $MN' = CD = AB$. Do đó I' là trung điểm của BM . Mặt khác $II' \parallel JB$ nên II' là đường trung bình của tam giác MBJ , suy ra

$$IM = IJ \Rightarrow \frac{IM}{IJ} = 1.$$



C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Cho hình chóp $SABCD$. có đáy là hình bình hành tâm O . M là trung điểm của SC .

a) Tìm giao điểm I của SD với (AMN) .

b) Tính $\frac{SI}{ID}$.

Bài 2: Cho hình chóp $SABCD$. có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi N là trung điểm của SD còn I, J , lần lượt là trung điểm của AB và ON . Chứng minh $IJ \parallel (SBC)$.

Bài 3: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Trên đường thẳng BA lấy điểm M sao cho A nằm giữa B và M , $MA = \frac{1}{2}AB$.

a) Xác định thiết diện của lăng trụ khi cắt bởi (α) qua M, B' và trung điểm E của AC .

b) Gọi $D = BC \cap (MB'E)$ Tính tỉ số $\frac{BD}{CD}$.

Bài 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, P , lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BC , còn N là điểm trên cạnh AB sao cho $AN = \frac{1}{3}AB$.

a) Tìm giao điểm Q của DC với (MNP) .

b) Tính tỉ số $\frac{DQ}{DC}$.

Bài 5: Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm trên cạnh DB , (α) là mặt phẳng đi qua M song song với AD, BC .

a) Xác định thiết diện của hình chóp với (α) .

b) Xác định vị trí của M để thiết diện là hình thoi.

c) Xác định vị trí của (α) để diện tích thiết diện lớn nhất.

Bài 6: Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D lần lượt là A', B', C', D' . Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm các cặp cạnh đối của tứ diện.

a) Chứng minh AA', BB', CC', DD' đồng quy tại G (G gọi là trọng tâm của tứ diện, AA', BB', CC', DD' được gọi là các đường trọng tuyến của tứ diện).

b) Chứng minh bảy đoạn thẳng $AA', BB', CC', DD', MN, PQ, RS$ đồng quy.

Bài 7: Cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$. Xác định các điểm M, N , trên các đoạn $AC', B'D'$ tương ứng sao cho $MN \parallel BA'$ và tính tỉ số $\frac{MA}{MC'}$.

Bài 8: Cho hình chóp $SABCD$. có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E là trung điểm của SC . Mặt phẳng (α) thay đổi nhưng luôn chứa AE cắt SB, SD lần lượt tại M, N . Xác định vị trí của M, N trên các cạnh SB, SD sao cho $\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD}$ đạt giá trị lớn nhất.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Qua phép chiếu song song, tính chất nào không được bảo toàn?

A) Chéo nhau B) Đồng quy C) Song song D) Thẳng hàng

Câu 2: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

A) Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng

B) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song

- C) Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không thay đổi thứ tự của ba điểm đó
- D) Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

Câu 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, qua phép chiếu song song lên mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ theo phương CC' biến M thành M' . Trong đó M là trung điểm của BC . Chọn mệnh đề đúng?

- A) M' là trung điểm của $A'B'$ B) M' là trung điểm của $B'C'$.
C) M' là trung điểm của $A'C'$ D) Cả ba đáp án trên đều sai.

Câu 4: Qua phép chiếu song song biến ba đường thẳng song song thành

- A) Ba đường thẳng đôi một song song với nhau
B) Một đường thẳng
C) Thành hai đường thẳng song song
D) Cả ba trường hợp trên

Câu 5: Khẳng định nào sau đây đúng?

- A) Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình bình hành.
B) Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình vuông.
C) Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình thoi.
D) Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là một tam giác

Câu 6: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai:

- A) Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu của nó.
B) Một tam giác bất kỳ đều có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác cân.
C) Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó
D) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

Câu 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi I và I' lần lượt là trung điểm của AB , $A'B'$. Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ theo phương chiếu AI' biến I thành ?

- A) A' B) B' C) C' D) I'

Câu 8: Cho tam giác ABC ở trong mặt phẳng (α) và phương l . Biết hình

chiếu (theo phương l) của tam giác ABC lên mặt phẳng (P) là một đoạn thẳng. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A) $(\alpha) // (P)$ B) $(\alpha) \equiv (P)$
C) $(\alpha) // l$ hoặc $l \subset (\alpha)$ D) A, B, C đều sai

Câu 9: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành, O là tâm của đáy.

Trên cạnh SB, SD lần lượt lấy điểm M; N sao cho $SM = 2MB$ và $SN = \frac{1}{3}SD$. Hình chiếu của M; N qua phép chiếu song song đường thẳng SO lên mặt phẳng chiếu (ABCD) lần lượt là P; Q. Tính tỉ số OP/OQ .

- A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 1

Câu 10: Cho tứ diện ABCD. Gọi M là trung điểm của AB. Tìm hình chiếu của M trên mp(BCD) theo phương AC?

