

Chương 2

HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Hàm số và tập xác định của hàm số

Định nghĩa 1. Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập $\mathcal{D}$ có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một **hàm số**. Ta gọi x là **biến số** và y là **hàm số** của x . Tập hợp $\mathcal{D}$ được gọi là **tập xác định** của hàm số.

2. Cách cho hàm số

- a) Hàm số cho bằng bảng
- b) Hàm số cho bằng biểu đồ
- c) Hàm số cho bằng công thức



Khi cho hàm số bằng công thức mà không chỉ rõ tập xác định của nó thì ta quy ước:
Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

3. Đồ thị của hàm số

Định nghĩa 2. **Đồ thị** của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ với mọi x thuộc $\mathcal{D}$.

Ta thường gặp trường hợp đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là một đường (đường thẳng, đường cong,...). Khi đó, ta nói $y = f(x)$ là **phương trình** của đường đó.

4. Sự biến thiên của hàm số

Định nghĩa 3. Hàm số $y = f(x)$ gọi là **đồng biến (tăng)** trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Hàm số $y = f(x)$ gọi là **nghịch biến (giảm)** trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$



Xét chiều biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng đồng biến và các khoảng nghịch biến của hàm số đó.

5. Tính chẵn lẻ của hàm số

Định nghĩa 4. Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathcal{D}$.

Hàm số $y = f(x)$ gọi là **hàm số chẵn** nếu $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = f(x)$.

Hàm số $y = f(x)$ gọi là **hàm số lẻ** nếu $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = -f(x)$.

 *Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng. Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.*

II. Các dạng toán

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số

Để tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$, ta làm như sau:

+ Tìm điều kiện để $f(x)$ có nghĩa.

+ Tập hợp các giá trị x thỏa mãn $f(x)$ có nghĩa tìm được chính là tập xác định của hàm số.

Một số trường hợp thường gặp:

$$\sqrt{f(x)} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow f(x) \geq 0.$$

$$\frac{1}{f(x)} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow f(x) \neq 0.$$

$$\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow f(x) > 0.$$

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2017$.

Lời giải. Điều kiện $-x^3 + 3x + 2017$ có nghĩa $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của hàm số $y = x - \frac{2}{x-3}$.

Lời giải. Điều kiện $x - \frac{2}{x-3}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x \neq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Ví dụ 3. Tìm tập xác định của hàm số $y = x + \sqrt{x+1}$.

Lời giải. Điều kiện $x + \sqrt{x+1}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $[-1; +\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = x^4 + x^2 - 2$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Bài 2. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{x+2}{4x^2+5x-9}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{9}{4}; 1\}$.

Bài 3. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{3+x}{x^2+2x+5}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Bài 4. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}}{x-2}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $[-4; 2) \cup (2; +\infty)$.

Bài 5. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2x+3}{(2x-1)(x+3)}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$.

Bài 6. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $[2; 3) \cup (3; +\infty)$.

Bài 7. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+2}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.

Bài 8. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{4x+2} + \frac{x}{\sqrt{-x+1}}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $\left[-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Bài 9. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{x+2}{|x-1|+|x-2|}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Bài 10. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2}{|x|-3}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$.

Dạng 2. Tính giá trị của hàm số tại một điểm

- Để tính giá trị của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$ ta thay thế x bởi x_0 vào công thức $f(x)$ để tính $f(x_0)$.
- Đối với các hàm số được cho bởi hai hay nhiều công thức với các miền xác định đã cho, chẳng hạn:

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{với } x \in \mathcal{D}_1 \\ f_2(x) & \text{với } x \in \mathcal{D}_2 \end{cases}$$

Khi tính giá trị hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$, tùy theo x_0 thuộc $\mathcal{D}_1$ hay $\mathcal{D}_2$ mà ta sử dụng công thức $f(x) = f_1(x)$ hay $f(x) = f_2(x)$ để tính $f(x_0)$.

 Với hàm số $f(x)$ được cho bởi công thức phức tạp, để tính một cách nhanh và chính xác giá trị $f(x_0)$ ta sử dụng máy tính cầm tay để tính. Quy trình bấm máy:

- Nhập công thức $f(x)$;
- Bấm r ;
- Nhập giá trị x_0 ;
- Bấm $=$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 - 3x - 1$. Tính giá trị của hàm số đó tại $x = -2$.

Lời giải. Ta có $f(-2) = 2(-2)^2 - 3(-2) - 1 = 13$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{với } x \geq 1 \\ 1-2x^2 & \text{với } x < 1. \end{cases}$
 Tính $f(1), f(2), f(0), f(-3)$.

Lời giải. Ta có $f(1) = 1, f(2) = 4, f(0) = 1, f(-3) = -17$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{với } x \leq 0 \\ \frac{x+1}{x^2+x+1} & \text{với } x > 0. \end{cases}$
 Tính giá trị của hàm số đó tại $x = 1; x = 0; x = -2$.

Lời giải. Ta có $f(1) = \frac{2}{3}; f(0) = -1; f(-2) = 4$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Cho hàm số $f(x) = -x^2 - 4x + 5$. Tính $f(-2)$.

Lời giải. Đáp số: $f(-2) = 9$.

Bài 12. Cho hai hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ và $g(x) = 1 - x$. Tính giá trị $\frac{f(-1)}{g(2)}$.

Lời giải. Đáp số: $\frac{f(-1)}{g(2)} = -3$.

Bài 13. Cho hàm số $f(y) = 4 - \sqrt{y}$. Tính $f(4y^2)$.

Lời giải. Đáp số: $f(4y^2) = 4 - 2y$, với $y \geq 0$.

Bài 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-x} & \text{với } x < 3 \\ \sqrt{x+5} & \text{với } x \geq 3. \end{cases}$

Tính $f(-4), f(1), f(4)$.

Lời giải. Đáp số: $f(-4) = 3, f(1) = 2, f(4) = 3$.

Bài 15. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{với } x < -1 \\ 3 & \text{với } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{với } x \geq 1. \end{cases}$

Tính $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$.

Lời giải. Đáp số: $f(-2) = 7, f(-1) = 3, f(0) = 3, f(1) = 0, f(2) = \sqrt{3}$.

Bài 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{với } x \leq 2 \\ \sqrt{x^2-2\sqrt{2}} & \text{với } x > 2. \end{cases}$

Tính $f(1), f(\sqrt{2}), f(\sqrt{3}), f(\sqrt{2}+1)$.

Lời giải. Đáp số: $f(1) = 0, f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-2, f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}-2, f(\sqrt{2}+1) = \sqrt{3}$.

Bài 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{với } -4 \leq x < -1 \\ -x^2+2 & \text{với } -1 \leq x \leq 2 \\ 2-x & \text{với } x > 2. \end{cases}$

Tính $f(0), f(\sqrt{2}), f(-1), f(\sqrt{2}), f(3)$.

Lời giải. Đáp số: $f(0) = 2, f(\sqrt{2}) = 0, f(-1) = 1, f(3) = -1$.

Bài 18. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Tính $\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$, với $x \neq 3$.

Lời giải. Đáp số: $\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = -\frac{x+3}{9x^2}$.

Bài 19. Cho hàm số $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Tính $f(a), f(x+2)$ (với a là một số thực).

Lời giải. Đáp số: $f(a) = -a^2 + 2a + 3, f(x+2) = -x^2 - 2x + 3$.

Bài 20. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2$. Tìm giá trị của số thực a sao cho $f(a-1) = 2$.

Lời giải. Ta có: $f(a-1) = a^2 - 2a - 1 = 2 \Rightarrow a = -1, a = 3$.

Bài 21. Cho hàm số $f(x) = 2x + m$, với m là tham số. Tính m để $f(1) = 4$.

Lời giải. Ta có: $f(1) = 2 + m = 4 \Rightarrow m = 2$.

Dạng 3. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K .

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2 &\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0. \end{aligned}$$

- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \\ \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2 &\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 7. Dùng định nghĩa chứng minh hàm số $y = 2x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $\mathbb{R}$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(2x_1 + 3) - (2x_2 + 3)}{x_1 - x_2} = \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = 2 > 0.$$

- Vậy hàm số $y = 2x + 3$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 8. Dùng định nghĩa xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = x^2 + 10x + 9$ trên $(-5; +\infty)$.

Lời giải.

- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(-5; +\infty)$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1^2 + 10x_1 + 9) - (x_2^2 + 10x_2 + 9)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 10)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 + 10.$$

- Do $x_1 > -5, x_2 > -5$ nên $x_1 + x_2 > -10 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 10 > 0$, từ đó suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$.

- Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-5; +\infty)$.

Ví dụ 9. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{4}{x+1}$ trên $(-1; +\infty)$.

Lời giải. - Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(-1; +\infty)$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{4}{x_1+1} - \frac{4}{x_2+1}}{x_1 - x_2} = \frac{4(x_2 - x_1)}{(x_1+1)(x_2+1)} = \frac{-4}{(x_1+1)(x_2+1)}.$$

- Do $x_1 > -1, x_2 > -1$ nên $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$, từ đó suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$.
- Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.

Ví dụ 10. Dùng định nghĩa xét sự biến thiên của hàm số $y = \sqrt{x-1}$ trên tập xác định.

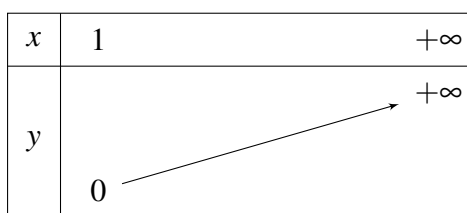
Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = [1; +\infty)$.
- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $[1; +\infty)$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{x_1 - 1} - \sqrt{x_2 - 1}}{x_1 - x_2} = \frac{1}{\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1}} > 0.$$

- Vậy hàm số đã cho luôn đồng biến trên tập xác định.
- Bảng biến thiên

x	1	$+\infty$
y	0	$+\infty$



Ví dụ 11. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{x-2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(-\infty; 2)$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{m}{x_1 - 2} - \frac{m}{x_2 - 2}}{x_1 - x_2} = \frac{-m}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}.$$

- Do $x_1 < 2, x_2 < 2$ nên $(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0$, từ đó suy ra để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$ thì $m > 0$.
- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(2; +\infty)$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{m}{x_1 - 2} - \frac{m}{x_2 - 2}}{x_1 - x_2} = \frac{-m}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}.$$

- Do $x_1 > 2, x_2 > 2$ nên $(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0$, từ đó suy ra để hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$ thì $m > 0$.
- Tóm lại $m > 0$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 22. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số $y = -x + 5$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $\mathbb{R}$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-x_1 + 5) - (-x_2 + 5)}{x_1 - x_2} = -1 < 0.$$

- Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 23. Dùng định nghĩa xét sự đồng biến nghịch biến của hàm số $y = 2x^2 + 4x + 1$ trên $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

- Xét

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(2x_1^2 + 4x_1 + 1) - (2x_2^2 + 4x_2 + 1)}{x_1 - x_2} = 2(x_1 + x_2 + 2).$$

- Trường hợp x_1, x_2 phân biệt cùng thuộc $(-\infty; -1)$ thì $x_1 + x_2 + 2 < 0$ suy ra hàm số nghịch biến.

- Trường hợp x_1, x_2 phân biệt cùng thuộc $(-1; +\infty)$ thì $x_1 + x_2 + 2 > 0$ suy ra hàm số đồng biến.

Bài 24. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{1+x}{1-x}$ trên $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(-\infty; 1)$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1+x_1}{1-x_1} - \frac{1+x_2}{1-x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{2}{(1-x_1)(1-x_2)}.$$

- Do $x_1 < 1, x_2 < 1$ nên $(1-x_1)(1-x_2) > 0$, từ đó suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$.

- Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

Bài 25. Dùng định nghĩa xét sự đồng biến nghịch biến của hàm số $y = \sqrt{3-x}$ trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; 3]$.

- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $\mathcal{D} = (-\infty; 3]$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{3-x_1} - \sqrt{3-x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{-1}{\sqrt{3-x_1} + \sqrt{3-x_2}} < 0.$$

- Vậy hàm số luôn nghịch biến trên tập xác định.

Bài 26. Dùng định nghĩa xét sự biến thiên của hàm số $y = |x-3|$ trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Xét

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{|x_1 - 3| - |x_2 - 3|}{x_1 - x_2}.$$

- Với $x_1, x_2 \in (-\infty; 3)$ thì $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(3-x_1) - (3-x_2)}{x_1 - x_2} = -1 < 0$.

Từ đó suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 3)$.

- Với $x_1, x_2 \in (3; +\infty)$ thì $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1-3) - (x_2-3)}{x_1 - x_2} = 1 > 0$.

Từ đó suy ra hàm số đồng biến trên $(3; +\infty)$.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Bài 27. Dùng định nghĩa xét sự đồng biến nghịch biến của hàm số $y = |\sqrt{2-x} + 1|$ trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; 2]$.
- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị tùy ý thuộc $(-\infty; 2]$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{|\sqrt{2-x_1} + 1| - |\sqrt{2-x_2} + 1|}{x_1 - x_2} = \frac{-1}{\sqrt{2-x_1} + \sqrt{2-x_2}} < 0.$$

- Vậy hàm số đã cho luôn nghịch biến trên tập xác định.

Bài 28. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ trên $(0; 1)$, $(1; +\infty)$.

Lời giải.

- Xét biểu thức

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{x_1}{x_1^2 + 1} - \frac{x_2}{x_2^2 + 1}}{x_1 - x_2} = 1 - x_1 x_2.$$

- Trường hợp $x_1, x_2 \in (0; 1)$ suy ra $0 < x_1, x_2 < 1 \Rightarrow 1 - x_1 x_2 > 0$, từ đó ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0.$$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

- Trường hợp $x_1, x_2 \in (1; +\infty)$ suy ra $x_1, x_2 > 1 \Rightarrow 1 - x_1 x_2 < 0$, từ đó ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0.$$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Bài 29. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-2)x + 5$ đồng biến trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $\mathbb{R}$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{((m-2)x_1 + 5) - ((m-2)x_2 + 5)}{x_1 - x_2} = \frac{(m-2)(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = m - 2.$$

- Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$.
- Vậy $m > 2$.

Bài 30. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{x-2}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
- Xét biểu thức

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{m}{x_1 - 2} - \frac{m}{x_2 - 2}}{x_1 - x_2} = \frac{-m}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}.$$

- Nhận thấy trên từng khoảng xác định $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$ thì tích $(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0$, từ đó ta có để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.
- Vậy với $m < 0$ thì hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định.

Bài 31. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{m+1}{x}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

- Xét biểu thức

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{m+1}{x_1} - \frac{m+1}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{-(m+1)}{x_1 x_2}.$$

- Nhận thấy trên từng khoảng xác định $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$ thì tích $x_1 x_2 > 0$, từ đó ta có để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow -(m+1) > 0 \Leftrightarrow m < -1$.

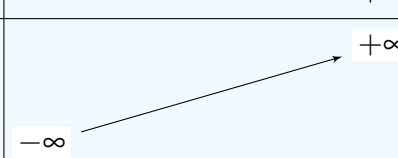
- Vậy với $m < -1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định.

Dạng 4. Tính đơn điệu của hàm bậc nhất

a) Sự biến thiên của hàm số $y = ax + b$ trên $\mathbb{R}$.

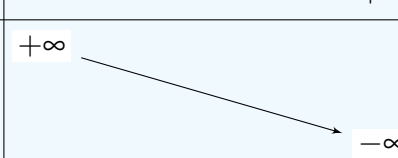
- Khi $a > 0$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	$+\infty$



- Khi $a < 0$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\infty$



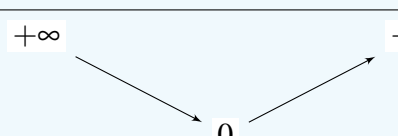
b) Sự biến thiên của hàm số $y = |x|$ trên $\mathbb{R}$.

- Ta có $y = |x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 0 \\ -x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

- Do đó, khi $x \geq 0$ thì $y = x$ là hàm số đồng biến, khi $x < 0$ thì $y = -x$ là hàm số nghịch biến.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$



Ví dụ 12. Xét sự biến thiên của hàm số $y = 2x - 3$.

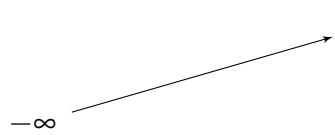
Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Do $a = 2 > 0$ nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	$+\infty$



Ví dụ 13. Xét sự biến thiên của hàm số $y = |1 - x|$.

Lời giải.

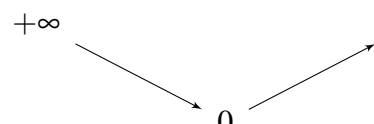
- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Ta có $y = |1 - x| = \begin{cases} x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

- Do đó, khi $x \geq 1$ thì $y = x - 1$ là hàm số đồng biến, còn khi $x < 1$ thì $y = 1 - x$ là hàm số nghịch biến.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$



Ví dụ 14. Xét sự biến thiên của hàm số $y = |x + 2| + |x - 2|$.

Lời giải.

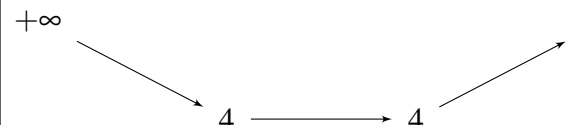
- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Ta có $y = |x + 2| + |x - 2| = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \geq 2 \\ 4 & \text{khi } -2 \leq x < 2 \\ -2x & \text{khi } x < -2 \end{cases}$.

- Do đó, khi $x < -2$ thì $y = -2x$ là hàm số nghịch biến, khi $-2 \leq x < 2$ thì $y = 4$ là hàm hằng, còn khi $x \geq 2$ thì $y = 2x$ là hàm đồng biến.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
y	$+\infty$	4	4	$+\infty$



Ví dụ 15. Cho hàm số $y = (1 - 2m)x + (3m + 2)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Để hàm số $y = (1 - 2m)x + (3m + 2)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$1 - 2m < 0 \Leftrightarrow 1 < 2m \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}.$$

- Vậy với $m > \frac{1}{2}$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 32. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Do $a = -\frac{1}{2} < 0$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 33. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = 3x - 1$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Do $a = 3 > 0$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 34. Xét sự đồng biến nghịch biến của hàm số $y = |2x - 1|$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $y = |2x - 1| = \begin{cases} 1 - 2x & \text{khi } x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{khi } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$.
- Từ đó ta có
 - + Với $x < \frac{1}{2}$ thì hàm số $y = 1 - 2x$ nghịch biến.
 - + Với $x \geq \frac{1}{2}$ thì hàm số $y = 2x - 1$ đồng biến.

Bài 35. Xét sự biến thiên của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $y = \sqrt{(x+3)^2} = |x+3|$.
- Với $x < -3$ thì $y = -x - 3$ là hàm nghịch biến.
- Với $x \geq -3$ thì $y = x + 3$ là hàm số đồng biến.

Bài 36. Xét sự biến thiên của hàm số $y = |1 - x| + |2x + 4|$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Với $x < -2$ thì $y = -3x - 3$ là hàm số nghịch biến.
- Với $-2 \leq x \leq 1$ thì $y = x + 5$ là hàm số đồng biến.
- Với $x > 1$ thì $y = 3x + 3$ là hàm số đồng biến.

Bài 37. Xét sự biến thiên của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 2|x - 1|$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $y = |x - 2| - 2|x - 1| = \begin{cases} x & \text{khi } x < 1 \\ -3x + 4 & \text{khi } 1 \leq x < 2 \\ -x & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y	$-\infty$	1	-2	$-\infty$

Bài 38. Xác định a để hàm số $y = (2a + 3)x + a - 1$ đồng biến trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Để hàm số đồng biến trên tập xác định khi và chỉ khi $2a + 3 > 0 \Leftrightarrow 2a > -3 \Leftrightarrow a > -\frac{3}{2}$.

- Vậy với $a > -\frac{3}{2}$ thì hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định.

