

Câu 1 (2,0 điểm).

a. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi A, B là các giao điểm của (C) với các trục tọa độ. Tìm trên (C) các điểm M có tọa độ nguyên sao cho tam giác MAB có diện tích bằng 8 (đvdt).

b. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{12} \sin 3x + \cos^2 x - \frac{1}{4} \sin x - m \right|$ bằng 1.

Câu 2 (2,0 điểm).

a. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\sqrt[3]{\log u_{19} - \log u_1} + \sqrt{\log u_{19} - \log u_1 + 3} = 3$ và $u_{n+1} = u_n + 2$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm n sao cho $(\sqrt{2})^{u_n} = 4^{2020}$.

b. Cho $f(x) = \frac{2020^x}{2020^x + \sqrt{2020}}$. Tính tổng $S = f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2}{2021}\right) + \dots + f\left(\frac{2020}{2021}\right)$.

Câu 3 (2,0 điểm).

a. Cho đa giác đều $A_1A_2 \dots A_{2020}$ nội tiếp đường tròn (O) , chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh bất kỳ của đa giác đó. Tính xác suất để nhận được một tam giác tù.

b. Chứng minh rằng $(C_{2020}^1)^2 + (2C_{2020}^2)^2 + (3C_{2020}^3)^2 + \dots + (2020C_{2020}^{2020})^2 = 2020^2 C_{4038}^{2019}$.

Câu 4 (3,0 điểm).

Cho tứ diện $ABCD$ và hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $2AM = BM, 2CN = AN$. Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm M, N và song song với cạnh AD , cắt các cạnh BD và CD lần lượt tại K và L .

a. Gọi V là thể tích của khối tứ diện $ABCD$. Tính thể tích khối đa diện $BCMNLK$ theo V .

b. Giả sử tứ diện $ABCD$ có $BC = x (0 < x < \sqrt{3})$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 (1,0 điểm).

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n lớn hơn 1, ta luôn có

$$\ln \frac{n+1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \log_2 \frac{n+1}{2}.$$

-----HẾT-----

LỚP 12 THPT

Đáp án này gồm có 06 trang

YÊU CẦU CHUNG

* Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi câu. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận logic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.

* Trong mỗi câu, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan. Ở câu 4 nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì cho điểm 0.

* Điểm thành phần của mỗi câu nói chung phân chia đến 0,25 điểm. Đối với điểm thành phần là 0,5 điểm thì tùy tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,25 điểm.

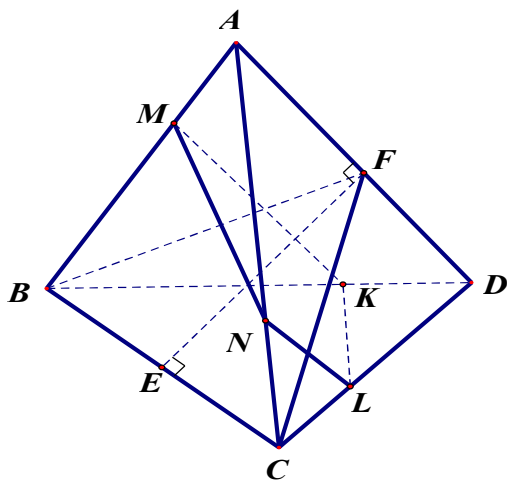
* Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm của từng câu.

* Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các câu.

Câu	Nội dung	
1	a. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là các giao điểm của (C) với các trục tọa độ. Tìm trên (C) các điểm M có tọa độ nguyên sao cho tam giác MAB có diện tích bằng 8 (đvdt). b. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left \frac{1}{12} \sin 3x + \cos^2 x - \frac{1}{4} \sin x - m \right$ bằng 1.	2,0 điểm
1a	Giao điểm của (C) với trục hoành là A(-2; 0), với trục tung là B(0; -2) Phương trình đường thẳng AB là $x + y + 2 = 0$, $AB = 2\sqrt{2}$.	0,25
	Gọi $M(x_0; \frac{x_0+2}{x_0-1})$ với $x_0 \neq 1$. Ta có	0,25
	$d(M; AB) = \frac{\left x_0 + \frac{x_0+2}{x_0-1} + 2 \right }{\sqrt{2}} = \frac{ x_0^2 + 2x_0 }{\sqrt{2} x_0-1 }$	
	$S_{MAB} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(M, AB) = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{ x_0^2 + 2x_0 }{\sqrt{2} x_0-1 } = 8$	0,25
	$ x_0^2 + 2x_0 = 8 x_0 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 6x_0 + 8 = 0 \\ x_0^2 + 10x_0 - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = 4 \\ x_0 = -5 + \sqrt{33} \\ x_0 = -5 - \sqrt{33} \end{cases}$ Vậy có hai điểm M thỏa mãn bài ra là M(2; 4), M(4; 2).	0,25
1b	$y = \left \frac{3 \sin x - 4 \sin^3 x}{12} + 1 - \sin^2 x - \frac{\sin x}{4} - m \right = \left \frac{\sin^3 x}{3} + \sin^2 x + m - 1 \right $	0.25

