ỨNG DỤNG HÀNG ĐIỂM ĐIỀU HÒA TRONG BÀI TOÁN ĐƯỜNG PHÂN GIÁC VÀ BÀI TOÁN ĐỒNG QUY, THẲNG HÀNG

Tác giả: Nguyễn Bá Hoàng

Trường THPT Chuyên Lào Cai

A. PHẦN MỞ ĐẦU

I. Lý do chọn đề tài

Các bài toán về Hình học phẳng thường xuyên xuất hiện trong các kì thi HSG môn toán và luôn được đánh giá là nội dung khó trong đề thi. Có rất nhiều dạng bài tập về hình học phẳng cùng với sự tương ứng của các công cụ đi cùng, trong đó hàng điểm điều hòa là một trong những công cụ mạnh để giải nhiều lớp bài toán về hình học. Mặc dù là một vấn đề khá quen thuộc của hình học phẳng, kiến thức về nó khá đơn giản và dễ hiểu, tuy nhiên nó có ứng dụng nhiều đối với các bài toán chứng minh vuông góc, đồng quy, thẳng hàng, điểm cố đinh, đường cố định hay các bài toán về tập hợp điểm…. Chính vì thế trong các kì thi học sinh giỏi quốc gia, thi Olympic Toán quốc tế và khu vực, những bài toán có liên quan đến hàng điểm điều hòa thường xuyên được đề cập và thường được xem là những dạng toán hay của kì thi.

Chính vì vậy tác giả lựa chọn chuyên đề: "Ứng dụng hàng điểm điều hòa trong bài toán phân giác và đồng quy, thẳng hàng" để thấy được ứng dụng quan trọng của hàng điểm điều hòa đối với khá nhiều dạng bài tập hình học phẳng. Trong chuyên đề tác giả cố gắng tập hợp được các bài toán đặc trưng cho việc sử dụng công cụ hàng điểm điều hòa.

II. Mục đích của chuyên đề

Thông qua chuyên đề "Ứng dụng hàng điểm điều hòa trong bài toán phân giác và đồng quy, thẳng hàng" tác giả rất mong muốn nhận được góp ý trao đổi của các bạn đồng nghiệp và các em học sinh. Chúng tôi mong muốn chuyên đề này góp một phần nhỏ để việc ứng dụng hàng điểm điều hòa trong bài toán hình học phẳng đạt hiệu quả cao nhất. Từ đó giúp các em học sinh hiểu rõ hơn về việc sử dụng hàng điểm điều hòa và tăng khả năng vận dụng nó vào giải các bài toán hình học một cách tốt nhất.

B. PHẦN NỘI DUNG

I. Hệ thống lý thuyết cơ bản về hàng điểm điều hòa

1. Tỉ số kép của hàng điểm

a) Định nghĩa 1

+ Bộ bốn điểm đôi một khác nhau có kể đến thứ tự cùng thuộc một đường thẳng được gọi là hàng điểm.

+ Tỉ số kép của hàng điểm A, B, C, D là một số, kí hiệu là (ABCD) và được xác định bởi:

$$(ABCD)=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

b) Tính chất của tỉ số kép:

+) $(ABCD)=(CDAB)=(BADC)=(DCBA)$

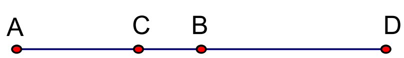
+) $(ABCD)=\dfrac{1}{(BACD)}=\dfrac{1}{(ABDC)}$

+) $(ABCD)=1-(ACBD)=1-(DBCA)$

+) Nếu $(ABCD)=(ABCD')$ thì $D\equiv D'$

2. Hàng điểm điều hòa

a) Định nghĩa 2:



Nếu $(ABCD)=-1$ thì hàng điểm A, B, C, D được gọi là hàng điểm điều hòa.

Nói cách khác nếu $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ thì hàng điểm A, B, C, D được gọi là hàng điểm điều hòa.

b) Một số định định lí quan trọng *(được suy trực tiếp từ định nghĩa):*

Định lí 1*: (Hệ thức Newton)*

Cho $(ABCD)=-1$. Gọi N là trung điểm của AB. Khi đó $NA^2=NB^2=\overline{NC}.\overline{ND}$

Định lí 2: *(Hệ thức Descartes)*

Cho $(ABCD)=-1$. Khi đó $\dfrac{2}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{\overline{AC}}+\dfrac{1}{\overline{AD}}$

Định lí 3: *(Hệ thức Maclaurin)*

Cho $(ABCD)=-1$. Gọi I là trung điểm của CD. Khi đó $\overline{AC}.\overline{AD}=\overline{AB}.\overline{AI}$

Định lí 4: Cho $(A,B,C,D)=-1$. Lấy O sao cho OC là phân giác trong của $\widehat{AOB}$ thì OD là phân giác ngoài của $\widehat{AOB}$.

Nhận xét: Từ đó suy ra $\widehat{COD} = 90^0$ do đó định lí này có ý nghĩa thực sự quan trọng trong những bài chứng minh vuông góc. Mặt khác cũng có điều ngược lại tức nếu $\widehat{COD} = 90^0$ thì OC là phân giác trong và OD là phân giác ngoài của $\widehat{AOB}$ điều này có ý nghĩa quan trọng cho những bài chứng minh yếu tố phân giác.

Định lí 5: Cho $(A,B,C,D) = -1$ và điểm O nằm ngoài hàng điểm điều hòa trên. Một đường thẳng d cắt ba tia OC, OB, OD lần lượt tại E, I và F. Khi đó I là trung điểm của EF khi và chỉ khi d song song với OA.

Nhận xét: Định lí này rất có ý nghĩa đối với các bài toán chứng minh trung điểm và song song.

c) Một số hàng điểm điều hòa cơ bản:

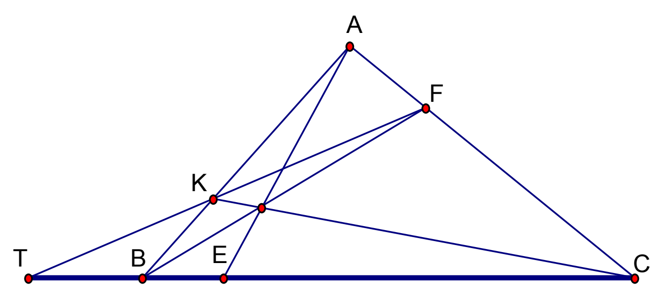
Hàng điểm 1: Cho tam giác ABC. Gọi AD, AE tương ứng là đường phân giác trong, đường phân giác ngoài của tam giác ABC. Khi đó (BCDE) = -1.

Chứng minh

Sử dụng tính chất đường phân giác và định nghĩa

Hàng điểm 2: Cho tam giác ABC và điểm O không thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Các đường thẳng AO, BO, CO theo thứ tự cắt các đường BC, CA, AB tại E, F, K. Hai đường thẳng BC, FK cắt nhau tại T. Khi đó (TEBC) = -1.

Chứng minh



Trong tam giác ABC:

+Áp dụng định lí Cêva với ba đường đồng quy AE, BF, CK ta có: $\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}.\frac{\overline{FC}}{\overline{FA}}.\frac{\overline{KA}}{\overline{KB}} = -1$ (1)

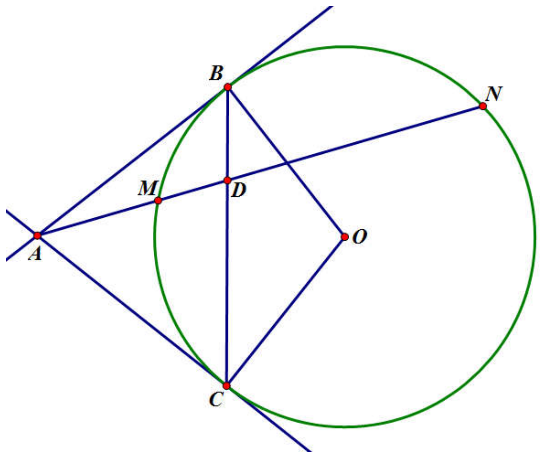
+Mặt khác áp định lí Menelaus với ba điểm thẳng hàng T, K, F lại cho ta: $\frac{\overline{TC}}{\overline{TB}}.\frac{\overline{KB}}{\overline{KA}}.\frac{\overline{FA}}{\overline{FC}} = 1$ (2)

Nhân (1) và (2) vế theo vế suy ra: $\frac{\overline{TB}}{\overline{TC}} = -\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}$

Theo định nghĩa thì $(T,E,B,C) = -1$,đây chính là *đpcm*.

Hàng điểm 3: Từ điểm A bên ngoài đường tròn (O), kẻ tới (O) các tiếp tuyến $AB, AC\left(B, C \in (O)\right)$. Một đường thẳng qua A, cắt đường tròn (O) tại M, N và cắt AB tại D. Khi đó $(ADMN) = -1$.

Chứng minh



Sử dụng hệ thức Marlaurin

3. Tỉ số kép của chùm đường thẳng - Chùm điều hòa

3.1. Chùm đường thẳng và tỉ số kép của nó:

a) Định nghĩa 3

- Tập hợp các đường thẳng trong mặt phẳng cùng đi qua một điểm S được gọi là chùm đầy đủ đường thẳng tâm S.

- Bộ 4 đường thẳng đôi một khác nhau, có kể đến thứ tự, cùng thuộc một chùm đầy đủ đường thẳng được gọi là chùm đường thẳng

b) Tỉ số kép của chùm đường thẳng:

Định lí 6: Cho a,b, c, d là chùm đường thẳng tâm O. Đường thẳng Δ không đi qua O theo thứ tự cắt a, b, c, d tại A, B, C, D. Đường thẳng Δ' không đi qua O theo thứ tự cắt a, b, c tại A', B', C'. Khi đó $\Delta' // d \Leftrightarrow (ABCD) = \dfrac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}$.

Định lí 7: Cho a, b, c, d là chùm đường thẳng tâm O. Đường thẳng Δ không đi qua O theo thứ tự cắt a, b, c, d tại A, B, C, D. Đường thẳng Δ' không đi qua O theo thứ tự cắt a, b, c, d tại A', B', C', D'. Khi đó $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Từ định lí 7, ta nhận thấy, tỉ số kép (ABCD) không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng Δ. Khi đó giá trị không đổi của tỉ số kép (ABCD) được gọi là tỉ số kép của chùm đường thẳng a, b, c, d kí hiệu là $(abcd)$ hoặc $O(abcd)$ với O là tâm của chùm.