- A) Trung điểm BD B) Trung điểm BC
C) Trọng tâm giác BCD D) Điểm B

E. HƯỚNG DẪN GIẢI



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

a) Gọi $E = AN \cap CD, F = AN \cap BC$ và $I = EM \cap SD$ thì $I = SD \cap (AMN)$.

b) Ta có $BF // AD \Rightarrow \frac{BF}{AD} = \frac{NB}{ND} = \frac{1}{3}$

$$\text{Từ } \frac{BF}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{FC}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{EC}{ED} = \frac{FC}{AD} = \frac{2}{3}$$

Kẻ $CJ // SD, J \in EI$ Ta có

$$\frac{MC}{MS} = \frac{CJ}{IS}; \frac{ID}{CJ} = \frac{ED}{EC} \Rightarrow \frac{IS}{ID} = \frac{MS}{MC} \cdot \frac{EC}{ED} = \frac{2}{3}$$

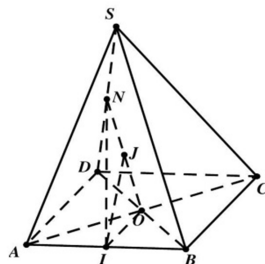
$$\text{Vậy } \frac{IS}{ID} = \frac{2}{3}.$$

Bài 2: Ta có $ON // SB \subset (SBC) \Rightarrow ON // (SBC)$ (1)

Tương tự $ON // BC \subset (SBC) \Rightarrow ON // (SBC)$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $(ONI) // (SBC)$ mà $IJ \subset (ONI)$
 $\Rightarrow IJ // (SBC)$

Bài 3:



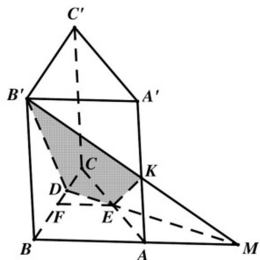
a) Trong $(ABB'A')$ gọi $K = MB' \cap AA'$. Trong (ABC) gọi $D = ME \cap CB$. Thiết diện là tứ giác $DEKB'$.

a) Kẻ $EF \parallel AB (F \in CB)$. Khi đó EF là đường trung bình

của tam giác ABC và $EF = \frac{AB}{2}$. Xét tam giác DBM ta

$$\text{có } \frac{FD}{BD} = \frac{EF}{BM} = \frac{1}{3} \Rightarrow FD = \frac{1}{2}FB = \frac{1}{2}FC \quad \text{tức } D \text{ là}$$

trung điểm của FC do đó $\frac{BD}{CD} = 3$



Bài 4:

a) Trong (ABC) gọi $E = AC \cap NP$ trong (ACD) gọi $Q = EM \cap CD$

$$\begin{cases} Q \in CD \\ Q \in EM \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q = CD \cap (MNP)$$

b) Kẻ $AF \parallel CD, F \in AD$ kẻ $KP \parallel AN, K \in AC$

$$\text{Ta có: } \frac{AF}{DQ} = \frac{MA}{MD} = 1 \Rightarrow AF = DQ \quad (1)$$

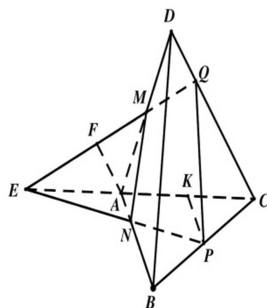
$$\frac{AF}{QC} = \frac{EA}{EC} \quad (2)$$

$$\text{Do } KP = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 3AN = \frac{3}{2}AN \text{ nên}$$

$$\frac{AN}{KP} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{EA}{EK} = \frac{AN}{KP} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra } \frac{QD}{QC} = \frac{FA}{QC} = \frac{EA}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{QD}{DC} = \frac{1}{3}$$



Bài 5:

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABD) \\ AD \subset (ABD) \\ AD \parallel (\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = MN \parallel AD, N \in AB$$

Tương tự :

$$(\alpha) \cap (ABC) = NP \parallel BC, P \in AC.$$

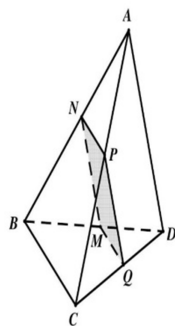
$$(\alpha) \cap (BCD) = MQ \parallel BC, Q \in CD$$

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Giả sử có điểm M trên cạnh BD để $MNPQ$ là hình thoi.

$$\text{Ta có } \frac{MQ}{BC} = \frac{DM}{DB} \Rightarrow MQ = \frac{DM \cdot BC}{BD}$$

$$\text{Tương tự } \frac{MN}{AD} = \frac{MB}{BD} \Rightarrow MN = \frac{MB \cdot AD}{BD} \quad (2)$$



Do $MNPQ$ là hình bình hành nên nó là hình thoi khi $MN = MQ$ do đó từ (1) và

$$(2) \text{ ta có } \frac{DM.BC}{DB} = \frac{AD.MB}{BD} \Rightarrow DM.BC = DA(DB - DM)$$

$$\Leftrightarrow DM.(BC + AD) = AD.BD \Leftrightarrow DM = \frac{AD.BD}{BC + AD}$$

Rõ ràng $0 < DM = \frac{AD.BD}{BC + AD} < BD$ nên điều kiện M nằm trên BD được thỏa mãn.

Vậy thiết diện là hình thoi khi M nằm trên cạnh BD sao cho $DM = \frac{AD.BD}{BC + AD}$

c) Ta có $\frac{MQ}{BC} = \frac{MD}{DB}, \frac{MN}{DA} = \frac{MB}{DB} \Rightarrow \frac{MQ}{BC} + \frac{MN}{AD} = \frac{MD + MB}{DB} = 1$

Vì $MQ \parallel BC, MN \parallel AD$ mà BC, AD không đối nên góc giữa MN và MQ không đổi, do đó $S_{MNPQ} = MN.MQ \sin \phi$ (trong đó ϕ là góc giữa MN và MQ). Ta thấy $\sin \phi$ không đổi và

$$S_{MNPQ} = MN.MQ \sin \phi = (AD.BC \sin \phi) \cdot \frac{MN}{AD} \cdot \frac{MQ}{BC}$$

$$\leq AD.BC \sin \phi \cdot \left(\frac{\frac{MN}{AD} + \frac{MQ}{BC}}{2} \right)^2 = \frac{AD.BC \sin \phi}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{MN}{AD} = \frac{MQ}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow M$ là trung điểm của BD .