	Đặt $t = \sin x$, $t \in [-1; 1]$, ta có hàm số $y = \left \frac{t^3}{3} + t^2 + m - 1 \right$ với $t \in [-1; 1]$ Xét $g(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 + m - 1$ với $t \in [-1; 1]$ $g'(t) = t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \text{ (L)} \end{cases}$	
	$g(-1) = m - \frac{1}{3}$; $g(0) = m - 1$, $g(1) = m + \frac{1}{3}$ Ta có $\max_{x \in \mathbb{R}} \left \frac{1}{12} \sin 3x + \cos^2 x - \frac{1}{4} \sin x - m \right = \max_{t \in [-1; 1]} \left \frac{t^3}{3} + t^2 + m - 1 \right$ $= \max \left\{ \left m - 1 \right , \left m - \frac{1}{3} \right , \left m + \frac{1}{3} \right \right\} = \max \left\{ \left m - 1 \right , \left m + \frac{1}{3} \right \right\}$ Đặt $A = \left\{ \left m - 1 \right , \left m + \frac{1}{3} \right \right\}$, ta có các trường hợp:	0.25
	+ TH1: $m - 1 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \left\{ 1, \frac{7}{3} \right\} \\ A = \left\{ 1, \frac{1}{3} \right\} \end{cases}$ Ta thấy chỉ có $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0.25
	+TH2: $\left m + \frac{1}{3} \right = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \left\{ \frac{1}{3}, 1 \right\} \\ A = \left\{ \frac{7}{3}, 1 \right\} \end{cases}$ Ta thấy chỉ có $m = \frac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Kết luận: $m = 0$; $m = \frac{2}{3}$	0.25
2	a. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\sqrt[3]{\log u_{19} - \log u_1} + \sqrt{\log u_{19} - \log u_1 + 3} = 3$ và $u_{n+1} = u_n + 2$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm n sao cho $(\sqrt{2})^{u_n} = 4^{2020}$. b. Cho $f(x) = \frac{2020^x}{2020^x + \sqrt{2020}}$. Tính tổng $S = f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2}{2021}\right) + \dots + f\left(\frac{2020}{2021}\right)$.	2,0 điểm
2a	Điều kiện $\begin{cases} u_1 > 0, u_{19} > 0 \\ \log u_{19} - \log u_1 + 3 \geq 0 \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{\log u_{19} - \log u_1} \\ b = \sqrt{\log u_{19} - \log u_1 + 3} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a^3 - b^2 = -3.$	0,25

