

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**  
**ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN KHTN – HÀ NỘI**

**Câu 47:** Có bao nhiêu số nguyên  $x$  sao cho ứng với mỗi  $x$  tồn tại số thực  $y \in (1; 2)$  thỏa mãn  $2^{xy} = x^2y + 1$  ?

- A. 3 .                                      B. 6 .                                      C. 5 .                                      D. 4 .

**Lời giải**

**Cách 1:** Trước hết ta xét  $x = 0$  thì khi ấy phương trình luôn đúng với mọi số thực  $y \in (1; 2)$  nên nhận.

Tiếp đến với  $x \neq 0$  ta xét hàm số  $f_x(y) = 2^{xy} - x^2y - 1$  trên khoảng  $(1; 2)$  khi đó ta có:  $f'_x(y) = x2^{xy} \ln 2 - x^2$

Điều kiện cần: để tồn tại  $y \in (1; 2)$  thỏa mãn thì  $f_x(1)f_x(2) < 0$ .

Trường hợp 1:  $x > 0$  thì ta giải  $f'_x(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2^{xy} \ln 2 = x \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} \log_2 \frac{x}{\ln 2} = y_0 < 1$ .

Khảo sát nhanh hàm số  $g(x) = \frac{1}{x} \log_2 \frac{x}{\ln 2}$  dễ thấy  $g(x) \leq g(e \ln 2) = \frac{1}{e \ln^2 2}$ ,  $\forall x \in (0; +\infty)$  tức  $y_0 \notin (1; 2)$

Cùng với  $f'_x(y) > 0, \forall y \in (1; 2)$ , khi ấy để  $\exists y \in (1; 2)$  thì:  $\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(2) > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^x - x^2 - 1 < 0 \\ 2^{2x} - 2x^2 - 1 > 0 \end{cases} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{2; 3; 4\}$

Trường hợp 2:  $x < 0$  thì khi ấy  $f'_x(y) < 0, \forall y \in (1; 2)$ . Suy ra để  $\exists y \in (1; 2)$  thỏa mãn thì

$$\begin{cases} f(1) > 0 \\ f(2) < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^x - x^2 - 1 > 0 \\ 2^{2x} - 2x^2 - 1 < 0 \end{cases} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \emptyset. \text{ (loại)}$$

Vậy tóm lại  $x \in \{0; 2; 3; 4\}$  tức có 4 giá trị nguyên  $x$  thỏa mãn. **Chọn đáp án D.**

**Cách 2:** Dễ thấy xét  $x \neq 0$  thì hàm số  $f_y(x) = 2^{xy} - x^2y - 1$  có  $\begin{cases} f'_x(y) = x2^{xy} \ln 2 - x^2 \\ f''_x(y) = x^2 2^{xy} \ln^2 2 > 0 \end{cases}$

Suy ra hàm  $f_x(y)$  là hàm lồi nghiêm ngặt và có tối đa 1 cực tiểu, khi ấy cùng với thì ta suy ra điều kiện cần và đủ để  $f_x(y) = 0$  có nghiệm với mọi  $y \in (1; 2)$  là  $f_x(1)f_x(2) < 0$

**Câu 48:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = y = z-3$ . Xét mặt phẳng  $(P)$  thay đổi và luôn chứa đường thẳng  $(d)$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $A(2; -1; 2)$  lên mặt phẳng  $(P)$ . Khi  $(P)$  thay đổi thì  $H$  luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                                      B.  $\sqrt{2}$ .                                      C.  $\sqrt{3}$ .                                      D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải**

Đầu tiên ta gọi  $C$  là hình chiếu của  $A$  lên  $(d)$ , từ đó dễ dàng tính được tọa độ điểm  $C(1; 0; 3)$

Khi ấy ta suy ra  $H$  thuộc mặt cầu  $(S)$  đường kính  $AC$  có tâm là trung điểm  $AC$  và bán kính  $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Tiếp đến ta có  $AH \perp (d) \subset (P), AC \perp (d) \Rightarrow (d) \perp (AHC) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(AHC)}} = \overrightarrow{u_{(d)}} = (2; 1; 1)$  tức suy ra  $H \in (AHC)$ .

Mà  $(AHC)$  qua đường kính mặt cầu  $(S)$  nên đường tròn cố định có bán kính  $r = R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 50:** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 + 1 + i| = \sqrt{2}, |z_2| = |z_2 + 1 + i|$  và  $\frac{z_1 + z_2}{1 - 2i}$  là số thực. Khi ấy giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $|z_1 + z_2|$  bằng

A.  $3\sqrt{5}$ .

B.  $2\sqrt{5}$ .

C.  $5\sqrt{5}$ .

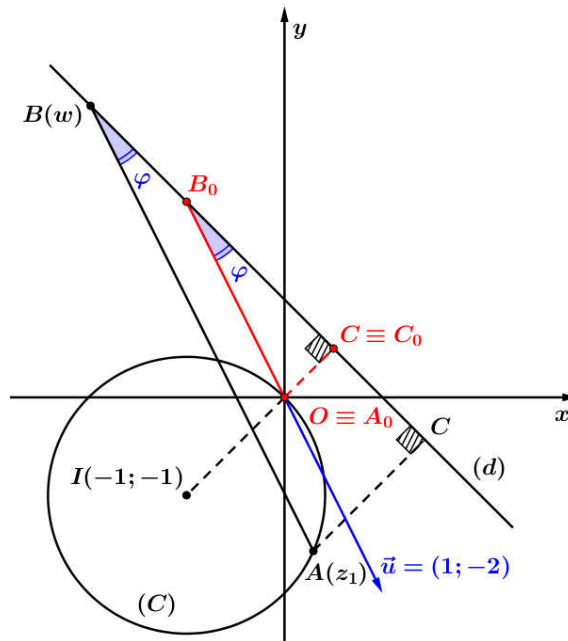
D.  $\sqrt{5}$ .

Lời giải

Đầu tiên ta đặt:  $\begin{cases} w = -z_2, A(z_1), B(w) \\ |z_1 + 1 + i| = \sqrt{2}, |w| = |w - 1 - i| \end{cases}$ , bằng biến đổi đại số thông thường ta dễ dàng lần lượt suy ra

được:  $A \in (C)$  tâm  $I(-1; -1)$ , bán kính  $R = \sqrt{2}$  và  $B \in (d): x + y - 1 = 0$ .

Tiếp đến ta có:  $\frac{z_1 + z_2}{1 - 2i} = \frac{z_1 - (-z_2)}{1 - 2i} = \frac{z_1 - w}{1 - 2i}$  là số thực tức  $z_1 - w = k(1 - 2i), \forall k \in \mathbb{R}$ , suy ra được  $\overrightarrow{BA} = k\vec{u}$  với  $\vec{u} = (1; -2)$  tức đường thẳng  $AB$  có vector pháp tuyến là  $\vec{n} = (2; 1)$ . Từ đây ta có hình vẽ như sau:



Ta có:  $\cos(\vec{u}; (d)) = \cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$  và  $|z_1 + z_2| = |z_1 - (-z_2)| = |z_1 - w|$  min khi  $AB_{\min} = \frac{AC_{\min}}{\sin \varphi} = \frac{d(A; (d))_{\min}}{\sin \varphi}$

Khi ấy ta suy ra:  $d(A; (d))_{\min} = d(I; (d)) - R = \frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  tức  $AB_{\min} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$ .

Vậy ta kết luận giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $|z_1 + z_2|$  bằng  $\sqrt{5}$ . **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**  
**ĐỀ THI THỬ LIÊN TRƯỜNG NGHỆ AN**

**Câu 33:** Trong một đề thi trắc nghiệm môn Toán có loại câu trả lời dạng đúng sai. Một câu hỏi có 4 ý hỏi, mỗi ý hỏi học sinh chỉ cần trả lời đúng hoặc chỉ trả lời sai. Nếu 1 ý trả lời đúng đáp án thì được 0,1 điểm, đúng đáp án 2 ý được 0,25 điểm, đúng đáp án 3 ý được 0,5 điểm và đúng đáp án cả 4 ý được 1 điểm. Giả sử một thí sinh làm bài bằng cách chọn phương án ngẫu nhiên để trả lời cho 2 câu hỏi loại đúng sai này. Tính xác suất để học sinh đó được 1 điểm ở phần trả lời 2 câu hỏi này

- A.  $\frac{1}{128}$ .                      B.  $\frac{9}{128}$ .                      C.  $\frac{17}{256}$ .                      D.  $\frac{1}{16}$ .

**Lời giải**

Trước hết ta chia thành hai công việc:

- Công việc (1): Tính xác suất để mỗi ý trong 4 ý của 1 trong 2 câu hỏi là đúng/sai.

+ Để tính được xác suất để học sinh trả lời ý hỏi đúng là  $\frac{1}{2}$  và ý hỏi sai là  $\frac{1}{2}$ .

- Công việc (2): Tính xác suất để có số ý đúng cần thỏa mãn mỗi câu trong mỗi trường hợp (sẽ nêu dưới đây).

→ Nhận xét: do hai **công việc** có tính chất liên kết nhau nên ta sử dụng **quy tắc nhân**. (\*)

Ta có 2 trường hợp như sau:

Trường hợp 1: Cả 2 câu đều đúng được 3 trong 4 ý, tức mỗi câu đạt 0,5 điểm.

Câu hỏi 1 trả lời đúng 3 câu: Chọn 3 trong 4 câu đúng có  $C_4^3$  (cách) và xác suất mỗi ý trả lời đúng là  $\frac{1}{2}$ , với 3 ý

đúng là  $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ , ý còn lại sai có xác suất là  $\frac{1}{2}$  nên theo (\*), suy ra xác suất câu hỏi 1 đúng 3 câu là:  $C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2}$  (1)

Câu hỏi 2 trả lời đúng 3 câu, thực hiện tương tự như (1) ta có:  $C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2}$

Suy ra tại trường hợp 1 ta có xác suất cần tìm là  $C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

Trường hợp 2: 1 trong 2 câu đạt điểm tối đa (1 điểm), câu còn lại 0 điểm.

Giải thích: tức 1 trong 2 câu ( $C_2^1$  cách) có 4 ý đều đúng (với xác suất mỗi ý đúng là  $\frac{1}{2}$ ) và câu còn lại không đúng cả

4 ý (với xác suất mỗi ý sai là  $\frac{1}{2}$ ) nên theo quy tắc (\*), ta suy ra trường hợp này xác suất là  $C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{2}{16^2}$

Vậy, cộng hai trường hợp ta có xác suất cần tìm là  $\frac{1}{16} + \frac{2}{16^2} = \frac{9}{128}$ . **Chọn đáp án B.**

**Câu 39:** Có bao nhiêu số nguyên  $x \in [2024; 7000]$  là nghiệm của bất phương trình sau:

$$\log_{0,3} \left( \log_6 \left( \frac{\log_3^2 x - 9 \log_3 x + 80}{\log_3 x + 4} \right) \right) < 0$$

- A. 600.                      B. 603.                      C. 601.                      D. 602.

**Lời giải**

Bất phương trình tương đương với:  $\log_6 \left( \frac{\log_3^2 x - 9 \log_3 x + 80}{\log_3 x + 4} \right) > 1$  (\*) (do  $0,3 < 1$  nên dấu đổi chiều).

Đặt  $t = \log_3 x$ , thì khi ấy (\*)  $\Leftrightarrow \frac{t^2 - 9t + 80}{t + 4} > 6 \Leftrightarrow (t - 8)(t - 7) > 0 \xrightarrow{t = \log_3 x} (x - 3^8)(x - 3^7) > 0$

Kết hợp với  $\begin{cases} x \in [2024; 7000] \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$  ta có:  $\begin{cases} 2024 \leq x < 3^7 \\ 3^8 < x \leq 7000 \end{cases}$ . Dễ dàng đếm được có  $163 + 439 = 602$  (số). **Chọn đáp án D.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 41:** Cho số phức  $w$  thỏa mãn  $|2w - 2 - i| = |2w - 6 + i|$  và hai số phức  $z_1, z_2$  cùng thỏa mãn  $|z^2 - (\bar{z})^2| = 4$ ,  $z_1$  có phần thực, phần ảo là các số âm,  $z_2$  có phần thực, phần ảo là các số dương và  $|z_2 - z_1|$  bé nhất. Giá trị nhỏ nhất của  $|w - z_1| + |w - z_2|$  thuộc khoảng nào dưới đây?

- A.  $\left[5; \frac{11}{2}\right)$ .      B.  $\left[\frac{11}{2}; 6\right)$ .      C.  $\left[\frac{9}{2}; 5\right)$ .      D.  $\left[4; \frac{9}{2}\right)$ .

**Lời giải**

Ta đặt  $(S): z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), khi ấy  $4 = |z^2 - (\bar{z})^2| = |(z - \bar{z})(z + \bar{z})| = |(2yi)(2x)| \Leftrightarrow |xy| = 1$

Với  $z_1, z_2 \in (S): \begin{cases} z_1 = x_1 + y_1 i \\ z_2 = x_2 + y_2 i \end{cases} (x_{12}, y_{12} \in \mathbb{R})$ . Do phần thực, ảo của  $z_1, z_2$  cùng dấu nên  $x_1 y_1 = (-x_2)(-y_2) = 1$ , mà

$$|z_2 - z_1| \text{ bé nhất nên suy ra: } |z_2 - z_1|^2 = \left| \left( x_1 + \frac{i}{x_1} \right) - \left( -x_2 + \frac{i}{-x_2} \right) \right|^2 = (x_1 + x_2)^2 + \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right)^2$$

$$= \underbrace{x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}}_{\geq 2} + \underbrace{x_2^2 + \frac{1}{x_2^2}}_{\geq 2} + 2 \underbrace{\left( x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} \right)}_{\geq 2} \geq 8 \text{ với dấu bằng xảy ra khi } x_1 = x_2 = 1 \text{ tức ta suy ra } \begin{cases} z_1 = 1 + i \\ z_2 = -1 - i \end{cases}.$$

Tiếp đến xét điểm:  $M(w), w = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), bằng phương pháp đại số ta suy ra  $M \in (d): y = 2x - 4$ .

**Cách 1: Phương pháp đại số (Sử dụng bất đẳng thức Mincopski)**

$$\text{Ta có: } T = |w - z_1| + |w - z_2| = \sqrt{(a-1)^2 + (2a-5)^2} + \sqrt{(a+1)^2 + (2a-3)^2} = \sqrt{5a^2 - 22a + 26} + \sqrt{5a^2 - 10a + 10}$$

$$= \sqrt{\left( \sqrt{5}a - \frac{11}{\sqrt{5}} \right)^2 + \left( \frac{3}{\sqrt{5}} \right)^2} + \sqrt{\left( \sqrt{5} - \sqrt{5}a \right)^2 + \left( \sqrt{5} \right)^2} \geq \sqrt{\left( \sqrt{5}a - \frac{11}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} - \sqrt{5}a \right)^2 + \left( \sqrt{5} + \frac{3}{\sqrt{5}} \right)^2} = 2\sqrt{5}$$

**Cách 2: Phương pháp hình học.**

Không cần vẽ hình, xét  $M \in (d): 2x - y - 4 = 0$  nhận thấy  $A(1;1), B(-1;-1)$  cùng phía với  $(d)$  nên gọi  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $(d)$ , khi ấy dễ dàng tìm được tọa độ  $A'\left(\frac{17}{5}; -\frac{1}{5}\right)$ , khi ấy ta kết luận:

$$T = |w - z_1| + |w - z_2| = MA + MB = MA' + MB \geq A'B = 2\sqrt{5}. \text{ Chọn đáp án D.}$$

**Câu 42:** Có bao nhiêu cặp số thực  $(x; y)$  thỏa mãn điều kiện sau:

$$6^x + 9^y \sqrt{\log_2(2x^4 + 4x^2y - 16 + 2y^2) - \log_2(x^2 + y)} = 3 \log_6(x^2 + 5x + y - 3) + 2x + 1$$

- A. 2.      B. 6.      C. 4.      D. 8.

**Lời giải.**

Trước hết ta dự đoán như sau:  $\log_2(2x^4 + 4x^2y - 16 + 2y^2) - \log_2(x^2 + y) \leq 0$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_2[(x^2 + y)^2 - 8] - \log_2(x^2 + y) \leq 0 \quad (*), \text{ đặt } t = \log_2(x^2 + y) \text{ thì khi ấy}$$

$$(*) \Leftrightarrow 1 + \log_2(4^t - 8) - t^2 \leq 0 \Leftrightarrow 4^t - 8 \leq 2^{t^2-1} \Leftrightarrow 2^{t^2-1} + 8 \geq 4^t \quad (1). \text{ Mà (1) đúng với bất đẳng thức Cauchy:}$$

$$2^{t^2-1} + 8 \geq 2\sqrt{2^{t^2-1} \cdot 2^3} = 2^{\frac{t^2}{2}+2} \geq 2^{2\sqrt{\frac{t^2}{2}+2}} = 2^{2t} = 4^t \text{ với dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} 2^{t^2-1} = 8 \\ \frac{t^2}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2 \text{ nên kết hợp điều kiện}$$

$$\text{căn thức có nghĩa, suy ra } \log_2(2x^4 + 4x^2y - 16 + 2y^2) - \log_2(x^2 + y) = 0 \Leftrightarrow t = \log_2(x^2 + y) = 2 \rightarrow x^2 + y = 4$$

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

Khi ấy phương trình ban đầu trở thành:  $6^x = 3\log_6(5x+1) + 2x + 1 \Leftrightarrow 6^x + 3x = 6^{\log_6(5x+1)} + 3\log_6(5x+1)$

Xét hàm đặc trưng  $f(t) = 6^t + 3t$  có  $f'(t) = 6^t \ln 6 + 3 > 0, \forall t > 0$  tức  $f(t)$  luôn đồng biến trên  $(0; +\infty)$

$$\Rightarrow x = \log_6(5x+1) \Leftrightarrow 6^x - 5x - 1 = 0.$$

Xét hàm số  $g(x) = 6^x - 5x - 1$  có  $g'(x) = 6^x \ln 6 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \log_6 \frac{5}{\ln 6} \in (0; 1)$  (điểm cực tiểu), do hàm  $g(x)$  có

1 điểm cực trị nên suy ra  $g(x) = 0$  có 2 nghiệm, dễ dàng nhẩm nhanh ra 2 nghiệm  $x = 0, x = 1$

Lại có:  $x^2 + y = 4 \Leftrightarrow y = 4 - x^2$  (ứng với 1 giá trị  $x$  cho ra 1 giá trị  $y$ ) nên có 2 cặp  $(x, y)$ . **Chọn đáp án A.**

**Câu 43:** Trong không gian  $Oxyz$  cho các điểm  $M(5; 8; 3), Q(-2; -1; -4)$  và hai đường thẳng lần lượt có phương

$$\text{trình là } \Delta_1: \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = 3 \end{cases}; \Delta_2: \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \\ z = -t' \end{cases} \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}. \text{ Biết điểm } N \text{ di động trên đường thẳng } \Delta_1 \text{ và điểm } P \text{ di động}$$

trên đường thẳng  $\Delta_2$ . Giá trị nhỏ nhất của  $T = MN + NP + PQ$  là

**A.**  $\sqrt{289}$ . **B.**  $\sqrt{459}$ . **C.**  $\sqrt{179}$ . **D.**  $\sqrt{369}$ .

**Lời giải**

Trước hết từ giả thiết ta gọi  $M(a; 3; 3), P(-5; 3; b)$  với  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Khi ấy: } T = MN + NP + PQ = \sqrt{(5-a)^2 + 25} + \sqrt{(a+5)^2 + (3-b)^2} + \sqrt{(b+4)^2 + 25}.$$

Ta xử lý biểu thức trên bằng bất đẳng thức Mincopski như sau:

$$\begin{aligned} T &= MN + NP + PQ = \sqrt{(5-a)^2 + 5^2} + \sqrt{(a+5)^2 + (3-b)^2} + \sqrt{5^2 + (b+4)^2} \\ &\geq \sqrt{(5-a+a+5+5)^2 + (5+3-b+b+4)^2} = \sqrt{15^2 + 12^2} = \sqrt{369} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \frac{5-a}{15} = \frac{5}{12} \vee \frac{b+4}{4} = \frac{5}{5} \Leftrightarrow (a; b) = \left(-\frac{5}{4}; 0\right). \text{ Chọn đáp án D.}$$

**Câu 45:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục và có đạo hàm trên  $(0; +\infty)$  thỏa mãn các điều kiện:  $f(1) = 0$  và

$$(2x^2 - xf'(x) - 1)e^{x^2} = x^2 e^{x+f(x)}, \forall x \in (0; +\infty). \text{ Biết } f(4) = a + b \ln 2, (a, b \in \mathbb{Z}). \text{ Giá trị } a - b \text{ bằng}$$

**A.** 12. **B.** 14. **C.** 11. **D.** 15.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } (2x^2 - xf'(x) - 1)e^{x^2} = x^2 e^{x+f(x)} \Leftrightarrow (x(2x - f'(x)) - 1)e^{x^2-f(x)} = x^2 e^x \quad (1)$$

$$\text{Đặt } g(x) = e^{x^2-f(x)} \Rightarrow g'(x) = (2x - f'(x))e^{x^2-f(x)}, (1) \text{ thành: } \frac{1}{x}g'(x) + \left(-\frac{1}{x^2}\right)g(x) = e^x \Leftrightarrow \left(\frac{g(x)}{x}\right)' = e^x$$

$$\text{Suy ra: } \frac{g(x)}{x} = \frac{e^{x^2-f(x)}}{x} = e^x + C \xrightarrow{f(1)=0} C = 0 \rightarrow e^{x^2-f(x)} = xe^x = e^{x+\ln x} \Leftrightarrow f(x) = x^2 - x - \ln x$$

Khi ấy ta suy ra:  $f(4) = 12 - 2 \ln 2$  tức  $a = 12, b = -2 \rightarrow a - b = 14$ . **Chọn đáp án B.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 46:** Trên tập hợp số phức, xét phương trình  $z^2 - mz + 10 = 0$ , (với  $m$  là tham số). Biết phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt  $z_1, z_2$ . Các điểm biểu diễn số phức  $z_1, z_2, \frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}$  tạo thành một đa giác lồi có diện tích lớn nhất bằng

- A.  $\frac{99}{20}$ .      B. 5.      C.  $\frac{49}{10}$ .      D. 4.

**Lời giải**

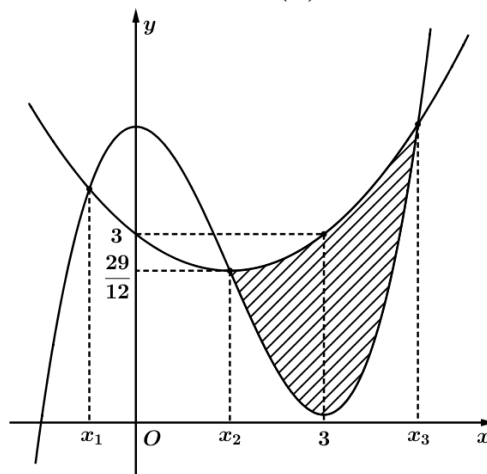
Trước hết từ giả thiết, ta đặt:  $\begin{cases} z_1 = a + bi \\ z_2 = a - bi \end{cases} (a, b \in \mathbb{R})$  với  $z_1 z_2 = 10 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 10$  (do  $z_1, z_2$  liên hợp nhau).

Tiếp đến ta gọi  $A(a; b), B(a; -b), C\left(\frac{a}{10}; -\frac{b}{10}\right), D\left(\frac{a}{10}; \frac{b}{10}\right)$  ứng với  $A(z_1), B(z_2), C\left(\frac{1}{z_1}\right), D\left(\frac{1}{z_2}\right)$ . Nhận thấy cặp điểm  $A, B$  và  $C, D$  cùng phần thực nên dễ dàng thấy được  $ABCD$  là hình thang cân.

Khi ấy dễ dàng suy ra  $S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot d(AB, CD) = \frac{1}{2} \left(2b + \frac{b}{5}\right) \cdot \left(a - \frac{a}{10}\right) = \frac{99}{200} (2ab) \leq \frac{99}{200} (a^2 + b^2) = \frac{99}{20}$

**Chọn đáp án A.**

**Câu 47:** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  và hàm số bậc hai  $y = g(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng đồ thị hàm số  $y = f(x)$  cắt đồ thị hàm số  $y = g(x)$  tại 3 điểm phân biệt  $x_1, x_2, x_3$  thỏa mãn  $x_1 x_2 x_3 = -5$ . Diện tích miền tô đậm nằm trong khoảng nào sau đây?

- A.  $\left(6; \frac{13}{2}\right)$ .      B.  $\left(\frac{9}{2}; 5\right)$ .      C.  $\left(\frac{11}{2}; 6\right)$ .      D.  $\left(5; \frac{11}{2}\right)$ .

**Lời giải**

Trước hết từ đồ thị ta dễ dàng có:  $f'(x) = 3a(x^2 - 3x) \rightarrow f(x) = a\left(x^3 - \frac{9}{2}x^2\right) + C$

Nhận ra  $x_2$  hoành độ đỉnh parabol đồ thị  $y = g(x)$  nên  $x_2 = \frac{3}{2} \rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{29}{12} \rightarrow C - \frac{27}{4}a = \frac{29}{12}$ . (1)

Từ đây ta cũng suy ra:  $g(x) = k\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + b$ , mà  $\begin{cases} f(0) = f(3) = 3 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{29}{12} \end{cases}$  nên giải được  $g(x) = \frac{7}{27}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{29}{12}$ .

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

$$\text{Xét hàm số } f(x) - g(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \Rightarrow \begin{cases} f(0) - g(0) = a(-x_1x_2x_3) = 5a \\ f(0) - g(0) = C - 3 \end{cases} \rightarrow C - 3 = 5a \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: } \begin{cases} C - \frac{27}{4}a = \frac{29}{12} \\ C - 3 = 5a \end{cases} \Leftrightarrow C = \frac{14}{3}; a = \frac{1}{3} \rightarrow f(x) - g(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{95x^2}{54} + \frac{7}{9}x + \frac{5}{3}$$

Thêm nữa,  $x_1, x_2, x_3$  chính là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của  $f(x), g(x)$  tức ta suy ra:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} - \frac{95x^2}{54} + \frac{7}{9}x + \frac{5}{3} = 0 \xrightarrow{\text{Chia Hookne}} \frac{1}{54} \underbrace{\left(x - \frac{3}{2}\right)}_{x=x_2} (9x^2 - 34x - 30) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{17 - \sqrt{559}}{9} \\ x_3 = \frac{17 + \sqrt{559}}{9} \end{cases}$$

$$\text{Vậy diện tích cần tìm là } S = \int_{x_2}^{x_3} |f(x) - g(x)| dx = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{17 + \sqrt{559}}{9}} \left| \frac{x^3}{3} - \frac{95x^2}{54} + \frac{7}{9}x + \frac{5}{3} \right| dx \approx 5,709. \text{ Chọn đáp án C.}$$

**ĐỀ THI THỬ SỞ NGHỆ AN**

**Câu 36:** Cho hàm số  $y = x^3 - 5x^2 + 3x$ . Xét các số thực  $a < b$ , giá trị nhỏ nhất của  $f(b) - f(a)$  bằng

**A.**  $-\frac{256}{27}$ .

**B.**  $\frac{256}{27}$ .

**C.**  $\frac{500}{27}$ .

**D.**  $-\frac{500}{27}$ .

**Lời giải**

$$\text{Trước hết ta giải phương trình } y' = 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = 3$$

$$\text{Đến đây dễ thấy } y' = 3x^2 - 10x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 3 \text{ và } f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$$

$$\text{Từ đây ta có: } \int_a^b f'(x) dx \geq \int_{\left[\frac{1}{3}; 3\right] \cap [a; b]} (3x^2 - 10x + 3) dx \geq \int_{\frac{1}{3}}^3 (3x^2 - 10x + 3) dx = -\frac{256}{27}$$

Khi ấy suy ra:  $x^3 - 5x^2 + 3x \leq y^3 - 5y^2 + 3y + \frac{256}{27}$ , đặt  $m = y - x \geq 0$ , từ đây ta có được:

$$\begin{aligned} y^3 - 5y^2 + 3y + \frac{256}{27} - (x^3 - 5x^2 + 3x) &= (y^3 - x^3) - 5(y^2 - x^2) + 3(y - x) + \frac{256}{27} \\ &= 3m \left( x + m - \frac{10}{3} \right)^2 + \frac{m^3}{4} - \frac{16}{3}m + \frac{256}{27} = 3m \left( x + m - \frac{10}{3} \right)^2 + \frac{1}{108} (3m - 8)^2 (3m + 16) \geq 0 \text{ (luôn đúng)} \end{aligned}$$

Vậy ta kết luận giá trị nhỏ nhất của  $f(b) - f(a)$  bằng  $-\frac{256}{27}$ . **Chọn đáp án A.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 39:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $z^2 - 4z + m^2 = 0$  có nghiệm  $z = z_0$  sao cho  $|z_0 - 1 - 2i| \leq 3$  ?

A. 11.

B. 12.

C. 10.

D. 9.

**Lời giải**

Ta có:  $\Delta = 16 - 4m^2$ , tiếp đến theo bất đẳng thức Mincopski ta có:  $|z_0| - |1 + 2i| \leq |z_0 + (-1 - 2i)| \leq |z_0| + |1 + 2i|$

Mà  $|z_0 + (-1 - 2i)| \leq 3$  nên suy ra:  $3 - \sqrt{5} \leq |z_0| \leq 3 + \sqrt{5}$  (\*)

Trường hợp 1:  $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 16 - 4m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$  khi ấy phương trình có 2 nghiệm thực  $\begin{cases} z_1 = 2 + \sqrt{4 - m^2} \\ z_2 = 2 - \sqrt{4 - m^2} \end{cases}$ .

Kết hợp với (\*), suy ra:  $\begin{cases} 3 - \sqrt{5} \leq 2 + \sqrt{4 - m^2} \leq 3 + \sqrt{5} \\ 3 - \sqrt{5} \leq 2 - \sqrt{4 - m^2} \leq 3 + \sqrt{5} \end{cases}$  (luôn đúng với mọi  $m \in [-2; 2]$ ) (1)

Trường hợp 2:  $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -2 \vee m \geq 2$  khi ấy phương trình có 2 nghiệm phức với  $|z_1| = |z_2| = m$

Kết hợp với (\*), suy ra:  $3 - \sqrt{5} \leq |m| \leq 3 + \sqrt{5} \xrightarrow{|m| > 3, m \in \mathbb{Z}} 3 \leq |m| \leq 5$  (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra:  $m \in \{\pm 5; \pm 4; \pm 3; \pm 2; \pm 1; 0\}$  tức có 11 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn. **Chọn đáp án A.**

**Câu 40:** Cho hàm số  $f(x) = 2^{|x-4|} + \log_2(x^2 - 8x + 17)$ . Có bao nhiêu cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $f(2^{x-2y+1}) = f(4 - 4\log_2(x - 2y))$  và  $0 < x < 2024$  ?

A. 2025.

B. 1012.

C. 2023.

D. 2024.

**Lời giải**

Trước hết ta xét  $f(x) = 2^{|x-4|} + \log_2(x^2 - 8x + 17) = 2^{|x-4|} + \log_2((x-4)^2 + 1)$

Xét tiếp:  $f(8-x) = 2^{|8-x-4|} + \log_2((8-x-4)^2 + 1) = 2^{|4-x|} + \log_2((4-x)^2 + 1) = f(x)$  tức  $f(x) = f(8-x)$ , khi ấy

phương trình đề cho có 2 trường hợp sau:  $\begin{cases} 2^{x-2y+1} = 4 - 4\log_2(x - 2y) \\ 2^{x-2y+1} = 8 - [4 - 4\log_2(x - 2y)] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x-2y+1} = 4 - 4\log_2(x - 2y) \\ 2^{x-2y+1} = 4 + 4\log_2(x - 2y) \end{cases} (*)$

Tiếp đến đặt  $t = x - 2y > 0 \xrightarrow{t \in \mathbb{Z}} t \geq 1$  thì khi ấy (\*) thành  $\begin{cases} 2^{t+1} + 4\log_2 t - 4 = 0 \\ 2^{t+1} - 4\log_2 t - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = x - 2y = 1 \\ t = x - 2y = 2 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < y_1 = \frac{x_1 - 1}{2} < \frac{2024 - 1}{2} \\ -1 < y_2 = \frac{x_2 - 2}{2} < \frac{2024 - 2}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 1011 \\ 0 \leq y_2 \leq 1010 \end{cases} \rightarrow (1011 - 0) + 1 + (1010 - 0) + 1 = 2023$  cặp  $(x; y)$ .

**Chọn đáp án C.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 41:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^3 + 5x^2 - (m+14)x - 2m, \forall x \in \mathbb{R}$  và hàm số  $g(x) = \frac{1}{3}f(x^3 - 3x + 1) + \frac{4}{3}(x^3 - 3x)m$ , với  $m$  là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên  $m$  để đồ thị hàm số  $y = g'(x)$  cắt trục hoành tại 9 điểm phân biệt?

A. 37.

B. 34.

C. 35.

D. 36.

**Lời giải**

Ta có:  $g'(x) = (x^2 - 1)f'(x^3 - 3x + 1) + 4m(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ f'(x^3 - 3x + 1) = -4m \end{cases}$ , khi ấy để thỏa mãn bài toán thì

phương trình  $f'(x^3 - 3x + 1) = -4m$  cần có 7 nghiệm phân biệt. Đặt  $t = x^3 - 3x + 1$  thì  $f'(t) = -4m$

Mặt khác, xét  $f'(t) = t^3 + 5t^2 - 14t - (t+2)m = t(t-2)(t+7) - (t+2)m$

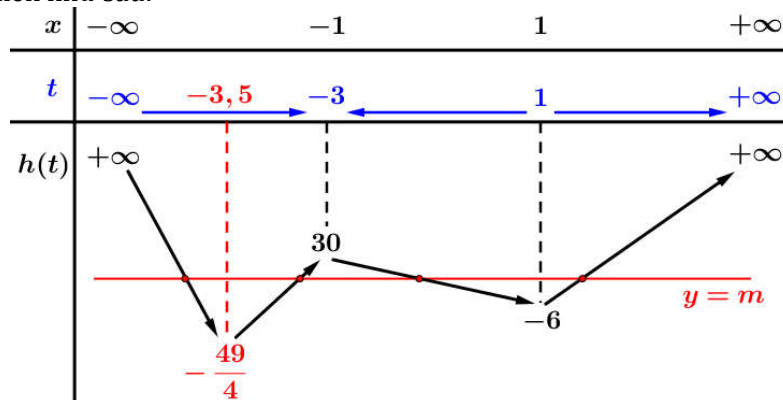
Giải phương trình  $f'(t) = -4m \Leftrightarrow t(t-2)(t+7) - (t+2)m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \rightarrow x^3 - 3x - 1 = 0 \quad (1) \\ t(t+7) = m \quad (2) \end{cases}$

Do (1) có 3 nghiệm phân biệt khác  $\pm 1$  nên để thỏa mãn bài toán thì (2) phải có 4 nghiệm phân biệt khác  $\pm 1$  và 3 nghiệm của phương trình (1). Ta có:  $m = t(t+7) = h(t)$ . (\*). Trước hết (\*) cần điều kiện  $m \neq h(2) \Rightarrow m \neq 18$  (3)

Tiếp đến ta khảo sát hàm số  $h(t) = t(t+7), t = x^3 - 3x + 1$  bằng phương pháp ghép trục như sau:

$t' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \rightarrow t(1) = 1 \vee t(-1) = -3$ ,  $h'(t) = 2t + 7 = 0 \Leftrightarrow t = -3,5$

Khi đó ta có bảng biến thiên như sau:



Như vậy để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì  $-6 < m < 30 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-5; -4; \dots; 28; 29\}$  (4)

Từ (3) và (4) ta suy ra  $m \in \{-5; -4; \dots; 17; 19; 20; \dots; 28; 29\}$  tức có 34 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn. **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 42:** Cho hai số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|w - 3 - 4i| = 1, |z^2 + 4| = 4|z|$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $|z - (2 + 2i)\bar{w}|$ . Giá trị  $M - 2m$  thuộc khoảng

- A.  $(4, 5; 5)$ . B.  $(3; 3, 5)$ . C.  $(4; 4, 5)$ . D.  $(3, 5; 4)$ .

**Lời giải**

Trước hết ta đặt  $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$  thì khi ấy ta có:

$$|z^2 + 4| = 4|z| \Leftrightarrow |x^2 - y^2 + 2xyi + 4| = 4\sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \sqrt{(x^2 - y^2 + 4)^2 + 4x^2y^2} = 4\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + 16 - (8x^2 + 8y^2) + 2x^2y^2 = 16y^2 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 4)^2 = (4y)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 4y \\ x^2 + y^2 - 4 = -4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z - 2i| = 2\sqrt{2} \\ |z + 2i| = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra  $A(z) \in (C_1)$  tâm  $I_1(0; -2), R = 2\sqrt{2}$  và  $(C_2)$  tâm  $I_2(0; 2), R = 2\sqrt{2}$ . Đặt  $u = (2 + 2i)\bar{w}$  thì khi đó  $|(2 + 2i)\bar{w} - (2 + 2i)(3 - 4i)| = |u - 14 + 2i| = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$  tức  $B(u) \in (C_3)$  tâm  $J(14; -2), R = 2\sqrt{2}$ .

Dùng hình vẽ trên  $Oxy$  ta có:  $|z - (2 + 2i)\bar{w}| = |z - u| \in [JI_1 - 2R; JI_2 + 2R] \Leftrightarrow |z - u| \in [14 - 4\sqrt{2}; 2\sqrt{53} + 4\sqrt{2}]$

Khi ấy ta thu được:  $m = 14 - 4\sqrt{2}; M = 2\sqrt{53} + 4\sqrt{2}$  tức  $M - 2m \approx 3,533 \in (3, 5; 4)$ . **Chọn đáp án D.**

**Câu 44:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(0; 3; -3), B(6; -3; 3)$ , mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$  và đường

thẳng  $\Delta: \frac{x - \frac{1}{2}}{2} = \frac{y}{2} = z$ . Mặt phẳng  $(P)$  song song với  $\Delta$  và luôn tiếp xúc với mặt cầu  $(S)$ . Một điểm  $M$  thay đổi và thỏa mãn  $MA = 2MB$ . Khoảng cách lớn nhất từ  $M$  đến  $(P)$  thuộc khoảng nào sau đây?

- A.  $(18; 18, 5)$ . B.  $(18, 5; 19)$ . C.  $(19; 19, 5)$ . D.  $(17, 5; 18)$ .

**Lời giải**

$$\text{Gọi } M(m; n; p) \text{ để: } MA = 2MB \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2 \Leftrightarrow m^2 + (n - 3)^2 + (p + 3)^2 = 4[(m - 6)^2 + (n + 3)^2 + (p - 3)^2]$$

$$\Leftrightarrow (m - 8)^2 + (n + 5)^2 + (p - 5)^2 = 48, \text{ từ đó suy ra } M \in (S') \text{ tâm } J(8; -5; 5) \text{ và bán kính } R' = 4\sqrt{3}.$$

Với  $I(0; 0; 0), J(8; -5; 5), IJ > R + R'$  nên ta suy ra hai mặt cầu  $(S)$  và  $(S')$  nằm ngoài nhau.

Tiếp đến ta xét mặt phẳng  $(P): ax + by + cz + 1 = 0$ , do  $(P)$  luôn tiếp xúc với mặt cầu  $(S)$

Khi ấy gọi  $\vec{n}_{(P)} = (a; b; c), \vec{u}_{\Delta} = (2; 2; 1), \vec{n}_{(P)} \perp \vec{u}_{\Delta}$ , khi ấy suy ra:  $2a + 2b + c = 0$

$$\text{Tiếp đến ta lại có: } d(I; (P)) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = R_{(S)} = R = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$$\text{Suy ra } d(M; (P)) \leq d(J; (P)) + R' = 4\sqrt{3} + \frac{|8a - 5b + 5c + 1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \leq 4\sqrt{3} + 1 + |8a - 5b + 5c + p(2a + 2b + c)|$$

$$= 4\sqrt{3} + 1 + |(8 + 2p)a + (2p - 5)b + (p + 5)c| \leq 4\sqrt{3} + 1 + \underbrace{\sqrt{(8 + 2p)^2 + (2p - 5)^2 + (p + 5)^2}}_A$$

Nhận xét:  $d(M; (P))_{\max}$  khi và chỉ khi  $d(J; (P))_{\max}$  và kéo theo đó biểu thức  $A$  đạt min

$$\text{Dễ dàng đánh giá được: } A = \sqrt{(8 + 2p)^2 + (2p - 5)^2 + (p + 5)^2} \sqrt{= 3\left(p + \frac{11}{9}\right)^2 - \frac{905}{9}} \geq \frac{\sqrt{905}}{3}$$

Nên suy ra  $d(M; (P))_{\max} = 4\sqrt{3} + 1 + \frac{\sqrt{905}}{3} \approx 17,955 \in (17, 5; 18)$ . **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

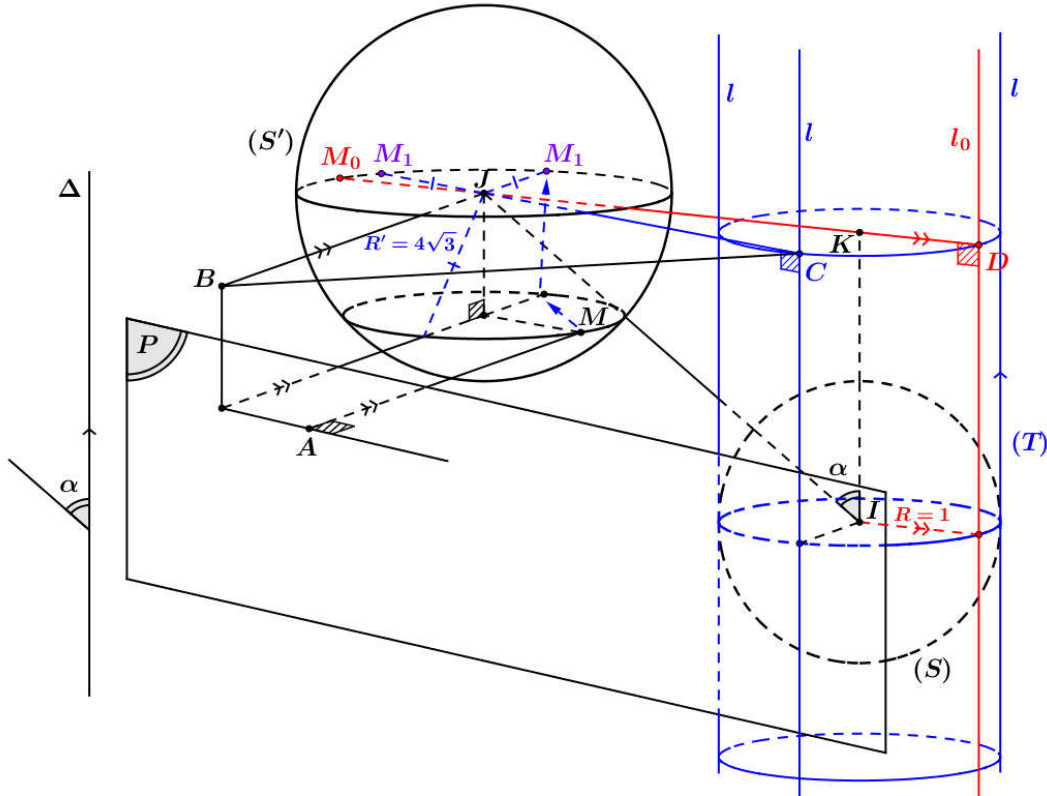
NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Cách 2:

Gọi  $M(m; n; p)$  để:  $MA = 2MB \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2 \Leftrightarrow m^2 + (n-3)^2 + (p+3)^2 = 4[(m-6)^2 + (n+3)^2 + (p-3)^2]$

$\Leftrightarrow (m-8)^2 + (n+5)^2 + (p-5)^2 = 48$ , từ đó suy ra  $M \in (S')$  tâm  $J(8; -5; 5)$  và bán kính  $R' = 4\sqrt{3}$ .

