

CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN VỀ TÍNH LÃI SUẤT NGÂN HÀNG

I. LÝ THUYẾT

1. Lãi đơn : Lãi được tính theo tỉ lệ phần trăm trong một khoảng thời gian cố định trước.

Ví dụ : Khi ta gửi tiết kiệm 50 (triệu đồng) vào một ngân hàng với lãi suất 6,9%/năm thì sau một năm ta nhận được số tiền **lãi** là : $50 \times 6,9\% = 3,45$ (triệu đồng)

- Số tiền lãi này như nhau được cộng vào hàng năm. Kiểu tính lãi này được gọi là **lãi đơn**

- Sau hai năm số tiền cả gốc lẫn lãi là : $50 + 2 \cdot (3,45) = 56,9$ (triệu đồng)

- Sau n năm số tiền cả gốc lẫn lãi là : $50 + n \cdot (3,45)$ (triệu đồng)

2. Lãi kép : Sau một đơn vị thời gian (kỳ hạn), tiền lãi được gộp vào vốn và được tính lãi. Loại lãi này được gọi là **lãi kép**.

Ví dụ : Khi gửi tiết kiệm 50 (triệu đồng) vào một ngân hàng với lãi suất 6,9%/năm thì sau một năm, ta nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi là :

$$50 + 3,45 = 53,45 \text{ (triệu đồng)}$$

- Toàn bộ số tiền này được gọi là gốc

- Tổng số tiền cuối năm thứ hai là : $53,45 + 53,45 \times 6,9\% = 53,45(1 + 6,9\%)$

II. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài toán 1 : (Lãi kép gửi một lần) Một người, gửi vào ngân hàng số tiền là a đồng, với lãi suất kép hàng tháng là $r\%$ (**Kỳ hạn 1 tháng**). Tính cả vốn lẫn lãi T_n sau n tháng ?

Phương pháp :

Gọi T_n là tiền vốn lẫn lãi sau n tháng, ta có :

- Tháng 1 ($n=1$) : $T_1 = a + ar = a(1+r)$

- Tháng 2 ($n=2$): $T_2 = a(1+r) + a(1+r)r = a(1+r)^2$

.....

- Tháng n : $T_n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-1} \cdot r = a(1+r)^n$

Vậy : $T_n = a(1+r)^n$ (1)

Trong đó : a là số tiền vốn ban đầu , r là lãi suất (%) hàng tháng (kỳ hạn 1 tháng) , n là số tháng , T_n là tiền vốn lẫn lãi sau n tháng.

Từ công thức (1) ta tính được các đại lượng khác như sau :

$$1) \quad n = \frac{\ln \frac{T_n}{a}}{\ln(1+r)}$$

Chứng minh :

$$T_n = a(1+r)^n \Leftrightarrow \ln T_n = \ln [a(1+r)^n] \Leftrightarrow \ln T_n = \ln a + \ln(1+r)^n$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+r)^n = \ln T_n - \ln a \Leftrightarrow n \ln(1+r) = \ln T_n - \ln a \Leftrightarrow n = \frac{\ln \frac{T_n}{a}}{\ln(1+r)}$$

$$2) r = \sqrt[n]{\frac{T_n}{a}} - 1$$

Chứng minh :

$$T_n = a(1+r)^n \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{T_n}{a} \Leftrightarrow 1+r = \sqrt[n]{\frac{T_n}{a}} \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{\frac{T_n}{a}} - 1$$

$$3) a = \frac{T_n}{(1+r)^n}$$

Chứng minh :

$$T_n = a(1+r)^n \Leftrightarrow a = \frac{T_n}{(1+r)^n}$$

Ví dụ 1 : Bác An muốn gửi số tiền tiết kiệm là 50000000 đồng vào ngân hàng BIDV với lãi suất kép kỳ hạn 1 tháng là 0,35% /tháng. Hỏi sau 5 tháng số tiền cả gốc lẫn lãi của bác An là bao nhiêu, biết rằng lãi suất hàng tháng không thay đổi ?

Giải

Số tiền cả gốc lẫn lãi của bác An là : $T = 50000000(1 + 0,35\%)^5 = 50881146$ (đồng)

Ví dụ 2 : Chị Vui có số tiền là 100000000 đồng , chị muốn gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng Đông Á với lãi suất kép kỳ hạn 1 tháng là 0,36% /tháng. Để được 110000000 đồng chị Vui phải mất bao nhiêu tháng gửi, biết rằng lãi suất hàng tháng không thay đổi ?