Vậy thiết diện thiết diện lớn nhất bằng $\frac{AD.BC \sin \phi}{4}$

khi M là trung điểm của BD .

Bài 6:

a) Gọi N là trung điểm của cạnh CD , thì ta dễ thấy $A' \in BN$ và $B' \in AN$ do đó trong (ABN) , AA' và BB' cắt nhau tại điểm G .

Tương tự chứng minh được các đường thẳng AA', BB', CC', DD' đôi một cắt nhau, mà bốn đường thẳng đôi một cắt nhau thì chúng đồng quy.

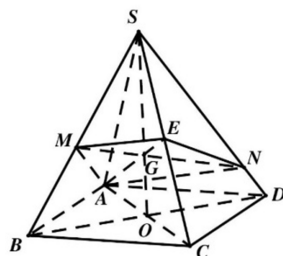
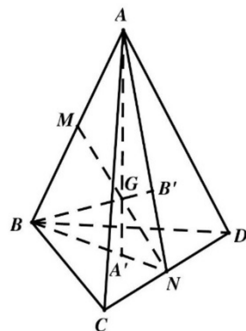
b) Dễ dàng chứng minh được G là trung điểm của MN và từ đó ta có bảy đường thẳng $AA', BB', CC', DD', MN, PQ, RS$ đồng quy tại G .

Bài 7: $\frac{MA}{MC'} = 2$.

Bài 8: Gọi $O = AC \cap BD, G = AE \cap SO$, thì G là trọng tâm của tam giác SAC

Dễ thấy $G \in MN$

Ta có $\frac{S_{\triangle SGM}}{S_{\triangle SOB}} = \frac{SG.SM}{SO.SB} = \frac{2}{3} \frac{SM}{SB}$



$$\frac{S_{\triangle SGN}}{S_{\triangle SOD}} = \frac{SG \cdot SN}{SO \cdot SD} = \frac{2}{3} \frac{SN}{SD}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{SMG}}{S_{SOB}} + \frac{S_{SNG}}{S_{SOD}} = \frac{2}{3} \left(\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD} \right)$$

$$\text{Mặt khác } \frac{S_{SMG}}{S_{SOB}} + \frac{S_{SNG}}{S_{SOD}} = \frac{2S_{SMG}}{S_{SBD}} + \frac{2S_{SNG}}{S_{SBD}} = \frac{2S_{SMN}}{S_{SBD}} = \frac{2SM \cdot SN}{SB \cdot SD}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{3} \left(\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD} \right) = \frac{SM \cdot SN}{SB \cdot SD} \Leftrightarrow \frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3 \quad (*)$$

$$\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD} = \frac{1}{3} \left(\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD} \right) \left(\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} \right) = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{SM \cdot SD}{SN \cdot SB} + \frac{SN \cdot SB}{SM \cdot SD} \right)$$

$$\text{Đặt } a = \frac{SB}{SM}, b = \frac{SD}{SN} \text{ thì } a + b = 3 \text{ và } \frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD} = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$$

Do $a \geq 1, b \geq 1$ và $a + b = 3$ nên ta có $a \in [1; 2]$, từ đó .

$$\text{Ta có } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a}{3-a} + \frac{3-a}{a} = \frac{9-6a+2a^2}{a(3-a)} \leq \frac{5}{2}, \forall a \in [1; 2]$$

$$\Rightarrow \frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD} = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \leq \frac{1}{3} \left(2 + \frac{5}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

Vậy $\text{Max} \left(\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD} \right) = \frac{3}{2}$ $M \equiv B, N$ là trung điểm của SD hoặc $N \equiv D, M$ là trung điểm của SB .



1.A

2.B

3.B

4.D

5.B

6.A

7.B

8.C

9.A

10.B

Câu 1: Chọn A. Tính chất của phép chiếu song song.

Câu 2: Chọn B. Tính chất của phép chiếu song song

Câu 3: Chọn B. Do M là trung điểm của BC suy ra M' là trung điểm của B'C'

Câu 4: Chọn D. Tính chất của phép chiếu song song.

Câu 5: Chọn B. Qua phép chiếu song song theo phương AA' lên mặt phẳng (ABCD) ta có: biến A' thành A, biến B' thành B, biến C' thành C, biến D' thành D.

Nên hình chiếu song song của hình lập phương ABCD.A'B'C'D' là hình vuông ABCD

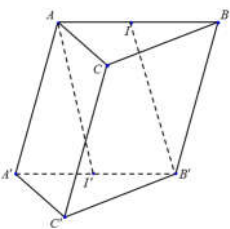
Câu 6: Chọn A. Khi mặt phẳng chiếu song song với đường thẳng đã cho thì đường thẳng đó song song với hình chiếu của nó

Câu 7: Chọn B. Hình 1

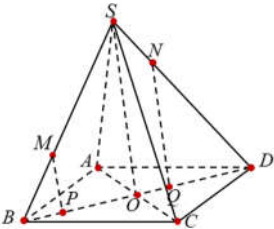
Câu 8: Chọn C. Khi phương chiếu l song song hoặc được chứa trong mặt phẳng (α). Thì hình chiếu của tam giác là đoạn thẳng trên mặt phẳng (P)

Câu 9: Chọn A. Hình 2.

Câu 10: Chọn B.



Hình 1



Hình 2

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, CD, AD .

- Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD) ; (SAD) và (SBC) .
- Tìm giao điểm E của SC và (MNP) .
- Chứng minh: $NE \parallel (SBP)$.

Bài 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
- Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và ABC . Chứng minh $G_1G_2 \parallel (SCD)$.