	Ta được hệ phương trình $\begin{cases} a+b=3 \\ a^3-b^2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3-a \\ (a-1)(a^2+6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$	0,25
	Do $u_{n+1} = u_n + 2$ nên (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 2$ $\Rightarrow u_{19} = u_1 + 18d = u_1 + 36$. Với $a = 1$ suy ra $\log u_{19} - \log u_1 = 1 \Leftrightarrow \log \frac{u_{19}}{u_1} = 1 \Leftrightarrow u_{19} = 10u_1 \Leftrightarrow u_1 + 36 = 10u_1 \Leftrightarrow u_1 = 4$.	0,25
	Số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n = u_1 + (n-1)d = 4 + 2(n-1) = 2n + 2$. Do đó $(\sqrt{2})^{u_n} = 4^{2020} \Leftrightarrow (\sqrt{2})^{2n+2} = 4^{2020} \Leftrightarrow n = 4039$ Kết luận : $n = 4039$	0,25
2b	Ta có $f(1-x) = \frac{\sqrt{2020}}{2020^x + \sqrt{2020}}$	0,25
	$\Rightarrow f(x) + f(1-x) = 1$	0,25
	$S = f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2}{2021}\right) + \dots + f\left(\frac{2020}{2021}\right)$ $= f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2020}{2021}\right) + f\left(\frac{2}{2021}\right) + f\left(\frac{2019}{2021}\right) + \dots + f\left(\frac{1010}{2021}\right) + f\left(\frac{1011}{2021}\right) = 1010$	0,5
3	a. Cho đa giác đều $A_1A_2 \dots A_{2020}$ nội tiếp đường tròn (O). Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh bất kỳ của đa giác đều. Tính xác suất để nhận được một tam giác tù. b. Chứng minh rằng $\left(C_{2020}^1\right)^2 + \left(2C_{2020}^2\right)^2 + \left(3C_{2020}^3\right)^2 + \dots + \left(2020C_{2020}^{2020}\right)^2 = 2020^2 \cdot C_{4038}^{2019}.$	2,0 điểm
3a	Ta có $\Omega = C_{2020}^3$	0,25
	Gọi A là biến cố : ‘ Chọn được 3 đỉnh từ đa giác để tạo thành tam giác tù’. Xét đường chéo A_1A_{1011} của đa giác đều là đường kính của đường tròn (O) ngoại tiếp đa giác đều, chia đường tròn ra làm hai phần, mỗi phần có 1009 điểm: từ A_2 đến A_{1010} và A_{1012} đến A_{2020}. Khi đó, mỗi tam giác có dạng $A_1A_iA_j$ là tam giác tù nếu A_i và A_j cùng nằm trong nửa đường tròn (O)	0,25
	Chọn nửa đường tròn: có 2 cách chọn Chọn hai điểm A_i, A_j là hai điểm tùy ý được lấy từ 1009 điểm $A_2, A_3, \dots, A_{1010}$ có C_{1009}^2 cách chọn.	0,25
	Giả sử A_i nằm giữa A_1 và A_j thì tam giác $A_1A_iA_j$ tù tại đỉnh A_i. Mà $\triangle A_jA_iA_1 \equiv \triangle A_1A_iA_j$ nên kết quả bị lặp hai lần. Có 2020 cách chọn đỉnh., do đó $\Omega_A = \frac{2 \cdot C_{1009}^2 \cdot 2020}{2} = 2020C_{1009}^2$. Vậy $p(A) = \frac{ \Omega_A }{ \Omega } = \frac{2020C_{1009}^2}{C_{2020}^3} = \frac{504}{673}$.	0,25

	Ta có $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, với $1 \leq k \leq n$ Áp dụng công thức trên ta có $\begin{cases} C_{2020}^1 = 2020C_{2019}^0 \\ 2C_{2020}^2 = 2020C_{2019}^1 \\ 3C_{2020}^3 = 2020C_{2019}^2 \\ \vdots \\ 2020C_{2020}^{2020} = 2020C_{2019}^{2019} \end{cases}.$	0,25
3b	$\Rightarrow (C_{2020}^1)^2 + (2C_{2020}^2)^2 + (3C_{2020}^3)^2 + \dots + (2020C_{2020}^{2020})^2$ $= 2020^2 \cdot \left[(C_{2019}^0)^2 + (C_{2019}^1)^2 + (C_{2019}^2)^2 + \dots + (C_{2019}^{2019})^2 \right] \quad (1)$	0,25
	Ta có, hệ số chứa x^{2019} trong khai triển đa thức $(1+x)^{2019}(x+1)^{2019}$ là $(C_{2019}^0)^2 + (C_{2019}^1)^2 + (C_{2019}^2)^2 + \dots + (C_{2019}^{2019})^2$ và hệ số chứa x^{2019} trong khai triển đa thức $(1+x)^{4038}$ là C_{4038}^{2019}	0,25
	Do đó $(C_{2019}^0)^2 + (C_{2019}^1)^2 + (C_{2019}^2)^2 + \dots + (C_{2019}^{2019})^2 = C_{4038}^{2019}$. (2) Từ (1) và (2) suy ra $(C_{2020}^1)^2 + (2C_{2020}^2)^2 + (3C_{2020}^3)^2 + \dots + (2020C_{2020}^{2020})^2 = 2020^2 \cdot C_{4038}^{2019}.$	0,25
4	Cho tứ diện $ABCD$ và hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $2AM = BM$, $2CN = AN$. Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm M, N và song song với cạnh AD, cắt các cạnh BD và CD lần lượt tại K và L. a. Gọi V là thể tích của khối tứ diện $ABCD$. Tính thể tích khối đa diện $BCMNLK$ theo V. b. Giả sử tứ diện $ABCD$ có $BC = x$ ($0 < x < \sqrt{3}$), tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.	3,0 điểm
4a		0,25
	Kẻ $MK \parallel AD$ ($K \in BD$), $NL \parallel AD$ ($L \in CD$)	0,25
	Ta có $\frac{BM}{BA} = \frac{BK}{BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{BMK} = \frac{4}{9} S_{BAD}$	0,25
	$\frac{d(N; (ABD))}{d(C; (ABD))} = \frac{NA}{CA} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(N; (ABD)) = \frac{2}{3} d(C; (ABD))$	0,25

