

TỔNG ÔN CHUYÊN ĐỀ

CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC - CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1) Các hệ thức lượng giác cơ bản

$$\bullet \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$$

$$\bullet \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$\bullet \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \Rightarrow \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

$$\bullet \tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\bullet \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x; \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$\bullet \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x); \sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)$$

2) Dấu của hàm số lượng giác

	Góc I	Góc II	Góc III	Góc IV
$\sin x$	(+)	(+)	(-)	(-)
$\cos x$	(+)	(-)	(-)	(+)
$\tan x$	(+)	(-)	(+)	(-)
$\cot x$	(+)	(-)	(+)	(-)

3) Mối quan hệ giữa các cung lượng giác đặc biệt

▪ **Cung đối nhau:** α và $-\alpha$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

▪ **Cung bù nhau:** α và $\pi - \alpha$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

▪ **Cung hơn kém π :** α và $(\alpha + \pi)$

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$$

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$$

$$\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$$

▪ **Cung phụ nhau:** α và $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

4) Công thức cộng

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

5) Công thức góc nhân đôi, nhân ba

$$\text{▪ Công thức góc nhân đôi: } \begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{cases}$$

▪ Công thức góc nhân ba:
$$\begin{cases} \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 3\sin^3 \alpha \\ \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \\ \tan 3\alpha = \frac{3\tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{cases}$$

6) Công thức hạ bậc hai, bậc ba

▪ Công thức hạ bậc hai:
$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \end{cases}$$

▪ Công thức hạ bậc ba:
$$\begin{cases} \sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin^3 \alpha}{4} \\ \cos^3 \alpha = \frac{3\cos \alpha + \cos 3\alpha}{4} \end{cases}$$

7) Công thức biến đổi tích sang tổng và ngược lại

▪ Công thức biến đổi tích thành tổng:
$$\begin{cases} \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \\ \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)] \end{cases}$$

▪ Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

II. HỆ THỐNG VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính giá trị của các hàm lượng giác còn lại của cung x sau:

a) $\sin x = \frac{1}{3}; 0 < x < \frac{\pi}{2}$

b) $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{\pi}{2} < x < \pi$

c) $\tan x = 2; \pi < x < \frac{3\pi}{2}$

d) $\cot x = -\frac{1}{2}; \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

Lời giải:

$$\text{a) Từ } \sin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Do } 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow \cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Từ đó ta được: } \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cot x = \frac{1}{\tan x} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{b) Từ } \cos x = \frac{-2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \sin > 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Từ đó ta được } \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{1}{2} \\ \cot x = \frac{1}{\tan x} = -2 \end{cases}$$

$$\text{c) Từ } \tan x = 2 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 2 \cos x \\ 5 \cos^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{5} \\ \sin^2 x = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\text{Do } \pi < x < \frac{3\pi}{2} \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\text{d) } \cot x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\cot x} = -2$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -2 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -2 \cos x \\ 5 \cos^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{5} \\ \sin^2 x = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\text{Do } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ví dụ 2. Tính giá trị của các hàm số lượng giác

$$\text{a) } \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}; 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{b) } \cot x = -\sqrt{2}; -\frac{\pi}{2} < x < 0$$

$$\text{c) } \tan x + \cot x = 2; 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{d) } \cos x = -\frac{2}{\sqrt{6}}; \pi < x < \frac{3\pi}{2}$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\frac{2}{3}}; \tan x = \frac{1}{\sqrt{2}}; \cot x = \sqrt{2}$$

$$\text{b) Ta có: } \cot x = -\sqrt{2} \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\cot x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin x = -\sqrt{\frac{1}{1 + \cot^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \cos x = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{c) } \tan x + \cot x = 2 \Leftrightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = 2 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow \cot x = 1$$

$$\text{Khi đó } \sin x = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{d) Ta có: } \cos x = -\frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{\frac{2}{6}} \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \cot x = -\sqrt{2}$$

Ví dụ 3. Tính giá trị của các hàm số lượng giác

$$\text{a) } \tan x - \cot x = -\frac{2}{\sqrt{3}}; \pi < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{b) } \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } \tan x - \cot x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x - \frac{1}{\tan x} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3} \tan^2 x + 2 \tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \sin x = -\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{b) Ta có: } \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x} = -\sqrt{3} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ví dụ 4. Rút gọn các biểu thức sau

$$\text{a) } A = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$\text{b) } B = \frac{1 - \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} - \cos^2 x$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } A = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} - \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{1 + \cos x} - \frac{1}{1 + \cos x} = 0$$

$$\text{b) Ta có: } B = \frac{1 - \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} - \cos^2 x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \tan^2 x + 1 - (\sin^2 x + \cos^2 x) = \tan^2 x$$

Ví dụ 5. Rút gọn các biểu thức sau

$$\text{a) } A = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} - \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

$$\text{b) } B = \sqrt{1 - \cot^2 x \cdot \sin^2 x} + 1$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} - \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \frac{1-\cos x - (1+\cos x)}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-2\cos x}{|\sin x|} = \begin{cases} -2\cot x, & (0 < \sin x < 1) \\ 2\cot x, & (-1 < \sin x < 0) \end{cases} \\ \text{b) } B &= \sqrt{1 - \cot^2 x \cdot \sin^2 x} + 1 = \sqrt{1 - \cos^2 x} + 1 = |\sin x| + 1 \end{aligned}$$

Ví dụ 6. Chứng minh các đẳng thức sau

$$\begin{aligned} \text{a) } \tan^2 x - \sin^2 x &= \tan^2 x \sin^2 x & \text{b) } \frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} &= \frac{\cos x}{1 + \sin x} \\ \text{c) } 1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \cot x} - \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x} &= \sin x \cos x & \text{d) } \tan x \cdot \tan y &= \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} \end{aligned}$$

Lời giải:

$$\text{a) } \tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \tan^2 x \sin^2 x$$

b) Áp dụng công thức góc nhân đôi ta được:

$$\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \frac{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2\sin \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)}{2\sin \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)} = \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}, (1)$$

$$\text{Mặt khác } \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2} = \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}, (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có: } 1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \cot x} - \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x} &= 1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \frac{\cos x}{\sin x}} - \frac{\cos^2 x}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = 1 - \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} - \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} \\ &= 1 - \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} = 1 - \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} \\ &= 1 - (1 - \sin x \cos x) = \sin x \cos x \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y}} = \frac{\frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y}}{\frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\sin x \sin y}} = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \tan x \tan y \Rightarrow \text{đpcm}$$

Ví dụ 7. Rút gọn các biểu thức sau

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cos^2 x + \cos^2 x \cot^2 x}{\sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x} \\ B &= \frac{\cos^2 x - 2\sin x(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)\cos x + (1 + \sin x)\cos x} \cdot \frac{2(1 + \sin x)}{1 - \sin x} \\ C &= (1 + \cot x)\sin^3 x + (1 + \tan x)\cos^3 x - \sin x \cos x \end{aligned}$$

$$D = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$$

Lời giải:

$$\bullet A = \frac{\cos^2 x + \cos^2 x \cot^2 x}{\sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x} = \frac{\cos^2 x + \cos^2 x \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\sin^2 x + \sin^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \right)}{\frac{\sin^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} = \cot^4 x$$

$$\bullet \text{ Xét } \frac{\cos^2 x - 2\sin x(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)\cos x + (1 + \sin x)\cos x} = \frac{1 - \sin^2 x - 2\sin x(1 - \sin x)}{(1 - \sin x + 1 + \sin x)\cos x}$$

$$= \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x - 2\sin x)}{2\cos x} = \frac{(1 - \sin x)^2}{2\cos x}$$

$$\rightarrow B = \frac{(1 - \sin x)^2}{2\cos x} \cdot \frac{2(1 + \sin x)}{1 - \sin x} = \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\cos x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} = \cos x$$

$$\bullet C = (1 + \cot x)\sin^3 x + (1 + \tan x)\cos^3 x - \sin x \cos x$$

$$= \left(1 + \frac{\cos x}{\sin x} \right) \sin^3 x + \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x} \right) \cos^3 x - \sin x \cos x$$

$$= \sin^3 x + \cos^3 x + \cos x \sin^2 x + \cos^2 x \sin x - \sin x \cos x$$

$$= (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) + \cos x \sin x (\sin x + \cos x) - \sin x \cos x$$

$$= (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) + \sin x \cos x (\sin x + \cos x - 1) = \sin x + \cos x - \sin x \cos x$$

$$\bullet D = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} = \sqrt{(1 - \cos^2 x)^2 + 4\cos^2 x} + \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2 + 4\sin^2 x}$$

$$= \sqrt{\cos^4 x + 2\cos^2 x + 1} + \sqrt{\sin^4 x + 2\sin^2 x + 1} = \sqrt{(\cos^2 x + 1)^2} + \sqrt{(\sin^2 x + 1)^2}$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x + 2 = 3$$

Ví dụ 8. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\frac{1 + \sin^2 x}{1 - \cos^2 x} = 2 + \cot^2 x$

b) $2(1 - \sin x)(1 + \cos x) = (1 - \sin x + \cos x)^2$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{1 + \sin^2 x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{2\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = 2 + \cot^2 x$

b) Ta có $VP = (1 - \sin x + \cos x)^2 = \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{=1} + 1 - 2\sin x - 2\sin x \cos x + 2\cos x$

$$= 2(1 - \sin x)(1 + \cos x) = VT. \text{ Suy ra đpcm.}$$

Ví dụ 9. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\frac{1 - 4\sin^2 x \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = (\sin x - \cos x)^2$

b) $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x} = \tan^4 x$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } VT &= \frac{1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin x \cos x (1 + 2 \sin x \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{(\sin x + \cos x)^2 (1 - 2 \sin x \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} = 1 - 2 \sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x \\ &= (\sin x - \cos x)^2 = VP. \text{ Suy ra đpcm.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } VT &= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x - \sin^2 x (1 - \sin^2 x)} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x (1 - \sin^2 x)} = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} = \tan^4 x = VP. \text{ Suy ra đpcm.} \end{aligned}$$

Ví dụ 10. Chứng minh các đẳng thức sau

$$\text{a) } \frac{\tan x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cot x} = \cos x \qquad \text{b) } \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{2}{3}$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } VT &= \frac{\tan x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cot x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} = \cos x = VP \\ \text{b) } VT &= \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2 \sin^2 x \cos^2 x - 1}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) - 1} = \frac{2}{3} = VP \end{aligned}$$

Ví dụ 11. Chứng minh các đẳng thức sau

$$\text{a) } \frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x + 1} \qquad \text{b) } \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = 2 + \tan^2 x + \cot^2 x$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có } \frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x + 1} \Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 2 \cos x (1 - \cos x)$$

Nhận xét: $\sin^2 x - \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 2 \cos x - 2 \cos^2 x = 2 \cos x (1 - \cos x)$. Suy ra đpcm.