Bài 39. Cho hàm số $y = (m - 1)x + (2 - m)$. Biện luận tính đơn điệu của hàm số đã cho theo tham số m .

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Ta có, khi $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì hàm số nghịch biến, khi $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì hàm số đồng biến, còn khi $m = 1$ thì $y = 1$ là hàm hằng.

Dạng 5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

- Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$ được gọi là hàm số chẵn khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D} \text{ thì } -x \in \mathcal{D}, \\ \forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x). \end{cases}$$

- Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$ được gọi là hàm số lẻ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D} \text{ thì } -x \in \mathcal{D}, \\ \forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x). \end{cases}$$

- Đồ thị hàm số chẵn đối xứng qua trục Oy .
- Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

Ví dụ 16. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = x^2 + 3$.

Lời giải. TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ do đó với $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$; $f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$. Vậy hàm đang xét là hàm chẵn.

Ví dụ 17. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \frac{1}{x^3}$.

Lời giải. TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ suy ra $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$; $f(-x) = \frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3} = -f(x)$. Vậy hàm đang xét là hàm lẻ.

Ví dụ 18. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \sqrt{2x - 3}$.

Lời giải. TXĐ $\mathcal{D} = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$, do đó $x = 4 \in \mathcal{D}$ thì $-x = -4 \notin \mathcal{D}$. Vậy hàm đang xét không chẵn, không lẻ.

Ví dụ 19. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = 3$.

Lời giải. TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $f(-x) = 3 = f(x)$, $\forall x$. Vậy hàm đang xét là hàm chẵn.

Ví dụ 20. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = x^4 + 3x^3 - 2$.

Lời giải. TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^3 - 2 = x^4 - 3x^3 - 2 \neq \pm f(x)$. Vậy hàm đã cho không chẵn, không lẻ.

Ví dụ 21. Có hàm số nào vừa chẵn, vừa lẻ không?

Lời giải. Hàm số $y = 0$.

Ví dụ 22. Tìm m để hàm số $y = x^2 + (m+1)x + 2$ là hàm chẵn.

Lời giải. TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Hàm đã cho là hàm số chẵn khi $f(-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ hay $(m-1)x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $m = 1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 40. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

- a) $f(x) = \sqrt{3x-4}$
- b) $f(x) = \frac{2x^2-4}{x}$
- c) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-4}$
- d) $f(x) = -5$
- e) $f(x) = 0$
- f) $f(x) = -x^4 + 5x - 3$
- g) $f(x) = \frac{-x^4 + x^2 + 1}{3x}$
- h) $f(x) = -5x^3 + 7x$
- i) $f(x) = |-x+5| - |x+5|$
- j) $f(x) = |7-5x| + |5x+7|$
- k) $f(x) = \frac{|x+3| + |x-3|}{|x+3| - |x-3|}$
- l) $f(x) = \sqrt{x^2-9} + \left| \frac{x-4}{x+4} \right| + \left| \frac{x+4}{x-4} \right|$
- m) $f(x) = \begin{cases} 5-x, & x \geq 0 \\ 5+x, & x < 0. \end{cases}$

Bài 41. Tùy theo m , hãy xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau

- a) $y = f(x) = \frac{1}{mx^2 + 2(m-1)x - m}$.
- b) $y = f(x) = \frac{1}{(m+1)x^2 + mx - 1}$.

Bài 42. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + (m^2 - 1)x^2 + m - 1$. Tìm m để hàm số là hàm lẻ.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 43. Cho hàm số $f(x) = x^2 - x + 1$. Tính $f(x+h) - f(h)$ (với h là một số thực).

Lời giải. Đáp số: $f(x+h) - f(h) = x^2 + 2xh - x$.

Bài 44. Một quả bóng chày được đánh lên ở độ cao 1 mét so với mặt đất. Đường đi của quả bóng chày được cho bởi hàm số $y = f(x) = -0,0097x^2 + x + 1$. Trong đó x và $f(x)$ được tính bằng mét. Hỏi quả bóng có bay qua được một hàng rào cao 4 mét và nằm cách vị trí người đánh bóng 100 mét hay không?

Lời giải. Vì hàng rào cách người đánh bóng 100 mét nên ta tính độ cao quả bóng tại vị trí $x = 100$.

Ta có $f(100) = 4$. Ta thấy ở tại vị trí hàng rào thì độ cao của quả bóng cao hơn hàng rào nên quả bóng sẽ bay qua được hàng rào.

Bài 45. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{5+x+2\sqrt{x+4}}$.

- Tìm tập xác định của hàm số.
- Xét tính chẵn lẻ của hàm số.
- Xét tính đơn điệu của hàm số.
- Lập bảng biến thiên của hàm số.
- Tính các giá trị $f(-5), f(-4), f(-3), f(0)$.

Lời giải.

- a) Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 5+x+2\sqrt{x+4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ (\sqrt{x+4}+1)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -4$.

Vậy ta có tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = [-4; +\infty)$.

- b) Hàm số không chẵn cũng không lẻ do $4 \in \mathcal{D}$ nhưng $-4 \notin \mathcal{D}$.

- c) Ta có $y = \sqrt{(\sqrt{x+4}+1)^2} = \sqrt{x+4}+1$. Với mọi x_1, x_2 phân biệt lớn hơn -4 ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(\sqrt{x_1+4}+1) - (\sqrt{x_2+4}+1)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{\sqrt{x_1+4} + \sqrt{x_2+4}} > 0.$$

Vậy hàm số đã cho luôn đồng biến trên tập xác định.

- d) Bảng biến thiên

x	-4	$+\infty$
y	1	$+\infty$

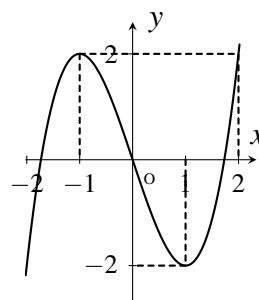
- e) Ta có

- $f(-5)$ không xác định do $-5 \notin \mathcal{D}$.
- $f(-4) = 1$.
- $f(-3) = 2$.
- $f(0) = 3$.

Bài 46.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

- a) Tìm các khoảng đồng biến, các khoảng nghịch biến của hàm số.
b) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$.



Lời giải. a) Từ đồ thị, ta có hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

- b) Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ là 2 và -2

§2. HÀM SỐ $Y = AX + B$

I. Tóm tắt lí thuyết

Định nghĩa 1. Hàm số $y = ax + b$ với $a \neq 0$ gọi là hàm số bậc nhất.

- Hàm số $y = ax + b$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu $a > 0$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nếu $a < 0$.
- Đồ thị của hàm số $y = ax + b, a \neq 0$ là một đường thẳng không song song và không trùng với các trục toạ độ. Đồ thị hàm số $y = ax + b$ còn gọi là đường thẳng $y = ax + b$, trong đó a gọi là hệ số góc của đường thẳng.
- Hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ song song với nhau nếu $a = a'$ và $b \neq b'$.
- Hai đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$ và $y = a'x + b', a' \neq 0$ vuông góc với nhau nếu $aa' = -1$.

Định nghĩa 2. Hàm số $y = b$ gọi là hàm số hằng.

- Hàm số $y = b$ có giá trị không đổi trên $\mathbb{R}$.
- Đồ thị của hàm số $y = b$ là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất

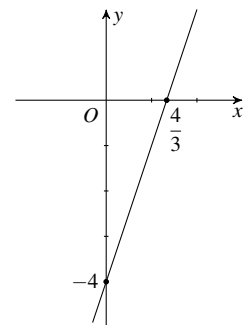
Để vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất $y = ax + b$, ta tìm hai điểm phân biệt mà đồ thị đi qua. Sau đó vẽ một đường thẳng đi qua hai điểm đó. Thông thường ta chọn hai điểm $(0; b)$ và $(-\frac{b}{a}; 0)$.

Đặc biệt: Đồ thị của hàm số hằng $y = b$ là một đường thẳng vuông góc và cắt trục tung tại điểm $(0; b)$.

Ví dụ 1. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3x - 4$.

Lời giải.

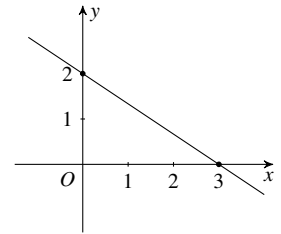
Đồ thị hàm số đã cho đi qua hai điểm $(0; -4)$ và $(\frac{4}{3}; 0)$.



Ví dụ 2. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

Lời giải.

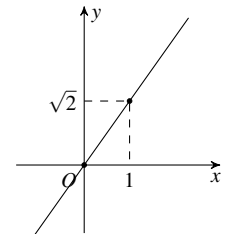
Đồ thị hàm số đã cho đi qua hai điểm $(0; 2)$ và $(3; 0)$.



Ví dụ 3. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sqrt{2}x$.

Lời giải.

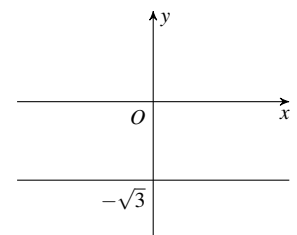
Đồ thị hàm số đã cho đi qua hai điểm $(0; 0)$ và $(1; \sqrt{2})$.



Ví dụ 4. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho vuông góc với trục tung tại điểm $(0; -\sqrt{3})$.

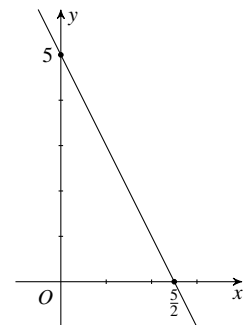


BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -2x + 5$.

Lời giải.

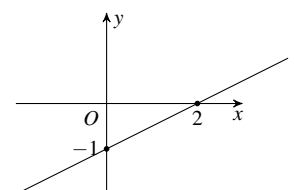
Đồ thị như hình vẽ



Bài 2. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Lời giải.

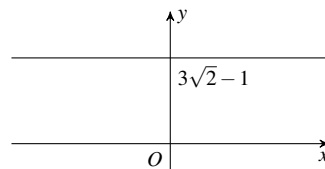
Đồ thị như hình vẽ



Bài 3. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3\sqrt{2} - 1$.

Lời giải.

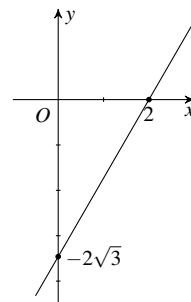
Đồ thị như hình vẽ



Bài 4. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sqrt{3}(x - 2)$.

Lời giải.

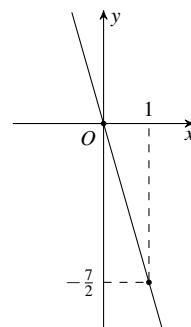
Đồ thị như hình vẽ



Bài 5. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{7}{2}x$.

Lời giải.

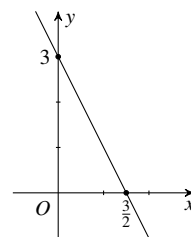
Đồ thị như hình vẽ



Bài 6. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -2(x - 1) + 1$.

Lời giải.

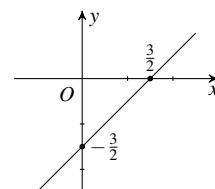
Đồ thị như hình vẽ



Bài 7. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x - 3}{2}$.

Lời giải.

Đồ thị như hình vẽ



Dạng 2. Xác định hệ số a và b của số bậc nhất

Phương pháp: Dựa vào các yếu tố điểm thuộc đường, lý thuyết hai đường song song, vuông góc, hệ số góc, giao điểm của hai đường để tìm ra mối quan hệ giữa a và b .

Những điểm cần chú ý:

- Nếu có hai tham số a, b chưa biết thì ta cần tìm hai quan hệ của a, b độc lập để giải hệ phương trình tìm a, b .
- Nếu điểm $M(x_M; y_M)$ thuộc đường thẳng $d : y = ax + b$ thì ta có $y_M = ax_M + b$.
- Cho $(d) : y = ax + b$ và $(d') : y = a'x + b'$.
 Nếu $(d) \parallel (d')$ thì $\begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$.
 Nếu $(d) \perp (d')$ thì $a' = -\frac{1}{a}$.
- Nếu cho hệ số góc k tức là cho hệ số a của đường thẳng $(d) : y = ax + b$.
- Nếu cho góc của đường thẳng $(d) : y = ax + b$ tạo với trục hoành là α thì ta hiểu là cho $a = \tan(\alpha)$.

Ví dụ 5. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = x + b$. Tìm b biết (d) đi qua điểm $M(1; 2)$.

Lời giải. Vì $M \in (d)$ nên ta có $2 = 1 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy: $b = 1$ tức là (d) có phương trình là $y = x + 1$.

Ví dụ 6. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) đi qua điểm $A(-1; 2)$ và $B(2; 3)$.

Lời giải. Vì $A, B \in (d)$ nên ta có $\begin{cases} 2 = a \cdot (-1) + b \\ 3 = a \cdot 2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{7}{3} \end{cases}$.

Vậy: $a = \frac{1}{3}$ và $b = \frac{7}{3}$ tức là (d) có phương trình là $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.

Ví dụ 7. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) đi qua điểm $A(-1; -2)$ và có hệ số góc là 3.

Lời giải. Vì $A \in (d)$ nên ta có $-2 = a \cdot (-1) + b$.

Mặt khác ta có hệ số góc là 3 nên $a = 3 \Rightarrow b = 1$.

Vậy: $a = 3$ và $b = 1$ tức là (d) có phương trình là $y = 3x + 1$.

Ví dụ 8. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) đi qua điểm $A(-3; 2)$ và song song với $(\Delta) : y = -x + 2$.

Lời giải. Vì $A \in (d)$ nên ta có $2 = a \cdot (-3) + b$.

Mặt khác ta có $\Delta \parallel (d)$ nên $a = -1 \Rightarrow b = -1$ (nhận vì $b \neq 2$).

Vậy: (d) có phương trình là $y = -x - 1$.

Ví dụ 9. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) đi qua điểm $M(2; 5)$ và vuông góc với $(\Delta) : y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Lời giải. Vì $M \in (d)$ nên ta có $5 = a \cdot 2 + b$.

Mặt khác ta có $\Delta \perp (d)$ nên $a = \frac{-1}{\frac{-1}{2}} = 2 \Rightarrow b = 1$.

Vậy: (d) có phương trình là $y = 2x + 1$.

Ví dụ 10. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) cắt Ox tại điểm có hoành độ là 3 và đi qua điểm $A(1; 2)$.

Lời giải. Vì (d) cắt Ox tại điểm có hoành độ là 2 $\Rightarrow x = -\frac{b}{a} = 3 \Rightarrow a = -\frac{b}{3}$.

và $A \in (d)$ nên $2 = a \cdot 1 + b$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} a + b = 2 \\ a = -\frac{b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Vậy: (d) có phương trình là $y = -x + 3$.

Ví dụ 11. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = f(x) = ax + b$. Tìm a, b biết đường thẳng d đi qua giao điểm của $(d_1): y = x + 1$ và $(d_2): y = -2x + 1$ và điểm $B(-1; 2)$.

Lời giải. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2 .

$$\text{Ta có } \begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(0, 1) \text{ nên } 1 = a \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = 1.$$

Mặt khác $B \in (d) \Rightarrow 2 = a(-1) + b \Rightarrow a = -1$.

Vậy: $a = -\frac{3}{4}; b = \frac{9}{4}$ tức là (d) có phương trình là $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$.

Ví dụ 12. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = f(x) = ax + b$. Tìm a, b biết phương trình $f(x + 1) = 0$ có nghiệm là $x = 2$ và $f(2x + 1) = 3$ là có nghiệm là $x = -1$.

Lời giải. Vì phương trình $f(x + 1) = 0$ có nghiệm là $x = 2$ nên $a(2 + 1) + b = 0 \Leftrightarrow 3a + b = 0$.

và phương trình $f(2x + 1) = 3$ là $x = -1$ nên $a(2 \cdot (-1) + 1) + b = 3 \Leftrightarrow -a + b = 3$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} 3a + b = 0 \\ -a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{9}{4} \end{cases}.$$

Vậy: $a = -\frac{3}{4}; b = \frac{9}{4}$ tức là (d) có phương trình là $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 8. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất và đi qua điểm $A(3; 1)$.

Lời giải. Vì $A \in (d)$ nên ta có $1 = a \cdot 3 + b$ và (d) song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất ($y = x$) nên $a = 1 \Rightarrow b = -2$.

Vậy: $a = 1, b = -2$.

Bài 9. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) đi qua điểm $A(1, 2)$ và gốc toạ độ O .

$$\text{Lời giải. Vì } A, O \in (d) \text{ nên ta có } \begin{cases} 2 = a \cdot 1 + b \\ 0 = a \cdot 0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Vậy: $a = 2$ và $b = 0$.

Bài 10. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) đi qua điểm $A(1; -2)$ và (d) tạo với Ox một góc là 45° .

Lời giải. Vì $A \in (d)$ nên ta có $-2 = a.1 + b$.

Mặt khác ta có hệ số góc là $a = \tan(45^\circ) = 1 \Rightarrow b = -3$.

Vậy: $a = 1$ và $b = -3$ tức là (d) có phương trình là $y = x - 3$.

Bài 11. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) đi qua điểm $A(3, 2)$ và song song với Ox .

Lời giải. Vì $A \in (d)$ nên ta có $2 = a.3 + b$.

Mặt khác ta có $(Ox) \parallel (d)$ nên $a = 0 \Rightarrow b = 2$ (nhận vì $b \neq 0$).

Vậy: (d) có phương trình là $y = 2$.

Bài 12. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) đi qua điểm $M(2, 1)$ và vuông góc với $(\Delta) : y = 3x + 2$.

Lời giải. Vì $M \in (d)$ nên ta có $1 = a.2 + b$.

Mặt khác ta có $\Delta \perp (d)$ nên $a = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{5}{3}$.

Vậy: (d) có phương trình là $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

Bài 13. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) cắt Ox tại điểm có hoành độ là 2 và cắt trục Oy với tung độ là 3.

Lời giải. Vì (d) cắt Ox tại điểm có hoành độ là 2 $\Rightarrow x = -\frac{b}{a} = 2 \Rightarrow a = -\frac{b}{2}$.

và (d) cắt Oy tại điểm có tung độ là 3 $\Rightarrow y = a.0 + b = b = 3$.

Do đó $a = -\frac{3}{2}$

Vậy: (d) có phương trình là $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

Bài 14. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = f(x) = ax + b$. Tìm phương trình a, b biết phương trình $f(x+1) = 0$ có nghiệm là $x = 1$ và $f(2) = 3$.

Lời giải. Vì phương trình $f(x+1) = 0$ có nghiệm là $x = 1$ nên $a(1+1) + b = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0$.

và $f(-1) = 3 \Leftrightarrow -a + b = 3$.

Do đó $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ -a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$.

Vậy: $a = -1; b = 2$ tức là (d) có phương trình là $y = -x + 2$.

Dạng 3. Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số bậc nhất có chứa giá trị tuyệt đối

Để vẽ đồ thị hàm số $y = |x|$ ta sử dụng định nghĩa của giá trị tuyệt đối:

$$y = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Sau đó ta xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho trên từng khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

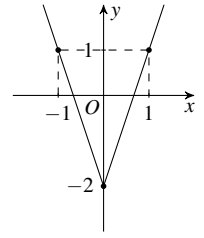
CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 13. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3|x| - 2$.

Lời giải.

Ta có $y = 3|x| - 2 = \begin{cases} 3x - 2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -3x - 2 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; -2)$, $(-1; 1)$ và $(1; 1)$.

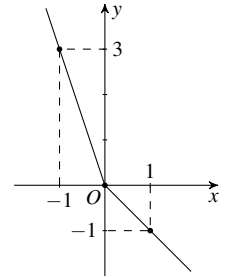


Ví dụ 14. Vẽ đồ thị của hàm số $y = |x| - 2x$.

Lời giải.