Từ đó ta suy ra $(abcd) = (ABCD) = \dfrac{\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})}{\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})} : \dfrac{\sin(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})}{\sin(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})}$

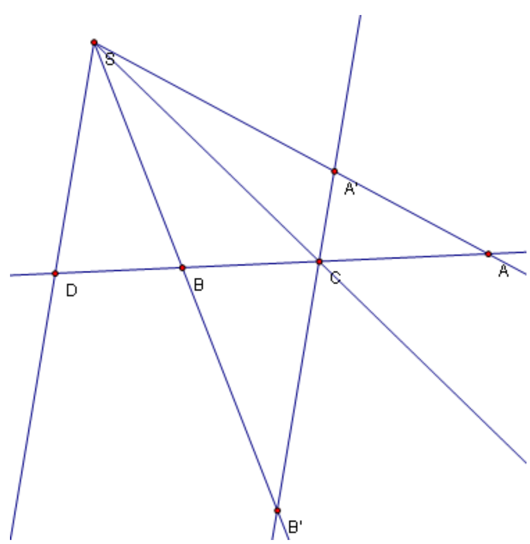
3.2 Phép chiếu xuyên tâm

a) Định nghĩa 4: Cho đường thẳng (d). Điểm S ở ngoài (d). Với mỗi điểm M (M không thuộc đường thẳng qua S song song (d)), SM cắt (d) tại M'. Khi đó ánh xạ f: M $\rightarrow$ M' là phép chiếu xuyên tâm với tâm chiếu S lên (d)

b) Định lí 8: Phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỉ số kép

Để chứng minh định lí trước hết ta cần phát biểu một bổ đề

Bổ đề 1.1. Cho S. A, B, C, D thuộc (d). Từ C kẻ đường thẳng song song SD cắt SA, SB tại A', B'. Khi đó $(ABCD) = \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}}$



Thật vậy theo định lí Talet ta có:

$$(ABCD) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{DB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{DS}} : \frac{\overline{DS}}{\overline{CB'}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}}$$

Trở lại định lí ta có

$$(ABCD) = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}} = \frac{\overline{C_1A''}}{\overline{C_1B''}} = (A_1B_1C_1D_1)$$

(d.p.c.m)

Nhận xét: A, B, C, D là hàng điểm điều hòa $\Leftrightarrow$ C là trung điểm A'B'

Từ định lí 1.3 ta có các hệ quả:

Hệ quả 1.2. Cho 4 đường thẳng đồng quy và đường thẳng Δ cắt 4 đường thẳng này tại A, B, C, D. khi đó (ABCD) không phụ thuộc vào Δ

Hệ quả 1.3. Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại O. $A,B,C \in \Delta_1$, $A',B',C' \in \Delta_2$. Khi đó:

$(OABC) = (OA'B'C') \Leftrightarrow AA', BB', CC'$ đồng quy hoặc đôi một song song

Chứng minh.

TH1. AA', BB', CC' song song

$$\Rightarrow \frac{\overline{BO}}{\overline{BA}} : \frac{\overline{CO}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{B'O}}{\overline{B'A}} : \frac{\overline{C'O}}{\overline{C'A}}$$
$$\Rightarrow (OABC) = (OA'B'C')$$

TH2. AA', BB',CC' không đôi một song đặt $AA' \cap BB' = S, SC \cap \Delta = C''$.

Ta có:

$$(OA'B'C') = (OABC) = (OA'B'C'')$$
$$\Rightarrow (OA'B'C') = (OA'B'C'')$$
$$\Rightarrow C' \equiv C''$$

Vậy AA', BB', CC'đồng quy

Phép chiếu xuyên tâm có rất nhiều ứng dụng và xuất hiện hầu hết trong các bài toán có sự hiện diện của hàng điểm điều hòa, vì lí do tránh trùng lặp với những phần khác, ta chỉ nghiên cứu các ứng dụng của phép chiếu xuyên tâm trong việc chứng minh đồng quy thẳng hàng trong phần này.

<u>3.3 Chùm điều hòa:</u>

a) Định nghĩa 5: Chùm a,b,c,d được gọi là chùm điều hòa nếu $(abcd) = -1$

b) Tính chất: Với chùm a,b,c,d , các điều kiện sau là tương đương:

(i) (abcd) = -1

(ii) Tồn tại một đường thẳng song song với một đường của chùm và định ra trên ba đường còn lại hai đoạn thẳng bằng nhau

(iii) Mọi đường thẳng song song với một đường của chùm định ra trên ba đường còn lại hai đoạn thẳng bằng nhau

c) Tính chất: Với chùm điều hòa a, b, c, d, các điều kiện sau là tương đương:

(i) $c \perp d$

(ii) c là một phân giác của góc tạo bởi a, b.

(iii) d là một phân giác của góc tạo bởi a, b.

4. Tứ giác điều hòa

4.1 Định nghĩa

Tứ giác nội tiếp $ABCD$ được gọi là điều hòa nếu tồn tại điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác sao cho *M(ACBD)=-1*.

Nhận xét: Tứ giác $ABCD$ là điều hòa thì với mọi điểm M thuộc (O) ta đều có *M(ACBD)=-1*.

Chú ý:

1) *M(ACBD)* được định nghĩa như sau: $M(ACBD)=\frac{\sin(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})}{\sin(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC})}:\frac{\sin(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MA})}{\sin(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MC})}$.

2) Trong phần này ta quy ước *(O)* là đường tròn ngoại tiếp tứ giác điều hòa $ABCD$.

4.2 Tính chất

a) Tứ giác $ABCD$ điều hòa $\Leftrightarrow AB.CD = AD.CB$

Nhận xét:

1) Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác điều hòa $ABCD$ ta có: $AC.BD = 2AB.CD = 2AD.CB$

2) Vì tính chất này tương đương với $\frac{AB}{AD}=\frac{CB}{CD}$ nên ta đã sử dụng thuật ngữ "Tứ giác điều hòa".

b) Tứ giác $ABCD$ điều hòa khi và chỉ khi Δ_A, Δ_C, BD đồng quy hoặc đôi một song song. Trong đó Δ_A, Δ_C lần lượt là tiếp tuyến tại A và C của (O).

c) Tứ giác điều hòa $ABCD$ nội tiếp (O). Chứng minh rằng (O) trực giao với đường tròn Apollonius tỉ số k dựng trên đoạn AC.

d) Cho tứ giác điều hòa ABCD. Gọi N là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng:

$$\frac{NA}{NC}=\left(\frac{BA}{BC}\right)^2=\left(\frac{DA}{DC}\right)^2$$

e) Cho tứ giác điều hòa ABCD. Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh rằng:

$\angle ADB = \angle MDC$

Chú ý: Đường thẳng DB trong bài toán này chính là đường đối trung của tam giác ADC. Đây cũng là một tính chất quan trọng và rất hay dùng của *Tứ giác điều hòa.*

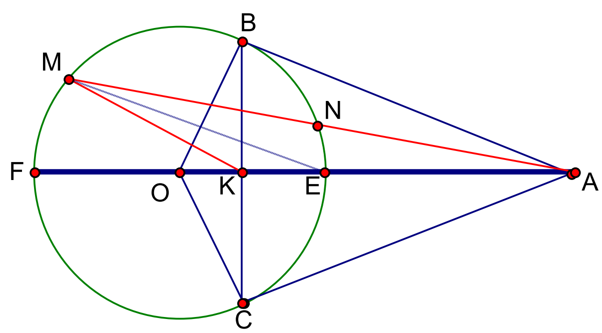
II. Bài tập áp dụng

Dạng 1: Khai thác bài toán liên quan đến đường phân giác

Chúng ta bắt đầu bởi một lớp bài toán liên quan đến đường phân giác. Ta xét bài toán cơ bản sau:

Bài 1. Cho A nằm ngoài đường tròn (O), từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC trong đó B, C là hai tiếp điểm . Kẻ cát tuyến AMN bất kì trong đó N nằm giữa A và M. AO cắt đoạn BC và cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ lần lượt tại K và E. Chứng minh rằng ME là phân giác của $\widehat{KMA}$

Lời giải:



Gọi F là giao điểm thứ hai của AE với (O). Khi đó ta có $(A,K,E,F)=-1$

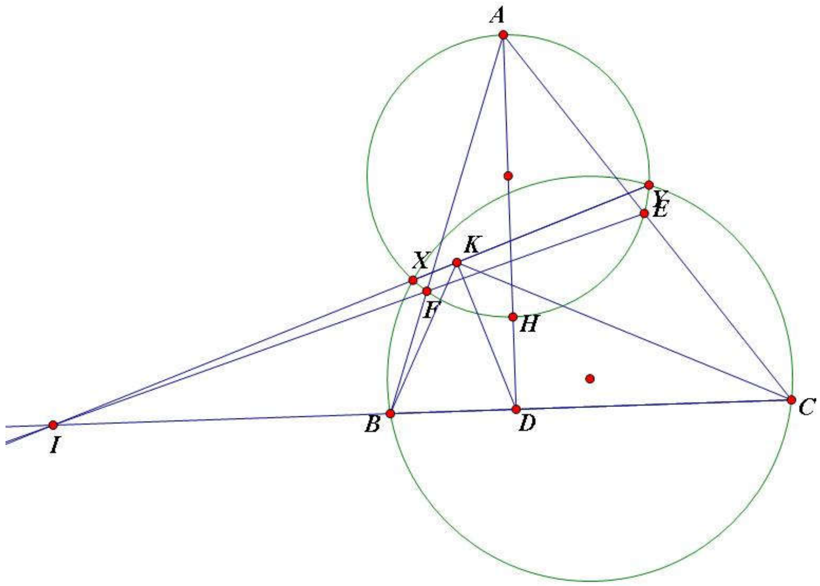
Vì $\angle FME = 90^0$ nên ME là phân giác của $\widehat{KMA}$

Nhận xét: *Bài toán trên khai thác một trong những ứng dụng quan trọng liên quan đến đường phân giác của hàng điểm điều hòa. Đây là một tính chất đẹp và rất hữu ích trong lớp bài toán về phân giác.*

Tiếp theo là một bài toán phức tạp hơn của dạng toán này

Bài 2 (JMO Finals 2013) Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Đường tròn đường kính AH và một đường tròn qua B, C cắt nhau tại hai điểm X, Y. Gọi D là chân vuông góc từ A xuống BC. Gọi K là hình chiếu của D xuống XY. Chứng minh rằng $\widehat{BKD} = \widehat{CKD}$.

Lời giải :



Gọi E, F theo thứ tự là chân vuông góc hạ từ B, C xuống CA và AB.

Dễ dàng thấy được E, F thuộc đường tròn đường kính AH, giả sử đường tròn đường kính AH là (O)

Gọi I là giao của XY và BC. Ta có: $P_{I/(O)} = \text{IX}.IY = IE.IF$

Hơn nữa vì tứ giác XYCB nội tiếp nên $P_{I/(XYCB)} = IB.IC = IX.IY$

Như vậy ta có $P_{I/(O)} = P_{I/(XYCB)}$. Suy ra I thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn, tức I thuộc XY.