$$\begin{aligned} \text{b) } VP &= 2 + \tan^2 x + \cot^2 x = 2 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{2 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \\ &= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = VT \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Ví dụ 12. Chứng minh các đẳng thức sau

$$\text{a) } \frac{\sin^4 x + 3 \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \cos^4 x - 1} = \frac{3}{2} \qquad \text{b) } \cos^2 x (2 \sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \sin^4 x$$

Lời giải:

a) Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{\sin^4 x + 3\cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3\cos^4 x - 1} = \frac{\sin^4 x + 3\cos^4 x - 1}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + 3\cos^4 x - 1} \\ &= \frac{\sin^4 x + 3\cos^4 x - 1}{-3\sin^2 x \cos^2 x + 3\cos^4 x} = \frac{(1 - \cos^2 x)^2 + 3\cos^4 x - 1}{3\cos^4 x - 3\cos^2 x(1 - \cos^2 x)} = \frac{4\cos^4 x - 2\cos^2 x}{6\cos^4 x - 3\cos^2 x} = \frac{2}{3} = VP \end{aligned}$$

b) Ta có: $\cos^2 x (2\sin^2 x + \cos^2 x) = \cos^2 x (1 + \sin^2 x) = (1 - \sin^2 x)(1 + \sin^2 x) = 1 - \sin^4 x$

Ví dụ 13. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $A = \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1}$

b) $B = 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cos^4 x + 3\sin^2 x$

Lời giải:

a) $A = \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1} = \frac{2\cos x}{\sin x - \cos x} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x - \cos x} = -1$

b) $B = 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + 3\sin^2 x = 2\cos^4 x - (1 - \cos^2 x)(3 + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x)$
 $= 2\cos^4 x + (1 - \cos^2 x)(2\cos^2 x + 2) = 2\cos^4 x + 2(1 - \cos^4 x) = 2$

Ví dụ 14. Chứng minh rằng các biểu thức sau đây không phụ thuộc vào x ?

a) $A = \frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} \cdot \cot^6 x$

b) $B = \sin^2 x \cdot \tan^2 x + 4\sin^2 x - \tan^2 x + 3\cos^2 x$

Lời giải:

a) $A = \frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} \cdot \cot^6 x = \frac{\sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)}{\cos^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right)} \cdot \cot^6 x = \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \cdot \frac{\cos^6 x}{\sin^6 x} = 1$

b) $B = \sin^2 x \cdot \tan^2 x + 4\sin^2 x - \tan^2 x + 3\cos^2 x = \tan^2 x (\sin^2 x - 1) + 3\sin^2 x + 3\cos^2 x + \sin^2 x$
 $= -\tan^2 x \cos^2 x + 3 + \sin^2 x = -\sin^2 x + 3 + \sin^2 x = 3$

Ví dụ 15. Tính giá trị biểu thức

a) $A = \frac{\cos^3 x + \cos x \cdot \sin^2 x - \sin x}{\sin^3 x - \cos^3 x}$, với $\tan x = 2$.

b) $B = \frac{1 + \cos x + \sin x}{1 - \cos x}$, với $\cos x = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

c) $C = \frac{2\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin^4 x - \cos^4 x}$, với $\tan x = 3$.

Lời giải:

a) $A = \frac{\cos^3 x + \cos x \cdot \sin^2 x - \sin x}{\sin^3 x - \cos^3 x} = \frac{1 + \tan^2 x - \tan x(1 + \tan^2 x)}{\tan^3 x - 1} = \frac{1 + 4 - 2(1 + 4)}{8 - 1} = -\frac{5}{7}$

$$\text{b) Ta có: } \begin{cases} \cos x = -\frac{12}{13} \\ \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \frac{144}{169} \\ \sin x > 0 \end{cases} \Rightarrow \sin x = \frac{5}{13} \Rightarrow B = \frac{6}{25}$$

$$\text{c) } C = \frac{2\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin^4 x - \cos^4 x} = \frac{2\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$$

$$\Rightarrow C = \frac{2\tan^2 x + \tan x + 1}{\tan^2 x - 1} = \frac{11}{4}$$

Ví dụ 16. Chứng minh các đẳng thức sau

$$\text{a) } \frac{\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x}{2(1 - \cos^2 x)} = \cos^2 \frac{x}{2} \qquad \text{b) } \frac{(1 + \cot^2 x) \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)}{1 + \tan^2 x}$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } \frac{\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x}{2(1 - \cos^2 x)} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^2 x}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) Ta có: } \frac{(1 + \cot^2 x) \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x = 1$$

Ví dụ 17. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \sin(x + \pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{b) } B = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \cos(x - 3\pi) \cdot \cot\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$$

$$\text{c) } C = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2\sin 2550^\circ \cdot \cos(-188^\circ)}{2\cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$$

Lời giải:

$$\text{a) } A = \sin(x + \pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

$$= -\sin x + \sin x - \cot x + \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = -\cot x + \cot x = 0$$

$$\text{b) } B = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \cos(x - 3\pi) \cdot \cot\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \cos(x - \pi - 2\pi) \cdot \cot\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \cos(x - \pi) \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x \cdot (-\cos x) \cdot (-\tan x) = -\sin x \cos x$$

$$\text{c) } C = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2\sin 2550^\circ \cdot \cos(-188^\circ)}{2\cos 638^\circ + \cos 98^\circ} = \frac{1}{\tan(360^\circ + 8^\circ)} + \frac{2\sin(7 \cdot 360^\circ + 30^\circ) \cdot \cos(-180^\circ - 8^\circ)}{2\cos\left(180^\circ \cdot \frac{7}{2} + 8^\circ\right) + \cos(90^\circ + 8^\circ)}$$

$$= \frac{1}{\tan 8^\circ} + \frac{-2 \sin 30^\circ \cdot (-\cos 8^\circ)}{2 \sin 8 - \sin 8} = \frac{1}{\tan 8} + \frac{\cos 8}{\sin 8} = \frac{2}{\tan 8}$$

Ví dụ 18. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \cos(x + 5\pi) - 2 \sin\left(\frac{11\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{11\pi}{2} + x\right)$

b) $B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi - x)$

Lời giải:

a) Ta có : $A = -\cos x + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x + 2 \cos x + \cos x = 0$

b) Ta có : $B = \sin x - \cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x = \sin x - \sin x = 0$

Ví dụ 19. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)$

b) $B = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{11\pi}{2} - x\right) - 3 \sin(x - 5\pi) + \tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \tan(-x)$

Lời giải:

a) $A = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x + \cos x + \sin^2 x$

b) $B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3 \sin x - \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$

$$= \cos x + \sin x + 3 \sin x - \cot x \tan x = 4 \sin x + \cos x - 1$$

Ví dụ 20. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \cos(\pi - x) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

b) $B = \sin(270^\circ - x) - 2 \sin(x - 450^\circ) + \cos(x + 900^\circ) + 2 \sin(720^\circ - x) + \cos(540^\circ - x)$

Lời giải:

a) Ta có : $A = -\cos x - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cot x \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x + \cos x + \cot x \cdot \tan x = 1$

b) Ta có : $B = \sin(90^\circ - x) - 2 \sin(x - 90^\circ) - \cos x - 2 \sin x - \cos x = \cos x - 2 \sin x$

Ví dụ 21. Rút gọn các biểu thức sau:

$$A = \frac{\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin^3\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$$

$$B = \left[1 + \tan^2\left(\frac{11\pi}{2} - x\right)\right] \left[1 + \cot^2(x - 3\pi)\right] \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \sin(11\pi - x) \cdot \cos\left(x - \frac{13\pi}{2}\right) \sin(x - 7\pi)$$

Lời giải:

$$A = \frac{-\cot x \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{-\sin x - \cot x} = \frac{-\frac{\cos x}{\sin x} \sin x + \cos^3 x}{\cos x}$$

$$= \frac{-\cos x + \cos^3 x}{\cos x} = -1 + \cos^2 x = -\sin^2 x$$

$$B = \left[1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] \left[1 + \cot^2 x\right] \cdot \sin x \cdot \sin x \cdot \sin x \cdot (-\sin x) = (1 + \cot^2 x)(1 + \cot^2 x) \cdot -\sin^4 x$$

$$= \frac{-1}{\sin^4 x} \cdot \sin^4 x = -1$$

Ví dụ 22. Chứng minh các đẳng thức sau

$$a) \sin\left(\frac{11\pi}{10}\right) + \sin\left(\frac{21\pi}{10}\right) + \sin\left(-\frac{9\pi}{10}\right) + \sin\left(-\frac{29\pi}{10}\right) = -2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$b) \frac{\sin 515^\circ \cdot \cos(-475^\circ) + \cot 222^\circ \cdot \cot 408^\circ}{\cot 415^\circ \cdot \cot(-505^\circ) + \tan 197^\circ \cdot \tan 73^\circ} = \frac{1}{2} \cos^2 25^\circ$$

$$c) \tan 105^\circ + \tan 285^\circ - \tan(-435^\circ) - \tan(-75^\circ) = 0$$

Lời giải:

$$a) A = \sin\left(\frac{11\pi}{10}\right) + \sin\left(\frac{21\pi}{10}\right) + \sin\left(-\frac{9\pi}{10}\right) + \sin\left(-\frac{29\pi}{10}\right)$$

$$= \sin\left(2\pi - \frac{9\pi}{10}\right) + \sin\left(\frac{21\pi}{10}\right) + \sin\left(-\frac{9\pi}{10}\right) + \sin\left(\frac{21\pi}{10} - 5\pi\right)$$

$$= -\sin\frac{9\pi}{10} + \sin\frac{21\pi}{10} - \sin\frac{9\pi}{10} - \sin\frac{21\pi}{10}$$

$$= -2\sin\frac{9\pi}{10} = -2\cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$b) B = \frac{\sin 515^\circ \cdot \cos(-475^\circ) + \cot 222^\circ \cdot \cot 408^\circ}{\cot 415^\circ \cdot \cot(-505^\circ) + \tan 197^\circ \cdot \tan 73^\circ}$$

$$= \frac{\sin(360^\circ + 180^\circ + 25^\circ) \cdot \cos(-360^\circ - 90^\circ - 25^\circ) + \cot(180^\circ + 42^\circ) \cdot \cot(360^\circ + 48^\circ)}{\cot(360^\circ + 55^\circ) \cdot \cot(-360^\circ - 90^\circ - 55^\circ) + \tan(180^\circ + 17^\circ) \cdot \tan(90^\circ - 17^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 25^\circ \cdot (-\sin 25^\circ) + \cot 42^\circ \cdot \cot(90^\circ - 42^\circ)}{\cot 55^\circ \cdot \tan 55^\circ + \tan 17^\circ \cdot \cot 17^\circ} = \frac{-\sin^2 25^\circ + 1}{2} = \frac{\cos^2 25^\circ}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } C &= \tan 105^\circ + \tan 285^\circ - \tan(-435^\circ) - \tan(-75^\circ) \\
 &= \tan(180^\circ - 75^\circ) + \tan(360^\circ - 75^\circ) - \tan(-360^\circ - 75^\circ) - \tan(-75^\circ) \\
 &= -\tan 75^\circ - \tan 75^\circ + \tan 75^\circ + \tan 75^\circ = 0
 \end{aligned}$$