Ta có $y = |x| - 2x = \begin{cases} -x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -3x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; 0)$, $(-1; 3)$ và $(1; -1)$.



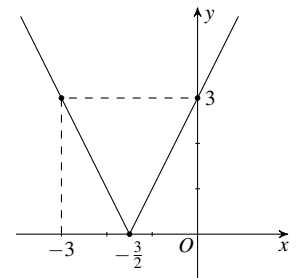
Ví dụ 15. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = |2x + 3|$.

Lời giải.

Ta có $y = |2x + 3| = \begin{cases} 2x + 3 & \text{nếu } x \geq -\frac{3}{2} \\ -2x - 3 & \text{nếu } x < -\frac{3}{2}. \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$



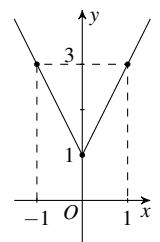
Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-\frac{3}{2}; 0)$, $(0; 3)$ và $(-3; 3)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 15. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2|x| + 1$.

Lời giải.

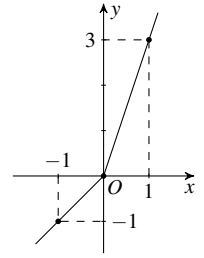
Đồ thị như hình vẽ.



Bài 16. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2x + |x|$.

Lời giải.

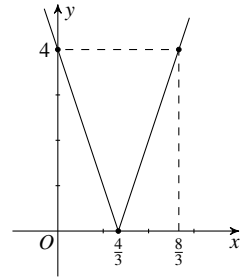
Đồ thị như hình vẽ.



Bài 17. Vẽ đồ thị của hàm số $y = |3x - 4|$.

Lời giải.

Đồ thị như hình vẽ.

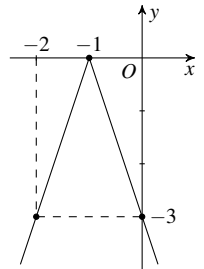


Bài 18. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -3|x + 1|$.

Lời giải.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-\infty$

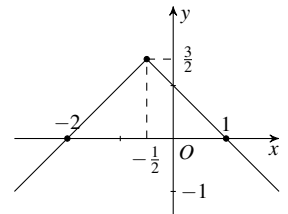


Bài 19. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}|2x + 1| + \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$-\infty$



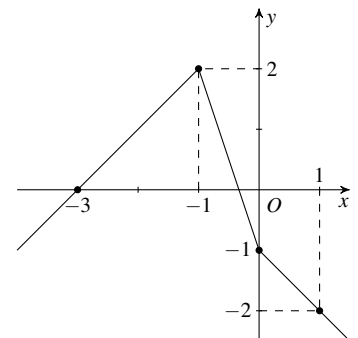
BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 20. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = |x| - 2|x + 1| + 1$.

Lời giải.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y	$-\infty$	2	-1	$-\infty$

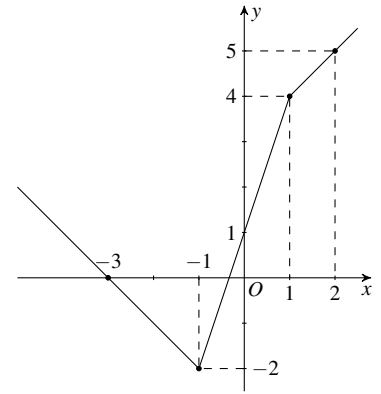


Bài 21. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = 2|x + 1| - |x - 1|$.

Lời giải.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y	$+\infty$	-2	4	$+\infty$

**Dạng 4. Vẽ đồ thị hàm số cho bởi hệ nhiều công thức**

Vẽ đồ thị hàm số trùng với từng đồ thị hàm số thành phần tương ứng với điều kiện x ở phía sau.

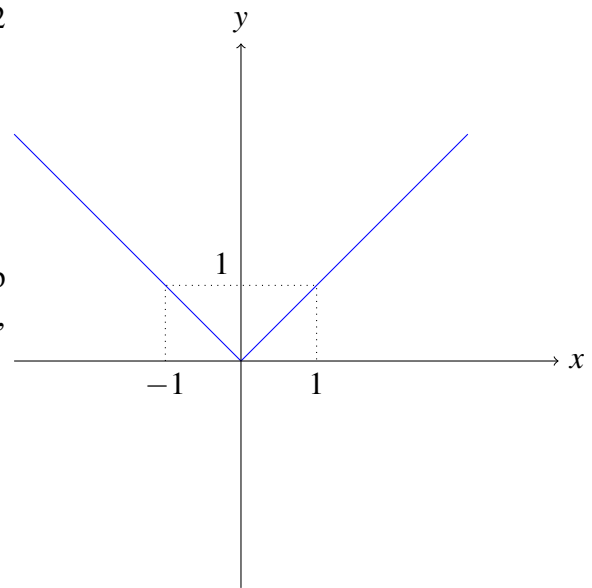
Ví dụ 16. Vẽ đồ thị hàm số: $y = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ là sự "lắp ghép" của 2 đồ thị:

- Đồ thị hàm số $y = x$ (chỉ lấy phần ứng với $x \geq 0$).
- Đồ thị hàm số $y = -x$ (chỉ lấy phần ứng với $x < 0$).

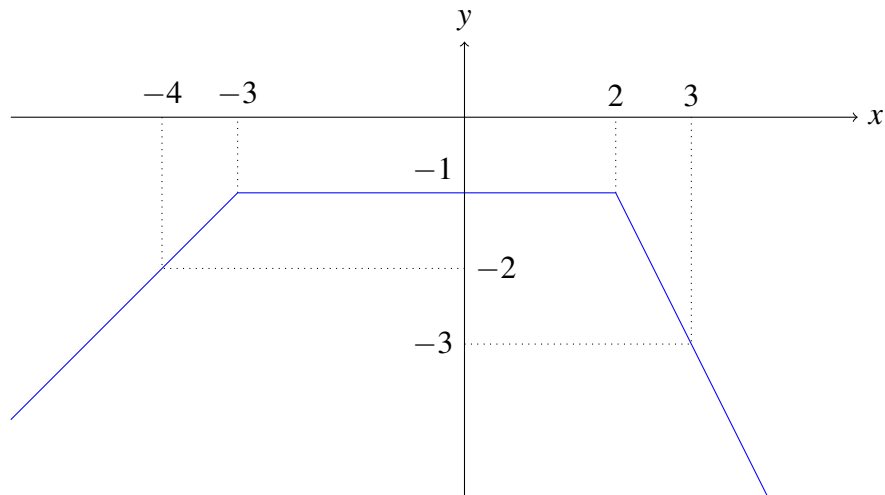
Ta dễ dàng thấy được, đồ thị của hàm số đã cho là sự lắp ghép của 2 tia phân giác của góc phần tư thứ (I) và (II), chúng đối xứng với nhau qua trục Oy .



Ví dụ 17. Vẽ đồ thị hàm số: $y = \begin{cases} -2x+3 & \text{nếu } x > 2 \\ -1 & \text{nếu } -3 \leq x \leq 2 \\ x+2 & \text{nếu } x < -3 \end{cases}$.

Lời giải. Đồ thị hàm số $y = \begin{cases} -2x+3 & \text{nếu } x > 2 \\ -1 & \text{nếu } -3 \leq x \leq 2 \\ x+2 & \text{nếu } x < -3 \end{cases}$

- Trùng với đồ thị hàm số $y = -2x + 3$ trên $(2; +\infty]$.
- Trùng với đồ thị hàm số $y = -1$ trên $[-3; 2]$.
- Trùng với đồ thị hàm số $y = x + 2$ trong $(-\infty; -3)$.



Ví dụ 18. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{nếu } x \leq -1 \\ -2x & \text{nếu } -1 < x \leq 1. \\ x-3 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$

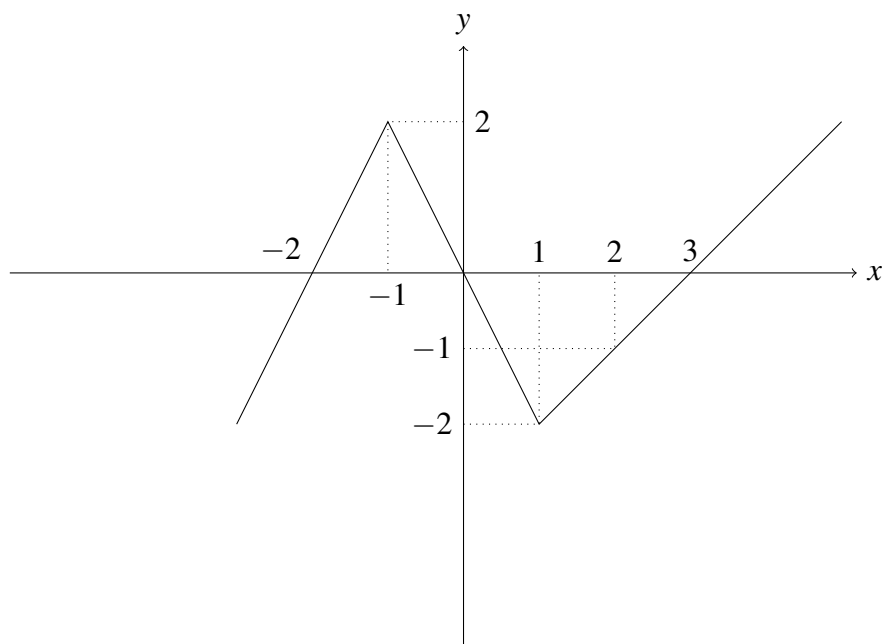
- Tìm tập xác định và vẽ đồ thị hàm số trên.
- Cho biết sự biến thiên của hàm số đã cho trên mỗi khoảng $(-\infty; 1); (-1; 1); (1; +\infty)$ và lập bảng biến thiên.

Lời giải.

a. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Đồ thị hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{nếu } x \leq -1 \\ -2x & \text{nếu } -1 < x \leq 1. \\ x-3 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$

- Trùng với đồ thị hàm số $y = 2x + 4$ nếu $x \leq -1$.
- Trùng với đồ thị hàm số $y = -2x$ nếu $-1 < x \leq 1$.
- Trùng với đồ thị hàm số $y = x - 3$ nếu $x > 1$.



b. Trên khoảng $(-2; -1)$ và $(1; 3)$ hàm số đồng biến.

Trên khoảng $(-1; 1)$ hàm số nghịch biến.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 22. Vẽ đồ thị hàm số:

$$y = \begin{cases} 3x - 6 & \text{nếu } x \geq 2 \\ 6 - 3x & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$$

Lời giải. Với $x \geq 2$: Đồ thị hàm số trùng với đường thẳng $y = 3x - 6$.

Với $x < 2$: Đồ thị hàm số trùng với đường thẳng $y = 6 - 3x$.

Bài 23. Vẽ đồ thị hàm số:

$$y = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } 0 \leq x < 2 \\ -\frac{1}{2}x + 4 & \text{nếu } 2 \leq x \leq 4 \\ 2x - 6 & \text{nếu } 4 < x \leq 5 \end{cases}$$

Lời giải. Với $0 \leq x < 2$: Đồ thị hàm số trùng với đường thẳng $y = x + 1$.

Với $2 \leq x \leq 4$: Đồ thị hàm số trùng với đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Với $4 < x \leq 5$: Đồ thị hàm số trùng với đường thẳng $y = 2x - 6$.

Bài 24. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{nếu } -2 \leq x < -1 \\ -2x & \text{nếu } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 3 & \text{nếu } 1 < x \leq 3 \end{cases}$.

a. Tìm tập xác định và vẽ đồ thị hàm số trên.

b. Cho biết sự biến thiên của hàm số đã cho trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$; $(-2; 4)$; $(4; +\infty)$ và lập bảng biến thiên.

Dạng 5. Sự tương giao giữa các đường thẳng

Phương pháp:

- Cho 2 đường thẳng $d_1 : y = a_1x + b_1$ và $d_2 : y = a_2x + b_2$ ($a_1 \neq 0; a_2 \neq 0$)
 - d_1 cắt $d_2 \Leftrightarrow a_1 \neq a_2$.
 - $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ và $b_1 \neq b_2$.
 - $d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ và $b_1 = b_2$.
 - $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$.
- d_1 cắt d_2 tại một điểm trên trục tung $\Leftrightarrow a_1 \neq a_2$ và $b_1 = b_2$.
- Để chứng minh 3 đường thẳng đồng quy, ta chứng minh 2 trong 3 đường thẳng cắt nhau và giao điểm của chúng thuộc đường còn lại.

Ví dụ 19. Tìm các cặp đường thẳng song song trong các đường thẳng đã cho sau đây.

a. $d_1 : y = 3 + \frac{x}{2}$.

d. $d_4 : 2y + x = 6$.

b. $d_2 : 3y - 6x + 1 = 0$.

e. $d_5 : 2x - y = 1$.

c. $d_3 : y = -0,5x - 4$.

f. $d_6 : y = 0,5x + 1$.

Lời giải. Đưa mỗi đường thẳng về dạng: $y = ax + b$

a. $d_1 : y = 3 + \frac{x}{2}$.

b. $d_2 : y = 2x - \frac{1}{3}$.

c. $d_3 : y = -0,5x - 4$.

d. $d_4 : -\frac{1}{2}x + 6$.

e. $d_5 : y = 2x - 1$.

f. $d_6 : y = 0,5x + 1$.

Các cặp đường thẳng song song là d_1 và d_6 ; d_2 và d_5 ; d_3 và d_4 .

Ví dụ 20. Tìm giao điểm của 2 đường thẳng $d_1 : y = x - 5$ và $d_2 : y = 1 + 3x$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 :

$$x - 5 = 1 + 3x \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3.$$

Giao điểm của d_1 và d_2 là $(-3; -8)$.

Ví dụ 21. Tìm giao điểm của đường thẳng $d : y = 1 + 2x$ với

a. Trục Ox .

b. Trục Oy .

Lời giải.

a. Trục $Ox : y = 0$.

Giao điểm của đường thẳng $d : y = 1 + 2x$ với Ox là $A(-\frac{1}{2}; 0)$.

b. Trục $Oy : x = 0$.

Giao điểm của đường thẳng $d : y = 1 + 2x$ với Oy là $B(0; 1)$.

Ví dụ 22. Cho 2 đường thẳng: $d_1 : y = mx + 3$ và $d_2 : y = (2m + 1)x - 5$. Tìm m để

a. $d_1 \parallel d_2$.

b. d_1 cắt d_2 .

Lời giải.

$$\text{a. } d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2m + 1 \\ 3 \neq 5 \\ m \neq 0 \\ 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq 0 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

$$\text{b. } d_1 \text{ cắt } d_2 \Leftrightarrow m \neq 2m + 1 \Leftrightarrow m \neq -1.$$

Ví dụ 23. Cho $d_1 : y = mx - m + 2$; $d_2 : y = (m - 3)x + m$. Tìm m để d_1 cắt d_2 tại 1 điểm trên trục tung.

Lời giải. d_1 cắt d_2 tại 1 điểm trên trục tung

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq m - 3 \\ -m + 2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq -3 \\ 2m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Ví dụ 24. Cho $d_1 : y = 2x - 6$; $d_2 : y = -x + 3$.

- Tìm tọa độ giao điểm A của d_1 và d_2 .
- d_1 và d_2 cắt trục tung tại B và C . Tính diện tích ΔABC .

Lời giải.

- Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 là

$$2x - 6 = -x + 3 \Leftrightarrow x = 3.$$

$$\text{Với } x = 3 \Rightarrow y = 0.$$

Vậy tọa độ giao điểm A của d_1 và d_2 là $(3; 0)$.

- d_1 và d_2 lần lượt cắt trục tung tại B và C . Dễ dàng suy ra được tọa độ của B và C là $B(0; -6)$ và $C(0; 3)$.

$$\text{Diện tích } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AO \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 = \frac{27}{2} (\text{đvdt}).$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 25. Cho đường thẳng $d : y = (m^2 - 2)x + m - 1$. Xác định giá trị của m sao cho

- d song song với $d_1 : y = 2x + 1$.
- d cắt $d_2 : y = m(2x - 1) + 3 + x$.

Lời giải.

$$\text{a. } m = -2.$$

$$\text{b. } \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq -3 \end{cases}.$$

Bài 26. Cho 2 đường thẳng: $(d_1) : y = (m + 2)x - 3$; $(d_2) : y = 4x + 2m + 1$. Tìm m để d_1 cắt d_2 tại 1 điểm trên trục tung.

Lời giải. Không tồn tại giá trị m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài 27. Cho 3 đường thẳng: $(d_1) : y = 2x$; $(d_2) : y = x + 1$; $(d_3) : y = (m - 2)x + 2m + 1$. Tìm m để

- $d_1 \perp d_3$.
- d_1, d_2, d_3 đồng quy.

Lời giải.

a. $m = \frac{3}{2}$.

b. $m = 1$.

Bài 28. Tìm m để 3 đường thẳng sau phân biệt và đồng quy.

a. $d_1 : y = 2x, d_2 : y = -3 - x, d_3 : y = mx + 5$.

b. $d_1 : y = -5(x + 1), d_2 : y = mx + 3, d_3 : y = 3x + m$.

c. $d_1 : y = x + 2m, d_2 : y = 3x + 2, d_3 : y = -mx + 2$.

Lời giải.

a. $m = 7$.

b. $m = -13$.

c. $m = 1$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP**Bài 29.** Cho (d) có phương trình $y = ax + b$ và $(d_1) : y = x + 1; (d_2) : y = 2x + 1$.a) Tìm giao điểm M của (d_1) và (d_2) .b) Tìm phương trình đường thẳng (d) , biết (d) cắt (d_1) tại $A(1, 2)$ và cắt (d_2) tại $B(-1, 3)$.**Lời giải.**

a) Xét $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 1 \\ -2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy: $M(0, 1)$ là giao điểm của (d_1) và (d_2) .

b) Vì (d) cắt (d_1) tại $A(1, 2) \Rightarrow A(1, 2) \in (d) \Rightarrow 2 = a + b$.

và (d) cắt (d_1) tại $B(-1, 3) \Rightarrow B(-1, 3) \in (d) \Rightarrow 3 = -a + b$.

Do đó: $\begin{cases} 1 = 2a + b \\ 3 = -a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ -a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$.

Vậy: $(d) : y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Bài 30. Cho (d) có phương trình $y = ax + b$ và $(d_1) : y = x - 1; (d_2) : y = -2x - 1$.a) Tìm giao điểm N của (d_1) và (d_2) .b) Xác định phương trình đường thẳng d , biết $(d); (d_1); (d_2)$ đồng qui và (d) đi qua $A(1, -5)$.**Lời giải.**

a) Xét $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = -1 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$.

Vậy: $N(0, -1)$ là giao điểm của (d_1) và (d_2) .

b) Vì $(d); (d_1); (d_2)$ đồng qui nên $N(0, -1) \in (d) \Rightarrow -1 = a.0 + b \Rightarrow b = -1$.

và $A \in (d) \Rightarrow -5 = a + b \Rightarrow a = -4$.

Vậy: $(d) : y = -4x - 1$.

Bài 31. Cho (d) có phương trình $y = ax + b$ và $A(6, -2)$.

- a) Tìm d sao cho d đi qua A và gốc tọa độ O .
- b) Xác định phương trình đường thẳng d , biết (d) đi qua A và cắt Ox, Oy lần lượt tại B, C sao cho tam giác OBC có diện tích là 3.

Lời giải.

- a) Vì $O \in (d)$ nên $b = 0$.

Mặt khác $A \in (d)$ nên $-2 = 6a + b \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$.

Vậy: $(d) : y = -\frac{1}{3}x$.

- b) Ta có: $A \in (d)$ nên $-2 = 6a + b$ và $B(0, b); C(-\frac{b}{a}, 0)$.

Do đó: Diện tích tam giác OCB là $\frac{1}{2}|b||-\frac{b}{a}| = 3 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{b^2}{6} \\ a = \frac{b^2}{6} \end{cases}$.