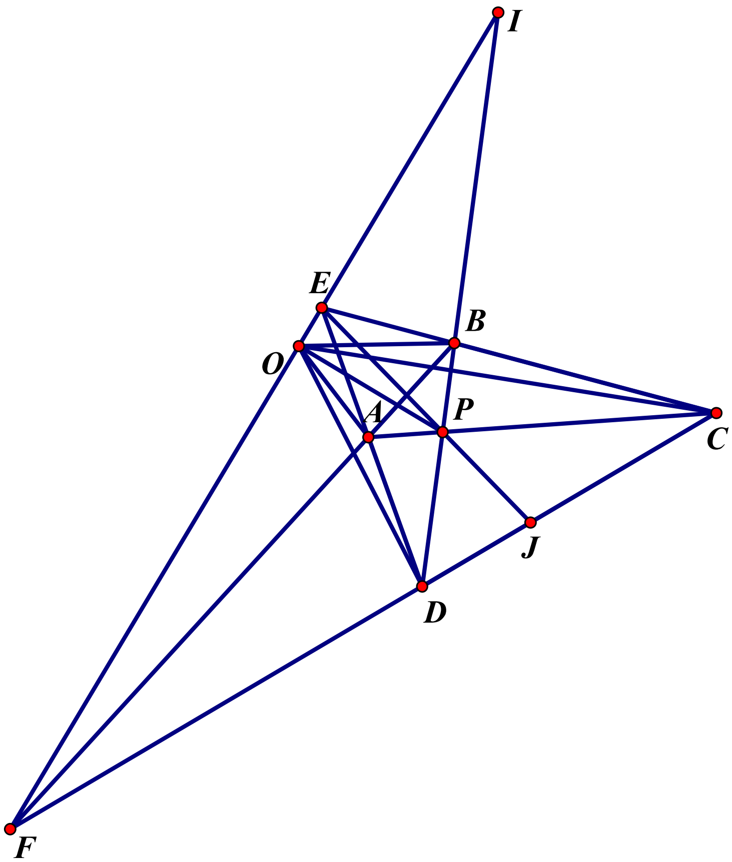
Dễ thấy (IDBC) = -1 (hàng điều hòa tứ giác toàn phần). Do vậy theo tính chất của hàng điểm điều hòa ta có KD là phân giác của góc $\widehat{BKC}$. Vậy $\widehat{BKD} = \widehat{CKD}$

Nhận xét: *Yêu cầu chứng minh của bài toán* $\widehat{BKD} = \widehat{CKD}$ *tương đương với KD là phân giác của góc* $\widehat{BKC}$ *từ đó dẫn đến việc tạo ra hàng điểm (IDBC) = -1 hết sực tự nhiên.*

Tiếp theo là một bài toán có yêu cầu tương tự nhưng kín hơn.

Bài 3 (China TST 2002). Cho tứ giác lồi *ABCD*. Gọi *E, F, P* lần lượt là giao điểm của *AD* và *BC*, *AB* và *CD*, *AC* và *BD*. Gọi *O* là chân đường vuông góc hạ từ *P* xuống *EF*. Chứng minh rằng $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$.

Lời giải



Gọi I là giao điểm của BD và EF và J là giao điểm của EP với CD.

Ta có ($DCJF$) = - 1 (hàng điểm cơ bản trong tam giác ECD) nên

$E\left(DCJF\right)=-1\Rightarrow E\left(DBPI\right)=-1\Rightarrow O\left(DBPI\right)=-1$

Mà $OP\perp OI$ nên theo định lí về chùm điều hòa, ta có OP là phân giác $\widehat{DOB}\Rightarrow\widehat{DOP}=\widehat{BOP}$

Hoàn toàn tương tự ta có $\widehat{AOP}=\widehat{COP}$

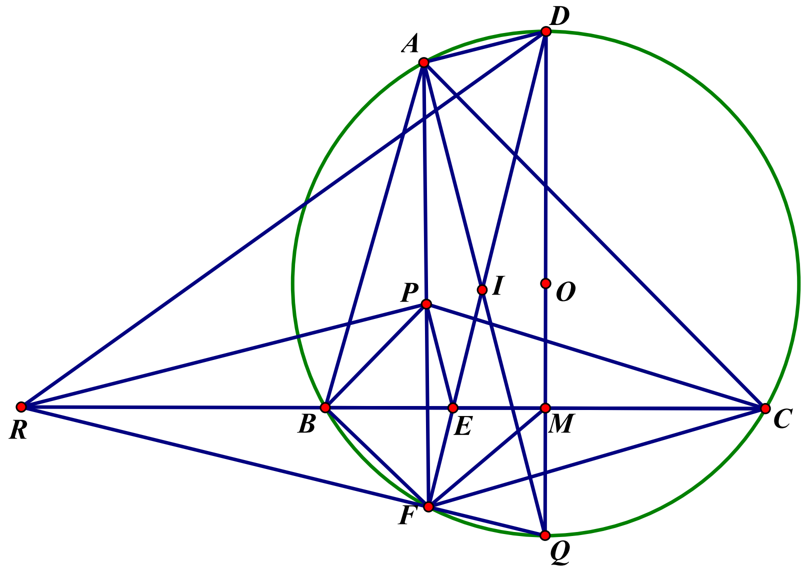
Từ đó $\widehat{AOD}=-\widehat{AOP}+\widehat{DOP}=-\widehat{COP}+\widehat{BOP}=\widehat{BOC}$

Đây là điều phải chứng minh.

Một bài toán có ý tưởng tương tự

Bài 4 (Iran TST 2012). Cho (ω) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi D là trung điểm cung $\widehat{BAC}$ của (ω). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. DI cắt BC tại E và (ω) tại F. P thuộc AF sao cho PE // AI. Chứng minh rằng PE là phân giác $\widehat{BPC}$.

Giải:



Gọi AI cắt (ω) tại Q, suy ra Q là trung điểm cung BC không chứa A, M là trung điểm BC suy ra $DQ \perp BC$ tại M. $FQ \cap BC = R$.

Do $PE \,//\, AQ$ và tứ giác $ADQF$; $DMFR$ là tứ giác nội tiếp nên ta có:

$\widehat{FPE} = \widehat{FAQ} = \widehat{FDM} = \widehat{FRE}$ nên tứ giác $RPEF$ là tứ giác nội tiếp nên

$\widehat{RPE} = 180° - \widehat{RFE} = 90° \Rightarrow PE \perp PR$ (1)

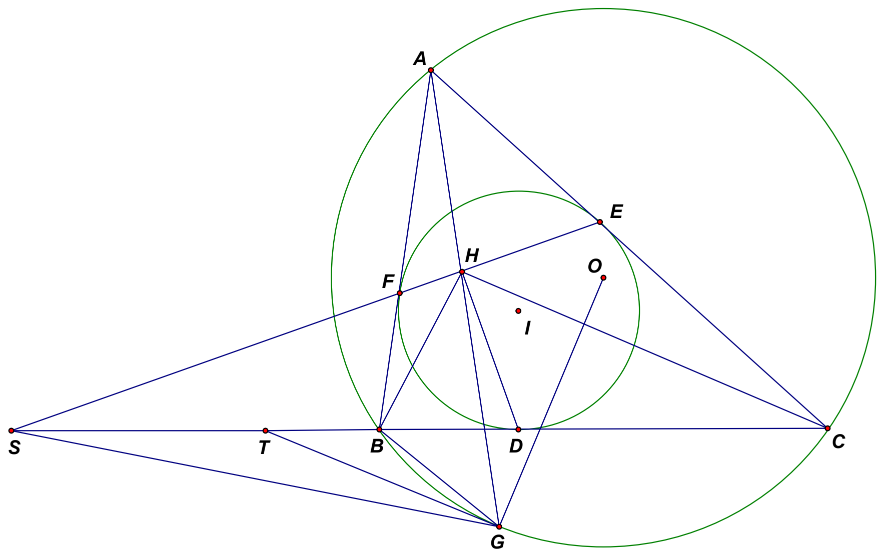
FE là phân giác trong của tam giác BFC và FR là phân giác ngoài nên $F(CBER) = -1$

$\Rightarrow P(CBER) = -1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra PE là phân giác trong $\widehat{BPC}$ (đpcm).

<u>Bài 5 (Duyên Hải 2013).</u> Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên EF; AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai G. Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại G cắt BC tại T. Chứng minh rằng tam giác TDG cân.

Lời giải



Nếu $EF \,//\, BC$ thì A, O, I, D, H, G thẳng hàng nên $TG \,//\, BC$ (vô lí)

Suy ra EF và BC cắt nhau tại S.

Ta có $(BCDS) = -1 \Rightarrow H(BCDS) = -1$

Mà $HD \perp HS \Rightarrow HD$ là phân giác của $\widehat{BHC} \Rightarrow \widehat{FHB} = \widehat{EHC}$ (1)

Mặt khác vì $AE = AF$ nên $\widehat{AEF} = \widehat{AFE} \Rightarrow \widehat{CEH} = \widehat{BFH}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔBFH và ΔCEH đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{HF}{HE} = \dfrac{BF}{CE} = \dfrac{BH}{CH} = \dfrac{DB}{DC}$ (3)

Ta có $\dfrac{GB}{GC} = \dfrac{\sin \widehat{BAG}}{\sin \widehat{CAG}} = \dfrac{2S_{\Delta AFH}}{AF.AH} : \dfrac{2S_{\Delta AEH}}{AE.AH} = \dfrac{S_{\Delta AFH}}{S_{\Delta AEH}} = \dfrac{HF}{HE} = \dfrac{DB}{DC}$ (do (3))

$\Rightarrow DG$ là phân giác của $\widehat{BGC}$ (4)

Mà $(BCDS) = -1 \Rightarrow G(BCDS) = -1$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $GD \perp GS$

Gọi T' là trung điểm của đoạn $SD \Rightarrow T'S = T'G = T'D$

Theo hệ thức Newton ta có $T'G^2 = T'D^2 = T'B.T'C$

Suy ra T'G là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBGC hay $T'G$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp (O)

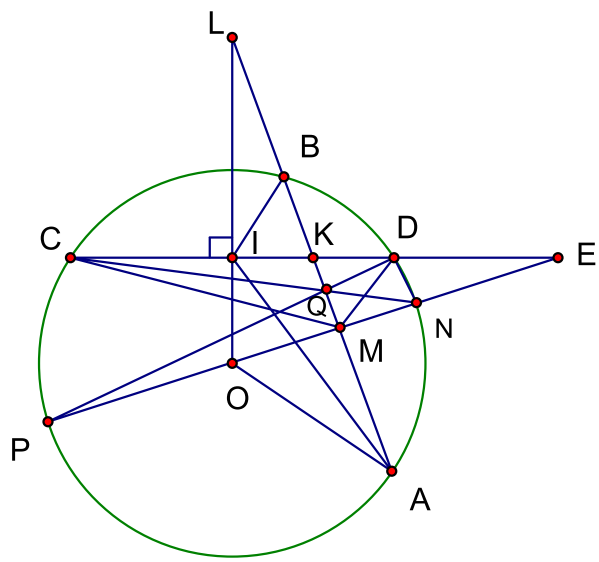
Vậy $T' \equiv T$ hay ΔTDG cân tại T

Bài 6. Cho đường tròn (O; R) và một điểm I cố định ở trong đường tròn (I $\neq$ O), đường thẳng qua I vuông góc với OI cắt đường tròn tại C và D; A là một điểm nằm trên đường tròn, tia đối xứng với tia IA qua đường thẳng CD cắt đường tròn tại B. Gọi M là trung điểm của AB.

a) Chứng minh đường thẳng AB đi qua một điểm cố định L khi A thay đổi trên đường tròn (O; R).

b) Gọi N, P là giao điểm của đường thẳng OM với đường tròn (O). Đường thẳng CN và DP cắt nhau ở Q. Chứng minh rằng các điểm Q, N là những tâm của đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của tam giác CMD.