Ví dụ 23. Tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, với $\cos x = -\frac{9}{41}$; $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

b) Cho a, b là các góc nhọn thỏa mãn: $\sin a = \frac{8}{17}$, $\tan b = \frac{5}{12}$

Tính: $\sin(a-b)$, $\cos(a+b)$, $\tan(a-b)$

Lời giải:

a) $\cos x = -\frac{9}{41} \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{81}{1681} = \frac{1600}{1681} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{40}{41}$

Do $\pi < x < \frac{3\pi}{2} \rightarrow \sin x < 0 \rightarrow \sin x = -\frac{40}{41} \rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{40}{9}$

Từ đó ta được $A = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan x \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{40}{9} - 1}{1 + \frac{40}{9}} = \frac{31}{49}$

b) Ta có:

• $\sin a = \frac{8}{17} \rightarrow \cos a = \pm \frac{15}{17}$

Do a là góc nhọn $\Rightarrow \cos a > 0 \rightarrow \cos a = \frac{15}{17} \rightarrow \tan a = \frac{8}{15}$

• $\tan b = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \sin b = \frac{5}{13} \cos b$

Từ đó ta có $\begin{cases} \sin b = \frac{5}{13} \cos b \\ \sin^2 b + \cos^2 b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin b = \pm \frac{5}{13} \\ \cos b = \pm \frac{12}{13} \end{cases}$

Do b là góc nhọn nên $\sin b > 0, \cos b > 0 \rightarrow \begin{cases} \sin b = \frac{5}{13} \\ \cos b = \frac{12}{13} \end{cases}$

• $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b = \frac{8}{17} \cdot \frac{12}{13} - \frac{15}{17} \cdot \frac{5}{13} = \frac{21}{221}$

• $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \frac{15}{17} \cdot \frac{12}{13} - \frac{8}{17} \cdot \frac{5}{13} = \frac{140}{221}$

$$\bullet \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} = \frac{\frac{8}{15} - \frac{5}{12}}{1 + \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{12}} = \frac{21}{220}$$

Ví dụ 24. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến

$$\text{a) } A = \cos^2 x + \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \quad \text{b) } B = \frac{3 \cos^3 x - \cos 3x}{\cos x} + \frac{3 \sin^3 x + \sin 3x}{\sin x}$$

Lời giải:

a) *Cách 1: (Khai triển theo công thức cộng)*

$$\begin{aligned} A &= \cos^2 x + \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \\ &= \cos^2 x + \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} \right)^2 + \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} \right)^2 \\ &= \cos^2 x + \frac{1}{4} \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x + \frac{3}{4} \sin^2 x + \frac{1}{4} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x + \frac{3}{4} \sin^2 x \\ &= \frac{3}{2} \cos^2 x + \frac{3}{2} \sin^2 x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Cách 2: (Sử dụng công thức hạ bậc)

$$\begin{aligned} A &= \cos^2 x + \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos \left(2x + \frac{2\pi}{3} \right)}{2} + \frac{1 + \cos \left(2x - \frac{2\pi}{3} \right)}{2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \left[\cos \left(2x + \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(2x - \frac{2\pi}{3} \right) \right] = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \left[2 \cos 2x \cdot \cos \frac{2\pi}{3} \right] \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \cos 2x \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{3}{2} \rightarrow A = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vậy biểu thức A không phụ thuộc vào biến x .

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{3 \cos^3 x - \cos 3x}{\cos x} + \frac{3 \sin^3 x + \sin 3x}{\sin x} \\ &= \frac{3 \cos^3 x - 4 \cos^3 x + 3 \cos x}{\cos x} + \frac{3 \sin^3 x - 4 \sin^3 x + 3 \sin x}{\sin x} \\ &= \frac{-\cos^3 x + 3 \cos x}{\cos x} + \frac{-\sin^3 x + 3 \sin x}{\sin x} = -\cos^2 x - \sin^2 x + 6 = 5 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức B không phụ thuộc vào biến x .

Ví dụ 25. Chứng minh các đẳng thức sau

$$\text{a) } \tan^2 a - \tan^2 b = \frac{\sin(a+b) \sin(a-b)}{\cos^2 a \cdot \cos^2 b}$$

$$\text{b) } \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{3}{4}$$

$$c) \frac{6 + 2 \cos 4x}{1 - \cos 4x} = \cot^2 x + \tan^2 x$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} a) \tan^2 a - \tan^2 b &= \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - \frac{\sin^2 b}{\cos^2 b} = \frac{\sin^2 a \cdot \cos^2 b - \sin^2 b \cdot \cos^2 a}{\cos^2 a \cdot \cos^2 b} \\ &= \frac{(\sin a \cos b - \sin b \cos a)(\sin a \cos b + \sin b \cos a)}{\cos^2 a \cdot \cos^2 b} = \frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos^2 a \cdot \cos^2 b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2(\sin x \cos x)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} \sin^2 2x \\ &= 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \cot^2 x + \tan^2 x &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2(\sin x \cos x)^2}{\frac{1}{4} \sin^2 2x} \\ &= \frac{4 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \right)}{\sin^2 2x} = \frac{4 \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \right)}{\frac{1 - \cos 4x}{2}} = \frac{6 + 2 \cos 4x}{1 - \cos 4x} \end{aligned}$$

Ví dụ 26. Cho $3 \sin^4 x + 2 \cos^4 x = \frac{98}{81}$. Tính giá trị biểu thức $A = 2 \sin^4 x + 3 \cos^4 x$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Đặt } a = \sin^2 x, b = \cos^2 x \text{ (} a, b \in [-1; 1] \text{)}, \text{ ta có: } \begin{cases} 3a^2 + 2b^2 = \frac{98}{81} \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 + 2(1-a)^2 = \frac{98}{81} \\ b = 1 - a \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{9}, b = \frac{5}{9} \Rightarrow A = 2a^2 + 3b^2 = \frac{107}{81} \\ a = \frac{16}{45} \Rightarrow b = \frac{29}{45} \Rightarrow A = 2a^2 + 3b^2 = \frac{607}{405} \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 27. Chứng minh các đẳng thức sau

$$a) \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} + x \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - x \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \quad b) \sin x (1 + \cos 2x) = \sin 2x \cdot \cos x$$

$$c) \tan x - \frac{1}{\tan x} = -\frac{2}{\tan 2x} \quad d) \tan \frac{x}{2} \left(\frac{1}{\cos x} + 1 \right) = \tan x$$

Lời giải:

$$a) \text{ Ta có: } VT = \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right)}{2} - \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)}{2} = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right)}{2}$$

$$= \frac{-2 \sin \frac{\pi}{4} \sin(-2x)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x = VP$$

$$b) VT = \sin x \cdot 2 \cos^2 x = 2 \sin x \cos x \cdot \cos x = \sin 2x \cdot \cos 2x = VP$$

$$c) VT = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = \frac{-2}{\tan 2x} = VP$$

$$d) VT = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \frac{1 + \cos x}{2 \cos x} = \frac{\sin \frac{x}{2} \cdot 2 \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2} \cdot \cos x} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2 \cos x} = \tan x = VP$$

Ví dụ 28. Rút gọn các biểu thức sau

$$E = \frac{1 + \sin x - 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)}{4 \cos \frac{x}{2}}$$

$$F = \frac{\cos^3 x \cdot \sin x - \sin^3 x \cdot \cos x}{\sin 2x \cdot \cos 2x}$$

$$G = \frac{\sin 4x \cdot \cos 2x}{(1 + \cos 4x)(1 + \cos 2x)}$$

$$H = \frac{\sin^2 2x - 4 \sin^2 x}{\sin^2 2x + (4 \sin^2 x - 4)}$$

Lời giải:

$$\bullet \text{ Ta có: } \cos \frac{x}{2} \neq 0 \quad E = \frac{1 + \sin x - \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right]}{4 \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin x - \sin x}{4 \cos \frac{x}{2}} = 0$$

$$\bullet \text{ Với } \sin 2x \cdot \cos 2x \neq 0 \text{ ta có: } F = \frac{\cos x \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin 2x \cos 2x} = \frac{\cos x \sin x \cdot \cos 2x}{2 \sin x \cos x \cos 2x} = \frac{1}{2}$$

$\bullet$ Với $(1 + \cos 4x)(1 + \cos 2x) \neq 0$ ta có:

$$G = \frac{2 \sin 2x \cos 2x \cdot \cos 2x}{2 \cos^2 2x \cdot 2 \cos^2 x} = \frac{\sin 2x}{2 \cos^2 x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \tan x$$

$$\bullet \text{ Ta có: } H = \frac{4 \sin^2 x \cos^2 x - 4 \sin^2 x}{4 \sin^2 x \cos^2 x - 4 \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x (\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x (\sin^2 x - 1)} = \frac{-\sin^4 x}{-\cos^4 x} = \tan^4 x$$

Ví dụ 29. Chứng minh các đẳng thức sau

$$a) \frac{\tan^2 2a - \tan^2 a}{1 - \tan^2 2a \cdot \tan^2 a} = \tan a \cdot \tan 3a$$

$$b) \sin \left(\frac{\pi}{4} + a \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} - a \right) = \sqrt{2} \sin a$$

Lời giải:

$$a) VT = \frac{\tan^2 2a - \tan^2 a}{1 - \tan^2 2a \tan^2 a} = \frac{(\tan 2a - \tan a)(\tan 2a + \tan a)}{(1 - \tan a \tan 2a)(1 + \tan a \tan 2a)} = \tan a \tan 3a = VP$$

$$b) VT = \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin a + \cos a) - \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin a + \cos a) = \sqrt{2} \sin a = VP$$

Ví dụ 30. Chứng minh các đẳng thức sau

$$a) \frac{\sin(a-b)\sin(a+b)}{1 - \tan^2 a \cot^2 b} = -\cos^2 a \sin^2 b$$

$$b) \frac{\cos(a-b)\cos(a+b)}{\cos^2 a \cos^2 b} = 1 - \tan^2 a \tan^2 b$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} a) VT &= \frac{\sin(a-b)\sin(a+b)}{1 - \tan^2 a \cot^2 b} = \frac{(\sin a \cos b - \sin b \cos a)(\sin a \cos b + \sin b \cos a)}{1 - \frac{\sin^2 a \cos^2 b}{\cos^2 a \sin^2 b}} \\ &= \frac{\sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a}{\cos^2 a \sin^2 b - \sin^2 a \cos^2 b} = -\cos^2 a \sin^2 b = VP \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) VT &= \frac{\cos(a-b)\cos(a+b)}{\cos^2 a \cos^2 b} = \frac{(\cos a \cos b + \sin a \sin b)(\cos a \cos b - \sin a \sin b)}{\cos^2 a \cos^2 b} \\ &= \frac{\cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b}{\cos^2 a \cos^2 b} = 1 - \tan^2 a \tan^2 b = VP \end{aligned}$$