Vì vậy ta được $\begin{cases} 6a + b = -2 \\ \begin{cases} a = -\frac{b^2}{6} \\ a = \frac{b^2}{6} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 6a + b = -2 \\ a = -\frac{b^2}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} 6a + b = -2 \\ a = \frac{b^2}{6} \end{cases} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -b^2 + b - 2 = 0 \\ a = -\frac{b^2}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} b^2 + b - 2 = 0 \\ a = \frac{b^2}{6} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} b = -1; a = -\frac{1}{3} \\ b = 2; a = -\frac{4}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} b = -1; a = \frac{1}{6} \\ b = 2; a = \frac{4}{6} \end{cases} \end{cases}$. Vậy: $(d) : y = -\frac{1}{3}x - 1$ hay $(d) : y = -\frac{4}{3}x + 2$

§3. HÀM SỐ BẬC HAI

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Hàm số bậc hai

Định nghĩa 1. Hàm số bậc hai được cho bởi công thức $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Tập xác định của hàm số này là $D = \mathbb{R}$.

2. Đồ thị của hàm số bậc hai

Định nghĩa 2. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là một đường parabol có đỉnh là điểm $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$, có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$. Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a > 0$, xuống dưới nếu $a < 0$.

* **Cách vẽ đồ thị hàm số bậc hai.**

a) Xác định tọa độ của đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

b) Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$.

c) Lập bảng giá trị

x	x_1	x_2	$-\frac{b}{2a}$	x_3	x_4
y	$y(x_1)$	$y(x_2)$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$y(x_3)$	$y(x_4)$

 **Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) cắt trục tung tại điểm $(0; c)$.**

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) cắt trục hoành (nếu có) tại điểm có tọa độ $(x_0; 0)$ với x_0 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

d) Vẽ Parabol

 **Khi vẽ cần chú ý đến dấu của hệ số a ($a > 0$ bề lõm quay lên trên, $a < 0$ bề lõm quay xuống dưới).**

3. Chiều biến thiên của hàm số bậc hai

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), ta có bảng biến thiên của nó trong hai trường hợp $a > 0$ và $a < 0$ như sau

+ Với $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$+\infty$

+ Với $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$-\infty$

Từ đó ta có định lí sau

Định lí 1. Nếu $a > 0$ thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Nếu $a < 0$ thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

4. Phương trình hoành độ giao điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C_1) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị là (C_2) . Khi đó, nếu $M(x; y)$ là giao điểm của (C_1) và (C_2) thì tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x). (*)$$

Phương trình $(*)$ được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) . Và nếu giao điểm M có mang những đặc điểm, tính chất nào đó thì phương trình $(*)$ cũng sẽ tồn tại những đặc điểm tương ứng với các đặc tính đó. Từ đây suy ra, để giải một bài toán về tính chất giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) , ta có thể tiến hành theo các bước sau:

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và C_2 (tức là phương trình $(*)$).
- Biến đổi phương trình về dạng bậc hai đơn giản.
- Dựa vào điều kiện ban đầu của bài toán để chuyển về điều kiện cho phương trình hoành độ giao điểm.

5. Định lý Vi-ét

Định lí 2. Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

a) Nếu phương trình bậc hai có hai nghiệm x_1 và x_2 thì ta có:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

b) Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $P < 0$.

c) Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

d) Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

e) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác x_0 khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ ax_0^2 + bx_0 + c \neq 0 \end{cases}$$

6. Một vài công thức cần nhớ

⚠ Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là một đường parabol có đỉnh là điểm $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

⚠ Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) cắt trục tung tại điểm $(0; c)$ (lấy $x = 0$ thế vào hàm số).

⚠ Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) cắt trục hoành (nếu có) tại điểm có tọa độ $(x_0; 0)$ với x_0 là nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ (1). Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị với trục hoành.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Vẽ đồ thị và lập bảng biến thiên của hàm số bậc hai

Vẽ đồ thị của hàm số bậc hai ta thực hiện theo bốn bước như trên.

Để lập bảng biến thiên của hàm số bậc hai ta cần xem xét dấu của hệ số a , tính tọa độ của đỉnh và điền vào bảng thích hợp.

Ví dụ 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$.

Lời giải. Ta có $a = 1, b = -2, c = 0$. Suy ra tọa độ đỉnh là $I(1; -1)$.

Vậy bảng biến thiên là

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

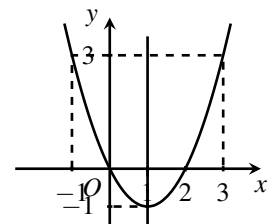
Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

*Vẽ đồ thị: Ta có đỉnh là $I(1; -1)$ và trục đối xứng là $x = 1$.

Bảng giá trị

x	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3

Ta có đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$ là



Ví dụ 2. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$.

Lời giải. Ta có $a = -\frac{1}{2}, b = 2, c = -2$. Suy ra tọa độ đỉnh là $I(2; 0)$.

Vậy bảng biến thiên là

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-\infty$

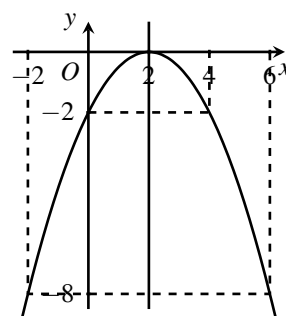
Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

*Vẽ đồ thị: Ta có đỉnh là $I(2; 0)$ và trục đối xứng là $x = 2$.

Bảng giá trị

x	-2	0	2	4	6
y	-8	-2	0	-2	-8

Ta có đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$ là



Ví dụ 3. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -3x^2 + 2x - 1$.

Lời giải. Ta có $a = -3, b = 2, c = -1$. Suy ra tọa độ đỉnh là $I\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Vậy bảng biến thiên là

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$-\infty$

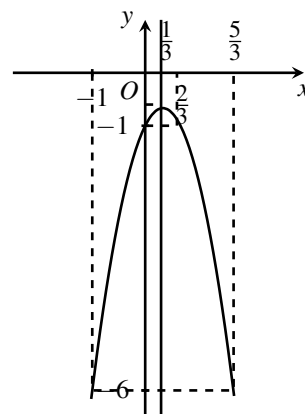
Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; \frac{1}{3})$ và nghịch biến trên khoảng $(\frac{1}{3}; +\infty)$.

*Vẽ đồ thị: Ta có đỉnh là $I\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ và trục đối xứng là $x = \frac{1}{3}$.

Bảng giá trị

x	-1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
y	-6	-1	$-\frac{2}{3}$	-1	-6

Ta có đồ thị của hàm số $y = -3x^2 + 2x - 1$ là



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = -x^2 + 2x + 3$.

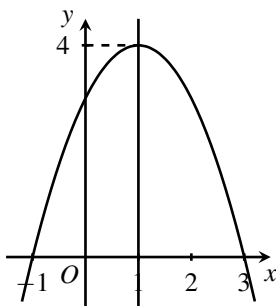
c) $y = 3x^2 - 2x + 1$.

b) $y = -x^2 + 2x - 2$.

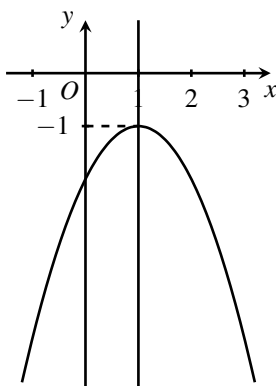
d) $y = -3x^2 + 2x - 1$.

Lời giải.

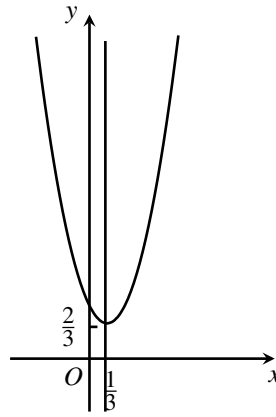
a) Đồ thị



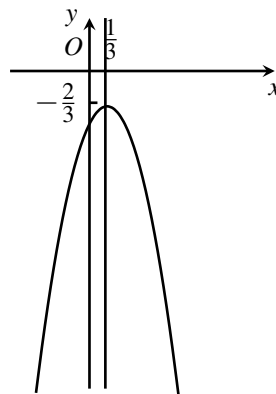
b) Đồ thị



c) Đồ thị



d) Đồ thị

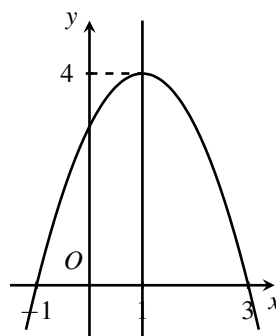


Bài 2. Cho hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$.

- Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số.
- Tìm các giá trị của x để $y > 0$ và $y < 0$.

Lời giải.

a) Đồ thị



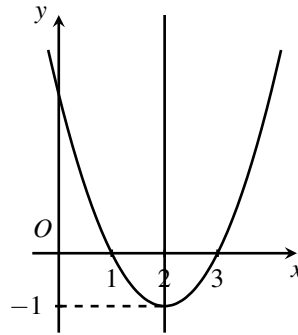
- Để $y > 0$ thì $x \in (-1; 3)$ và $y < 0$ thì $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Bài 3. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$.

- Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số.
- Tìm các giá trị của x để $y > 0$ và $y < 0$.

Lời giải.

a) Đồ thị

b) Để $y > 0$ thì $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ và $y < 0$ thì $x \in (1; 3)$.

Dạng 2. Tìm tọa độ của đỉnh và các giao điểm của parabol với các trục tọa độ. Tọa độ giao điểm giữa parabol (P) và một đường thẳng.

Phương pháp:

- Dựa vào các công thức cần nhớ để tìm tọa độ của đỉnh, giao điểm của parabol với các trục tọa độ. Tuy nhiên, khi tìm tọa độ của đỉnh I thì ta chỉ cần tìm hoành độ $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Rồi sau đó thế x_0 vào hàm số ban đầu để tìm $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ là tung độ của đỉnh I .
- Dựa vào phương trình hoành độ giao điểm để xác định giao điểm của parabol (P) với đường thẳng.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị là parabol (P) . Tìm tọa độ của đỉnh, giao điểm của đồ thị với trục tung và trục hoành.

Lời giải. Từ đề ta có: $a = 1, b = -4, c = 3$. Vậy hoành độ của đỉnh I là: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$.

$\Rightarrow y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$. Vậy đỉnh $I(2; -1)$.

Giao điểm của (P) và trục Oy : Cho $x = 0 \Rightarrow y = 3$. Vậy (P) cắt trục Oy tại điểm $A(0; 3)$.

Giao điểm của (P) với trục Ox : Xét phương trình: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$. Vậy (P) cắt trục Ox tại hai điểm $B(1; 0)$ và $C(3; 0)$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = -x^2 - 3x + 1$ có đồ thị là parabol (P) . Tìm tọa độ của đỉnh, giao điểm của đồ thị với trục tung và trục hoành.

Lời giải. Từ đề ta có: $a = -1, b = -3, c = 1$. Vậy hoành độ của đỉnh I là: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \cdot (-1)} = -\frac{3}{2}$.

$\Rightarrow y_0 = -\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = \frac{13}{4}$. Vậy đỉnh $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{13}{4}\right)$.

Giao điểm của (P) và trục Oy : Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1$. Vậy (P) cắt trục Oy tại điểm $A(0; 1)$.

Giao điểm của (P) với trục Ox : Xét phương trình: $-x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$. Vậy (P) cắt trục

Ox tại hai điểm $B\left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}; 0\right)$ và $C\left(\frac{-3 - \sqrt{13}}{2}; 0\right)$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = -x^2 + x + 2$ có đồ thị (P) và đường thẳng $d: 4x + y - 3 = 0$. Tìm giao điểm của đồ thị (P) và đường thẳng d .

Lời giải. Đường thẳng $d: y = -4x + 3$. Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$-x^2 + x + 2 = -4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 5 \Rightarrow y = 11 \end{cases}$. Vậy đồ thị (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm: $A(0; 1)$ và $B(5; 11)$.

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = -x^2 - x + 2$ có đồ thị (P) và đường thẳng $d: x - y + 3 = 0$. Tìm giao điểm của đồ thị (P) và đường thẳng d .

Lời giải. Đường thẳng $d: y = x + 3$. Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$-x^2 - x + 2 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2$. Vậy (P) và d tiếp xúc với nhau tại điểm $A(-1; 2)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4. Tìm tọa độ đỉnh, giao điểm với trục tung, trục hoành (nếu có) của các parabol sau:

a) $y = x^2 + 4x - 1$.

b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 4$.

Lời giải.

a) Đáp số: Tọa độ đỉnh $I(-2; -5)$; giao điểm của parabol (P) với trục tung và trục hoành lần lượt là: $A(0; -1)$; $B(-2 + \sqrt{5}; 0)$; $C(-2 - \sqrt{5}; 0)$.

b) Đáp số: Tọa độ đỉnh $I(2; -2)$; giao điểm của parabol (P) với trục tung là $A(0; -4)$; đồ thị không cắt trục hoành.

Bài 5. Tìm giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) $y = -x^2$ và $y = x - 2$.

c) $y = x^2 - x - 3$ và $y = x - 4$.

b) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$ và $y = -3x + 3$.

d) $y = x^2 + 6x + 4$ và $y = -x + 1$.

Lời giải.

a) Số giao điểm của (P) và d là số nghiệm của phương trình:

$$-x^2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -2 \Rightarrow y = -4 \end{cases}. \text{ Vậy } (P) \text{ và } d \text{ cắt nhau tại 2 điểm } A(1; -1) \text{ và } B(-2; -4).$$

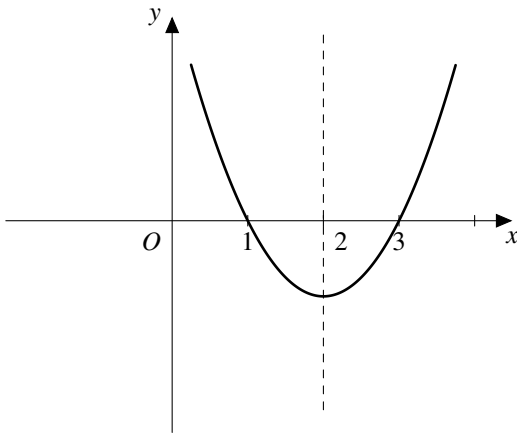
b) (P) và d không cắt nhau.

c) (P) và d tiếp xúc với nhau tại $A(1; -3)$.

d) (P) và d không cắt nhau.

Bài 6. Cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$. Dùng (P) tìm tập hợp các giá trị của x để $y \leq 0$.

Lời giải.



Đáp số: Từ hình vẽ ta có: $1 \leq x \leq 3$.

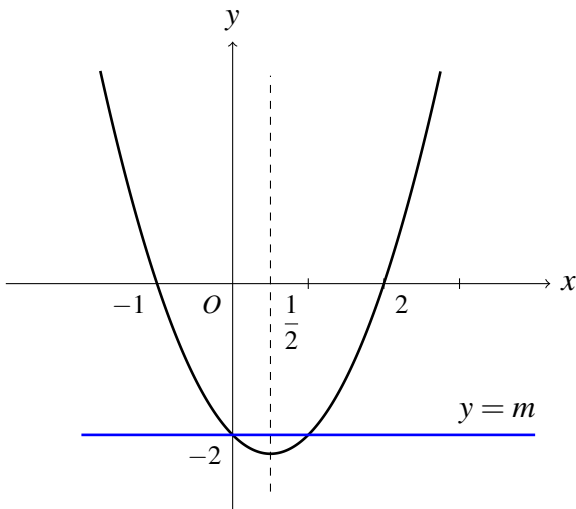
Dạng 3. Dựa vào đồ thị biện luận theo m số giao điểm của parabol (P) và đường thẳng.

CÂU DẪN

- Sử dụng đồ thị để biện luận số nghiệm của phương trình.
- Sử dụng phương trình hoành độ giao điểm để đưa bài toán tìm giao điểm về bài toán biện luận số nghiệm của phương trình.

Ví dụ 8. Cho parabol (P): $y = x^2 - x - 2$. Dùng đồ thị (P), biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^2 - x - (m - 2) = 0$.

Lời giải.



Xét phương trình: $x^2 - x - (m - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = m$ (1).

Nghiệm số của phương trình là hoành độ giao điểm của 2 đường parabol (P): $y = x^2 - x - 2$ và đường thẳng Δ : $y = m$. Theo đồ thị ta có kết quả:

- $m < -\frac{9}{4}$: (Δ) và (P) không có điểm chung $\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.
- $m = -\frac{9}{4}$: (Δ) tiếp xúc với (P) $\Rightarrow$ phương trình (1) có nghiệm kép.
- $m > -\frac{9}{4}$: (Δ) cắt (P) tại 2 điểm $\Rightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 9. Cho parabol $(P): y = x(2 - x) + 3$ và đường thẳng $d: y = -x + m$. Định m để:

- a) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
- b) d và (P) tiếp xúc.
- c) d và (P) không có điểm chung.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$x(2 - x) + 3 = -x + m \Leftrightarrow x^2 - 3x + m - 3 = 0 \quad (1).$$

$$\Delta = 9 - 4(m - 3) = -4m + 21$$

a) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \Delta = -4m + 21 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{21}{4}.$$

b) d và (P) tiếp xúc $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm kép: $\Leftrightarrow \Delta = -4m + 21 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{21}{4}.$

c) d và (P) không có điểm chung $\Leftrightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm: $\Leftrightarrow \Delta = -4m + 21 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{21}{4}.$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Cho hàm số: $y = x^2 - 2x - 3$ có đồ thị là parabol (P) và đường thẳng $d: y = 4x + m$. Biện luận theo m số giao điểm của d và (P) .

Lời giải. HD: Sử dụng phương trình hoành độ giao điểm để đưa bài toán về biện luận theo m số nghiệm của phương trình.

Đáp số: $m > -12$: d cắt (P) tại hai điểm phân biệt; $m = -12$: d tiếp xúc với (P) ; $m < -12$: d và (P) không có điểm chung.

Bài 8. Cho parabol $y = -\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $y = x + m$. Với giá trị nào của m thì parabol và đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt?

Lời giải. $m < 1$ thì parabol và đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Bài 9. Cho parabol $y = \frac{1}{2}x^2$. Tìm giá trị của m và n để đường thẳng $y = mx + n$ đi qua điểm $(0; -1)$ và tiếp xúc với parabol.

Lời giải. Đáp số: $m = \sqrt{2}; n = -1$ và $m = -\sqrt{2}; n = -1$.

Bài 10. Cho hai parabol $y = -x^2 + 2x + 3$ và $y = \frac{x^2}{2} - 4x + 3$. Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt cả hai parabol.

Lời giải. HD: vẽ hai parabol trên 1 hệ trục tọa độ.

Đáp số: $-5 \leq m \leq 4$.

Dạng 4. Xác định hàm số bậc hai khi biết các yếu tố liên quan.

Ta thực hiện theo các bước sau.

Bước 1: Giả sử parabol $(P) : y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Bước 2: Dựa vào giả thiết đề bài để xác định a, b, c .

Một số giả thiết thường gặp ở bước này và cách xử lí.

• Parabol đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Rightarrow y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.

• Parabol có trục đối xứng $x = x_0 \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}$.

• Parabol có đỉnh $I(x_0; y_0) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$.

• Parabol có giá trị nhỏ nhất (hoặc giá trị lớn nhất) bằng $y_0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$
 (hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$).

Bước 3: Kết luận.

Ví dụ 10. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 3$, biết rằng parabol đi qua hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-2; 11)$.

Lời giải. Parabol $(P) : y = ax^2 + bx + 3$ ($a \neq 0$). Ta có $c = 3$.

Vì (P) đi qua $A(1; 2)$ nên $2 = a + b + 3 \Leftrightarrow a + b = -1$ (1).