Giải:



Gọi L là giao điểm của AB và OI; K là giao điểm của AB và CD.

Ta có IE $\perp$OL và IE là phân giác của góc $\widehat{AIB}$, suy ra: (ABKL)=-1

Suy ra $MA^2 = MB^2 = \overline{MK}.\overline{ML}$ (M là trung điểm của AB, New-tơn) = $(\overline{ML}+\overline{LK}).\overline{ML}$ = $ML^2 - \overline{LK}.\overline{LM}$

Mà ta lại có: $P_L/(IOMK) = \overline{LI}.\overline{LO} = \overline{LK}.\overline{LM}$

Do đó: $MA^2 = ML^2 - \overline{LK}\,\overline{LM} = ML^2 - \overline{LI}.\overline{LO}$

Suy ra: $ML^2 - MA^2 = \overline{LI}.\overline{LO} \Leftrightarrow LO^2 - OM^2 - MA^2 = \overline{LI}.\overline{LO}$

Suy ra: $OL^2 - OA^2 = \overline{LI}.\overline{LO} = (\overline{LO}+\overline{OI})\overline{LO} = LO^2 - \overline{OI}.\overline{OL}$

Suy ra $OA^2 = \overline{OI}.\overline{OL}$. Suy ra $\overline{OL} = \dfrac{R^2}{\overline{OI}}$. Vậy L cố định.

b) Trước hết ta chứng minh MK là phân giác của góc CMD.

Gọi E là giao điểm của OM với CD

Ta có : ΔOIE~ΔOML. Suy ra: $\overline{OM}.\overline{OE}=\overline{OI}.\overline{OL}=OA^2=R^2$

Suy ra: $OE^2-\overline{OM}.\overline{OE}=OE^2-R^2$

Suy ra : $\overline{OE}.\overline{ME}=IE^2+OI^2-R^2=IE^2-(R^2-OI^2)=IE^2-IC^2$

Ta có: $P_E/(OIRM)=\overline{KE}.\overline{IE}=\overline{OE}.\overline{ME}$

Do đó ta suy ra: $\overline{KE}.\overline{IE}=IE^2-IC^2$

Suy ra: $IC^2=IE^2-\overline{IE}.\overline{KE}=\overline{IE}(\overline{IE}-\overline{KE})=\overline{IE}.\overline{IK}$

Theo hệ thức Newton, ta suy ra: (CDKE)=-1 (1)

Mà MK ⊥ME nên MK là phân giác trong của góc $\widehat{CMD}$ (2)

Theo chứng minh trên ta có: $\overline{OM}.\overline{OE}=R^2=ON^2$

Suy ra: (PNME)= -1

Suy ra: (NPME)= -1 (3)

Từ (1) và (3) ta suy ra: CN, PD, KM đồng quy tại Q.

Mà góc $Q\hat{D}N=90^0$ nên QMND là tứ giác nội tiếp

Suy ra : $Q\hat{D}M=Q\hat{N}M=C\hat{D}P$

Suy ra DP là phân giác trong của góc $C\hat{D}M$. (4)

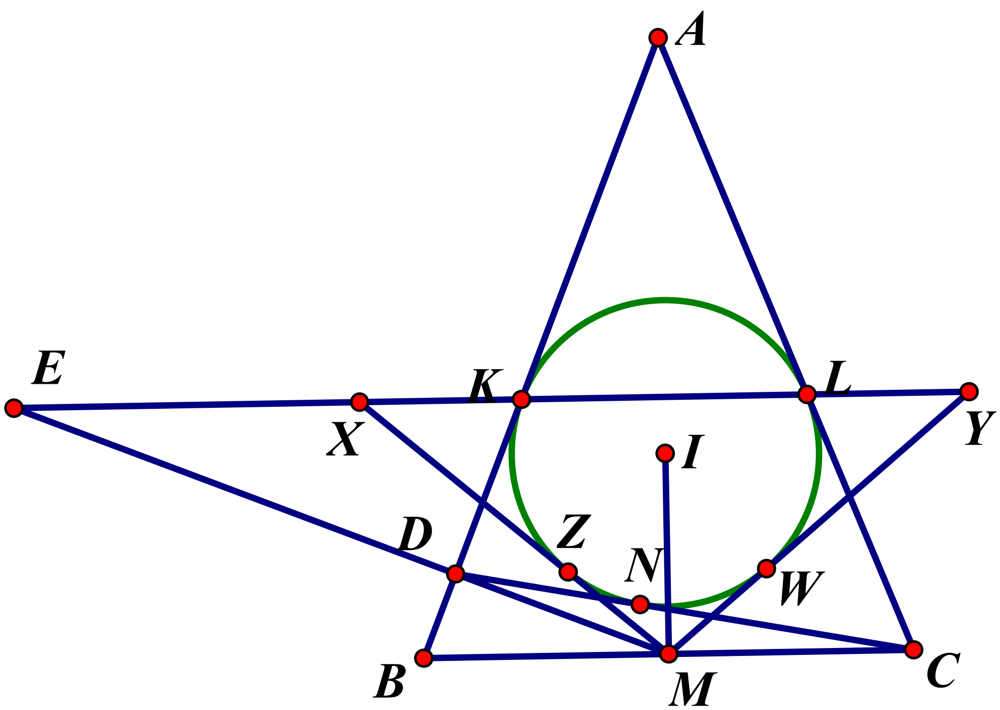
Từ (2) và (4), ta có Q là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CMD

Ta lại có DN ⊥ DP suy ra DN là phân giác ngoài của góc $\widehat{CDM}$. Suy ra N là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác CMD.

Vậy Q, N lần lượt là tâm của đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của tam giác CMD.

Bài 7 (Poland 2017) Xét tam giác ABC cân tại A có M là trung điểm của cạnh BC. Gọi D là hình chiếu vuông góc của M trên cạnh AB. Đường tròn ω nội tiếp tam giác ACD và tiếp xúc với các cạnh AD, AC lần lượt tại K, L. Các tiếp tuyến của ω đi qua M cắt đường thẳng KL tại X, Y; trong đó X, K, L, Y nằm trên đường thẳng theo đúng thứ tự kể trên. Chứng minh 4 điểm M, D, X, Y đồng viên.

Lời giải



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADC.

Gọi $N = \omega \cap CD, Z = MX \cap \omega, \mathrm{W} = MY \cap \omega, E = MD \cap XY$.

Ta có $\widehat{BIC} = 2\widehat{MIC} = 2(\widehat{IAC} + \widehat{ICA}) = \widehat{DAC} + \widehat{DCA} = \widehat{BDC}$

Suy ra $BDIC$ là tứ giác nội tiếp

Theo định lí Sim Son thì *K, M, N* thẳng hàng.

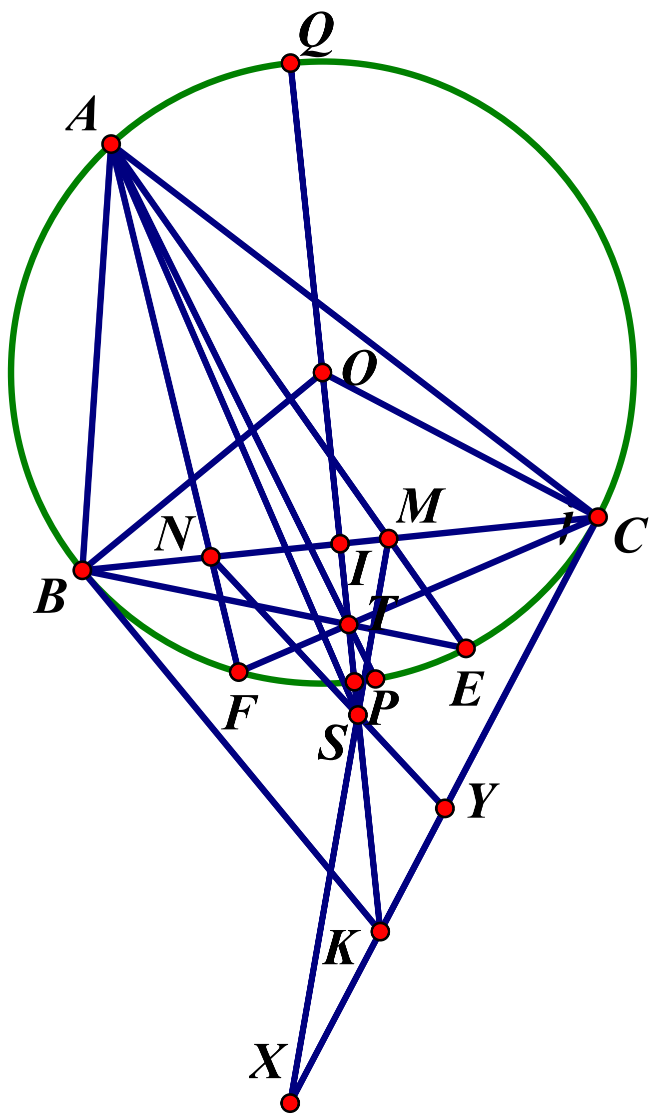
Vì *D* nằm trên đường đối cực của *M* đối với đường tròn ω, theo định lý Lahire ta có: W, Z, D thẳng hàng và do đó: $M(DNZ\mathrm{W}) = -1 \Rightarrow M(EKXY) = -1 \Rightarrow D(EKXY) = -1$.

Kết hợp với $\angle EDK = 90°$ ta có DE là đường phân giác ngoài của tam giác XDY. Lại có $MX = MY$.

Kết hợp hai kết quả trên ta được 4 điểm X, D, M, Y đồng viên.

<u>Bài 8.</u> Cho đường tròn (*O*), day cung *BC* khác đường kính. Điểm *A* thuộc cung lớn *BC*. Lấy *S* đối xứng *O* qua *BC*. Lấy *T* trên *OS* sao cho *AT*, *AS* đối xứng nhau qua phân giác góc *BAC*. Chứng minh *T* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *OBC*.

Lời giải



Gọi I là trung điểm BC, $K = BB \cap CC$. OK cắt (O) tại P và Q, Q thuộc cung lớn BC.

Ta có $(KIPQ) = -1$ nên theo hệ thức Newton ta có $OI.OK = OP^2$.