Ví dụ 31. Chứng minh các đẳng thức sau

$$a) \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

$$b) \tan x \tan 3x = \frac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 x \tan^2 2x}$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} a) \text{Ta có: } VT &= \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)} = \frac{\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)}{\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1 - 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{\cos x}{1 - \sin x} = VP \end{aligned}$$

$$b) \text{Ta có: } VT = \frac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 x \tan^2 2x} = \frac{(\tan 2x - \tan x)(\tan 2x + \tan x)}{(1 - \tan x \tan 2x)(1 + \tan x \tan 2x)} = \tan x \tan 3x = VP$$

Ví dụ 32. Cho tam giác, chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$$

$$b) \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

Lời giải:

$$a) \sin B \cos C + \cos B \sin C = \sin(B + C) = \sin(\pi - A) = \sin A \rightarrow \text{đpcm}$$

$$\begin{aligned} b) \tan A + \tan B + \tan C &= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C + \sin C \cos A \cos B}{\cos A \cos B \cos C} \\ &= \frac{\cos C (\sin A \cos B + \sin B \cos A) + \sin C \cos A \cos B}{\cos A \cos B \cos C} = \frac{\cos C \sin(A + B) + \sin C \cos A \cos B}{\cos A \cos B \cos C} \\ &= \frac{\cos C \sin C + \sin C \cos A \cos B}{\cos A \cos B \cos C} = \frac{\sin C (\cos C + \cos A \cos B)}{\cos A \cos B \cos C} = \frac{\sin C [-\cos(A + B) - \cos A \cos B]}{\cos A \cos B \cos C} \\ &= \frac{\sin A \sin B \sin C}{\cos A \cos B \cos C} = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \end{aligned}$$

Nhận xét:

Cách giải trên là cách giải tương đối cổ điển, dựa vào phép biến đổi sơ cấp.

Ngoài ra chúng ta có thể thực hiện phép biến đổi theo hướng khác nhanh gọn hơn như sau

$$\begin{aligned} A + B + C = \pi &\Leftrightarrow A + B = \pi - C \rightarrow \tan(A + B) = \tan(\pi - C) \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = -\tan C \\ &\Leftrightarrow \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \cos 4\alpha$.

A. $P = \frac{527}{625}$ B. $P = -\frac{527}{625}$ C. $P = \frac{524}{625}$ D. $P = -\frac{524}{625}$

Câu 2. Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

A. $P = \frac{3}{\sqrt{5}}$ B. $P = -\frac{3}{\sqrt{5}}$ C. $P = \frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $P = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Câu 3. Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$

A. $P = 1$ B. $P = \frac{17}{81}$ C. $P = \frac{7}{9}$ D. $P = \frac{9}{7}$

Câu 4. Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \sin 2(\alpha + \pi)$

A. $P = -\frac{24}{25}$ B. $P = \frac{24}{25}$ C. $P = -\frac{12}{25}$ D. $P = \frac{12}{25}$

Câu 5. Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$

A. $P = -\frac{2\sqrt{5}}{3}$ B. $P = \frac{3}{2}$ C. $P = -\frac{3}{2}$ D. $P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$

Câu 6. Biết $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{3}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$

A. $P = -\frac{3}{5}$

B. $P = \frac{3}{5}$

C. $P = \frac{-4-3\sqrt{3}}{10}$

D. $P = \frac{4-3\sqrt{3}}{10}$

Câu 7. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \tan 2\alpha$

A. $P = -\frac{120}{119}$

B. $P = -\frac{119}{120}$

C. $P = \frac{120}{119}$

D. $P = \frac{119}{120}$

Câu 8. Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $P = (1 + 3\sin^2 \alpha)(1 - 4\cos^2 \alpha)$

A. $P = 12$

B. $P = \frac{21}{2}$

C. $P = 6$

D. $P = \frac{7}{6}$

Câu 9. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$

A. $P = \frac{3+\sqrt{21}}{8}$

B. $P = \frac{3-\sqrt{21}}{8}$

C. $P = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{8}$

D. $P = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{8}$

Câu 10. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$

A. $P = -\frac{1}{7}$

B. $P = \frac{1}{7}$

C. $P = -7$

D. $P = 7$

Câu 11. Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$

A. $P = \frac{\sqrt{2}}{10}$

B. $P = -\frac{\sqrt{2}}{10}$

C. $P = -\frac{1}{5}$

D. $P = \frac{1}{5}$

Câu 12. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2}$

A. $P = -\frac{39}{50}$

B. $P = \frac{49}{50}$

C. $P = -\frac{49}{50}$

D. $P = \frac{39}{50}$

Câu 13. Cho góc α thỏa mãn $\cot\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = 2$. Tính $P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$

A. $P = \frac{1}{2}$

B. $P = -\frac{1}{2}$

C. $P = 3$

D. $P = -3$

Câu 14. Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = 15$. Tính $P = \sin 2\alpha$

A. $P = \frac{11}{113}$

B. $P = \frac{13}{113}$

C. $P = \frac{15}{113}$

D. $P = \frac{17}{113}$

Câu 15. Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = -3\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2}$

A. $P = 2\sqrt{19}$ B. $P = -2\sqrt{19}$ C. $P = \sqrt{19}$ D. $P = -\sqrt{19}$

Câu 16. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. Tính $P = \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}$

A. $P = \sqrt{5}$ B. $P = -\sqrt{5}$ C. $P = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $P = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 17. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -2$. Tính $P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1}$

A. $P = \frac{10}{9}$ B. $P = \frac{9}{10}$ C. $P = -\frac{10}{9}$ D. $P = -\frac{9}{10}$

Câu 18. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ và $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. Tính $P = \sin 2\alpha$

A. $P = \frac{4\sqrt{6}}{25}$ B. $P = -\frac{4\sqrt{6}}{25}$ C. $P = \frac{2\sqrt{6}}{25}$ D. $P = -\frac{2\sqrt{6}}{25}$

Câu 19. Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha + 2\cos \alpha = -1$. Tính $P = \sin 2\alpha$

A. $P = \frac{24}{25}$ B. $P = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ C. $P = -\frac{24}{25}$ D. $P = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

Câu 20. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$

A. $P = \frac{11}{100}$ B. $P = -\frac{11}{100}$ C. $P = \frac{7}{25}$ D. $P = \frac{10}{11}$

Câu 21. Cho góc lượng giác α . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ B. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
C. $\cos 2\alpha = 1 - 2\cos^2 \alpha$ D. $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

Câu 22. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. Tính giá trị $\cos\left(\alpha - \frac{21\pi}{4}\right)$

A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ B. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ D. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

Câu 23. Cho $\tan \alpha = 2$. Giá trị biểu thức $P = \frac{\sin \alpha - 3\cos^3 \alpha}{\cos \alpha + 2\sin^3 \alpha}$ là

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{5}{21}$ C. $\frac{7}{11}$ D. $\frac{2}{7}$

Câu 24. Biết $\sin a = \frac{5}{13}$; $\cos b = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < a < \pi$; $0 < b < \frac{\pi}{2}$. Hãy tính $\sin(a+b)$

A. $\frac{56}{65}$ B. $\frac{63}{65}$ C. $-\frac{33}{65}$ D. 0

Câu 25. Nếu biết rằng $\sin \alpha = \frac{5}{13} \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \right)$; $\cos \beta = \frac{3}{5} \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2} \right)$ thì giá trị đúng của biểu thức $\cos(\alpha - \beta)$ là

- A. $\frac{16}{65}$ B. $-\frac{16}{65}$ C. $\frac{18}{65}$ D. $-\frac{18}{65}$

Câu 26. Cho hai góc nhọn $a; b$ và biết rằng $\cos a = \frac{1}{3}$, $\cos b = \frac{1}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos(a + b) \cdot \cos(a - b)$

- A. $-\frac{113}{144}$ B. $-\frac{115}{144}$ C. $-\frac{117}{144}$ D. $-\frac{119}{144}$

Câu 27. Nếu $a; b$ là hai góc nhọn và $\sin a = \frac{1}{3}$, $\sin b = \frac{1}{2}$ thì $\cos 2(a + b)$ có giá trị bằng

- A. $\frac{7 - 2\sqrt{6}}{18}$ B. $\frac{7 + 2\sqrt{6}}{18}$ C. $\frac{7 + 4\sqrt{6}}{18}$ D. $\frac{7 - 4\sqrt{6}}{18}$

Câu 28. Cho $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ và thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$. Góc $\alpha + \beta$ có giá trị bằng

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{2}$

Câu 29. Nếu $\sin a - \cos a = \frac{1}{5} (135^\circ < a < 180^\circ)$ thì giá trị của biểu thức $\tan 2a$ bằng

- A. $-\frac{20}{7}$ B. $\frac{20}{7}$ C. $\frac{24}{7}$ D. $-\frac{24}{7}$

Câu 30. Nếu $\tan(a + b) = 7$, $\tan(a - b) = 4$ thì giá trị đúng của $\tan 2a$ là

- A. $-\frac{11}{27}$ B. $\frac{11}{27}$ C. $-\frac{13}{27}$ D. $\frac{13}{27}$

Câu 31. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin(\alpha - \pi) \geq 0$ B. $\sin(\alpha - \pi) \leq 0$ C. $\sin(\alpha - \pi) < 0$ D. $\sin(\alpha - \pi) > 0$

Câu 32. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0$ B. $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \geq 0$ C. $\tan(\alpha + \pi) < 0$ D. $\tan(\alpha + \pi) > 0$

Câu 33. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$ B. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0$ C. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \leq 0$ D. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \geq 0$

Câu 34. Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của biểu thức $M = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$

- A. $M \geq 0$ B. $M > 0$ C. $M \leq 0$ D. $M < 0$

Câu 35. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xác định dấu của biểu thức $M = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cot(\pi + \alpha)$

- A. $M \geq 0$ B. $M > 0$ C. $M \leq 0$ D. $M < 0$

Câu 36. Với góc α bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin 2\alpha^2 + \cos^2 2\alpha = 1$ B. $\sin(\alpha^2) + \cos(\alpha^2) = 1$
C. $\sin^2 \alpha + \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1$ D. $\sin^2 \alpha - \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1$

Câu 37. Để $\tan \alpha$ có nghĩa khi

- A. $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ B. $\alpha = 0$ C. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ D. $\alpha \neq k\pi$

Câu 38. Điều kiện trong đẳng thức $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ là

- A. $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ B. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ C. $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 39. Điều kiện để biểu thức $P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ xác định là

- A. $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ B. $\alpha \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ C. $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $\alpha \neq -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 40. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $\sin 60^\circ < \sin 150^\circ$ B. $\cos 30^\circ < \cos 60^\circ$ C. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$ D. $\cot 60^\circ > \cot 240^\circ$

Câu 41. Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\tan(2017\pi + \alpha)$ bằng

- A. $-\tan \alpha$ B. $\cot \alpha$ C. $\tan \alpha$ D. $-\cot \alpha$

Câu 42. Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)$, ta được

- A. $A = \cos \alpha + \sin \alpha$ B. $A = 2\sin \alpha$ C. $A = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ D. $A = 0$

Câu 43. Rút gọn biểu thức $S = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(\pi - x)$ ta được

- A. $S = 0$ B. $S = \sin^2 x - \cos^2 x$ C. $S = 2\sin x \cos x$ D. $S = 1$

Câu 44. Cho $P = \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha)$ và $Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $P + Q = 0$ B. $P + Q = -1$ C. $P + Q = 1$ D. $P + Q = 2$

Câu 45. Biểu thức lượng giác $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(10\pi + x) \right]^2 + \left[\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \right) + \cos(8\pi - x) \right]^2$ có giá trị bằng?