Bài 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, I lần lượt là trung điểm SA và OD .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MCD) và (SAB) .
- Tìm giao tuyến của SI và (MBC) .

Bài 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn là AB và $AB = 3CD$. Trên cạnh AD, SA lần lượt lấy hai điểm M và N thỏa mãn $AM = 2MB, SA = 3SN$.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
- Chứng minh rằng tứ giác $CDMB$ là hình bình hành, từ đó suy ra $DM \parallel (SBC)$.
- Chứng minh $(DMN) \parallel (SBC)$.
- Gọi I là trung điểm SM . Tìm giao điểm K của DI và mp (SAC) . Tính tỷ số $\frac{KD}{KI}$.

Bài 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB \parallel CD$ và $AB = 2CD$.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
- Trong (SCD) , dựng đường thẳng Δ đi qua D và song song với SC . Tìm giao điểm của đường thẳng Δ và (SAB) .

c) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SB . Chứng minh rằng MC song song với (SAD) .

Bài 6: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của AB , N trên SD sao cho $DN = 2NS$, E là điểm đối xứng của O qua M .

- Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .
- Tìm giao điểm K của đường thẳng SB và (OMN) .
- Chứng minh đường thẳng AC song song với mặt phẳng (SBE) .

Bài 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có M là giao điểm của hai đường thẳng AB' và $A'B$; N là giao điểm của hai đường thẳng BC' và $B'C$.

- Chứng minh rằng đường thẳng $MN \parallel (A'B'C')$.
- G là trọng tâm tam giác ABC . Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng (MNG) và lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Các khẳng định sau đúng hay sai ?

	Đúng	Sai
A) a và b chéo nhau $\Rightarrow \exists! (\alpha): \begin{cases} a \subset (\alpha) \\ b \parallel (\alpha) \end{cases}$	☐	☐
B) $\begin{cases} a \text{ vaø } b \text{ chéo nhau} \\ a // c \end{cases} \Rightarrow c // b$	☐	☐
C) $\begin{cases} a \text{ vaø } b \text{ chéo nhau} \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow b \parallel (\alpha)$	☐	☐
D) $\begin{cases} a // b \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow b \parallel (\alpha)$	☐	☐

Cho hình lăng trụ $A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n$. Dùng giả thiết trên để giải câu 2 và 3.

Câu 2: Tổng số các cạnh đáy và cạnh bên là :

- A) $n + 3$ B) $2n + 3$ C) $3n$ D) $4n$

Câu 3: Tổng ba góc tại mỗi đỉnh hình lăng trụ là:

- A) 90° B) 180° C) 360° D) nhỏ hơn 540°

Câu 4: Hai đường thẳng trong không gian có mấy vị trí tương đối ?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1

Câu 5: Hai mặt phẳng trong không gian có mấy vị trí tương đối ?

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

Câu 6: Cho a và b là hai đường thẳng chéo nhau. Xét các khẳng định sau :

A: “ a và b không có điểm chung”. B: “ a và b không đồng phẳng”.

C: “Nếu $c // a$ thì c cắt b ”.

D: “Nếu $a \subset (\alpha)$ thì $b // (\alpha)$ ”.

Tìm khẳng định đúng :

A) A đúng; B, C, D sai.

B) C, D đúng; A, B sai.

C) A, B đúng; C, D sai.

D) A, B, C, D đúng.

Câu 7: Cho hình chóp cụt ABC.A'B'C'. Các khẳng định sau đúng hay sai ?

Đúng

Sai

A) Hai đáy là hai tam giác đồng dạng.

☐☐

B) Đoạn thẳng nối trọng tâm hai đáy

song song với các cạnh bên.

☐☐

C) Các mặt bên là hình thang cân.

☐☐

D) Diện tích đáy lớn gấp 2 lần diện tích đáy nhỏ.

☐☐

Câu 8: Cho hình chóp S.ABC. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Mặt phẳng (α) qua SM cắt đoạn thẳng BC tại N và tia AC tại K. Mặt phẳng (SMN) là thiết diện của (α) với các hình chóp nào?

A) S.ABK

B) A.SMC

C) A.SBC

D) N.SAC

Câu 9: Cho hình chóp S.ABC. Gọi M, N, P lần lượt trên SA, SB, SC sao cho MP không song song với AC, MN không song song AB, NP không song song BC. Gọi E là giao điểm của NP và (ABC), J là giao điểm của MP và mặt phẳng (ABC). Tìm khẳng định đúng:

A) Ba điểm E, J và giao điểm của MN với AC thẳng hàng.

B) Ba điểm E, J và giao điểm của MN với AB thẳng hàng.

C) Ba điểm E, J và giao điểm của MB với AC thẳng hàng.

D) Ba điểm E, J và giao điểm của NP với AB thẳng hàng.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD. Mặt phẳng (α) qua MN cắt SB, SC tại Q và P. Dùng giả thiết trên để giải các câu 10, 11 và 12.

Câu 10: Tứ giác MNPQ là hình gì?

A) Hình bình hành

B) Hình thang

C) Hình chữ nhật

D) Tứ giác lồi

Câu 11: Gọi I là giao điểm của AQ và DP. Khi mặt phẳng (α) quay quanh MN thì I di động đường cố định nào?

A) I di động trên giao tuyến của (SAD) và (SBC)

B) I di động trên giao tuyến của (SAB) và (SDC)

C) I di động trên đường thẳng qua S và song song với AC.

D) I di động trên đường thẳng qua S và song song với BD.

Câu 12: Gọi E là giao điểm của MP và NQ. Khi (α) quay quanh MN thì E di động trên đường cố định nào?