Mặt khác $AP \perp AQ$, AP là phân giác $\angle SAT$ nên $(STPQ) = -1$

Theo hệ thức Newton ta có $OP^2 = OT.OS$

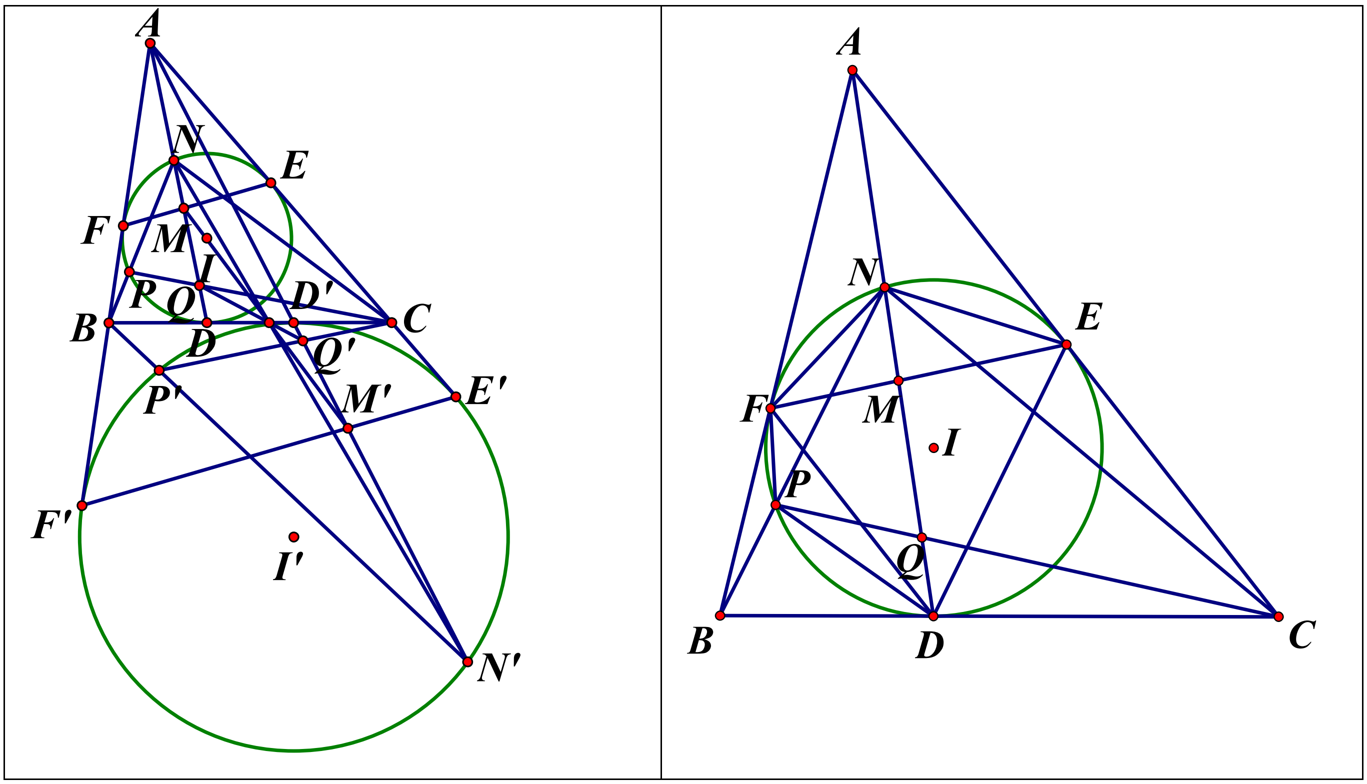
Từ đó suy ra $OI.OK = OT.OS$, mà $OS = 2OI$ nên $OK = 2OT$

Suy ra T là tâm (OBK) hay T là tâm (OBC).

Dạng 2: Chứng minh đồng quy, thẳng hàng

Bài 9 (Hải Phòng 2017) Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC,CA,AB tại D,E,F; AD cắt EF và (I) lần lượt tại $M,N\ (N\neq D)$; BN cắt (I) tại $P\ (P\neq N)$; CP cắt AD tại Q. Tương tự, đường tròn bàng tiếp đỉnh A là (I') tiếp xúc BC,CA,AB tại D',E',F'; AD' cắt $E'F'$ và (I') lần lượt tại $M',N'\ (N'\neq D')$; BN' cắt (I') tại $P'(P'\neq N')$; CP' cắt AD' tại Q'. Chứng minh BC,MM',NN',QQ' đồng quy.

Giải:



Do $DENF$ là tứ giác điều hòa nên $(D,N,A,M)=-1$.

Tương tự $D'E'N'F'$ là tứ giác điều hòa nên $(D',N',A,M')=-1$.

Do đó $(D,N,A,M)=(D',N',A,M')$ nên BC,NN',MM' đồng quy.

Ta có $\dfrac{AD}{AN}\cdot\dfrac{QN}{QD}=\dfrac{DF^2}{NF^2}\cdot\dfrac{CB}{CD}\cdot\dfrac{PN}{PB}$

$$=\frac{DF^2}{NF^2}\cdot\frac{CB}{CD}\cdot\frac{\frac{2PF.ND}{DF}}{PB}=\frac{DF^2}{NF^2}\cdot\frac{CB}{CD}\cdot\frac{\frac{2NF.ND}{DF}}{BF}=\frac{CB.DF.2ND}{CD.NF.BF}=\frac{CB.DF.2ND}{CD.NF.BD}$$

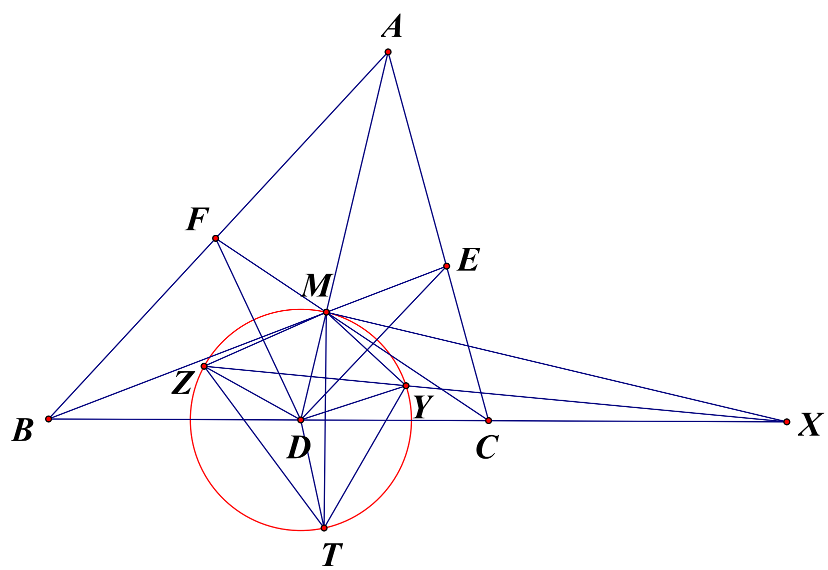
$$= \frac{CB.DF \cdot \frac{4NF.DE}{EF}}{CD.NF.BD} = 4 \cdot \frac{CB}{EF} \cdot \frac{DF}{BD} \cdot \frac{DE}{CD}$$

$$= 4 \cdot \frac{2R\sin A}{2r\cos\frac{A}{2}} \cdot 2\sin\frac{B}{2} \cdot 2\sin\frac{C}{2} = \frac{32R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{r} = 8$$

Tương tự $\left(D,N,A,Q\right) = -8 = \left(D',N',A,Q'\right)$, do đó BC, MM', NN', QQ' đồng quy.

Bài 10. Cho tam giác ABC và điểm M. Các đường thẳng AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại D, E và F. Lấy X thuộc BC sao cho $\angle AMX = 90^0$. Gọi Y, Z theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua DE, DF. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.

Giải.



Gọi T là điểm đối xứng của M qua BC. Ta có $DY = DZ = DT$ (cùng bằng DM). Do đó Y, Z, T, M cùng nằm trên một đường tròn tâm D, ký hiệu là (D).

Mặc khác, vì $\angle AMX = 90^0$ nên MX là tiếp tuyến của (D) tại M.

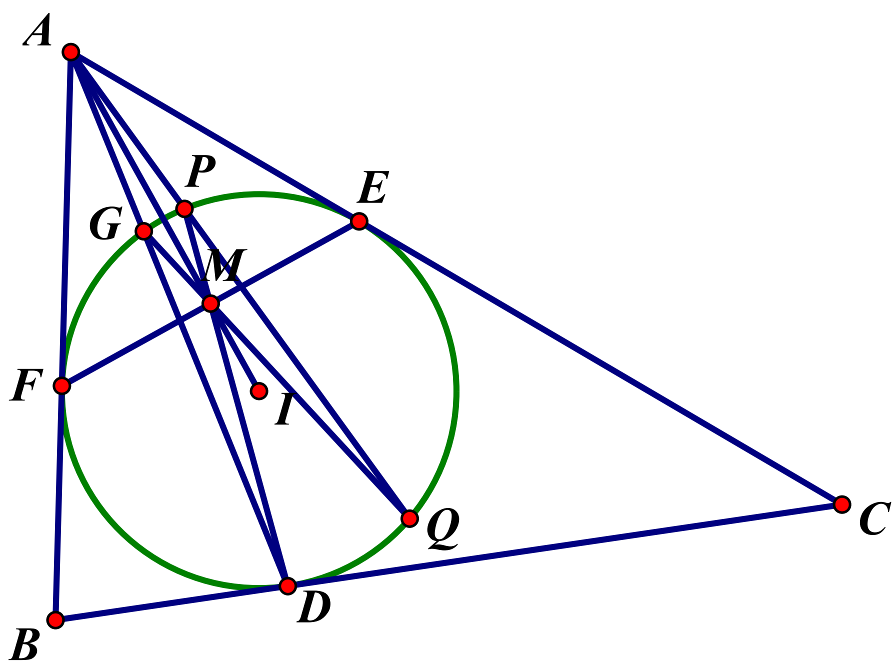
Từ đó, chú ý rằng T và M đối xứng nhau qua XD, ta có XT cũng là tiếp tuyến của (D) tại T.

Theo giả thiết và theo cách dựng điểm T, MX, MT, MY, MZ theo thứ tự vuông góc với DM, DX, DE, DF.Từ đó, với chú ý $D(MXEF) = -1 \Rightarrow M(XTYZ) = -1 \Rightarrow (MTYZ) = -1$. Điều đó có nghĩa là tứ giác MYTZ là tứ giác điều hòa. Vậy X, Y và Z thẳng hàng.

Bài 11. Cho tam giác không cân *ABC*. Đường tròn (*I*) tâm *I* nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh *BC*, *CA*, *AB* tại *D, E, F* tương ứng. *AD* cắt (*I*) tại điểm thứ hai *G, M* là giao điểm của *AI* và

EF. Giả sử *DM* và *GM* cắt (I) tại các điểm thứ hai *P, Q* tương ứng. Chứng minh rằng *A, P, Q* thẳng hàng.