- A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

Câu 46. Giá trị biểu thức $P = \left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot(7\pi - x) \right]^2$ bằng

- A. $\frac{1}{\sin^2 x}$ B. $\frac{1}{\cos^2 x}$ C. $\frac{2}{\sin^2 x}$ D. $\frac{2}{\cos^2 x}$

Câu 47. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan \alpha$

- A. $\tan \alpha = -\frac{12}{5}$ B. $\tan \alpha = \frac{5}{12}$ C. $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$ D. $\tan \alpha = \frac{12}{5}$

Câu 48. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$ và $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Tính $\cos \alpha + \sin \alpha$

- A. $P = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$ B. $P = 1 - \sqrt{5}$ C. $P = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ D. $P = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

Câu 49. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\cot \alpha = -\frac{4}{5}$ B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ C. $\tan \alpha = \frac{4}{5}$ D. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$

Câu 50. Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = \frac{3}{4}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ C. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ D. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$

Câu 51. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

- A. $P = -3$ B. $P = \frac{3}{7}$ C. $P = \frac{12}{25}$ D. $P = -\frac{12}{25}$

Câu 52. Cho góc α thỏa mãn $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$

- A. $P = 2\sqrt{2}$ B. $P = -2\sqrt{2}$ C. $P = \frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $P = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

Câu 53. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính $P = \sqrt{5 + 3 \tan \alpha} + \sqrt{6 - 4 \cot \alpha}$

- A. $P = 4$ B. $P = -4$ C. $P = 6$ D. $P = -6$

Câu 54. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $P = \sqrt{\tan^2 \alpha - 2 \tan \alpha + 1}$

A. $P = -\frac{1}{3}$ B. $P = \frac{1}{3}$ C. $P = \frac{7}{3}$ D. $P = -\frac{7}{3}$

Câu 55. Cho góc α thỏa $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ và $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $P = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin \alpha$

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $P = \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}{4}$ C. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $P = \frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{3}}{4}$

Câu 56. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\sin^2 \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos^2 \alpha}$

A. $P = \frac{30}{11}$ B. $P = \frac{31}{11}$ C. $P = \frac{32}{11}$ D. $P = \frac{34}{11}$

Câu 57. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính $P = \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha + 7 \sin \alpha}$

A. $P = -\frac{4}{9}$ B. $P = \frac{4}{9}$ C. $P = -\frac{4}{19}$ D. $P = \frac{4}{19}$

Câu 58. Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = \frac{1}{3}$. Tính $P = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$

A. $P = -\frac{15}{13}$ B. $P = \frac{15}{13}$ C. $P = -13$ D. $P = 13$

Câu 59. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính $P = \frac{2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{5 \sin^2 \alpha + 6 \cos^2 \alpha}$

A. $P = \frac{9}{13}$ B. $P = \frac{9}{65}$ C. $P = -\frac{9}{65}$ D. $P = \frac{24}{29}$

Câu 60. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $P = \frac{2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha - 4 \cos^2 \alpha}{5 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$

A. $P = -\frac{8}{13}$ B. $P = \frac{2}{19}$ C. $P = -\frac{2}{19}$ D. $P = -\frac{8}{19}$

Câu 61. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 5$. Tính $P = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$

A. $P = \frac{9}{13}$ B. $P = \frac{10}{13}$ C. $P = \frac{11}{13}$ D. $P = \frac{12}{13}$

Câu 62. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4}$. Tính $P = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

A. $P = \frac{9}{16}$ B. $P = \frac{9}{32}$ C. $P = \frac{9}{8}$ D. $P = \frac{1}{8}$

Câu 63. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25}$ và $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$. Tính $P = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$

A. $P = \frac{91}{125}$ B. $P = \frac{49}{25}$ C. $P = \frac{7}{5}$ D. $P = \frac{1}{9}$

Câu 64. Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ và $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Tính $\sin \alpha - \cos \alpha$

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $P = \frac{1}{2}$

C. $P = -\frac{1}{2}$

D. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 65. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tính $P = |\sin \alpha - \cos \alpha|$

A. $P = 2 - m$

B. $P = 2 - m^2$

C. $P = m^2 - 2$

D. $P = \sqrt{2 - m^2}$

Câu 66. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$. Tính $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$

A. $P = 1$

B. $P = 2$

C. $P = 3$

D. $P = 4$

Câu 67. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha = 5$. Tính $P = \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$

A. $P = 100$

B. $P = 110$

C. $P = 112$

D. $P = 115$

Câu 68. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$

A. $P = 12$

B. $P = 14$

C. $P = 16$

D. $P = 18$

Câu 69. Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\tan \alpha - \cot \alpha = 1$. Tính $P = \tan \alpha + \cot \alpha$

A. $P = 1$

B. $P = -1$

C. $P = -\sqrt{5}$

D. $P = \sqrt{5}$

Câu 70. Cho góc α thỏa mãn $3\cos \alpha + 2\sin \alpha = 2$ và $\sin \alpha < 0$. Tính $P = \sin \alpha$

A. $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$

B. $\sin \alpha = -\frac{7}{13}$

C. $\sin \alpha = -\frac{9}{13}$

D. $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$

Câu 71. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}}$ được kết quả là

A. $\tan \frac{x}{2}$

B. $\cot x$

C. $\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$

D. $\sin x$

Câu 72. Rút gọn biểu thức $A = \sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha$

A. $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$

B. $-\frac{1}{2} \sin 4\alpha$

C. $\frac{3}{2} \sin 4\alpha$

D. $\frac{1}{4} \sin 4\alpha$

Câu 73. Đơn giản biểu thức $A = \frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha}$ thu được kết quả là

A. $\sin 2\alpha$

B. $\tan \alpha$

C. $\cot \alpha$

D. $\cos 2\alpha$

Câu 74. Biến đổi biểu thức $\sin a + 1$ thành tích

A. $\sin a + 1 = 2 \sin \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$

B. $\sin a + 1 = 2 \cos \left(a + \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(a - \frac{\pi}{2} \right)$

C. $\sin a + 1 = 2 \sin \left(a + \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(a - \frac{\pi}{2} \right)$

D. $\sin a + 1 = 2 \cos \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$

Câu 75. Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $-\frac{3}{4}$

Câu 76. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

B. $\cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

C. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

D. $2 \cos a \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$

Câu 77. Cho hai góc α, β thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{5}{13}, \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \right)$ và $\cos \beta = \frac{3}{5}, \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2} \right)$. Tính giá trị đúng của $\cos(\alpha - \beta)$

A. $\frac{16}{65}$

B. $-\frac{18}{65}$

C. $\frac{18}{65}$

D. $-\frac{16}{65}$

Câu 78. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $-1 \leq \sin \alpha \leq 1; -1 \leq \cos \alpha \leq 1$

B. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\cos \alpha \neq 0)$

C. $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\sin \alpha \neq 0)$

D. $\sin^2(2018\alpha) + \cos^2(2018\alpha) = 2018$

Câu 79. Rút gọn biểu thức $M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$

A. $M = 1$

B. $M = 2$

C. $M = 4$

D. $M = 4 \sin x \cdot \cos x$

Câu 80. Rút gọn biểu thức $M = \tan x - \tan y$

A. $M = \tan(x-y)$

B. $M = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$

C. $M = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$

D. $M = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$

Câu 81. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 4x$

B. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$

C. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$

D. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x$

Câu 82. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x$

B. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

C. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x$

D. $\sin^4 x - \cos^4 x = 2 \cos^2 x - 1$

Câu 83. Rút gọn biểu thức $M = \sin^6 x + \cos^6 x$

A. $M = 1 + 3 \sin^2 x \cos^2 x$

B. $M = 1 - 3 \sin^2 x$

C. $M = 1 - \frac{3}{2} \sin^2 x$

D. $M = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$

Câu 84. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\cos 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2} (\cos 8x + \cos 2x)$

B. $\cos 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2} (\cos 8x - \cos 2x)$

$$\text{C. } \cos 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x)$$

$$\text{D. } \cos 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x)$$

Câu 85. Chọn đẳng thức đúng

$$\text{A. } \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \sin a}{2}$$

$$\text{B. } \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \sin a}{2}$$

$$\text{C. } \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos a}{2}$$

$$\text{D. } \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos a}{2}$$

Câu 86. Gọi $M = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \cdot \sin y}$ thì

$$\text{A. } M = \tan x - \tan y$$

$$\text{B. } M = \cot x - \cot y$$

$$\text{C. } M = \cot y - \cot x$$

$$\text{D. } M = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin y}$$

Câu 87. Gọi $M = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ thì

$$\text{A. } M = 2 \cos 2x (\cos x + 1)$$

$$\text{B. } M = 4 \cos 2x \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos x\right)$$

$$\text{C. } M = \cos 2x (2 \cos x - 1)$$

$$\text{D. } M = \cos 2x (2 \cos x + 1)$$

Câu 88. Rút gọn biểu thức $M = \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1}$

$$\text{A. } \tan 2x$$

$$\text{B. } \sin x$$

$$\text{C. } 2 \tan x$$

$$\text{D. } 2 \sin x$$

Câu 89. Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}$

$$\text{A. } \cos x$$

$$\text{B. } 2 \cos x - 1$$

$$\text{C. } 2 \cos x$$

$$\text{D. } \cos x - 1$$

Câu 90. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} + \cos 2\alpha$

$$\text{A. } 0$$

$$\text{B. } 2 \cos^2 x$$

$$\text{C. } 2$$

$$\text{D. } \cos 2x$$

Câu 91. Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$

$$\text{A. } \sin 2\alpha$$

$$\text{B. } \cos 2\alpha$$

$$\text{C. } \tan 2\alpha$$

$$\text{D. } \cot 2\alpha$$

Câu 92. Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ thì biểu thức $A = \frac{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^4 \alpha - 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4 \sin^2 \alpha}$ có giá trị bằng

$$\text{A. } \frac{1}{3}$$

$$\text{B. } \frac{1}{6}$$

$$\text{C. } \frac{1}{9}$$

$$\text{D. } \frac{1}{12}$$

Câu 93. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha}$

$$\text{A. } \tan \alpha$$

$$\text{B. } 2 \tan \alpha$$

$$\text{C. } \tan 2\alpha + \tan \alpha$$

$$\text{D. } \tan 2\alpha$$

Câu 94. Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 - \sin a - \cos 2a}{\sin 2a - \cos a}$

- A. 1 B. $\tan a$ C. $\frac{5}{2}$ D. $2 \tan a$

Câu 95. Rút gọn biểu thức $M = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

- A. $M = \sin 2\alpha$ B. $M = \cos 2\alpha$ C. $M = -\cos 2\alpha$ D. $M = -\sin 2\alpha$

Câu 96. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề sai?