A) Đường thẳng qua E và song song với SD

B) Đường thẳng qua E và song song với SC

C) Giao tuyến của (MNP) và (QNC)

D) Giao tuyến của (SAC) và (SBD)

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. ΔSAC vuông cân tại A. M là điểm di động trên AB, $AM = x (0 < x < A)$. Mặt phẳng (α) qua M và song song với (SAB) cắt BC tại N_1 , cắt SB tại P. Dùng giả thiết trên để giải các câu 13, 14 và 15.

Câu 13: Độ dài đoạn MN là:

A) $\frac{a-x}{2}$

B) $a-x$

C) $a-\frac{x}{2}$

D) $2a-x$

Câu 14: ΔMNP là tam giác gì?

A) ΔMNP cân tại P

B) ΔMNP vuông tại P

C) ΔMNP vuông cân tại M

D) ΔMNP vuông tại N

Câu 15: Diện tích ΔMNP là :

A) $(a-x)\left(a-\frac{x}{2}\right)$

B) $2a\left(a-\frac{x}{2}\right)$

C) $\frac{a(a-x)}{2}$

D) $\frac{(a-x)^2}{2}$

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. ΔSAD vuông cân tại A. M là điểm di động trên AB, $AM = x (0 < x < A)$. Mặt phẳng (α) qua M và song song với (SAD) cắt SB, SC, DC lần lượt tại Q, P và N.

Dùng giả thiết trên để giải các câu 16, 17 và 18.

Câu 16: Độ dài đoạn PQ là :

A) $2a-\frac{x}{2}$

B) x

C) $a-x$

D) $\frac{x}{2}$

Câu 17: Tứ giác MNPQ là hình gì?

- A) Hình thang
B) Hình thang cân
C) Hình thang vuông
D) Hình bình hành

Câu 18: Diện tích tứ giác MNPQ là:

- A) $\frac{a^2 - x^2}{2}$
- B) $\frac{(a-x)(2a-x)}{2}$
- C) $\frac{\left(a - \frac{x}{2}\right)(a+x)}{2}$
- D) $\frac{a(a+x)}{2}$

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CC' . P là điểm đối xứng của C qua A . Dùng giả thiết trên để giải các câu 19, 20, 21 và 22.

Câu 19: Gọi E là giao điểm của MN và BB'. Vị trí của E là:

- A) $\overrightarrow{BB'} = -4\overrightarrow{BE}$ B) $\overrightarrow{BB'} = -3\overrightarrow{BE}$ C) $\overrightarrow{BB'} = -2\overrightarrow{BE}$ D) $\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{BE}$**

Câu 20: Gọi F là giao điểm của AB với $(A'MN)$. Vị trí của F là:

- A)** $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$ **B)** $\overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{FB}$ **C)** $\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{FB}$ **D)** $\overrightarrow{FB} = -2\overrightarrow{FA}$

Câu 21: Gọi R là giao điểm của AB với (PMN). Vị trí của R là:

- A)** $\overrightarrow{RB} = -3\overrightarrow{RA}$ **B)** $\overrightarrow{RA} = -2\overrightarrow{RB}$ **C)** $\overrightarrow{RB} = -\overrightarrow{RA}$ **D)** $\overrightarrow{RB} = -2\overrightarrow{RA}$

Câu 22: Gọi Q là giao điểm của AA' với (PMN). Vị trí của Q là:

- A) $\overrightarrow{QA'} = -4\overrightarrow{QA}$ B) $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AA'}$ C) $\overrightarrow{QA'} = -2\overrightarrow{QA}$ D) $\overrightarrow{QA'} = -\overrightarrow{QA}$

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AD và CC' sao cho $\frac{AM}{AD} = \frac{CN}{CC'} = \frac{2}{3}$. Dùng giả thiết trên để giải các câu 23 và 24.

Câu 23: Gọi (α) là mặt phẳng chứa MN và song song (ACB') . Gọi E là giao điểm của DC với (α) . Vị trí của E được xác định bởi hệ thức:

- A)** $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{ED}$ **B)** $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{ED}$ **C)** $\overrightarrow{ED} = -2\overrightarrow{EC}$ **D)** $\overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{EC}$

Câu 24: Thiết diện của hình lăng trụ bị cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?

- A) Tam giác B) Tứ giác C) Ngũ giác D) Lục giác**

C. HƯỚNG DẪN GIẢI



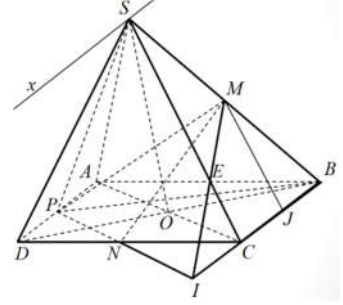
Bài 1:

a) Ta có:
$$\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$$

Mà $S \in (SAC) \cap (SBD) \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$

Tứ giác ABCD là hình bình hành nên $AD \parallel BC$.

Ta có:
$$\begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ S \in (SAD) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Sx = (SAD) \cap (SBC) \\ Sx \parallel AD \parallel BC \end{cases}$$



b) Trong $(ABCD)$ gọi $I = PN \cap BC$. Trong (SBC) gọi $E = MI \cap SC$.

$$\Rightarrow \begin{cases} Sx = (SAD) \cap (SBC) \\ Sx \parallel AD \parallel BC \end{cases}$$

c) $\triangle NDP = \triangle NCI$ ($\widehat{DNP} = \widehat{CNI}$; $ND = NC$; $\widehat{NDP} = \widehat{NCI}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} NP = NI \\ CI = DP \end{cases} \Rightarrow N \text{ là trung điểm đoạn } PI$$

Gọi J là trung điểm đoạn BC $\Rightarrow CI = IC = IB \left(= \frac{BC}{2} \right)$.