Với  $I(0; 0; 0), J(8; -5; 5), IJ > R + R'$  nên ta suy ra hai mặt cầu  $(S)$  và  $(S')$  nằm ngoài nhau.



Gọi  $l$  đường thẳng song song với  $\Delta$  và luôn tiếp xúc với  $(S)$  tức  $\Delta \subset (P)$  và  $l$  đi qua tiếp điểm của mặt phẳng  $(P)$  với mặt cầu  $(S)$ . Khi ấy suy ra quỹ tích của  $l$  là một mặt trụ có trục là đường thẳng qua  $I$  song song với đường thẳng  $\Delta$  và bán kính đúng bằng  $R = 1$ .

Gọi  $A, B$  lần lượt là hình chiếu của  $M, M_1$  lên mặt phẳng  $(P)$  với  $M_1$  là giao điểm giữa đường thẳng qua  $J$  vuông góc với  $(P)$  và  $(S)$  sao cho  $M_1$  xa  $(P)$  nhất. Dựng mặt phẳng  $(Q)$  qua tâm  $J$  song song với hai đường hình chiếu vừa vẽ cắt  $(S)$  tạo thiết diện là đường tròn  $(C) \rightarrow M_1 \in (C)$

Khi ấy:  $d(M; (P)) \leq d(M_1; (P)) = JM_1 + JB = d(J; (P)) + R'$ .

Vẽ 1 đường tròn  $(C') \in (Q)$  có tâm  $K$ , bán kính  $R = 1$  thuộc mặt trụ. Tiếp tục gọi  $C$  là hình chiếu của  $B$  lên  $l$  thì khi ấy  $C \in (C'), JB \leq JC$  tức  $d(M; (P)) \leq d(J; (P)) + R' \leq d(J; l) + R'$

Từ đó ta suy ra:  $d(M; (P)) \leq R' + d(J; l) \leq M_0D = R' + JK + KD = R' + JI \sin \alpha + R = 1 + 4\sqrt{3} + JI \sin \alpha$

Với  $\sin \alpha = \sin(\widehat{IK; IJ}) = \sin(\widehat{u_A; IJ}) = \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{u_A; IJ})}$  và  $IJ = \sqrt{114}$  thì khi đó ta suy ra:

$d(M; (P))_{\max} = 1 + 4\sqrt{3} + JI \sin \alpha = 1 + 4\sqrt{3} + \frac{\sqrt{905}}{3} \approx 17,955 \in (17,5; 18)$ . **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 46:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn điều kiện

$$f'(x) = \left( \int 2f(x) + (2x^2 + 1)e^{x^2+2x-1} dx \right)', \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(2) = e^7. \text{ Biết } f(1) = ae^2 + be^5 \text{ với } a, b \in \mathbb{Q}. \text{ Khi}$$

ấy tính giá trị của  $T = a - b$

**A.**  $T = 3$ .

**B.**  $T = 1$ .

**C.**  $T = 2$ .

**D.**  $T = 4$ .

**Lời giải**

Ta có:  $f'(x) = \left( \int 2f(x) + (2x^2 + 1)e^{x^2+2x-1} dx \right)', \forall x \in \mathbb{R}$ , thì khi ấy ta suy ra:

$$\Rightarrow f'(x) - 2f(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2+2x-1} \Leftrightarrow e^{-2x} f'(x) + (-2e^{-2x}) f(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2-1}$$

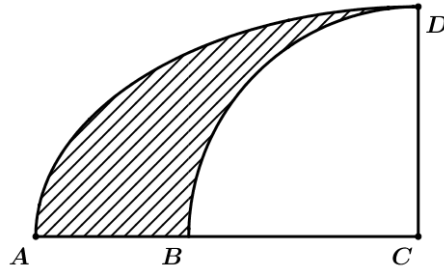
$$\Leftrightarrow \int (e^{-2x} f(x))' dx = \int (2x^2 + 1)e^{x^2-1} dx = A. \text{ Tới đây ta có thể giải nguyên hàm thành phần } A \text{ như sau:}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = e^{x^2-1} \\ dv = dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = 2xe^{x^2-1} dx \\ dv = x \end{cases} \rightarrow A = \int 2x^2 e^{x^2-1} dx + \left[ \int e^{x^2-1} dx \right] = \int 2x^2 e^{x^2-1} dx + \left[ xe^{x^2-1} - \int 2x^2 e^{x^2-1} dx \right] = xe^{x^2-1}$$

Suy ra:  $e^{-2x} f(x) = xe^{x^2-1} + C \Rightarrow f(x) = xe^{x^2+2x-1} + Ce^{2x}$ . Mà  $f(2) = e^7$  nên  $C = -e^3$  tức suy ra:

$$f(x) = xe^{x^2+2x-1} + e^{2x-3}, \text{ khi ấy: } f(1) = e^2 - e^5 \text{ tức } a = 1, b = -1 \rightarrow T = a - b = 2. \text{ Chọn đáp án C.}$$

**Câu 47:** Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền  $(H)$  (phần gạch sọc như hình vẽ bên dưới) quanh trục  $AC$ . Biết rằng  $AC = 5cm, BC = 3cm$ , miền  $(H)$  được giới hạn bởi đoạn thẳng  $AB$ , cung tròn  $BD$  có tâm  $C$ , đường cong elip  $AD$  có trục  $AC$  và  $CD$ .



Thể tích của vật trang trí bằng

**A.**  $12(cm^3)$ .

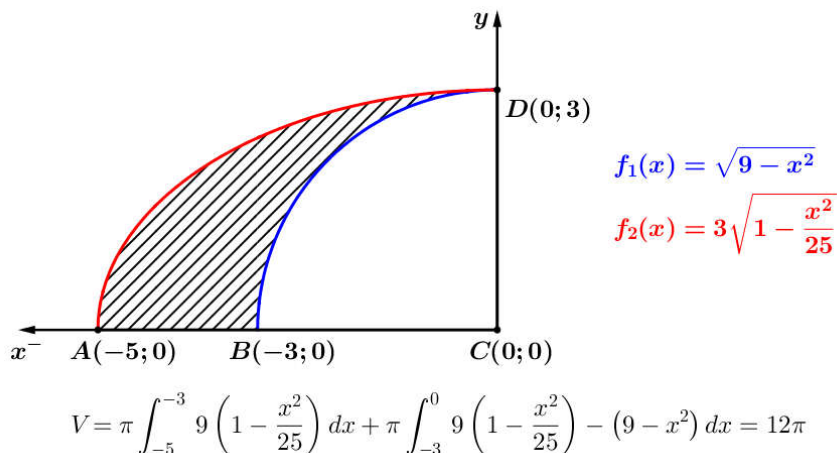
**B.**  $60\pi(cm^3)$ .

**C.**  $12\pi(cm^3)$ .

**D.**  $30\pi(cm^3)$ .

**Lời giải**

Trước hết ta chọn hệ quy chiếu  $Oxy$  như hình vẽ dưới đây.



**Chọn đáp án C.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 50:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-20; 20]$  để phương trình sau có đúng 2 nghiệm phân biệt:  $\log_6(x-1) = \log_3 \sqrt{x-1} \cdot \log_6(x^2 - 6x + m)$

A. 11.

B. 9.

C. 10.

D. 8.

**Lời giải**

Trước hết ta có:  $\begin{cases} x-1 > 0, x^2 - 6x + m > 0 \\ \log_6(x-1) = \log_3 \sqrt{x-1} \cdot \log_6(x^2 - 6x + m) \end{cases}$ . Khi ấy phương trình tương đương với:

$$\Leftrightarrow \log_6 3 \log_3(x-1) = \frac{1}{2} \log_3(x-1) \cdot \log_6(x^2 - 6x + m) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-1) = 0 \Leftrightarrow x=2 \\ x \neq 2 \\ 2 \log_6 3 = \log_6 9 = \log_6(x^2 - 6x + m) \end{cases} \quad (1)$$

Xét nhanh trường hợp  $x = x_0 = 2, x_0^2 - 6x_0 + m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 8$ , tức từ phương trình đã cho ta có:

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 8 \\ m = 9 + 6x - x^2 = u(x) \end{cases}$  phải có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn 1. Khảo sát hàm số  $u(x) = 9 + 6x - x^2$  trên  $(1; +\infty)$  với điểm cực trị tại  $x = 3$ , ta suy ra:  $14 < m < 18$ , đối chiếu điều kiện  $m \leq 8$ , ta loại tức PTVN.

Trở lại bài toán, từ (1):  $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2, m > 8 \\ m = 9 + 6x - x^2 \end{cases}$ . Khi ấy từ yêu cầu bài toán ta suy ra phương trình  $m = 9 + 6x - x^2$  (\*)

phải có đúng 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1, x_2 \neq 2$  và  $x_1, x_2 > 1$ . Khảo sát hàm số  $u(x) = 9 + 6x - x^2$  trên  $(1; +\infty) \setminus \{2\}$  với điểm cực trị tại  $x = 3$ , ta suy ra:  $m \in (-\infty; 14] \cup \{17; 18\}$ , đối chiếu với điều kiện  $m > 8$  ta suy ra  $m \in [9; 14] \cup \{17; 18\} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}}$  có 8 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn. **Chọn đáp án D.**

**ĐỀ THI THỬ CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - GIA LAI**

**Câu 46:** Xét các số thực âm  $x, y$  mà  $2xy + y$  là số nguyên sao cho thỏa mãn hệ thức sau:

$$\left(\sqrt{\log_3(2xy + y) + 1} - 2\right) \left(\log_3(2xy + y) + 2\right) - \sqrt[3]{2 \log_3(2xy + y) + 1} + 3 = 0$$

Khi biểu thức  $P = 8x + y$  đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của biểu thức  $Q = 4x + 3y$  bằng

A. -2.

B. 2.

C. 5.

D. -9.

**Lời giải**

Điều kiện:  $2xy + y > 0 \xrightarrow{2xy+y \in \mathbb{Z}} 2xy + y \geq 1$  Ta đặt  $\log_3(2xy + y) = t$  thì khi ấy phương trình ban đầu trở thành:

$$(\sqrt{t+1} - 2)(t+1) + (3 - \sqrt[3]{2t+1}) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{t+1})^3 + \sqrt{t+1} = (\sqrt[3]{2t+1})^3 + \sqrt[3]{2t+1} \quad (1)$$

Xét hàm đặc trưng  $y = f(t) = t^3 + t$  dễ dàng đánh giá được  $f(t)$  luôn đồng biến trên  $\mathbb{R}$

$$\text{Khi ấy từ (1) suy ra: } \sqrt{t+1} = \sqrt[3]{2t+1} = a \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 2a^2 - 2 \\ 2t = a^3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2a^2 - 2 = a^3 - 1 \Leftrightarrow a^3 - 2a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } t = a^2 - 1 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 5 \pm 2\sqrt{5} \end{cases}, \text{ mà } \log_3(2xy + y) = t \text{ nên: } \begin{cases} \log_3(2xy + y) = 0 \\ \log_3(2xy + y) = 5 \pm 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + y = 1 \\ 2xy + y = 3^{5 \pm 2\sqrt{5}} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2xy + y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2x+1} \text{ (thỏa mãn)} \rightarrow P = 8x + y = 8x + \frac{1}{2x+1}, \text{ xét hàm số } f(x) = 8x + \frac{1}{2x+1}, \forall x \in (-\infty; 0)$$

dễ thấy  $\max P = f\left(-\frac{3}{4}\right) = -8$  nên  $(x; y) = \left(-\frac{3}{4}; -2\right)$  tức  $Q = 4x + 3y = -9$ . **Chọn đáp án D.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

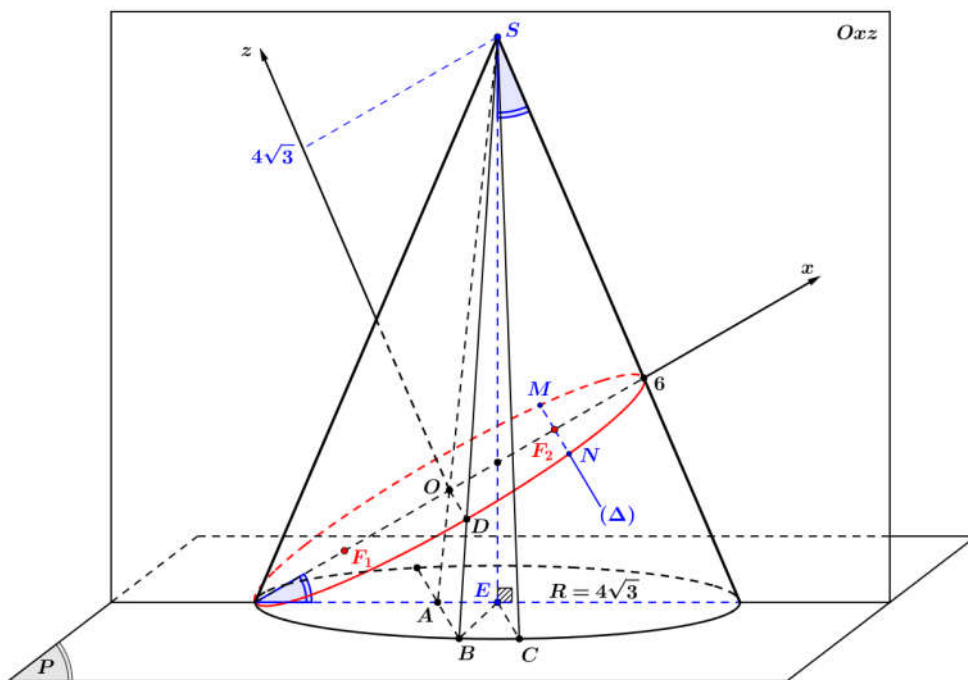
NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 47:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình nón  $(N)$  có đỉnh  $S(6;0;4\sqrt{3})$  đáy là hình tròn tâm  $E(0;0;-2\sqrt{3})$  và bán kính  $R=4\sqrt{3}$ . Mặt phẳng  $(Oxy)$  cắt mặt nón theo giao tuyến là đường elip tâm  $O$  và có tiêu điểm  $F_1, F_2$  trên trục  $Ox$ , đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $F_2$  ( $F_2$  có hoành độ dương) và song song với trục  $Oy$  cắt mặt nón tại hai điểm  $M, N$ . Độ dài  $MN$  bằng

- A. 8.                      B.  $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ .                      C.  $6\sqrt{3}$ .                      D. 10.

Lời giải

Cách 1: Ta có:  $\begin{cases} \overrightarrow{ES} = (6; 0; 6\sqrt{3}) = m(1; 0; \sqrt{3}) \\ SE = 12, \vec{k} = \vec{n}_{(Oxy)} = (0; 0; 1) \end{cases}$  và  $\sin(\widehat{ES; (Oxy)}) = \sin(\widehat{ES; \vec{k}}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} (\widehat{ES; (Oxy)}) = 60^\circ \\ \alpha = 30^\circ \end{cases}$



Đầu tiên ta viết được phương trình mặt phẳng  $(P)$  qua  $E$  và vuông góc với  $SE$  và gọi  $A = SO \cap (P)$

Suy ra:  $(P): x + \sqrt{3}z + 6 = 0$  và giải ra tọa độ  $A\left(-2; 0; -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ , suy ra  $SA = \frac{8\sqrt{21}}{3}$ ,  $AE = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ , mà  $BE = R = 4\sqrt{3}$

nên khi ấy suy ra:  $AB = \sqrt{R^2 - AE^2} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ , theo định lí Thales ta có:  $\frac{SO}{SA} = \frac{OD}{AB}$  và gọi  $|a|, |b|$  lần lượt là các độ dài bán trục lớn, trục bé của elip thiết diện trên, khi ấy ta suy ra:  $|b| = OD = \frac{SO \cdot AB}{SA} = 2\sqrt{6}$ , cùng với  $|a| = 6$

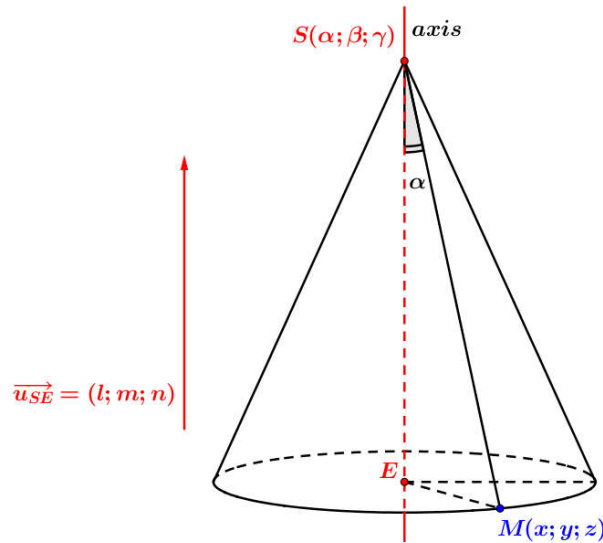
Khi đó ta lập được phương trình elip  $(E): \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{24} = 1$ , gọi  $F_1(-c; 0), F_2(c; 0), c > 0$  lần lượt là tọa độ hai tiêu điểm của  $(E)$ , ta luôn có:  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{3}$  tức  $F_2(2\sqrt{3}; 0)$  kéo theo đó  $x_M = x_N = c_0 = 2\sqrt{3}$

Từ giả thiết ta suy ra tung độ của hai điểm  $M, N$  lần lượt là:  $y_{M,N} = \pm 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 - \frac{c_0^2}{36}} = \pm 4$

Vậy độ dài của đoạn thẳng  $MN = |y_M - y_N| = 8$ . **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Cách 2:



Từ hình vẽ trên, ta có:

$$\begin{cases} (SE): \frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} \rightarrow \overrightarrow{u_{SE}} = (l; m; n) \\ \overrightarrow{SM} = (x-\alpha; y-\beta; z-\gamma) \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{SE}{SM} = \frac{l(x-\alpha) + m(y-\beta) + n(z-\gamma)}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}}$$

Vậy, phương trình tổng quát mặt nón là:

$$\left[ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 \right] \cos^2 \alpha = \frac{[l(x-\alpha) + m(y-\beta) + n(z-\gamma)]^2}{l^2 + m^2 + n^2}$$

Áp dụng tính chất trên, ta giải bài toán này như sau: hình nón  $(N)$  có  $\overrightarrow{ES} = k(1; 0; \sqrt{3})$  là vector chỉ phương chứa trục của  $(N)$ , đỉnh có tọa độ  $S(6; 0; 4\sqrt{3})$  và góc giữa đường sinh và trục bằng  $\alpha = 30^\circ \rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , suy ra:

$$\text{Phương trình của mặt nón } (N): 3\left((x-6)^2 + y^2 + (z-4\sqrt{3})^2\right) = \left[(x-6) + \sqrt{3}(z-4\sqrt{3})\right]^2$$

Gọi  $(E)$  là mặt elip thiết diện của mặt phẳng  $(Oxy): z = 0$  khi cắt mặt nón  $(N)$ , khi ấy ta suy ra:

$$(E): \begin{cases} 3\left((x-6)^2 + y^2 + (z-4\sqrt{3})^2\right) = \left[(x-6) + \sqrt{3}(z-4\sqrt{3})\right]^2 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3\left((x-6)^2 + y^2 + 48\right) = (x-18)^2$$

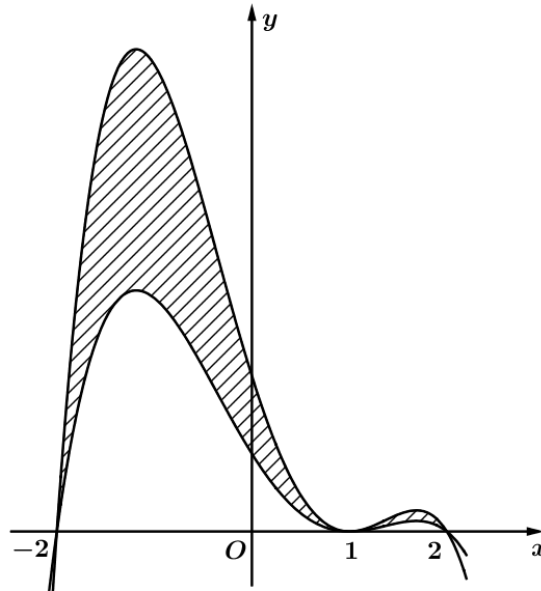
$$\Leftrightarrow 3x^2 - 36x + 108 + 3(y^2 + 48) = x^2 - 36x + 18^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 3y^2 = 72 \Leftrightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{24} = 1$$

$$\text{Khi ấy suy ra phương trình: } (E): \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{24} = 1, \text{ kéo theo đó ta cũng có: } \begin{cases} |a| = 6, |b| = 3, c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{3} \\ F_1(-2\sqrt{3}; 0), F_2(2\sqrt{3}; 0) \end{cases} \text{ với}$$

$|a|, |b|, |c|$  lần lượt là các độ dài bán trục lớn, bán trục bé và bán tiêu cự của  $(E)$

$$\text{Từ đó theo giả thiết ta suy ra: } \begin{cases} x_M = x_N = 2\sqrt{3} \\ y_{M,N} = \pm 4 \end{cases} \text{ tức ta kết luận được } MN = |y_M - y_N| = 8. \text{ Chọn đáp án A.}$$

**Câu 48:** Cho hai hàm đa thức bậc bốn  $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ,  $y = g(x) = a'x^4 + b'x^3 + c'x^2 + d'x + e'$  và có  $a + a' = -\frac{3}{5}$ . Biết rằng đồ thị của hai hàm số này cắt nhau tại đúng 3 điểm có hoành độ lần lượt là  $-2; 1; 2$  và diện tích hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số (phần gạch sọc như hình vẽ) là  $\frac{96}{25}$ . Khi hình  $(H)$  quay xung quanh trục  $Ox$ , khối tròn xoay tạo thành có thể tích gần nhất với số nào?



A. 21,26.

B. 1748,58.

C. 177,17.

D. 66,79.

**Lời giải**

Trước hết từ giả thiết ta suy ra: 
$$\begin{cases} f(x) = ax^4 + \dots \\ g(x) = \left(-\frac{3}{5} - a\right)x^4 + \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) - g(x) = \left(2a + \frac{3}{5}\right)(x-1)^2(x^2-4) \\ f(x) + g(x) = -\frac{3}{5}(x-1)^2(x^2-4) \end{cases}$$

Suy ra: 
$$S = \left|2a + \frac{3}{5}\right| \int_{-2}^2 \left|(x-1)^2(x^2-4)\right| dx = \frac{96}{25} \Leftrightarrow \left|2a + \frac{3}{5}\right| = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ a = -\frac{2}{5} \end{cases} \text{ do } |f(0) - g(0)| < 1 \text{ nên } a = -\frac{3}{5}$$

Từ đó ta suy ra: 
$$f(x) - g(x) = -\frac{1}{5}(x-1)^2(x^2-4)$$

Vậy 
$$V = \pi \int_{-2}^2 |f^2(x) - g^2(x)| dx = \pi \int_{-2}^2 |(f(x) - g(x))(f(x) + g(x))| dx = \frac{3\pi}{25} \int_{-2}^2 \left|(x-1)^4(x^2-4)^2\right| dx \approx 66,791$$

**Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**ĐỀ THI THỬ SỞ HẢI DƯƠNG**

**Câu 41:** Cho hai số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|z + 2w| = 3, |2z + 3w| = 5$  và  $|z + 3w| = 4$ . Khi đó tính giá trị của biểu thức

$$P = \bar{z}w + z\bar{w} ?$$

A. 4.

B. 3.

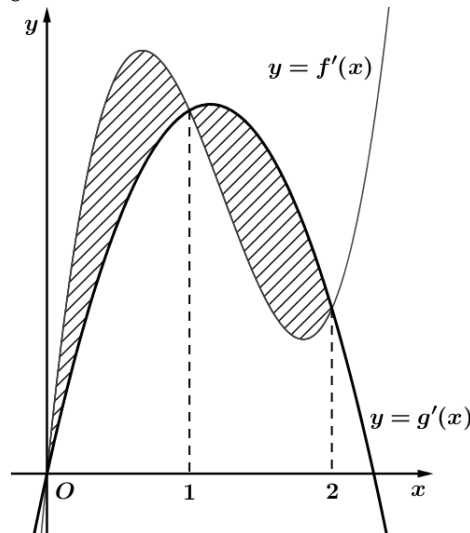
C. 1.

D. 2.

**Lời giải**

Từ giả thiết ta suy ra: 
$$\begin{cases} 4|z|^2 + 9|w|^2 + 6(\bar{z}w + z\bar{w}) = 25 \\ |z|^2 + 9|w|^2 + 3(\bar{z}w + z\bar{w}) = 16 \\ |z|^2 + 4|w|^2 + 2(\bar{z}w + z\bar{w}) = 9 \end{cases}, \text{ giải hệ thu được: } \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ |w|^2 = 1 \\ \bar{z}w + z\bar{w} = 2 \end{cases} \text{ . Chọn đáp án D.}$$

**Câu 42:** Cho hai hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và hàm số  $f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  và  $g'(x) = mx^2 + nx + p$  có đồ thị như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  và  $y = g'(x)$  bằng 10 và  $f(2) = g(2)$ . Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  bằng  $\frac{a}{b}$  (với  $a, b \in \mathbb{N}$  và  $a, b$  nguyên tố cùng nhau). Tính  $a - b$  ?



A. 20.

B. 18.

C. 19.

D. 13.

**Lời giải**

Từ hình vẽ, ta suy ra:  $f'(x) - g'(x) = ax(x-1)(x-2)$

Do diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  và  $y = g'(x)$  bằng 10 nên khi đó ta suy ra:

$$S = \int_0^2 |f'(x) - g'(x)| dx = 10 \Leftrightarrow |a| \int_0^2 |x(x-1)(x-2)| dx = 10 \Leftrightarrow a = 20 \text{ tức } f'(x) - g'(x) = 20x(x-1)(x-2)$$

Đặt  $h(x) = f(x) - g(x)$  thì khi đó ta suy ra: 
$$\begin{cases} h(2) = f(2) - g(2) = 0 \\ h'(x) = f'(x) - g'(x) = 20x(x-1)(x-2) \end{cases}$$

Suy ra:  $h(x) = \int 20x(x-1)(x-2) dx = 5x^4 - 20x^3 + 20x^2 + C$  mà  $h(2) = 0$  nên  $C = 0$

Suy ra diện tích cần tìm bằng:  $S = \int_0^2 |h(x)| dx = \int_0^2 |5x^4 - 20x^3 + 20x^2| dx = \frac{16}{3}$  tức  $a - b = 13$ . **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 49:** Giả sử  $z_1, z_2$  là hai trong các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z+1+i|=2$  và  $|z_1|+|z_2|=|z_1-z_2|$ . Khi biểu thức  $P=|z_1-2z_2|$  đạt giá trị nhỏ nhất thì số phức  $z_1$  có tích phần thực và phần ảo bằng

- A.  $\frac{3}{2}$ .                      B.  $-\frac{9}{8}$ .                      C.  $-\frac{3}{2}$ .                      D. 0.

**Lời giải**

Từ giả thiết ta gọi  $A(z_1), B(z_2)$  với hai điểm  $A, B$  thuộc đường tròn  $(C)$  tâm  $I(-1;-1)$ , bán kính  $R=2$

Tiếp đến ta có  $|z_1|+|z_2|=|z_1-z_2|$  tức  $OA+OB=AB$  nên suy ra  $O, A, B$  thẳng hàng tức  $O$  nằm giữa  $AB$

Suy ra:  $P=|z_1-2z_2|^2=OA^2+4OB^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ , do  $O$  nằm giữa  $AB$  nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta suy ra:

$$P^2=|z_1-2z_2|^2=OA^2+(2OB)^2+4OA\cdot OB\geq 4OA\cdot OB+4OA\cdot OB=8OA\cdot OB$$

Cát tuyến qua  $O$  cắt đường tròn tại hai điểm  $A, B$ , khi ấy sử dụng phương tích đường tròn, ta luôn có:

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-OA\cdot OB=OI^2-R^2=-2 \text{ tức } P\geq\sqrt{8OA\cdot OB}=4 \text{ (luôn đúng với } O \text{ nằm trong và ngoài đoạn } AB \text{)}.$$

Khi ấy dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $OA=2OB$  mà  $OA\cdot OB=2$  nên  $OA=2, OB=1$  tức  $|z_1|=2$

$$\text{Gọi } z_1=a+bi \text{ thì khi đó: } \begin{cases} |z_1|^2=a^2+b^2=4 \\ |z+1+i|^2=(a+1)^2+(b+1)^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=4 \\ a+b=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{ab=-\frac{3}{2}}. \text{ Chọn đáp án C.}$$

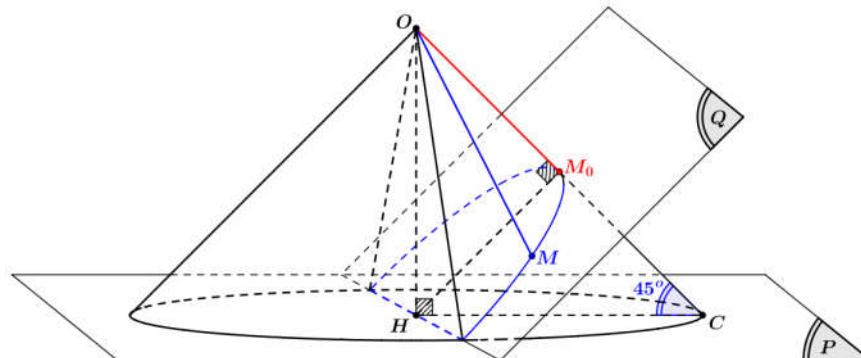
**Câu 50:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình nón  $(N)$  có đỉnh  $O(0;0;0)$ , có độ dài đường sinh là  $4\sqrt{2}$  và đường tròn đáy nằm trên mặt phẳng  $(P): x-2y+2z+12=0$ . Gọi  $(C)$  là giao tuyến của mặt xung quanh  $(N)$  với mặt phẳng  $(Q): x+z+4=0$  và  $M$  là một điểm di động trên đường cong  $(C)$ . Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng  $OM$  thuộc khoảng nào dưới đây?

- A.  $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$ .                      B.  $\left(2; \frac{5}{2}\right)$ .                      C.  $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ .                      D.  $\left(3; \frac{7}{2}\right)$ .

**Lời giải**

**Cách 1:** Từ giả thiết, ta gọi  $(d)$  là đường thẳng qua  $O$  chứa đường cao  $h$  của hình nón  $(N)$  và  $\alpha$  là góc giữa

đường cao và đường sinh của  $(N)$ , khi ấy suy ra  $h=d(O;(P))=4, \overrightarrow{u_{(d)}}=(1;-2;2)$  và  $\alpha=45^\circ$ , ta có hình vẽ sau:



Từ hình vẽ, ta suy ra quỹ tích của điểm  $M$  là một đường conic (một parabol) gọi là đường cong  $(C)$

Khi ấy ta đánh giá được  $OM$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $M \equiv M_0$

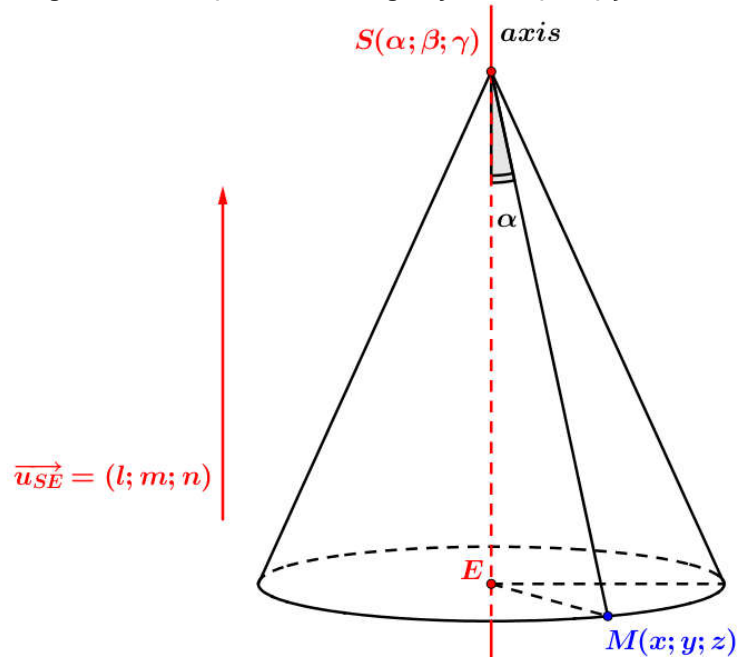
Để thấy  $\triangle OHC$  và thiết diện của mặt phẳng qua trục đều là các tam giác vuông cân lần lượt tại  $H$  và  $O$  nên suy ra

$$HM_0 \perp OC, \text{ khi ấy ta dễ dàng suy ra } OM_0 = \frac{OH}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ tức } OM_{\min} = 2\sqrt{2} \approx 2,83 \in \left(\frac{5}{2}; 3\right). \text{ Chọn đáp án A.}$$

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Cách 2:** (Sử dụng cho mặt phẳng bất kì cắt mặt nón và không có yếu tố đặc biệt)



Từ hình vẽ trên, ta có:

$$\begin{cases} (SE): \frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} \rightarrow \vec{u}_{SE} = (l; m; n) \\ \vec{SM} = (x-\alpha; y-\beta; z-\gamma) \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{SE}{SM} = \frac{l(x-\alpha) + m(y-\beta) + n(z-\gamma)}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}}$$

Phương trình tổng quát mặt nón là:  $\left[ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 \right] \cos^2 \alpha = \frac{[l(x-\alpha) + m(y-\beta) + n(z-\gamma)]^2}{l^2 + m^2 + n^2}$

Áp dụng tính chất trên, ta giải bài toán này như sau: gọi  $(d)$  là đường thẳng qua  $O$  chứa đường cao  $h$  của hình nón  $(N)$  và  $\alpha$  là góc giữa đường cao và đường sinh của  $(N)$ , khi ấy suy ra  $h = d(O; (P)) = 4$ ,  $\vec{u}_{(d)} = (1; -2; 2)$  và  $\alpha = 45^\circ$

Suy ra tập hợp điểm  $M(x; y; z) \in (N): \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} = \frac{(x-2y+2z)^2}{9}$ , mặt khác  $M \in (Q): x+z+4=0$  nên suy ra

$$M \in (C) = (N) \cap (Q) \Rightarrow M \in (C): \frac{x^2 + y^2 + (x+4)^2}{2} = \frac{(x+2y+8)^2}{9} \Leftrightarrow 16x^2 + 40x - 8xy + y^2 - 64y + 16 = 0$$

Suy ra:  $8xy = 16x^2 + 40x + y^2 - 64y + 16$ , kéo theo đó ta phân tích được:

$$OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2}{9}(x-2y+2z)^2 = \frac{2}{9}(x+2y+8)^2 = \frac{1}{9}(2x^2 + 8y^2 + 32x + 64y + 8xy + 128)$$

$$= \frac{1}{9}(2x^2 + 8y^2 + 32x + 64y + 16x^2 + 40x + y^2 - 64y + 16 + 128) = 2x^2 + y^2 + 8x + 16 = 2(x+2)^2 + y^2 + 8 \geq 8$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $OM$  bằng  $2\sqrt{2} \approx 2,83 \in \left(\frac{5}{2}; 3\right)$  với dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $x = -2, y = 0$ , thế vào

phương trình  $(C)$  ta thu được  $z = -2$ , tức min xảy ra khi  $M \equiv M_0(-2; 0; -2)$  trùng với đỉnh của parabol  $(C)$

**Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG – PHÚ THỌ

**Câu 42:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 50$  và hai mặt phẳng  $(P): x + y + 2z - 15 = 0$ ,  $(Q): x - y - 4\sqrt{3}z - 25 = 0$ . Hai điểm  $M, N$  thay đổi lần lượt thuộc các đường tròn là giao tuyến của  $(P), (Q)$  với  $(S)$ , giá trị nhỏ nhất của  $MN$  bằng bao nhiêu?

A.  $\sqrt{5}$ .

B.  $2\sqrt{10}$ .

C.  $2\sqrt{5}$ .

D.  $\sqrt{10}$ .

**Lời giải**

Dễ thấy khi đọc 4 đáp án A, B, C, D các kết quả đều là số dương, chứng tỏ rằng hai đường tròn giao tuyến mà đề bài nêu trên không cắt nhau (vì nếu cắt nhau thì giá trị nhỏ nhất của  $MN$  bằng không).

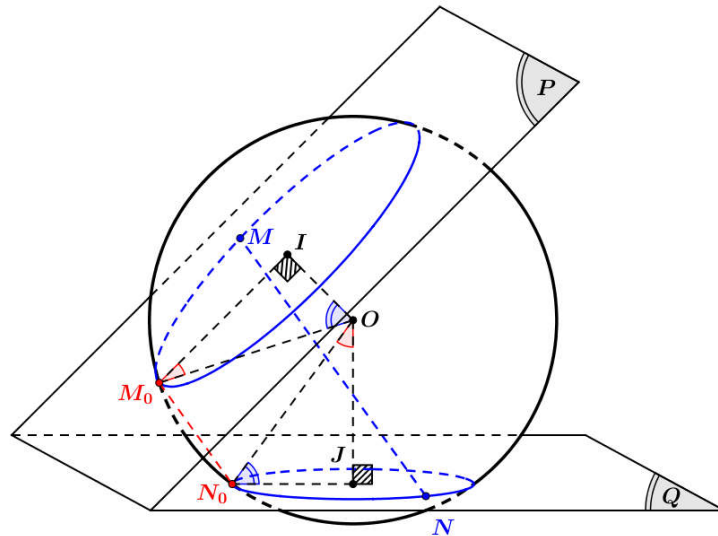
Trước hết ta có mặt cầu  $(S)$  có tâm trùng với gốc tọa độ, bán kính  $R = 5\sqrt{2}$ .

Giả sử hai đường tròn thiết diện của khi hai mặt phẳng  $(P), (Q)$  cắt  $(S)$  là  $(C_1), (C_2)$  có tâm lần lượt là  $I, J$  và

$$\text{bán kính lần lượt là } a, b. \text{ Khi đó ta suy ra: } \begin{cases} d(O; (P)) = OI = \frac{5\sqrt{6}}{2} \\ d(O; (Q)) = OJ = \frac{5}{\sqrt{2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = MI = \sqrt{R^2 - d^2(O; (P))} = \frac{5}{\sqrt{2}} \\ b = NJ = \sqrt{R^2 - d^2(O; (Q))} = \frac{5\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} (P): x + y + 2z - 15 = 0 \\ (Q): x - y - 4\sqrt{3}z - 25 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2z = 15 - x_o - y_o > 0 \\ 4\sqrt{3}z = x_o - y_o - 25 < 0 \end{cases} \text{ nên } O \text{ bị kẹp giữa hai mặt phẳng } (P), (Q).$$

Khi đó ta dễ dàng đánh giá được  $MN$  đạt giá trị nhỏ nhất ( $MN \equiv M_0N_0$ ) khi và chỉ khi đoạn thẳng  $MN$  đồng phẳng với mặt phẳng  $(OIJ)$  như hình vẽ dưới đây:



$$\text{Tới đây ta có: } \begin{cases} OI = JN_0 \\ OJ = IM_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \widehat{IOM_0} = \widehat{IN_0J} \\ \widehat{JON_0} = \widehat{OM_0I} \end{cases} \rightarrow \widehat{IOM_0} + \widehat{JON_0} = \widehat{IOM_0} + \widehat{OM_0I} = 90^\circ$$

$$\text{Khi ấy ta lần lượt suy ra: } \begin{cases} \cos \widehat{IOJ} = \frac{OI^2 + OJ^2 - IJ^2}{2OI.OJ} = -\frac{4}{5} \\ \cos \widehat{M_0ON_0} = \cos \left( \widehat{IOJ} + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \widehat{IOJ} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{IOJ}} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\text{Vậy ta suy ra: } MN_{\min} = M_0N_0 = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R.R.\cos \widehat{M_0ON_0}} = R\sqrt{2 - 2.\left(\frac{3}{5}\right)} = 2\sqrt{10}. \text{ Chọn đáp án B.}$$

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 40:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để có đúng 4 cặp số nguyên dương  $(x; y)$  thỏa mãn  $3^x - m \leq y \leq \log_3(x + m)$  ?

A. 17.

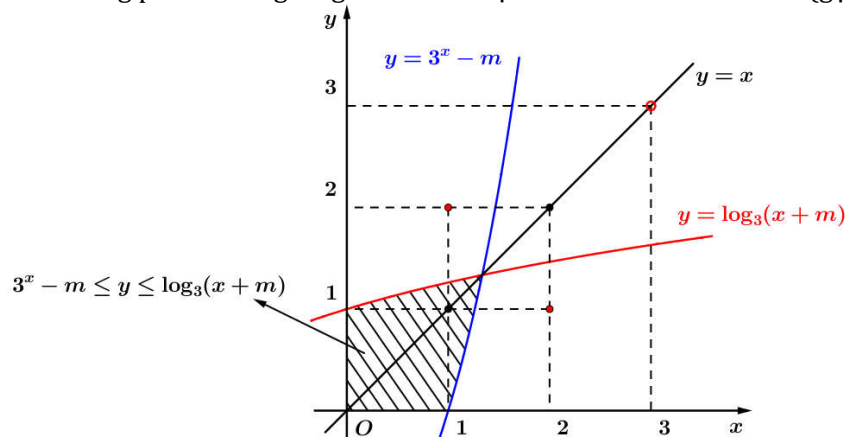
B. 3.

C. 15.

D. 16.

**Lời giải**

Trước hết ta dễ dàng nhận thấy hai hàm số  $3^x - m$  và  $\log_3(x + m)$  luôn tăng và đối xứng nhau qua đường thẳng  $y = x$  nên khi đó ta suy ra giá trị  $y$  nằm trong bất phương trình  $3^x - m \leq y \leq \log_3(x + m)$  biểu diễn giá trị các tung độ của các điểm nằm trong phần miền giao giữa hai đồ thị của hai hàm số nêu trên (gọi tắt là miền  $D$ ).