Lời giải



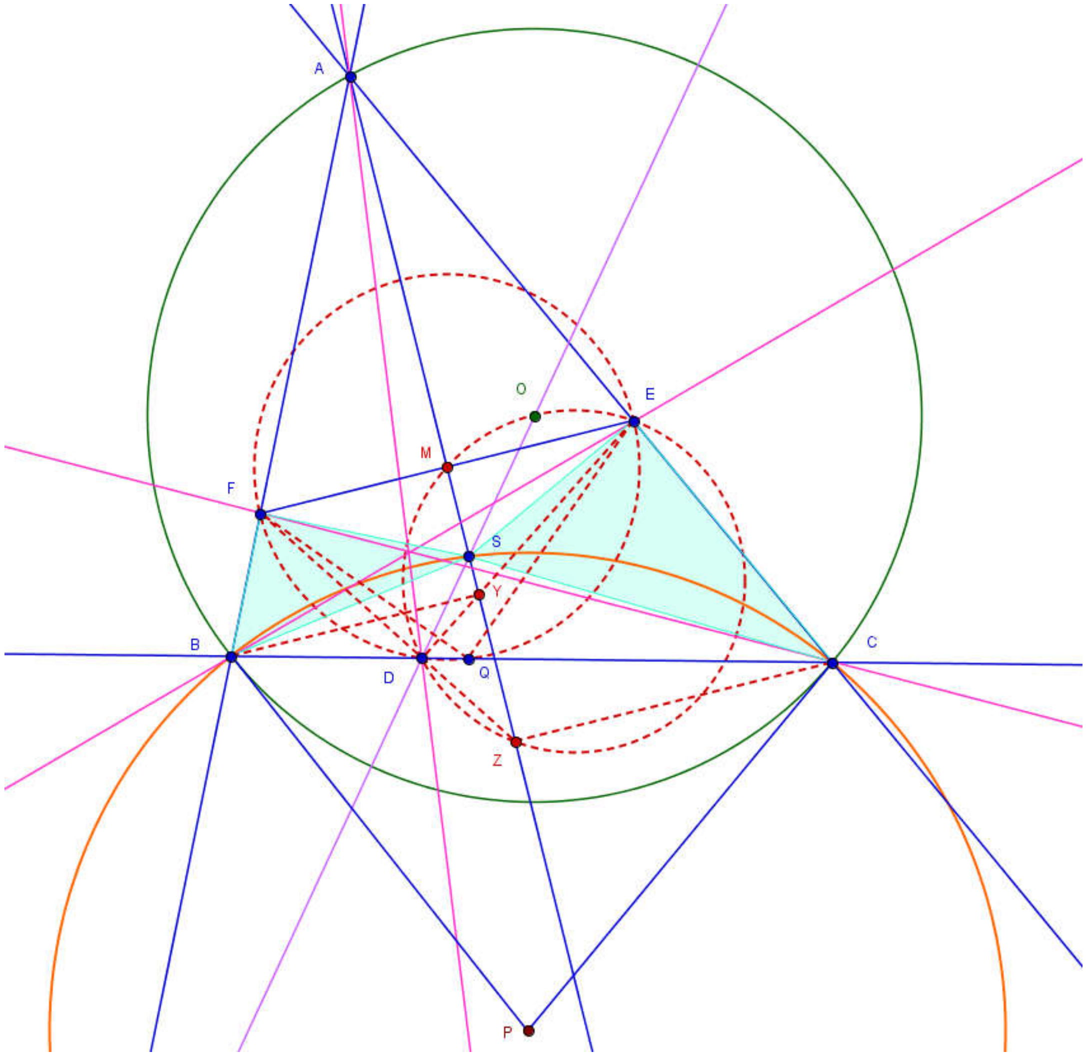
Ta có tứ giác *GEDF* điều hoà nên $M(EFGD) = -1 \Rightarrow M(FEQP) = -1$

Suy ra tứ giác *PEQF* là tứ giác điều hoà

Suy ra *QP*, tiếp tuyến tại *E*, tiếp tuyến tại *F* đồng quy (tại *A*) suy ra *A, P, Q* thẳng hàng. (đpcm)

Bài 12 (Romania TST 2014). Cho tam giác ABC nhọn có đường tròn ngoại tiếp (O). Các tiếp tuyến với đường tròn của tam giác ABC điểm B và C gặp nhau tại điểm P. Đường tròn tâm P và bán kính PB = PC cắt phân giác trong của $\widehat{BAC}$ trong tam giác ABC tại điểm S, và OS $\cap$ BC = D. Chân đường vuông góc của S trên AC và AB lần lượt là E và F. Chứng minh rằng AD, BE và CF đồng qui.

Lời giải



$EF \cap BC = G$. Ta chứng minh $(GDBC) = -1$

Ta có $\widehat{BPC} = 180° - 2\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BSC} = 90° + \widehat{BAC}$; $\widehat{FSE} = 180^0 - \widehat{BAC}$ nên $\widehat{BSF} + \widehat{CSF} = 90°$

Suy ra $\Delta SBF \sim \Delta CSE (g-g) \Rightarrow \dfrac{SB}{SC} = \dfrac{FB}{SE} = \dfrac{SF}{CE}$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC với cát tuyến GFE ta có $\dfrac{GB}{GC}.\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB} = 1$

dễ thấy $FA = EA$ nên $\dfrac{GB}{GC} = \dfrac{FB}{CE} = \dfrac{FB}{SE}.\dfrac{SF}{CE} = \left(\dfrac{SB}{SC}\right)^2$

Dễ thấy OB, OC là tiếp tuyến của tam giác SBC nên SD là đường đối trung nên $\dfrac{BD}{DC} = \left(\dfrac{SB}{SC}\right)^2$

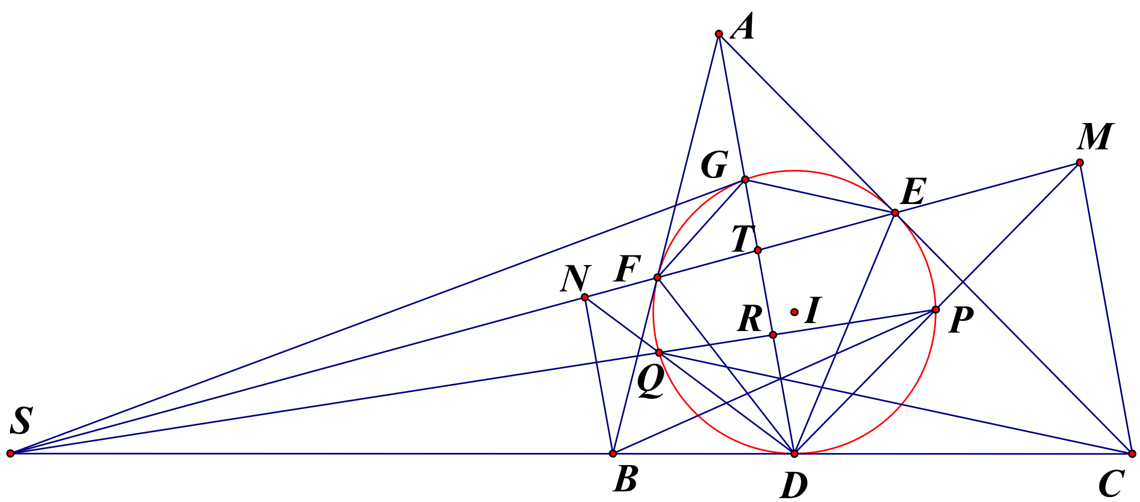
Do đó $(GDBC) = -1$.

Gọi T là giao điểm của BE và CF; D' là giao điểm của BC và $AT \Rightarrow (GD'BC) = -1 \Rightarrow D' \equiv D$

Vậy AD, BE, CF đồng quy.

Bài 13 (Olympic KHTN 2017) Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Trên đường thẳng EF lấy hai điểm M, N sao cho BN và CM song song với AD. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm thứ hai của DM, DN với (I). Chứng minh BP, CQ, AD đồng quy.

Giải.



Gọi S là giao điểm của EF và BC. AD cắt EF, PQ lần lượt tại T, R và cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai G.

Ta có DG và hai tiếp tuyến AF, AE của (I) đồng quy nên DFGE là tứ giác điều hòa.

Từ đó suy ra, SG là tiếp tuyến của (I).

Ta có $(SDBC) = -1 \Rightarrow (STNM) = -1 \Rightarrow D(STNM) = -1 \Rightarrow D(DGQP) = -1$. Suy ra DQGP là tứ giác điều hòa nên PQ đi qua S.

Suy ra $(SRQP) = (SDBC) = -1$. Từ đó, BP, CQ, AD đồng quy.

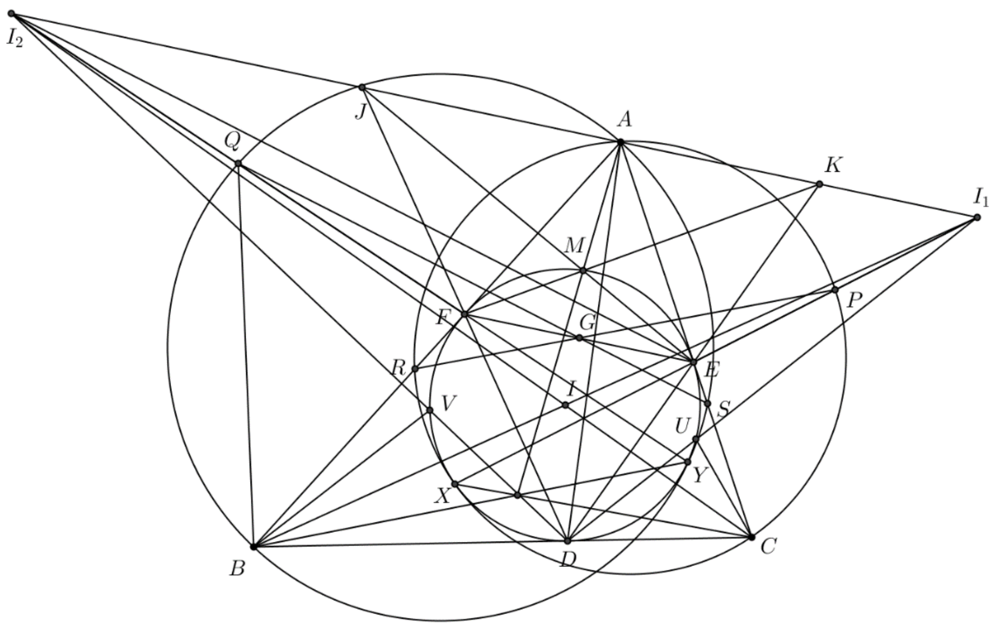
Bài 14 (VN TST 2017). Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và D, E, F tương ứng là các tiếp điểm của (I) với các cạnh BC, CA, AB. Gọi I_1 và I_2 tương ứng là tâm đường tròn bàng tiếp góc B và C của tam giác ABC. Gọi P, Q tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng I_1E, I_2F. Đường tròn (ω_1) ngoại tiếp tam giác PAC cắt AB tại $R\,(R \neq A)$, đường tròn (ω_2) ngoại tiếp tam giác QAB cắt AC tại $S\,(S \neq A)$.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng PR, QS cắt nhau trên đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$.

b) Gọi J, K tương ứng là các giao điểm của DF, DE với I_1I_2 và M là giao điểm của EJ với KF. Đường thẳng I_1P cắt đường tròn (ω_1) tại $X\,(X \neq P)$, đường thẳng I_2Q cắt đường tròn (ω_2) tại $Y\,(Y \neq Q)$. Chứng minh các đường thẳng AM, BY, CX đồng quy.