	Suy ra $V_{N.BMK} = \frac{8}{27}V$	
	Tương tự, ta có $d(N; (BCD)) = \frac{1}{3}d(A; (BCD))$ Từ $\frac{DK}{DB} = \frac{1}{3}, \frac{DL}{DC} = \frac{2}{3}$	0,25
	$\Rightarrow S_{DKL} = \frac{2}{9}S_{DBC} \Rightarrow S_{BCLK} = \frac{7}{9}S_{DBC}$	0,25
	Suy ra $V_{N.BCLK} = \frac{7}{27}V$ Do đó $V_{BCMNLK} = V_{N.BMK} + V_{N.BCLK} = \frac{15}{27}V = \frac{5}{9}V$	0,25
4b	Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và AD Ta có $EF \perp BC, EF \perp AD$ và $AD \perp (FBC)$	0,25
	Tam giác FBC cân tại F nên $EF^2 = BF^2 - \frac{BC^2}{4} = AB^2 - \frac{AD^2}{4} - \frac{BC^2}{4} = \frac{3-x^2}{4}$ suy ra $EF = \frac{\sqrt{3-x^2}}{2}$	0,25
	Do đó $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AD.S_{FBC} = \frac{1}{12}x.\sqrt{3-x^2}$	0,25
	$\leq \frac{x^2 + 3 - x^2}{24} = \frac{1}{8}$	0,25
	Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Kết luận : $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.	0,25
5	Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n lớn hơn 1, ta luôn có $\ln \frac{n+1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \log_2 \frac{n+1}{2}.$	1,0 điểm
	Theo bất đẳng thức Cauchy với $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$: $\sqrt[k]{2} = \sqrt[k]{\underbrace{2.1.1 \dots 1}_{k-1 \text{ số } 1}} < \frac{2+1+1+\dots+1}{k} = \frac{k+1}{k}$ (Dấu bằng không xảy ra). Do đó: $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$ $\sqrt[3]{2} < \frac{4}{3}$ $\sqrt[n]{2} < \frac{n+1}{n}$	0,25
	Nhân vế theo vế các bất đẳng thức ta có: $\sqrt{2}.\sqrt[3]{2}.\sqrt[4]{2} \dots \sqrt[n]{2} < \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{n+1}{n}$	0,25

	Hay $2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}} < \frac{n+1}{2}$, logarit cơ số 2 hai vế ta có : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \log_2 \frac{n+1}{2} (DPCM)$	
	+ Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức với $x > 0$, thì $\ln(x+1) < x$ Thật vậy, xét hàm số $f(x) = \ln(x+1) - x$, có $f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} < 0$ với $x > 0$. Do đó $f(x)$ nghịch biến nên với $x > 0$ thì $f(x) < f(0) = 0$. Do đó $\ln(x+1) < x$. + Áp dụng bất đẳng thức trên ta có : $\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$ $\ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) < \frac{1}{3}$ $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$	0,25
	Cộng vế theo vế ta có: $\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ $\Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ $\Leftrightarrow \ln\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ $\Leftrightarrow \ln \frac{n+1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} (DPCM)$	0,25