Theo giả thiết, thì có đúng 4 cặp  $(x; y)$  nguyên dương thỏa mãn bất phương trình ban đầu tức phần miền  $D$  đã nêu phải chứa 4 đúng tọa độ nguyên. Gọi  $x_0$  là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số  $3^x - m$  và  $\log_3(x + m)$  tức điểm  $x_0$  này thuộc đường thẳng  $y = x$ . Dễ thấy với  $x_0 = 1$  thì miền  $D$  chứa **1 cặp**  $(x; y)$  nguyên dương, Với  $x_0 = 2$  thì  $m = 7$ , khi đó miền  $D$  chứa **2 cặp**  $(x; y)$  nguyên dương tức  $\log_3(x_0 + 7) \leq 2, \forall x_0 \in (1; 2]$  Với  $x_0 = 3$  thì  $m = 24$ , khi đó miền  $D$  chứa **5 cặp**  $(x; y)$  nguyên dương tức  $\log_3(x_0 + 24) \geq 2, \forall x_0 \in [1; 2]$  Từ đây ta nhận xét được khi giá trị nguyên dương  $m$  càng **tăng** thì số cặp  $(x; y)$  nguyên dương cũng **tăng**. Suy ra, với miền  $D$  chứa **4 cặp**  $(x; y)$  nguyên dương thì tương đương với giá trị  $m = m_1$  chính là nghiệm của phương trình sau:  $3^a - m_1 = \log_3(a + m_1), \forall a \in (2; 3)$ .

Giải nhanh phương trình đặc trưng thì suy ra được:  $3^a - m_1 = a, \forall a \in (2; 3) \Leftrightarrow m_1 = 3^a - a, \forall a \in (2; 3)$

Xét nhanh hàm số  $f(a) = 3^a - a$  có  $f'(a) = 3^a \ln 3 - 1 > 0, \forall a \in (2; 3)$  tức  $f(a)$  luôn đồng biến trên  $(2; 3)$

Suy ra  $m_1 \in (f(2); f(3)) \Leftrightarrow m_1 \in (7; 24)$  mà  $m \in \mathbb{Z}^+$  nên  $m \in \{8; 9; \dots; 23\}$  tức có 16 giá trị nguyên dương  $m$  thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án D.**

**Câu 48:** Xét số phức  $z$  thỏa mãn  $|z^2 + 1| = 2|z + 1|$ . Giá trị lớn nhất của  $|z|$  bằng

A.  $2\sqrt{3}$ .

B.  $2\sqrt{2}$ .

C.  $\frac{\sqrt{15}}{2}$ .

D.  $\sqrt{7}$ .

**Lời giải**

Ta đặt  $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$  thì khi đó phương trình ban đầu trở thành:  $(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 = 4(x + 1)^2 + 4y^2$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 - y^2) + 1 = 4(x^2 + y^2) + 8x + 4 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 6(x^2 + y^2) - 3 = -4x^2 + 8x = -4(x - 1)^2 + 4 \leq 4$$

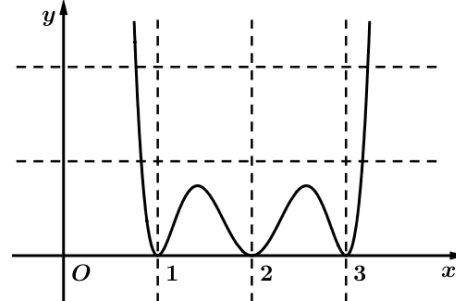
Suy ra:  $(x^2 + y^2)^2 - 6(x^2 + y^2) \leq 7$ , mà  $|z|^2 = x^2 + y^2$  nên  $|z|^4 - 6|z|^2 - 7 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq |z| \leq \sqrt{7}$

Giá trị lớn nhất của  $|z|$  bằng  $\sqrt{7}$ , dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $(x; y) = (1; \pm\sqrt{6}) \Rightarrow z = 1 \pm \sqrt{6}i$ . **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 44:** Cho hình vẽ dưới là đồ thị của hàm số  $y = f(x).g(x)$  với hàm số  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c$  và hàm số  $y = g(x) = 3x^3 + mx^2 + nx + p$ . Biết  $x = 2$  là điểm cực đại của hàm số  $y = g(x)$ , khi ấy giá trị của  $\min_{[0;4]} f(x) + \max_{[0;4]} g(x)$  bằng bao nhiêu?



A. 11.

B. 12.

C. 13.

D. 14.

**Lời giải**

Trước hết ta nhận thấy hàm số  $f(x), g(x)$  đều có bậc cao nhất là 3 nên suy ra hàm số  $y = f(x).g(x)$  sẽ có bậc cao nhất là 6 với  $y = f(x).g(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \dots\right)(3x^3 + \dots) = x^6 + \dots$ . Kết hợp với đồ thị đã cho ta cũng suy ra được

$y = f(x).g(x) = x^6 + \dots = (x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$ . Do  $x = 2$  là điểm cực đại của hàm số  $y = g(x)$  nên suy ra  $g'(2) = 0, g''(2) < 0$  tức  $y = g(x) = 3(x-2)^2(x-\alpha)$

Trường hợp 1:  $\alpha = 3 \rightarrow y = g(x) = 3(x-2)^2(x-3)$  thì khi đó  $g'(x) = 3x^2 - 14x + 16 \rightarrow g''(x) = 6x - 14$

Thế  $x = 2$  vào ta dễ thấy  $g'(2) = 0 \rightarrow g'(2) < 0$  tức  $x = 2$  là điểm cực đại nên ta nhận.

Trường hợp 2:  $\alpha = 1 \rightarrow y = g(x) = 3(x-2)^2(x-1)$  thì khi đó  $g'(x) = 3x^2 - 10x + 8 \rightarrow g''(x) = 6x - 10$

Thế  $x = 2$  vào ta dễ thấy  $g'(2) = 0 \rightarrow g'(2) > 0$  tức  $x = 2$  là điểm cực tiểu nên ta loại.

Tóm lại, ta thu được  $y = g(x) = 3(x-2)^2(x-3)$  nên kéo theo có được  $y = f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$

Từ đó dễ dàng có được  $\min_{[0;4]} f(x) = -1, \max_{[0;4]} g(x) = 12$  tức  $\min_{[0;4]} f(x) = -1 + \max_{[0;4]} g(x) = 11$ . **Chọn đáp án A.**

**Câu 50:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(0; -1; 1)$  và  $B(1; 1; 0)$ . Điểm  $M$  thay đổi thuộc mặt phẳng  $Oxy$  sao cho  $OM = \sqrt{13}$ , đường thẳng  $d$  qua  $M$  song song với  $Oz$  cắt  $AB$  tại điểm  $C(a; b; c) (a > 0)$ . Giá trị của  $a + b + c$  bằng

A.  $-\frac{12}{5}$ .

B. 4.

C. 5.

D. 6.

**Lời giải**

Từ giả thiết ta có:  $M(p; \sqrt{13-p^2}; 0)$ , viết được  $(d): \begin{cases} x = p, y = \sqrt{13-p^2} \\ z = t \end{cases}$ , cùng với  $(AB): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = -t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$  ta

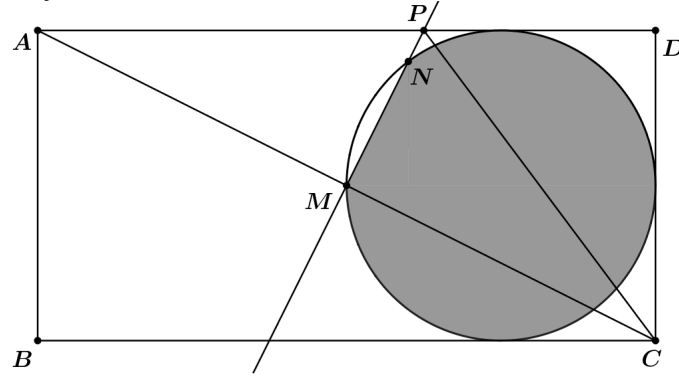
suy ra:  $C = (AB) \cap (d) \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1+t, m = -t \\ \sqrt{13-p^2} = 1+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1-m \\ \sqrt{13-p^2} = 1-2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 2 > 0 \\ p = -\frac{1}{5} < 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{p = 2}$

Vậy ta suy ra  $C(2; 3; -1) \rightarrow a + b + c = 4$ . **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 45:** Từ một tấm bìa giấy hình chữ nhật  $ABCD$  có kích thước  $AB = 8\text{cm}$ ,  $AD = 16\text{cm}$ , người ta vẽ một đường tròn tiếp xúc với ba cạnh  $AD, BC, CD$  và kẻ một đường thẳng  $d$  cắt đường tròn theo dây cung  $MN$ . Biết  $d$  cắt cạnh  $AD$  tại  $P$  sao cho  $AP = PC$  và  $d$  chia tấm bìa thành hai miền có diện tích bằng nhau. Quay tấm bìa quanh cạnh  $BC$  thì miền phẳng được tô đậm tạo thành một vật thể tròn xoay có thể tích gần nhất với giá trị nào dưới đây?



A.  $13088\text{cm}^3$ .

B.  $12999\text{cm}^3$ .

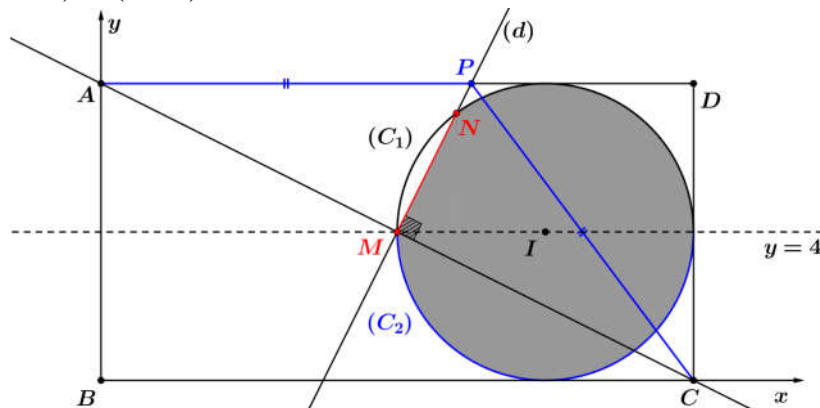
C.  $13089\text{cm}^3$ .

D.  $13000\text{cm}^3$ .

**Lời giải**

Từ giả thiết ta suy ra  $\triangle APC$  cân tại  $P$  nhận  $d$  là đường thẳng trung trực của  $AC$ , tiếp đến ta áp hệ quy chiếu  $Oxy$  với  $O \equiv B$  vào hình vẽ để cho, khi ấy ta có phương trình  $(AC): x + 2y = 16$  và  $(d): 2x - y - 12 = 0$

Tiếp đến, do đường tròn (gọi là  $(C)$ ) tiếp xúc với ba cạnh  $AD, BC, CD$  nên suy ra  $(C)$  có tâm là  $I(12; 4)$  và bán kính  $R = 4$  tức  $(C): (x - 12)^2 + (y - 4)^2 = 16$ .



Theo giả thiết cho đường thẳng  $d$  cắt đường tròn theo dây cung  $MN$  nên hoành độ các điểm  $M, N$  chính là

ng nghiệm của hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} (x - 12)^2 + (y - 4)^2 = 16 \\ 2x - y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x - 12)^2 + (2x - 16)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = \frac{48}{5} \end{cases} \text{ tức ta lần}$$

lượt thu được tọa độ  $M(8; 4)$  và  $N(\frac{48}{5}; \frac{36}{5})$ , khi ấy ta cũng suy ra được  $M, N \in (C_1): y = 4 + \sqrt{16 - (x - 12)^2}$  và

$M$  là trung điểm  $AC$  với  $(C_1), (C_2): y = 4 - \sqrt{16 - (x - 12)^2}$  lần lượt là phương trình thành phần của  $(C)$

Gọi  $(S_1)$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $(d)$ , đường thẳng  $y = 4$  với  $x = 8, x = \frac{48}{5}$ .

Gọi  $(S_2)$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $(C_1)$ , đường thẳng  $y = 4$  với  $x = \frac{48}{5}, x = 16$ .

Gọi  $(S_3)$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $(C_2)$ , đường thẳng  $y = 4$  với  $x = 8, x = 16$ .

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

Khi quay cả ba phần diện tích  $(S_1), (S_2), (S_3)$  quanh cạnh  $BC$  (tức trục hoành) ta thu được các vật thể tròn xoay có thể tích lần lượt là  $V_1, V_2, V_3$ . Do đó vật thể khối tròn xoay cần tìm có thể tích bằng:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \pi \left( \int_8^{\frac{48}{5}} \left| (2x-12)^2 - 4^2 \right| dx + \int_{\frac{48}{5}}^{16} \left| \left( 4 + \sqrt{16 - (x-12)^2} \right)^2 - 4^2 \right| dx + \int_8^{16} \left| 4^2 - \left( 4 - \sqrt{16 - (x-12)^2} \right)^2 \right| dx \right)$$

$\approx 1226,992 (cm^3)$ . Vậy thể tích trên gần với đáp án B nhất. **Chọn đáp án B.**

**ĐỀ THI THỬ CỤM TRƯỜNG THPT - TỈNH QUẢNG NAM**

**Câu 41:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$  có  $A(2;0;0), B(0;4;0), C(0;0;6)$  và  $D(2;4;6)$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng song song với mặt phẳng  $(ABC)$ ,  $(P)$  cắt các cạnh  $DA, DB, DC$  lần lượt tại  $A', B', C'$  sao cho thể tích khối tứ diện  $D.A'B'C'$  bằng  $\frac{1}{8}$  thể tích khối tứ diện  $ABCD$ . Khi đó mặt phẳng  $(P)$  có phương trình  $ax + by + cz + d = 0$ . Biết  $c = 4$ , hãy tính giá trị biểu thức  $T = a^2 - b^3 - d$

**A.**  $T = -24$ .                      **B.**  $T = -120$ .                      **C.**  $T = -15$ .                      **D.**  $T = 33$ .

**Lời giải**

Ta có:  $(ABC): \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 12 = 0$  (1). Do  $(P) \parallel (ABC)$  nên  $(P): 6x + 3y + 2z + D = 0$

Theo định lí Thales, từ  $(P) \parallel (ABC)$  ta thu được:  $\frac{DA'}{DA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{DB'}{DB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{DC'}{DC} = \frac{C'A'}{CA}$

$$\text{Suy ra: } \frac{V_{D.A'B'C'}}{V_{D.ABC}} = \frac{DA'}{DA} \cdot \frac{DB'}{DB} \cdot \frac{DC'}{DC} = \left( \frac{DA'}{DA} \right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{DA'}{DA} = \frac{DB'}{DB} = \frac{DC'}{DC} = \frac{d(D; (P))}{d(D; (ABC))} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta dễ dàng suy ra được:  $d(D; (P)) = \frac{1}{2} d(D; (ABC)) = \frac{12}{7}$

$$\text{Suy ra: } d(D; (P)) = \frac{|D+36|}{7} = \frac{12}{7} \Leftrightarrow D+36 = \pm 12 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -24 \\ D = -48 \end{cases} \text{ mặt phẳng } (P) \text{ cần tìm phải thỏa mãn hai điểm}$$

$O, D$  nằm khác phía so với  $(P)$  tức  $-12(6x_D + 3y_D + 2z_D - 12) < 0$  nên suy ra  $D = -24$  tức

$(P): 6x + 3y + 2z - 24 = 0 \Rightarrow (P): 12x + 6y + 4z - 48 = 0$ , khi đó  $T = a^2 - b^3 - d = -24$ . **Chọn đáp án A.**

**Câu 44:** Xét các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|3z - 4i| = 2|z - 3i|$  và  $(w - 3 + 4i)(\bar{w} + 3 + 4i)$  là số thuần ảo. Khi  $|z - w| = 7$  thì giá trị của  $|2z + w|$  bằng

**A.** 4.                      **B.** 9.                      **C.** 1.                      **D.** 2.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \begin{cases} A(z), B(w), w = x + yi, z = a + bi \quad (x, y, a, b, k \in \mathbb{R}) \\ |3z - 4i| = 2|z - 3i| \rightarrow 9a^2 + (3b - 4)^2 = 4a^2 + (2b - 6)^2 \\ (w - 3 + 4i)(\bar{w} + 3 + 4i) = (x^2 + y^2 - 25) + (8x + 6y)i = ki \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(z) \in (C_1): x^2 + y^2 = 4 \\ B(w) \in (C_2): x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(z): |z| = 2 \\ B(w): |w| = 5 \end{cases} \text{ Tiếp đến ta có: } |z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - (\bar{z}w + z\bar{w}) = 49 \Rightarrow \bar{z}w + z\bar{w} = -20 \text{ nên khi ấy ta suy ra:}$$

$$|2z + w| = \sqrt{4|z|^2 + |w|^2 + 2(\bar{z}w + z\bar{w})} = \sqrt{4 \cdot 4 + 25 + 2(-20)} = 1. \text{ Chọn đáp án C.}$$

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 45:** Cho  $a, b, x > 0$ ,  $a > b$  và  $b, x \neq 1$  thỏa mãn  $\log_x \frac{a+3b}{4} = \log_x \sqrt{a} + \frac{3}{2 \log_b x^3}$ . Khi đó biểu thức

$$P = \frac{2a^2 - ab + b^2}{(a-10b)^2} \text{ có giá trị bằng}$$

**A.** 154.

**B.** 2.

**C.** -1.

**D.** 10.

**Lời giải**

Ta có:  $\log_x \sqrt{a} + \frac{3}{2 \log_b x^3} = \log_x \sqrt{a} + \frac{\log_x b}{2} = \log_x \sqrt{a} + \log_x \sqrt{b} = \log_x \sqrt{ab}$  nên khi đó phương trình tương

đương với:  $\log_x \frac{a+3b}{4} = \log_x \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+3b}{4} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow (a+3b)^2 = 16ab \Leftrightarrow a^2 - 10ab + 9b^2 = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a-9b) = 0$ , suy ra  $\frac{a}{b} = t = 9$  ( $a > b$ ) tức  $P = \frac{2a^2 - ab + b^2}{(a-10b)^2} = \frac{2t^2 - t + 1}{(t-10)^2} = 154$ . **Chọn đáp án A.**

**Câu 46:** Cho hàm số  $y = (x-m)^3 - 3x + m^2$  có đồ thị là  $(C_m)$ . Biết rằng có một điểm  $M_0(x_0; y_0)$  trên đồ thị  $(C_m)$  sao cho  $M_0$  là điểm cực đại của đồ thị hàm số  $(C_m)$  ứng với một giá trị  $m$  nào đó, đồng thời  $M_0$  là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $(C_m)$  ứng với một giá trị khác của  $m$ . Giá trị của biểu thức  $P = 19x_0 + 5y_0$  bằng

**A.** 10.25.

**B.** 6.25.

**C.** 8.25.

**D.** 7.25.

**Lời giải**

Ta xét:  $y = f(x) = (x-m)^3 - 3x + m^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x_1; x_2) = (m+1; m-1)$

Vì  $y = (x-m)^3 - 3x + m^2$  có hệ số  $a > 0$  nên  $x_{CT} > x_{CD} \Rightarrow \begin{cases} x_{CT} = m+1 \\ x_{CD} = m-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{CT} = m^2 - 3m - 2 \\ y_{CD} = m^2 - 3m + 2 \end{cases}$ .

Với  $M_0(x_0; y_0)$  là điểm thỏa bài toán, ta suy ra:  $x_0 = m_1 + 1 = m_2 - 1$ ;  $y_0 = m_1^2 - 3m_1 - 2 = m_2^2 - 3m_2 + 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 - m_2 = -2 \\ (m_1 - m_2)(m_1 + m_2) - 3(m_1 - m_2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 - m_2 = -2 \\ m_1 + m_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (m_1; m_2) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow (x_0; y_0) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$$

Khi ấy ta suy ra:  $P = 19x_0 + 5y_0 = 8.25$ . **Chọn đáp án C.**

**Câu 47:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 18x - 4y - 6z - 6 = 0$  và hai điểm  $A(16; 2; 3)$ ,  $B(-13; 14; -13)$ . Gọi  $M(a; b; c)$  là điểm trên mặt cầu  $(S)$  sao cho biểu thức  $P = 2MA + 5MB$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức  $T = a + b + c$

**A.**  $T = \frac{126}{29}$ .

**B.**  $T = -6$ .

**C.**  $T = -22$ .

**D.**  $T = -\frac{384}{29}$ .

**Lời giải**

$$2MA = 2\sqrt{(x-16)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{4[(x-16)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2]} + 21(x^2 + y^2 + z^2 + 18x - 4y - 6z - 6)$$

$$\sqrt{25((x+5)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2)} = 5\sqrt{(x+5)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = 5MC \text{ với } C(-5; 2; 3), B(-13; 14; -13)$$

$$\text{Khi đó ta suy ra: } P = 2MA + 5MB = 5\left(\sqrt{(x+5)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} + \sqrt{(-x-13)^2 + (14-y)^2 + (-13-z)^2}\right).$$

$\geq 5\sqrt{(x+5-13-x)^2 + (14-y+y-2)^2 + (z-3-13-z)^2} = \text{const}$ . Với  $k > 0$ , khi ấy dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

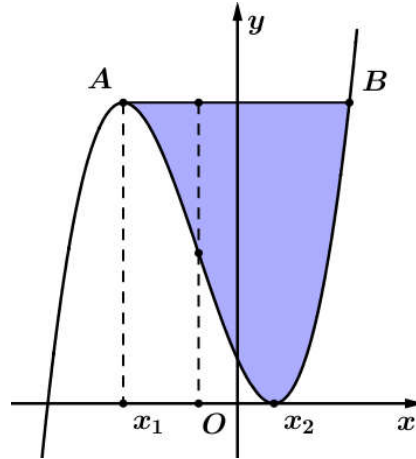
$$\frac{x+5}{-13-x} = \frac{2-y}{14+y} = \frac{3-z}{z+13} = k \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2y - 11 \\ 3z = 4y - 17 \end{cases} \Leftrightarrow (a; b; c) = (8; -9; -5) \text{ (thỏa mãn), tức } T = -6. \text{ **Chọn đáp án B.**}$$

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG



**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**  
**ĐỀ THI THỬ SỐ HÁI PHÒNG LẦN 2**

**Câu 39:** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  đạt cực trị tại 2 điểm  $x_1, x_2$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $H_1$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f'(x)$ , trục hoành và 2 đường thẳng  $x = x_1; x = x_2$ ,  $H_2$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành và 2 đường thẳng  $x = x_1; x = x_2$ . Biết  $H_1$  và  $H_2$  đều có diện tích bằng 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị  $y = f(x)$ , đường thẳng  $AB$ , ( $AB \parallel Ox$ ) (Hình tô đậm trong hình vẽ)



**A.**  $\frac{27}{4}$ .

**B.** 6.

**C.**  $\frac{13}{2}$ .

**D.**  $\frac{15}{2}$ .

**Lời giải**

Ta tịnh tiến đồ thị hàm số  $y = f(x)$  theo chiều dương  $Ox$  sao cho  $x_2 = -x_1$ , khi đó ta giải bài toán như sau:

Xét  $\begin{cases} x_1 = -a; x_2 = a \\ f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \end{cases}$  thì khi đó theo giả thiết ta suy ra:

$$H_1 = \left| \int_{-a}^a f'(x) dx \right| = |f(a) - f(-a)| = |0 - f(-a)| = 4 \rightarrow \boxed{f(-a) = 4}, \text{ kéo theo ta có được: } f(0) = 2$$

Lại có:  $f'(x) = k(x-a)(x+a) = k(x^2 - a^2) = kx^2 - ka^2$  nên suy ra  $f(x) = \int f'(x) dx = k \frac{x^3}{3} - ka^2 x + C$

Kết hợp với  $f(0) = 2$  vừa giải trên suy ra  $C = 2$  tức ta thu được:  $f(x) = k \frac{x^3}{3} - ka^2 x + 2$

Tiếp đến do  $f(-a) = 4, f(0) = 2$  nên suy ra  $f(a) = 0$ , khi đó  $f(a) = k \cdot \frac{a^3}{3} - ka^2 \cdot a + 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{k = \frac{3}{a^3}}$

Suy ra:  $f(x) = \frac{x^3}{a^3} - \frac{3x}{a} + 2$ , mà  $H_2 = \int_{-a}^a |f(x)| dx = \int_{-a}^a \left| \frac{x^3}{a^3} - \frac{3x}{a} + 2 \right| dx = 4$  nên suy ra  $\boxed{a = 1}$  tức ta thu được:

$f(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow x_B = 2$ . Giải phương trình  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$ , khi đó diện tích hình phẳng  $S$  cần

tìm giới hạn bởi  $y = f(x), y = 4, x = -1, x = 2$ . Vậy  $S = \int_{-1}^2 |4 - (x^3 - 3x + 2)| dx = \frac{27}{4}$ . **Chọn đáp án A.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 46:** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = mx^9 + (m^2 - 3m + 2)x^6 + (2m^3 - m^2 - m)x^4 + m$  luôn đồng biến trên  $\mathbb{R}$  ?

**A.** 1.

**B.** 4.

**C.** 2.

**D.** 3.

**Lời giải**

Ta có:  $y' = 9mx^8 + 6(m^2 - 3m + 2)x^5 + 4(2m^3 - m^2 - m)x^3$ . Giải phương trình  $y' = 0$ , ta suy ra:

$$\begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 9mx^5 + 6(m^2 - 3m + 2)x^2 + 4(2m^3 - m^2 - m) = 0 \end{cases}.$$

Do nghiệm  $x = 0$  đóng vai trò là nghiệm bội lẻ của phương trình  $y' = 0$  (do mũ lẻ) nên để  $y$  luôn đồng biến trên  $\mathbb{R}$  tức  $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  thì khi đó  $x = 0$  phải là

$$\text{nghiệm bội chẵn (tức tại } x = 0 \text{ thì } y' \text{ không đổi dấu), khi ấy } g(0) = 0 \Leftrightarrow 2m^3 - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0, m = 1 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Với  $m = 1$  thì  $y' = 9x^8 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  (luôn đúng) nên ta nhận.

Với  $m = 0$  thì  $y' = 12x^5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$  và  $m = -\frac{1}{2}$  đều không hợp lệ nên ta loại. **Chọn đáp án A.**

**Câu 47:** Cho số phức  $z$  thay đổi thỏa mãn  $|z| = |z - 6 - 6i|$ . Gọi  $S$  là tập hợp các số phức  $w = \frac{12z}{|z|^2}$ . Biết rằng  $w_1, w_2$

là hai số phức thuộc  $S$  sao cho  $|w_1 - w_2| = 2$ . Gọi  $A, B, C$  là các điểm biểu diễn cho các số phức  $1 + i, 2w_1 + w_2 - 2 - 2i, 4w_2 - 2w_1 - 1 - i$ . Diện tích tam giác  $ABC$  bằng

**A.**  $5\sqrt{2}$ .

**B.** 5.

**C.**  $10\sqrt{2}$ .

**D.** 10.

**Lời giải**

Trước hết ta có:

$$w = \frac{12z}{|z|^2} = \frac{12z}{|z|^2} = \frac{12z}{z \cdot \bar{z}} \Rightarrow \begin{cases} \bar{z}w = 12 \\ |\bar{z}| = |\bar{z} - 6 + 6i| \end{cases} \Rightarrow |\bar{z}w| = |\bar{z}w - (6 - 6i)w| \Leftrightarrow 12 = |12 - (6 - 6i)w| \Leftrightarrow |w - 1 - i| = \sqrt{2}$$

$$\text{Đặt } u = w - 1 - i \text{ thì khi đó suy ra: } \begin{cases} u_1 + 1 + i = w_1 \\ u_2 + 1 + i = w_2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 2w_1 + w_2 - 2 - 2i = 2u_1 + u_2 + 1 + i \\ 4w_2 - 2w_1 - 1 - i = 4u_2 - 2u_1 + 1 + i \end{cases} \text{ với } |u_1| = |u_2| = |u| = \sqrt{2}$$

Khi đó ta lần lượt suy ra được:  $\overrightarrow{AB}(2u_1 + u_2)$ ,  $\overrightarrow{AC}(4u_2 - 2u_1)$ , và  $\overrightarrow{BC}(3u_2 - 4u_1)$

Mặt khác ta lại có:  $4 = |w_1 - w_2|^2 = |u_1 - u_2|^2 = |u_1|^2 + |u_2|^2 - (\overline{u_1}u_2 + u_1\overline{u_2}) \rightarrow \overline{u_1}u_2 + u_1\overline{u_2} = 0$  nên suy ra

$$AB = |2u_1 + u_2| = |u|\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{10}, BC = |3u_2 - 4u_1| = |u|\sqrt{3^2 + 4^2} = 5\sqrt{2}, AC = |4u_2 - 2u_1| = |u|\sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$$

Với  $p = \frac{AB + BC + CA}{2}$ , ta suy ra  $S = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - CA)} = 10$ . **Chọn đáp án D.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 49:** Cho  $x, y$  là các số thực thỏa

$$\log_5 \left( x^2 + (y+1)^2 \right) + \log_3 \left( x^2 + y^2 \right) \leq \log_3 \left( x^2 - 56 + (y+8)^2 \right) + \log_5 (2y+1)$$

Khi ấy giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = x + y$  là

- A.**  $2 + 2\sqrt{10}$ .      **B.**  $4 + \sqrt{5}$ .      **C.**  $4 + 2\sqrt{10}$ .      **D.** 4.

**Lời giải**

Ta có:  $\log_5 \left( \frac{x^2 + y^2}{2y+1} + 1 \right) \leq \log_3 \left( 1 + \frac{8(2y+1)}{x^2 + y^2} \right)$ , đặt  $t = \frac{x^2 + y^2}{2y+1}$  thì  $\log_5 (t+1) - \log_3 \left( 1 + \frac{8}{t} \right) \leq 0$  (1)

Xét hàm số  $f(t) = \log_5 (t+1) - \log_3 \left( 1 + \frac{8}{t} \right)$  trên  $(0; +\infty)$  có  $f'(t) = \frac{1}{(t+1)\ln 5} + \frac{8}{t(t+8)\ln 3} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$

Suy ra hàm số  $f(t)$  luôn đồng biến trên  $(0; +\infty)$  tức  $f(t) = 0$  chỉ có duy nhất 1 nghiệm trên  $(0; +\infty)$

Nhẩm nhanh ra  $t = 4$  nên (1)  $\Leftrightarrow t \leq 4 \Leftrightarrow x^2 + (y-4)^2 \leq 20$ . Mặt khác:  $x^2 + (y-4)^2 \geq \frac{(x+y-4)^2}{2}$  nên ta suy ra:

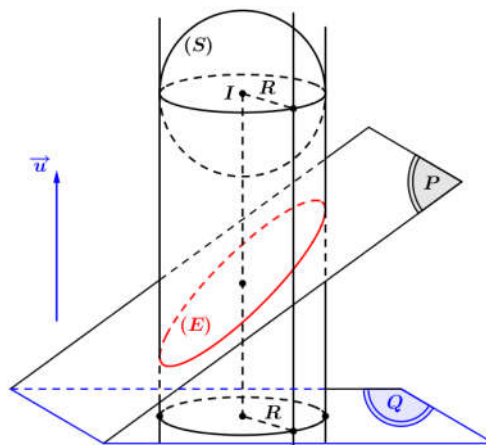
$$(x+y-4)^2 = (P-4)^2 \leq 40 \Leftrightarrow 4 - 2\sqrt{10} \leq P \leq \boxed{4 + 2\sqrt{10} = P_{\max}}. \text{ Chọn đáp án C}$$

**Câu 50:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z+5)^2 = 9$ , gọi  $(C)$  là tập hợp các tiếp tuyến của  $(S)$  có vectơ chỉ phương là  $\vec{u} = (2; 2; 1)$ . Gọi  $(E)$  là thiết diện của  $(C)$  với mặt phẳng  $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$ , khi ấy diện tích của  $(E)$  bằng

- A.**  $81\pi$ .      **B.**  $\frac{81\pi}{2}$ .      **C.**  $\frac{81\pi}{4}$ .      **D.**  $\frac{81\sqrt{65}\pi}{65}$ .

**Lời giải**

Tập hợp các tiếp tuyến của  $(S)$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (2; 2; 1)$  là một mặt trụ  $(T)$  với các tiếp tuyến chứa các đường sinh của  $(T)$  cách trục 1 khoảng bằng bán kính mặt cầu  $(S)$  tức bằng  $R = 3$ . Khi đó thiết diện của  $(C)$  và  $(P)$  là một đường elip cong khép kín  $(E)$  như hình vẽ dưới.



Dựng  $(Q)$  có vector pháp tuyến  $\vec{u} = (2; 2; 1)$ , cùng với mặt phẳng  $(P)$  có vector pháp tuyến  $\vec{n} = (1; 2; -2)$  suy ra:

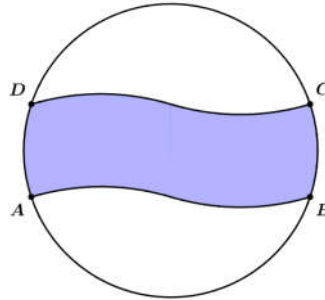
$$\cos \alpha = \cos \left( \widehat{(P): (Q)} \right) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{4}{9}. \text{ Áp dụng công thức hình chiếu ta có: } \cos \alpha = \frac{S_{(E)}}{S_{(I; R)}} \Rightarrow S_{(E)} = \pi R^2 \cos \alpha = \frac{81\pi}{4}$$

với  $S_{(I; R)}$  là diện tích đường tròn bán kính  $R$  nằm trong mặt phẳng  $(Q)$ . **Chọn đáp án C.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**  
**ĐỀ THI THỬ SỞ CẦN THƠ**

**Câu 44:** Cô Thơ đổ bê tông một đường đi trong sân vườn hình tròn bán kính  $\sqrt{10}m$  (phần được tô đậm) ở trong hình được biểu diễn dưới đây.

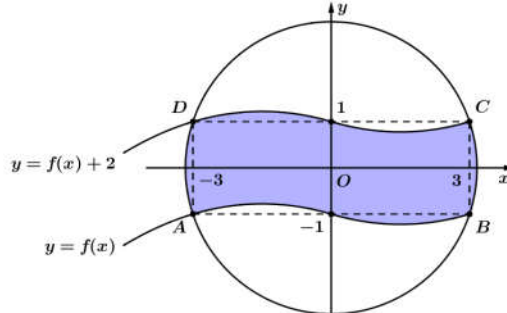


Biết rằng đường cong  $AB$  là một phần đồ thị của một hàm số liên tục, đường cong  $CD$  nhận được bằng cách tịnh tiến đường cong  $AB$  theo phương thẳng đứng, lên phía trên  $2m$  khi ấy tạo thành tứ giác  $ABCD$  là hình chữ nhật. Ngoài ra con đường được đổ lớp bê tông dày  $15cm$  và giá tiền  $1m^3$  bê tông là  $1,200,000$  đồng. Số tiền cô Thơ cần dùng để đổ bê tông con đường đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) là  
**A.** 2,081,698 đồng.      **B.** 2,238,302 đồng.      **C.** 2,160,000 đồng.      **D.** 2,199,151 đồng.

**Lời giải**

Do đường cong  $AB$  là một phần đồ thị của một hàm số liên tục nên khi gọi  $y = f(x)$  là hàm số liên tục có đồ thị chứa đường cong  $AB$  thì  $f(x) + 2$  là hàm số liên tục có đồ thị chứa đường cong  $CD$ .

Tiếp đến ta chọn hệ trục tọa độ  $Oxy$  có gốc tọa độ  $O$  trùng với tâm đường tròn và các trục hoành và trục tung trùng với đường kính của đường tròn, được biểu diễn chi tiết dưới đây.



Khi ấy phương trình đường tròn là  $x^2 + y^2 = 10 \Rightarrow y = \pm\sqrt{10-x^2}$ . Do  $ABCD$  là hình chữ nhật nên ta suy ra

$$AB = CD = 2\sqrt{10 - \frac{BC^2}{4}} = 6, \text{ mà hai đoạn } AD, BC \text{ đối xứng nhau qua } Oy \text{ nên } x_{A,D} = -x_{B,C} = -3.$$

Gọi  $S_1$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi dây cung  $AD$ , cung nhỏ  $\widehat{AD}$  và  $S_2$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi dây cung  $BC$ , cung nhỏ  $\widehat{BC}$ , khi đó ta suy ra:  $S_1 = S_2 = 2 \int_{\sqrt{10}}^3 \sqrt{10-x^2} dx$

Gọi  $S_3$  diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong  $AB, CD$  và các đường thẳng  $x = -3, x = 3$

$$\text{Suy ra phần diện tích tô đậm là: } S = S_1 + S_2 + S_3 = 4 \int_{\sqrt{10}}^3 \sqrt{10-x^2} dx + \int_{-3}^3 (f(x) + 2 - f(x)) dx = 4 \int_{\sqrt{10}}^3 \sqrt{10-x^2} dx + 12$$

Mà bề dày bê tông là  $h = 15cm = 0.15m$ , giá tiền  $1m^3$  bê tông là  $1,200,000$  đồng nên tổng số tiền cô Thơ cần bỏ ra

$$\text{là: } 1,200,000V = 1,200,000.S.h = 1,200,000.(0.15). \left[ 4 \int_{\sqrt{10}}^3 \sqrt{10-x^2} dx + 12 \right] \approx 2,238,302 \text{ (đồng)}. \text{ Chọn đáp án B.}$$

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 46:** Có bao nhiêu số nguyên  $y$  sao cho ứng với mỗi giá trị của  $y$ , có đúng 5 số nguyên dương  $x$  sao cho thỏa mãn  $2x^3 + 6x + 1 + \log_2(x^2 + 3) < |4x^2 - xy| + \log_2|4x - y|$  ?

A. 48 .

B. 46 .

C. 44 .

D. 42 .

**Lời giải**

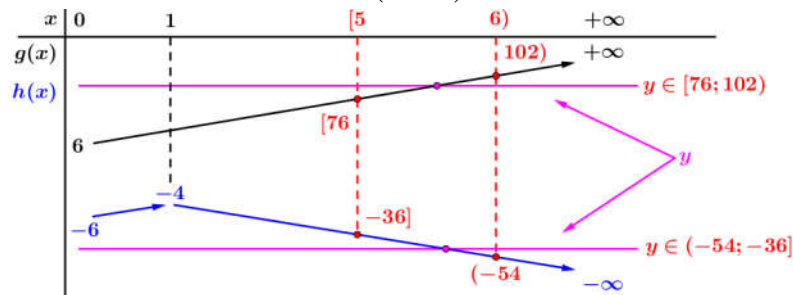
Ta có phương trình tương đương với:  $2x^3 + 6x + 1 + \log_2(x^2 + 3) < |4x^2 - xy| + \log_2|4x - y|$

$$\Leftrightarrow x(2x^2 + 6) + \log_2(2x^2 + 6) < x|4x - y| + \log_2|4x - y| \quad (x > 0)$$

Xét hàm đặc trưng  $f_x(t) = xt + \log_2 t$  trên  $(0; +\infty)$  có  $f'_x(t) = x + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall x, t \in (0; +\infty)$  tức ta suy ra hàm số

$$f_x(t) \text{ luôn đồng biến trên } (0; +\infty), \text{ khi ấy ta thu được: } 2x^2 + 6 < |4x - y| \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) - 2x^2 + 4x - 6 > y & (1) \\ h(x) = 2x^2 + 4x + 6 < y & (2) \end{cases}$$

Từ đó ta biểu diễn bảng biến thiên của cả hai hàm trên  $(0; +\infty)$  như sau:



Gọi  $S_1, S_2$  lần lượt là tập hợp các giá trị nguyên  $y$  của hai bất phương trình (1), (2) thì khi đó tập hợp các giá trị nguyên  $y$  cần tìm chính là  $S = S_1 \cup S_2$ .

Từ bảng biến thiên trên, suy ra để thỏa yêu cầu bài toán thì cả hai bất phương trình (1) và (2) đều có tập nghiệm

$$\text{nguyên } x \in \{1; 2; 3; 4; 5\}, \text{ khi ấy ta suy ra: } \begin{cases} y \in [g(5); g(6)] & (1) \\ y \in (h(5); h(6)] & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [76; 102] & (1) \\ y \in (-54; -36] & (2) \end{cases}$$

Khi ấy ta suy ra  $S = S_1 \cup S_2 = \{76; 77; \dots; 100; 101\} \cup \{-53; -52; \dots; -37; -36\}$ , mà tập  $S_1, S_2$  lần lượt có tất cả là 26 và 18 phần tử nên suy ra tổng phần tử của  $S$  là  $n(S) = n(S_1) + n(S_2) = 26 + 18 = 44$  (phần tử), khi đó ta kết luận có tất cả 44 số nguyên  $y$  thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn đáp án C.**

**Câu 48:** Xét các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|z - 2| = |w - 2| = 4$  và  $|z - w| = 8$ . Khi biểu thức  $P = |z - 3 - i| + |w - 5 + 5i|$  đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của  $|z|$  thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. (3; 4).

B. (5; 6).

C. (4; 5).

D. (2; 3).

**Lời giải**

Ta có:  $A(z), B(w)$  đều thuộc đường tròn  $(C)$  tâm  $I(2; 0)$ , bán kính  $R = 4$  và  $|z - w| = AB = 8 = 2R$  nên ta suy ra

$$I \text{ là trung điểm } AB \text{ tức } I\left(\frac{z+w}{2}\right) \equiv I(2; 0) \Rightarrow w = 4 - z \text{ tức } P = |z - 3 - i| + |w - 5 + 5i| = |z - 3 - i| + |z + 1 - 5i|$$

Đặt  $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$  thì khi đó, áp dụng bất đẳng thức Mincopski, ta suy ra:

$$P = \sqrt{(3-x)^2 + (1-y)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-5)^2} \geq \sqrt{(3-x+x+1)^2 + (1-y+y-5)^2} = 4\sqrt{2}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và}$$

$$\text{chỉ khi: } \frac{3-x}{x+1} = \frac{1-y}{y-5} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4-x \\ (x-2)^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-\sqrt{7} \\ y = 1+\sqrt{7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = (3-\sqrt{7}) + (1+\sqrt{7})i \\ |z| \approx 3,66 \in (3; 4) \end{cases}. \text{ Chọn đáp án A.}$$

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 50:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = \frac{1}{8}x^2 - mx + 32, \forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(x^3 - 12x)$  có đúng 6 điểm cực trị thuộc khoảng  $(-6; 9)$ ?

A. 90.

B. 87.

C. 88.

D. 89.

**Lời giải**

Ta có:  $f'(x) = \frac{1}{8}x^2 - mx + 32, \forall x \in \mathbb{R}$ . Giải phương trình  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{32}{x} + \frac{x}{8} = m$ . (\*)

Xét hàm số  $u(x) = \frac{32}{x} + \frac{x}{8}$  với  $x \neq 0$  ta có  $u'(x) = \frac{1}{8} - \frac{32}{x^2}$ , giải  $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 16$

Khi đó ta có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

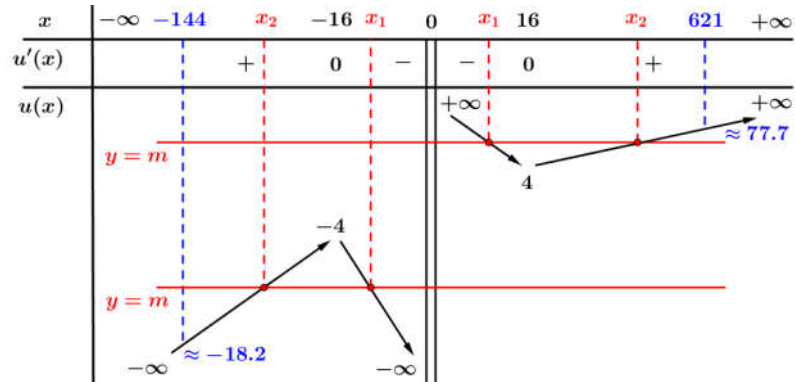
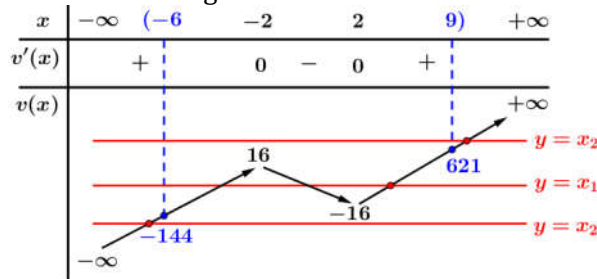
Tiếp đến ta có:  $g(x) = f(x^3 - 12x) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 - 12)f'(x^3 - 12x)$

Giải phương trình  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x-2)(x+2)f'(x^3 - 12x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x^3 - 12x = x_1 \\ x^3 - 12x = x_2 \end{cases}$  trong đó  $x_1, x_2$  là các nghiệm

của phương trình (\*)

Xét riêng hàm số  $v(x) = x^3 - 12x$  có  $v'(x) = 3x^2 - 12$ . Giải phương trình  $v'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$ .