Xét $\triangle IEM$, ta có :C là trung điểm IJ; $CE \parallel MJ$

$\Rightarrow E$ là trung điểm đoạn MI.

Ta có :

$NE \parallel PM$ (NE là đường trung bình của $\triangle IPM$)

$NE \not\subset (SBP)$; $PM \subset (SBP)$

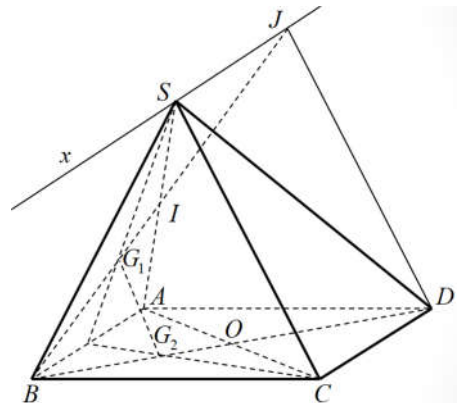
$\Rightarrow NE \parallel (SBP)$.

Bài 2:

a) Tứ giác ABCD là hình bình hành nên $AB \parallel DC$.

Ta có:
$$\begin{cases} AB \parallel DC \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Sx = (SAB) \cap (SCD) \\ Sx \parallel AB \parallel CD \end{cases}$$



b) Gọi I là trung điểm SA. Gọi O là tâm hình

hình hành ABCD.

Trong (SAB) gọi $J = BI \cap Sx$.

$$\Delta IAB = \Delta ISJ \left(\widehat{AIB} = \widehat{SIJ}; IA = IS; \widehat{IAB} = \widehat{ISJ} \right) \Rightarrow IB = IJ$$

$$BG_1 = \frac{2}{3} BI = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} BJ = \frac{1}{3} BJ; \quad BG_2 = \frac{2}{3} BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} BD = \frac{1}{3} BD.$$

Xét ΔBJD , ta có: $\frac{BG_1}{BJ} = \frac{BG_2}{BD} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel JD$ (định lý Thales đảo)

Mà $G_1G_2 \not\subset (SCD)$; $JD \subset (SCD) \Rightarrow G_1G_2 \parallel (SCD)$

Bài 3:

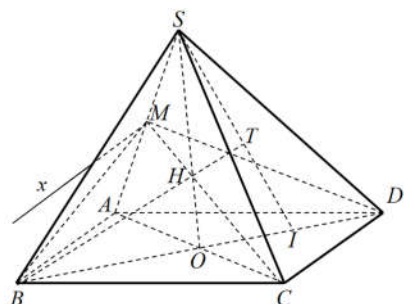
a) Tứ giác ABCD là hình bình nên $AB \parallel DC$.

$$\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (MCD) \\ M \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Mx = (MCD) \cap (SAB) \\ Mx \parallel AB \parallel CD \end{cases}$$

b) Trong (SAC) gọi $H = MC \cap SO$. Trong (SBD)

gọi $T = SI \cap BH$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} T \in SI \\ T \in BH \subset (MBC) \end{cases} \Rightarrow T = SI \cap (MBC).$$



Lời bình: để dễ dàng giải câu b, ta thực hiện các bước làm nháp:

+ Chọn mặt phẳng phụ chứa IS là (SBD) .

+ Tìm $HB = (SBD) \cap (MBC)$.

+ Tìm $T = SI \cap BH$.

Bài 4:

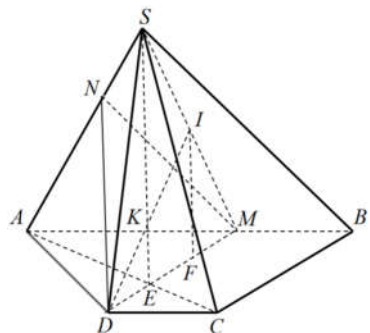
a) ABCD là hình thang có đáy lớn AB $\Rightarrow AB \parallel DC$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Sx = (SCD) \cap (SAB) \\ Sx \parallel AB \parallel CD \end{cases}$$

b) Xét tứ giác BCDM, ta có: $\begin{cases} DC \parallel BM \quad (AB \parallel DC) \\ DC = BM \quad \left(= \frac{1}{3} AB \right) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tứ giác BCDM là hình bình hành.

$\Rightarrow DM \parallel BC$.



$$\text{Ta có: } \begin{cases} DM \parallel BC \\ DM \not\subset (SBC) \Rightarrow DM \parallel (SBC). \\ BC \subset (SBC) \end{cases}$$

$$\text{c) Vì } AM = 2MB \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}. \text{ Vì } SA = 3SN \Rightarrow \frac{AN}{AS} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Xét } \triangle SAB, \text{ ta có } \frac{AN}{AS} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel SB \text{ (định lý Thales đảo)}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MN \parallel SB \\ DM \parallel BC \\ MN, MD \subset (MND) \Rightarrow (MND) \parallel (SBC). \\ SB, BC \subset (SBC) \end{cases}$$

d) Trong $(ABCD)$, gọi $E = AC \cap DM$. Trong (SDM) , gọi $K = SE \cap DI$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} K \in DI \\ K \in SE \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow K = DI \cap (SAC).$$

$$\text{Ta có } \triangle EDC \sim \triangle EMA \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{ED}{EM} = \frac{DC}{MA} = \frac{1}{2} \Rightarrow EM = 2ED$$

Gọi F là trung điểm đoạn EM $\Rightarrow DE = EF = FM$.

IF là đường trung bình của $\triangle SME \Rightarrow IF \parallel SE$ hay $IF \parallel KE$.