Giải

Số tháng tối thiểu phải gửi là : $n = \frac{\ln \frac{110000000}{100000000}}{\ln(1 + 0,36\%)} = 26,52267649$ (tháng)

Vậy thời gian tối thiểu chị Vui phải gửi là 27 tháng

Ví dụ 3 : Bà Thu có số tiền là 100000000 đồng gửi tiết kiệm ngân hàng trong vòng 13 tháng thì lãnh về được 105000000 đồng. Hỏi lãi suất kép hàng tháng với kỳ hạn 1 tháng của ngân hàng là bao nhiêu, biết rằng lãi suất hàng tháng không thay đổi (làm tròn đến số thập phân thứ 4) ?

Giải

Lãi suất hàng tháng là : $r = \sqrt[13]{\frac{105000000}{100000000}} - 1 = 0,38\%$

Bài toán 2 : (Lãi kép gửi một lần) Một người, gửi vào ngân hàng số tiền là a đồng, với lãi suất kép là $r\%$ (**Tính theo kỳ**). Tính cả vốn lẫn lãi T_n sau n kỳ?

Phương pháp :

Gọi T_n là tiền vốn lẫn lãi sau n kỳ, ta có :

- Kỳ 1 ($n=1$) : $T_1 = a + ar = a(1+r)$

- Kỳ 2 ($n=2$): $T_2 = a(1+r) + a(1+r)r = a(1+r)^2$

.....
- Kỳ n : $T_n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-1}.r = a(1+r)^n$

Vậy : $T_n = a(1+r)^n$ (2)

Trong đó : a là số tiền vốn ban đầu , r là lãi suất (%) hàng kỳ, n là số kỳ , T_n là tiền vốn lẫn lãi sau n kỳ.

Từ công thức (2) ta tính được các đại lượng khác như sau :

$$1) n = \frac{\ln \frac{T_n}{a}}{\ln(1+r)} \quad 2) r = \sqrt[n]{\frac{T_n}{a}} - 1 \quad 3) a = \frac{T_n}{(1+r)^n}$$

Ví dụ 1 : Một người gửi tiền tiết kiệm 100000000 đồng vào một ngân hàng

a) Hỏi sau 10 năm, người đó nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi, biết rằng người đó gửi theo kỳ hạn 6 tháng ,lãi suất kép là 5,3%/năm và người đó không rút lãi ở tất cả các định kỳ trước đó.

b) Hỏi sau 10 năm, người đó nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi, biết rằng người đó gửi theo kỳ hạn 3 tháng ,lãi suất kép là 4,8%/năm và người đó không rút lãi ở tất cả các định kỳ trước đó.

Giải

a) 1 kỳ là 6 tháng, suy ra 10 năm là $\frac{10.12}{6} = 20$ kỳ

lãi suất của 1 năm là 5,3%, suy ra lãi suất 1tháng là : $\frac{5,3}{12}\%$. Khi đó lãi suất theo định kỳ 6 tháng là : $6.\frac{5,3}{12}\% = 2,65\%$

Vậy số tiền nhận được sau 10 năm là : $T_{20} = 100000000.(1+2,65\%)^{20} = 168724859,1$ đồng

b)) 1 kỳ là 3 tháng, suy ra 10 năm là $\frac{10.12}{3} = 40$ kỳ

lãi suất của 1 năm là 4,8%, suy ra lãi suất 1tháng là : $\frac{4,8}{12}\%$. Khi đó lãi suất theo định kỳ 3 tháng là : $3.\frac{4,8}{12}\% = 1,2\%$

Vậy số tiền nhận được sau 10 năm là : $T_{40} = 100000000.(1+1,2\%)^{40} = 161146360$ đồng

Ví dụ 2 : Một anh sinh viên được gia đình gửi vào sổ tiết kiệm ngân hàng là 80000000 đồng với lãi suất kép kỳ hạn 1 năm là 6,9%/ năm. Hỏi sau đúng 5 năm số tiền trong sổ sẽ là bao nhiêu, biết rằng trong suốt thời gian đó anh sinh viên không rút một đồng nào cả vốn lẫn lãi?

Giải

Số tiền trong sổ sau 5 năm là : $T_5 = 80000000.(1+6,9)^5 = 111680799,2$ đồng

Bài toán 3 : (Lãi kép gửi theo định kỳ - gửi đầu tháng) Một người, hàng tháng gửi vào ngân hàng a đồng , với lãi suất kép hàng tháng là $r\%$. Hỏi sau n tháng, người ấy có bao nhiêu tiền ?