- A. $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ B. $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
C. $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ D. $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Câu 97. Nếu α, β, γ là ba góc nhọn thỏa mãn $\tan(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos \gamma$ thì

- A. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$ B. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$ C. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ D. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{3\pi}{4}$

Câu 98. Nếu $\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta$ với $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$ ($k, l \in \mathbb{Z}$) thì

- A. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \alpha$ B. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \beta$ C. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \beta$ D. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \alpha$

Câu 99. Nếu $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ thì $\cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cot \beta$ thì $\cot \alpha \cdot \cot \gamma$ bằng

- A. $\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ C. 3 D. -3

Câu 100. Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ ($q \neq 0$) thì giá trị biểu thức $P = \cos^2(\alpha + \beta) + p \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) + q \sin^2(\alpha + \beta)$ bằng:

- A. p B. q C. 1 D. $\frac{p}{q}$

Câu 101. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P = 3 \sin x - 2$

- A. $M = 1, m = -5$ B. $M = 3, m = 1$ C. $M = 2, m = -2$ D. $M = 0, m = -2$

Câu 102. Cho biểu thức $P = -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $P \geq -4, \forall x \in \mathbb{R}$ B. $P \geq 4, \forall x \in \mathbb{R}$ C. $P \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ D. $P \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$

Câu 103. Biểu thức $P = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 104. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P = \sin^2 x + 2 \cos^2 x$

- A. $M = 3, m = 0$ B. $M = 2, m = 0$ C. $M = 2, m = 1$ D. $M = 3, m = 1$

Câu 105. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 8\sin^2 x + 3\cos 2x. \text{ Tính } 2M - m^2$$

- A. 1 B. 2 C. 112 D. 130

Câu 106. Cho biểu thức $P = \cos^4 x + \sin^4 x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $P \leq 2, \forall x \in R$ B. $P \leq 1, \forall x \in R$ C. $P \leq \sqrt{2}, \forall x \in R$ D. $P \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall x \in R$

Câu 107. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P = \sin^4 x - \cos^4 x$

- A. $M = 2, m = -2$ B. $M = \sqrt{2}, m = -\sqrt{2}$ C. $M = 1, m = -1$ D. $M = 1, m = \frac{1}{2}$

Câu 108. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P = \sin^6 x + \cos^6 x$

- A. $M = 2, m = 0$ B. $M = 1, m = \frac{1}{2}$ C. $M = 1, m = \frac{1}{4}$ D. $M = \frac{1}{4}, m = 0$

Câu 109. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P = 1 - 2|\cos 3x|$

- A. $M = 3, m = -1$ B. $M = 1, m = -1$ C. $M = 2, m = -2$ D. $M = 0, m = -2$

Câu 110. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4\sin^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2} - 1$ C. $\sqrt{2} + 1$ D. $\sqrt{2} + 2$

Câu 111. Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ AB , đáy lớn CD . Biết $AB = AD$ và $\tan \widehat{BDC} = \frac{3}{4}$.

Tính giá trị của $\cos \widehat{BAD}$

- A. $\frac{17}{25}$ B. $-\frac{7}{25}$ C. $\frac{7}{25}$ D. $-\frac{17}{25}$

Câu 112. Cho bất đẳng thức $2A + \frac{1}{64\cos^4 A} - (2\cos 2B + 4\sin B) + \frac{17}{4} \leq 0$, A, B, C là ba góc của tam giác

ABC . Khẳng định đúng là?

- A. $\widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ$ B. $\widehat{B} + \widehat{C} = 130^\circ$ C. $\widehat{A} + \widehat{B} = 120^\circ$ D. $\widehat{A} + \widehat{B} = 140^\circ$

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1-B	2-A	3-C	4-A	5-D	6-D	7-C	8-D	9-B	10-A
11-B	12-D	13-D	14-C	15-A	16-C	17-C	18-B	19-C	20-A
21-C	22-A	23-A	24-C	25-B	26-D	27-D	28-B	29-D	30-A
31-C	32-C	33-B	34-B	35-D	36-C	37-C	38-A	39-C	40-C
41-C	42-D	43-D	44-A	45-B	46-C	47-C	48-A	49-D	50-C
51-D	52-B	53-A	54-B	55-C	56-B	57-D	58-D	59-A	60-D
61-D	62-B	63-A	64-D	65-D	66-B	67-B	68-B	69-C	70-A

71-A	72-D	73-C	74-A	75-D	76-B	77-D	78-D	79-B	80-C
81-C	82-A	83-D	84-A	85-A	86-B	87-D	88-D	89-C	90-A
91-C	92-C	93-A	94-B	95-D	96-C	97-B	98-C	99-C	100-C
101-A	102-C	103-C	104-C	105-A	106-B	107-C	108-C	109-B	110-D
111-	112-								

Câu 1: $P = \cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2\left(1 - 2\sin^2 \alpha\right)^2 - 1 = 2\left(1 - 2 \cdot \frac{16}{25}\right)^2 - 1 = \frac{-527}{625}$. **Chọn B.**

Câu 2: Do $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow P > 0$

Lại có: $P^2 = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha = 1 - \sin 2\alpha = \frac{9}{5} \Rightarrow P = \frac{3}{\sqrt{5}}$. **Chọn A.**

Câu 3: $P = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2}(2\sin \alpha \cos \alpha)^2$
 $= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$. **Chọn C.**

Câu 4: $P = \sin 2(\alpha + \pi) = \sin(2\alpha + 2\pi) = \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$

Mặt khác $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0$ và $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$

Suy ra $P = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{-3}{5} = \frac{-24}{25}$. **Chọn A.**

Câu 5: $P = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{(1 + \cos 2\alpha) + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2\cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$
 $= \frac{2\cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 2\cos \alpha$

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha > 0$ và $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$. **Chọn D.**

Câu 6: Ta có: $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{-3}{5} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$

Khi đó $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{6} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \alpha + \frac{1}{2}\cos \alpha$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-4}{5} = \frac{-3\sqrt{3} - 4}{10}$. **Chọn D.**

Câu 7: Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\sin \alpha < 0$, mặt khác $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{-12}{13}$

Lại có: $P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{2 \cdot \frac{-12}{13} \cdot \frac{5}{13}}{2 \left(\frac{5}{13} \right)^2 - 1} = \frac{120}{119}$. **Chọn C.**

Câu 8: $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos^2 \alpha - 1 = -\frac{2}{3} \\ 1 - 2 \sin^2 \alpha = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1}{6} \\ \sin^2 \alpha = \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow P = \left(1 + 3 \cdot \frac{5}{6} \right) \left(1 - 4 \cdot \frac{1}{6} \right) = \frac{7}{6}$. **Chọn D.**

Câu 9: Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \sin \alpha < 0$, lại có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

Suy ra $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, khi đó $P = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-\sqrt{7}}{4} = \frac{3 - \sqrt{21}}{8}$. **Chọn B.**

Câu 10: Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha < 0$, lại có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

Do đó $\sin \alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{4}$, $P = \tan \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha} = \frac{-1}{7}$. **Chọn A.**

Câu 11: Do $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi \Rightarrow \sin 2\alpha > 0$, lại có $\sin^2 2\alpha = 1 - \cos^2 2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

Suy ra $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$, $P = \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{4} + \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \right) = \frac{-\sqrt{2}}{10}$. **Chọn B.**

Câu 12: $P = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2} = \frac{1}{2} (\sin 2\alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{2} (2 \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{2} \sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)$

Mặt khác $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha < 0 \Rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{3}{4}$

Do đó $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{-3}{5} \left(2 \cdot \frac{-4}{5} - 1 \right) = \frac{39}{50}$. **Chọn D.**

Câu 13:

$\cot \left(\frac{5\pi}{2} - \alpha \right) = 2 \Leftrightarrow \cot \left(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 2 \Leftrightarrow \cot \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 2 \Leftrightarrow \tan \alpha = 2$

Khi đó: $P = \tan \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{2 + 1}{1 - 2} = -3$. **Chọn D.**

Câu 14: $P = \sin 2\alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{2 \cot \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{30}{1 + 15^2} = \frac{15}{113}$. **Chọn C.**

Câu 15: $P = \tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{2}} = \frac{2}{\sin \alpha}$

Mặt khác $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \sin \alpha > 0$, mà $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{19}$

Suy ra $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{19}} \Rightarrow P = 2\sqrt{19}$. **Chọn A.**

Câu 16: Ta có: $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right] \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \leq \cos \frac{\alpha}{2} < -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Suy ra $P = \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} < 0$, ta có: $P^2 = \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 1 + \sin \alpha$

Lại có $\tan \alpha = -\frac{4}{3} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{3}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{16}{25}$

Mà $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \Rightarrow \sin \alpha < 0 \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow P^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow P = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. **Chọn C.**

Câu 17: $P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1} = \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos^2 2\alpha} = \tan 2\alpha \cdot \frac{1}{2 \cos 2\alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}$
 $= \frac{-2}{1 - 4} \cdot \frac{\tan^2 \alpha + 1}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{-10}{9}$. **Chọn C.**

Câu 18: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ và $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. Tính $P = \sin 2\alpha$

A. $P = \frac{4\sqrt{6}}{25}$ B. $P = -\frac{4\sqrt{6}}{25}$ C. $P = \frac{2\sqrt{6}}{25}$ D. $P = -\frac{2\sqrt{6}}{25}$

HD: Do $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ nên $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$ cùng dấu

Mặt khác $\tan \alpha + \cot \alpha < 0 \Rightarrow \tan \alpha < 0$, do $\sin \alpha = \frac{1}{5} > 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0$

Khi đó $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow P = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{4\sqrt{6}}{25}$. **Chọn B.**

Câu 19: Ta có $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0$

Mặt khác $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow (-1 - 2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow 5 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha = 0$

Suy ra $\cos \alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow P = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{-24}{25}$. **Chọn C.**