$\triangle DFI$ có: I là trung điểm DF; $IF \parallel KE \Rightarrow K$ là trung điểm đoạn DI.

$$\Rightarrow \frac{KD}{KI} = \frac{1}{2}.$$

Bài 5:

$$\text{a) Ta có: } \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Sx = (MCD) \cap (SAB) \\ Sx \parallel AB \parallel CD \end{cases}$$

b) Trong (SDC) gọi $I = \Delta \cap Sx$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} I \in \Delta \\ I \in Sx \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow I = \Delta \cap (SAB)$$

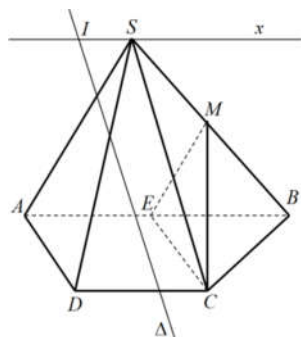
c) Gọi E là trung điểm AB.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AE \parallel DC \text{ (} AB \parallel DC \text{)} \\ AE = DC \left(= \frac{1}{2} AB \right) \end{cases}$$

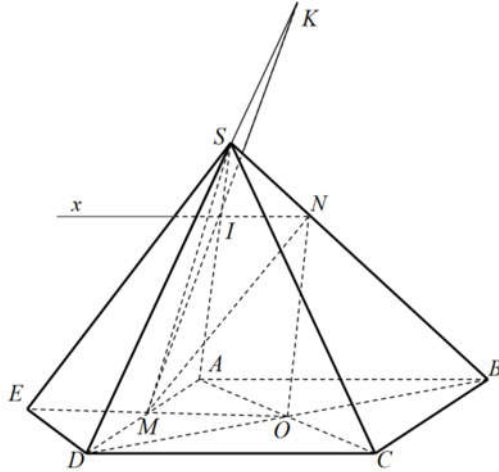
$\Rightarrow$ Tứ giác AECD là hình bình hành.

$\Rightarrow EC \parallel AD$

ME là đường trung bình của $\triangle SAB$ nên $ME \parallel SA$.



Bài 6:


$$\text{Ta có: } \begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ S \in (SAD) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = (SAD) \cap (SBC) \\ d \parallel AD \parallel BC \\ S \in d \end{cases}$$
$$\text{Ta có: } \begin{cases} OM \parallel AD \\ OM \subset (OMN) \\ AD \subset (SAD) \\ N \in (OMN) \cap (SAD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Nx = (OMN) \cap (SAD) \\ Nx \parallel AD \parallel OM \end{cases}$$
$$\text{Ta có: } \begin{cases} I \in SB \\ I \in IM \subset (OMN) \end{cases} \Rightarrow K = SB \cap (OMN).$$
$$\Rightarrow AC \parallel (SBE).$$

Bài 7:

a) Hai điểm M, N lần lượt là tâm của 2 hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$ nên M là trung điểm BA' và N là trung điểm BC' .

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình $\triangle BA'C'$

$\Rightarrow MN \parallel A'C'$

Mà $MN \not\subset (A'B'C')$; $A'C' \subset (A'B'C')$

$\Rightarrow MN \parallel (A'B'C')$.

b) Ta có:
$$\begin{cases} MN \parallel AC \ (\parallel A'C') \\ MN \subset (MNG) \\ AC \subset (ABC) \\ G \in (GBC) \cap (ABC) \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} Gx = (GBC) \cap (ABC) \\ Gx \parallel AC \parallel MN \end{cases}$

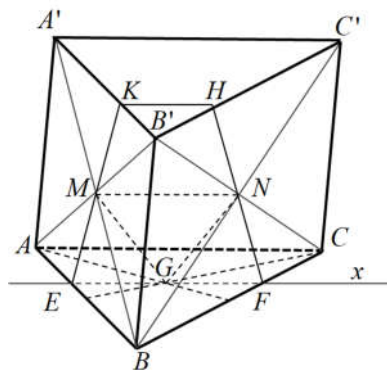
Trong (ABC) gọi $E = Gx \cap AB$, $F = Gx \cap BC$.

Trong $(ABB'A')$ gọi $K = ME \cap A'B'$; Trong $(BCC'B')$ gọi $H = NF \cap B'C'$.

Ta có: $EF = (GMN) \cap (ABC)$; $FH = (GMN) \cap (BCC'B')$; $HK = (GMN) \cap (A'B'C')$;

$KE = (GMN) \cap (ABB'A')$.

Vậy thiết diện là tứ giác $EFHK$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1.	A.Đ	B.S	C.S	D.S	2.C	3.D	4.A	5.C	6.C
7.	A.Đ	B.S	C.S	D.S	8.C	9.B	10.B	11.B	12.D
13.B	14.C	15.D	16.B	17.C	18.A	19.C	20.A	21.D	22.B
23.A	24.C								

Câu 2: Hai đáy có tổng $2n$ cạnh, có n cạnh bên. Vậy có $3n$ cạnh.

Câu 3: Chọn D. Mỗi đỉnh của hình lăng trụ có 3 góc, mỗi góc nhỏ hơn 180° nên tổng ba góc nhỏ hơn 540° .

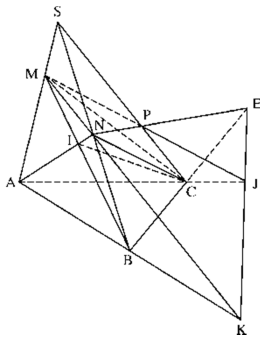
Câu 4: Chọn A. Song song, cắt nhau, trùng nhau, chéo nhau.

Câu 5: Chọn C. Song song, trùng nhau, cắt nhau.