Phương pháp :

Gọi T_n là số tiền người đó có được ở cuối tháng n , ta có :

- Cuối tháng thứ nhất, người đó có số tiền là : $T_1 = a + a.r = a(1+r)$

- Đầu tháng thứ hai, người đó có số tiền là :

$$a(1+r) + a = a[(1+r) + 1] = \frac{a}{[(1+r) - 1]}[(1+r)^2 - 1] = \frac{a}{r}[(1+r)^2 - 1]$$

- Cuối tháng thứ hai, người đó có số tiền là :

$$T_2 = \frac{a}{r}[(1+r)^2 - 1] + \frac{a}{r}[(1+r)^2 - 1].r = \frac{a}{r}[(1+r)^2 - 1](1+r)$$

.....
- Cuối tháng thứ n , người đó có số tiền là :

$$T_n = \frac{a}{r}[(1+r)^n - 1](1+r)$$

$$\textbf{Vậy : } T_n = \frac{a}{r}[(1+r)^n - 1](1+r)$$

Trong đó : a là tiền vốn gửi vào ngân hàng hàng tháng , r là lãi suất (%) hàng tháng , n là số tháng, T_n là tiền vốn lẫn lãi sau n tháng.

Từ công thức (2) ta tính được các đại lượng khác như sau :

$$1) a = \frac{T_n.r}{(1+r)[(1+r)^n - 1]}$$

$$2) n = \frac{\ln\left(\frac{T_n.r}{a} + 1 + r\right)}{\ln(1+r)} - 1$$

Ví dụ 1 : Một người, hàng tháng gửi vào ngân hàng số tiền là 3000000 đồng với lãi suất kép là 0.36%/tháng. Hỏi sau 2 năm, người ấy có bao nhiêu tiền, biết rằng lãi suất hàng tháng không thay đổi ?

Giải

Áp dụng công thức : $T_n = \frac{a}{r}[(1+r)^n - 1](1+r)$. Với $a = 3000000$ đồng, $r = 0,36\%$, $n = 24$ tháng.

$$\text{Ta được : } T_{24} = \frac{3000000}{0,36\%}[(1+0,36\%)^{24} - 1](1+0,36\%) = 75331221,69 \text{ đồng}$$

Ví dụ 2 : Muốn có 500000000 đồng sau 1 năm thì phải gửi quỹ tiết kiệm ngân hàng hàng tháng là bao nhiêu ? Biết rằng lãi suất kép gửi hàng tháng là 0,35%/tháng, lãi suất hàng tháng không thay đổi.

Giải

Áp dụng công thức : $a = \frac{T_n \cdot r}{(1+r)[(1+r)^n - 1]}$. Với $T_n = 500000000$ đồng, $r = 0,35\%$, $n = 12$ tháng.

$$\text{Ta được : } a = \frac{300000000 \cdot 0,35\%}{(1+0,35\%)[(1+0,35\%)^{12} - 1]} = 4072810,663 \text{ đồng}$$

Ví dụ 3 : Nếu ông A muốn có 100000000 đồng thì ông phải phải mất bao nhiêu tháng gửi tiền tiết kiệm ngân hàng , biết rằng lãi suất kép gửi ngân hàng hàng tháng là 0,36% /tháng, số tiền ông gửi tiết kiệm hàng tháng là 7000000 đồng ?

Giải

Áp dụng công thức : $n = \frac{\ln\left(\frac{T_n \cdot r}{a} + 1 + r\right)}{\ln(1+r)} - 1$. Với $T_n = 100000000$ đồng, $r = 0,36\%$,

$a = 7000000$ đồng

$$\text{Ta được : } n = \frac{\ln\left(\frac{100000000 \cdot 0,36\%}{7000000} + 1 + 0,36\%\right)}{\ln(1+0,36\%)} - 1 = 13,90672580 \text{ tháng}$$

Vậy ông A phải mất 14 tháng

Bài toán 4 : (Vay theo định kỳ - Trả cuối tháng) Một người, vay ngân hàng A đồng , với lãi suất kép hàng tháng là $r\%$. Hỏi người ấy phải trả hàng tháng bao nhiêu tiền để sau n tháng thì hết nợ ?

Phương pháp :

Gọi a là số tiền phải trả hàng tháng !