Khi đó ta có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.



Từ yêu cầu bài toán, ta suy ra  $g'(x) = 0$  phải có 6 nghiệm bội lẻ phân biệt tức hai phương trình  $\begin{cases} x^3 - 12x = x_1 \\ x^3 - 12x = x_2 \end{cases}$

phải có 4 nghiệm phân biệt khác  $\{-2; 2\}$  và thuộc  $(-6; 9)$

Khi phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thì suy ra  $\begin{cases} x_2 < -16 < x_1 < 0 \\ 0 < x_1 < 16 < x_2 \end{cases}$ , từ đó ta điền vị trí  $x_1, x_2$  vào

bảng biến thiên  $u(x)$  như hình vẽ trên.

Tiếp đến dựa vào bảng biến thiên  $v(x)$ , suy ra (\*) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn:  $\begin{cases} -144 < x_2 < -16 < x_1 < 0 \\ 0 < x_1 < 16 < x_2 < 621 \end{cases}$

Cuối cùng, dựa vào bảng biến thiên  $u(x)$ , ta suy ra:  $m \in (u(-144); u(-16)) \cup (u(16); u(621))$

Suy ra:  $m \in (-18.2; -4) \cup (4; 77.7)$  mà  $m \in \mathbb{Z}$  nên  $m \in \{-18; -17; \dots; -6; -5\} \cup \{5; 6; \dots; 76; 77\}$  tức có tất cả 87 giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn đáp án B.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**  
**ĐỀ THI THỬ SỞ BẮC GIANG**

**Câu 41:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6, \forall x \in \mathbb{R}$ . Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-1012; 2024]$  để hàm số  $g(x) = f(x^2 - 2|x-1| - 2x + m)$  có đúng 9 điểm cực trị?  
**A.** 2024. **B.** 1016. **C.** 1014. **D.** 1015.

**Lời giải**

Ta xét:  $f'(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6, \forall x \in \mathbb{R}$ , giải phương trình  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 2, x = 3$ .

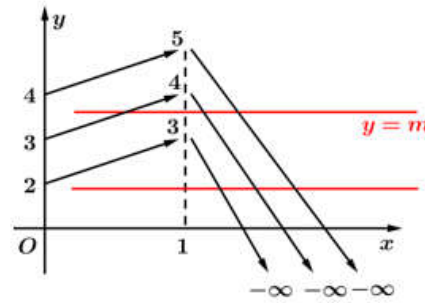
Tiếp đến ta có:  $g(x) = f(x^2 - 2|x-1| - 2x + m) = f(|x-1|^2 - 2|x-1| + m - 1)$

Giả sử  $h(x) = f(x^2 - 2x + m - 1)$  thì khi đó ta suy ra:  $g(x) = h(|x-1|)$

Để hàm số  $g(x) = h(|x-1|)$  có đúng  $2 \times \boxed{4} + 1 = 9$  điểm cực trị thì hàm số  $h(x)$  phải có đúng  $\boxed{4}$  điểm cực trị dương tức phương trình  $h'(x) = 2(x-1)f'(x^2 - 2x + m - 1) = 0$  phải có đúng 4 nghiệm bội lẻ dương phân biệt.

Khi đó phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x + m - 1 = 1 \\ x^2 - 2x + m - 1 = 2 \\ x^2 - 2x + m - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ m = u_1(x) = 2 + 2x - x^2 \\ m = u_2(x) = 3 + 2x - x^2 \\ m = u_3(x) = 4 + 2x - x^2 \end{cases}$$



Theo yêu cầu bài toán, đường thẳng  $y = m$  phải cắt cả ba đồ thị  $y = u_1(x), y = u_2(x), y = u_3(x)$  tại ba nghiệm dương phân biệt khác 1 nên từ hình vẽ ta suy ra  $m \in (-\infty; 2] \cup (3; 4)$

Mà  $m \in [-1012; 2024], m \in \mathbb{Z}$  nên ta suy ra  $m \in \{-1012; -1011; \dots; 0; 1; 2\}$  tức có tất cả 1015 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn đáp án D.**

**Câu 42:** Điều kiện của tham số  $m$  để phương trình  $2 \cdot 9^{x^2-x+m} - 5 \cdot 6^{x^2-x+m} + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x-x^2-m} = 0$  có đúng 4 nghiệm phân biệt, trong đó có đúng 3 nghiệm dương là  
**A.**  $0 < m < \frac{1}{4}$ . **B.**  $0 < m < \frac{5}{4}$ . **C.**  $0 \leq m < \frac{1}{4}$ . **D.**  $m < 0$ .

**Lời giải**

Đặt  $t = x^2 - x + m$ , thì phương trình tương đương với  $2 \cdot 9^t - 5 \cdot 6^t + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-t} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 9^t - 5 \cdot 6^t + 3 \cdot 4^t = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{9^t}{4^t} - 5 \cdot \frac{6^t}{4^t} + 3 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = 1 \text{ hoặc } \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = 1$$

Suy ra:  $\begin{cases} x^2 - x + m = 0 \\ x^2 - x + m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x - x^2 = g(x) \\ m = 1 + x - x^2 = h(x) \end{cases}$ . Dễ thấy rằng hai hàm số  $g(x), h(x)$  đều có đồ thị là parabol có

đỉnh chung tại  $x_0 = \frac{1}{2}$  và  $g(0) < g(x_0) < h(0) < h(x_0)$  nên suy ra để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì ta phải có:

$$m \in (g(0); g(x_0)) \Leftrightarrow m \in \left(0; \frac{1}{4}\right). \text{ Chọn đáp án A.}$$

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 43:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác nhọn  $ABC$  có đường phân giác trong của góc  $A$  song song với

đường thẳng  $(d): \begin{cases} x=2 \\ y=-1+t (t \in \mathbb{R}) \\ z=4-t \end{cases}$ . Đường thẳng  $AC$  có một vector chỉ phương  $\vec{u}_1 = (1; 2; -1)$ . Biết

đường thẳng  $AB$  có một vector chỉ phương  $\vec{u}_2 = (a; b; c)$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  và  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ . Biểu thức  $P = a^2 + b^2 + c^2$  có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 0.

B. 10.

C. 6.

D. 2.

**Lời giải**

Gọi  $\Delta$  là đường thẳng chứa đường phân giác trong của góc  $A$  có vector chỉ phương  $\vec{u}$ , khi ấy từ giả thiết ta suy ra:

Vector chỉ phương  $\vec{u} = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|} + \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|} = k\vec{u}_{(d)} \Leftrightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}} \right) + \left( \frac{a}{\sqrt{P}}; \frac{b}{\sqrt{P}}; \frac{c}{\sqrt{P}} \right) = k(0; 1; -1)$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{a}{\sqrt{P}}; \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{b}{\sqrt{P}}; \frac{-1}{\sqrt{6}} + \frac{c}{\sqrt{P}} \right) = (0; k; -k) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{a}{\sqrt{P}} = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{b}{\sqrt{P}} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{c}{\sqrt{P}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{P}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{b+c}{\sqrt{P}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases} \Rightarrow a = b + c$$

Lại có được thêm phương trình sau:  $\cos(\overline{AB}; d) = \cos(\overline{AC}; d) = |\cos(\overline{AC}; \vec{u}_d)| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{|b-c|}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(a^2+b^2+c^2) = 2(b^2-2bc+c^2) \\ a = b+c \end{cases} \Rightarrow 3(b^2+bc+c^2) = b^2-2bc+c^2 \Leftrightarrow 2b^2+5bc+2c^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2c \\ c = -2b \end{cases}$$

Với  $b = -2c \xrightarrow{a=b+c} a = -c$  thì  $P = a^2 + b^2 + c^2 = 6c^2 \geq 6, \forall c \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$  tức  $P_{\min} = 6$ .

Với  $c = -2b \xrightarrow{a=b+c} a = -b$  thì  $P = a^2 + b^2 + c^2 = 6b^2 \geq 6, \forall b \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$  tức  $P_{\min} = 6$ . **Chọn đáp án C.**

**Câu 45:** Cho hai số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|z| = 2$  và  $|w - 6i| = 3$ . Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = 6|z - 4| + 4|w - 9 - 6i| + 12|z - w|$  bằng

A. 48.

B. 24.

C. 72.

D. 36.

**Lời giải**

**Cách 1:** Đặt:  $\begin{cases} M(a, b): z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}) \\ N(x, y) w = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \end{cases}$ , khi đó:  $\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ x^2 + (y-6)^2 = 9 \end{cases}$  tức:  $P = 6|z - 4| + 4|w - 9 - 6i| + 12|z - w|$

$$= 6\sqrt{(a-4)^2 + b^2} + 4\sqrt{(x-9)^2 + (y-6)^2} + 12\sqrt{x^2 + (y-6)^2 - 9} + 12|z - w|$$

$$= 12\left(\sqrt{(a-1)^2 + b^2} + |z - w| + \sqrt{(x-1)^2 + (y-6)^2}\right) = 12(AM + MN + NB) \text{ với } A(1; 0) \text{ và } B(1; 6)$$

Áp dụng tính chất bất đẳng thức đường gấp khúc ta suy ra:  $P = 12(AM + MN + NB) \geq 12AB = 72$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P$  bằng 72. **Chọn đáp án C.**

**Cách 2:** Ta đặt  $u = w - 6i$  thì khi đó áp dụng bất đẳng thức Mincopski ta suy ra được:

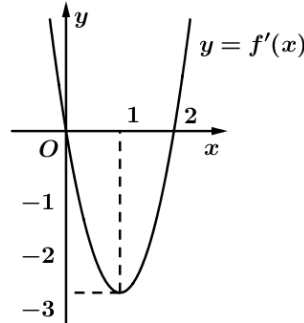
$$\left. \begin{aligned} |z - 4| &= |z - z \cdot \overline{z}| = 2|1 - \overline{z}| \\ |w - 9 - 6i| &= |u - u \cdot \overline{u}| = 3|1 - \overline{u}| \end{aligned} \right\} \text{ và } P = 6|2 - 2\overline{z}| + 4|3 - 3\overline{u}| + 12|z - w| = 12|1 - \overline{z}| + 12|1 - \overline{u}| + 12|z - u + 6i|$$

$$\geq 12|1 - z + u - 1 + z - u + 6i| = 12 \cdot |6i| = 72 \text{ tức giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P \text{ bằng 72. Chọn đáp án C.}$$

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 50:** Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ ) nhận giá trị không âm trên đoạn  $[2; 3]$  và  $f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị của các hàm số  $g(x) = xf^2(x)$ ,  $h(x) = -x^2 f(x) f'(x)$  và các đường thẳng  $x = 2, x = 3$  bằng 72.



Khi đó số nghiệm của phương trình  $\left[ f(2024^{\sqrt{x}}) \right]^2 - 3f(2024^{\sqrt{x}}) = 0$  là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

**Lời giải**

Đầu tiên ta có:  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , khi ấy:  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ . Dựa vào đồ thị trên, ta suy ra

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 3ax(x-2) \text{ tức } f(x) = \int f'(x) dx = \int 3ax(x-2) dx = a(x^3 - 3x^2) + C$$

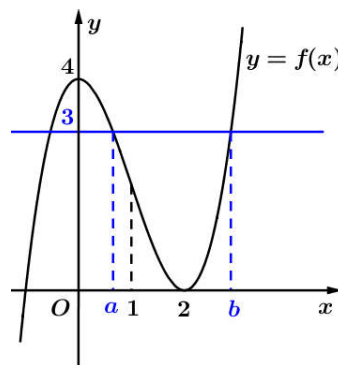
Mà  $f'(1) = -3$  nên suy ra  $a = 1$  tức  $f(x) = x^3 - 3x^2 + C$

$$\text{Tiếp đến ta có: } S = \int_2^3 |g(x) - h(x)| dx = \int_2^3 |xf^2(x) + x^2 f(x) f'(x)| dx = 72$$

$$\Rightarrow \int_2^3 [2xf^2(x) + 2x^2 f(x) f'(x)] dx = 144 \Leftrightarrow \int_2^3 f^2(x) d(x^2) + \int_2^3 x^2 d(f^2(x)) = x^2 f^2(x) \Big|_2^3 = 144$$

$$\text{Suy ra: } 9C^2 - 4(C-4)^2 = 144 \Leftrightarrow \begin{cases} C = 4 \\ C = -\frac{52}{5} \end{cases} \text{ Do } f(x) \geq 0, \forall x \in [2; 3] \text{ nên } C = 4. \text{ Khi đó: } f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

Tiếp đến ta đặt  $t = 2024^{\sqrt{x}} \geq 1, \forall x \geq 0$  thì khi đó phương trình trở thành:  $f^2(t) - 3f(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = 0 \\ f(t) = 3 \end{cases}$



Từ hình vẽ trên ta suy ra phương trình tương đương với:  $\begin{cases} t = 2 \\ t = b \in (2; 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2024^{\sqrt{x}} = 2 \\ 2024^{\sqrt{x}} = b \in (2; 3) \end{cases} (*)$

Hàm số  $u(x) = 2024^{\sqrt{x}}$  luôn đồng biến trên  $[0; +\infty)$  và  $u(0) = 1$  nên suy ra hệ (\*) này có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đề cho có tất cả 2 nghiệm phân biệt. **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI THỬ THPT NGUYỄN KHUYỄN – LÊ THÁNH TÔNG (TPHCM)

**Câu 39:** Cho phương trình  $4^x - (2m-1) \cdot 2^x + 16 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$ . Khi biểu thức  $T = (x_1 + 6)(x_2 + 6)$  đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của tham số  $m = m_0$ . Hỏi giá trị của  $m_0$  thuộc khoảng nào cho ở dưới đây?

**A.**  $(1; 5)$ .

**B.**  $(7; 8)$ .

**C.**  $(5; 7)$ .

**D.**  $(8; 10)$ .

**Lời giải**

Ta đặt  $t = 2^x > 0$  ứng với mỗi giá trị  $x_1, x_2$  cho ra 1 giá trị  $t$  ( $t_1, t_2$ ), và khi đó phương trình ban đầu trở thành:  $t^2 - (2m-1)t + 16 = 0$ . Phương trình sau khi biến đổi phải có hai nghiệm dương phân biệt ( $t_1, t_2$ ) tức theo định lý Vi-ét ta suy ra:  $16 = t_1 t_2 = 2^{x_1} 2^{x_2} = 2^{x_1 + x_2} \Rightarrow x_1 + x_2 = 4$  và  $t_1 + t_2 = 2m - 1$

Khi ấy ta có:  $T = (x_1 + 6)(x_2 + 6) = x_1 x_2 + 6(x_1 + x_2) + 36 = x_1 x_2 + 60 \leq \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} + 60 = 104$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $x_1 = x_2 \Leftrightarrow t_1 = t_2 > 0$  tức phương trình ban đầu có nghiệm kép dương.

Khi ấy suy ra  $t^2 - (2m-1)t + 16 = 0$  có:  $\begin{cases} \Delta = (2m-1)^2 - 64 = 0 \\ 2m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 = 8 \\ 2m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{9}{2} \in (1; 5)$ . **Chọn đáp án A.**

**Câu 42:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  thỏa mãn  $(1+x^2)f'(x) - 1 = 3x^4 + 4x^2, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(1) = 0$ . Biết  $F(x)$  là 1 nguyên hàm của hàm số  $21f(x^2)$  và  $F(0) = 10$ . Hãy tính  $F(2)$ ?

**A.**  $F(2) = 566$ .

**B.**  $F(2) = 52$ .

**C.**  $F(2) = 366$ .

**D.**  $F(2) = \frac{566}{21}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $(1+x^2)f'(x) = 3x^4 + 4x^2 + 1 = (1+x^2)(1+3x^2) \Leftrightarrow f'(x) = 1+3x^2 \xrightarrow{f(1)=0} f(x) = x^3 + x - 2$ . Suy ra:

$F(x) = \int 21f(x^2) dx = 21 \int (x^6 + x^2 - 2) dx = 21 \left( \frac{x^7}{7} + \frac{x^3}{3} - 2x \right) + C \xrightarrow{F(0)=10} F(x) = 3x^7 + 7x^3 - 42x + 10$

Khi ấy ta tính được:  $F(2) = 366$ . **Chọn đáp án C.**

**Câu 44:** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - m + 2i| = 2m - m^2 - 1$  với  $m$  là tham số thực. Giá trị biểu thức của  $|z + 1|$  là

**A.** 2.

**B.** 4.

**C.**  $\sqrt{5}$ .

**D.**  $2\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

Ta đánh giá:  $0 \leq |z - m + 2i| = 2m - m^2 - 1 = -(m-1)^2 \leq 0 \Rightarrow m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Suy ra:  $|z - 1 + 2i| = |z - 1 + 2i| = 0 \Leftrightarrow z = 1 - 2i \Rightarrow |z + 1| = |2 - 2i| = 2\sqrt{2}$ . **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 43:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng 
$$\begin{cases} (\alpha): 2x - 2y - z + 3\sqrt{3} = 0 \\ (\beta): -4x + 4y + 2z + 12\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$
. Một đường thẳng  $(d)$  có 1 vector chỉ phương là  $\vec{u} = (1; 1; 1)$ . Biết rằng tất cả các giao điểm của  $(d)$  với hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  khi  $(d)$  lần lượt đi qua  $M(3; 0; 0)$ ,  $N(1; 1; 1)$  và  $P(3; 5; -5)$  là 6 đỉnh của một khối đa diện. Tính thể tích  $V$  của khối đa diện đó.

A. 45.                      B.  $45\sqrt{3}$ .                      C.  $135\sqrt{3}$ .                      D.  $\frac{135\sqrt{78}}{26}$ .

**Lời giải**

Đầu tiên ta có hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  lần lượt có các vector pháp tuyến là  $\vec{a} = (2; -2; -1)$  và  $\vec{b} = (-4; 4; 2)$ . Với  $\vec{b} = -2\vec{a}$  nên ta suy ra  $(\alpha) \parallel (\beta)$  với khoảng cách là  $h = d((\alpha); (\beta)) = 3\sqrt{3}$ . Khi  $(d)$  có 1 vector chỉ phương là  $\vec{u} = (1; 1; 1)$  đi qua  $M(3; 0; 0)$ ,  $N(1; 1; 1)$  và  $P(3; 5; -5)$  và cắt các mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  tạo thành 6 giao điểm tạo thành 1 lăng trụ xiên  $(T)$  có đáy là một tam giác có diện tích là  $S_0$  và chiều cao khối trụ bằng  $h = 3\sqrt{3}$ . Gọi  $\varphi = (d; (\alpha))$ ,  $\begin{cases} A = (d) \cap (\alpha) \\ A' = (d) \cap (\beta) \end{cases}$ , suy ra:  $\sin \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{u}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$  và  $AA' = \frac{h}{\sin \varphi} = 27$ . Lúc này  $(T)$  trở thành khối lăng trụ có đường cao là  $AA'$  và  $S_0$  chính là diện tích tam giác  $MNP$ . Ta có với  $M(3; 0; 0)$ ,  $N(1; 1; 1)$  và  $P(3; 5; -5)$  thì suy ra được:  $MN = \sqrt{6}$ ,  $NP = 2\sqrt{14}$ ,  $PM = 5\sqrt{2}$ . Áp dụng công thức Herong cho tam giác khi biết ba cạnh, ta suy ra: 
$$\begin{cases} 2p = MN + NP + PM \\ S_{MNP} = \sqrt{p(p - MN)(p - NP)(p - PM)} = 5\sqrt{3} \end{cases}$$
 Tiếp đến ta có mặt phẳng  $(MNP)$  có vector pháp tuyến là  $\vec{n} = [\vec{MN}; \vec{MP}] = (-10; -10; -10) = k(1; 1; 1) = k\vec{u}$  tức ta suy ra  $(d) \perp (MNP)$ . Vậy  $V = S_0 h = 5\sqrt{3} \cdot 27 = 135\sqrt{3}$ . **Chọn đáp án C.**

**Câu 49:** Cho hai số phức phân biệt  $z_1, z_2$  thỏa mãn đồng thời  $|z - a| = |z - (a + 1)i|, \forall a \in \mathbb{R}$  và  $|z - 1 - i| = 2$ . Gọi  $m, n$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức  $|z_1 - z_2|$ . Giá trị của  $T = m^2 + 2n^2$  bằng

A. 34.                      B. 14.                      C. 16.                      D. 28.

**Lời giải**

Ta đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) thì khi đó ta có:  $(x - a)^2 + y^2 = x^2 + (y - a - 1)^2, \forall a \in \mathbb{R}$ . Bằng biến đổi đại số, ta dễ dàng suy ra:  $\Rightarrow M(z) \in (d): 2ax - 2(a + 1)y + 2a + 1 = 0, \forall a \in \mathbb{R}$ . Tiếp đến lại có:  $|z - 1 - i| = 2$  với  $M(z) \in (C)$  tâm  $I(1; 1)$ , bán kính  $R = 2$  nên để tồn tại  $z_1, z_2$  thì ta có:  $d(I; d) < R \Leftrightarrow |2a - 1| \cdot \frac{1}{\sqrt{(a + 1)^2 + a^2}} \leq 4$  (luôn đúng)

Gọi  $A(z_1), B(z_2)$  thì khi đó:  $|z_1 - z_2|^2 = AB^2 = 4(R^2 - d^2(I; d)) = 16 - \frac{(2a - 1)^2}{(a + 1)^2 + a^2}$

Xét hàm số  $f(a) = \frac{(2a - 1)^2}{(a + 1)^2 + a^2}$  trên  $\mathbb{R}$  dễ thấy  $\min_{[0; 3]} f(a) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \max_{[0; 3]} f(a) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = 10$

Suy ra  $n^2 = AB_{\min}^2 = 16 - \max_{[0; 3]} f(a) = 6$  và  $m^2 = AB_{\max}^2 = 16 - \min_{[0; 3]} f(a) = 16$  tức  $T = m^2 + 2n^2 = 28$

**Chọn đáp án D.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 50:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(2\sqrt{3}; -2\sqrt{6}; 0)$ ,  $B(-2\sqrt{3}; 2\sqrt{6}; 8)$  và điểm  $C(0; 0; 8)$ . Gọi  $M$  là điểm thay đổi thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  lên mặt phẳng  $(MAC)$ . Biết rằng khi  $M$  thay đổi thì  $H$  thuộc một đường tròn  $(C)$  không thay đổi. Chu vi của đường tròn  $(C)$  là

A.  $\frac{48\pi}{5}$ .

B.  $\frac{24\pi}{5}$ .

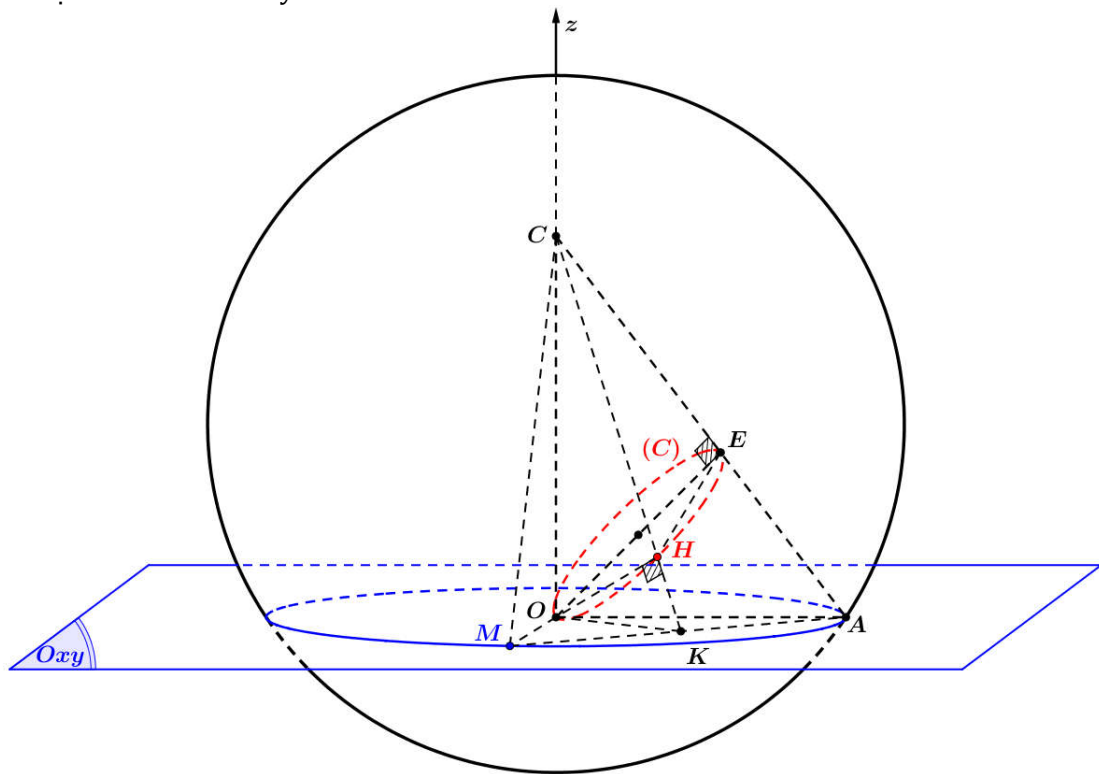
C.  $12\pi$ .

D.  $8\pi$ .

**Lời giải**

Đầu tiên với  $M$  là điểm thay đổi thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $\widehat{AMB} = 90^\circ$  thì suy ra  $M$  thuộc đường tròn giao tuyến giữa mặt cầu đường kính  $AB$  và  $(Oxy)$  tức  $M \in \begin{cases} (S): x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 52 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M \in (C): x^2 + y^2 = 36$ .

Khi đó ta thu được hình vẽ dưới đây



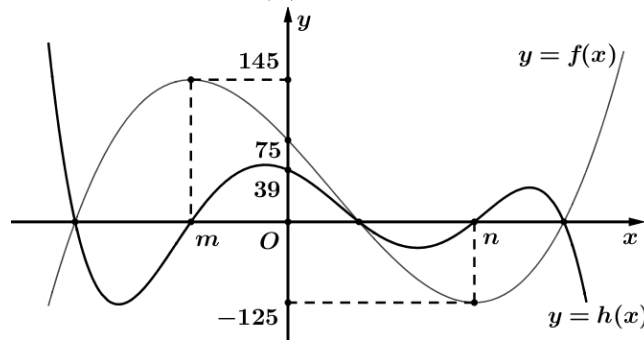
Gọi  $K, E$  lần lượt là hình chiếu của  $O$  lên  $AM, AC$ . Do  $OH \perp (MAC)$  nên  $OH \perp AC$ , mà  $OE \perp AC$  nên ta suy ra  $AC \perp (HOE)$  tức  $HE \perp AC$ . Suy ra quỹ tích điểm  $H$  là đường tròn  $(C)$  tức đường tròn đường kính

$OE = \frac{OC \cdot OA}{\sqrt{OC^2 + OA^2}} = \frac{24}{5}$ . Vậy chu vi cần tìm là  $C = \pi OE = \frac{24\pi}{5}$ . **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 50:** Cho  $y = f(x)$  là hàm đa thức bậc ba và  $y = h(x)$  là hàm đa thức bậc 5 có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng  $f'(0) = -60$ . Khi đó tính giá trị của tích phân  $I = \int_m^n \frac{100 \cdot h(x)}{f^2(x)} dx$  ?

- A.  $\frac{13}{15} \ln \frac{20}{29}$ .      B.  $\frac{15}{13} \ln \frac{20}{29}$ .      C.  $\frac{13}{15} \ln \frac{25}{29}$ .      D.  $\frac{13}{15} \ln \frac{29}{25}$ .

**Lời giải**

Ta để ý rằng hàm số đa thức  $y = f(x)$  có cực trị tại  $x = m, x = n$  và đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm khác gọi là  $a, b, c$ . Kể đến để ý rằng đồ thị hàm số đa thức  $y = h(x)$  tại ba điểm  $a, b, c$  và hai điểm  $m, n$ . Khi ấy ta suy ra nghiệm của phương trình  $h(x) = 0$  cũng chính là nghiệm của phương trình  $f(x) = 0$  và  $f'(x) = 0$

Khi ấy ta có được:  $h(x) = k \cdot f(x) \cdot f'(x)$  ( $k < 0$ )

Tiếp đến ta thế  $x = 0$ , khi ấy có được:  $h(0) = k \cdot f(0) \cdot f'(0)$ , mà  $\begin{cases} f'(0) = -60, f(0) = 75 \\ h(0) = 39 \end{cases}$  nên suy ra  $k = -\frac{13}{1500}$

Khi ấy ta suy ra:  $h(x) = -\frac{13}{1500} \cdot f(x) \cdot f'(x)$ , từ đó ta thế vào tích phân trên

$$I = \int_m^n \frac{100 \cdot h(x)}{f^2(x)} dx = -\frac{13}{15} \int_m^n \frac{f(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)} dx = -\frac{13}{15} \int_m^n \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -\frac{13}{15} \ln |f(x)| \Big|_m^n = \frac{13}{15} (\ln |f(m)| - \ln |f(n)|)$$

Mà từ hình vẽ ta có  $f(m) = 145, f(n) = -125$  nên  $I = \frac{13}{15} \ln \left| \frac{f(m)}{f(n)} \right| = \frac{13}{15} \ln \frac{29}{25}$ . **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI THỬ THPT NGUYỄN KHUYỄN – LÊ THÁNH TÔNG (BÌNH DƯƠNG)

**Câu 41:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên khoảng  $(-1; +\infty)$  và thỏa mãn điều kiện sau:

$$x^2 - 4x + 2 + f(x^2 + 2x) = \frac{x}{x+1} f(2x^2), \forall x > -1. \text{ Khi đó tính tích phân } I = \int_0^8 f(x) dx$$

**A.**  $I = \frac{8}{3}$ .

**B.**  $I = 16$ .

**C.**  $I = 1$ .

**D.**  $I = -8$ .

**Lời giải**

Phương trình tương đương với:  $(x+1)(x^2 - 4x + 2) + (x+1)f(x^2 + 2x) = xf(2x^2), \forall x > -1$

Tích phân cận từ 0 đến 2 cho 2 vế, ta suy ra:  $\int_0^2 (x+1)(x^2 - 4x + 2) dx + \int_0^2 (x+1)f(x^2 + 2x) dx = \int_0^2 xf(2x^2) dx$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 (x+1)(x^2 - 4x + 2) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 f(x^2 + 2x) d(x^2 + 2x) = \frac{1}{4} \int_0^2 f(2x^2) d(2x^2)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 (x+1)(x^2 - 4x + 2) dx + \frac{1}{2} \int_0^8 f(x) dx = \frac{1}{4} \int_0^8 f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^2 (x+1)(x^2 - 4x + 2) dx + \frac{1}{4} \int_0^8 f(x) dx = 0$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^8 f(x) dx = -4 \int_0^2 (x+1)(x^2 - 4x + 2) dx = 16. \text{ Chọn đáp án B.}$$

**Câu 43:** Cho phương trình  $2^{2x+1} + |m|.2^{x+1} + 8 = 2^{x+4} + 2^x + |m|$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình đã cho có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 < 2 < x_2$ ?

**A.** 7.

**B.** 17.

**C.** 11.

**D.** 12.

**Lời giải**

Phương trình ban đầu tương đương với:  $2^{2x+1} + |m|.(2^{x+1} - 1) + 8 = 2^{x+4} + 2^x$

Đặt  $t = 2^x$  thì khi đó phương trình trở thành:  $2t^2 + |m|.(2t - 1) + 8 = 17t \Leftrightarrow 2t^2 + (2|m| - 17)t + 8 - |m| = 0$  (1)

Ứng với mỗi giá trị  $x$  cho ra đúng 1 giá trị  $t$  nên yêu cầu đề bài tương đương với phương trình (1) phải có 2 nghiệm thực phân biệt  $t_1, t_2$  với  $t_1 = 2^{x_1}, t_2 = 2^{x_2}$  và  $0 < t_1 < 4 < t_2$

Gọi  $f(t) = 2t^2 + (2|m| - 17)t + 8 - |m|$  thì khi đó suy ra  $f(4) < 0 \Leftrightarrow 7|m| - 28 < 0 \Leftrightarrow |m| < 4$

Mà  $m \in \mathbb{Z}$  nên suy ra  $m \in \{\pm 3; \pm 2; \pm 1; 0\}$  tức có 7 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn. **Chọn đáp án A**

**Câu 44:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{mx^2 + nx + p - 1}{x + 2}$  với  $m, n, p$  là các hằng số. Đường thẳng  $y = 2x - 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = f(x)$  tại hai điểm  $A$  và  $B$  sao cho hoành độ của hai điểm này là hai nghiệm phân biệt của phương trình  $x^2 - 5x + p + 1 = 0$ . Tính giá trị của  $P = 4m + 2n + p$ , biết rằng  $AB = 3\sqrt{5}$

**A.**  $P = 14$ .

**B.**  $P = 13$ .

**C.**  $P = 12$ .

**D.**  $P = 11$ .

**Lời giải**

Trước hết gọi  $a, b$  lần lượt là hoành độ của hai điểm  $A, B$  mà  $a, b$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - 5x + p + 1 = 0$

nên áp dụng hệ thức Vi-ét ta suy ra:  $\begin{cases} y_a = 2a - 1 \\ y_b = 2b - 1 \end{cases}; \begin{cases} a + b = 5 \\ ab = p + 1 \end{cases}$  tức ta suy ra được:

$$AB^2 = (a - b)^2 + (y_a - y_b)^2 = 5(a - b)^2 = 5[(a + b)^2 - 4ab] = 5(21 - 4p) = 45 \Leftrightarrow \boxed{p = 3} \text{ tức } \begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 4 \end{cases}$$

Suy ra  $(a, b) = \{(1, 4), (4, 1)\}$  tức ta có hai điểm  $(1; 1)$  và  $(4; 7)$  thuộc đồ thị hàm số  $f(x)$  (\*)

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

Tiếp đến ta xét phương trình hoành độ giao điểm của  $f(x) = \frac{mx^2 + nx + 2}{x + 2}$  và đường thẳng  $y = 2x - 1$ , khi đó ta có phương trình sau:  $2x^2 + 3x - 1 = mx^2 + nx + p \Leftrightarrow (m - 2)x^2 + (n - 3)x + (p + 1) = 0$  (1)

Mà  $a, b$  là nghiệm của phương trình (1) nên áp dụng Vi-ét, ta suy ra:  $a + b = \frac{3 - n}{m - 2} = 5, ab = \frac{p + 1}{m - 2} = 4$  ( $m \neq 2$ )  
 $(n; p) = (13 - 5m; 4m - 9)$  tức (1) thành:  $(m - 2)x^2 + 5(2 - m)x + 4(m - 2) = 0 \Leftrightarrow (m - 2)(x^2 - 5x + 4) = 0$   
 Khi đó  $m = 2$  (loại) (làm đến đây bị tách liền)

Sử dụng (\*), ta suy ra:  $f(1) = \frac{m + n + 2}{3} = 1; f(4) = \frac{16m + 4n + 2}{6} = 7$ , giải hệ ra được  $(m; n) = (3; -2)$

Suy ra  $4m + 2n + p = 11$ . **Chọn đáp án D.**

**Câu 46:** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; 1; 1)$  và  $B(1; -1; 2)$ . Gọi  $H_1$  là hình chiếu của vuông góc của  $A$  trên  $OB$ ,  $K_1$  là hình chiếu vuông góc của  $H_1$  trên  $OA$ ; .....;  $H_i$  là hình chiếu vuông góc của  $K_{i-1}$  trên  $OB$ ,  $K_i$  là hình chiếu vuông góc của  $H_i$  trên  $OA$  với  $i \in \{2; 3; 4; \dots; 12\}$ . Biết rằng  $K_{12}(a; b; c)$ , khi đó tính tổng  $a + b + c$ ?

**A.**  $a + b + c = \frac{1}{2^{11}}$ .      **B.**  $a + b + c = \frac{1}{4^{11}}$ .      **C.**  $a + b + c = \frac{1}{2^{10}}$ .      **D.**  $a + b + c = \frac{2}{4^{11}}$ .

**Lời giải**

Nhận xét dễ thấy rằng tam giác  $OAB$  là tam giác đều nên áp dụng tỉ số lượng giác ta suy ra dãy tỉ lệ thức sau:

$$\cos 60^\circ = \underbrace{\frac{OK_{12}}{OH_{12}} = \frac{OH_{12}}{OK_{11}} = \dots = \frac{OK_2}{OH_2} = \frac{OH_2}{OK_1} = \frac{OK_1}{OH_1} = \frac{OH_1}{OA}}_{24 \text{ times}} \Rightarrow OK_{12} = OA(\cos 60^\circ)^{24} = \frac{OA}{2^{24}} \quad (1)$$

Mà các vector  $\overrightarrow{OK_1}, \overrightarrow{OK_2}, \dots, \overrightarrow{OK_{12}}$  cùng phương và chiều với  $\overrightarrow{OA}$  nên từ (1) ta suy ra:  $\overrightarrow{OK_{12}} = \frac{\overrightarrow{OA}}{2^{24}}$

Suy ra tọa độ  $K_{12} = \left(\frac{2}{2^{24}}; \frac{1}{2^{24}}; \frac{1}{2^{24}}\right)$  tức  $a + b + c = \frac{2}{2^{24}} + \frac{1}{2^{24}} + \frac{1}{2^{24}} = \frac{4}{(2^2)^{12}} = \frac{4}{4^{12}} = \frac{1}{4^{11}}$ . **Chọn đáp án B.**

**Câu 47:** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$ , cho hai đường thẳng  $(d_1)$  và  $(d_2)$  có các phương trình lần lượt là

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}, \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}). \text{ Đường thẳng } (\Delta) \text{ đi qua điểm } M(1; 2; -2) \text{ và cắt cả hai}$$

đường thẳng  $(d_1)$  và  $(d_2)$ . Biết  $A(a; b; c)$  là giao điểm của  $(d_1)$  và  $(\Delta)$ , tính tổng  $a + b + c$ ?

**A.**  $a + b + c = 11$ .      **B.**  $a + b + c = 16$ .      **C.**  $a + b + c = 8$ .      **D.**  $a + b + c = -3$ .

**Lời giải**

Trước hết ta quy cả 2 đường thẳng về phương trình dạng tham số:  $(d_1): \begin{cases} x = 1 + 2a \\ y = 2 - a \\ z = 3 + a \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = -3 + 2b \\ y = -2 + b \\ z = 3 - b \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{R})$

Gọi  $A, B$  lần lượt là các giao điểm của  $(d_1)$  và  $(d_2)$  với đường thẳng  $(\Delta)$

Khi ấy  $A(1 + 2a; 2 - a; 3 + a), B(2b - 3; b - 2; 3 - b)$  với  $a, b \in \mathbb{R}$ . Suy ra:  $\overrightarrow{AB} = (2b - 2a - 4; a + b - 4; -a - b)$

Ta cũng có:  $\overrightarrow{MA} = (2a; -a; 5 + a), \overrightarrow{MB} = (2b - 4; b - 4; 5 - b)$ . Do  $M \in \Delta$  nên suy ra  $\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}$  với  $k \in \mathbb{R}$

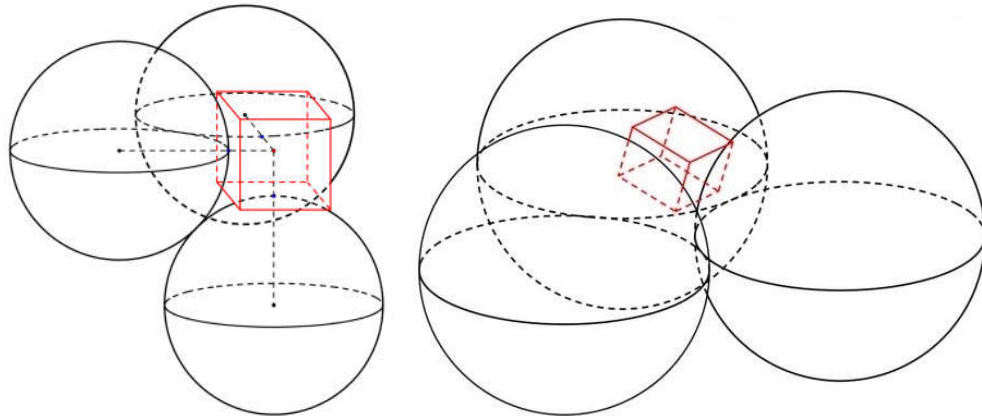
**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Từ đây ta có hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} 2a = k(2b - 4) \\ -a = k(b - 4) \\ 5 + a = k(5 - b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2b - 4}{b - 4} = -2 \\ \frac{b - 4}{5 - b} = -\frac{a}{5 + a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases} \text{ tức } A(11; -3; 8)$$

Vậy ta suy ra  $a = 11, b = -3, c = 8$  tức  $a + b + c = 16$ . **Chọn đáp án B**

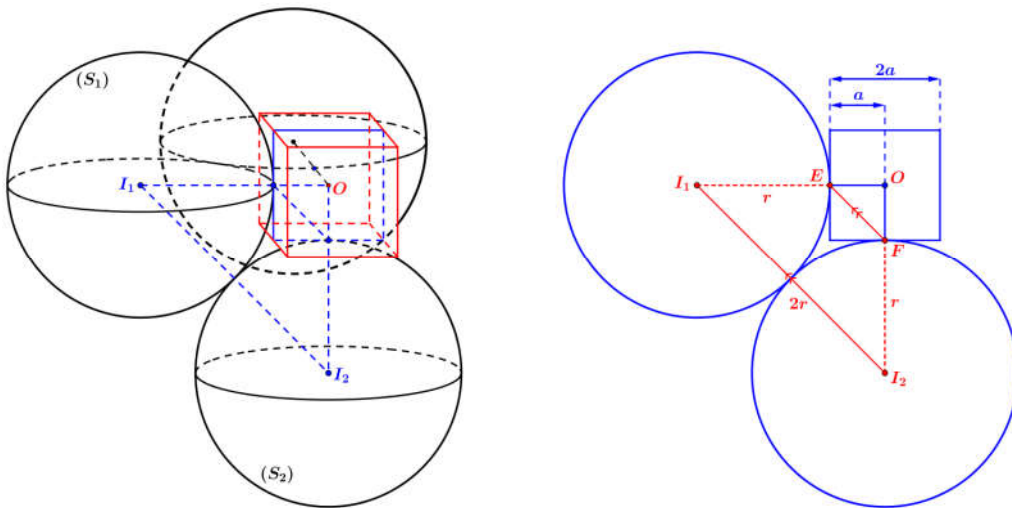
**Câu 48:** Cho ba viên bi hình cầu tiếp xúc với nhau từng đôi một và có cùng đường kính  $d = 61,5mm$ . Một vật thể là khối lập phương và có ba mặt tiếp xúc với ba viên bi đã cho tại tâm của mỗi mặt (tham khảo hình vẽ dưới đây). Tính thể tích của vật thể đó theo  $mm^3$  (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



- A.**  $14527(mm^3)$ .      **B.**  $16531(mm^3)$ .      **C.**  $12662(mm^3)$ .      **D.**  $12635(mm^3)$ .