Vì (P) đi qua $B(-2; 11)$ nên $11 = 4a - 2b + 3 \Leftrightarrow 4a - 2b = 8$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} a + b = -1 \\ 4a - 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$.

Vậy parabol $(P) : y = x^2 - 2x + 3$.

Ví dụ 11. Cho parabol $(P) : y = -x^2 + bx + c$. Xác định b, c biết (P) đi qua điểm $M(-2; 4)$ và có trục đối xứng $x = -2$.

Lời giải. Parabol $(P) : y = -x^2 + bx + c$. Ta có $a = -1$.

Vì (P) có trục đối xứng $x = -2$ nên $-\frac{b}{2a} = -2 \Leftrightarrow b = 4a = 4 \cdot (-1) = -4$.

Vì $M(-2; 4) \in (P)$ nên $4 = -(-2)^2 + b \cdot (-2) + c \Leftrightarrow 4 = -4 - 2b + c \Leftrightarrow -2b + c = 8$. Mà $b = -4$ nên $8 + c = 8 \Leftrightarrow c = 0$.

Vậy $(P) : y = -x^2 - 4x$.

Ví dụ 12. Cho parabol $(P) : y = ax^2 - 2x + c$. Xác định parabol (P) biết (P) có đỉnh $I(1; -3)$.

Lời giải. Parabol $(P) : y = ax^2 - 2x + c$. Ta có $b = -2$.

Cách 1: Vì (P) có đỉnh $I(1; -3)$ nên (P) có trục đối xứng $x = 1$.

Khi đó $-\frac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{2a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$.

Hơn nữa, vì đỉnh $I(1; -3) \in (P)$ nên $-3 = 1 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + c \Leftrightarrow c = -2$. Vậy $(P) : y = x^2 - 2x - 2$.

Cách 2: Vì (P) có đỉnh $I(1; -3)$ nên $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ -\frac{\Delta}{4a} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b^2 - 4ac = 12a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -2a \\ (-2)^2 - 4ac = 12a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 4 - 4c = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -2 \end{cases}$. Vậy $(P) : y = x^2 - 2x - 2$.

Ví dụ 13. Cho parabol $(P) : y = ax^2 + bx + c$. Xác định a, b, c biết (P) có giá trị nhỏ nhất bằng -5 và đi qua hai điểm $M(1; -1), N(0; 4)$.

Lời giải. Parabol $(P) : y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Vì $M(1; -1) \in (P)$ nên $-1 = a + b + c$ (1).

Vì $N(0; 4) \in (P)$ nên $4 = c$ (2).

Vì (P) có giá trị nhỏ nhất bằng -5 nên $\begin{cases} a > 0 \\ -\frac{\Delta}{4a} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 4ac = 20a \end{cases}$ (3).

Từ (1), (2) và (3), ta có $\begin{cases} a + b + 4 = -1 \\ b^2 - 16a = 20a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -5 \\ b^2 - 36a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 - b \\ b^2 - 36(-5 - b) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 - b \\ b^2 + 36b + 180 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6 \\ a = 1 \text{ (nhận)} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b = -30 \\ a = 25 \text{ (nhận)} \end{cases}$.

Vậy $(P_1) : y = x^2 - 6x + 4$ và $(P_2) : y = 25x^2 - 30x + 4$.

Ví dụ 14. Cho hàm số $y = x^2 - mx + m + 1$ với $m \in \mathbb{R}$. Xác định m để đồ thị hàm số là parabol có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x$ sao cho hoành độ đỉnh không âm.

Lời giải. Với giá trị m cố định, gọi $I(x_0; y_0)$ là đỉnh của parabol ($x_0 \geq 0$).

Khi đó $\begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{m}{2} \\ y_0 = x_0^2 - mx_0 + m + 1 \end{cases}$. Suy ra $y_0 = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + m + 1$.

Vì đỉnh I nằm trên đường thẳng $y = x$ nên $y_0 = x_0 \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + m + 1 = \frac{m}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 + \sqrt{5} \\ m = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$.

Vì $x_0 \geq 0$ nên $m \geq 0$, do đó $m = 1 + \sqrt{5}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Cho parabol $(P) : y = ax^2 + bx + 4$. Xác định a, b biết:

- (P) đi qua hai điểm $M(-1; 7)$ và $N(-4; 4)$.
- (P) có trục đối xứng $x = 3$ và đi qua điểm $A(2; -4)$.
- (P) có tung độ đỉnh bằng $\frac{9}{2}$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 4.

Lời giải.

a) Thay tọa độ điểm M, N vào (P) ta có hệ phương trình $\begin{cases} a - b = 3 \\ 16a - 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \end{cases}$.

b) (P) có trục đối xứng $x = 3$ nên $b = -6a$.

Mà $A(2; -4) \in (P)$ nên $-4 = 4a + 2b + 4 \Leftrightarrow -8a = -8 \Leftrightarrow a = 1$. Suy ra $b = -6$.

$$c) \text{ Hoành độ đỉnh } x = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow b^2 - 4ac = -18a \Leftrightarrow b^2 = -2a \Leftrightarrow a = -\frac{b^2}{2}.$$

$$(P) \text{ cắt } Ox \text{ tại điểm có tọa độ } (4;0) \text{ nên } 0 = 16a + 4b + 4 \Leftrightarrow -8b^2 + 4b + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Với } b = 1 \text{ thì } a = -\frac{1}{2}. \text{ Với } b = -\frac{1}{2} \text{ thì } a = -\frac{1}{8}.$$

Bài 12. Cho parabol $(P) : y = -x^2 + bx + c$. Xác định b, c biết:

- (P) có đỉnh $I(1;4)$.
- (P) đối xứng qua trục tung và có giá trị lớn nhất bằng 3.
- (P) có hoành độ đỉnh bằng tung độ đỉnh và đi qua gốc tọa độ O .

Lời giải.

$$a) \text{ Vì } (P) \text{ có đỉnh } I(1;4) \text{ nên } \begin{cases} -\frac{b}{2 \cdot (-1)} = 1 \\ 4 = -1 + b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases}.$$

$$b) \text{ Vì } (P) \text{ đối xứng qua trục tung nên } -\frac{b}{-2} = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

$$\text{Mà } (P) \text{ có giá trị lớn nhất bằng 3 nên } b^2 - 4ac = -12a \Leftrightarrow 4c = 12 \Leftrightarrow c = 3.$$

$$c) \text{ Vì } (P) \text{ đi qua gốc tọa độ } O \text{ nên } c = 0.$$

$$\text{Mà hoành độ đỉnh bằng tung độ đỉnh nên } -\frac{b}{-2} = -\frac{b^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{-4} \Leftrightarrow 2b = b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Bài 13. Cho parabol $(P) : y = ax^2 + 3x + c$. Xác định a, c biết:

- (P) có hoành độ đỉnh bằng -1 và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4.
- (P) có tung độ đỉnh gấp 2 lần hoành độ đỉnh và đi qua điểm $A(1;4)$.
- (P) đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{9}{2}$ và đi qua gốc tọa độ O .

Lời giải.

$$a) \text{ Vì } (P) \text{ cắt trục tung tại điểm } (0;4) \text{ nên } c = 4.$$

$$\text{Mà } (P) \text{ có hoành độ đỉnh bằng } -1 \text{ nên } -\frac{3}{2a} = -1 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

$$b) \text{ Vì } A(1;4) \in (P) \text{ nên } a + 3 + c = 4 \Leftrightarrow a + c = 1 \Leftrightarrow a = 1 - c \quad (1).$$

$$\text{Mà } (P) \text{ có tung độ đỉnh gấp 2 lần hoành độ đỉnh nên } \frac{-\Delta}{4a} = 2 \cdot \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow \frac{9 - 4ac}{4a} = \frac{3}{a}$$

$$\Leftrightarrow 9a - 4a^2c = 12a \Leftrightarrow 4a^2c = -3a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ (loại)} \\ 4ac = -3 \quad (2) \end{cases}.$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta có } 4(1 - c)c = -3 \Leftrightarrow 4c^2 - 4c - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \\ c = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$c) \text{ Vì } O \in (P) \text{ nên } c = 0.$$

$$\text{Mà } (P) \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } -\frac{9}{2} \text{ nên } \begin{cases} -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9}{2} \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Bài 14. Xác định parabol (P) biết:

- a) (P) đi qua ba điểm $A(1; 7)$, $B(0; 5)$ và $C(4; 1)$. $(-x^2 + 3x + 5)$
 b) (P) có trục đối xứng $x = 3$ và đi qua hai điểm $M(-1; 0)$, $N(0; 7)$.
 c) (P) có đỉnh nằm trên trục hoành và đi qua hai điểm $H(-2; 1)$, $K(0; 9)$.

Lời giải.

- a) (P) đi qua ba điểm $A(1; 7)$, $B(0; 5)$ và $C(4; 1)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b + c = 7 \\ c = 5 \\ 16a + 4b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = 5 \end{cases}.$$

- b) (P) có trục đối xứng $x = 3$ nên $b = -6a$.

Mà (P) đi qua hai điểm $M(-1; 0)$, $N(0; 7)$ nên $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 7 \\ 7a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 7 \\ a = -1 \end{cases}$. Suy ra $b = 6$.

- c) Vì (P) có đỉnh nằm trên trục hoành nên $-\frac{\Delta}{4a} = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0$.

Mà (P) đi qua $H(-2; 1)$, $K(0; 9)$ nên $\begin{cases} 4a - 2b + c = 1 \\ c = 9 \end{cases}$.

$$\text{Do đó ta có } \begin{cases} b^2 - 36a = 0 \\ 4a - 2b = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{b-4}{2} \\ b^2 - 18b + 72 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 12 \\ a = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b = 6 \\ a = 1 \end{cases}.$$

Bài 15. Cho parabol $(P) : y = ax^2 - 2ax + 2a$ với $(a \neq 0)$. Xác định a để (P) có đỉnh nằm trên đường thẳng $2x - y = 0$.

Lời giải. (P) có đỉnh $I(1; a)$. Vì I nằm trên đường thẳng $2x - y = 0$ nên $2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Bài 16. Xác định parabol (P) biết (P) có đỉnh I cách đều hai trục tọa độ, đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ và nhận $x = \frac{1}{2}$ làm trục đối xứng.

Lời giải. Giả sử $(P) : y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Vì (P) đi qua điểm O nên $c = 0$.

Vì (P) nhận $x = \frac{1}{2}$ làm trục đối xứng nên $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = -a$.

Vì (P) cách đều hai trục tọa độ nên $\left| -\frac{b}{2a} \right| = \left| -\frac{\Delta}{4a} \right| \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|b|}{4} \Leftrightarrow |b| = 2 \Leftrightarrow b = \pm 2$.

Với $b = 2$ thì $a = -2$, với $b = -2$ thì $a = 2$.

Bài 17. Xác định parabol (P) biết (P) đi qua điểm $A(0; 1)$ và có đỉnh I thuộc đường thẳng $x + y - 3 = 0$ sao cho độ dài đoạn IM ngắn nhất, biết $M(-1; 3)$.

Lời giải. Giả sử $(P) : y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Gọi $I(x_0; y_0)$ là đỉnh của parabol. Vì I thuộc đường thẳng $x + y - 3 = 0$ nên $y_0 = 3 - x_0$. Do đó

$$IM = \sqrt{(x_0 + 1)^2 + (y_0 - 3)^2} = \sqrt{(x_0 + 1)^2 + (-x_0)^2} = \sqrt{2x_0^2 + 2x_0 + 1}.$$

Vì $2x_0^2 + 2x_0 + 1 = 2\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$, nên IM ngắn nhất khi $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Suy ra $y_0 = \frac{7}{2}$. Nên (P) có đỉnh $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

$$\text{Vì } A(0;1) \in (P) \text{ nên } c = 1. \text{ Hơn nữa ta có } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \\ -\frac{\Delta}{4a} = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ b^2 - 4a = -14a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ b^2 = -10b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \text{ (loại)} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b = -10 \\ a = -10 \end{cases}.$$

Dạng 5. Các bài toán liên quan đồ thị hàm số trị tuyệt đối của một hàm bậc hai

Xét hàm số $y = |ax^2 + bx + c|$ có đồ thị là (P_1) . Để ý rằng

$$y = |ax^2 + bx + c| = \begin{cases} ax^2 + bx + c \text{ nếu } ax^2 + bx + c \geq 0 \\ -(ax^2 + bx + c) \text{ nếu } ax^2 + bx + c \leq 0, \end{cases}$$

nên để vẽ (P_1) , ta làm như sau.

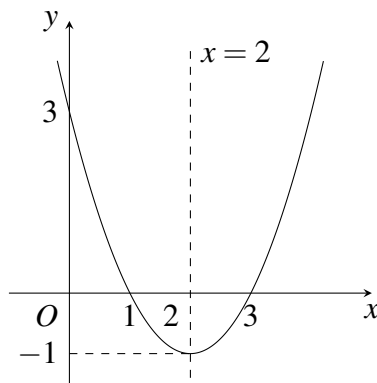
- Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = ax^2 + bx + c$.
- Giữ nguyên phần của (P) mà ở phía trên trục hoành.
- Lấy đối xứng qua trục hoành đối với phần của (P) mà ở dưới trục hoành (sau đó bỏ đi phần của (P) mà ở dưới trục hoành).

Ví dụ 15. Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $|x^2 - 4x + 3| = m$.

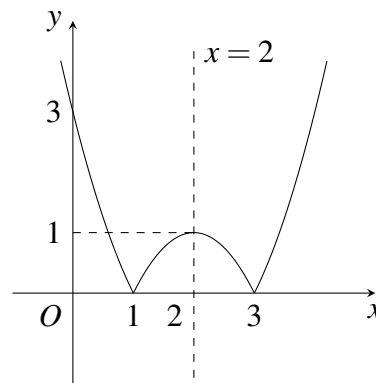
Lời giải. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ với đường thẳng (nằm ngang) $y = m$.

Ta vẽ $(P) : y = x^2 - 4x + 3$ (Hình 1). Từ đó, ta suy ra đồ thị (P_1) của hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ (Hình 2). Từ đồ thị (P_2) , ta có kết luận như sau.

- $m < 0$: phương trình vô nghiệm.
- $m = 0$ hoặc $m > 1$: hai nghiệm.
- $0 < m < 1$: 4 nghiệm.
- $m = 1$: 3 nghiệm.



Hình 1



Hình 2

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 18. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $|x^2 + 3x| = m$.

Lời giải. Giải tương tự ví dụ 1.

Đáp số:

- a) $m < 0$: phương trình vô nghiệm.
- b) $m = 0$ hoặc $m > \frac{9}{4}$: hai nghiệm.
- c) $0 < m < \frac{9}{4}$: 4 nghiệm.
- d) $m = \frac{9}{4}$: 3 nghiệm.

Dạng 6. Các bài toán liên quan đồ thị hàm số đối với trị tuyệt đối của biến

Xét hàm số $y = ax^2 + b|x| + c$. Khi $x \geq 0$ hoặc $x \leq 0$, hàm số trở thành hàm số bậc hai. Hơn nữa, hàm số đã cho là hàm số chẵn, nên đồ thị của nó nhận trục tung làm trục đối xứng.

Do đó, ta có thể vẽ đồ thị (P_2) của hàm số $y = ax^2 + b|x| + c$ như sau.

- a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = ax^2 + bx + c$.
- b) Bỏ phần của (P) ở bên trái trục tung. Sau đó lấy đối xứng qua trục tung đối với phần của (P) mà ở bên phải trục tung.

Lưu ý: Ta có thể vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + b|x| + c$ từ đồ thị hàm số $y = ax^2 - bx + c$.

Ví dụ 16. a) Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$.

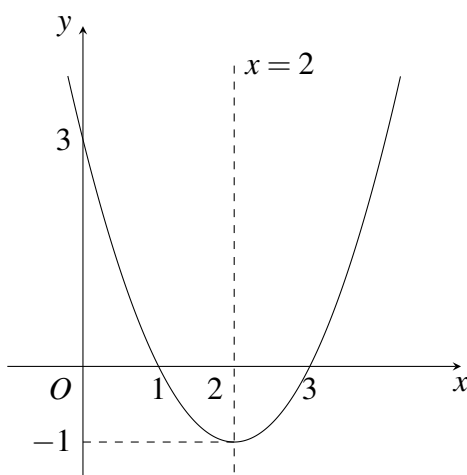
b) Tìm m để phương trình $x^2 - 4|x| + 3 = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Lời giải. a) Xem hình 3.

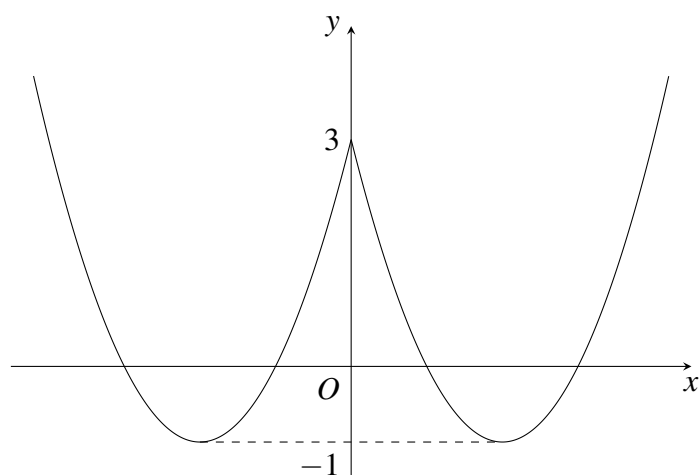
b) Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$ và đường thẳng $y = m$.

Từ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ ở câu a), ta suy ra đồ thị của hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$ như ở hình 4.

Từ đó, ta suy ra tất cả các giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $-1 < m < 3$.



Hình 3



Hình 4

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 19. Tìm m để phương trình $2x^2 - |x| = m$ có đúng 3 nghiệm.

Lời giải. Giải tương tự ví dụ 2.

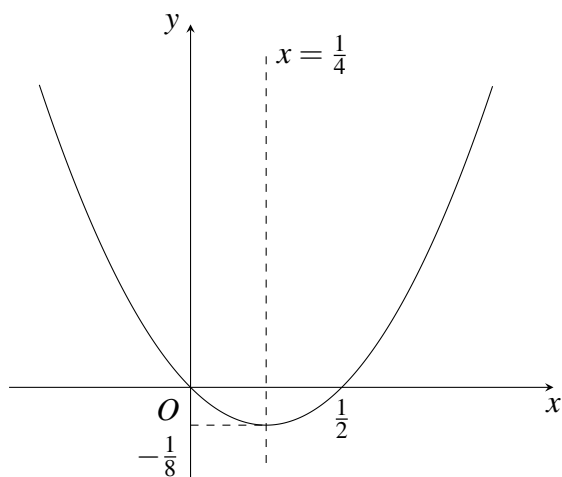
Đáp số: $m = 0$.

Bài 20. Hỏi phương trình $|2x^2 - |x|| = m$ có tối đa bao nhiêu nghiệm?

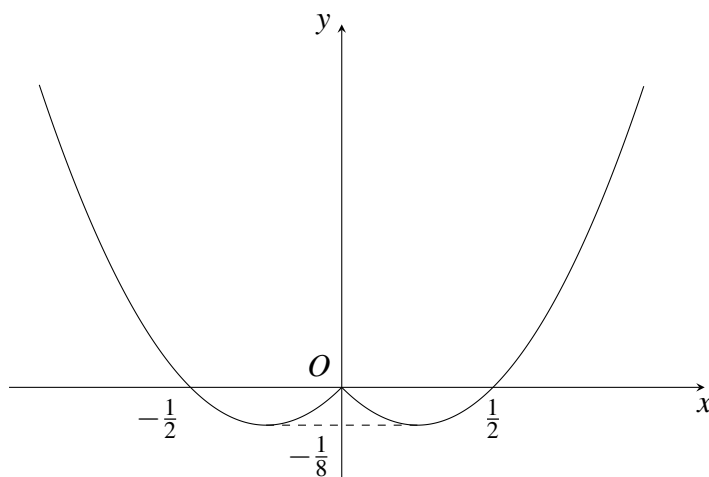
Lời giải. Ta vẽ đồ thị hàm số $y = |2x^2 - |x||$.