Lời giải.

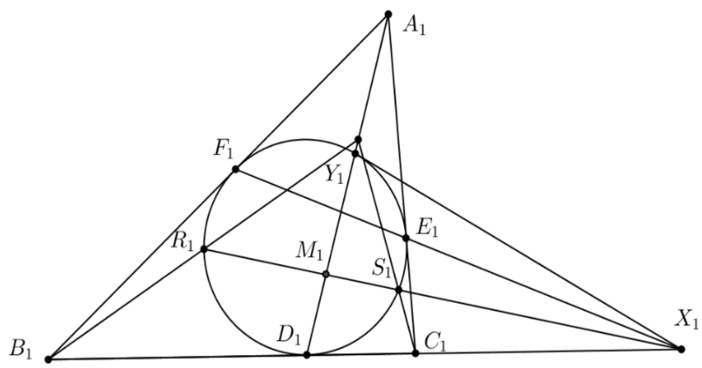
Xét thế hình như dưới đây.



a) Ta chứng minh rằng đường tròn (ω_1) tiếp xúc với đường tròn (I) tại tiếp điểm nằm trên đường thẳng I_1E. Gọi T là giao điểm thứ hai khác E của PE với đường tròn (I). Ta có $\widehat{FTI_1} = \widehat{AFE} = \widehat{I_2AF} = 180^o - \widehat{I_1AF}$. Do vậy tứ giác I_1AFT là tứ giác nội tiếp. Tương tự tứ giác I_1CDT nội tiếp. Vậy ta có $\widehat{ATE} = \widehat{AFI_1} = \widehat{CDI_1} = \widehat{CTI_1}$ (vì F, D đối xứng với nhau qua đường BI_1). Do đó TE là phân giác của góc $\widehat{ATC}$, hay T nằm trên đường tròn Apolonius đối với hai điểm A, C theo tỷ số $k = \dfrac{AE}{CE}$.

Gọi (I') là đường tròn tiếp xúc với đường thẳng AC tại E và tiếp xúc trong với đường tròn (ω_1) tại tiếp điểm T' không nằm trên cung $\widehat{APC}$. Khi đó theo tính chất của đường tròn hỗn tiếp thì $T'E$ đi qua điểm chính giữa của cung $\widehat{AC}$ của đường tròn (ω_1) (dễ thấy điểm này là điểm P). Vậy T' cũng nằm trên đường tròn Apolonius đối với hai điểm A, C theo tỷ số $k = \frac{AE}{CE}$. Vì T, T' cùng nằm trên đường thẳng $PE\ (T, T' \neq E)$ nên $T \equiv T'$. Vậy (I) và (I') trùng nhau.

Ta có $\widehat{I_1FA} = \widehat{I_1TA} = \widehat{PRA}$. Vậy đường thẳng PR song song với I_1F. Do đó PR đi qua trung điểm của EF. Tương tự QS cũng đi qua trung điểm của EF. Vậy PR và QS cắt nhau tại trung điểm của EF nằm trên đường phân giác góc $\widehat{BAC}$.



b) **Bổ đề:** Cho tam giác $A_1B_1C_1$ nhọn, không cân ngoại tiếp đường tròn (I_1) với các tiếp điểm trên các cạnh B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 tương ứng là D_1, E_1, F_1. Cho R_1, S_1 là hai điểm trên đường tròn (I_1) sao cho $D_1(A_1B_1R_1S_1) = -1$ thì BR_1, CS_1 cắt nhau trên AD_1.

Chứng minh bổ đề. Gọi X_1 là giao điểm của đường thẳng E_1F_1 với B_1C_1, Y_1 là giao điểm của D_1A_1 với $(I_1)\ (Y_1 \neq D_1)$. Do tứ giác $D_1E_1Y_1F_1$ điều hòa nên tiếp tuyến tại Y_1 đi qua X_1. Theo giả thiết thì tứ giác $D_1S_1Y_1R_1$ điều hòa, do vậy R_1S_1 đi qua X_1. Từ giả thiết $D_1(A_1B_1R_1S_1) = -1$, ta thấy $(B_1C_1D_1X_1) = (R_1S_1M_1X_1) = -1$, với M_1 là giao điểm của R_1S_1 với A_1D_1. Vậy B_1R_1 phải cắt C_1S_1 cắt nhau trên đường thẳng A_1D_1. (Bổ đề được chứng minh)

Quay lại bài toán. Ta lấy M' là giao điểm của JE với $(I)\ (M' \neq E)$, K' là giao điểm của FM' với DE. Áp dụng định lý Pascal cho sáu điểm $(DEF, M'FE)$ thì ta được J, A, K' thẳng hàng. Do đó $K \equiv K'$ và vì vậy $M \equiv M'$, hay M nằm trên (I).

Ta thấy, $\widehat{AFM} = \widehat{FEM} = \widehat{AJM}$, và do đó tứ giác $AJFM$ nội tiếp. Tương tự, tứ giác $AKEM$ nội tiếp. Đồng thời $\widehat{AKD} = \widehat{FED} = \widehat{BFD}$, và do đó tứ giác $AKDF$ nội tiếp. Vậy ta có $\widehat{FAD} = \widehat{FKD} = \widehat{MAE}$, và do đó AM và AD đẳng giác trong tam giác ABC.

Gọi U là giao điểm của DI_1 với (I), V là giao điểm của DI_2 với đường tròn (I) $(U, V \neq D)$. Ta có $\widehat{XDB} = \widehat{XED} = \widehat{XI_1C}$. Do vậy tứ giác I_1CDX nội tiếp. Mặt khác $\widehat{UEC} = \widehat{I_1DE} = \widehat{UI_1C}$. Do vậy tứ giác UEI_1C nội tiếp. Từ đó ta có $\widehat{UCE} = \widehat{UI_1E} = \widehat{XCD}$. Vậy CX và CU đẳng giác trong tam giác ABC. Tương tự ta cũng có BY và BV đẳng giác trong tam giác ABC. Dễ thấy rằng $D(ABUV) = D(ABI_1I_2) = C(ABI_1I_2) = -1$. Theo bổ đề ta có AD, BV, CU đồng quy. Vậy AM, BY, CX đồng quy.

Bài 15 (Peru TST 2017). Cho tam giác *ABC* ngoại tiếp (*I*). Đường tròn (*I*) tiếp xúc *BC* tại *D*. Gọi *K, L* là tâm đường tròn bàng tiếp góc *B, C* của tam giác *ABC*. *ID* cắt *CA*, *AB* lần lượt tại *M, N*. Gọi $J = NK \cap ML$. Chứng minh rằng $IJ \perp AD$.

Lời giải

Gọi *E, F* lần lượt là tiếp điểm của (*I*) với *CA*, *AB*, $S = EF \cap BC$.

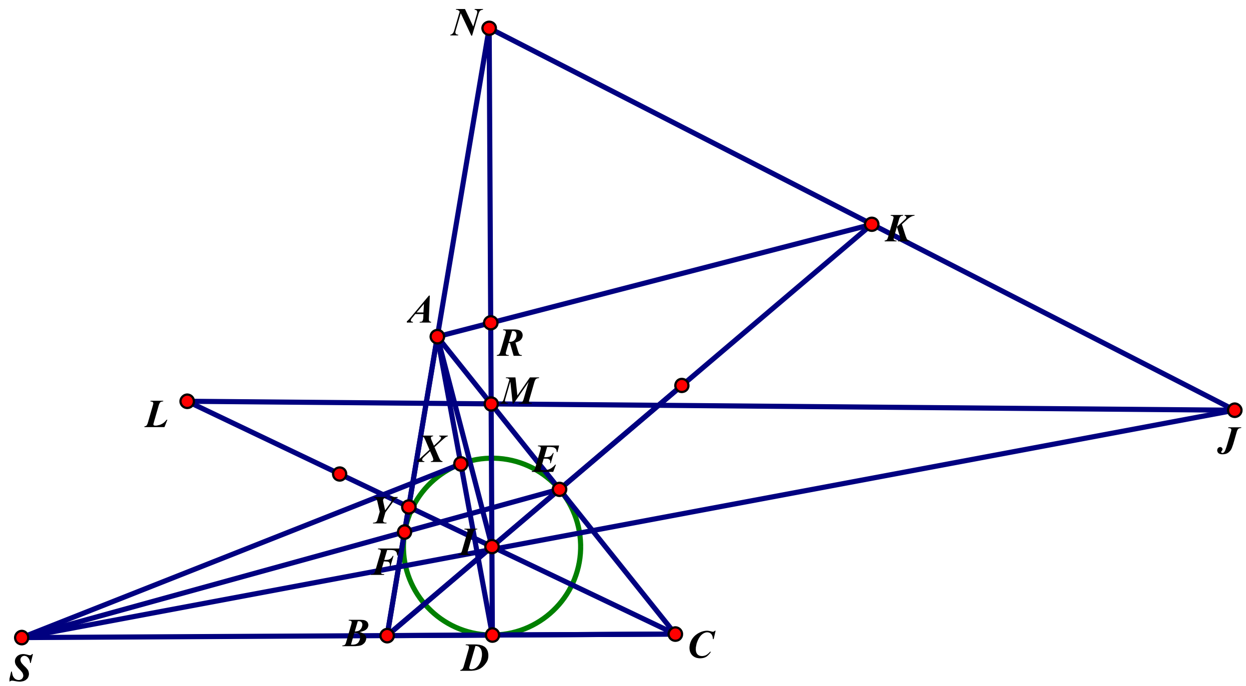
Khi đó *AD*, *BE*, *CF* đồng qui nên (*SDBC*) = - 1.

Gọi *X* là giao điểm thứ hai của (*I*) và *AD*

Do đó tứ giác *XEDF* điều hoà.

Suy ra *EF*, *DD* và *XX* (của (*I*)) đồng quy tại $S \Rightarrow SI \perp XD$.

Như vậy ta chỉ cần chứng minh *S, I, J* thẳng hàng.



Gọi $R = ID \cap AK$; $Y = IC \cap AB$.