**Lời giải**

Do ba mặt cầu có hai trong ba mặt cầu đó có vai trò như nhau nên ta chỉ cần xét mối quan hệ của khối vật thể với hai mặt cầu. Gọi  $(S_1), (S_2)$  lần lượt là các mặt cầu có tâm là  $I_1, I_2$  và  $O$  là tâm của hình lập phương, thực hiện phép cắt thông qua mặt phẳng  $(OI_1I_2)$  với khối lập phương và hai mặt cầu  $(S_1), (S_2)$ , ta thu được hình vẽ bên phải.



Kể đến gọi  $E, F$  là tiếp điểm của  $(S_1), (S_2)$  với vật thể, khi ấy dễ dàng suy ra  $EF \parallel I_1I_2$

Gọi  $2a$  là cạnh của lập phương và  $r$  là bán kính của  $(S_1), (S_2)$ . Khi đó theo định lý Thales, ta có tỉ lệ thức sau:

$$\frac{OE}{OI_1} = \frac{EF}{I_1I_2} \Leftrightarrow \frac{a}{a+r} = \frac{a\sqrt{2}}{2r} \Leftrightarrow \sqrt{2}r = a+r \Leftrightarrow a = (\sqrt{2}-1)r \text{ tức cạnh lập phương là } 2a = 2(\sqrt{2}-1)r$$

Với  $d = 2r = 61.5mm$ , suy ra thể tích cần tìm là  $V = (2a)^3 = d^3(\sqrt{2}-1) = (61.5mm)^3(\sqrt{2}-1) \approx 16530.2(mm^3)$

**Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 49:** Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ ,  $y = x^3$ ,  $y = a$  và  $y = b$  với  $a, b$  là các hằng số. Nếu  $3b = 2 + 3a$  thì  $S$  là một giá trị thuộc tập hợp nào dưới đây?

**A.**  $(0; 1]$ .

**B.**  $(1; 2]$ .

**C.**  $(2; 3]$ .

**D.**  $(3; 4]$ .

**Lời giải**

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3$  và  $y = x^3$

Do:  $-3x^2 + 6x - 4 = 0$  (phương trình vô nghiệm, hai đồ thị này không cắt nhau) nên ta hướng cách khác như sau:

Ta có:  $\begin{cases} y = (x - 2)^3 \\ y = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = f_2(y) = 2 + \sqrt[3]{y} \\ x = f_1(y) = \sqrt[3]{y} \end{cases}$ . Do  $3b = 2 + 3a \rightarrow \begin{cases} b > a \\ b - a = \frac{2}{3} \end{cases}$  nên với tung độ chạy từ  $y = a$  đến

$y = b$ , ta suy ra  $S = \int_a^b (f_2(y) - f_1(y)) dy = \int_a^b (2 + \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{y}) dy = (2y) \Big|_a^b = 2(b - a) = \frac{4}{3}$ . **Chọn đáp án B.**

**Câu 50:** Cho các hàm số  $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 1$ ,  $g(x) = 2x^3 - x^2 - 4x - 1$  và  $h(x) = 2x + f(x + g(x))$ .

Đường thẳng  $y = 2x + a$  ( $a$  là hằng số) tiếp xúc với đồ thị hàm số  $y = h(x)$  tại điểm có hoành độ bằng  $\frac{b}{c}$

với  $b, c$  là các số nguyên dương và  $\frac{b}{c}$  là phân số tối giản. Tính  $b + c$ ?

**A.**  $b + c = 5$ .

**B.**  $b + c = 11$ .

**C.**  $b + c = 9$ .

**D.**  $b + c = 12$ .

**Lời giải**

Từ giả thiết ta suy ra đường thẳng  $y = u(x) = 2x + a$  là tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = h(x)$  tại  $x = x_0$

Suy ra  $x = x_0$  là nghiệm của hệ phương trình:  $\begin{cases} h(x) = u(x) \\ h'(x) = u'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h'(x) = 2 + (1 + g'(x))f'(x + g(x)) = 2 & (1) \\ 2x + f(x + g(x)) = 2x + a & (2) \end{cases}$

Xét riêng  $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 1 \rightarrow f'(x) = 2x^3 - x^2 + x + 4$ . Giải  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Từ (1)  $\Leftrightarrow h'(x) = 2 + (1 + g'(x))f'(x + g(x)) = k_{y=2x+a} = 2 \Leftrightarrow (1 + g'(x))f'(x + g(x)) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} g'(x) = -1 \\ f'(x + g(x)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 2x - 4 = -1 \\ f'(x + g(x)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{19}}{6} \notin \mathbb{Q} \\ x + g(x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^3 - x_0^2 - 3x_0 = 0 \\ x_0 \in \mathbb{Q} \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2} \text{ tức } b + c = 5$

**Chọn đáp án A.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 47:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S)$  tâm  $I(1;2;3)$ , bán kính  $R=2$  và đường thẳng có phương trình

$$\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-mt \\ z=2+(m-1)t \end{cases} \quad (m, t \in \mathbb{R}) \text{ với } m \text{ là tham số. Hai mặt phẳng } (P), (Q) \text{ cùng chứa } \Delta \text{ và tiếp xúc với}$$

mặt cầu  $(S)$  tại  $M, N$ . Khi độ dài đoạn  $MN$  ngắn nhất, thì điểm  $E(a;b;c) \in \Delta$  sao cho diện tích tam giác  $OIE$  nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức  $a+b+c$  bằng

**A.**  $\frac{326}{125}$ .                      **B.**  $\frac{323}{125}$ .                      **C.**  $\frac{327}{125}$ .                      **D.**  $\frac{224}{125}$ .

**Lời giải**

**Cách 1:** Dựa vào tương giao của các yếu tố đề cho, ta gọi  $E$  là hình chiếu của  $I$  lên  $\Delta$ , từ đây ta có:  $d(I; \Delta) = IE$ . Tiếp đến ta gọi  $H$  là trung điểm  $MN$  nên áp dụng hệ thức lượng của tam giác vuông  $IME$  có đường cao  $IH$ , ta có được:  $IM^2 = IH \cdot IE$  với  $IM = IN = R, d(I; MN) = IH$ . Từ những điều trên, ta suy ra:  $R^2 = d(I; MN) \times d(I; \Delta)$

và  $MN^2 = 4(R^2 - d^2(I; MN)) = 4(4 - d^2(I; MN))$ . Khi  $MN_{\min}$  thì  $d(I; MN) = \left( \frac{R^2}{d(I; \Delta)} \right)_{\max}$  tức  $d(I; \Delta)_{\min}$  nên

quy về tìm giá trị nhỏ nhất của  $d(I; \Delta)$ ,

Thế  $t=0$  vào  $\Delta$ , thu được  $F(1;0;2)$ , suy ra:  $d(I; \Delta) = \frac{|\overrightarrow{IF}; \overrightarrow{u_\Delta}|}{|\overrightarrow{u_\Delta}|} = \sqrt{\frac{(3m-2)^2 + 20}{(m-1)^2 + m^2 + 4}} = f(m) \geq 2$  khi  $m=2$

Với  $m=2$  thì vào

$$\Delta: \begin{cases} x=1+2a \\ y=-2a \\ z=2+a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}) \Rightarrow E(1+2a; -2a; 2+a) \Rightarrow \underbrace{S_{\Delta OIE}}_{\min} = \left( \frac{1}{2} OI \right) \cdot \underbrace{d(E; OI)}_{\min} \geq \left( \frac{1}{2} OI \right) \cdot \underbrace{d(\Delta; OI)}_{const}$$

Với  $b \in \mathbb{R}$ , gọi  $G \in (OI) \rightarrow G(b; 2b; 3b)$ , ta viết đường vuông góc chung  $(d)$  của hai đường thẳng  $OI, \Delta$

Nhận xét khi  $S_{\Delta OIE}$  min khi  $E$  chính là giao điểm của  $(d)$  và  $\Delta$ . Ta có:  $\begin{cases} \overrightarrow{EG} = (2a-b+1; -2a-2b; a-3b+2) \\ \overrightarrow{u_d} = [\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{u_\Delta}] = (-8; -5; 6) \end{cases}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{EG} = k \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b+1 = -8k \\ -2a-2b = -5k \\ a-3b+2 = 6k \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{49}{125}. \text{ Vậy } x_E + y_E + z_E = 3 + a = 3 - \frac{49}{125} = \frac{326}{125}. \text{ Chọn đáp án A.}$$

**Cách 2:** DỄ NHẬN THẤY khi thế  $t=0$  vào  $\Delta$  thì  $\Delta$  luôn đi qua  $F(1;0;2)$  và  $\Delta \subset (R): x+2y+2z-5=0$ .

Nhận thấy  $(S)$  tiếp xúc với  $(P)$  tại  $F$ , khi  $MN_{\min}$  thì  $d(I; MN) = \left( \frac{R^2}{d(I; \Delta)} \right)_{\max}$  tức  $d(I; \Delta)_{\min} = d(I; (R))$

$$\text{Suy ra: } \Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2t \\ z=2+t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E(1+2t; -2t; 2+t) \\ t \in \mathbb{R} \\ a+b+c=3+t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} S_{\Delta OIE} \min \Leftrightarrow [\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{OI}]_{\min} \\ [\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{OI}] = (-8t + [-4]; -5t + [-1]; 6t + [2]) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra min xảy ra khi } t=t_0 = -\frac{(-8) \cdot (-4) + (-5) \cdot (-1) + 6 \cdot 2}{(-8)^2 + (-5)^2 + 6^2} = -\frac{49}{125} \rightarrow a+b+c = 3+t_0 = \frac{326}{125} \text{ Chọn đáp án A.}$$

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 48:** Cho các số phức  $z, w$  thỏa mãn điều kiện  $|z|(3-4i) = \frac{2z}{w-i} - 5i$ . Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của modun số phức  $u = 3w + 3 + i$ . Giá trị biểu thức  $P = 2M^2 + 3m^2$  là  
**A.** 23. **B.** 107. **C.** 125. **D.** 165.

**Lời giải**

Trước hết ta đặt:  $0 < a = |z| \Rightarrow a(3-4i) = \frac{2z}{w-i} - 5i \Rightarrow 3a - (4a-5i) = \frac{2z}{w-i} \Rightarrow \frac{2a}{|w-i|} = \sqrt{9a^2 + (4a-5)^2}$

Suy ra:  $\frac{2}{|w-i|} = \frac{\sqrt{9a^2 + (4a-5)^2}}{a} = \sqrt{\frac{25}{a^2} - \frac{40}{a} + 25} = \sqrt{\left(\frac{5}{a} - 4\right)^2 + 9} \geq 3$  khi  $a = \frac{5}{4}$  (nhận) tức suy ra:  $|w-i| \leq \frac{3}{2}$

Vậy:  $|u| = |3w + 3 + i| = |3(w-i) + 3 + 4i| \Rightarrow \begin{cases} |u| \geq 3|w-i| - |3+4i| = 3 = m \\ |u| \leq 3|w-i| + |3+4i| = 7 = M \end{cases} \Rightarrow 2M^2 + 3m^2 = 125$ . **Chọn đáp án C.**

**Câu 49:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(3; 2; 5)$  và hai mặt cầu lần lượt là  $(S_1): (x+1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$  và  $(S_2): (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 36$ . Gọi đường thẳng  $d$  là tiếp tuyến chung của hai mặt cầu  $(S_1), (S_2)$ ; gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  lên đường thẳng  $d$ . Biết khi  $d$  thay đổi thì  $H$  luôn chạy trên một đường tròn  $(C)$  cố định. Diện tích của đường tròn  $(C)$  thuộc khoảng nào dưới đây?  
**A.** (20; 24). **B.** (40; 42). **C.** (42; 44). **D.** (50; 60).

**Lời giải**

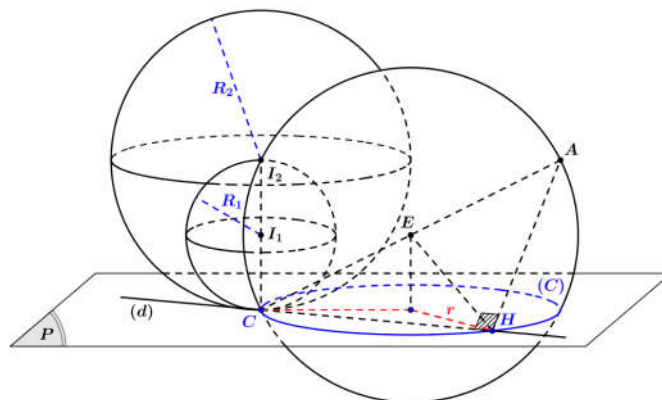
Ta có các mặt cầu  $(S_1), (S_2)$  lần lượt có tâm là  $I_1(-1; -2; 0), I_2(-3; 0; 1)$  và bán kính lần lượt là  $R_1 = 3, R_2 = 6$ . Tiếp đến khi xét tương giao mặt cầu  $(S_1), (S_2)$  dễ thấy  $I_1I_2 = |R_1 - R_2|$  nên suy ra  $(S_1), (S_2)$  tiếp xúc trong với nhau với  $(S_1)$  nằm trong  $(S_2)$ . Do đó hai mặt cầu chỉ tồn tại đúng một tiếp điểm dễ dàng tính được là  $C(1; -4; -1)$

thông qua hệ thức  $\frac{\overline{CI_1}}{\overline{CI_2}} = \frac{R_1}{R_2}$ . Khi đó tập hợp các đường thẳng  $d$  đi qua  $C(1; -4; -1)$  sẽ tạo thành một mặt phẳng

$(P)$  có vector pháp tuyến là  $\vec{n} = \overline{I_1I_2} = k(2; -2; -1)$ , dễ dàng viết được  $(P): 2x - 2y - z - 11 = 0$ .

Khi kẻ  $AH \perp d$  tại  $H$ , ta suy ra  $\widehat{AHC} = 90^\circ$  tức  $H$  thuộc mặt cầu đường kính  $AC$ , tâm là  $E(2; -1; 2)$

Với  $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 19$ , khi ấy ta có  $H \in (C) = (S) \cap (P)$  như hình vẽ dưới.



Với  $R_{(S)} = \sqrt{19}, d(E; (P)) = \frac{7}{3}$ , ta suy ra bán kính đường tròn  $(C): r = \sqrt{R^2 - d^2(E; (P))} = \frac{\sqrt{122}}{3}$ .

Vậy diện tích cần tìm là:  $S = \pi r^2 \approx 42,586 \in (42; 44)$ . **Chọn đáp án C**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN LAM SƠN – THANH HÓA**

**Câu 45:** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 9 chữ số và chia hết cho 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập  $S$ , xác suất để các chữ số của số đó đôi một khác nhau là

- A.  $\frac{86544}{10^7}$ .      B.  $\frac{68544}{10^8}$ .      C.  $\frac{86544}{10^8}$ .      D.  $\frac{68544}{10^7}$ .

**Lời giải**

Trước hết ta cần tính không gian mẫu, ta đặt số cần tìm là  $9m$  ( $m \in \mathbb{Z}^+$ ), khi đó ta có:

$10^8 \leq 9m \leq 10^9 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^+} m \in [11111112; 111111111]$  tức có  $111111111 - 11111112 + 1 = 100$  (triệu) số tự nhiên có 9 chữ số và chia hết cho 9, khi đó ta thu được:  $n(\Omega) = 10^8$  (cách).

Tiếp đến gọi  $A$  là biến cố “số cần tìm có các chữ số đôi một khác nhau -  $\overline{a_1 a_2 \dots a_8 a_9}$ ”. Do từ 0 đến 9 có 10 phần tử nên khi ấy ta **nhận xét** được rằng: số các số cần tìm từ các chữ số 0 đến 8 sẽ cho ra cùng kết quả với số các số cần tìm từ các chữ số 1 đến 9. Từ đó ta có hai trường hợp như sau:

Trường hợp 1:  $a_1, a_2, \dots, a_8, a_9 \in \{0; 1; \dots; 8\}$  thì  $a_1 \in \{1; 2; \dots; 8\}$  tức có 8 cách.

Các chữ số  $a_2, \dots, a_8, a_9 \in \{0; 1; \dots; 8\} \setminus \{a_1\}$  có  $(9-1)! = 8!$  cách, suy ra trường hợp này có  $8 \cdot 8!$  (cách).

Trường hợp 2:  $a_1, a_2, \dots, a_8, a_9 \in \{1; 2; \dots; 9\}$  thì có  $9!$  cách.

Tóm lại ta có tổng phần cử biến cố là:  $n(A) = 8 \cdot 8! + 9! = 8 \cdot 8! + 9 \cdot 8! = 17 \cdot 8!$  (cách)

Vậy xác suất cần tìm là  $P = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{17 \cdot 8!}{10^8} = \frac{68544}{10^7}$ . **Chọn đáp án D.**

**Câu 46:** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn:  $\begin{cases} f(x) > 0 \\ e^{1-x^2} [6f(x) + f'(x)] = (8x^2 + 12x + 4)\sqrt{f(x)}, \forall x > 0 \text{ và } f(1) = 4. \end{cases}$  Gọi

$D$  là miền hình phẳng được giới hạn bởi  $y = \sqrt{\frac{f(x)}{x}}$ ;  $y = 0$ ;  $x = 1$ ;  $x = 2$ . Khi  $D$  quay quanh  $Ox$  tạo thành

một khối tròn xoay có thể tích bằng  $\pi(m \cdot e^n + p)$ , trong đó  $m, n, p \in \mathbb{Z}$ . Hệ thức nào sau đây đúng?

- A.  $m + n + p = 6$ .      B.  $m + n + p = 5$ .      C.  $m + n + p = -5$ .      D.  $m + n + p = 7$ .

**Lời giải**

Với  $x > 0$ :  $e^{1-x^2} [6f(x) + f'(x)] = (8x^2 + 12x + 4)\sqrt{f(x)} \Leftrightarrow 3e^{3x} \cdot \sqrt{f(x)} + e^{3x} \cdot \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = (4x^2 + 6x + 2)e^{x^2+3x-1}$

$$\Leftrightarrow 3e^{3x} \cdot \sqrt{f(x)} + e^{3x} \cdot \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 2 \left[ x \cdot (2x+3)e^{x^2+3x-1} + e^{x^2+3x-1} \right] \Leftrightarrow (e^{3x} \cdot \sqrt{f(x)})' = 2(xe^{x^2+3x-1})'$$

$\Leftrightarrow e^{3x} \cdot \sqrt{f(x)} = 2xe^{x^2+3x-1} + C, \forall x > 0$ . Mà  $f(1) = 4$  nên suy ra  $C = 0$  tức  $\sqrt{f(x)} = 2xe^{x^2-1}, \forall x > 0$

Suy ra:  $y = \sqrt{\frac{f(x)}{x}} = \frac{2xe^{x^2-1}}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}e^{x^2-1}, \forall x > 0$ , mà  $f(x) > 0, \forall x > 0$  nên khi đó thể tích cần tìm là:

$$V = \pi \int_1^2 \left| \frac{f(x)}{x} - 0 \right| dx = \pi \int_1^2 4xe^{2x^2-2} dx = \pi \int_1^2 e^{2x^2-2} d(2x^2-2) = \pi \int_0^6 e^t dt = \pi(e^6 - 1)$$

Suy ra  $m = 1, n = 6, p = -1$  tức  $m + n + p = 6$ . **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 47:** Có tất cả bao nhiêu cặp số  $(x; y)$  với  $x, y \in \mathbb{N}^*$  sao cho đồng thời thỏa mãn phương trình

$$(3y - 2y^2 + 2)\log_3(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) > (y + 1)\log_2 \sqrt{x}$$

A. 3684.

B. 4012.

C. 4095.

D. 5406.

**Lời giải**

Trước hết ta xét bất phương trình sau:  $(3y - 2y^2 + 2)\log_3(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) > (y + 1)\log_2 \sqrt{x}$  (1)

$$\text{Với } x, y \in \mathbb{N}^* \text{ thì ta có: } \begin{cases} \log_3(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) > 0 \\ (y + 1)\log_2 \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3y - 2y^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < y < 2 \xrightarrow{y \in \mathbb{N}^*} \boxed{y = 1}$$

Thế  $y = 1$  vào thì bất phương trình (1) trở thành:  $3\log_3(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) > 2\log_2 \sqrt{x} = \log_2 x$  ( $x \in \mathbb{N}^*$ )

Đặt  $t = \log_2 x \rightarrow x = 2^t$  thì bất phương trình trở thành:  $3\log_3\left(1 + 2^{\frac{t}{2}} + 2^{\frac{t}{3}}\right) > t \Leftrightarrow 1 + 2^{\frac{t}{2}} + 2^{\frac{t}{3}} > 3^{\frac{t}{3}}$

Đặt  $t = 6u$  thì bất phương trình trở thành:  $1 + 2^{2u} + 2^{3u} > 3^{2u} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^u + \left(\frac{4}{9}\right)^u + \left(\frac{8}{9}\right)^u - 1 > 0$  (2)

Xét hàm số  $f(u) = \left(\frac{1}{9}\right)^u + \left(\frac{4}{9}\right)^u + \left(\frac{8}{9}\right)^u - 1$  có  $f'(u) = -\left(\frac{1}{9}\right)^u \ln 9 - \left(\frac{4}{9}\right)^u \ln \frac{9}{4} - \left(\frac{8}{9}\right)^u \ln \frac{9}{8} < 0, \forall u \in \mathbb{R}$

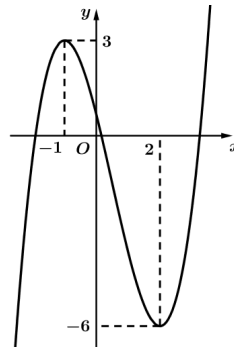
Khi ấy hàm số  $f(u)$  luôn **nghiệch biến** trên  $\mathbb{R}$  tức  $f(u) = 0$  có duy nhất 1 nghiệm (nhắm ra được  $u = 2$ )

Suy ra dấu của (2) đảo chiều, (2) tương đương với  $u < 2$  tức  $x < 2^{6u} = 2^{12} \xrightarrow{x \in \mathbb{N}^*} x \in \{1; 2; \dots; 2^{12} - 1\}$ , với 4095 giá trị  $x$  nguyên dương ứng với  $y = 1$ , ta kết luận có tất cả 4095 cặp số thỏa mãn. **Chọn đáp án C.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 48:** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(|f^2(x) + 6f(x) - m|)$  có 17 điểm cực trị?

A. 26.

B. 23.

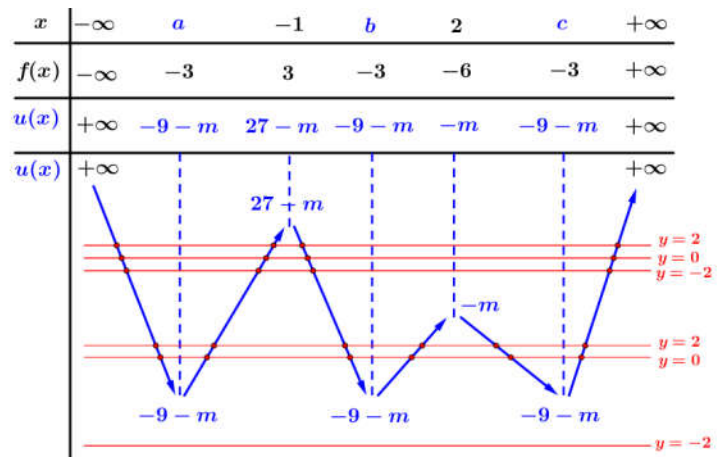
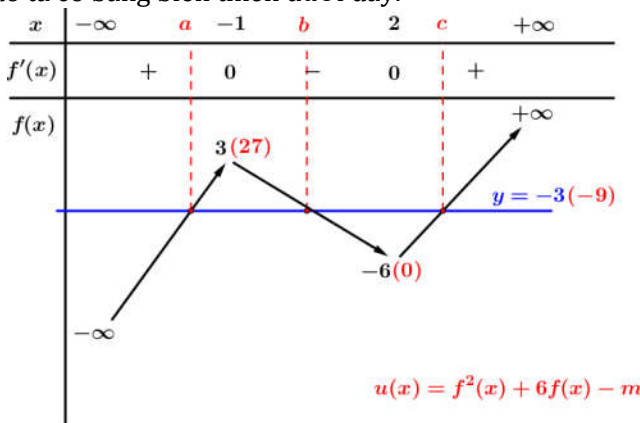
C. 24.

D. 25.

**Lời giải**

Trước hết ta thấy hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  đạt cực trị lần lượt tại  $x = -1, x = 2 \rightarrow f'(-1) = f'(2) = 0$  với  $f(-1) = 3, f(2) = -6$ , giải hệ phương trình 4 ẩn  $a, b, c, d$  ta dễ dàng suy ra:  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + \frac{2}{3}$ .

Từ đây ta suy ra hàm số  $f(|x|)$  có 3 điểm cực trị lần lượt là  $-2; 0; 2$ . Kể đến ta đặt  $u(x) = f^2(x) + 6f(x) - m$ , khi đó ta có bảng biến thiên dưới đây.



Xét hàm số  $g(x) = f(|u(x)|)$  có:  $g'(x) = \frac{u'(x)u(x)f'(|u(x)|)}{|u(x)|} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = u(x) = 0 \\ |u(x)| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = u(x) = 0 \\ u(x) = \pm 2 \end{cases}$

Do phương trình  $u'(x) = 0$  có 5 nghiệm  $a, -1, b, 2, c$  như hình trên nên để thỏa mãn đề bài thì hệ phương trình

$\begin{cases} u(x) = 0 \\ u(x) = \pm 2 \end{cases}$  phải có  $17 - 5 = 12$  nghiệm bội lẻ phân biệt. Khi đó ta có hai trường hợp như sau:

**Trường hợp 1:** Ba đường thẳng  $y = 0, y = \pm 2$  đều cắt vị trí với tung độ từ  $-m$  đến  $27 - m$

Suy ra:  $-m \leq -2$  và  $27 - m > 2$ , mà  $m \in \mathbb{Z}$  nên  $m \in \{2; 3; \dots; 23; 24\}$  (1)

**Trường hợp 2:** Hai đường thẳng  $y = 0, y = 2$  đều cắt vị trí với tung độ từ  $-9 - m$  đến  $-m$  và đường thẳng  $y = -2$  cắt vị trí tung độ bé hơn  $-9 - m$ . Suy ra:  $-m > 2$  và  $-2 \leq -9 - m < 0$ , mà  $m \in \mathbb{Z}$  nên  $m \in \{-8; -7\}$  (2)

Từ (1) và (2) ta kết luận có tổng cộng 25 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

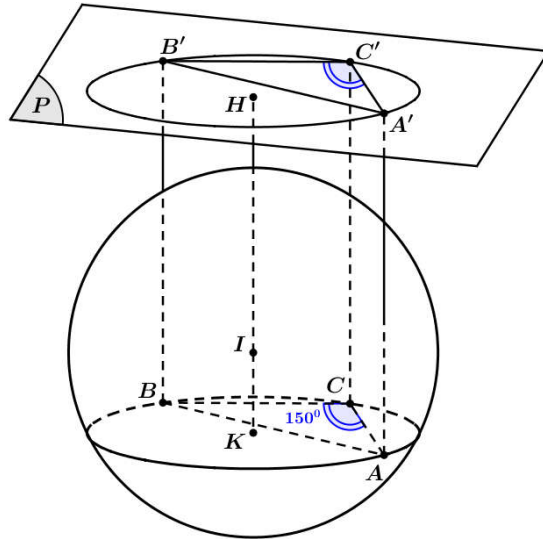
NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 50:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = 4, \widehat{ACB} = 150^\circ$ . Ba điểm  $A, B, C$  thay đổi nhưng luôn thuộc mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 4z + 4 = 0$  và ba điểm  $A', B', C'$  luôn thuộc mặt phẳng  $(P): x + 2y + 2z + 23 = 0$ . Thể tích lớn nhất của tứ diện  $ABC'B'$  bằng

- A.  $\frac{40(2-\sqrt{3})}{3}$ . B.  $\frac{24}{4-\sqrt{3}}$ . C.  $\frac{8}{4-\sqrt{3}}$ . D.  $80(2-\sqrt{3})$ .

**Lời giải**

Trước hết ta có hình vẽ như sau:



Đầu tiên ta có mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(-4; 3; -2)$  và bán kính  $R = 5$ . Khoảng cách từ  $I$  đến mặt phẳng  $(P)$  là

$$IH = \frac{|-4 + 6 - 4 + 23|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 7. \text{ Đường tròn ngoại tiếp tam giác } ABC \text{ có bán kính là } r = \frac{AB}{2 \sin \widehat{ACB}} = 4.$$

Gọi  $K$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Khoảng cách từ  $I$  đến mp  $(ABC)$  là  $IK = \sqrt{R^2 - r^2} = 3$ .

$$\text{Do } \begin{cases} (ABC) \parallel (P) \\ IK \perp (ABC) \end{cases} \text{ nên ba điểm } K, H, I \text{ thẳng hàng. Chiều cao } AA' \text{ lớn nhất khi } I \text{ nằm giữa } H \text{ và } K.$$

Giá trị lớn nhất của  $AA'$  là  $AA' = IH + IK = 10$ . (1)

Ta có:  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot d(C, AB) = 2d(C, AB)$ . Trên đường tròn  $(K)$ , điểm  $C$  luôn nhìn xuống cạnh  $AB$  không đổi

dưới một góc  $150^\circ$  nên  $d(C, AB)$  lớn nhất khi  $C$  là điểm chính giữa cung bé  $\widehat{AB}$ , khi đó tam giác  $ABC$  cân ở  $C$ .

Gọi  $N$  là trung điểm của  $AB$ . Khi đó giá trị lớn nhất của diện tích tam giác  $ABC$  là

$$S_{ABC} = 2 \cdot CN = 2 \cdot NB \cdot \tan 15^\circ = 4(2 - \sqrt{3}) \quad (2) \text{ và cũng có được } V_{ABC'B'} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3} AA' \cdot S_{ABC} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta suy ra  $\max(V_{ABC'B'}) = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 4(2 - \sqrt{3}) = \frac{40}{3}(2 - \sqrt{3})$ . **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

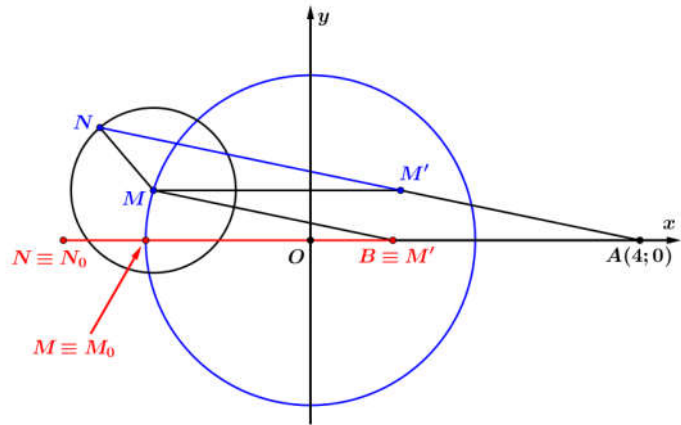
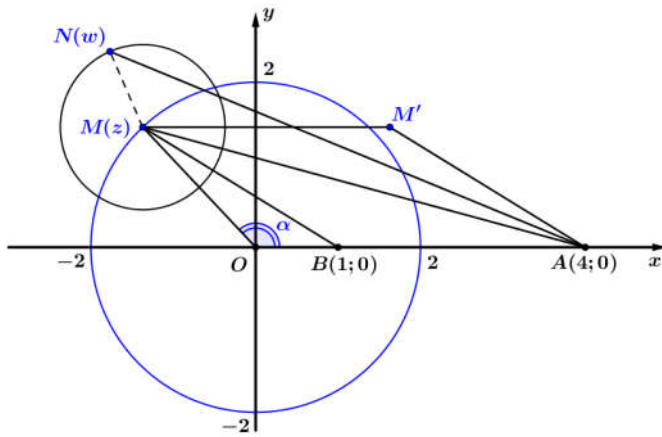
**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**  
**ĐỀ THI THỬ SỞ KIÊN GIANG**

**Câu 46:** Xét số phức  $z$  thỏa mãn  $(z-2)(\bar{z}+2)$  là số thuần ảo và số phức  $w$  thỏa  $|z-w| \leq 1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = 2|w-4| - |z-4|$  bằng

- A.  $4+3\sqrt{2}$ .      B.  $4+\sqrt{3}$ .      C. 8.      D. 6.

**Lời giải**

**Cách 1:** Trước hết ta đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), với  $(z-2)(\bar{z}+2) = |z|^2 + 2(z-\bar{z}) - 4 = x^2 + y^2 - 4 + 2xyi$  là số thuần ảo, nên suy ra:  $x^2 + y^2 - 4 = 0$ . Gọi  $M(z)$  thì ta suy ra  $M$  thuộc đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $R = 2$ . Tiếp đến ta gọi  $N(w)$  với  $|z-w| \leq 1$  ta suy ra  $MN \leq 1$ , cùng với điểm  $A(4;0), B(1;0)$  ta có hình vẽ dưới đây.



Khi đó ta cũng suy ra được:  $P = 2|w-4| - |z-4| = 2AN - AM$ .

Xét hai tam giác  $\triangle OBM$  và  $\triangle OMA$  có góc  $\alpha$  chung và  $\frac{OB}{OM} = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2}$  (theo tính chất **đường tròn Apollonius**)

Nên khi đó ta suy ra:  $\triangle OBM \sim \triangle OMA$  ( $c-g-c$ ) tức ta thu được:  $\frac{BM}{AM} = \frac{OB}{OM} = \frac{1}{2} \Rightarrow AM = 2MB$  (1)

Tiếp đến ta tịnh tiến điểm  $M$  theo vector  $\overrightarrow{BA}$  ta thu được  $M'$ , khi đó  $BM = AM'$  nên kết hợp với (1) ta suy ra  $P = 2AN - AM = 2(AN - BM) = 2(AN - AM') \leq 2M'N = 2(MM' + 1) = 2(AB + 1) = 8$ . Vậy giá trị nhỏ nhất của

$P$  là 8. Dấu bằng xảy ra khi  $\overline{N, M, M', A}$  thẳng hàng và  $\begin{cases} M \equiv M_0(-2;0), N \equiv N_0(-3;0) \\ M_0N_0 = 1 \end{cases}$ . **Chọn đáp án C.**

**Cách 2: Phương pháp đại số**

Trước hết ta đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), với  $(z-2)(\bar{z}+2) = |z|^2 + 2(z-\bar{z}) - 4 = x^2 + y^2 - 4 + 2xyi$  là số thuần ảo, nên suy ra:  $x^2 + y^2 - 4 = 0$ , kể đến đặt  $w = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) khi đó ta có:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 1$

Kết hợp với bất đẳng thức Mincopski, ta dễ dàng đánh giá được:

$$P = 2|w-4| - |z-4| = 2\sqrt{(a-4)^2 + b^2} - \sqrt{(x-4)^2 + y^2 + 3(x^2 + y^2 - 4)}$$

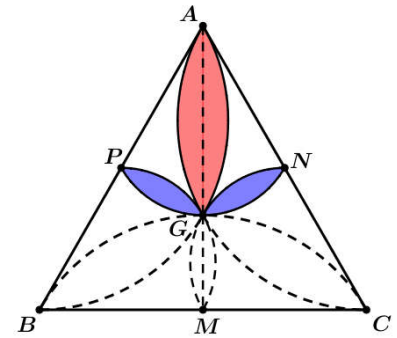
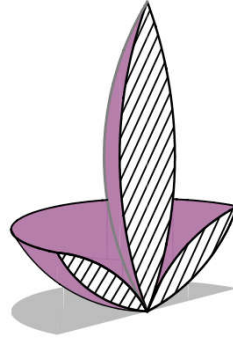
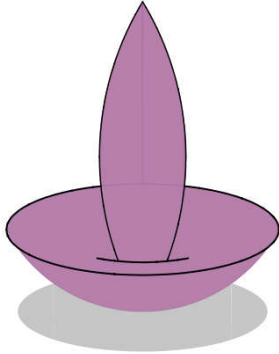
$$= 2\sqrt{(-a+4)^2 + (-b)^2} - 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq 2\sqrt{(-a+4+x-1)^2 + (y-b)^2} = 2\sqrt{(x-a+3)^2 + (y-b)^2}$$

Đặt  $(x-a; y-b) = (\sin \alpha; \cos \alpha)$ ,  $\cos \alpha \in [-1; 1]$  thì khi đó ta suy ra:

$$P = 2\sqrt{(\cos \alpha + 3)^2 + \sin^2 \alpha} = 2\sqrt{10 + 6 \cos \alpha} \leq 2\sqrt{10 + 6 \cdot 1} = 2 \cdot 4 = 8 \text{ tức } P_{\max} = 8. \text{ Chọn đáp án C.}$$

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 48:** Một người thiết kế mô hình một cái đèn ngủ bằng nhựa có hình dạng như hình vẽ 3D ở hình 1. Hình 2 là mặt cắt bởi mặt phẳng cắt đi qua trục của đèn, hình 3 là bản vẽ toán học. Tam giác  $ABC$  trong hình 3 là tam giác đều cạnh  $4\sqrt{3}dm$  và  $M, N, P$  là trung điểm các cạnh,  $G$  là trọng tâm của tam giác. Phần tô đậm trong hình 3 được tạo bởi giao nhau của các cặp cung tròn đi qua 3 điểm là:  $AGB$  và  $AGC$ ,  $PGN$  và  $PGM$ ,  $PGN$  và  $NGM$  (xem hình vẽ). Biết rằng chiếc đèn ngủ được tạo thành khi xoay phần tô đậm trong hình 3 quanh trục là đường thẳng  $AM$ . Tính thể tích của mô hình cái đèn ngủ này (làm tròn đến 3 chữ số thập phân)?



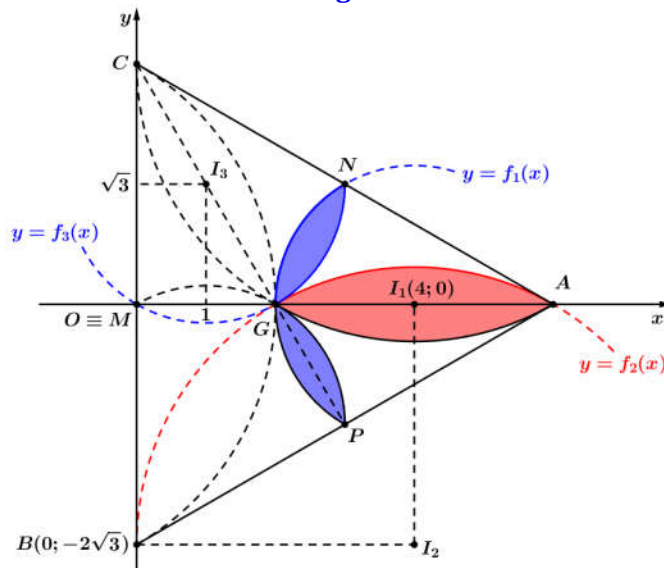
A.  $5,709dm^3$ .

B.  $5,907dm^3$ .

C.  $6,907dm^3$ .

D.  $6,709dm^3$ .

**Lời giải**



Gọi  $(C_1), (C_2), (C_3)$  là các đường tròn có các tâm lần lượt là  $I_1, I_2, I_3$ . Ta có:  $OA = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$ ,  $A(6;0)$ , với cung  $\widehat{AGB}$  thuộc đường tròn bàng tiếp  $\triangle ABC$  đều nên  $P$  là trung điểm  $GI_2$  tức suy ra  $I_3(4; -2\sqrt{3})$ .

Vì  $\widehat{MNG} = 90^\circ$  nên  $\widehat{MGN}, \widehat{PGN}$  lần lượt thuộc đường tròn đường kính  $CG, AG$ , suy ra  $I_1(4;0), I_3(1;4\sqrt{3})$ .

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} (C_1): y = f_1(x) = \sqrt{4 - (x-4)^2} \\ (C_2): y = f_2(x) = -2\sqrt{3} + \sqrt{16 - (x-4)^2} \\ (C_3): y = f_3(x) = \sqrt{3} - \sqrt{4 - (x-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{red} = \pi \int_2^6 \left[ -2\sqrt{3} + \sqrt{16 - (x-4)^2} \right]^2 dx \\ V_{blue} = \pi \int_2^3 \left[ \left( \sqrt{4 - (x-4)^2} \right)^2 - \left( \sqrt{3} - \sqrt{4 - (x-1)^2} \right)^2 \right] dx \end{cases}$$

Vậy suy ra thể tích cần tìm chính là:  $V = V_{blue} + V_{red} \approx 5,907(dm^3)$ . **Chọn đáp án B.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 49:** Cho  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn  $\log^3 y - (\log(x^2 + 1) + \log x)^3 = 3 \left( \log \frac{x}{y} + \frac{1}{\log_{x^2+1} 10} \right)$ . Tìm giá

trị nhỏ nhất của biểu thức  $K = x(y - 8x) + 2$

A.  $-\frac{51}{5}$ .

B.  $-\frac{41}{4}$ .

C.  $-\frac{45}{4}$ .

D.  $-\frac{52}{5}$ .

**Lời giải**

Trước hết ta có phương trình tương đương với:  $\log^3 y - (\log(x^2 + 1) + \log x)^3 = 3 \left( \log \frac{x}{y} + \log(x^2 + 1) \right)$

$$\Leftrightarrow \log^3 y - \log^3(x^3 + x) = 3(\log(x^3 + x) - \log y) \Leftrightarrow \log^3 y + 3\log y = \log^3(x^3 + x) + 3\log(x^3 + x)$$

Xét hàm số  $y = f(t) = t^3 + t$  có  $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$  tức  $f(t)$  luôn đồng biến trên  $\mathbb{R}$

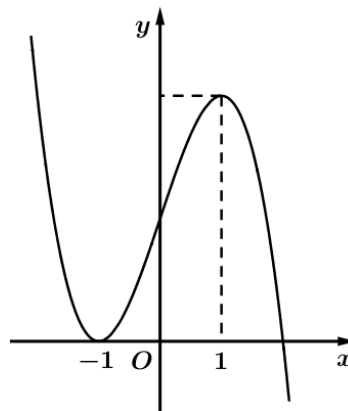
Khi ấy suy ra:  $\log y = \log(x^3 + x)$ , với  $x, y > 0$  ta cũng suy ra được:  $y = x^3 + x$

Khi đó:  $K = x(y - 8x) + 2 = x(x^3 - 7x) + 2 = x^4 - 7x^2 + 2$ , xét hàm số  $g(x) = x^4 - 7x^2 + 2$  trên  $(0; +\infty)$

Ta có:  $g'(x) = 4x^3 - 14x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{\frac{7}{2}} \end{cases} \Rightarrow \min P = \min_{(0; +\infty)} g(x) = g\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right) = -\frac{41}{4}$ . **Chọn đáp án B.**

**Câu 50:** Xét hàm số  $y = f(x)$  là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ sau. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số

$m \in (0; 2024)$  sao cho ứng với mỗi giá trị  $m$ , hàm số  $y = f\left(\left|\frac{x}{x-m}\right|\right)$  đồng biến trên khoảng  $(1; 2)$  ?