Trước hết, vẽ đồ thị hàm số $y = 2x^2 - x$ (hình 5), rồi suy ra đồ thị hàm số $y = 2x^2 - |x|$ (hình 6), từ đó, vẽ được đồ thị hàm số $y = |2x^2 - |x||$ (hình 7).

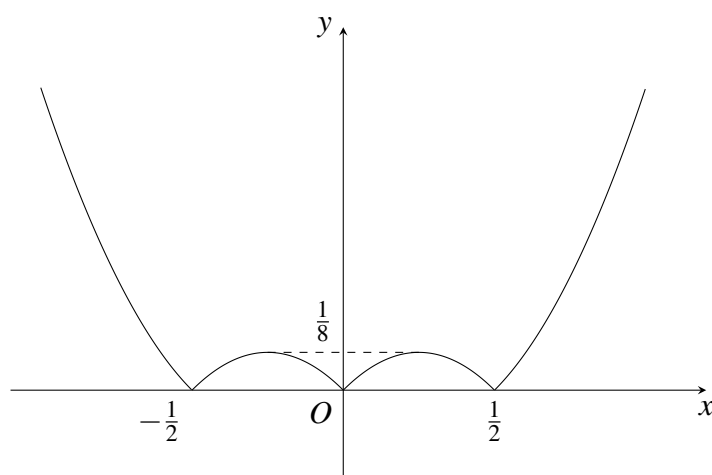
Đáp số: phương trình đã cho có tối đa 6 nghiệm.



Hình 5



Hình 6



Hình 7

Dạng 7. Tính đơn điệu của hàm bậc hai

Sự biến thiên của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến (*giảm*) trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và đồng biến (*tăng*) trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

- Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến (*tăng*) trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến (*giảm*) trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

Ví dụ 17. Xét sự biến thiên của hàm số $y = x^2 - 2x + 3$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $x = -\frac{b}{2a} = 1$ và $y = -\frac{\Delta}{4a} = -4$.
- Do $a = 1 > 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	-4	$+\infty$

Ví dụ 18. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = -x^2 + 2x - 3$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $x = -\frac{b}{2a} = 1$.
- Do $a = -1 < 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Ví dụ 19. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = x^2 + 2|x|$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $y = x^2 + 2|x| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{khi } x < 0 \\ x^2 + 2x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$
- Mặt khác, hàm số $y = x^2 - 2x$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$, hàm số $y = x^2 + 2x$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- Từ đó suy ra hàm số $y = x^2 + 2|x|$ nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x \geq 0$.

Ví dụ 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + (m-3)x + m$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3-m}{2}$.
- Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\frac{3-m}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 3-m \leq 2 \Leftrightarrow m \geq 1.$$

- Vậy $m \geq 1$.

Ví dụ 21. Cho hàm số $y = (m-1)x^2 + 4x - 5$ với $m \neq 1$. Tìm m sao cho hàm số đồng biến trên $(1; 7)$.

Lời giải.

- Với $m > 1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-2}{m-1}; +\infty\right)$. Vậy, để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 7)$ thì $1 \geq \frac{-2}{m-1} \Leftrightarrow m \geq -1$. Kết hợp điều kiện ta được $m > 1$.
- Với $m < 1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{-2}{m-1}\right)$. Vậy, để hàm số đồng biến trên $(1; 7)$ thì $7 \leq \frac{-2}{m-1} \Leftrightarrow 7m-7 \geq -2 \Leftrightarrow m \geq \frac{5}{7}$.

Tóm lại $m \in \left[\frac{5}{7}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 21. Xét sự biến thiên của hàm số $y = x^2 - 6x - 5$.

Lời giải. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Bài 22. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = -x^2 + 2017$.

Lời giải. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Bài 23. Xác định các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = x|x - 2|$.

Lời giải.

- Ta có $y = x|x - 2| = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{khi } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$.

- Mặt khác, hàm số $y = -x^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$, hàm số $y = x^2 - 2x$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Từ đó suy ra

+ Hàm số $y = x|x - 2|$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $[2; +\infty)$.

+ Hàm số $y = x|x - 2|$ nghịch biến trên các khoảng $(1; 2)$.

Bài 24. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^2 + (2m - 3)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Ta có $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2m - 3}{2}$.

- Do $a = -1 < 0$, nên để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$ khi và chỉ khi

$$-\frac{b}{2a} = \frac{2m - 3}{2} \geq -5 \Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{2}.$$

- Vậy $m \geq -\frac{7}{2}$.

Bài 25. Cho hàm số $y = (m - 1)x^2 + 4x - 5$ với $m \neq 1$. Tìm m sao cho hàm số nghịch biến trên $(-5; 2)$.

Lời giải.

• Với $m < 1$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-2}{m - 1}; +\infty\right)$. Vậy, để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-5; 2)$ thì $-5 \geq \frac{-2}{m - 1} \Leftrightarrow -5m + 5 \leq -2 \Leftrightarrow m \geq \frac{7}{5}$, điều này mâu thuẫn với điều kiện.

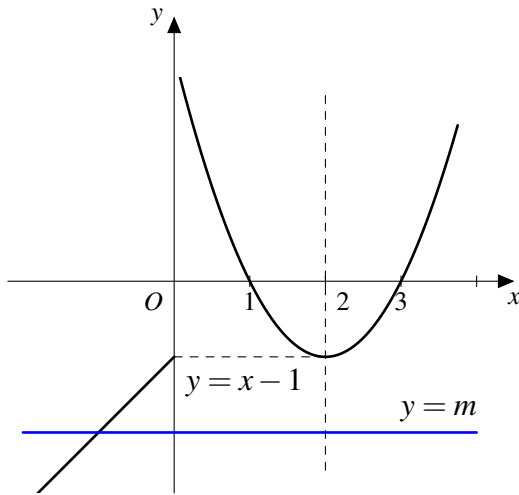
• Với $m > 1$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{-2}{m - 1}\right)$. Vậy, để hàm số nghịch biến trên $(-5; 2)$ thì $2 \leq \frac{-2}{m - 1} \Leftrightarrow 2m - 2 \leq -2 \Leftrightarrow m \leq 0$, điều này mâu thuẫn với điều kiện.

Vậy không tồn tại giá trị của m .

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 26. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{khi } x \geq 0 \\ x - 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $f(x) = m$.

Lời giải.



Dựa vào hình vẽ ta có: $m \leq -1$: phương trình có 1 nghiệm; $m > -1$: phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Bài 27. Cho hàm số $y = x^2 - 2mx + m^2 - 1$ có đồ thị là (C_m) . Chứng minh rằng (C_m) luôn cắt xx' tại 2 điểm phân biệt A, B . Tìm m để A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O .

Lời giải. Để (C_m) luôn cắt Ox tại 2 điểm phân biệt thì $\Delta > 0, \forall m$. Để A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O thì $m = 0$.

Bài 28. Cho hàm số $y = x^2 - 4mx + 4m + 3$ (P_m) với $m \in \mathbb{R}$. Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = x - 1$ và đi qua điểm cố định của họ parabol (P_m).

Lời giải. Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà họ parabol (P_m) luôn đi qua.

Khi đó $y_0 = x_0^2 - 4mx_0 + 4m + 3$, với mọi m .

Suy ra $y_0 - x_0^2 - 3 = 4m(1 - x_0)$, với mọi m .

Nên $\begin{cases} 1 - x_0 = 0 \\ y_0 - x_0^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 4 \end{cases}$. Vậy $M(1; 4)$.

Vì d vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = x - 1$ nên $d: y = -x + b$, với $b \neq -1$. Mà $M(1; 4) \in d$ nên $4 = -1 + b \Leftrightarrow b = 5$. Vậy $d: y = -x + 5$.

Bài 29. Cho hàm số $y = x^2 - (m - 1)x + m - 2$ (P_m) với $m \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của m để khoảng cách từ đỉnh của (P_m) đến trục hoành bằng $\frac{1}{2}$.

Lời giải. Với m tùy ý, gọi $I(x_0; y_0)$ là đỉnh của (P_m).

Khi đó khoảng cách từ đỉnh của (P_m) đến trục hoành bằng $|y_0| = \left| \frac{(m - 1)^2 - 4(m - 2)}{4} \right|$.

Theo giả thiết $|y_0| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{(m - 1)^2 - 4(m - 2)}{4} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |m^2 - 6m + 9| = 2 \Leftrightarrow m = 7$ hoặc $m = -1$.

Bài 30. a) Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 4x + 3$.

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^2 - 4|x| + 3 = m$.

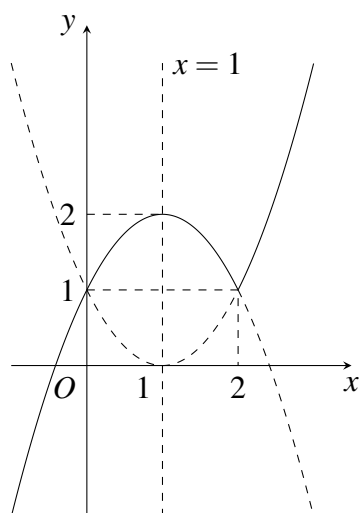
Lời giải. Gợi ý câu b). Ở bên trái trục tung, đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$ cũng chính là đồ thị của hàm số $y = x^2 + 4x + 3$. Hơn nữa, đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$ nhận trục tung làm trục đối xứng.

Bài 31. Tìm m để phương trình $x|x - 1| = m$ có đúng 2 nghiệm.

Lời giải. Số nghiệm của phương trình bằng với số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x|x - 2| + 1$ và đường thẳng $y = m$.

Đồ thị hàm số $y = x|x - 1|$ bao gồm hai phần: phần của parabol $y = x(x - 2) + 1$ với $x \geq 2$, và phần của parabol $y = x(2 - x) + 1$ với $x \leq 2$ (đường nét liền trong hình 6).

Từ đó, ta suy ra giá trị m phải tìm là $m = 1$ hoặc $m = 2$.



Hình 8

§4. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG II

I. Đề số 1a

Bài 1. a) Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x - 3}$.

b) Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = x^3 - 3x$.

Lời giải. a) Điều kiện xác định là $2x - 3 \geq 0$ 0,5 điểm

$\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ 0,25 điểm

Vậy tập xác định là $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ 0,25 điểm

b) Tập xác định là $\mathbb{R}$ 0,25 điểm

Ta có $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ 0,25 điểm

Đặt $y = f(x) = x^3 - 3x$, ta có $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ 0,5 điểm.

Bài 2. Cho hàm số $y = 2x + m(x + 2)$ có đồ thị (d) . Tìm m để đường thẳng (d)

a) Đi qua gốc tọa độ.

b) Song song với đường thẳng $(d') : y = 3x - 2$.

Lời giải. a) Ta có $0 = 2 \cdot 0 + m(0 + 2)$ 0,5 điểm

$\Leftrightarrow m = 0$ 0,5 điểm

b) Ta có $y = (m + 2)x + 2m$ 0,5 điểm

$d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 = 3 \\ 2m \neq -2 \end{cases}$ 0,25 điểm

$\Leftrightarrow m = 1$ 0,25 điểm

Bài 3. Cho hàm số $y = x^2 - 4x$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x|$.

Lời giải. a) Tập xác định $\mathbb{R}$ 0,25 điểm

Chiều biến thiên: hàm số nghịch biến trên miền $(-\infty; 2)$ và đồng biến trên miền $(2; +\infty)$... 0,25 điểm

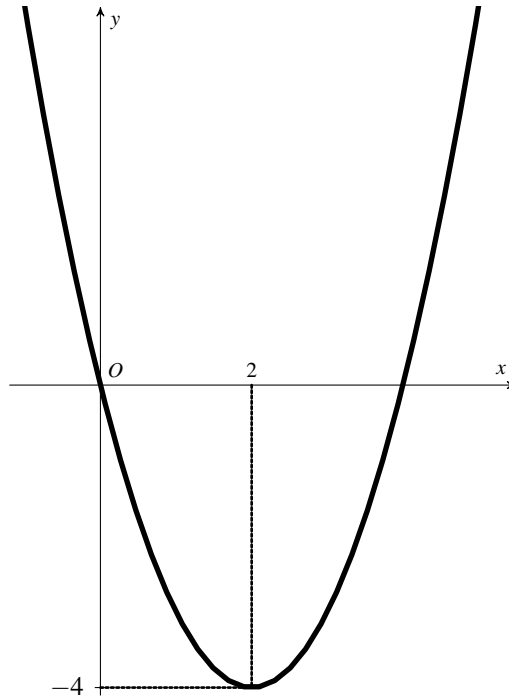
Bảng biến thiên 0,25 điểm

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-4	$+\infty$

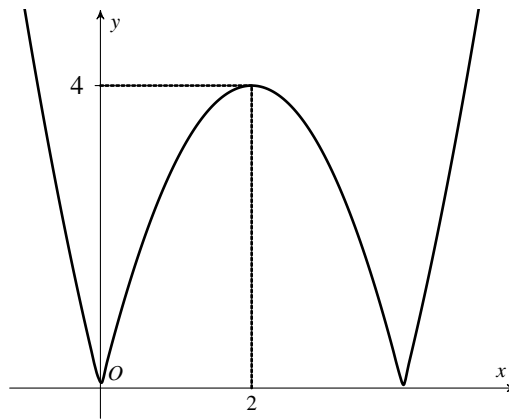
Đồ thị

Tọa độ đỉnh $I(2; -4)$, trục đối xứng $x = 2$ 0,25 điểm

Vẽ 0,25 điểm



b) 0,5 điểm



Bài 4. Xác định Pa-ra-bol $(P) : y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $M(-1; 1)$ và có tọa độ đỉnh là $I(1; -3)$.

Lời giải. (P) qua M nên $a - b + c = 1$ 0,25 điểm

Hoành độ đỉnh $-\frac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow b = -2a$ 0,25 điểm

(P) qua I nên $a + b + c = -3$ 0,25 điểm

Ta có hệ $\begin{cases} a - b + c = 1 \\ b = -2a \\ a + b + c = -3 \end{cases}$ 0,25 điểm

Suy ra $\begin{cases} 3a + c = 1 \\ -a + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -2 \end{cases}$ 0,5 điểm

Suy ra $b = -2$. Vậy $y = x^2 - 2x - 2$ 0,5 điểm

Bài 5. a) Tìm m để hàm số $y = \frac{2-5x}{x^2-4x+2m-1}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng đỉnh của pa-ra-bol $(P) : y = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 5$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định. Tìm đường thẳng cố định đó.

Lời giải.

a) Để hàm số có tập định trên $\mathbb{R}$ thì không tồn tại x sao cho $x^2 - 4x + 2m - 1 = 0$ (*) 0,25 điểm

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + 2m - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 5 - 2m$ 0,25 điểm

(*) vô nghiệm khi $(x-2)^2 = 5 - 2m$ vô nghiệm, suy ra $5 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{5}{2}$ 0,5 điểm

- b) Tọa độ đỉnh $(x_0; y_0) = (m+1; -2m-6)$ 0,25 điểm
- Ta có $\begin{cases} x_0 = m+1 \\ y_0 = -2m-6 \end{cases}$ 0,25 điểm
- Suy ra $\begin{cases} m = x_0 - 1 \\ y_0 = -2m-6 \end{cases}$ 0,25 điểm
- Do đó $y_0 = -2x_0 - 4$. Vậy đường thẳng cố định là $y = -2x - 4$ 0,25 điểm

II. Đề số 1b

Bài 1. a) Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1-3x}$.

b) Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = x^4 + 5x^2$.

Lời giải. a) Điều kiện xác định là $1-3x \geq 0$ 0,5 điểm

$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$ 0,25 điểm

Vậy $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$ 0,25 điểm

b) Tập xác định là $\mathbb{R}$ 0,25 điểm

Ta có $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ 0,25 điểm

Đặt $y = f(x) = x^4 + 5x^2$, ta có $f(-x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn 0,5 điểm.

Bài 2. Cho hàm số $y = 2x - m(x+3)$ có đồ thị (d) . Tìm m để đường thẳng (d)

a) Đi qua gốc tọa độ.

b) Vuông góc với đường thẳng $(d') : y = \frac{1}{2}x + 3$.

Lời giải. a) Ta có $0 = 2 \cdot 0 - m(0+3)$ 0,5 điểm

$\Leftrightarrow m = 0$ 0,5 điểm

b) Ta có $y = (2-m)x - 3m$ 0,5 điểm

$d \perp d' \Leftrightarrow (2-m) \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 4$ 0,5 điểm

Bài 3. Cho hàm số $y = -x^2 + 4x$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4|x|$.

Lời giải. a) Tập xác định $\mathbb{R}$ 0,25 điểm

Chiều biến thiên: Hàm số đồng biến trên miền $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên $(2; +\infty)$ 0,25 điểm

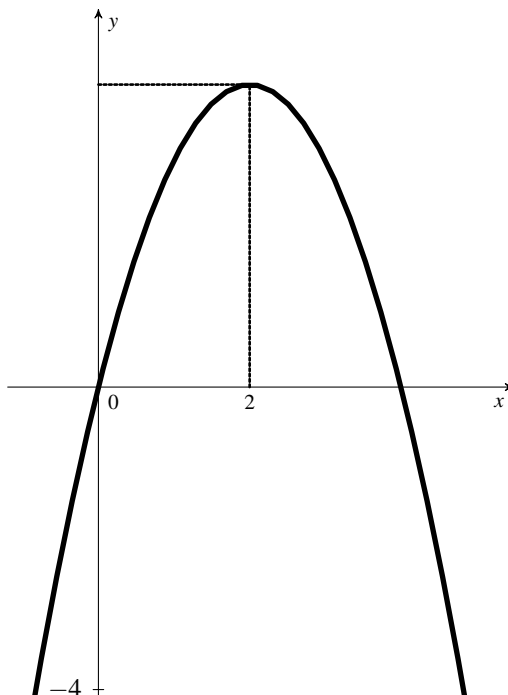
Bảng biến thiên 0,5 điểm

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	4	$-\infty$

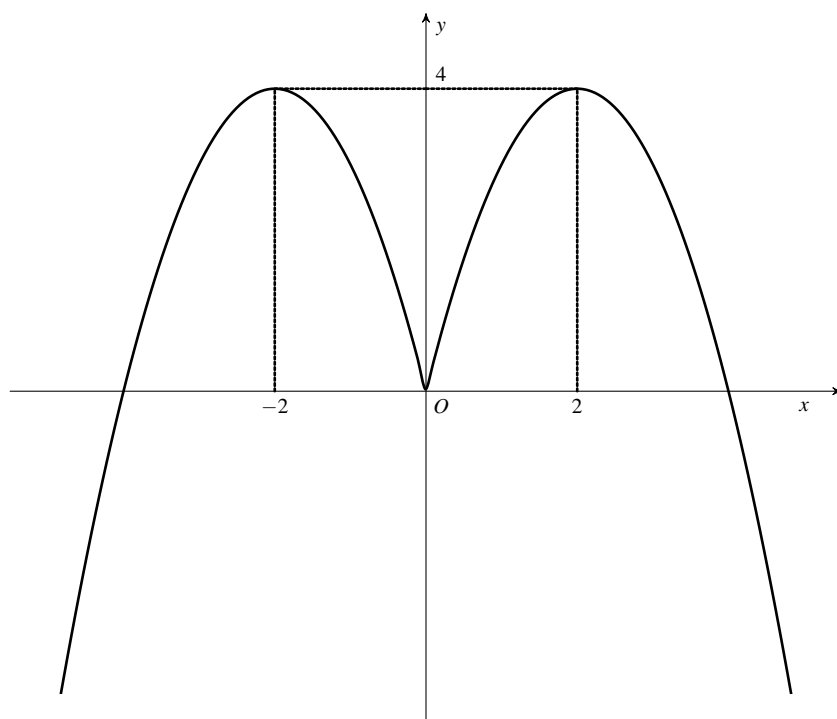
Đồ thị

Tọa độ đỉnh $I(2;4)$, trục đối xứng $x = 2$ 0,25 điểm

Vẽ đồ thị 0,25 điểm



b) 0,5 điểm



Bài 4. Xác định Pa-ra-bol $(P) : y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $M(1; -1)$ và có tọa độ đỉnh là $I(2; -2)$.