- Cuối tháng thứ nhất, người đó nợ : $A(1+r)$

Đã trả a đồng nên còn nợ : $A(1+r) - a$

- Cuối tháng thứ hai, người đó còn nợ : $[A(1+r) - a](1+r) - a = A(1+r)^2 - a(1+r) - a$

- Cuối tháng thứ ba, người đó còn nợ :

$$[A(1+r)^2 - a(1+r) - a](1+r) - a = A(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r) - a$$

.....
- Cuối tháng thứ n , người đó còn nợ :

$$A(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - a(1+r)^{n-2} - \dots - a = A(1+r)^n - a \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Vậy để người đó trả hết nợ sau n tháng thì số tiền phải trả hàng tháng là :

$$a = \frac{Ar.(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \quad (4)$$

Trong đó : a là tiền trả ngân hàng hàng tháng , r là lãi suất (%) hàng tháng , n là số tháng, A là số tiền vay ban đầu.

Ví dụ 1 : (Đề thi minh họa năm 2017)

Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách : Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu ? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

Giải

- Sau một tháng ông A hoàn nợ lần 1, các lần hoàn nợ tiếp theo sau đó một tháng. Ông A trả hết tiền nợ sau 3 tháng, tức là ông A hoàn nợ 3 lần.

- Lãi suất 1 năm là 12% suy ra lãi suất hàng tháng là : 1%

- Gọi m đồng là số tiền ông A hoàn nợ mỗi tháng !

- Cuối tháng thứ nhất, ông A nợ : $100(1+1\%)$ (triệu đồng)

Đã trả m đồng nên còn nợ : $100(1+1\%) - m$ (triệu đồng)

- Cuối tháng thứ hai, ông A còn nợ :

$$[100(1+1\%) - m](1+1\%) - m = 100(1+1\%)^2 - m(1+1\%)$$

- Cuối tháng thứ ba, ông A còn nợ :

$$[100(1+1\%)^2 - m(1+1\%) - m](1+1\%) - m = 100(1+1\%)^3 - m(1+1\%)^2 - m(1+1\%) - m$$

$$= 100(1+1\%)^3 - m \frac{(1+1\%)^3 - 1}{1\%} \quad (\text{triệu đồng})$$

Vậy ông A trả hết nợ sau 3 tháng thì số tiền phải trả hàng tháng là :

$$m = \frac{100.1\%.(1+1\%)^3}{(1+1\%)^3 - 1} = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1} \quad (\text{triệu đồng})$$

Ví dụ 2 : Một người vay 50 triệu, trả góp theo tháng trong vòng 48 tháng, lãi suất kép là 1,15%/tháng.

a) Hỏi hàng tháng phải trả bao nhiêu?

b) Nếu lãi suất kép là 0,75%/tháng thì mỗi tháng phải trả bao nhiêu, lợi hơn bao nhiêu so với lãi suất kép 1,15%/tháng.

Giải

a) Số tiền người ấy phải trả hàng tháng là :

$$\frac{50000000.1,15\%.(1+1,15\%)^{48}}{(1+1,15\%)^{48} - 1} = 1361312,807 \quad (\text{đồng})$$

b) Số tiền người ấy phải trả hàng tháng là :

$$\frac{50000000.0,75\%.(1+0,75\%)^{48}}{(1+0,75\%)^{48}-1} = 1244252,119 \text{ (đồng)}$$

Lợi hơn : $1361312,807 - 1244252,119 = 117060$ (đồng)

Ví dụ 3 : Một người vay ngân hàng với số tiền là 20000000 đồng , mỗi tháng trả góp cho ngân hàng 300000 đồng và phải chịu lãi suất kép của số tiền chưa trả là 0,4%/tháng. Hỏi sau bao lâu người đó trả hết nợ ?

Giải

Gọi A là số tiền vay ngân hàng, a là số tiền trả nợ hàng tháng, r là lãi suất (%) hàng tháng, n là số tháng trả hết nợ.

Ta có : $A = 20000000$ đồng, $a = 300000$ đồng, $r = 0,4\%$. Số tiền còn nợ trong ngân hàng sau n tháng là :

$$T_n = A(1+r)^n - a \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0 \Leftrightarrow n = \log_{1+r} \frac{a}{a - Ar} = \frac{300000}{300000 - 20000000.0,4\%} = 77,69370636$$

Số tháng trả hết nợ là 78 tháng

Bài toán 5 : Một người gửi ngân hàng với số tiền là A đồng với lãi suất kép là $r\%$ /tháng (kỳ hạn một tháng). Mỗi tháng người ấy rút ra X đồng vào ngày ngân hàng tính lãi. Hỏi sau n tháng số tiền của người ấy còn bao nhiêu ?