A. 2021.

B. 2018.

C. 2020.

D. 2022.

**Lời giải**

Từ đồ thị ta thấy hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $(-1; 1)$ . Tiếp đến để số  $y = f\left(\left|\frac{x}{x-m}\right|\right)$  đồng biến trên khoảng

$(1; 2)$  thì  $x \neq m \Leftrightarrow m \notin (1; 2) \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$ . (1)

Ta có:  $-1 \leq \left|\frac{x}{x-m}\right| \leq 1$ , do  $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 < m < 2024 \end{cases}$  nên bất phương trình thành:  $-1 \leq \frac{x}{x-m} \leq 1, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq x-m \\ x \leq -x+m \end{cases}$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \geq 2x \end{cases}, \forall x \in (1; 2). \text{ Để thấy } m = 0 \text{ thì hàm vô nghĩa nên kết hợp với (1) ta suy ra: } \begin{cases} 0 < m \leq 1 \\ m \geq \max_{[1; 2]} (2x) = 4 \end{cases}$$

Do  $m \in (0; 2024), m \in \mathbb{Z}$  nên  $m \in \{1; 4; 5; \dots; 2022; 2023\}$  tức có 2021 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn. **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**  
**ĐỀ THI THỬ SỞ NAM ĐỊNH**

**Câu 42:** Trên tập hợp các số phức, xét phương trình ẩn  $z$  là  $z^2 - (m+2)z + 4(m-1) = 0$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để với mỗi  $m$  đó, phương trình (1) có hai nghiệm phức phân biệt là  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1^2 - m(z_1 - 4)| = |z_2^2 - m(z_2 - 4)|$  ?

**A.** 8 .

**B.** 7 .

**C.** 9 .

**D.** 6 .

**Lời giải**

Trước hết với  $z_1, z_2$  là hai nghiệm phân biệt của phương trình  $z^2 - (m+2)z + 4(m-1) = 0$  (\*) thì khi đó suy ra:

$$\begin{cases} z_1^2 - (m+2)z_1 + 4(m-1) = 0 \\ z_2^2 - (m+2)z_2 + 4(m-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1^2 - m(z_1 - 4) = 2z_1 + 4 \\ z_2^2 - m(z_2 - 4) = 2z_2 + 4 \end{cases}, \text{ khi đó phương trình kia trở thành:}$$

$$|z_1^2 - m(z_1 - 4)| = |z_2^2 - m(z_2 - 4)| \Leftrightarrow |2z_1 + 4| = |2z_2 + 4|. \text{ Xét } \Delta^* = \Delta = (m+2)^2 - 16(m-1) = m^2 - 12m + 20, \text{ ta có:}$$

Trường hợp 1:  $\Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m > 10 \end{cases}$  thì khi đó  $z_1, z_2$  là hai nghiệm thực phân biệt, khi đó ta suy ra:

$$|2z_1 + 4| = |2z_2 + 4| \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + 2 = z_2 + 2 \\ z_1 + 2 = -z_2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = z_2 (L) \\ z_1 + z_2 = -4 \end{cases} \xrightarrow{Vi-et} m+2 = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m < 2 \end{cases} \text{ (nhận) (1)}$$

Trường hợp 2:  $\Delta < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 10$  thì khi đó  $z_1, z_2$  là hai nghiệm phức phân biệt tức  $z_{1,2} = x \pm yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )

Khi đó ta suy ra:  $|2z_1 + 4| = |2z_2 + 4| \Leftrightarrow |(x+2) + yi| = |(x+2) - yi|$  (luôn đúng) nên nhận (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra  $m \in [3; 9] \cup \{-6\}$  tức có 8 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án A.**

**Câu 46:** Xét các số thực  $x, y$  thỏa:  $x > \frac{1}{2}, 0 < y < 2\sqrt{2}$  và  $1 + (1-xy)\log_4(xy+2x) + x^2\log_2(x+1) = \log_{x^2-xy+3} 2$

Khi biểu thức  $7x+9y$  đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của biểu thức  $12y-4x$  thuộc khoảng nào sau đây ?

**A.** (20;30).

**B.** (0;10).

**C.** (10;20).

**D.** (-10;0).

**Lời giải**

Ta có phương trình ban đầu tương đương với:  $2 + 2(1-xy)\log_4(xy+2x) + 2x^2\log_2(x+1) = 2\log_{x^2-xy+3} 2$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(1-xy)\log_2(xy+2x)}_A + \underbrace{x^2\log_2(x+1)}_B = -2 + \frac{2}{\log_2(x^2-xy+3)} \quad (1), \text{ đặt } A, B \text{ như dòng bên, khi đó ta xét:}$$

Trường hợp 1:  $1-xy > -x^2 \Leftrightarrow 1+x^2 > xy \Leftrightarrow (x+1)^2 > xy+2x$ , thì khi đó ta có đánh giá (\*) như sau:

$$\begin{cases} A > -x^2\log_2(xy+2x) \\ \log_2(xy+2x) < \log_2(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A > x^2(-\log_2(xy+2x)) \\ -\log_2(xy+2x) > -\log_2(x+1)^2 \end{cases} \rightarrow A > x^2(-\log_2(x+1)^2) = -B \Leftrightarrow A+B > 0$$

$$\text{Và: } x^2-xy+1 > 0 \Leftrightarrow \log_2(x^2-xy+3) > \log_2 2 = 1 \Leftrightarrow -2 + \frac{2}{\log_2(x^2-xy+3)} < 0 \text{ tức } VT(1) > 0, VP(1) < 0$$

Trường hợp 2:  $1-xy < -x^2 \Leftrightarrow 1+x^2 < xy \Leftrightarrow (x+1)^2 < xy+2x$ , tương tự như (\*) ta suy ra:  $VT(1) < 0, VP(1) > 0$

Suy ra để (1) xảy ra dấu bằng thì  $VT(1) = VP(1) = 0 \Leftrightarrow A = -B \Rightarrow 1-xy = -x^2 \Leftrightarrow y = x + \frac{1}{x}$

$$\text{Suy ra: } 7x+9y = 16x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{16x \cdot \frac{9}{x}} = 24, \text{ dấu "=" xảy ra: } 16x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} \rightarrow y_0 = x_0 + \frac{1}{x_0} = \frac{25}{12} \in (0; 2\sqrt{2})$$

Vậy ta kết luận được:  $12y_0 - 4x_0 = 22 \in (20; 30)$ . **Chọn đáp án A.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 50:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 6$ , mặt phẳng  $(P): x + y + z - 3 = 0$  và điểm  $M(1; 2; 0)$ . Hai dây cung  $AB, CD$  của  $(S)$  thay đổi sao cho chúng cùng nằm trong mặt phẳng  $(P)$ , cùng đi qua  $M$  và vuông góc với nhau. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp  $O.ACBD$

**A.**  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ .

**B.**  $4\sqrt{3}$ .

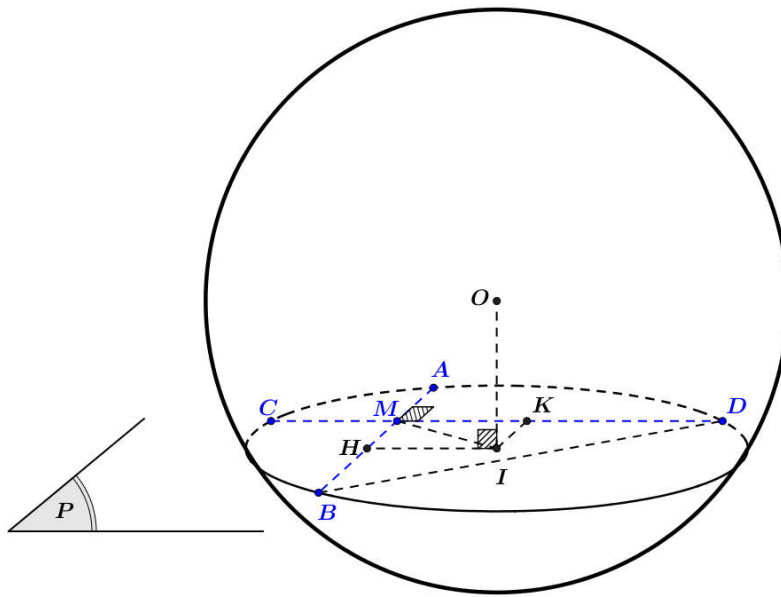
**C.**  $2\sqrt{3}$ .

**D.**  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

**Lời giải**

Trước hết ta có mặt cầu  $(S)$  có tâm trùng với gốc tọa độ  $O$  và bán kính  $R = \sqrt{6}$

Tiếp đến ta tính được  $d(O; (P)) = \sqrt{3} < R$  thì khi đẩy mặt phẳng  $(P)$  cắt mặt cầu  $(S)$  tạo thành đường tròn thiết diện  $(C)$  với hai dây cung  $AB, CD \in (C)$ , đường tròn này có tâm là  $I$  và bán kính là  $r$ .



Khi đó ta tính được:  $OM = \sqrt{5}, IM = \sqrt{2}$  và  $r = \sqrt{3}$ , suy ra  $V_{O.ACBD} = \frac{1}{3} d(O; (P)) \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{6} AB \cdot CD$ .

Gọi  $H, K$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$  thì khi đó ta suy ra  $V_{O.ACBD} = \frac{\sqrt{3}}{6} (2AH) \cdot (2CK) = \frac{2}{\sqrt{3}} AH \cdot CK$

Mà ta lại lần lượt có:  $\begin{cases} AH = \sqrt{r^2 - IH^2}; CK = \sqrt{r^2 - IK^2} \\ IH^2 + IK^2 = IM^2 = 2 \end{cases}$  nên khi ấy áp dụng bất đẳng thức Cosi, ta suy ra:

$$V_{O.ACBD} = \frac{2}{\sqrt{3}} AH \cdot CK \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{AH^2 + CK^2}{2} = \frac{(R^2 - IH^2) + (R^2 - IK^2)}{\sqrt{3}} = \frac{2R^2 - IM^2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Vậy  $V_{O.ACBD \max} = \frac{4}{\sqrt{3}}$  với dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $AH = CK$ . **Chọn đáp án A.**

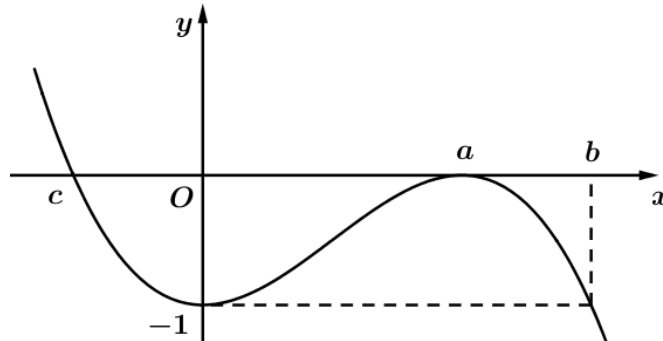
NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI THỬ THPT NGÔ THÌ NHẬM – NINH BÌNH

**Câu 38:** Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số  $g(x)$  thỏa mãn

$$[f(x) + 1]g(x) = |f(x)| \text{ có bao nhiêu điểm cực tiểu?}$$



A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra:  $g(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)+1}$ , khi đó ta phân tích hàm số này như sau:

Trước hết nhìn đồ thị ta thấy hàm số  $f(x)$  có hai điểm cực trị là  $x=0, x=a$ . Tiếp đến hàm số  $f(x)$  cắt trục hoành tại hai điểm  $c, a$ , khi đó dễ dàng tính ra được:  $g(x_1) = g(x_2) = 0 \Rightarrow g'(x_1) = g'(x_2) = 0$  tức  $c, a$  là các điểm cực trị của hàm số  $g(x)$ . (1)

Giải  $f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=b > a \end{cases}$  mà  $y=-1$  tiếp xúc đồ thị  $f(x)$  tại  $x=0$  nên  $f(x) = x^2(x-b)$

tức đồ thị  $g(x)$  có hai tiệm cận đứng  $x=0, x=b$ . (2)

Với  $x \rightarrow \pm\infty: f(x) \rightarrow \mp\infty$  nên suy ra  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{f(x) \rightarrow \mp\infty} \frac{|f(x)|}{f(x)+1} = \lim_{f(x) \rightarrow \mp\infty} \frac{\mp f(x)}{f(x)+1} = \mp \frac{0}{0+1} = \mp 1$  tức đồ thị

$g(x)$  có hai tiệm cận ngang lần lượt là  $y=1$  và  $y=-1$ . Xét tiếp:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow b^+} g(x) = -\infty$  (3)

Từ (1), (2) và (3) ta rút ra được bảng biến thiên biểu diễn hàm số  $g(x)$  như sau: ( $c < 0 < a < b$ )

| $x$     | $-\infty$ | $c$ | $0$       | $a$       | $b$       | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $g'(x)$ | -         | 0   | +         | -         | 0         | +         |
| $g(x)$  |           |     | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |           |
|         |           | 1   | 0         | 0         | -1        |           |
|         |           |     |           |           | $-\infty$ |           |

Từ hình vẽ trên, ta kết luận hàm số  $g(x)$  có hai điểm cực tiểu. **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 39:** Kí hiệu  $S$  là tập hợp các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-1|=\sqrt{34}$  và  $|z+1+mi|=|z+m+2i|$  (trong đó  $m \in \mathbb{R}$ ). Gọi  $z_1, z_2$  là hai số phức thuộc tập hợp  $S$  sao cho  $|z_1 - z_2|$  là lớn nhất. Khi đó, hãy tính giá trị của biểu thức  $|z_1 + z_2|$ .

- A.  $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}..$       B.  $|z_1 + z_2| = 2..$       C.  $|z_1 + z_2| = 10..$       D.  $|z_1 + z_2| = \sqrt{130}..$

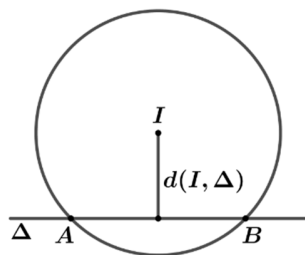
**Lời giải**

Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Khi đó

●  $|z-1|=\sqrt{34}$ , tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(1;0)$ , bán kính  $R=\sqrt{34}$ . (1)

●  $|z+1+mi|=|z+m+2i| \Leftrightarrow (2m-2)x + (4-2m)y + 3 = 0$ , khi đó tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường thẳng  $\Delta: (2m-2)x + (4-2m)y + 3 = 0$ . (2)

Từ (1) và (2), suy ra tập các điểm biểu diễn số phức  $z$  của tập  $S$  là giao điểm của  $\Delta$  và  $(C)$ .



Gọi  $A, B$  là các điểm biểu diễn của hai số phức  $z_1, z_2$ . Suy ra  $|z_1 - z_2| = AB$ . Để  $AB$  lớn nhất  $\Leftrightarrow d(I, \Delta)$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow \Delta$  đi qua điểm  $I$ . Khi đó  $I$  là trung điểm của  $AB$  nên  $|z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 2|\overrightarrow{OI}| = 2OI = 2$ . **Chọn đáp án B.**

**Câu 44:** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z+6-13i|+|z-3-7i|=3\sqrt{13}$  và  $(12-5i)(z-2+i)^2$  là số thực âm. Khi đó giá trị của  $|z|$  bằng

- A.  $\sqrt{145}.$       B. 3.      C. 9.      D. 145.

**Lời giải**

Ta có:  $(12-5i)(z-2+i)^2 = \frac{-(5-i)^2(z-2+i)^2}{2} = -\frac{1}{2}((5-i)(z-2+i))^2$  là số thực âm nên khi đó

Ta đặt  $w = (5-i)(z-2+i)$ , suy ra:  $|(z-2+i)+8-14i|+|(z-2+i)-i-8i|=3\sqrt{13}$

$\Leftrightarrow |(5-i)(z-2+i)+(5-i)(8-14i)|+|(5-i)(z-2+i)+(5-i)(-1-8i)|=3\sqrt{13}.|5-i|$

$\Leftrightarrow |w+26-78i|+|w-13-39i|=39\sqrt{2}$ . Gọi  $M(w), A(-26;78), B(13;39)$  với  $AB=39\sqrt{2}$  ta suy ra  $MA+MB=AB$  tức  $M$  chạy trên đoạn thẳng  $AB$ .

Mà  $(12-5i)(z-2+i)^2 - \frac{1}{2}((5-i)(z-2+i))^2 = -\frac{w^2}{2}$  là số thực âm tức  $w^2$  là số thực dương nên khi đặt

$w = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) thì ta suy ra  $\text{Im}(w^2) = 2xy = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ . Nhận thấy đoạn thẳng  $AB$  không cắt trục hoành

nên loại  $y=0$ , suy ra  $x=0$ . Do  $AB \cap Oy = M(0;52)$  nên suy ra  $w = (5-i)(z-2+i) = 52i$

Suy ra  $z = \frac{52i}{5-i} + 2 - i = 9i$ . Vậy  $|z| = 9$ . **Chọn đáp án C.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 46:** Cho hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3^x + 5^x + 7^x - 28x^2 + 16x - 3$  trên  $(-\infty; +\infty)$ .

Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-2024; 2024]$  để hàm số

$g(x) = F(4x^3 + mx^2 + 1)$  có đúng 5 điểm cực trị ?

A. 9.

B. 8.

C. 15.

D. 11.

**Lời giải**

Trước hết ta xét:  $g(x) = F(4x^3 + mx^2 + 1)$  có  $g'(x) = 2x(6x + m)F'(4x^3 + mx^2 + 1)$

Theo giả thiết ta có:  $F'(x) = f(x)$  nên ta xét riêng nghiệm phương trình  $f(x) = 0$  như sau:

Khi đó ta có:  $3^x + 5^x + 7^x - 28x^2 + 16x - 3 = 0$ . Khảo sát hàm số  $f(x) = 3^x + 5^x + 7^x - 28x^2 + 16x - 3$  trên  $\mathbb{R}$

**(Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli)** Xét trên  $[0; 1]$ , ta có các đánh giá sau:  $3^x \leq 2x + 1, 5^x \leq 4x + 1, 7^x \leq 6x + 1$

Suy ra:  $3^x + 5^x + 7^x - 28x^2 + 16x - 3 \leq -28x^2 + 28x = -28x(x - 1) \leq 0, \forall x \in [0; 1]$  (1)

**(Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli)** Xét trên  $[0; 2]$ , ta có các đánh giá sau:  $3^x \leq 4x + 1, 5^x \leq 12x + 1, 7^x \leq 24x + 1$

Suy ra:  $3^x + 5^x + 7^x - 28x^2 + 16x - 3 \leq -28x^2 + 56x = -28x(x - 2) \leq 0, \forall x \in [0; 2]$  (2)

Xét tiếp  $x > 2$  ta dễ thấy  $f(x) > 0$ . Từ (1) và (2) ta suy ra hàm số  $f(x) = 0$  có ba nghiệm là  $x = 0, x = 1, x = 2$

Khi đó xét phương trình  $g'(x) = 0$  thì ta có:

$$\begin{cases} x = 0; x = -\frac{m}{6} \\ 4x^3 + mx^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = -\frac{m}{6}; -\frac{m}{4} \\ 4x^3 + mx^2 + 1 = 1 \\ 4x^3 + 1 = -mx^2 \quad (3), 4x^3 - 1 = -mx^2 \quad (4) \\ 4x^3 + mx^2 + 1 = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Dễ thấy (3), (4) không tồn tại nghiệm  $x = 0$  nên suy ra  $\begin{cases} 4x^3 + mx^2 + 1 = 0 \quad (3) \\ 4x^3 + mx^2 - 1 = 0 \quad (4) \end{cases}$  phải có 2 nghiệm phân biệt.

Trường hợp 1: mỗi phương trình (3) và (4) đều có duy nhất 1 nghiệm, tức hàm số  $\begin{cases} h_1(x) = 4x^3 + mx^2 + 1 \\ h_2(x) = 4x^3 + mx^2 - 1 \end{cases} \quad (4 > 0)$

luôn đồng biến trên  $\mathbb{R}$  (theo định lý Rolle), suy ra  $h_1'(x) = h_2'(x) = 12x^2 + 2mx > 0$  (5) khi và chỉ khi

$\Delta'_{(5)} = m^2 - 12 \leq 0$ . Suy ra  $m^2 \leq 12 \Leftrightarrow -2\sqrt{3} \leq m \leq 2\sqrt{3} \quad (a)$ .

Trường hợp 2: xét hệ (\*)  $\begin{cases} 4x^3 + mx^2 + 1 = 0 \\ 4x^3 + mx^2 + 1 = 1 \\ 4x^3 + mx^2 + 1 = 2 \end{cases}$ , xét riêng hàm số  $h_1(x) = 4x^3 + mx^2 + 1$  có hai điểm cực trị là  $0, -\frac{m}{6}$

Khi đó để mỗi phương trình của hệ đều có 2 nghiệm thì  $h_1\left(-\frac{m}{6}\right) = \frac{m^3}{108} \in \{0; 1; 2\} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0; 6\} \quad (b)$

Giải thích thêm: tại trường hợp này nghiệm  $-\frac{m}{6}$  xuất hiện 4 lần, 3 phương trình của hệ (\*) đều phát sinh thêm 1

nghiệm mới với tổng là 3 nghiệm, cùng với 2 nghiệm  $x = 0; x = -\frac{m}{4}$  sẽ tạo thành 5 nghiệm bội lẻ phân biệt.

Từ (a), (b) và (c) kết hợp với  $m \in [-2024; 2024], m \in \mathbb{Z}$  ta suy ra  $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 6\}$  tức có 8 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn bài toán. **Chọn đáp án B.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 47:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 25$ , đường thẳng  $d: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + t \end{cases}$  và mặt phẳng  $(P): 2x - y + 2z - 10 = 0$ . Từ điểm  $M \in d$  kẻ hai tiếp tuyến phân biệt đến  $(S)$  và hai tiếp tuyến song song với  $(P)$ . Tìm số điểm  $M$  có hoành độ nguyên.

A. 6.                      B. 7.                      C. 0.                      D. 5.

**Lời giải**

Trước hết ta có mặt cầu  $(S)$  có tâm trùng gốc tọa độ và bán kính bằng 5.

Gọi  $(Q)$  là mặt phẳng chứa hai tiếp tuyến phân biệt của  $(S)$ , suy ra  $(P) \parallel (Q)$  tức  $(Q): 2x - y + 2z + m = 0$

Mà với  $M \in d$  ta lại có  $M(t; 2 - t; 1 + t)$  và  $M \in (Q)$  nên suy ra  $2t - (2 - t) + 2(1 + t) + m = 0 \Leftrightarrow m = -5t$

Khi ấy để tồn tại tiếp tuyến thì:  $d(O; (Q)) < 5 \Leftrightarrow \frac{|m|}{3} < 5 \xrightarrow{m=-5t} -3 < t < 3 \rightarrow -3 < x_M < 3$  (1)

Ngoài ra  $OM^2 > 25 \Leftrightarrow t^2 + (2 - t)^2 + (1 + t)^2 > 25 \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 20 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x_M > 2.9 \\ t = x_M < -2.2 \end{cases}$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $x_M \in (-3; -2.2) \cup (2.9; 3)$ . Mà  $x_M \in \mathbb{Z}$  nên suy ra 0 điểm  $M$  nào thỏa mãn. **Chọn đáp án C.**

**Câu 48:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của  $x$  để tồn tại duy nhất giá trị nguyên  $y$  sao cho thỏa mãn bất phương trình  $e^{2y} + 4x^2y - y^2 + x > \ln(x^2 - y)$  ?

A. 3.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 4.

**Lời giải**

Điều kiện ban đầu:  $x^2 - y > 0 \Leftrightarrow y < x^2$

Đầu tiên ta có bất phương trình tương đương với:  $e^{2y} + 4x^2y - y^2 + x - \ln(x^2 - y) > 0$

Xét hàm số theo biến  $y$  tức  $f(y) = e^{2y} + 4x^2y - y^2 + x - \ln(x^2 - y)$  trên  $(-\infty; x^2)$  ta có:

$f'(y) = 2e^{2y} + 4x^2 - 2y + \frac{1}{x^2 - y} > 0$  trên  $(-\infty; x^2)$  nên hàm số  $f(y)$  **đồng biến** trên  $(-\infty; x^2)$

Từ đó ta có bất phương trình  $f(y) > 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) < y < x^2$

Ta có nhận xét như sau: do tồn tại duy nhất giá trị nguyên của  $y$  nên suy ra khoảng  $(f^{-1}(0); x^2)$  của giá trị  $y$

cũng chứa duy nhất **một** giá trị nguyên, khi đó giá trị của  $y$  sẽ chạy từ  $x^2 - 1$  đến  $x^2$ , tức  $x^2 - 1 < f^{-1}(0) < y < x^2$

, từ đó ta suy ra mệnh đề này chỉ xảy ra khi và chỉ khi

$f^{-1}(0) > x^2 - 1 \Leftrightarrow f(x^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow e^{2(x^2 - 1)} + 4x^2(x^2 - 1) - (x^2 - 1)^2 + x - \ln(x^2 - (x^2 - 1)) < 0$

$\Leftrightarrow e^{2(x^2 - 1)} + 4x^2(x^2 - 1) - (x^4 - 2x^2 + 1) + x > 0 \Leftrightarrow e^{2(x^2 - 1)} + 3x^4 - 2x^2 + x - 1 < 0$

Xét hàm số  $g(x) = e^{2(x^2 - 1)} + 3x^4 - 2x^2 + x - 1$  có  $g'(x) = 0$  có một nghiệm duy nhất

Suy ra phương trình  $g(x) = 0$  có không quá hai nghiệm

Từ đó ta giải ra bất phương trình  $g(x) < 0$  có chứa 1 giá trị nguyên  $x = 0$  tức có 1 giá trị nguyên  $x$  sao cho thỏa mãn yêu cầu đề bài. **Chọn đáp án B.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**  
**ĐỀ THI THỬ SỐ THÁI BÌNH LẦN 2**

**Câu 25:** Xét hai số phức  $z_1, z_2$  thay đổi đồng thời thỏa mãn các điều kiện  $|z_1 - 5 - 2i| = |z_2 - 5 - 2i| = 5$  và  $|z_1 - 3|^2 + |z_2 - 3|^2 = |z_1 - z_2|^2$ . Giá trị lớn nhất của  $P = |z_1 + z_2 - 3|$  bằng

A.  $\sqrt{42} + 3\sqrt{29}$ .      B.  $\sqrt{42} + 2\sqrt{29}$ .      C.  $\sqrt{42} + \sqrt{29}$ .      D.  $\sqrt{42} - \sqrt{29}$ .

**Lời giải**

**Cách 1:** Đầu tiên ta gọi  $A, B$  lần lượt là các điểm biểu diễn số phức  $z_1, z_2$  khi đó ta suy ra  $A, B$  thuộc đường tròn tâm  $I(5; 2)$ , bán kính  $R = 5$ . Gọi  $C(3; 0)$ , khi đó kết hợp giả thiết ta suy ra  $CA^2 + CB^2 = AB^2$  tức  $\triangle ACB$  vuông

tại  $C$ . Gọi  $M(z_1 + z_2)$ ,  $N\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)$  và  $E$  là trung điểm  $CI$  thì khi đó:  $\overrightarrow{EN} = \frac{\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{IN}}{2} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}{4}$

$$= \frac{2\overrightarrow{CI} + 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB}}{4} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow 4EN^2 = IC^2 + 2R^2 + 2(\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC})$$

$$\Leftrightarrow 4EN^2 = IC^2 + 2R^2 + 2\left(\frac{IA^2 + IB^2 - AB^2}{2} - \frac{IA^2 + IC^2 - AC^2}{2} - \frac{IB^2 + IC^2 - BC^2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4EN^2 = IC^2 + 2R^2 - 2IC^2. \text{ Suy ra: } EN = \sqrt{\frac{2R^2 - IC^2}{4}} = \sqrt{\frac{2R^2 - IC^2}{4}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 5^2 - 8}}{2} = \frac{\sqrt{42}}{2}.$$

Mặt khác  $N$  là trung điểm  $OM$  nên suy ra nên theo tính chất phép vị tự ta suy ra  $M$  thuộc đường tròn tâm  $J$  sao cho  $E(4; 1)$  là trung điểm  $OJ$  và bán kính  $2EN = \sqrt{42}$ .

Vậy với  $J(8; 2)$  ta suy ra  $P = |z_1 + z_2 - 3| = MC \leq JC + 2EN = \sqrt{29} + \sqrt{42}$ . **Chọn đáp án C.**

**Cách 2:** Sử dụng công thức  $2(|z|^2 + |w|^2) = |z + w|^2 + |z - w|^2$ , áp dụng vào bài toán trên ta có:

$$100 = 2(|z_1 - 5 - 2i|^2 + |z_2 - 5 - 2i|^2) = |(z_1 - 5 - 2i) - (z_2 - 5 - 2i)|^2 + |(z_1 - 5 - 2i) + (z_2 - 5 - 2i)|^2$$

$$\Leftrightarrow 100 = |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2 - 10 - 4i|^2. (1). \text{ Gọi } A(z_1), B(z_2), C(3; 0), M(z_1 + z_2), N\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \text{ thì khi đó } N \text{ là}$$

$$\text{trung điểm } AB \text{ tức } AB = 2NC, \text{ suy ra: } |z_1 - z_2| = 2\left|\frac{z_1 + z_2}{2} - 3\right| (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:  $\Leftrightarrow 4\left|\frac{z_1 + z_2}{2} - 3\right|^2 + |z_1 + z_2 - 10 - 4i|^2 = 100$ . Đặt  $z_1 + z_2 = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) thì khi đó ta

biến đổi được:  $\Leftrightarrow (x - 6)^2 + y^2 + (x - 10)^2 + (y - 4)^2 = 100 \Leftrightarrow (x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 42$  tức  $M$  thuộc đường tròn  $(C)$  tâm  $I(8; 2)$ , bán kính  $R = \sqrt{42}$ . Suy ra  $P = |z_1 + z_2 - 3| = MC \leq IC + R = \sqrt{42} + \sqrt{29}$ .

**Chọn đáp án C.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI THỬ SỞ SƠN LA LẦN 2

**Câu 47:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(1; -1; 3)$ , bán kính  $R$ . Gọi  $AB$  là đường kính của mặt cầu  $(S)$ . Lấy hai điểm  $M, N$  sao cho mặt phẳng  $(IMN)$  tạo với  $AB$  một góc  $60^\circ$  và  $MN = \frac{R}{2}$ . Biết rằng biểu thức  $T = 3AM^2 + 4BN^2$  có giá trị nhỏ nhất bằng  $\frac{159}{7}$ . Khi đó, bán kính  $R$  bằng

A.  $\sqrt{\frac{159}{28}}$ .

B. 3.

C. 4.

D. 2.

**Lời giải**

Đầu tiên ta gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $A, B$  lên mặt phẳng  $(IMN)$ . Do  $AB$  là đường kính của mặt cầu

$(S)$  tức  $I$  là trung điểm  $AB$  nên  $d(A; (IMN)) = d(B; (IMN)) \Leftrightarrow AH = BK = h = \frac{AB}{2} \sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Khi đó:  $T = 3AM^2 + 4BN^2 = 3(AH^2 + HM^2) + 4(BK^2 + KN^2) = 7h^2 + 3HM^2 + 4KN^2$

Mặt khác ta lại có đánh giá sau: 
$$\begin{cases} HK = 2AI \cos 60^\circ = AI = R \\ HM + MN + NK \geq HK \Rightarrow HM + NK \geq HK - \frac{R}{2} = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2} \end{cases}$$

Và theo bất đẳng thức B.C.S ta có:  $\frac{R^2}{4} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}HM + \frac{1}{2} \cdot 2NK \right)^2 \leq \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) (3HM^2 + 4NK^2)$  nên suy ra:

$$T = 7h^2 + 3HM^2 + 4KN^2 \geq 7 \left( \frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{3}{7} R^2 = \frac{159}{7} \Leftrightarrow \left( \frac{21}{4} + \frac{3}{7} \right) R^2 = \frac{159}{7} \Leftrightarrow R = 2. \text{ Chọn đáp án D.}$$

**Câu 50:** Cho số phức  $z_1$  và  $z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = |z_2| = 2$  và  $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{2}$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z_1 + 4| + 2|z_2 - 3 - i|$  bằng

A. 6.

B.  $\sqrt{34}$ .

C.  $2\sqrt{5}$ .

D.  $2\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\begin{cases} |z_1| = |z_2| = 2 \\ |z_1 - z_2| = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 8 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}) \Rightarrow \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} = 0$ , suy ra:  $\begin{cases} z_2 = iz_1 \\ z_2 = -iz_1 \end{cases}$

Đặt:  $\begin{cases} z_1 = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R}) \\ |z_1| = 2 \rightarrow x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ . Biến đổi:  $|z_1 + 4| = \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 8x + 16} = \sqrt{4 + 8x + 16} = \sqrt{8x + 20} = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2|z_1 + 1|$

Khi ấy suy ra:  $\frac{P}{2} = |z_1 + 1| + |z_2 - 3 - i| = \begin{cases} |z_1 + 1| + |iz_1 - 3 - i| = |z_1 + 1| + |-z_1 + 1 - 3i| \geq |z_1 + 1 - z_1 + 1 - 3i| = \sqrt{13} \\ |z_1 + 1| + |-iz_1 - 3 - i| = |z_1 + 1| + |-z_1 - 1 + 3i| \geq |z_1 + 1 - z_1 - 1 + 3i| = 3 \end{cases}$

Mà  $\sqrt{13} > 3$  nên suy ra  $P_{\min} = 2.3 = 6$ . **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN HẠ LONG – QUẢNG NINH LẦN 3**

**Câu 42:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 25$  và mặt phẳng  $(P): 2x - 2y + z + 14 = 0$ . Xét các điểm  $M$  thuộc  $(P)$  sao cho từ  $M$  kẻ được ba tiếp tuyến phân biệt đến mặt cầu  $(S)$  và ba tiếp điểm nằm trên một đường tròn có chu vi bằng  $5\pi\sqrt{3}$ . Biết tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn các điều kiện trên là một đường tròn, bán kính của đường tròn đó bằng

A. 8.                                      B. 5.                                      C. 7.                                      D. 6.

**Lời giải**

Trước hết ta có mặt cầu  $(S)$  tâm  $I(3; -1; 2)$  và bán kính  $R = 5$ , khi ấy ta có:  $d(I; (P)) = 8$

Đầu tiên ta gọi  $A$  là một trong ba tiếp điểm mà đề bài đã nêu, khi ấy khoảng cách từ  $A$  đến  $IM$  cũng chính bằng bán kính đường tròn  $r$  có chu vi bằng  $C = 2\pi r = 5\pi\sqrt{3}$ , suy ra  $r = d(A; IM) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ . Xét  $\triangle MAI$  vuông tại  $A$

nhận  $AH$  là đường cao từ  $A$  hạ xuống  $IM$ , khi ấy ta có:  $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{R^2} \Rightarrow AM = 5\sqrt{3}$

Suy ra:  $IM^2 = 100$  tức  $M$  thuộc mặt cầu tâm  $I(3; -1; 2)$  và bán kính  $R' = 10$

Mà  $M \in (P)$  nên khi ấy  $M \in$  đường tròn cố định  $(C)$  có bán kính  $r' = \sqrt{R'^2 - d^2(I; (P))} = 6$ . **Chọn đáp án D.**

**Câu 43:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai đường thẳng  $d$  và  $\Delta$  cùng song song với trục  $Oz$ , lần lượt đi qua hai điểm  $A(3; 2; 5)$  và  $B(3; 3; -7)$ . Mặt phẳng  $(P): x + y + z + 4 = 0$  cắt mặt trụ tròn xoay sinh ra bởi đường thẳng  $d$  quay xung quanh trục  $\Delta$  theo thiết diện là hình  $(H)$ . Khi điểm  $M$  thay đổi trên  $(H)$ , giá trị lớn nhất của bình phương khoảng cách từ  $M$  đến gốc tọa độ bằng

A.  $225 + 4\sqrt{2}$ .                                      B.  $121 - 26\sqrt{2}$ .                                      C.  $121 + 26\sqrt{2}$ .                                      D.  $225 - 4\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

Từ giả thiết ta có:  $d: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$  và  $\Delta: \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = t' \end{cases} \quad (t, t' \in \mathbb{R})$ , khi ấy suy ra:  $d(d; \Delta) = 1$ . Khi ấy mặt trụ tròn xoay có nhận

$\Delta$  làm trục và tập hợp các đường sinh song song với  $d$  cách  $\Delta$  1 khoảng bằng 1 và đường tròn mặt cắt đáy tạo bởi mặt phẳng song song với  $(Oxy)$  có phương trình là:  $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$ . Khi đó suy ra điểm  $M(a; b; c)$  thỏa

mãn  $\begin{cases} (a-3)^2 + (b-3)^2 = 1 \\ a + b + c + 4 = 0 \end{cases}$ . Đặt  $\begin{cases} a = 3 + \cos \alpha \\ b = 3 + \sin \alpha \end{cases}, \forall \alpha \in [0; 2\pi] \rightarrow z = 10 - (\sin \alpha + \cos \alpha)$

Suy ra:  $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (3 + \sin \alpha)^2 + (3 + \cos \alpha)^2 + (10 - \sin \alpha - \cos \alpha)^2$   
 $= 26(\sin \alpha + \cos \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \alpha + 120$ .

Đặt  $t = \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{t^2 - 1}{2}$  thì khi ấy ta suy ra:

$OM^2 = 26t + 2\left(\frac{t^2 - 1}{2}\right) + 120 = t^2 + 26t + 119 = f(t)$ , suy ra:  $OM^2_{\max} = \max_{[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]} f(t) = f(\sqrt{2}) = 121 + 26\sqrt{2}$

Xảy ra khi và chỉ khi  $M \equiv M_0\left(3 + \frac{1}{\sqrt{2}}; 3 + \frac{1}{\sqrt{2}}; -10 - \sqrt{2}\right)$ . **Chọn đáp án C.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 44:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2 - 4x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  sao cho ứng với mỗi  $m$  hàm số  $y = f(x^3 - mx^2 + (m+3)x - 2)$  có đúng ba điểm cực trị sao cho thuộc khoảng  $(0; 2)$  ?

A. 8 .

B. 9 .

C. 6 .

D. 7 .

**Lời giải**

Đầu tiên ta xét:  $y = f(x^3 - mx^2 + (m+3)x - 2)$  có  $y' = (3x^2 - 2mx + m + 3)f'(x^3 - mx^2 + (m+3)x - 2)$

$$\text{Giải } \begin{cases} y' = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1; 3\} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2mx + m + 3 = 0 & (1) \\ x^3 - mx^2 + (m+3)x - 2 = 1 & (2) \\ x^3 - mx^2 + (m+3)x - 2 = 3 & (3) \end{cases}, \text{ đặt } h(x) = x^3 - mx^2 + (m+3)x - 2, \text{ khi đó:}$$

Trường hợp 1: (1) vô nghiệm trên khoảng  $(0; 2)$  tức  $h'(x) = 0$  vô nghiệm trên  $(0; 2)$

Khi ấy  $f'(h(x))$  luôn đơn điệu trên  $(0; 2)$ , khi ấy cả (2) và (3) đều tạo ra tổng nghiệm đơn tối đa là 2  $\rightarrow$  loại.

Trường hợp 2: (1) có 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  và (1) có nghiệm trên khoảng  $(0; 2)$ , khi ấy ta có:

$$\text{Với } h(x) \text{ có 2 điểm cực trị, ta suy ra: } \Delta'_{h'(x)} = m^2 - 3m - 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1.85 \\ m > 4.85 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^+} m \geq 5$$

$$\text{Với } h'(x) = 0 \text{ có nghiệm trên } (0; 2), \text{ ta suy ra: } h'(0) \cdot h'(2) < 0 \Leftrightarrow (m+3)(15-3m) < 0 \Leftrightarrow m > 5 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^+} m \geq 6$$

$$\text{Từ 2 ý nhỏ trên, ta suy ra được: } m \geq 6. \text{ Tiếp đến, ta có: } x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 3m - 9}}{3} \text{ và } x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 3m - 9}}{3}$$

Nhận thấy:  $m \geq 6 \rightarrow \sqrt{m^2 - 3m - 9} \geq 3 \rightarrow x_1 \geq 3$  và  $1 \geq 3x_2 > 0$ , khi ấy  $x = x_2$  chính là nghiệm đơn cần nhận (4)

Ta thấy: với  $x_2 < x_1$  và hàm số  $h(x)$  có hệ số  $a$  dương nên  $x_2$  là điểm cực đại của hàm số  $h(x)$

Dễ thấy  $h(x_2) > 1 > h(0)$  và  $h(2) = 12 - 2m \leq 0, \forall m \geq 6$  nên suy ra  $h(x) = 1$  có 2 nghiệm đơn tức (2) có 2 nghiệm đơn  $m, n$  (5). Từ (4) và (5) ta suy ra có tổng cộng là 3 nghiệm đơn, khi ấy để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì (3) phải vô nghiệm ( $h(x_2) < 3$ ) hoặc (3) nhận  $x = x_2$  là nghiệm bội chẵn (tiếp xúc tức  $h(x_2) = 3$ ).

$$\text{Suy ra: } h(x_2) \leq 3 \Leftrightarrow x_2^3 - mx_2^2 + (m+3)x_2 - 5 \leq 0 \text{ (6) với } x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 3m - 9}}{3} \leq \frac{1}{3}, \forall m \geq 6.$$

$$\text{Do } 0 < x_2 \leq \frac{1}{3} < 1 \rightarrow x_2^2 - x_2 < 0 \text{ nên (6) } \Leftrightarrow x_2^3 + 3x_2 - 5 \leq m(x_2^2 - x_2) \Leftrightarrow m \leq \frac{x_2^3 + 3x_2 - 5}{x_2^2 - x_2} = g(x_2).$$

Giả sử ta bỏ qua điều kiện  $m \geq 6$  tức  $x_2$  là ẩn tự do, khi ấy khảo sát hàm số  $g(x_2) = \frac{x_2^3 + 3x_2 - 5}{x_2^2 - x_2}$  trên  $\mathbb{R}$  nhận

thấy  $g'(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 \approx 0,68$ , suy ra  $m \leq \min g(x_2) = 12,16$ . Khi đó để điều giả sử là đúng thì  $m \geq 6$  và

$m \leq 12,16$  đồng thời xảy ra tức  $6 \leq m \leq 12,16$  tức có 7 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 45:** Xét  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a > 0$ ) sao cho hàm số  $y = f(x)$  có hai điểm cực trị là  $x = -3, x = -1$  và đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Gọi  $y = g(x)$  là hàm số bậc hai có đồ thị là parabol đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và nhận điểm cực tiểu của đồ thị hàm số này là đỉnh. Khi hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị của hàm số  $y = f(x), y = g(x)$  có diện tích bằng  $\frac{4}{3}$ , thì giá trị của tích phân  $\int_{-2}^2 f(x) dx$  bằng

A. 40.

B. 68.

C. 38.

D. 45.

**Lời giải**

Từ giả thiết suy ra  $f'(x) = a(x+1)(x+3) = a(x^2 + 4x + 3) \rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = a\left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x\right) + C$

Mà  $f(0) = 2$  nên suy ra  $f(x) = a\left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x\right) + 2 \rightarrow f(-1) = 2 - \frac{4a}{3}$  là điểm cực tiểu của đồ thị  $y = f(x)$ .