Lời giải. (P) qua M nên $a + b + c = -1$ 0,25 điểm

Hoành độ đỉnh $-\frac{b}{2a} = 2 \Leftrightarrow b = -4a$ 0,25 điểm

(P) qua I nên $4a + 2b + c = -2$ 0,25 điểm

Ta có hệ $\begin{cases} a + b + c = -1 \\ b = -4a \\ 4a + 2b + c = -2 \end{cases}$ 0,25 điểm

Suy ra $\begin{cases} -3a + c = 1 \\ -4a + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \end{cases}$ 0,5 điểm

Suy ra $b = -4$. Vậy $y = x^2 - 4x + 2$ 0,5 điểm

Bài 5. a) Tìm m để hàm số $y = \frac{x+4}{x^2+2x+m-3}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng đỉnh của pa-ra-bol $(P) : y = x^2 - 2(m-2)x + m^2 + 7$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định. Tìm đường thẳng cố định đó.

Lời giải.

a) Để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ thì không tồn tại x sao cho $x^2 + x + m - 3 = 0$ (*) 0,25 điểm

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + m - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 - m$ 0,25 điểm

(*) vô nghiệm khi $(x+1)^2 = 4 - m$ vô nghiệm, suy ra $4 - m < 0 \Leftrightarrow m > 4$ 0,5 điểm

b) Tọa độ đỉnh $(x_0; y_0) = (m-2; 4m+3)$ 0,25 điểm

Ta có $\begin{cases} x_0 = m-2 \\ y_0 = 4m+3 \end{cases}$ 0,25 điểm

Suy ra $\begin{cases} m = x_0 + 2 \\ y_0 = 4m + 3 \end{cases}$ 0,25 điểm

Do đó $y_0 = 4x_0 + 11$. Vậy đường thẳng cố định là $y = 4x + 11$ 0,25 điểm

III. Đề số 2a

Bài 1. Tìm tập xác định các hàm số

a) $y = \frac{x+2}{x^2-4x+3}$

b) $y = \sqrt{4-3x} + \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

Lời giải.

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$ 1,00.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$ 0,50.

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 4-3x \geq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x \leq \frac{4}{3}$ 1,00.

Tập xác định $D = \left(-3; \frac{4}{3}\right]$ 0,50.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d là đồ thị của hàm số $y = kx + k^2 - 3$.

a) Tìm k để d đi qua gốc tọa độ.

b) Tìm k để d song song với đường thẳng $d' : y = -2x + 9$.

Lời giải.

a) Vì d đi qua gốc tọa độ nên $k^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{3}$ 0,50.

Vậy $k = -\sqrt{3}; k = \sqrt{3}$ 0,50.

b) Vì d song song với đường thẳng d' nên $k = -2$ 0,50.

Thay vào ta được đường thẳng $y = -2x + 1$ thỏa yêu cầu. Vậy $k = -2$ 0,50.

Bài 3. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

a) Biết (P) là đồ thị của hàm số đã cho có đỉnh $S(3; -4)$ và (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 5. Tìm a, b, c .

b) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải.

a) Từ giả thiết ta có $\begin{cases} c = 5 \\ -\frac{b}{2a} = 3 \\ 9a + 3b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 5 \end{cases} \dots\dots\dots 1,0.$

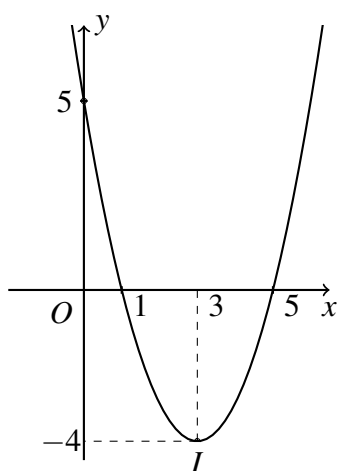
Vậy $a = 1; b = -6; c = 5 \dots\dots\dots 0,50.$

b) Bảng biến thiên

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y	$+\infty$	-4	$+\infty$

$\dots\dots\dots 1,00.$

Đồ thị



$\dots\dots\dots 0,50.$

Bài 4. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Lời giải.

a) Tập xác định $D = [0; 1) \cup (1; +\infty) \dots\dots\dots 0,50.$

b) Xét trên nửa khoảng $[0; 1)$. Lấy x_1, x_2 bất kỳ thỏa mãn $0 \leq x_1 < x_2 < 1$ ta có

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{(\sqrt{x_1} - 1)(\sqrt{x_2} - 1)} > 0$$

nên hàm số nghịch biến trên $[0; 1) \dots\dots\dots 0,25.$

c) Xét trên nửa khoảng $(1; +\infty)$. Lấy x_1, x_2 bất kỳ thỏa mãn $1 < x_1 < x_2$ ta có

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{(\sqrt{x_1} - 1)(\sqrt{x_2} - 1)} > 0$$

nên hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty) \dots\dots\dots 0,25.$

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^3 + x^2 + x}{x^4 + 2x^2 + 1}$.

Lời giải.

a) Viết lại hàm số đã cho ta được $y = \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} + \frac{x}{x^2 + 1} \dots\dots\dots 0,25.$

- b) Đặt $t = \frac{x}{x^2 + 1}$, ta được $t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ 0,25.
- c) Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(t) = t^2 + t$ với $t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ 0,25.
- d) Vì $f(t)$ đồng biến trên $t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ nên $\max f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$; đạt được khi $x = 1$ 0,25.

IV. Đề số 2b

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

- a) $y = \frac{1}{x-1}$;
- b) $y = \sqrt{x+3} - \frac{1}{\sqrt{2-x}}$.

Lời giải.

- a) Điều kiện $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ 0,5.
 Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 0,50.
- b) Điều kiện: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x < 2 \end{cases}$ 0,50.
 Vậy $D = [-3; 2)$ 0,50.

Bài 2. Xét sự biến thiên của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x} + 2$ trên $(0; +\infty)$.

Lời giải.

- a) Với $\forall x_1, x_2 \in (0; +\infty)$ ta xét: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dots = -\frac{1}{x_1 x_2} < 0$ 0,75.
- b) Vậy hàm số luôn nghịch biến trên $(0; +\infty)$ 0,25.

Bài 3. Cho hàm số $y = -x^2 + 2(m-3)|x| + m^2 + 2m - 4$. Hãy tìm tất cả giá trị để giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải.

- a) Ta đặt $t = |x| \geq 0$. Hàm số trở thành $y = -t^2 + 2(m-3)t + m^2 + 2m - 4$ với tập xác định là $D = [0; +\infty)$. Hoành độ đỉnh là $t_0 = m - 3$ 0,25
- b) Nếu $t_0 = m - 3 \geq 0$ thì GTLN của hàm số $y = -\frac{\Delta}{4a} = 2m^2 - 4m + 13 = 2(m-1)^2 + 11 \geq 11$ đạt được khi $m = 1$ không thỏa điều kiện. 0,25
- c) Nếu $t_0 = m - 3 < 0$ thì GTLN của hàm số $y(0) = m^2 + 2m - 4 = (m+1)^2 - 5 \geq -5$ đạt được khi $m = -1$ thỏa điều kiện. 0,25
- d) Vậy giá trị $m = -1$ là giá trị cần tìm và giá trị nhỏ nhất của giá trị lớn nhất của hàm số là $y = -5$.
 0,25

Bài 4.

- a) Xác định a và b để đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua $A(1; 2)$ và $B(-1; -4)$;

b) Xác định a và b để đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx - 1$ có đỉnh $I(-1; -2)$.

Lời giải.

- a) Đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua $A(1; 2)$ nên $a + b = 2$ 0, 25.
 Và đi qua $B(-1; -4)$ nên $-a + b = -4$ 0, 25.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a + b = 2 \\ -a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$ 0, 50.

- b) Đồ thị có trục đối xứng là $x = -\frac{b}{2a} = -1$ 0, 25.

Đồ thị đi qua $I(-1; -2)$ nên $a - b = -1$ 0, 25.

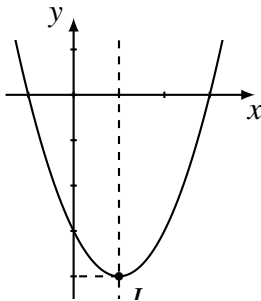
Ta có hệ phương trình $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -1 \\ a - b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ 0, 50.

Bài 5. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + m - 5$ (P_m).

- a) Vẽ đồ thị hàm số (P) khi $m = 2$;
 b) Tìm m để đồ thị (P_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho $-(x_1 + x_2) = x_1 x_2$.

Lời giải.

- a) Với $m = 2$ thì $y = x^2 - 2x - 3$ 0, 25.
 Trục đối xứng là $x = -1$.
 Tọa độ đỉnh là $I(-1; -4)$ 0, 25.
 Giao điểm với các trục tọa độ là $(-1; 0), (3; 0), (0; -3)$ 0, 25.
 Đồ thị



..... 0, 25.

- b) Ta có: $x^2 - 2x + m - 5 = 0$ 0, 25.
 $\Delta = 6 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6$ 0, 25.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = m - 5 \end{cases}$

Vậy: $-(x_1 + x_2) = x_1 x_2 \Leftrightarrow m = 3$ (nhận) 0, 50.

V. Đề số 3a

Bài 1. Xác định tính chẵn-lẻ của hàm số sau: $y = f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^{2018} + (x+1)^{2018}}}{|x-1| - |x+1|}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $|x-1| - |x+1| \neq 0$ 0, 25

Điều này tương đương với $|x-1| \neq |x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq x+1 \\ x-1 \neq -(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0$ 0, 50

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 0, 25

Ta có:

- $\forall x \in \mathcal{D} : -x \in \mathcal{D} \dots\dots\dots 0,25$
- $\forall x \in \mathcal{D} : f(-x) = \frac{\sqrt{(-x-1)^{2018} + (-x+1)^{2018}}}{|-x-1| - |-x+1|} = -f(x) \dots\dots\dots 0,50$

Do đó, hàm số đã cho là hàm số lẻ $\dots\dots\dots 0,25$

Bài 2. Tìm m để hàm số $y = (1+m)x + m - 4x + 4$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $y = (1+m)x + m - 4x + 4 = (m-3)x + m + 4 \dots\dots\dots 0,25$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m-3 < 0 \dots\dots\dots 0,50$

Điều này tương đương với $m < 3 \dots\dots\dots 0,25$

Bài 3. Tìm m để hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2x-m-1} + \sqrt{x+m}$ xác định trên $(-3;4]$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x-m-1 \neq 0 \\ x+m \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots 0,25$

Điều này tương đương với $\begin{cases} x \neq \frac{m+1}{2} \\ x \geq -m \end{cases} \dots\dots\dots 0,25$

Hàm số xác định trên $(-3;4]$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \left[\frac{m+1}{2} \leq -3 \right. \\ \left. \frac{m+1}{2} > 4 \right. \\ \left. -m \leq -3 \right. \end{cases} \dots\dots\dots 1,00$

Điều này tương đương với $m > 7 \dots\dots\dots 0,50$

Bài 4. Cho hàm số $y = x^2 - 2x - 1$

- Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[0;3]$.
- Tìm m để đồ thị hàm số $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại đúng một điểm có hoành độ thuộc $[0;3]$.

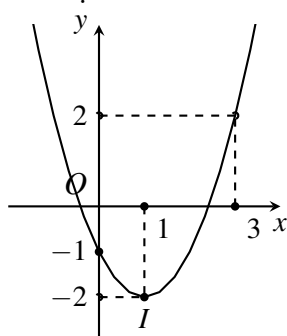
Lời giải.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	-2	$+\infty$

$\dots\dots\dots 1,00$

- Đồ thị



$\dots\dots\dots 1,00$

b) Dựa vào đồ thị hàm số ta nhận thấy:

Trên $[0; 3]$ giá trị lớn nhất của hàm số là 2 đạt tại $x = 3$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -2 đạt tại $x = 1$ 1,00

c) Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $[0; 3]$ ta có:

Yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi $\begin{cases} -1 < m \leq 2 \\ m = -2 \end{cases}$ 1,00

Bài 5. Tìm hàm số bậc nhất biết rằng đồ thị (Δ) của nó có hệ số góc là -2 chắn hai trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

Lời giải. (Δ) có hệ số góc bằng -2 nên phương trình của nó có dạng: $y = -2x + b$ 0,25

Giao điểm của (Δ) với Ox và Oy lần lượt là $A\left(\frac{b}{2}, 0\right)$ và $B(0; b)$ 0,25

Từ giả thiết ta có: $S_{\Delta OAB} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{b}{2}\right| \cdot |b| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ b = 2 \end{cases}$ 0,50

VI. Đề số 3b

Bài 1. Xác định tính chẵn-lẻ của hàm số sau: $y = f(x) = \frac{\sqrt{|x-1|+|x+1|}}{|x-1|-|x+1|}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $|x-1|-|x+1| \neq 0$ 0,25

Điều này tương đương với $|x-1| \neq |x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq x+1 \\ x-1 \neq -(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0$ 0,50

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 0,25

Ta có:

• $\forall x \in \mathcal{D} : -x \in \mathcal{D}$ 0,25

• $\forall x \in \mathcal{D} : f(-x) = \frac{\sqrt{|-x-1|+|-x+1|}}{|-x-1|-|-x+1|} = -f(x)$ 0,50

Do đó, hàm số đã cho là hàm số lẻ 0,25

Bài 2. Tìm m để hàm số $y = (1+m)x + m + 4x - 4$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $y = (1+m)x + m + 4x - 4 = (m+5)x + m - 4$ 0,25

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m+5 > 0$ 0,50

Điều này tương đương với $m > -5$ 0,25

Bài 3. Tìm m để hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2x-m+1} + \sqrt{x+m}$ xác định trên $(-3; 4]$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x-m+1 \neq 0 \\ x+m \geq 0 \end{cases}$ 0,25

Điều này tương đương với $\begin{cases} x \neq \frac{m-1}{2} \\ x \geq -m \end{cases}$ 0,25

Hàm số xác định trên $(-3; 4]$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \left[\frac{m-1}{2} \leq -3 \right. \\ \left. \frac{m-1}{2} > 4 \right. \\ \left. -m \leq -3 \right] \end{cases}$ 1,00

Điều này tương đương với $m > 9$ 0,50

Bài 4. Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 1$

- Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-3; 0]$.
- Tìm m để đồ thị hàm số $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại đúng hai điểm có hoành độ thuộc $[-3; 0]$.

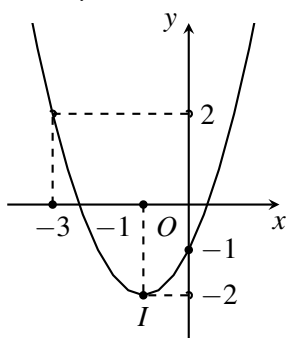
Lời giải.

- a) • Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$+\infty$	-2	$+\infty$

..... 1,00

- Đồ thị



..... 1,00

- b) Dựa vào đồ thị hàm số ta nhận thấy:

Trên $[-3; 0]$ giá trị lớn nhất của hàm số là 2 đạt tại $x = -3$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -2 đạt tại $x = -1$ 1,00

- c) Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $[-3; 0]$ ta có:

Yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi $-2 < m \leq -1$ 1,00

Bài 5. Tìm hàm số bậc nhất biết rằng đồ thị (Δ) của nó có hệ số góc là 2 chắn hai trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4.

Lời giải.

(Δ) có hệ số góc bằng 2 nên phương trình của nó có dạng: $y = 2x + b$ 0,25

Giao điểm của (Δ) với Ox và Oy lần lượt là $A\left(-\frac{b}{2}, 0\right)$ và $B(0; b)$ 0,25

Từ giả thiết ta có: $S_{\Delta OAB} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{b}{2} \right| \cdot |b| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ b = 4 \end{cases}$ 0,50

VII. Đề số 4a

Bài 1. a) Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{6-2x}}$.

b) Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{x}$.

Lời giải.

a) $y = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{6-2x}}$

Biểu thức hàm số có nghĩa khi $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 6-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 3 \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm.}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-1; 3)$ 0,5 điểm

b) $f(x) = \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{x}$

Tập xác định của hàm số $D = [-3; 3] \setminus \{0\}$ 0,5 điểm

Thấy $x \in D \Rightarrow -x \in D$ (1).

Ta có $f(-x) = \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}}{-x} = \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{x} = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x), \forall x \in D$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số đã cho là hàm số chẵn. 0,5 điểm

Bài 2. Cho đường thẳng $d: y = 2x - 4$.

a) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng d và các trục tọa độ.

b) Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $\Delta: y = (2m - 1)x + m + 1$ song song với đường thẳng d .

Lời giải.

a) $d: y = 2x - 4$.

$A = d \cap Ox \Rightarrow A(2; 0); B = d \cap Oy \Rightarrow B(0; -4)$ 0,5 điểm

ΔOAB vuông tại O nên có diện tích $S = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot |2| \cdot |-4| = 4$ (đvdt). 0,5 điểm

b) $d: y = 2x - 4$ và $\Delta: y = (2m - 1)x + m + 1$.

$d \parallel \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = 2 \\ m + 1 \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ 1,0 điểm.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + bx + c$ có đồ thị là Pa-ra-bol (P).

a) Tìm hệ số b, c để (P) có đỉnh là $I(1; -4)$.

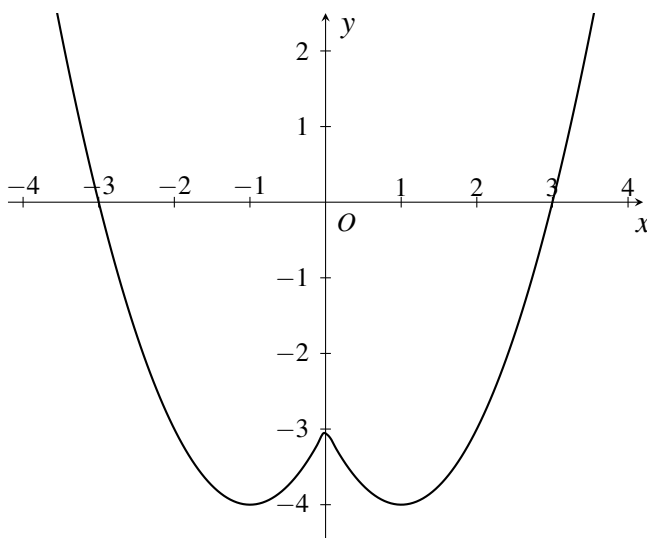
b) Với b, c tìm được ở trên, vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$, từ đó tìm x để $f(|x|) < 0$.

Lời giải.

a) hoành độ đỉnh $-\frac{b}{2} = 1 \Leftrightarrow b = -2$ 0,5 điểm

$I(1; -4) \in P$ nên có $1 + b + c = -4 \Leftrightarrow c = -3$.

Vậy $b = -2, c = -3$ 0,5 điểm



b) 0,5 điểm.

Từ đồ thị suy ra $f(|x|) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$ 0,5 điểm

Bài 4. Cho Pa-ra-bol $(P) : y = -x^2 + 4x + 3$ và đường thẳng $d : y = x + m$. Tìm m để

a) (P) và (d) có đúng một điểm chung.

b) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta : y = -x + 2$.