Câu 20:
$$P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \left(\sin \alpha \cos \frac{\pi}{6} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{6}\right) \left(\sin \alpha \cos \frac{\pi}{6} - \cos \alpha \sin \frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha\right) = \frac{3}{4} \sin^2 \alpha - \frac{1}{4} \cos^2 \alpha = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{1}{4} (1 - \sin^2 \alpha)$$
$$= \frac{27}{100} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{9}{25}\right) = \frac{11}{100}$$
. **Chọn A.**

Câu 21: Ta có $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$. **Chọn C.**

Câu 22:
$$\cos\left(\alpha - \frac{21\pi}{4}\right) = \cos \alpha \cdot \cos \frac{21\pi}{4} + \sin \alpha \sin \frac{21\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

Lại có : $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos\left(\alpha - \frac{21\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$. **Chọn A.**

Câu 23:
$$P = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - 3}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2 \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 3}{1 + \tan^2 \alpha + 2 \tan^3 \alpha} = \frac{(1 + \tan^2 \alpha) \cdot \tan \alpha - 3}{1 + \tan^2 \alpha + 2 \tan^3 \alpha} = \frac{1}{3}$$
. **Chọn A.**

Câu 24: Ta có $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Mà $\cos a = -\sqrt{1 - \cos^2 a} = -\frac{12}{13}$; $\sin b = \sqrt{1 - \cos^2 b} = \frac{4}{5}$

Suy ra $\sin(a + b) = \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} - \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{33}{65}$. **Chọn C.**

Câu 25: Ta có $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

Mà $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{12}{13}$; $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{4}{5}$

Suy ra $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{16}{65}$. **Chọn B.**

Câu 26:
$$P = \frac{1}{2} [\cos(a + b + a - b) + \cos(a + b - a + b)] = \frac{1}{2} (\cos 2a + \cos 2b)$$

Lại có $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{9}$; $\cos 2b = 2 \cos^2 b - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{8}$

Vậy
$$P = \frac{1}{2} \left(-\frac{7}{9} - \frac{7}{8}\right) = -\frac{119}{144}$$
. **Chọn D.**

Câu 27: Ta có $P = \cos[2(a + b)] = 2 \cos^2(a + b) - 1$

Lại có $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$$= \sqrt{1-\sin^2 a} \cdot \sqrt{1-\sin^2 b} - \sin a \cdot \sin b = \frac{2\sqrt{6}-1}{6} \Rightarrow P = \frac{7-4\sqrt{6}}{18}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 28: $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}. \text{ Chọn B.}$

Câu 29: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Leftrightarrow \sin^2 a + \left(\frac{1}{5} - \sin a\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 a - \frac{2}{5}\sin a - \frac{24}{25} = 0 \Leftrightarrow \sin a = \frac{4}{5}$

Suy ra $\cos a = \sin a - \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow \tan a = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{24}{7}. \text{ Chọn D.}$

Câu 30: $\tan(2a) = \tan[(a+b) + (a-b)] = \frac{\tan(a+b) + \tan(a-b)}{1 - \tan(a+b) \cdot \tan(a-b)} = -\frac{11}{27}. \text{ Chọn A.}$

Câu 31: Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha - \pi \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin(\alpha - \pi) < 0. \text{ Chọn C.}$

Câu 32: Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{2} < \pi \Rightarrow \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0$

Mặt khác $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha < 0. \text{ Chọn C.}$

Câu 33: Ta có $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$

Mặt khác $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cot \alpha > 0. \text{ Chọn B.}$

Câu 34: Ta có $M = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha) = \sin \alpha \cdot (-\tan \alpha) = \frac{-\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow M > 0. \text{ Chọn B.}$

Câu 35: Ta có $M = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cot(\pi + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cot \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$

Mặt khác $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha < 0 \Rightarrow M < 0. \text{ Chọn D.}$

Câu 36: $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow \cos^2(180^\circ - \alpha) = \cos^2 \alpha$

Do đó $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha(180^\circ - \alpha) = 1. \text{ Chọn C.}$

Câu 37: $\tan \alpha$ có nghĩa khi $\cos \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi. \text{ Chọn C.}$

Câu 38: $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin \alpha \cdot \cos \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2\alpha \neq 0 \Leftrightarrow 2\alpha \neq k\pi \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{k\pi}{2}$. **Chọn A.**

Câu 39: Biểu thức P xác định khi $\begin{cases} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \\ \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \alpha - \frac{\pi}{6} \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{6} + k\pi$. **Chọn C.**

Câu 40: Ta có $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$ nên $\sin 60^\circ > \sin 150^\circ$, $\cos 30^\circ > \cos 60^\circ$

$\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$ và $\cot 60^\circ = \cot 240^\circ$

Khẳng định đúng là C. **Chọn C.**

Câu 41: Do $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha \Rightarrow \tan(2017\pi + \alpha) = \tan \alpha$. **Chọn C.**

Câu 42: $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha - \sin \alpha = 0$. **Chọn D.**

Câu 43: $S = \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. **Chọn D.**

Câu 44: $P = \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha) = (-\sin \alpha) \cdot (-\cos \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

Lại có $Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \cos \alpha \cdot \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \cos \alpha$

Do đó $P + Q = 0$. **Chọn A.**

Câu 45: $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(10\pi + x)\right]^2 + \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(8\pi - x)\right]^2$
 $= (\cos x + \sin x)^2 + \left[-\left(\cos \frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x)\right]^2 = (\sin x + \cos x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$
 $= 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2$. **Chọn B.**

Câu 46: $P = \left[1 + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^2 + [1 + \cot(-x)]^2 = (1 + \cot x)^2 + (1 - \cot x)^2 = 2 + 2\cot^2 x$
 $= 2(1 + \cot^2 x) = \frac{2}{\sin^2 x}$. **Chọn C.**

Câu 47: $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{25}{144}$

Mặt khác $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \tan \alpha < 0 \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{5}{12}$. **Chọn C.**

Câu 48: Do $180^\circ < \alpha < 270^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$

Mặt khác $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

Khi đó $\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos \alpha + \sin \alpha = \frac{-3}{\sqrt{5}}$. **Chọn A.**

Câu 49: Ta có $90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha < 0$

Mặt khác $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-4}{5} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-4}{3}$

Khẳng định đúng là D. **Chọn D.**

Câu 50: Ta có $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha > 0$

Mặt khác $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$. **Chọn C.**

Câu 51: Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{-4}{5}$

Suy ra $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-3}{4} \Rightarrow P = \frac{-12}{25}$. **Chọn D.**

Câu 52: Ta có $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\sin \alpha = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3}$

Mặt khác $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$

Khi đó $P = \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -2\sqrt{2}$. **Chọn B.**

Câu 53: Do $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \Rightarrow \sin \alpha < 0$ suy ra $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{-4}{5}$

Do đó $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-4}{3}$, $\cot \alpha = \frac{-3}{4}$ suy ra $P = \sqrt{5 + 3 \cdot \frac{-4}{3}} + \sqrt{6 - 4 \cdot \frac{-3}{4}} = 4$. **Chọn A.**

Câu 54: Ta có $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha > 0$ suy ra $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4}{5}$

Do đó $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}$ suy ra $P = \sqrt{\tan^2 \alpha - 2 \tan \alpha + 1} = \sqrt{(\tan \alpha - 1)^2} = |\tan \alpha - 1| = \frac{1}{3}$. **Chọn B.**

Câu 55: Ta có $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \alpha = k\pi$

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \alpha = \pi \Rightarrow P = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin \alpha = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin \pi = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 56: Ta có $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0$

Mặt khác $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{4}{5}$

$$\text{Do đó } P = \frac{\sin^2 \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\frac{16}{25} + \frac{3}{5}}{\frac{4}{5} - \frac{9}{25}} = \frac{31}{11}. \text{ Chọn B.}$$

$$\text{Câu 57: } P = \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha + 7 \sin \alpha} = \frac{\frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{5 \cos \alpha + 7 \sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{3 \tan \alpha - 2}{5 + 7 \tan \alpha} = \frac{4}{19}. \text{ Chọn D.}$$

$$\text{Câu 58: } P = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha} = \frac{\frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{3 + 4 \cot \alpha}{2 - 5 \cot \alpha} = 13. \text{ Chọn D}$$

Câu 59: Chia cả tử số và mẫu số cho $\cos^2 \alpha$ ta được

$$P = \frac{2 \tan^2 \alpha + 3 \tan \alpha + 4}{5 \tan^2 \alpha + 6} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4}{5 \cdot 4 + 6} = \frac{9}{13}. \text{ Chọn A}$$

Câu 60: Chia cả tử số và mẫu số cho $\cos^2 \alpha$ ta được

$$P = \frac{2 \tan^2 \alpha + 3 \tan \alpha - 4}{5 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} - 4}{5 - \frac{1}{4}} = -\frac{8}{19}. \text{ Chọn D.}$$

$$\text{Câu 61: } P = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha$$

$$\text{Lại có: } \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{26} \Rightarrow P = 1 - \frac{2}{26} = \frac{12}{13}. \text{ Chọn D.}$$

$$\text{Câu 62: } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4} \Leftrightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{25}{16} \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{25}{16}$$

$$\text{Suy ra } P = \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\frac{25}{16} - 1}{2} = \frac{9}{32}. \text{ Chọn B.}$$

$$\begin{aligned} \text{Câu 63: } P &= \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha) \end{aligned}$$

$$\text{Lại có: } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25}$$

$$\text{Mặt khác } \sin \alpha + \cos \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5} \Rightarrow P = \frac{7}{5} \left(1 - \frac{12}{25} \right) = \frac{91}{125}. \text{ Chọn A.}$$

$$\text{Câu 64: Ta có } \begin{cases} (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{cases}$$

$$\text{Do đó } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 \Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{3}{4}$$

Mặt khác $0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin \alpha < \cos \alpha \Rightarrow P = \sin \alpha - \cos \alpha < 0 \Rightarrow P = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. **Chọn D.**

Câu 65: Ta có:
$$\begin{cases} (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{cases}$$

Do đó $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 \Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 - m^2$

Do đó $P = |\sin \alpha - \cos \alpha| = \sqrt{2 - m^2}$. **Chọn D.**

Câu 66: $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 4 - 2 = 2$. **Chọn B.**

Câu 67: $P = \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^3 - 3 \tan \alpha \cdot \cot \alpha (\tan \alpha + \cot \alpha)$
 $= 5^3 - 3 \cdot 5 = 110$. **Chọn B.**

Câu 68: $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 \tan \alpha \cdot \cot \alpha = \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 - 2$
 $= \left(\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \right)^2 - 2 = \frac{1}{(\sin \alpha \cos \alpha)^2} - 2$

Mặt khác $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{-1}{4}$

Suy ra $P = 16 - 2 = 14$. **Chọn B.**

Câu 69: Ta có
$$\begin{cases} (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 = \tan^2 \alpha + 2 + \cot^2 \alpha \\ (\tan \alpha - \cot \alpha)^2 = \tan^2 \alpha - 2 + \cot^2 \alpha \end{cases}$$