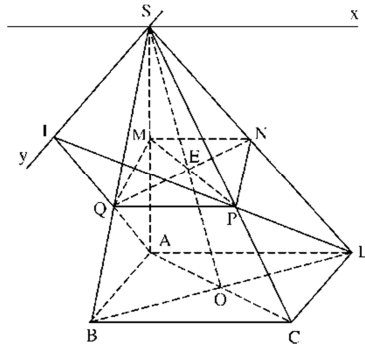
Câu 7: Áp dụng tính chất hình chóp cụt.

Câu 8: Chọn C. Áp dụng định nghĩa thiết diện.

Câu 9: Chọn B. Trong (SAB) , gọi $\{K\} = NM \cap AB$. Ba điểm K, E, J thuộc giao tuyến hai mặt phẳng (MNP) và (ABC) nên chúng thẳng hàng. (Hình 1).



Hình 1



Hình 2

Câu 10: Chọn B. (α) và (SBC) có chứa hai đường thẳng song song là MN và BC
 $\Rightarrow PQ \parallel MN$. (Hình 2).

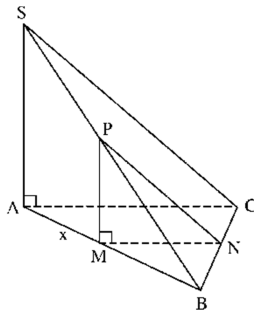
Câu 11: Chọn B. $I \in (SAB) \cap (SDC)$. (Hình 2).

Câu 12: Chọn D. $E \in (SAC) \cap (SBD)$. (Hình 2).

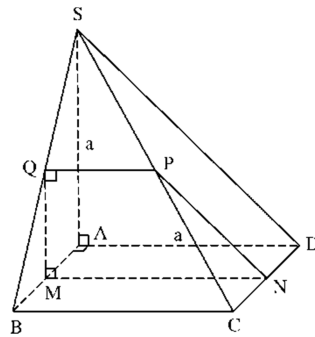
Câu 13: Chọn B. $\frac{MN}{AC} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow MN = \frac{AC \cdot BM}{AB} = \frac{a(a-x)}{a} = a-x$. (Hình 3).

Câu 14: Chọn C. $\frac{MP}{SA} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow MN = MP = a-x$; $\widehat{PMN} = \widehat{SAC} = 90^\circ \Rightarrow \Delta MNP$ vuông cân tại A. (Hình 3).

Câu 15: Chọn D. $S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2} MN \cdot MP = \frac{(a-x)^2}{2}$. (Hình 3).



Hình 3



Hình 4

Câu 16: Chọn B. $\frac{PQ}{BC} = \frac{SQ}{SB} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow PQ = \frac{BC \cdot AM}{AB} = \frac{a \cdot x}{a} = x$. (Hình 4).

Câu 17: Chọn C. $MN \parallel PQ$, $\widehat{PQM} = \widehat{QMN} = 90^\circ$. Vậy Hình thang MNPQ là hình thang vuông. (Hình 4).

Câu 18: Chọn A. $\frac{MQ}{SA} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow MQ = a-x$;

$$S_{\Delta MNPQ} = \frac{(PQ + MN) \cdot MQ}{2} = \frac{(a+x)(a-x)}{2} = \frac{a^2 - x^2}{2}. \text{ (Hình 4).}$$

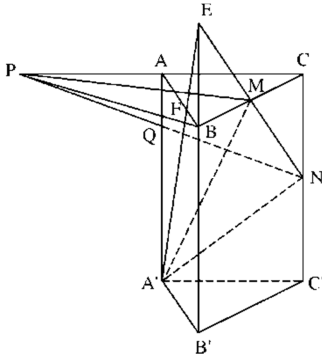
Câu 19: Chọn C. $\triangle MCN = \triangle MBE \Rightarrow BE = CN \Rightarrow BE = \frac{1}{2} BB' \Rightarrow \overrightarrow{BB'} = -2\overrightarrow{BE}$. (Hình 5).

Câu 20: Chọn A. $\frac{FB}{FA} = \frac{BE}{AA'} \Rightarrow AF = 2FB \Rightarrow \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$. (Hình 5).

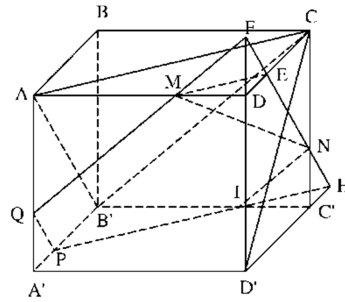
Câu 21: Chọn D. Gọi R là giao điểm của AB và PM $\Rightarrow R = AB \cap (PMN)$ R là trọng tâm tam giác $\triangle BPC \Rightarrow \overrightarrow{RB} = -2\overrightarrow{RA}$. (Hình 5).

Câu 22: Chọn B. (Hình 2.87). $QA = \frac{1}{2} NC$ (QA là đường trung bình của $\triangle PCN$)

$$\Rightarrow QA = \frac{1}{4} AA' \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AA'}$$



Hình 5



Hình 6

Câu 23: Chọn A. (Hình 6). Qua M kẻ đường song song với AC và cắt CD tại E.

$$\text{Do } \frac{DM}{DA} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow ME \parallel AC \Rightarrow \frac{EC}{ED} = \frac{MA}{MD} \Rightarrow \overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{ED}.$$

Câu 24: Chọn C. (Hình 6). $\{H\} = EN \cap D'C'$. Qua H kẻ đường thẳng song song với $A'C'$ lần lượt cắt $B'C'$ và $B'A'$ tại I và P. Qua P kẻ đường thẳng song song với AB' cắt AA' tại Q. Thiết diện là lục giác MENIPQ.