Lời giải.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$-x^2 + 4x + 3 = x + m \Leftrightarrow x^2 - 3x + m - 3 = 0 \quad (1) \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$$

(P) và (d) có đúng một điểm chung $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có đúng một nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta_{(1)} = 9 - 4(m - 3) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{21}{4} \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và $(d) : x^2 - 3x + m - 3 = 0 \quad (1)$.

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{(1)} > 0 \Leftrightarrow$

$$m < \frac{21}{4} \quad (*). \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

Ta có $d : y = x + m, \Delta : y = -x + 2$ nên $d \perp \Delta$. $\dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$

Để A, B đối xứng nhau qua Δ thì trung điểm M của AB phải thuộc Δ .

A, B là giao điểm của (P) và (d) nên $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$, với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1). $\dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3}{2} \\ y_M = \frac{x_1 + m + x_2 + m}{2} = \frac{3 + 2m}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{3 + 2m}{2}\right).$$

$$M \in \Delta \text{ nên } \frac{3 + 2m}{2} = -\frac{3}{2} + 2 \Leftrightarrow m = -1 \text{ (thỏa mãn (*)).}$$

$$\text{Vậy } m = -1. \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

Bài 5. a) Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{x^2 - 2mx + m^2 - 1}$ xác định trên khoảng $(2; +\infty)$.

b) Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $d : y = -x + m$ cắt đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2 + 4x - 5$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng $\frac{21}{2}$ (đvdt), với A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục hoành.

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - m - 1)(x - m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \\ x = m - 1 \end{cases} \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$$

$$\text{Do đó để hàm số xác định trên khoảng } (2; +\infty) \text{ thì } m + 1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 1. \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và $(P) : -x^2 + 4x - 5 = -x + m$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + m + 5 = 0 \quad (1).$$

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt $\Delta_{(1)} = 25 -$

$$4(m + 5) > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{4} \quad (*). \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

Gọi hoành độ của A, B lần lượt là x_1, x_2 . Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1).

Ta có tứ giác $ABB'A'$ là hình thang vuông với độ dài hai đáy là

$$AA' = |-x_1^2 + 4x_1 - 5| = x_1^2 - 4x_1 + 5 = x_1^2 - 5x_1 + m + 5 + x_1 - m = x_1 - m, BB' = x_2 - m \text{ và chiều cao } A'B' = |x_1 - x_2|. \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

$$\text{Diện tích } S_{ABB'A'} = \frac{(AA' + BB')A'B'}{2} = \frac{21}{2} \Leftrightarrow (x_1 + x_2 - 2m)|x_1 - x_2| = 21. \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

$$\Leftrightarrow (5 - 2m) \left| \frac{\sqrt{\Delta_{(1)}}}{1} \right| = 21 \Leftrightarrow (5 - 2m)\sqrt{5 - 4m} = 21 \Leftrightarrow (5 - 2m)^2(5 - 4m) = 441$$

$$\Leftrightarrow 4m^3 - 25m^2 + 50m + 79 = 0 \Leftrightarrow (m + 1)(4m^2 - 29m + 79) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -1 \text{ (thỏa mãn (*))}. \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

VIII. Đề số 4b

Bài 1. a) Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2} - 3x}{\sqrt{8-2x}}$.

b) Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{|x|}$.

Lời giải.

a) $y = \frac{\sqrt{x+2} - 3x}{\sqrt{8-2x}}$

Biểu thức hàm số có nghĩa khi $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 8-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x < 4 \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm.}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-2; 4) \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{|x|}$

Tập xác định của hàm số $D = [-3; 3] \setminus \{0\} \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$

Thấy $x \in D \Rightarrow -x \in D \quad (1).$

Ta có $f(-x) = \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}}{|-x|} = -\frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{|x|} = -f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in D \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra hàm số đã cho là hàm số lẻ. $\dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$

Bài 2. Cho đường thẳng $d: y = 2x - 6$.

a) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng d và các trục tọa độ.

b) Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $\Delta: y = (2m-3)x + m + 1$ song song với đường thẳng d .

Lời giải.

a) $d: y = 2x - 6$.

$A = d \cap Ox \Rightarrow A(3; 0); B = d \cap Oy \Rightarrow B(0; -6). \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$

ΔOAB vuông tại O nên có diện tích $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot |3| \cdot |-6| = 9 \text{ (đvdt)}. \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$

b) $d: y = 2x - 6$ và $\Delta: y = (2m-3)x + m + 1$.

$d \parallel \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 = 2 \\ m+1 \neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{5}{2} \dots\dots\dots 1,0 \text{ điểm.}$

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = -x^2 + bx + c$ có đồ thị là Pa-ra-bol (P).

a) Tìm hệ số b, c để (P) có đỉnh là $I(1; 4)$.

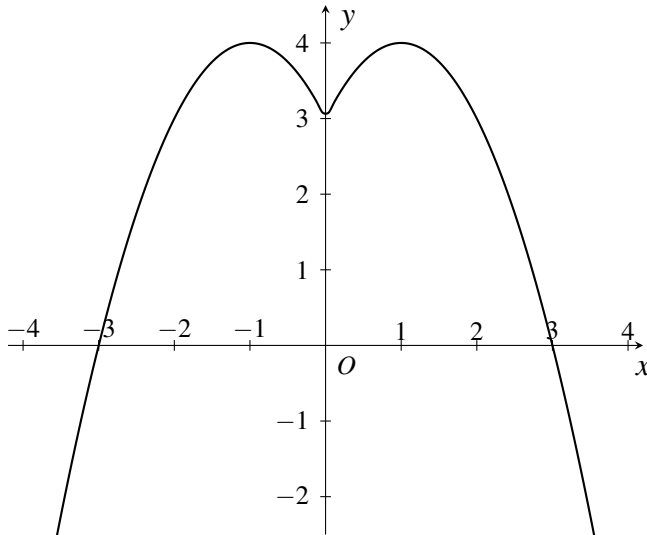
b) Với b, c tìm được ở trên, vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$, từ đó tìm x để $f(|x|) > 0$.

Lời giải.

a) Hoành độ đỉnh $-\frac{b}{-2} = 1 \Leftrightarrow b = 2 \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$

$I(1; 4) \in P$ nên có $-1 + b + c = 4 \Leftrightarrow c = 3$.

Vậy $b = 2, c = 3. \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$



b)

0,5 điểm.

Từ đồ thị suy ra $f(|x|) > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$ 0,5 điểm

Bài 4. Cho Pa-ra-bol $(P) : y = -x^2 + 4x + 2$ và đường thẳng $d : y = x + m$. Tìm m để

a) (P) và (d) có đúng một điểm chung.

b) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta : y = -x + 1$.

Lời giải.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$-x^2 + 4x + 2 = x + m \Leftrightarrow x^2 - 3x + m - 2 = 0 \quad (1) \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$$

(P) và (d) có đúng một điểm chung $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có đúng một nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta_{(1)} = 9 - 4(m - 2) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{17}{4} \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và $(d) : x^2 - 3x + m - 2 = 0 \quad (1).$

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{(1)} > 0 \Leftrightarrow$

$$m < \frac{17}{4} \quad (*). \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

Ta có $d : y = x + m, \Delta : y = -x + 1$ nên $d \perp \Delta$ 0,25 điểm

Để A, B đối xứng nhau qua Δ thì trung điểm M của AB phải thuộc Δ .

A, B là giao điểm của (P) và (d) nên $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$, với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1). 0,25 điểm

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3}{2} \\ y_M = \frac{x_1 + m + x_2 + m}{2} = \frac{3 + 2m}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{3 + 2m}{2}\right).$$

$$M \in \Delta \text{ nên } \frac{3 + 2m}{2} = -\frac{3}{2} + 1 \Leftrightarrow m = -2 \text{ (thỏa mãn } (*)).$$

Vậy $m = -2$ 0,25 điểm

Bài 5. a) Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{x^2 - 2mx + m^2 - 1}$ xác định trên khoảng $(3; +\infty)$.

b) Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $d : y = -x + m$ cắt đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2 + 4x - 6$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng $\frac{27}{2}$ (đvdt), với A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục hoành.

Lời giải.

a) Ta có $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - m - 1)(x - m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \\ x = m - 1 \end{cases} \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$

Do đó để hàm số xác định trên khoảng $(3; +\infty)$ thì $m + 1 \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 2$ 0,5 điểm

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) : $-x^2 + 4x - 6 = -x + m$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + m + 6 = 0 \quad (1).$$

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt $\Delta_{(1)} = 25 -$

$$4(m+6) > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4} \quad (*). \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

Gọi hoành độ của A, B lần lượt là x_1, x_2 . Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1).

Ta có tứ giác $ABB'A'$ là hình thang vuông với độ dài hai đáy là

$$AA' = |-x_1^2 + 4x_1 - 6| = x_1^2 - 4x_1 + 6 = x_1^2 - 5x_1 + m + 6 + x_1 - m = x_1 - m, BB' = x_2 - m \text{ và chiều cao } A'B' = |x_1 - x_2|. \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

$$\text{Diện tích } S_{ABB'A'} = \frac{(AA' + BB')A'B'}{2} = \frac{27}{2} \Leftrightarrow (x_1 + x_2 - 2m)|x_1 - x_2| = 27. \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

$$\Leftrightarrow (5 - 2m) \left| \frac{\sqrt{\Delta_{(1)}}}{1} \right| = 27 \Leftrightarrow (5 - 2m)\sqrt{1 - 4m} = 21 \Leftrightarrow (5 - 2m)^2(1 - 4m) = 729$$

$$\Leftrightarrow 4m^3 - 21m^2 + 30m + 176 = 0 \Leftrightarrow (m + 2)(4m^2 - 29m + 88) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -2 \text{ (thỏa mãn } (*)). \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

IX. Đề số 5a

Bài 1.

a) Tìm tập xác định của các hàm số sau.

$$1. y = \frac{x+2}{x^2-4x+3}.$$

$$2. y = \frac{\sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}.$$

b) Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 6$.

Lời giải.

$$1.a) \text{ Hàm số xác định khi } x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases} \dots\dots\dots 0,25$$

$$\text{Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\} \dots\dots\dots 0,25$$

$$b) \text{ Hàm số xác định khi } \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)(x+2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases} \dots\dots\dots 0,25$$

$$\text{Tập xác định: } D = (0; +\infty) \setminus \{1\} \dots\dots\dots 0,25$$

$$2. \text{ Tập xác định: } D = \mathbb{R} \dots\dots\dots 0,25$$

$$\text{Với mọi } x \in D \text{ thì } -x \in D \dots\dots\dots 0,25$$

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 + 6 = 3x^4 - 5x^2 + 6 \dots\dots\dots 0,25$$

$$\text{Vậy } f \text{ là hàm số chẵn} \dots\dots\dots 0,25$$

Bài 2. Tìm phương trình đường thẳng d biết

a) d đi qua hai điểm $M(-2; 2)$ và $N(4; -10)$.

b) d đi qua $A(2; 1)$ và song song với đường thẳng $\Delta: y = 2x + 1$.

$$\text{Lời giải. } 1. \text{ Ta có } d: y = ax + b \dots\dots\dots 0,25$$

$$(d) \text{ đi qua } M \text{ và } N \text{ nên ta có hệ phương trình } \begin{cases} 2 = a(-2) + b \\ -10 = a.4 + b \end{cases} \dots\dots\dots 0,25$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases} \dots\dots\dots 0,25$$

$$\text{Vậy } d: y = -2x - 2 \dots\dots\dots 0,25$$

$$2. d \text{ song song với } \Delta \text{ nên } d: y = 2x + b \text{ (} b \neq 1 \text{)} \dots\dots\dots 0,25$$

d đi qua A nên $1 = 2.2 + b \Rightarrow b = -3$ 0,5

Vậy $d : y = 2x - 3$ 0,25

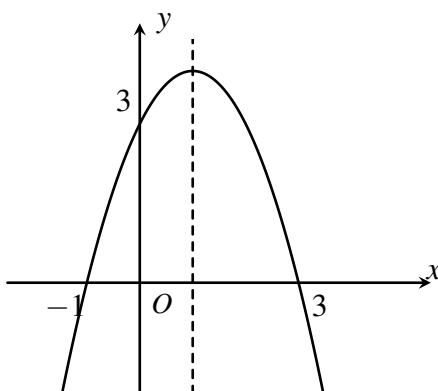
Bài 3.

a) Xác định tọa độ đỉnh và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$;

b) Xác định parabol $P : y = ax^2 + bx + c$, biết P có đỉnh $I(2; -1)$ và đi qua điểm $D(3; 0)$.

Lời giải. 1. Tọa độ đỉnh $I(1; 4)$ 0,5

Đồ thị0,5



2. P có đỉnh $I(2; -1)$ và đi qua điểm $D(3; 0)$ nên ta có
$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -1 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases}$$
0,5

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow y = x^2 - 4x + 3$ 0,5

Bài 4. Cho parabol $P : y = x^2 - 2x$ và hai đường thẳng $d_1 : y = x$ và $d_2 : y = 2x + m$

a) Tìm tọa độ giao điểm của parabol P và đường thẳng d_1 ;

b) Xác định giá trị của m để parabol P và đường thẳng d_2 có một điểm chung duy nhất M . Tìm tọa độ điểm M .

Lời giải. 1. Phương trình hoành độ giao điểm của P và d_1

$x^2 - 2x = x \Leftrightarrow x = 0; x = 3$ 0,5

$\begin{cases} x = 0; y = 0 \\ x = 3; y = 3 \end{cases}$. Vậy P và d_1 cắt nhau tại $O(0; 0)$ và $A(3; 3)$ 0,5

2. Phương trình hoành độ điểm chung của d_2 và P

$$x^2 - 2x = 2x + m \Leftrightarrow x^2 - 4x - m = 0 \quad (1)$$

d_2 và P có một điểm chung duy nhất khi và chỉ khi phương trình (1) cho nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4$ 0,5

Khi đó (1) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 0$. Vậy tọa độ điểm $M(2; 0)$ 0,5

Bài 5. a) Biết hai điểm có hoành độ lần lượt là -1 và 2 thuộc đường thẳng $f(x) = mx + 2m - 4$ cùng nằm phía trên trục hoành.

b) Biết đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 5$ ($m \neq 0$) có đỉnh thuộc đường thẳng $y = 3x - 2$.

Lời giải.

1. Giả sử A và B lần lượt là các điểm có hoành độ $x = -1$ và $x = 2$ thuộc đường thẳng đã cho. Ta có $A(-1; m-4)$, $B(2; 4m-4)$ 0,5

Ta có A và B cùng nằm phía trên trục $Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y_A > 0 \\ y_B > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-4 > 0 > 0 \\ 4m-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4$ 0,5

2. Ta có (P) có đỉnh $S \begin{cases} x = 2 \\ y = -3m-5 \end{cases}$ 0,5

Đỉnh của parabol thuộc đường thẳng $y = 3x - 2 \Leftrightarrow -3m - 5 = 3 \cdot 2 - 2 \Leftrightarrow m = -3$ 0,5

X. Đề số 5b

Bài 1.

a) Tìm tập xác định của các hàm số sau.

$$1. y = \frac{x+2}{x^2+4x-5}.$$

$$2. y = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)(x-2)}.$$

b) Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = 4x^3 - 2x^5 + 6x$.

Lời giải.

1.a) Hàm số xác định khi $x^2 + 4x - 5 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -5 \end{cases}$ 0,25

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -5\}$ 0,25

b) Hàm số xác định khi $\begin{cases} x \geq 0 \\ (x+1)(x-2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$ 0,25

Tập xác định: $D = (0; +\infty) \setminus \{2\}$ 0,25

2. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ 0,25

Với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ 0,25

$f(-x) = 4(-x)^3 - 2(-x)^5 + 6(-x) = -(4x^3 - 2x^5 + 6x) = -f(x)$ 0,25

Vậy f là hàm số lẻ 0,25

Bài 2. Tìm phương trình đường thẳng d biết

a) d đi qua hai điểm $M(2; -2)$ và $N(-4; 10)$.

b) d đi qua $A(1; 2)$ và song song với đường thẳng $\Delta: y = 3x + 1$.

Lời giải. 1. Ta có $d: y = ax + b$ 0,25

(d) đi qua M và N nên ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2a + b = -2 \\ -4a + b = 10 \end{cases}$ 0,25

$\begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$ 0,25

Vậy $d: y = -2x + 2$ 0,25

2. d song song với Δ nên $d: y = 3x + b$ ($b \neq 1$) 0,25

d đi qua A nên $2 = 3 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -1$ 0,5

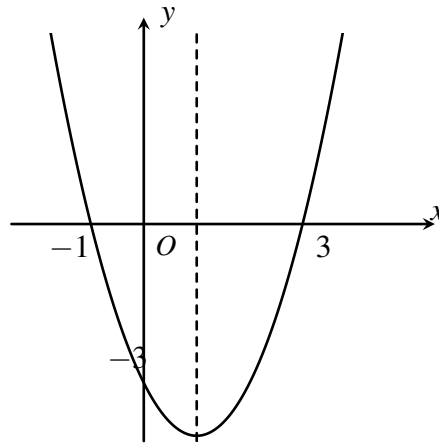
Vậy $d: y = 3x - 1$ 0,25

Bài 3.

a) Xác định tọa độ đỉnh và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 3$;

b) Xác định parabol $P: y = ax^2 + bx + c$, biết P có đỉnh $I(-2; -9)$ và đi qua điểm $D(-5; 0)$.

Lời giải. 1. Tọa độ đỉnh $I(1; -4)$ 0,5
 Đồ thị 0,5



2. P có đỉnh $I(-2; -9)$ và đi qua điểm $D(-5; 0)$ nên ta có $\begin{cases} 4a - 2b + c = -9 \\ 25a - 5b + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = -2 \end{cases}$ 0,5

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -5 \end{cases} \Rightarrow y = x^2 + 4x - 5$ 0,5

Bài 4. Cho parabol $P: y = x^2 + 3x$ và hai đường thẳng $d_1: y = -x$ và $d_2: y = x + m$

a) Tìm tọa độ giao điểm của parabol P và đường thẳng d_1 ;

b) Xác định giá trị của m để parabol P và đường thẳng d_2 có một điểm chung duy nhất M . Tìm tọa độ điểm M .

Lời giải. 1. Phương trình hoành độ giao điểm của P và d_1

$x^2 + 3x = -x \Leftrightarrow x = 0; x = -4$ 0,5

$\begin{cases} x = 0; y = 0 \\ x = -4; y = 4 \end{cases}$. Vậy P và d_1 cắt nhau tại $O(0; 0)$ và $A(-4; 4)$ 0,5

2. Phương trình hoành độ điểm chung của d_2 và P

$$x^2 + 3x = x + m \Leftrightarrow x^2 + 2x - m = 0 \quad (1)$$

d_2 và P có một điểm chung duy nhất khi và chỉ khi phương trình (1) cho nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1$ 0,5

Khi đó (1) $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2$. Vậy tọa độ điểm $M(-1; -2)$ 0,5

Bài 5. Tìm tham số m .

a) Biết hai điểm có hoành độ lần lượt là 1 và -3 thuộc đường thẳng $f(x) = mx + 2m - 4$ cùng nằm phía dưới trục hoành.

b) Biết đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 5$ ($m \neq 0$) có đỉnh thuộc đường thẳng $y = 2x - 3$.

Lời giải.

1. Giả sử A và B lần lượt là các điểm có hoành độ $x = 1$ và $x = -3$ thuộc đường thẳng đã cho. Ta có $A(1; 3m - 4)$, $B(-3; -m - 4)$ 0,5

Ta có A và B cùng nằm phía dưới trục $Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y_A < 0 \\ y_B < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 4 < 0 \\ -m - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < \frac{4}{3}$ 0,5

2. Ta có (P) có đỉnh $S \begin{cases} x = 2 \\ y = -3m - 5 \end{cases}$ 0,5

Đỉnh của parabol thuộc đường thẳng $y = 2x - 3 \Leftrightarrow -3m - 5 = 2.2 - 3 \Leftrightarrow m = -2$ 0,5