$(\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - (\tan \alpha - \cot \alpha)^2 = 4 \Leftrightarrow P^2 - 1 = 4 \Leftrightarrow P^2 = 5$. **Chọn C.**

Mặt khác $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha < 0 \\ \cot \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow P < 0 \Rightarrow P = -\sqrt{5}$

Câu 70: Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ và $\cos \alpha = \frac{2 - 2 \sin \alpha}{3}$

Suy ra $\sin^2 \alpha + \left(\frac{2 - 2 \sin \alpha}{3} \right)^2 = \sin^2 \alpha + \frac{4 - 8 \sin \alpha + 4 \sin^2 \alpha}{9} = 1$

$\Leftrightarrow 13 \sin^2 \alpha - 8 \sin \alpha - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 1 \\ \sin \alpha = -\frac{5}{13} \end{cases}$

Do $\sin \alpha < 0 \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{5}{13}$. **Chọn A.**

Câu 71: $A = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2} \left(2 \cos \frac{x}{2} + 1 \right)}{\cos \frac{x}{2} \left(2 \cos \frac{x}{2} + 1 \right)} = \tan \frac{x}{2}$. **Chọn A.**

Câu 72: $A = \sin \alpha \cos (\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$

$A = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha$. **Chọn D**

Câu 73: $A = \frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha - \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$. **Chọn C.**

Câu 74: Ta có: $\sin a + 1 = \sin a + \sin \frac{\pi}{2} = 2 \sin \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$. **Chọn A.**

Câu 75: Ta có: $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 + \sin 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}$. **Chọn D.**

Câu 76: $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. **Chọn B.**

Câu 77: Ta có $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

Lại có $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{12}{13}$; $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{4}{5}$

Vậy $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{16}{65}$. **Chọn D.**

Câu 78: Ta có $\sin^2(2018\alpha) + \cos^2(2018\alpha) = 1 \Rightarrow$ Khẳng định D sai. **Chọn D.**

Câu 79: $M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$

$= \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2$. **Chọn B.**

Câu 80: $M = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y - \sin y \cos x}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y}$. **Chọn C.**

Câu 81: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} (2 \sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$

$= 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4x) = \frac{3 + \cos 4x}{4}$. **Chọn C.**

Câu 82: $\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x = 1 - 2 \cos^2 x$. **Chọn A.**

Câu 83: $M = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$

$= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$. **Chọn D.**

Câu 84: Ta có $\cos 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2} (\cos 8x + \cos 2x)$. **Chọn A.**

Câu 85: $\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right) = \frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} + a \right)}{2} = \frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - (-a) \right)}{2} = \frac{1 + \sin(-a)}{2} = \frac{1 - \sin a}{2}$. **Chọn A.**

Câu 86: $M = \frac{\sin(y - x)}{\sin x \cdot \sin y} = \frac{\sin y \cos x - \cos y \sin x}{\sin x \sin y} = \frac{\sin y \cos x}{\sin x \sin y} - \frac{\cos y \sin x}{\sin x \sin y}$.

$$= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos y}{\sin y} = \cot x - \cot y. \text{ Chọn B.}$$

Câu 87: $M = \cos x + \cos 2x + \cos 3x = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x = 2 \cos x \cos 2x + \cos 2x$
 $= \cos 2x(2 \cos x + 1). \text{ Chọn D.}$

Câu 88: $M = \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1} = \frac{2 \cos 2x \sin x}{\cos 2x} = 2 \sin x \text{ Chọn D.}$

Câu 89: $A = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1} = \frac{1 + \cos 2x + (\cos x + \cos 3x)}{\cos x + (2 \cos^2 x - 1)}$

$$\Rightarrow A = \frac{2 \cos^2 x + 2 \cos 2x \cos x}{\cos x + \cos 2x} = \frac{2 \cos x (\cos x + \cos 2x)}{\cos x + \cos 2x} = 2 \cos x. \text{ Chọn C.}$$

Câu 90: $A = \frac{\tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} + \cos 2\alpha = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} + \cos 2\alpha$

$$= \frac{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}} + \cos 2\alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} + \cos 2\alpha = 0. \text{ Chọn A.}$$

Câu 91: $A = \frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha} = \frac{1 - \cos 4\alpha + \sin 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha + \sin 4\alpha} = \frac{2 \sin^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2 \cos^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}$
 $= \frac{2 \sin 2\alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{2 \cos 2\alpha (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)} = \tan 2\alpha. \text{ Chọn C.}$

Câu 92: $A = \frac{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^4 \alpha - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4 \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^4 \alpha - (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2}{4 - \sin^2 2\alpha - 4 \sin^2 \alpha}$
 $= \frac{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^4 \alpha - \sin^2 2\alpha}{-4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 4(1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{4 \sin^4 \alpha}{-4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 4 \cos^2 \alpha}$
 $= \frac{4 \sin^4 \alpha}{4 \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{4 \sin^4 \alpha}{4 \cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha = \frac{1}{9}. \text{ Chọn C.}$

Câu 93: $A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (2 \cos \alpha + 1)}{\cos \alpha (2 \cos \alpha + 1)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha. \text{ Chọn A.}$

Câu 94: $A = \frac{1 - \sin a - \cos 2a}{\sin 2a - \cos a} = \frac{2 \sin^2 a - \sin a}{2 \sin a \cos a - \cos a} = \frac{\sin a (2 \sin a - 1)}{\cos a (2 \sin a - 1)} = \tan a. \text{ Chọn B.}$

Câu 95: $M = \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha \right)}{2} - \frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right)}{2}$
 $= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) \right] = \frac{1}{2} (-\sin 2\alpha - \sin 2\alpha) = -\sin 2\alpha. \text{ Chọn D.}$

Câu 96: Ta có $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$; $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. **Chọn C.**

Câu 97: $\tan(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos \gamma \Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) = \cot \gamma = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. **Chọn B.**

Câu 98: $\sin \alpha \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin(2\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \sin \beta = \sin \beta$

$$\Leftrightarrow \sin(2\alpha + \beta) = 3 \sin \beta \Leftrightarrow \sin(2\alpha + \beta) - \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(2\alpha + \beta) + \sin \beta]$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \beta \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = 2 \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

Vậy $\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta \Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \beta$. **Chọn C.**

Câu 99: $\cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \gamma\right) = 2 \tan(\alpha + \gamma)$

$$\Leftrightarrow \cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cdot \frac{\tan \alpha + \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \gamma} \Leftrightarrow \cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cdot \frac{\cot \alpha + \cot \gamma}{\cot \alpha \cot \gamma - 1}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{2}{\cos \alpha \cdot \cot \gamma - 1} \Leftrightarrow \cos \alpha \cdot \cot \gamma - 1 = 2 \Leftrightarrow \cos \alpha \cdot \cot \gamma = 3. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 100: $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{p}{1 - q}$ (hệ thức Vi-et)

$$\text{Lại có } \frac{P}{\cos^2(\alpha + \beta)} = 1 + p \cdot \tan(\alpha + \beta) + q \cdot \tan^2(\alpha + \beta)$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{1 + p \cdot \tan(\alpha + \beta) + q \cdot \tan^2(\alpha + \beta)}{1 + \tan^2(\alpha + \beta)} = \frac{1 + p \cdot \frac{p}{1 - q} + \frac{p^2}{(1 - q)^2}}{1 + \frac{p^2}{(1 - q)^2}} = 1. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 101: Có $1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{P+2}{3} \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq P \leq 1$ suy ra $M = 1, m = -5$. **Chọn A.**

Câu 102: Ta có $1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2-P}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq P \leq 4$. **Chọn C.**

Câu 103: $P = \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{3} - \sin x = -\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$

$$\text{Lại có } \left(-\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right)^2 \leq \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 \Rightarrow P^2 \leq 1$$

Do đó $-1 \leq P \leq 1$ mà $P \in \mathbb{Z} \rightarrow P = \{-1; 0; 1\}$. **Chọn C.**

Câu 104: Ta có $P = \frac{1 - \cos 2x}{2} + 2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \Rightarrow \cos 2x = 2P - 3$

Lại có $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2P - 3 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq P \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} M = 2 \\ m = 1 \end{cases}$ **Chọn C.**

Câu 105: Ta có : $P = 8 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + 3 \cos 2x = 4 - \cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x = 4 - P$

Lại có $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 4 - P \leq 1 \Leftrightarrow 3 \leq P \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow 2M - m^2 = 1$. **Chọn A.**

Câu 106: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$

Suy ra $\sin^2 2x = 2 - 2P \in [0; 1] \Leftrightarrow 0 \leq 2 - 2P \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq P \leq 1$. **Chọn B.**

Câu 107: $P = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x \in [-1; 1]$. **Chọn C.**

Câu 108: $P = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x)$
 $= \sin^4 x + \cos^4 x - \frac{1}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x - \frac{1}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{4 - 4P}{3}$

Lại có $\sin^2 2x \in [0; 1]$ nên $0 \leq \frac{4 - 4P}{3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq P \leq 1 \Rightarrow M = 1; m = \frac{1}{4}$ **Chọn C.**

Câu 109: $|\cos 3x| = \frac{1 - P}{2} \in [0, 1] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1 - P}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq 1$. **Chọn B.**

Câu 110: $P = 4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + \sin 2x + \cos 2x = 2 + \sin 2x - \cos 2x = 2 + \sqrt{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$

Lại có $\sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 2 + \sqrt{2} \Rightarrow P_{\max} = 2 + \sqrt{2}$. **Chọn D.**

Câu 111: Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (so le trong) $\Rightarrow \tan \widehat{BDC} = \tan \widehat{ABD} = \frac{3}{4}$

Đặt $\widehat{ABD} = \alpha \Rightarrow \widehat{BAD} = \pi - 2\alpha \Rightarrow \cos \widehat{BAD} = \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$

Lại có $\tan \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{7}{25}$ **Chọn B.**

Câu 112: Ta có $\cos 2A + \frac{1}{64 \cos^4 A} = 2 \cos^2 A + \frac{1}{64 \cos^4 A} - 1 = \cos^2 A + \cos^2 A + \frac{1}{64 \cos^4 A} - 1$
 $\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\cos^2 A \cdot \cos^2 A \cdot \frac{1}{64 \cos^4 A}} - 1 = \frac{3}{\sqrt[3]{64}} - 1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2A + \frac{1}{64 \cos^4 A} \geq -\frac{1}{4}$

Lại có $2 \cos 2B + 4 \sin B = -2 \sin^2 B + 4 \sin B + 2 = -2(\sin B - 1)^2 + 4 \leq 4$

Suy ra $\cos 2A + \frac{1}{64 \cos^2 A} - (2 \cos 2B + 4 \sin B) + \frac{17}{4} \geq -\frac{1}{4} - 4 + \frac{17}{4} = 0$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\cos A = \frac{1}{2}$; $\sin B = 0 \Rightarrow A = 60^\circ$; $B = 90^\circ$. **Chọn A.**