Theo giả thiết đỉnh đồ thị  $y = g(x)$  là điểm cực tiểu của đồ thị  $y = f(x)$  nên suy ra:  $g(x) = k(x+1)^2 + 2 - \frac{4a}{3}$

Đặt  $h(x) = f(x) - g(x) = a\left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x\right) - k(x+1)^2 + \frac{4a}{3}$  thì suy ra:  $h(-3) = 0$ . Khi đó ta có quan hệ:

$\frac{4}{3}a - 4k = 0 \Leftrightarrow a = 3k$ , suy ra:  $h(x) = f(x) - g(x) = 3k\left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x\right) - k(x+1)^2 + 4k = k(x+1)^2(x+3)$

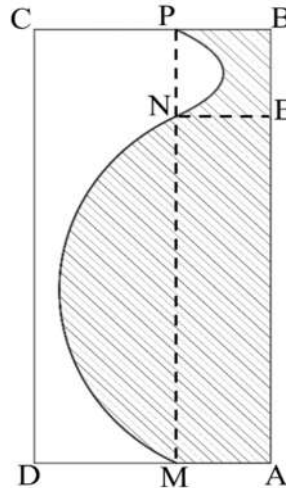
Xét phương trình  $h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$ , với  $h(x) \geq 0, \forall x \in [-3; -1]$ , suy ra:  $S = \int_{-3}^{-1} h(x) dx = \frac{4}{3}k = \frac{4}{3} \Leftrightarrow k = 1$

Suy ra:  $a = 3k = 3$  tức  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$  và  $\int_{-2}^2 f(x) dx = 40$ . **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 47:** Một vật thể có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi hình phẳng ( $H$ ) (phần gạch chéo trong hình vẽ bên) quanh trục  $AB$ . Hình phẳng ( $H$ ) nằm trong hình chữ nhật  $ABCD$ , giới hạn bởi các đoạn thẳng  $AM, BP$  ( $M, P$  là hai điểm lần lượt thuộc các cạnh  $AD, BC$ ), cung tròn  $MN$  và cung parabol  $NP$ . Biết  $AB = 5dm$ ,  $AM = 1dm$ ,  $BPNE$  là hình vuông có cạnh  $1dm$ , cung tròn  $MN$  có bán kính  $R = \sqrt{5}dm$  và tiếp tuyến của cung tròn và cung parabol tại  $N$  trùng nhau. Tính thể tích của vật thể tròn xoay đó, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm



A.  $50,68dm^3$ .

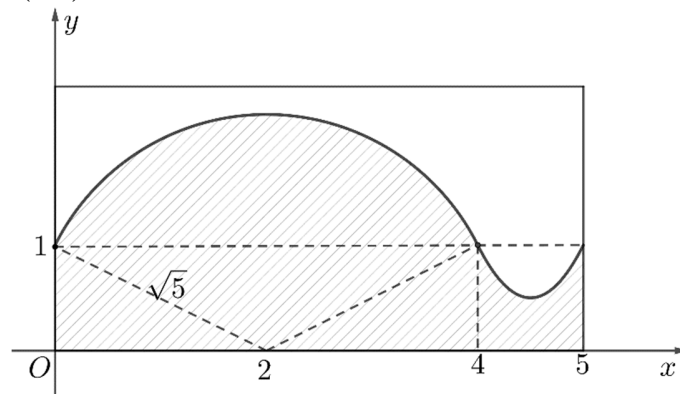
B.  $45,32dm^3$ .

C.  $40,28dm^3$ .

D.  $47,54dm^3$ .

**Lời giải**

Đầu tiên ta chọn hệ trục tọa độ  $Oxy$  như hình vẽ, ta có: Cung tròn là đồ thị hàm số  $f(x) = \sqrt{5 - (x - 2)^2}$  ( $0 \leq x \leq 4$ ); Parabol  $g(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a > 0$ ) đi qua các điểm  $(4; 1), (5; 1)$  và có  $g'(4) = f'(4) = -2$  (tiếp tuyến của cung tròn và cung parabol tại điểm  $(4; 1)$  trùng nhau) suy ra  $a = 2, b = -18, c = 41$ .



Thể tích khối tròn xoay là:  $V = \pi \int_0^4 [5 - (x - 2)^2] dx + \pi \int_4^5 (2x^2 - 18x + 41) dx \approx 47,54(dm^3)$ . **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 48:** Xét các số thực  $x, y$  không âm thỏa mãn  $3 \cdot 9^x + 8x - y = 2 \left[ \log_3 (y+2)^2 - 1 \right]$ . Khi biểu thức

$$P = y + \frac{48}{9^x + 1} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức } 2x + y \text{ bằng}$$

**A.** 8.

**B.** 7.

**C.** 9.

**D.** 10.

**Lời giải**

Phương trình tương đương:  $3^{2x+1} + 8x + 4 = 2 \log_3 (y+2)^2 + y + 2 \Leftrightarrow 3^{2x+1} + 4(2x+1) = 3^{\log_3 (y+2)} + 4 \log_3 (y+2)$

Xét hàm số  $y = f(t) = 3^t + 4t$  có  $f'(t) = 3^t \ln 3 + 4 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$  tức hàm số  $f(t)$  luôn đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Suy ra:  $\log_3 (y+2) = 2x+1 \Leftrightarrow y+2 = 3^{2x+1} = 3 \cdot 9^x \rightarrow y+5 = 3(9^x + 1) > 3 \rightarrow y > -2$

Suy ra:  $P = y + \frac{48}{9^x + 1} = y + 5 + \frac{144}{y+5} - 5 \geq 2\sqrt{(y+5)\left(\frac{144}{y+5}\right)} - 5 = 19$ , dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $y+5 = \frac{144}{y+5}$

Suy ra:  $y+5 = \pm 12 \xrightarrow{y > -2} y = 7 \rightarrow 2x = \log_3 (y+2) - 1 = 1$ , suy ra:  $2x + y = 8$ . **Chọn đáp án A.**

**Câu 49:** Xét các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|z - 3 - 2i| + |\bar{z} + 2 + 8i| = \sqrt{61}$  và  $(w+10)(\bar{w} + 8i)$  có phần thực bằng  $-32$ . Hỏi giá trị lớn nhất của  $P = |z + w - 6 - 4i|$  thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.** (18;19).

**B.** (24;25).

**C.** (19;20).

**D.** (17;18).

**Lời giải**

Ta có:  $\begin{cases} w = x + yi & (x, y \in \mathbb{R}) \\ v = (w+10)(\bar{w} + 8i) = (x^2 + y^2 - 8y + 10x) + (...)i \end{cases}$  mà  $\text{Re}(v) = -32$  nên  $x^2 + y^2 - 8y + 10x = -32$  tức ta

suy ra  $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 9 \rightarrow |w - 4 + 5i| = 3$  (1)

Đặt:  $z' = z - 10 + i \rightarrow \sqrt{61} = |z - 3 - 2i| + |\bar{z} + 2 + 8i| = |z' + 7 - 3i| + |\bar{z}' + 12 - 9i| \geq |z' + 7 - 3i - 12 + 9i - \bar{z}'| = \sqrt{61}$

Viết lại  $|z' - (-7 + 3i)| + |z' - (-12 + 9i)| = \sqrt{61}$ . Khi ấy dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:  $z' + 7 - 3i = k(-12 + 9i - z')$

(1) và (2) ta có:  $P = |z' + (-w + 4 - 5i)| \leq |z'| + |-w + 4 - 5i| \leq 3 + \max\{|-7 + 3i|; |-12 + 9i|\} \approx 18,26$ . **Chọn đáp án A.**

**Câu 50:** Cho số phức  $z$  thay đổi thỏa mãn  $|z - 5 - 10i| = 5\sqrt{2}$ . Gọi  $S$  là tập hợp các số phức  $w = \frac{\bar{z}}{3 + 4i} + 2 + 3i$ .

Biết rằng  $w_1, w_2$  là hai số thuộc  $S$  sao cho  $|w_1 - w_2| = 2$ . Giá trị của  $T = |w_1 + w_2 - 2 - 2i|$  bằng

**A.** 1.

**B.** 4.

**C.** 2.

**D.**  $2\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

Từ giả thiết ta suy ra:  $5\sqrt{2} = |\bar{z} - 5 + 10i| = |(w - 2 - 3i)(3 + 4i) + (-5 + 10i)| = 5|w - 2 - 3i + 1 + 2i| \rightarrow |w - 1 - i| = \sqrt{2}$

Đặt:  $\begin{cases} u_1 = w_1 - 1 - i \\ u_2 = w_2 - 1 - i \end{cases} \rightarrow |u_1| = |u_2| = \sqrt{2}, |w_1 - w_2| = |u_1 - u_2| = 2 \rightarrow 8 = 2(|u_1|^2 + |u_2|^2) = |u_1 - u_2|^2 + |u_1 + u_2|^2$

Suy ra:  $T = |(w_1 - 1 - i) + (w_2 - 1 - i)| = |u_1 + u_2| = \sqrt{8 - |u_1 - u_2|^2} = \sqrt{8 - 4} = 2$ . **Chọn đáp án C.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN VINH LẦN 2**

**Câu 45:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm thỏa mãn  $f'(1-3x) = x^2 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  sao cho ứng với mỗi  $m$  hàm số  $g(x) = f(2x - 4\sqrt{2x+1} + m)$  có đúng 2 điểm cực trị sao cho thuộc khoảng  $(0; 24)$  ?

A. 12.

B. 11.

C. 23.

D. 24.

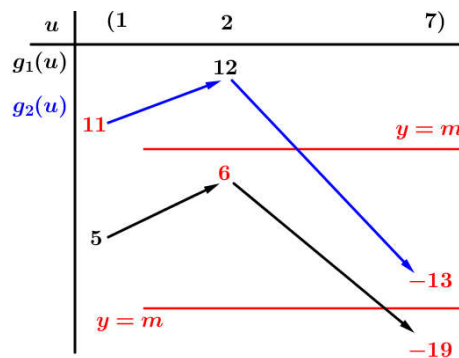
**Lời giải**

$$\text{Đặt: } u = 1 - 3x \rightarrow x = \frac{1-u}{3} \rightarrow f'(u) = \left(\frac{1-u}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1-u}{3}\right) = \frac{u^2 - 8u + 7}{3}, \forall u \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 8x + 7}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Giải  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 7\}$ . Đặt  $u = \sqrt{2x+1} \in (1; 7), \forall x \in (0; 24)$ , khi đó:  $(g(u))' = (2u-4)u'.f'(u^2-4u+m-1)$

$$\text{Giải } (g(u))' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \quad (L), u = 2 \\ u^2 - 4u + m - 1 = 1 \\ u^2 - 4u + m - 1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 + 4u - u^2 = g_1(u) \\ m = 8 + 4u - u^2 = g_2(u) \end{cases}, \forall u \in (1; 7) \quad (1). \text{ Do 1 giá trị } x \text{ cho đúng 1 giá}$$

trị  $u$  nên từ yêu cầu đề bài suy ra  $(g(u))' = 0$  phải có 2 nghiệm phân biệt trên khoảng  $(1; 7)$  và hệ (1) phải có nghiệm duy nhất trên khoảng  $(1; 7)$  và khác 2.



Từ hình vẽ trên ta dễ dàng suy ra:  $m \in (g_1(7); g_2(7)] \cup [g_1(2); g_2(1)]$

Khi đó giải được:  $m \in (-19; -13] \cup [6; 11] \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-18; -17; -16; -15; -14; -13; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$

Tóm lại ta kết luận có tất cả 12 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn bài toán. **Chọn đáp án A.**

**Câu 46:** Có bao nhiêu số nguyên  $a$  sao cho ứng với mỗi  $a$ , tồn tại đúng 1 số nguyên dương  $b$  thỏa mãn

$$\log_2\left(1 + \frac{a}{8} + \frac{b}{4}\right) = \log_3\left(1 + \frac{a}{4} + \frac{b}{2}\right)$$

A. 9.

B. 5.

C. 4.

D. 8.

**Lời giải**

Trước hết ta có điều kiện ban đầu:  $\frac{a}{8} + \frac{b}{4} > -1, \frac{a}{4} + \frac{b}{2} > -1 \Leftrightarrow a + 2b > -4$

$$\text{Đầu tiên ta đặt } \log_2\left(1 + \frac{a}{8} + \frac{b}{4}\right) = \log_3\left(1 + \frac{a}{4} + \frac{b}{2}\right) = t \rightarrow \begin{cases} 2\left(1 + \frac{a}{8} + \frac{b}{4}\right) = 2 + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} = 2.2^t \\ 1 + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} = 3^t \end{cases} \rightarrow 2.2^t = 3^t + 1 \quad (*)$$

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

Phương trình tương đương với:  $2.2^t - 3^t - 1 = 0$ . Xét hàm số  $y = f(t) = 2.2^t - 3^t - 1$  có  $f'(t) = 2.2^t \ln 2 - 3^t \ln 3$ .

Giải phương trình  $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{\ln 3}{\ln 4} \Leftrightarrow t = t_0 = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{\ln 3}{\ln 4}\right) \approx 0.574 \in (0; 1)$

Xét trên đoạn  $[0; 1]$ , theo bất đẳng thức Bernoulli, ta có đánh giá sau:  $\begin{cases} 3^t \geq 2t + 1 \\ 2^t \leq t + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3^t + 1 \geq 2t + 2 \\ 2.2^t \leq 2(t + 1) = 2t + 2 \end{cases}$

Khi ấy dấu bằng (\*) xảy ra khi và chỉ khi  $t \in \{0; 1\}$ , tức:  $\begin{cases} 1 + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} = 1, 2 + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} = 2 \\ 1 + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} = 3, 2 + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ a = 8 - 2b \end{cases}$  (nhận) (1)

Ứng với mỗi giá trị nguyên  $(a; b)$  thì cả hai trường hợp  $a = -2b, a = 8 - 2b$  đều cho ra hai cặp khác nhau nên ta có:

$b \geq 1 \rightarrow \begin{cases} a = -2b \geq -2 \\ a = 8 - 2b \leq 6 \end{cases} \rightarrow a \in [-2; 6]$ , mà  $b = -\frac{a}{2} \in \mathbb{Z}$  nên  $a$  là số chẵn tức  $a \in \{-2; 0; 2; 4; 6\}$  (điều kiện cần)

Điều kiện đủ: ta thử lại từng giá trị  $a$  để thấy  $a = -2$  loại nên có 4 giá trị nguyên  $a$  thỏa mãn. **Chọn đáp án C.**

**Câu 48:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $M(5; 1; 10)$ ,  $A(9; 15; -6)$ ,  $B(-3; 9; 6)$  và mặt phẳng  $(\alpha): 2x + y - 2z + 27 = 0$ . Mặt cầu  $(S)$  đi qua  $A, B$  và tiếp xúc với  $(\alpha)$  tại  $C$ . Đoạn thẳng  $MC$  có độ dài lớn nhất bằng

A.  $6\sqrt{34}$ .

B.  $6\sqrt{22}$ .

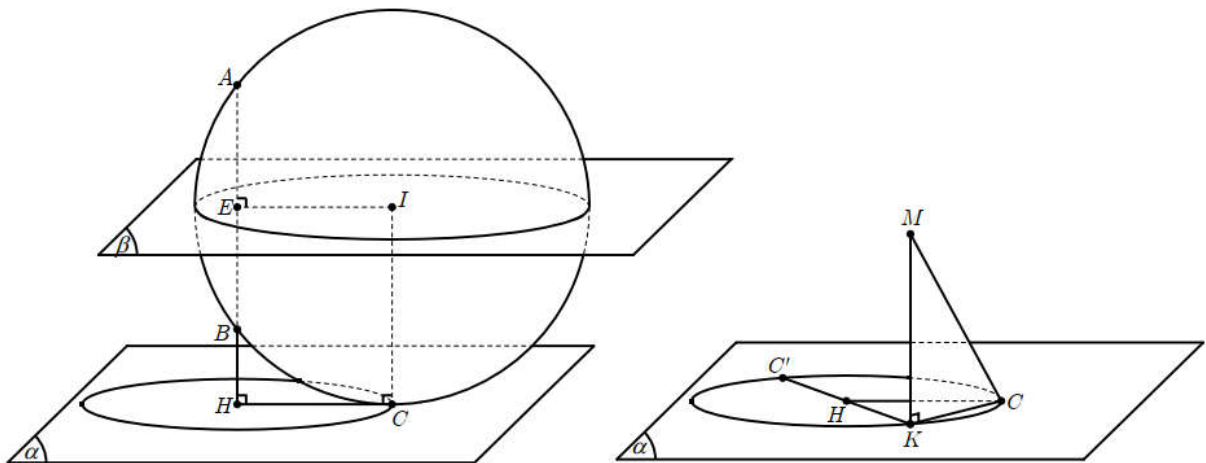
C.  $6\sqrt{5}$ .

D.  $6\sqrt{17}$ .

**Lời giải**

Trước hết dễ thấy:  $\overrightarrow{AB} = (-12; -6; 12) = k(2; 1; -2) = \overrightarrow{n_\alpha}$  tức  $AB \perp (\alpha)$  và tọa độ trung điểm  $AB$  là  $E(3; 12; 0)$ .

Do mặt cầu  $(S)$  đi qua  $A, B$  nên tập hợp các điểm  $I$  sao cho  $IA = IB$  là mặt phẳng trung trực  $(\beta)$  của đoạn thẳng  $AB$  có vector pháp tuyến chính là  $\overrightarrow{n_\alpha}$  và đi qua  $E$ , suy ra  $IE \parallel (\alpha)$ , mà mặt cầu  $(S)$  tiếp xúc với  $(\alpha)$  tại  $C$  ta lại suy ra được mặt cầu  $(S)$  có bán kính bằng  $IC = d(I; (\alpha)) = d(E; (\alpha)) = 15$ .



Gọi  $H = AB \cap (\alpha)$ , ta có:  $HC = EI = \sqrt{R_{(S)}^2 - \frac{AB^2}{4}} = 12$ , khi mặt cầu  $(S)$  cùng tâm  $I$  di động thì  $C$  luôn di động trên một đường tròn  $(\omega)$  cố định sao cho có bán kính bằng  $r = HC = 12$ .

Với phương trình đường thẳng  $AB: \frac{x-9}{2} = \frac{y-15}{1} = \frac{z+6}{-2}$  và  $(\alpha)$  đã cho, suy ra  $H = AB \cap (\alpha) \rightarrow H(-7; 7; 10)$

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

Gọi  $K$  là hình chiếu của  $M$  lên  $(\alpha)$ , với  $MK: \frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-10}{-2}$  ta suy ra  $K = KM \cap (\alpha) \rightarrow K(1; -1; 14)$

Khi ấy suy ra:  $KM = 12$  tức  $K \in (\omega)$  và kéo theo:  $MC = \sqrt{MK^2 + KC^2} = \sqrt{6^2 + KC^2} \leq \sqrt{6^2 + (2r)^2} = 6\sqrt{17}$

Vậy giá trị lớn nhất của  $MC$  bằng  $6\sqrt{17}$  khi  $C \equiv C'$  với  $C'$  là điểm đối xứng với  $K$  qua  $H$ . **Chọn đáp án D.**

**Câu 49:** Biết rằng  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$  là một nguyên hàm của mỗi hàm số  $y = \frac{f(x)}{\sin x + 2}$  và  $y = \frac{g(x)}{\cos x + 2}$  trên  $\mathbb{R}$ . Diện

tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ ,  $x = 0$  và  $x = \frac{\pi}{2}$  bằng

- A.  $\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$ .      B.  $\frac{\sqrt{2}\pi-2}{2}$ .      C.  $\frac{(\sqrt{2}-1)\pi}{2}$ .      D.  $\frac{\sqrt{2}\pi+2}{2}$ .

**Lời giải**

Từ giả thiết, suy ra: 
$$\begin{cases} F'(x) = x = \frac{f(x)}{\sin x + 2} \\ F'(x) = x = \frac{g(x)}{\cos x + 2} \end{cases}, \text{ do } \begin{cases} x \in [-2\pi; 2\pi] \\ \sin x, \cos x \in [-1; 1] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin x + 2 \neq 0 \\ \cos x + 2 \neq 0 \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} f(x) = x(\sin x + 2) \\ g(x) = x(\cos x + 2) \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng là 
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x) - g(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |x(\sin x - \cos x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x - \cos x) dx$$
  

$$= (x(\sin x + \cos x)) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x) dx - (x(\sin x + \cos x)) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x) dx = \frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{2}$$
 **Chọn đáp án C.**

**ĐỀ THI THỬ SỞ QUẢNG NINH**

**Câu 41:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $6f(x) + \int_0^3 f(x) dx = 6x^2 + 24x$ . Diện tích nhỏ nhất của hình

phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và đường thẳng  $y = (a-2)x + 1$  (với  $a$  là tham số) bằng

- A.  $\frac{32}{7}$ .      B.  $\frac{32}{3}$ .      C.  $\frac{5}{7}$ .      D.  $\frac{15}{7}$ .

**Lời giải**

Gọi  $\int_0^3 f(x) dx = 6C$ . Từ giả thiết ta có  $6f(x) + 6C = 6x^2 + 24x \Leftrightarrow f(x) = x^2 + 4x - C \Rightarrow \int_0^3 (x^2 + 4x - C) dx = 6C$   

$$\Leftrightarrow \left( \frac{x^3}{3} + 2x^2 - Cx \right) \Big|_0^3 = 6C \Leftrightarrow 27 - 3C = 6C \Leftrightarrow C = 3$$
. Do đó  $f(x) = x^2 + 4x - 3$ .

Xét phương trình hoành độ giao điểm  $x^2 + 4x - 3 = (a-2)x + 1 \Leftrightarrow x^2 + (6-a)x - 4 = 0$  (1). Có

$\Delta = (6-a)^2 + 16 > 0, \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow$  phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1 < x_2$ .

Theo định lí Vi-ét ta có  $x_1 + x_2 = a-6; x_1 x_2 = -4$ .

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là  $S = \int_{x_1}^{x_2} |x^2 + (6-a)x - 4| dx = - \int_{x_1}^{x_2} [x^2 + (6-a)x - 4] dx$ , vì

$$x^2 + (6-a)x - 4 \leq 0, \forall x \in [x_1; x_2]. \text{ Suy ra: } S = \frac{x_1^3}{3} + \frac{(6-a)x_1^2}{2} - 4x_1 - \left[ \frac{x_2^3}{3} + \frac{(6-a)x_2^2}{2} - 4x_2 \right]$$

$$= (x_1 - x_2) \left[ \frac{1}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) + \frac{6-a}{2}(x_1 + x_2) - 4 \right] = -(x_2 - x_1) \left[ \frac{1}{3}(x_1 + x_2)^2 - \frac{x_1x_2}{3} + \frac{6-a}{2}(x_1 + x_2) - 4 \right],$$

(với  $x_2 - x_1 > 0$  và  $(x_2 - x_1)^2 = (x_2 + x_1)^2 - 2x_1x_2$ ).

$$= -\sqrt{(x_2 - x_1)^2} \left[ \frac{1}{3}(a-6)^2 + \frac{4}{3} - \frac{1}{2}(a-6)^2 - 4 \right] = \sqrt{(a-6)^2 + 16} \cdot \left[ \frac{(a-6)^2 + 16}{6} \right] = \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{6}.$$

Ta thấy  $\Delta \geq 16, \forall a \in \mathbb{R}$  do đó  $S = \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{6} \geq \frac{64}{6} = \frac{32}{3}$ . Vậy  $S_{\max} = \frac{32}{3}$  khi  $a = 6$ . **Chọn đáp án B.**

**Câu 42:** Gọi  $S$  là tập hợp các số phức  $z$  thỏa mãn  $\frac{z-2}{z+3}$  có phần thực bằng  $\frac{1}{6}$ . Xét các số phức  $z_1, z_2$  thuộc  $S$

sao cho  $|3z_1 - 4z_2| = 15$ . Giá trị  $\left| (z_1 \cdot \overline{z_2})^2 + (\overline{z_1} \cdot z_2)^2 \right|$  bằng

**A.** 162.

**B.** 25.

**C.** 225.

**D.** 144.

**Lời giải**

Gọi  $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ . Khi đó ta có  $\frac{z-2}{z+3} = \frac{x-2+yi}{x+3+yi} = \frac{(x-2+yi)(x+3-yi)}{(x+3)^2 + y^2}$  có phần thực bằng  $\frac{1}{6}$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+3)+y^2}{(x+3)^2 + y^2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6(x^2 + y^2 + x - 6) = x^2 + y^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9, \text{ suy ra: } |z_1| = |z_2| = 3.$$

$$\text{Ta có } |3z_1 - 4z_2|^2 = 225 \Leftrightarrow (3z_1 - 4z_2)(3\overline{z_1} - 4\overline{z_2}) = 225 \Leftrightarrow 9|z_1|^2 - 12(z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2) + 16|z_2|^2 = 225$$

$$\Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = (z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 \cdot \overline{z_2})^2 + (\overline{z_1} \cdot z_2)^2 + 2|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 \cdot \overline{z_2})^2 + (\overline{z_1} \cdot z_2)^2 = -2|z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

$$\Leftrightarrow (z_1 \cdot \overline{z_2})^2 + (\overline{z_1} \cdot z_2)^2 = -162. \text{ Vậy } \left| (z_1 \cdot \overline{z_2})^2 + (\overline{z_1} \cdot z_2)^2 \right| = |-162| = 162. \text{ **Chọn đáp án A.**}$$

**Câu 44:** Xét các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|z - 4 + 3i| = 1, (w - 7 + 7i)(1 + i - i\overline{w})$  là số thực và  $|z - w| = \sqrt{31}$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |5z + w - 16 + 12i|$  thuộc khoảng nào dưới đây

**A.** (7;9).

**B.** (17;20).

**C.** (13;16).

**D.** (9;12).

**Lời giải**

Đặt  $w = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ , do đó:  $(w - 7 + 7i)(1 + i - i\overline{w}) = [(x - 7) + (y + 7)i] \cdot [(1 - y) + (1 - x)i]$

$$= [(x - 7)(1 - y) - (y + 7)(1 - x)] + [(1 - x)(x - 7) + (y + 7)(1 - y)]i.$$

Vì  $(w - 7 + 7i)(1 + i - i\overline{w})$  là số thực nên ta có:  $(1 - x)(x - 7) + (y + 7)(1 - y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25 \Leftrightarrow |w - 4 + 3i| = 5. \text{ Như vậy } \begin{cases} |z - 4 + 3i| = 1 \\ |w - 4 + 3i| = 5 \end{cases}, \text{ ta đặt } \begin{cases} u = z - 4 + 3i \\ v = w - 4 + 3i \end{cases}, \text{ suy ra } \begin{cases} |u| = 1 \\ |v| = 5 \end{cases}.$$

Khi ấy áp dụng bất đẳng thức Mincopski, ta suy ra:

$$P = |5z + w - 16 + 12i| = |5(z - 4 + 3i) + (w - 4 + 3i) + 8 + 6i| = |5u + v + 8 + 6i| \leq |5u + v| + |8 + 6i| = |5u + v| + 10.$$

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

Mặt khác, do  $|u-v| = \sqrt{31} \Leftrightarrow |u|^2 + |v|^2 - (u \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot v) = 31 \Leftrightarrow u \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot v = |u|^2 + |v|^2 - 31 = -5$ . Nên suy ra:

$$|5u+v| = \sqrt{25|u|^2 + |v|^2 + 5(u \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot v)} = 5 \text{ tức } P \leq |5u+v| + 10 \leq 15 \rightarrow P_{\max} = 15 \in (13; 16). \text{ Chọn đáp án A.}$$

**Câu 48:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình nón  $(N)$  có đỉnh  $S(1; 2; 3)$ ,  $A(2; 2; 3)$  và  $B(1; 4; 3)$  là các điểm thuộc đường sinh của hình nón  $(N)$ , điểm  $C(1; 2; 6)$  nằm trên đường tròn đáy. Diện tích xung quanh của hình nón  $(N)$  là

**A.**  $3\pi\sqrt{6}$ .

**B.**  $3\pi\sqrt{3}$ .

**C.**  $2\pi\sqrt{6}$ .

**D.**  $2\pi\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{SC} = (0; 0; 3) \Rightarrow l = SC = 3$ .  $\overrightarrow{SA} = (1; 0; 0) \Rightarrow SA = 1$ ;  $\overrightarrow{SB} = (0; 2; 0) \Rightarrow SB = 2$ .

Dễ thấy  $SA, SB, SC$  đôi một vuông góc tại  $S$ . Lấy điểm  $A', B'$  thỏa  $\overrightarrow{SA'} = 3\overrightarrow{SA}$  và  $\overrightarrow{SB'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{SB}$ , suy ra  $A', B'$  nằm trên đường tròn đáy hình nón. Vậy đáy hình nón là đường tròn ngoại tiếp tam giác  $CA'B'$ .

Các tam giác  $CSA', CSB', A'SB'$  là các tam giác bằng nhau và đều vuông cân tại đỉnh  $S$  nên tam giác  $CA'B'$  là tam

giác đều cạnh bằng  $3\sqrt{2}$ . Từ đó ta tính được bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta CA'B'$  là  $r = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$ .

Diện tích xung quanh của hình nón  $(N)$  là  $S = \pi rl = 3\pi\sqrt{6}$ . **Chọn đáp án A.**

**Câu 49:** Xét các số  $x, y$  không âm thỏa mãn  $\ln\left(\frac{x+2y+3}{6y+9}\right) + \frac{2x-6y-9}{x+6y+9} = \frac{1}{5}$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất các giá trị nguyên của tham số  $m$  để giá trị lớn nhất của  $P = \left| \sqrt{15y^2 + 50y + 36 - x^2} - m \right|$  không vượt quá 44. Số các phần tử thuộc tập  $S$  là

**A.** 86.

**B.** 89.

**C.** 87.

**D.** 88.

**Lời giải**

Xét phương trình sau:  $\ln\left(\frac{x+2y+3}{6y+9}\right) + \frac{2x-6y-9}{x+6y+9} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{6y+9} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2x}{6y+9} - 1\right) \cdot \frac{1}{\frac{x}{6y+9} + 1} = \frac{1}{5}$  (1)

Đặt  $t = \frac{x}{6y+9} > 0$ , Phương trình (1) trở thành:  $\ln\left(t + \frac{1}{3}\right) + \frac{2t-1}{t+1} - \frac{1}{5} = 0$  (2)

Ta nhận thấy hàm số  $y = \ln\left(t + \frac{1}{3}\right) + \frac{2t-1}{t+1} - \frac{1}{5}$  là hàm số tăng vì có  $y' = \frac{3}{3t+1} + \frac{3}{(t+1)^2} > 0; \forall t > 0$ .

Thấy  $t = \frac{2}{3}$  là nghiệm của phương trình (2) nên (2) có nghiệm duy nhất là  $t = \frac{2}{3}$ . (theo định lí Rolle về nghiệm)

$\Rightarrow \frac{x}{6y+9} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 4y + 6$ . Xét  $P = \left| \sqrt{15y^2 + 50y + 36 - (4y+6)^2} - m \right| = \left| \sqrt{2y - y^2} - m \right|$ .

Để biểu thức  $P_{\max}$  không quá 44 thì ta có:  $\left| \sqrt{2y - y^2} - m \right| \leq 44 \Leftrightarrow -44 + \sqrt{2y - y^2} \leq m \leq 44 + \sqrt{2y - y^2}$

Với:  $2y - y^2 \leq 1 - (1-y)^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{2y - y^2} \leq 1 \Leftrightarrow -43 \leq m \leq 45 \Rightarrow$  Có 89 giá trị nguyên thỏa. **Chọn đáp án B.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**ĐỀ THI THỬ THPT TỈNH GIA - THANH HÓA**

**Câu 43:** Cho hai đường thẳng  $d_1: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 \\ z = -1 + t \end{cases}$  và  $d_2: \begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 2 - t' \\ z = -1 \end{cases}$  cắt nhau tại  $A$ . Đường thẳng  $d_3$  đi qua  $M(0; 2; 2)$

và cắt  $d_1$  và  $d_2$  lần lượt tại  $B$  và  $C$  sao cho tam giác  $ABC$  đều, diện tích tam giác  $ABC$  bằng

- A.  $4\sqrt{3}$ . B.  $3\sqrt{3}$ . C.  $2\sqrt{3}$ . D.  $\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

Trước hết ta dễ thấy hai phương trình đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  có vector chỉ phương lần lượt là  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  tồn tại nghiệm chung là  $(2; 3; -1)$  khi  $t = 0, -t' = 1$  nên khi ấy với  $A = d_1 \cap d_2$  ta suy ra tọa độ điểm  $A(2; 3; -1)$ .

Gọi các tọa độ theo tham số là  $\begin{cases} B(2-t; 3; -1+t) \\ C(3+t'; 2-t'; -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{AB} = (-t; 0; t) \\ \vec{AC} = (1+t'; -1-t'; 0) \end{cases}$  và  $\begin{cases} \vec{MB} = (-t; 1; -3+t) \\ \vec{MC} = (3+t'; -t'; -3) \end{cases}$ .

Với  $M \in d_3$  tức  $B, M, C$  thẳng hàng ta suy ra:  $\vec{MB} = k\vec{MC} \Leftrightarrow \begin{cases} t-3 = -3k \\ 1 = -t'k \end{cases} \Rightarrow t = 3 + \frac{3}{t'} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (1)$

Kế đến do  $\triangle ABC$  đều nên ta có:  $AB^2 = AC^2 \Leftrightarrow 2t^2 = 2(t'+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t'+1 = t \\ t'+1 = -t \end{cases} \xrightarrow{(1)} \begin{cases} (t; t') = (0; -1) \vee (4; 3) \\ (t; t') = (0; -1) \vee (2; -3) \end{cases}$ .

Do  $t = 0, -t' = 1$  thì  $B \equiv C \equiv A$  nên suy ra  $t \neq 0, t' \neq -1$ , tức ta thu được  $(t; t') = (2; -3)$  hoặc  $(4; 3)$ .

Với  $(t; t') = (4; 3)$  thì  $AB = AC = 2\sqrt{2}$  và  $BC \neq AB, AC$  nên ta loại, khi ấy chỉ cần xét  $(t; t') = (2; -3)$ .

Khi ấy với  $t = 2$  suy ra:  $AB = a = 2\sqrt{2} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$ . **Chọn đáp án C.**

**Câu 44:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-1; 0; 0), B(1; 0; 1)$  và mặt phẳng  $(P): x + y - z + 2 = 0$ . Gọi  $M$  là điểm di động trên mặt phẳng  $(P)$  sao cho các đường thẳng  $MA, MB$  cùng tạo với mặt phẳng  $(P)$  các

góc bằng nhau. Biết độ dài lớn nhất của  $OM^2$  có dạng  $\frac{a+24\sqrt{b}}{c}, (a, b, c \in \mathbb{N}^*)$ . Tính tổng  $a + b + c$

- A. 763. B. 760. C. 762. D. 761.

**Lời giải**

Trước hết từ giả thiết ta suy ra:  $d(A; (P)) = \frac{1}{\sqrt{3}}; d(B; (P)) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ , gọi  $H, K, E$  lần lượt là các hình chiếu của

$A, B, O$  lên mặt phẳng  $(P)$ , khi đó:  $d(B; (P)) = 2d(A; (P)) \Leftrightarrow BK = 2AH$ . Mặt khác ta lại có:

$\sin(MA; (P)) = \frac{AH}{AM}; \sin(MB; (P)) = \frac{BK}{BM}; (\widehat{MA; (P)}) = (\widehat{MB; (P)})$  nên  $\frac{AH}{AM} = \frac{BK}{BM} = \frac{2AH}{BM} \Leftrightarrow \boxed{BM^2 = 4AM^2}$

Đặt  $M(x; y; z)$  thì khi đó:  $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4[(x+1)^2 + y^2 + z^2] \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 + \left(z + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2$

$\Rightarrow M \in (S)$  tâm  $I\left(-\frac{5}{3}; 0; -\frac{1}{3}\right), R = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ , mà  $M \in (S) \cap (P)$  nên  $M \in$  đường tròn  $(\omega)$  tâm  $H\left(-\frac{17}{9}; -\frac{2}{9}; \frac{-1}{9}\right)$ ,

bán kính  $r = \frac{2\sqrt{42}}{9}, OM_{\max}^2 = \sqrt{d^2(O; (P)) + (EH + r)^2} = \frac{462 + 24\sqrt{217}}{81} \rightarrow a + b + c = 760$ . **Chọn đáp án B.**



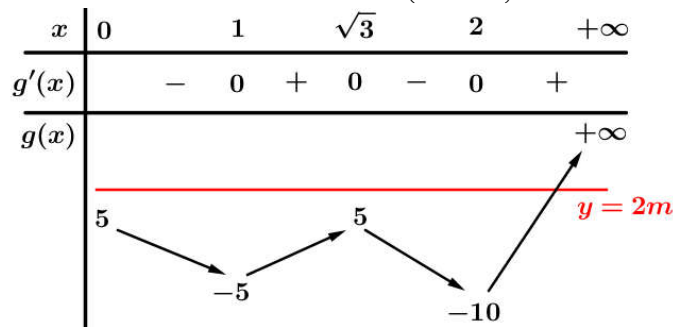
**Lời giải**

Ta xét hàm số  $g(x) = f(x^3 - 3x)$ , ta có:  $g'(x) = 3(x^2 - 1)f'(x^3 - 3x)$ . Giải phương trình  $g'(x) = 0$ , khi ấy:

$$\begin{cases} x = \pm 1 \\ f'(x^3 - 3x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x^3 - 3x \in \{-2; 0; 2\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2; x = \pm \sqrt{3}; \\ x = \pm 1, x = 0 \end{cases} \text{ Dễ thấy: } \begin{cases} g(1) = f(-2) = -5 \\ g(\sqrt{3}) = f(0) = 5 \\ g(2) = f(2) = -10 \end{cases}$$

nên suy ra đồ thị hàm số  $f(x^3 - 3x)$  cùng dạng với đồ thị hàm số  $f(x)$ , trong đó  $g(0) = g(\sqrt{3}) = 5$

Xét  $x > 0$ , ta thấy  $f(x^3 - 3x)$  có 3 điểm cực trị lần lượt là  $x \in \{1; \sqrt{3}; 2\}$ , khi đó  $g(x)$  được biểu diễn như sau:



Từ đó để  $y = |f(x^3 - 3x) - 2m|$  có đúng  $2 \times 4 + 1 = 9$  điểm cực trị thì  $y = |f(x^3 - 3x) - 2m|$  phải có đúng 4

điểm cực trị dương mà  $f(x^3 - 3x)$  có 3 điểm cực trị nên để thu được cực trị còn lại thì phương trình

$f(x^3 - 3x) - 2m = 0$  có đúng 1 nghiệm dương, suy ra  $2m \geq 5 \xrightarrow{m \leq 2024, m \in \mathbb{Z}} m \in \{3; 4; \dots; 2023; 2024\}$  tức có tất cả 2022 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn bài toán. **Chọn đáp án C.**

**Câu 49:** Cho biết  $z_1, z_2$  là hai trong các số phức thỏa mãn điều kiện  $|z - i| = |z - 1|$  và  $|z_1 - z_2| = 4\sqrt{2}$ . Gọi  $w$  là số phức thỏa mãn  $2|w + 2 - i| + 3|w - 1 + 2i| \leq 6\sqrt{2}$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |w - z_1| + |w - z_2|$  bằng

**A.**  $5\sqrt{2}$ . **B.**  $4\sqrt{2}$ . **C.**  $6\sqrt{2}$ . **D.**  $3\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

Trước hết ta gọi  $M(z_1), N(z_2)$  khi ấy ta suy ra  $MN: y = x$  và  $MN = 4\sqrt{2}$

Với  $M(a; a), N(b; b)$  ta suy ra  $MN^2 = 2(a - b)^2 = 32 \Leftrightarrow a = b \pm 4 \Leftrightarrow b - a = \pm 4$

Tiếp đến ta gọi:  $P(w), A(-2; 1), B(1; -2)$ , khi đó:  $2|w + 2 - i| + 3|w - 1 + 2i| \leq 6\sqrt{2} \Leftrightarrow 2PA + 3PB \leq 2AB$

Mà  $2PA + 2PB \geq 2AB$  nên suy ra dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $PB = 0 \rightarrow P \equiv B \rightarrow w = 1 - 2i$

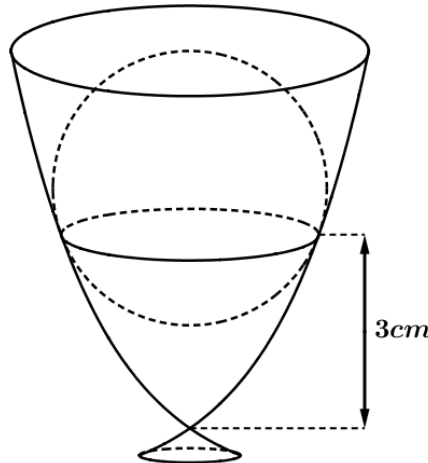
Từ đây ta suy ra:  $P = |w - z_1| + |w - z_2| = |z_1 - 1 + 2i| + |z_2 - 1 + 2i| = \sqrt{(b-1)^2 + (b+2)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (a+2)^2}$

Với  $b - a = 4$  thì  $P = \sqrt{2\left(a + \frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{2\left(-a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} \geq \sqrt{2\left(a + \frac{9}{2} - a - \frac{1}{2}\right)^2 + (3\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}$

Với  $b - a = -4$  thì  $P = \sqrt{2\left(\frac{7}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} \geq \sqrt{2\left(\frac{7}{2} - a + a + \frac{1}{2}\right)^2 + (3\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}$

Tóm lại giá trị nhỏ nhất của  $P$  bằng  $5\sqrt{2}$  khi và chỉ khi  $a = \pm 4$ . **Chọn đáp án A.**

**Câu 50:** Một chiếc li bằng thủy tinh đang chứa nước bên trong được tạo thành khi quay một phần đồ thị hàm số  $y = 2^x$  xung quanh trục  $Oy$ . Người ta thả vào chiếc li một viên bi hình cầu có bán kính  $R$  thì mực nước dâng lên phủ kín viên bi đồng thời chạm tới miệng li. Biết điểm tiếp xúc của viên bi và chiếc li cách đáy của chiếc li  $3\text{cm}$  (như hình vẽ). Thể tích nước có trong li gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau ?



A.  $40\text{cm}^3$ .

B.  $30\text{cm}^3$ .

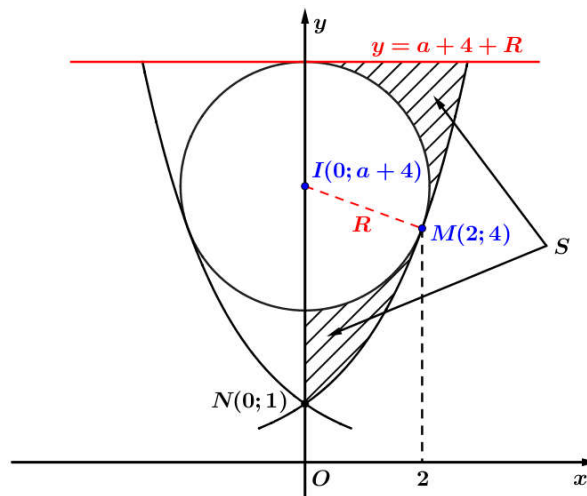
C.  $60\text{cm}^3$ .