Ta có $A(IKBC) = -1 \Rightarrow (IRNM) = -1 \Rightarrow J(IRNM) = -1 \Rightarrow JI$, MK, NL đồng quy.

Gọi $Y = IC \cap AB \Rightarrow (LIYC) = -1 \Rightarrow N(LIYC) = -1$

Mà $(SDBC) = -1 \Rightarrow N, L, S$ thẳng hàng.

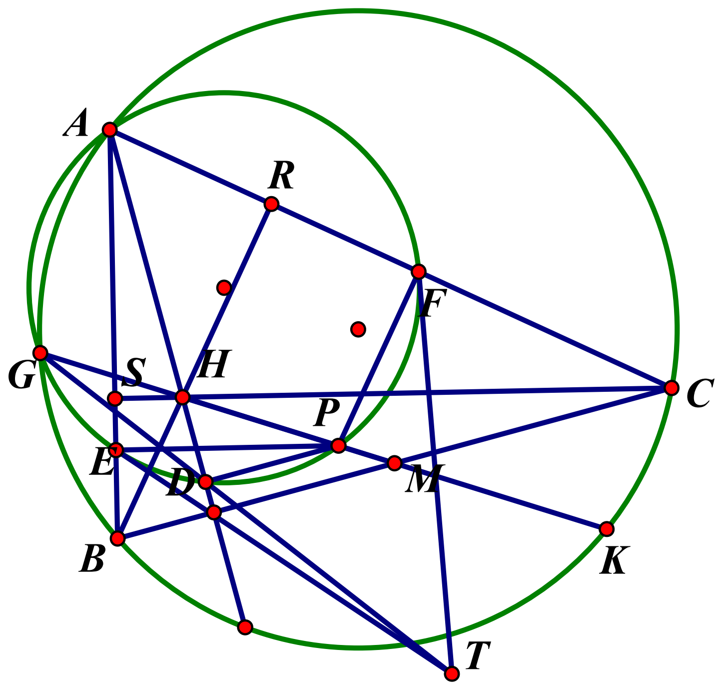
Tương tự ta cũng có M, K, T thẳng hàng.

Suy ra NL, MK, IJ đồng quy tại S.

Từ đó có điều phải chứng minh.

Bài 16. Tam giác ABC có H là trực tâm, M là trung điểm của BC, P là điểm bất kì trên đoạn HM. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của P trên AH, AB, AC. Đường thẳng HM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại K, G (M nằm giữa H và K). Tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác EAF cắt nhau tại T. Chứng minh rằng ba điểm G, D, T thẳng hàng.

Lời giải



Gọi *AK'* là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Khi đó *K', H, M* thẳng hàng.

Vậy *K'* trùng *K*.

Ta có $AGM = 90^0 \Rightarrow G \in (AEFP)$.

Gọi *R, S* là chân đường cao theo thứ tự hạ từ *B, C* của tam giác *ABC*.

Xét các đường tròn *(AGBC), (AGSHR), (BSRC)* có các trục đẳng phương là *AG, SK, BC* .

TH1: *AG, SK, BC* song song hoặc trùng nhau thì tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Khi đó tiếp tuyến tại *E* và *F* của *(AEF)* song song.

TH2: *AG, SK, BC* đồng quy tại *T'*.

Ta có $(AT', AH, AS, AR) = -1 \Rightarrow (AG, AE, AD, AF) = -1.$

Suy ra *GEDF* là tứ giác điều hòa. Do đó *G, P, T* thẳng hàng.

Bài tập tương tự

Bài 1. Cho tứ giác *ABCD* ngoại tiếp đường tròn (*O*). Gọi *M*, *N*, *P*, *Q* lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (*O*) với *AB*, *BC*, *CD*, *DA*. Gọi *X* là giao điểm của *MN* và *PQ*; *E*, *F* lần lượt là giao điểm của *AC* với đường tròn (*O*). Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *X* trên *BD*. Chứng minh rằng $\widehat{AHE} = \widehat{CHF}$.

Bài 2 (Iran NMO). Cho tam giác ABC, lấy T,E,F lần lượt thuộc các đoạn BC, CA, AB sao cho 3 đường thẳng AT, BE, CF đồng quy tại một điểm.Gọi L là giao điểm của AT và EF. Gọi H là hình chiếu của L xuống BC. Chứng minh rằng LH là phân giác của $\widehat{EHF}$.

Bài 3. Cho tam giác *ABC* nhọn (*AB* < *AC*), các đường cao *AD, BE, CF* đồng quy tại *H*. Đường thẳng *EF* cắt các đường thẳng *AH, BC* lần lượt tại *L* và *G*; đường trung trực của đoạn thẳng *LD* cắt đường thẳng *GH* tại *P*. Gọi *M* và *N* lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng *BC* và *EF*, *I* là giao điểm của *AM* và *GH*, *K* là hình chiếu vuông góc của *H* lên đường thẳng *AG*.

a) Chứng minh bốn điểm *D, P, L, I* cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng *I, K, L* thẳng hàng.

Bài 4. Cho tam giác *ABC* không cân tại *A*. Gọi (*O*) và (*I*) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*. (*I*) tiếp xúc với *AC*, *AB* tại *E* và *F*. Các điểm *M*, *N* thuộc (*I*) sao cho *EM* song song *BC* và *FN* song song *BC*. Gọi *P*, *Q* lần lượt là giao điểm của *BM*, *CN* với (*I*). Chứng minh rằng :

a) *BC*, *EP*, *FQ* đồng quy tại một điểm, gọi điểm đó là *K*;

b) Đường tròn ngoại tiếp các tam giác *BPK*, *CQK* cùng tiếp xúc với (*I*) và cùng đi qua một điểm thuộc (*O*).

Bài 5 (Bắc Giang 2017) Cho tam giác *ABC* nhọn. Các đường cao *AD; BE; CF* cắt nhau tại *H*. Gọi *I* là hình chiếu của *D* lên *EF*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *HAB* và đường tròn ngoại tiếp tam giác *DEF* cắt nhau tại *P; Q* (*P; C* cùng phía so với *AD*).

1) Chứng minh rằng *DI* là đường phân giác của góc $\widehat{BIC}$.

2) Chứng minh rằng *PH; DE* cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

Bài 6. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH, trực tâm K. Đường thẳng BK cắt đường tròn đường kính AC tại D, E (BD < BE). Đường thẳng CK cắt đường tròn đường kính AB tại F, G (CF < CG). Đường tròn ngoại tiếp tam giác DHF cắt BC tại điểm thứ hai là điểm P.

a) Chứng minh rằng các điểm G, H, P, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng BF, CD, PK đồng quy.

Bài 7. Cho tam giác *ABC* nhọn, không cân, trực tâm *H*, tâm đường tròn ngoại tiếp là *O,* và đường cao *AD*. Đường thẳng *AO* cắt *BC* tại *E*. Gọi *I, S, F* lần lượt là trung điểm *AE*, *AH* và *BC*. Đường thẳng qua *D* song song với *OH* lần lượt cắt *AB*, *AC* tại *M* và *N*. Đường thẳng *DI* lần lượt cắt *AB*, *AC* tại *P, Q*. Đường thẳng *MQ* cắt *NP* tại *T*. Chứng minh rằng:

a) *SF // AE*.

b) Các điểm *D, O, T* thẳng hàng.

Bài 8. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) và không có hai cạnh nào song song. Các tia BA và CD cắt nhau tại P, các tia AD và BC cắt nhau tại Q. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên PQ. Gọi $(O_1), (O_2)$ tương ứng là các đường tròn nội tiếp của các tam giác PDA và QDC (bán kính đường tròn (O_1) và (O_2) khác nhau). Gọi Δ là một tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2), Δ tiếp xúc (O_1) tại M, Δ tiếp xúc (O_2) tại N. Các tiếp tuyến kẻ từ H tới (O_1) cắt Δ tại X và Y. Các tiếp tuyến kẻ từ H tới (O_2) cắt Δ tại Z và T. Chứng minh rằng:

a) HD là phân giác góc $\widehat{O_1HO_2}$.

b) $\dfrac{1}{XM}+\dfrac{1}{YM}=\dfrac{1}{ZN}+\dfrac{1}{TN}$.

Bài 9 (ELMO SL 2012). Cho tam giác *ABC* và tâm nội tiếp (I) tâm *I*. Gọi *D* là chân vuông góc của *I* xuống *BC*, *P* là chân vuông góc của *I* xuống *AD*. Chứng minh $\widehat{BPD}=\widehat{CPD}$.

Bài 10 (Balkan 2017) Cho tam giác nhọn *ABC* với $AB < AC$ có ω là đường tròn ngoại tiếp. Gọi t_B và t_C lần lượt là các tiếp tuyến của đường tròn ω tại *B* và *C*. Gọi *L* là giao điểm của chúng. Đường thẳng đi qua *B* và song song với *AC* cắt t_C tại *D*. Đường thẳng đi qua *C* và song song với *AB* cắt t_B tại *E*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *BDC* cắt *AC* tại *T*; trong đó *T* nằm giữa *A* và *C*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *BEC* cắt *AB* tại *S*; trong đó *B* nằm giữa *S* và *A*. Chứng minh rằng ST, AL, BC đồng quy.

C. PHẦN KẾT LUẬN

Trên đây là một số bài toán về đường phân giác, đồng quy, thẳng hàng sử dụng đến hàng điểm điều hòa. Kiến thức về hàng điểm điều hòa khá dễ hiểu và đơn giản nhưng ứng dụng của nó thì khá nhiều. Thông qua đó giúp học sinh tiếp cận và hình thành kĩ năng sử dụng hàng điểm điều hòa, cũng như lựa chọn được cách giải bài toán phù hợp, tăng thêm tính say mê, tích cực tìm tòi và sáng tạo.

Chuyên đề trên nhằm mục đích trao đổi với các thầy cô dạy bộ môn toán về việc sử dụng hàng điểm điều hòa để giải các bài toán hình học phẳng. Do kiến thức còn nhiều hạn chế nên chắc rằng chuyên đề khó tránh khỏi các thiếu sót, chúng tôi mong có sự góp ý của quý thầy cô để chuyên đề được hoàn thiện hơn. Tác giả xin chân thành cảm ơn!

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đoàn Quỳnh, Văn Như Cương, Trần Nam Dũng, Nguyễn Minh Hà, Đỗ Thanh Sơn, Lê Bá Khánh Trình: Tài liệu chuyên toán hình học 10. NXB Giáo dục, 2010.

[2] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình: Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 10. NXB Giáo dục, 2006

[3] Tuyển tập lời giải và bình luận đề thi VMO các năm của nhóm tác giả Trần Nam Dũng

[4] Nguồn tại liệu từ Internet: artofproblemsolving.com, diendantoanhoc.net, matscope.org.

[5] Đề thi, đề đề xuất Duyên Hải, Hùng Vương các năm.

[6] Đề thi chọn đội tuyển các tỉnh.

[7] Tạp chí Toán học và tuổi trẻ