Phương pháp :

Gọi B_n là số tiền còn lại sau tháng thứ n !

- Sau tháng thứ nhất, số tiền vốn và lãi là : $A(1+r)$ (đồng)

- Sau khi rút ra X đồng, số tiền còn lại là : $B_1 = A(1+r) - X$ (đồng)

- Sau tháng thứ hai, số tiền vốn và lãi là :

$$B_1(1+r) = [A(1+r) - X](1+r) = A(1+r)^2 - X(1+r) \text{ (đồng)}$$

- Sau khi rút ra X đồng, số tiền còn lại là :

$$B_2 = A(1+r)^2 - X(1+r) - X = A(1+r)^2 - X[(1+r) + 1] = A(1+r)^2 - X \frac{(1+r)^2 - 1}{(1+r) - 1} \text{ (đồng)}$$

.....

- Bằng cách quy nạp, ta suy ra được sau tháng thứ n , số tiền còn lại là :

$$B_n = A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r} \text{ (đồng)} \quad (5)$$

Từ công thức (5) ta tính được các đại lượng khác như sau :

$$1) X = \frac{[A(1+r)^n - B_n].r}{(1+r)^n - 1}$$

$$2) n = \log_{1+r} \frac{B_n.r - X}{Ar - X}$$

Trong đó : X là số tiền rút ra hàng tháng , r là lãi suất (%) hàng tháng , n là số tháng, A là số tiền gửi ban đầu.

Ví dụ 1 : Giả sử một người gửi vào ngân hàng với số tiền 50000000 đồng theo kỳ hạn 1 tháng với lãi suất kép là 0,36%/tháng. Mỗi tháng người đó rút ra 1000000 đồng vào ngày ngân hàng tính lãi. Hỏi sau 2 năm số tiền của người ấy còn lại bao nhiêu ?

Giải

Áp dụng công thức (5) với : $A = 50000000$ đồng, $r = 0,36\%$, $X = 1000000$ đồng, $n = 24$ tháng. Ta có :

$$B_{24} = 50000000 \cdot (1 + 0,36\%)^{24} - 1000000 \cdot \frac{(1 + 0,36\%)^{24} - 1}{0,36\%} = 29483326,1 \text{ (đồng)}$$

Ví dụ 2 : Một sinh viên đi học được gia đình cho gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng với số tiền là 50000000 đồng theo mức kỳ hạn một tháng với lãi suất kép là 0,35%/tháng. Nếu mỗi tháng anh sinh viên rút ra một số tiền như nhau vào ngày ngân hàng tính lãi thì hàng tháng anh ấy rút ra bao nhiêu tiền để sau 4 năm, số tiền vừa hết ?

Giải

Sau 4 năm tức là sau 48 tháng, anh sinh viên rút vừa hết tiền, có nghĩa là $B_{48} = 0$

$$\text{Áp dụng công thức : } X = \frac{[A(1+r)^n - B_n] \cdot r}{(1+r)^n - 1}$$

Với : $A = 50000000$ đồng, $r = 0,35\%$, $B_n = 0$ đồng, $n = 48$ tháng. Ta có :

$$X = \frac{50000000 \cdot (1 + 0,35\%)^{48} \cdot 0,35\%}{(1 + 0,35\%)^{48} - 1} = 1133433,099 \text{ (đồng)}$$

Vậy hàng tháng anh sinh viên rút ra một số tiền là : 1133433,099 (đồng)

Ví dụ 3 : Một người gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng với số tiền là 20000000 đồng theo mức kỳ hạn một tháng với lãi suất kép là 0,36%/tháng. Nếu mỗi tháng người ấy rút ra một số tiền là 300000 đồng vào ngày ngân hàng tính lãi thì sau bao lâu số tiền gửi vừa hết ?

Giải

$$\text{Áp dụng công thức : } n = \log_{1+r} \frac{B_n \cdot r - X}{Ar - X}$$

Với : $A = 20000000$ đồng, $r = 0,36\%$, $B_n = 0$ đồng, $X = 300000$ đồng. Ta có :

$$n = \log_{1+0,36\%} \frac{-300000}{20000000 \cdot 0,36\% - 300000} = 76,36959338 \text{ (tháng)}$$

Vậy tối thiểu sau 76 tháng thì số tiền gửi sẽ hết