D.  $50\text{cm}^3$ .

**Lời giải**

Trước hết ta có  $N = Oy \cap (C): y = 2^x \Rightarrow N(0;1)$ . Gọi  $M$  là tiếp điểm của đường tròn với đồ thị  $y = 2^x$ .

Suy ra:  $M = (C) \cap (d): y = 4$  khi ấy ta có được  $M(2;4)$ , trong đó  $(C): y = 2^x \rightarrow (C): x = \log_2 y$



Gọi  $I(0; a+4)$  là tọa độ tâm đường tròn. Tiếp điểm  $M$  nằm ở nửa đường tròn  $(I)$  có dạng:

$$y = a+4 - \sqrt{a^2+4-x^2}, \text{ suy ra: } \frac{d}{dx}(2^x)_{x=2} = \frac{d}{dx}(a+4 - \sqrt{a^2+4-x^2})_{x=2} \Leftrightarrow 4\ln 2 = \frac{2}{a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\ln 4}$$

Suy ra  $R = IM = \sqrt{a^2+4} = \sqrt{4 + \frac{1}{4\ln^2 2}}$ , khi đó diện tích  $S$  khi quay quanh  $Oy$  tạo thành khối tròn xoay tức thể

tích phần nước cần tìm chính là:  $V = \pi \int_0^{a+4+R} (\log_2 y)^2 dy - \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right) \approx 30(\text{cm}^3)$ . **Chọn đáp án B.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**  
**ĐỀ THI THỬ SỐ NAM ĐỊNH LẦN 2**

**Câu 46:** Cho hai số phức  $z, w$  thay đổi sao cho  $|z + w| = 2, |2z + iw| = 3$ . Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = |2z + (1 + 3i)w|$  có dạng  $a + b\sqrt{2}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Giá trị của  $a + b$  thuộc khoảng nào sau đây?

- A.**  $(-4; -2)$ .                      **B.**  $(-2; 0)$ .                      **C.**  $(0; 2)$ .                      **D.**  $(2; 4)$ .

**Lời giải**

Trước hết ta có:  $\frac{3}{2} = \frac{|2z + iw|}{|z + w|} = \frac{\left| \frac{2z}{w} + i \right|}{\left| \frac{z}{w} + 1 \right|} = \frac{|2u + i|}{|u + 1|}$  với  $u = \frac{z}{w}$ , suy ra:  $\frac{P}{2} = \frac{|2z + (1 + 3i)w|}{|z + w|} = \frac{|2u + 1 + 3i|}{|u + 1|}$

**Hướng 1:** đặt  $\frac{2u + i}{u + 1} = 2 + \frac{-2 + i}{u + 1} = \frac{3}{2}(\cos x + i \sin x), \forall x \in [0; 2\pi] \rightarrow \frac{1 + 2i}{u + 1} = \frac{3}{2} \sin x + \left( 2 - \frac{3}{2} \cos x \right) i$

Suy ra:  $\frac{P}{2} = \left| \frac{2u + i + 1 + 2i}{u + 1} \right| = \left| \frac{2u + i}{u + 1} + \frac{1 + 2i}{u + 1} \right| \rightarrow P = |(3 \cos x + 3 \sin x) + (4 + 3 \sin x - 3 \cos x)i|$   
 $= \sqrt{9(\cos x + \sin x)^2 + (4 + 3(\sin x - \cos x))^2} = \sqrt{34 + 24(\sin x - \cos x)} = \sqrt{34 + 24\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \geq \sqrt{34 - 24\sqrt{2}}$ .

Vậy suy ra  $P_{\min} = -4 + 3\sqrt{2} \rightarrow a + b = -1 \in (-2; 0)$ . **Chọn đáp án B.**

**Hướng 2:** đặt  $\frac{2u + i}{u + 1} = v \rightarrow u = \frac{i - v}{v - 2}; |v| = \frac{3}{2}$ , suy ra:  $P = \left| \frac{2\left(\frac{i - v}{v - 2}\right) + 1 + 3i}{\frac{i - v}{v - 2} + 1} \right| = 2 \left| \frac{(-1 + 3i)v - 2 - 4i}{-2 + i} \right|$   
 $= 2 \left| \frac{-1 + 3i}{-2 + i} \right| \cdot \left| v + \frac{-2 - 4i}{-1 + 3i} \right| = 2\sqrt{2} |v - 1 + i| \geq 2\sqrt{2} (|v| - |-1 + i|) = 2\sqrt{2} \left( \frac{3}{2} - \sqrt{2} \right) = 3\sqrt{2} - 4$

Vậy suy ra  $P_{\min} = -4 + 3\sqrt{2} \rightarrow a + b = -1 \in (-2; 0)$ . **Chọn đáp án B.**

**Hướng 3:** Ta có:  $\boxed{2}z + \boxed{(1 + 3i)}w = a(z + w) + b(2z + iw) = \boxed{(a + 2b)}z + \boxed{(a + bi)}w$  với  $a, b \in \mathbb{C}$

Thực hiện đồng nhất hệ số, ta suy ra:  $\begin{cases} a + 2b = 2 \\ a + bi = 1 + 3i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 - 2b \\ 2 - 2b + bi = 1 + 3i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{-1 + 3i}{-2 + i} = 1 - i \\ a = 2 - 2b = 2i \end{cases}$

Suy ra:  $P = |2z + (1 + 3i)w| = |2i(z + w) + (1 - i)(2z + iw)| \geq ||2i| \cdot |z + w| - |1 - i| |2z + iw|| = 3\sqrt{2} - 4$

Vậy suy ra  $P_{\min} = -4 + 3\sqrt{2} \rightarrow a + b = -1 \in (-2; 0)$ . **Chọn đáp án B.**

**Câu 47:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm xác định trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau:

|      |           |      |      |           |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $2$  | $-3$ | $+\infty$ |     |

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in (-10; 20)$  mà ứng với mỗi giá trị  $m$  đó thì hàm số  $y = g(x) = f^3(m|2x+m|+m-2)$  có số điểm cực đại bằng 1?

A. 11.

B. 18.

C. 10.

D. 2.

**Lời giải**

Trước hết ta đặt  $u(x) = m|2x+m|+m-2$  thì khi đó  $g'(x) = 3u'(x)f'(u(x))\boxed{f^2(u(x))} \rightarrow f^2(u(x)) > 0$

Nhận xét 1: các điểm cực trị của hàm số  $f^3(u(x))$  cũng chính là các điểm cực trị của hàm số  $f(u(x))$

Do đó quy về xét hàm  $y = g(x) = f(m|2x+m|+m-2)$

Nhận xét 2: khi  $h(x) = f(m|x|+m-2)$  thì khi đó  $g(x) = h(2x+m)$ , khi đó số điểm cực trị của hai hàm số  $h(x)$  và  $g(x) = h(2x+m)$  là bằng nhau.

Nhận xét 3: khi  $p(x) = f(mx+m-2)$  thì khi đó  $h(x) = p(|x|)$ , khi đó để thỏa mãn đề bài thì  $h(x)$  phải có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu, tức  $p(x)$  phải có **duy nhất 1 điểm cực trị dương** và nó là điểm cực tiểu **hoặc**  $p(x)$  luôn nghịch biến trên  $\mathbb{R}^+$ . (1)

Xét  $p(x) = f(mx+m-2)$  có  $p'(x) = mf'(mx+m-2)$ . Giải  $p'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} mx+m-2=-1 \\ mx+m-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{x+1} = u_1(x) \\ m = \frac{3}{x+1} = u_2(x) \end{cases}$

Ta có:  $\begin{cases} u_1(0)=1 \\ u_2(0)=3 \end{cases}; \lim_{x \rightarrow +\infty} u_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_2(x) = 0$ , kết hợp với (1) ta suy ra đường thẳng  $y = m$  phải cắt cả hai đồ thị

hàm số  $u_1(x), u_2(x)$  tại 1 nghiệm dương duy nhất hoặc không có nghiệm nào.

Suy ra:  $m \in (-\infty; 0) \cup [u_1(0); u_2(0)) \rightarrow m \in (-\infty; 0) \cup [1; 3) \xrightarrow{m \in (-10; 20), m \in \mathbb{Z}} m \in \{-9; -8; \dots; -2; -1; 1; 2\}$  tức ta kết luận có 11 giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án A.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 48:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1;1;1), B(x_B; y_B; z_B)$ . Đường cao kẻ từ  $B$  và đường cao kẻ từ  $C$  của tam giác này tương ứng nằm trên các đường thẳng có phương trình lần lượt là  $\frac{x-4}{4} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-1}{-2}, \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-a}{b}$  (với  $a, b$  là các tham số thực). Phát biểu nào sau đây đúng?

- A.**  $a^3 - b^3 = 3z_B$ .      **B.**  $a^3 + b^3 = 3x_B$ .      **C.**  $a^3 - b^3 = 3y_B$ .      **D.**  $a^3 + b^3 = 3z_B$ .

**Lời giải**

Trước hết ta có mặt phẳng  $(ABC)$  đi qua  $A(1;1;1)$  và chứa đường cao  $(BH): \frac{x-4}{4} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-1}{-2}$ .

Gọi  $M(4; -2; 1) \in (BH)$ , suy ra:  $\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AM} = (3; -3; 0) \\ \overrightarrow{u_{BH}} = (-4; 5; 2) \end{array} \right\} \rightarrow \overrightarrow{n_{(ABC)}} = [\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BH}] = (6; 6; -3) = k(2; 2; -1)$

Suy ra được phương trình mặt phẳng  $(ABC): 2x + 2y - z - 3 = 0$

Gọi  $N(0; 2; a) \in (CH): \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-a}{b}$ , khi đó  $N \in (ABC)$  nên  $4 - a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Ta lại có:  $CH \subset (ABC) \rightarrow (2; -1; b) = \overrightarrow{u_{CH}} \perp \overrightarrow{n_{(ABC)}} = (2; 2; -1) \rightarrow \overrightarrow{u_{CH}} \cdot \overrightarrow{n_{(ABC)}} = 0 \Leftrightarrow 4 - 2 - b = 0 \Leftrightarrow b = 2$

Suy ra:  $N(0; 2; 1)$ , gọi  $B \in (BH) \rightarrow B(4 + 4t; -2 - 5t; 1 - 2t) (t \in \mathbb{R})$ , khi ấy ta liên tiếp suy ra:

$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3 + 4t; -3 - 5t; -2t) \\ CH \perp AB; \overrightarrow{u_{CH}} = (2; -1; 2) \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{u_{CH}} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow t = -1 \rightarrow B(0; 3; 3)$ , thế vào có được  $a^3 + b^3 = 3z_B$ . **Chọn đáp án D.**

**Câu 49:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên khoảng  $(0; +\infty)$  và thỏa mãn

$$x^5 f(x) - 2x^2 f\left(\frac{1}{x^2}\right) = x^6 - x^4 - 2, \forall x \in (0; +\infty)$$

Biết rằng  $\int_2^{16} f(x) dx = a + \ln b$  với  $a, b \in \mathbb{N}^*$ . Tính giá trị của  $J = a - 2b^2$

- A.**  $J = -2$ .      **B.**  $J = 62$ .      **C.**  $J = -254$ .      **D.**  $J = 2$ .

**Lời giải**

Trước hết ta chia hai vế cho  $x^5$  của phương trình đề cho, khi ấy ta có:

$$f(x) + \left(-\frac{2}{x^3}\right) f\left(\frac{1}{x^2}\right) = x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^5}, \forall x \in (0; +\infty) \quad (1)$$

Gọi  $F(x), G(x)$  lần lượt là các nguyên hàm của  $f(x)$  và  $\left(x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^5}\right)$ , khi ấy ta nguyên hàm hai vế ở phương

trình (1), suy ra:  $\int f(x) dx + \int f\left(\frac{1}{x^2}\right) d\left(\frac{1}{x^2}\right) = \int \left(x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^5}\right) dx \Rightarrow F(x) + F\left(\frac{1}{x^2}\right) = G(x) + C \quad (2)$

Thế vào (2):  $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{4}: F\left(\frac{1}{4}\right) + F(16) = G\left(\frac{1}{4}\right) + C \\ x = 2: F(2) + F\left(\frac{1}{4}\right) = G(2) + C \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F\left(\frac{1}{4}\right) + F(16) - \left[F(2) + F\left(\frac{1}{4}\right)\right] = F(16) - F(2) \\ = G\left(\frac{1}{4}\right) - G(2) = \int_2^{0.25} \left(x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^5}\right) dx \end{array} \right.$

Suy ra:  $\int_2^{16} f(x) dx = F(16) - F(2) = G\left(\frac{1}{4}\right) - G(2) = \int_2^{0.25} \left(x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^5}\right) dx = 126 + \ln 8 \rightarrow \begin{cases} a = 126 \\ b = 8 \end{cases}$

Vậy  $J = a - 2b^2 = 126 - 2 \cdot 64 = -2$ . **Chọn đáp án A.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**  
**ĐỀ THI THỬ THPT KIM LIÊN – HÀ NỘI**

**Câu 46:** Cho phương trình  $2\log_3 \frac{6x}{\sqrt{2x+1}-1} + 2(\sqrt{2x+1}-|y|) - 3^{2|y|} + 2x = 0$ . Với các cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn phương trình trên, giá trị nhỏ nhất của  $T = \frac{1}{3}\sqrt{2x+1}(2x+4) + 2x + \frac{7}{3} - 2 \cdot 3^{2|y|}$  thuộc khoảng nào sau đây

**A.**  $(-4; -2)$ .                      **B.**  $(-6; -4)$ .                      **C.**  $(-9.5; -8)$ .                      **D.**  $(-11; -9.5)$ .

**Lời giải**

Trước hết ta có:  $\frac{6x}{\sqrt{2x+1}-1} = \frac{6x(\sqrt{2x+1}+1)}{2x} = 3(\sqrt{2x+1}+1)$ , khi ấy phương trình tương đương với:

$$\Leftrightarrow 2\log_3(\sqrt{2x+1}+1) + \left[(\sqrt{2x+1})^2 + 2\sqrt{2x+1}+1\right] = 3^{2|y|} + 2|y|$$

$$\Leftrightarrow \log_3(\sqrt{2x+1}+1)^2 + (\sqrt{2x+1}+1)^2 = \log_3(3^{2|y|}) + (3^{2|y|})$$

Xét hàm số đặc trưng  $f(t) = \log_3 t + t$  trên  $(0; +\infty)$  có  $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$  nên suy ra  $f(t)$  luôn

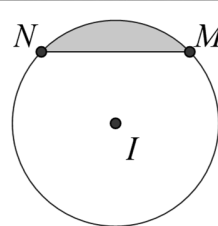
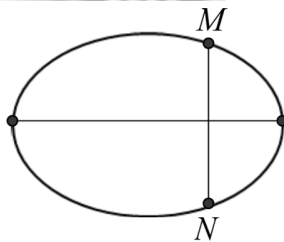
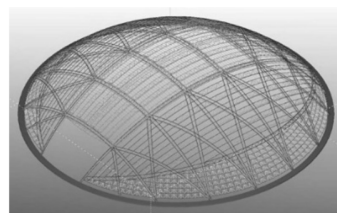
đồng biến trên  $(0; +\infty)$ , suy ra:  $(\sqrt{2x+1}+1)^2 = 3^{2|y|}$ , thế vào biểu thức  $T$ , ta suy ra:

$$T = \frac{1}{3}\sqrt{2x+1}(2x+4) + 2x + \frac{7}{3} - 2(\sqrt{2x+1}+1)^2. \text{ Đặt } t = \sqrt{2x+1}+1 \geq 1, \text{ suy ra } 2x+4 = (t-1)^2 + 3, \text{ lúc này biểu}$$

thức  $T$  trở thành:  $T = \frac{1}{3}(t-1)[(t-1)^2 + 3] + (t-1)^2 + \frac{4}{3} - 2t^2 = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 1$ . Xét hàm số  $f(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 1$  trên

$[1; +\infty)$  có  $f'(t) = 0 \rightarrow t = 4, f''(4) > 0 \Rightarrow \min T = \min_{[1; +\infty)} f(t) = f(4) = -\frac{29}{3} \in (-11; -9.5)$ . **Chọn đáp án D**

**Câu 47:** Sân vận động Sport Hub là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip  $(E)$  có trục lớn dài  $150m$ , trục bé dài  $90m$ . Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của  $(E)$  và cắt elip ở  $M, N$  thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm  $I$  với  $MN$  là một dây cung và góc  $\widehat{MIN} = 90^\circ$ . Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích xấp xỉ bao nhiêu?



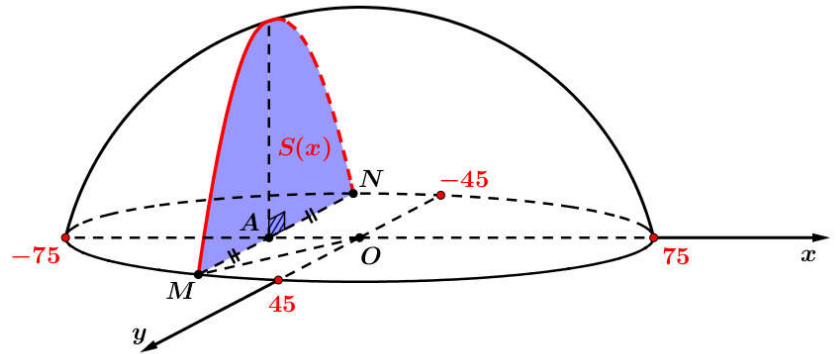
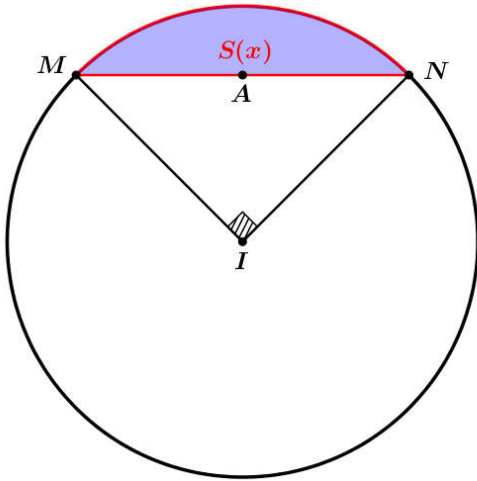
- A.**  $57793(m^3)$ .                      **B.**  $32162(m^3)$ .                      **C.**  $115586(m^3)$ .                      **D.**  $101793(m^3)$ .

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

### Lời giải

Trước hết ta xác định được rằng thể tích cần tìm chính là một khối được tạo bởi mặt cắt  $S(x)$  khi quét từ đầu này sang đầu kia của trục lớn của elip  $(E)$  với  $S(x)$  là hình **viên phân** tạo bởi cung nhỏ  $\widehat{MN}$  và dây cung  $MN$ .

Trở về bài toán, từ hình vẽ mặt cắt thiết diện  $S(x)$ , ta có khi  $\widehat{MIN} = 90^\circ$  và  $IM = IN = R$  thì tam giác  $IMN$  vuông cân tại  $I$  tức ta suy ra  $MN = IM\sqrt{2} = R\sqrt{2} \rightarrow MN^2 = 2R^2$  (1)



Chọn hệ trục tọa độ  $Oxy$  với  $O$  trùng với tâm elip  $(E)$  ở hình vẽ, suy ra phương trình  $(E)$ :  $\frac{x^2}{75^2} + \frac{y^2}{45^2} = 1$

Tiếp đến ta có  $MN$  là đường thẳng song song với trục bé của elip  $(E)$  (tức trục  $Oy$ ) nên giả sử  $A = MN \cap Ox$

thì  $OA = x_A \in [-75; 75]$  và  $MA = |y_M| = 45\sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}}$ , do  $A$  là trung điểm  $MN$  nên  $MN = 2MA = 90\sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}}$ . (2)

Gọi  $S_1$  là diện tích hình quạt tròn tạo bởi cung nhỏ  $\widehat{MN}$  và dây cung  $MN$ ,  $S_2$  là diện tích tam giác  $IMN$ , khi ấy ta

lần lượt có được:  $S_1 = \frac{\pi R^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{4}$  và  $S_2 = \frac{IM \cdot IN}{2} = \frac{R^2}{2} = \frac{MN^2}{4}$  (3)

Từ (1), (2) và (3), ta suy ra:  $S(x) = S_1 - S_2 = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \frac{MN^2}{2} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) 90^2 \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)$ . Vậy thể tích cần

tìm là  $V = \int_{-75}^{75} S(x) dx = 90^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) \int_{-75}^{75} \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right) dx = 100 \cdot 90^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) \approx 115586 (m^3)$ . **Chọn đáp án C.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 48:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $M(6;0;0)$ ,  $N(0;6;0)$ ,  $P(0;0;6)$ . Hai mặt cầu có phương trình  $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$  và  $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 2z + 1 = 0$  cắt nhau theo đường tròn  $(C)$ . Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa  $(C)$  và tiếp xúc với ba đường thẳng  $MN, NP, PM$ ?

A. 3.

B. Vô số.

C. 1.

D. 4.

**Lời giải**

Trước hết ta có: 
$$\begin{cases} (S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ (S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad (1).$$
 Do  $M \in (P) = (S_1) \cap (S_2)$  với  $(P)$  là mặt phẳng

chứa đường tròn giao tuyến  $(C)$  nên trừ theo vế hệ (1), ta suy ra:  $(P): 3x - 2y - z = 0$

Do mặt cầu  $(S)$  tâm  $I(a;b;c)$ , bán kính  $R$  cần biện luận tiếp xúc với ba đường thẳng  $MN, NP, PM$  trong tam giác  $MNP$  nên suy ra đường tròn nội tiếp tam giác này (tâm  $E$ , bán kính  $r$ ) phải thuộc mặt cầu  $(S)$

Suy ra:  $S_{\Delta MNP} = pr = \frac{MN^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow r = \frac{18\sqrt{3}}{9\sqrt{2}} = \sqrt{6}$ , khi đó  $IE^2 = 6$ . Do  $MNP$  là tam giác đều nên  $E(2;2;2)$  tức

$IE^2 = (a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 = 6$  tức  $I$  thuộc mặt cầu tâm  $E(2;2;2)$  và bán kính  $\sqrt{6}$ , mà  $M \in (P)$  nên khi đó  $M \in (C') = (E; \sqrt{6}) \cap (P)$ , do đường tròn có vô số điểm nên có vô số điểm  $M$  thỏa mãn. **Chọn đáp án B**

**Câu 49:** Gọi  $S$  là tập hợp các số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4$  và  $ab \geq 0$ . Xét  $z_1$  và  $z_2$

thuộc  $S$  sao cho  $\frac{z_1 - z_2}{-1 + i}$  là số thực dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $|z_1| + |z_2 - 2i|$  là

A. 2.

B.  $2\sqrt{2}$ .

C.  $2\sqrt{5}$ .

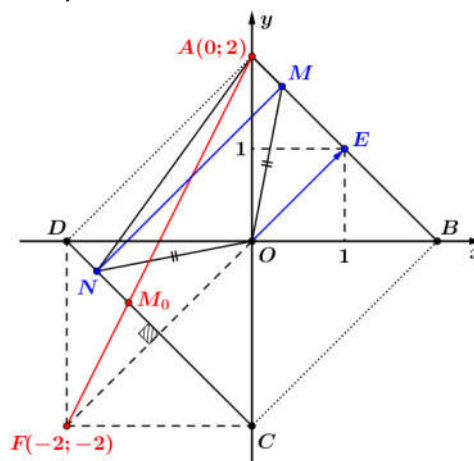
D.  $2 + 2\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

Đầu tiên ta có  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thì khi đó  $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4 \Leftrightarrow |a| + |b| = 2, ab \geq 0$ .

Do  $\frac{z_1 - z_2}{-1 + i}$  là số thực dương nên khi  $M(z_1), N(z_2)$  thì  $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{NM} = k(1 + i) = k\overrightarrow{OE}$  ( $k \in \mathbb{R}^+$ ) với  $E(1;1)$ .

Do  $ab \geq 0$  nên tập hợp các điểm  $M, N$  thuộc  $S$  biểu diễn như hình vẽ như sau:



Gọi  $F(-2;-2)$  là điểm đối xứng với  $O$  qua đoạn thẳng  $CD$ .

Suy ra:  $P = |z_1| + |z_2 - 2i| = MO + NA = NO + NA = NF + NA \geq FA = 2\sqrt{5}$ .

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $M \equiv M_0 = AF \cap CD$ . **Chọn đáp án C.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG – PHÚ THỌ LẦN 4**

**Câu 41:** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = 24$  và  $z_1^2 + (z_2 + 1 - 2i)^2 = z_1 z_2 + (1 - 2i) z_1$ . Biết  $|z_1 - z_2 - 1 + 2i| = a$  với  $a$  là một số nguyên dương. Hỏi  $a$  thuộc khoảng nào?

- A. (20; 29). B. (10; 19). C. (0; 9). D. (30; 39).

**Lời giải**

Trước hết ta có: 
$$\begin{cases} z_1^2 + (z_2 + 1 - 2i)^2 = z_1 z_2 + (1 - 2i) z_1 \\ w = z_2 + 1 - 2i \end{cases} \Leftrightarrow z_1^2 + w^2 = z_1 w \Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{w}\right)^2 - \left(\frac{z_1}{w}\right) + 1 = 0$$

Suy ra:  $\frac{z_1}{w} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \rightarrow w = \frac{1 \mp \sqrt{3}i}{2} z_1 \Rightarrow a = |z_1 - w| = \left| z_1 - \frac{1 \mp \sqrt{3}i}{2} z_1 \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \right| = 24 \in (20; 29)$ . **Chọn đáp án A.**

**Câu 42:** Số giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $4^x + 4^{-x} = 2^{x+1} - 2^{1-x} + 4 - \frac{m}{2}$  có nghiệm trên  $[0; 1]$  là

- A. 4. B. 5. C. 2. D. 3.

**Lời giải**

Phương trình tương đương với:  $4^x + 4^{-x} - 2 = 2(2^x - 2^{-x}) + 2 - \frac{m}{2}$  (1). Đặt  $t = 2^x - 2^{-x} \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$ ,

$\rightarrow t^2 = 4^x + 4^{-x} - 2$  khi đó (1) trở thành:  $t^2 = 2t + 2 - \frac{m}{2} \Leftrightarrow \frac{m}{2} = -t^2 + 2t + 2$

Xét hàm số  $f(t) = -t^2 + 2t + 2$  có  $f'(t) = -2t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$  (N), suy ra:  $\frac{m}{2} \in [f(0); f(1)] \Rightarrow m \in [4; 6]$  tức có 3 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn. **Chọn đáp án D.**

**Câu 43:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; 1; -1), B(0; 3; 1)$  và mặt phẳng  $(P): x + y - z + 3 = 0$ . Gọi  $M(a; b; c)$  là điểm thuộc  $(P)$  để  $|\overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{MB}|$  nhỏ nhất. Tổng  $a + b + c$  bằng

- A. -5. B. 3. C. 5. D. -3.

**Lời giải**

Trước hết ta chọn  $I$  là điểm sao cho thỏa  $\overrightarrow{2IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I\left(\frac{2x_A - x_B}{2-1}; \frac{2y_A - y_B}{2-1}; \frac{2z_A - z_B}{2-1}\right) = (4; -1; -3)$

Suy ra:  $|\overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{MB}| = |2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})| = |\overrightarrow{MI} + (2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB})| = |\overrightarrow{MI}| = MI$

Khi ấy  $MI_{\min}$  khi và chỉ khi  $M$  là hình chiếu của  $I$  lên mặt phẳng  $(P)$ , viết được  $IM: x - 4 = y + 1 = -z - 3$

Với  $M(4+t; -1+t; -3-t) = IM \cap (P)$ , thế vào suy ra:  $M(1; -4; 0) \rightarrow a + b + c = -3$ . **Chọn đáp án D.**

**Câu 44:** Có 13 học sinh của một trường THPT đạt danh hiệu học sinh xuất sắc trong đó lớp A có 8 học sinh nam và 3 học sinh nữ, lớp B có 2 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh bất kỳ để trao thưởng, tính xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ đồng thời có cả học sinh lớp A và học sinh lớp B

- A.  $\frac{24}{143}$ . B.  $\frac{27}{143}$ . C.  $\frac{57}{286}$ . D.  $\frac{229}{286}$ .

**Lời giải**

Trước hết ta có không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ 13 học sinh tức  $n(\Omega) = C_{13}^3 = 286$  (cách)

Trường hợp 1. Chọn 1 học sinh lớp B; 1 học sinh nam lớp A và 1 học sinh nữ lớp A nên có  $C_2^1 C_8^1 C_3^1 = 48$  cách.

Trường hợp 2. Chọn 1 học sinh lớp B; 2 học sinh nữ lớp A có  $C_2^1 C_3^2 = 6$  cách.

Trường hợp 3. Chọn 2 học sinh lớp B; 1 học sinh nữ lớp A có  $C_2^2 C_3^1 = 3$  cách.

Suy ra xác suất cần tìm là:  $P = (48 + 6 + 3) \div 286 = 57 \div 286$ . **Chọn đáp án C.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 47:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(4;1;2), B(1;4;2), C(1;1;5)$  và đường tròn  $(C)$  là giao tuyến của mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0$  và mặt phẳng  $(P): x + y + z - 7 = 0$ . Biết rằng có 3 điểm  $M$  thuộc  $(C)$  sao cho  $MA + MB + MC$  lớn nhất. Tổng các hoành độ của 3 điểm  $M$  này bằng

A.  $3\sqrt{2}$ .                      B. 6.                      C. 3.                      D. 0.

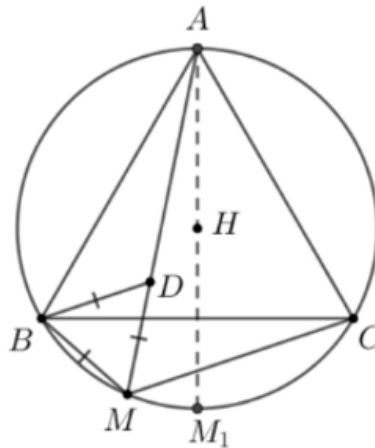
**Lời giải**

Ta có mặt cầu  $(S)$  tâm  $I(1;1;2)$ , bán kính  $R = 3$  cắt  $(P)$  theo đường tròn  $(C)$  có tâm  $H(2;2;3)$  với  $H$  là hình chiếu của  $I$  lên mặt phẳng  $(P)$ , có bán kính bằng  $r = \sqrt{R^2 - d^2(I;(P))} = \sqrt{6}$ .

Nhận thấy  $A, B, C \in (P)$  và  $A, B, C \in (S)$  nên  $A, B, C \in (C)$  và  $AB = BC = CA$  tức  $\triangle ABC$  đều.

**Cách 1:** Nếu  $M$  thuộc cung nhỏ  $BC$ , thì với kí hiệu  $\widehat{BAM} = A_1; \widehat{CAM} = A_2$ , ta có:  $MA \leq 2r = 2\sqrt{6}$ .

Và  $MB + MC = 2r \sin A_1 + 2r \sin A_2 = 2r(\sin A_1 + \sin A_2) = 4r \sin \frac{A_1 + A_2}{2} \cos \frac{A_1 - A_2}{2} = 4\sqrt{6} \sin 30^\circ \cos \frac{A_1 - A_2}{2}$   
 $= 2\sqrt{6} \cos \frac{A_1 - A_2}{2} \leq 2\sqrt{6}$ , suy ra:  $MA + MB + MC \leq 4\sqrt{6}$  với dấu bằng xảy ra khi  $M \equiv M_1$  (điểm chính giữa cung nhỏ  $BC$ ) như hình vẽ dưới đây.



Hoàn toàn tương tự khi  $M$  thuộc các cung nhỏ  $\widehat{CA}$ ,  $\widehat{AB}$  với dấu bằng lần lượt xảy ra khi  $M \equiv M_2, M \equiv M_3$  lần lượt là các điểm chính giữa của cung  $\widehat{CA}$  và  $\widehat{AB}$ . Lúc này  $H(2;2;3)$  chính là trung điểm của các cạnh  $AM_1, BM_2, CM_3$ . Từ đó suy ra:  $M_1(0;3;4), M_2(3;0;4), M_3(3;3;1)$  tức tổng cần tìm là 6. **Chọn đáp án B.**

Hoặc ta có thể suy ra  $H$  là trọng tâm  $\triangle M_1M_2M_3$  tức  $x_{M_1} + x_{M_2} + x_{M_3} = 3x_H = 6$ . **Chọn đáp án B.**

**Cách 2:** Ta thấy nếu  $M$  thuộc cung nhỏ  $BC$ , thì dễ dàng chứng minh được  $MB + MC = MA$ .

Thật vậy, ta lấy điểm  $D \in AM$  sao cho  $MB = MD$ , khi đó  $\widehat{BMD} = \widehat{BCA} = 60^\circ$  tức  $\triangle BDM$  đều.

Suy ra:  $BD = BM$ , khi đó có được:  $\triangle ABD = \triangle CBM$  ( $c - c - c$ ), khi đó có được:  $AD = CM$

Suy ra:  $MB + MC = MD + AD = AM \rightarrow MA + MB + MC = 2MA = 2r = 4\sqrt{6}$  với dấu bằng xảy ra khi  $M \equiv M_1$  (điểm chính giữa cung nhỏ  $BC$ ) như hình vẽ. Khúc sau xử lí tương tự **cách 1**.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Câu 48:** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|\overline{z_1} - 3 + 4i| = 1, |z_2 + 1| = |\overline{z_2} + i|$  và  $\frac{z_1 - z_2}{2 - i}$  là số thực. Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $|z_1 - z_2|$ . Giá trị  $T = M - m$  bằng

- A.**  $T = 2$ .                      **B.**  $T = 4$ .                      **C.**  $T = 2\sqrt{5}$ .                      **D.**  $T = 2\sqrt{10}$ .

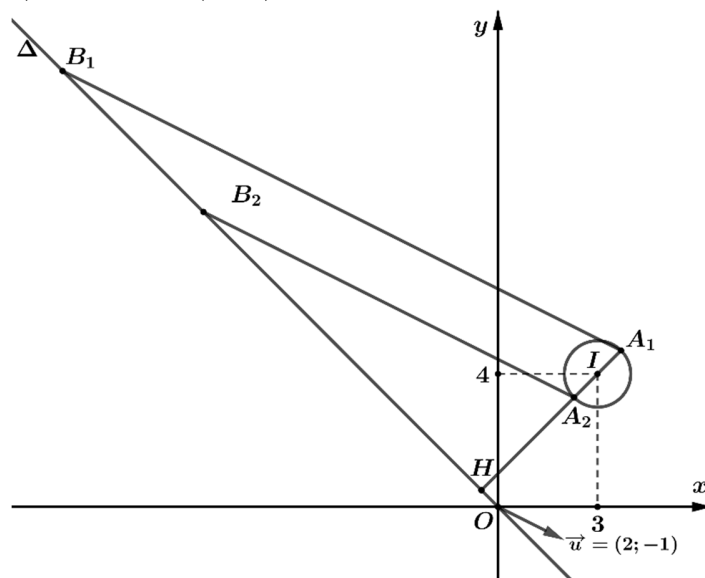
**Lời giải**

Đặt  $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ). Gọi  $A(a; b), B(c; d)$  lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức  $z_1, z_2$ .

Suy ra  $z_1 - z_2 = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} \longrightarrow |z_1 - z_2| = AB$ .

Do đó từ  $\frac{z_1 - z_2}{2 - i} = k$  ( $k \in \mathbb{R}$ )  $\longrightarrow \overrightarrow{BA} = k(2; -1)$ . Suy ra đường thẳng  $AB$  có VTPT  $\overrightarrow{n_{AB}} = (1; 2)$ .

- $|z_1 - 3 - 4i| = 1 \longrightarrow$  tập hợp các điểm  $A$  là đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(3; 4)$ , bán kính  $R = 1$ .
- $|z_2 + 1| = |z_2 - i| \longrightarrow (c + 1)^2 + d^2 = c^2 + (d - 1)^2 \Leftrightarrow c + d = 0 \longrightarrow$  tập hợp các điểm  $B$  là đường  $\Delta: x + y = 0$ .



Gọi  $\varphi$  là góc giữa  $\Delta$  và  $AB$ , ta có  $\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{n_{AB}} \cdot \overrightarrow{n_{\Delta}}|}{|\overrightarrow{n_{AB}}| \cdot |\overrightarrow{n_{\Delta}}|} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \longrightarrow \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$ .

Theo yêu cầu bài toán ta cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $|z_1 - z_2| = AB$ .

Do  $d[I, \Delta] > R$  nên suy ra  $\Delta$  không cắt  $(C)$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $\Delta$ , ta có

$$AB = \frac{AH}{\sin \varphi} \longrightarrow \begin{cases} M = \max AB = \frac{\max AH}{\sin \varphi} = \frac{d[I, \Delta] + R}{\sin \varphi} = 7\sqrt{5} + \sqrt{10} \\ m = \min AB = \frac{\min AH}{\sin \varphi} = \frac{d[I, \Delta] - R}{\sin \varphi} = 7\sqrt{5} - \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow T = M - m = 2\sqrt{10}. \text{ Chọn đáp án D.}$$

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 49:** Cho đa thức bậc bốn  $y = f(x)$  đạt cực trị tại  $x = 2$  và hàm số đạo hàm  $y = f'(x)$  là hàm số lẻ. Biết rằng

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + 2029x}{x} = 2021. \text{ Giá trị của biểu thức } S = |f(0) - f(2)| + |f(0) - f(-2)| \text{ bằng}$$

**A.**  $S = 16$ .

**B.**  $S = 8$ .

**C.**  $S = 0$ .

**D.**  $S = 4$ .

**Lời giải**

Trước hết ta có hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  đạt cực trị tại  $x = 2$  nên  $f'(2) = 0$

Hàm số bậc ba  $y = f'(x)$  là hàm số lẻ nên suy ra  $f'(x) = ax^3 + cx \rightarrow f'(-x) = -f'(x)$  (thỏa mãn) và do  $x = 2$  là nghiệm phương trình  $f'(x) = 0$  nên ta có:  $8a + 2c = 0 \Rightarrow c = -4a$ . Từ đấy suy ra:  $f'(x) = a(x^3 - 4x)$

$$\text{Suy ra: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + 2029x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax(x^2 - 4) + 2029x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [a(x^2 - 4) + 2029] = 2021$$

$$\text{Suy ra: } \lim_{x \rightarrow 0} a(x^2 - 4) = a \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 4) = -8 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow f'(x) = 2(x^3 - 4x), \text{ khi ấy ta thế vào biểu thức } S \text{ và dễ}$$

$$\text{dòng tính được: } S = |f(0) - f(2)| + |f(0) - f(-2)| = \left| \int_2^0 f'(x) dx \right| + \left| \int_{-2}^0 f'(x) dx \right| = 16. \text{ Chọn đáp án A.}$$

**Câu 50:** Cho  $a, b$  là các số nguyên dương nhỏ hơn 2025. Biết rằng với mỗi giá trị  $b$  thì luôn có ít nhất 1000 giá trị của  $a$  thỏa mãn  $(2^{a+b+2} - 2^{b-a}) \cdot \log_{a+1} \sqrt{b} > 4^b - 1$ . Số giá trị  $b$  là

**A.** 1025.

**B.** 1023.

**C.** 1022.

**D.** 1024.

**Lời giải**

Trước hết ta đặt  $c = a + 1, c \geq 2$ , khi đó  $(2^{a+b+2} - 2^{b-a}) \cdot \log_{a+1} \sqrt{b} > 4^b - 1 \Leftrightarrow (2^c - 2^{-c}) \cdot \log_c b > 2^b - 2^{-b}$  (1).

$$+) b = 1, \text{ không thỏa mãn (1). } +) b = 2 \Rightarrow \frac{2^c - 2^{-c}}{\log_2 c} > \frac{15}{4} \text{ (2).}$$

•)  $c = 2$ , không thỏa mãn (2).

$$•) \forall c \geq 3, \text{ hàm } f(c) = \frac{2^c - 2^{-c}}{\log_2 c}, f'(c) = \frac{2^c(c \ln 2 \ln c - 1) + c \cdot 2^{-c} \ln 2 \ln c + 2^{-c}}{c \ln 2 (\log_2 c)^2} > 0.$$

Suy ra  $f(c) \geq f(3) > \frac{15}{4}, \forall c \geq 3 \Rightarrow 2 \leq a \leq 2021$ . Do đó  $b = 2$  thỏa mãn.

$$+) b \geq 3, (1) \Leftrightarrow \frac{2^c - 2^{-c}}{\ln c} > \frac{2^b - 2^{-b}}{\ln b} \text{ (3).}$$

Hàm số  $f(t) = \frac{2^t - 2^{-t}}{\log_2 t}$  đồng biến với mọi  $t \geq 3$  và  $c = 2$  không thỏa mãn (3) nên  $c \geq 3$ .

$$\text{Do đó (3)} \Leftrightarrow c > b, (b \geq 3) \Rightarrow 3 \leq b \leq a \leq 2025 \Rightarrow \begin{cases} b \geq 3 \\ 2025 - b + 1 \geq 1000 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq b \leq 1026 \text{ tức có 1024 giá trị nguyên}$$

$b$  thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn đáp án D.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**ĐỀ THI THỬ SỞ QUẢNG TRỊ**

**Câu 46:** Xét các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $2(x^4 + y^6 + 4) + \log_{2024} \left( \frac{2}{x^2} + \frac{2}{y^3} \right) = \frac{1}{2} (xy\sqrt{y} + 2)^2 (xy\sqrt{y} - 2)^2$ .

Khi biểu thức  $\frac{1}{x^2 + 4y^3}$  đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của  $20x^2 - 24y^6$  bằng

- A.  $-\frac{1}{96}$ .                      B. 336.                      C. -96.                      D.  $\frac{1}{336}$ .

**Lời giải**

Phương trình tương đương với:  $2(x^4 + y^6 + 4) + \log_{2024} \left( \frac{2}{x^2} + \frac{2}{y^3} \right) = \frac{1}{2} (x^2 y^3 - 4)^2$

Đặt  $(a; b) = (x^2; y^3)$  thì phương trình trở thành:  $2(a^2 + b^2 + 4) + \log_{2024} \frac{2(a+b)}{ab} = \frac{a^2 b^2 - 8ab + 16}{2}$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + 2ab) + \log_{2024} (a+b) = \log_{2024} \left( \frac{ab}{2} \right) + \frac{(ab)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_{2024} (a+b) + 2(a+b)^2 = \log_{2024} \left( \frac{ab}{2} \right) + 2 \left( \frac{ab}{2} \right)^2$$

Xét hàm đặc trưng  $f(t) = \log_{2024} t + 2t^2$  trên  $(0; +\infty)$  có  $f(t) = \frac{1}{t \ln 2024} + 4t > 0, \forall t \in (0; +\infty)$  tức hàm  $f(t)$  luôn

đồng biến trên  $(0; +\infty)$ , suy ra:  $f(a+b) = f\left(\frac{ab}{2}\right) \Leftrightarrow ab = 2a + 2b \Leftrightarrow (a-2)(b-2) = 4$

$$\text{Khi đó: } T = \frac{1}{x^2 + 4y^3} = \frac{1}{10 + (a-2) + 4(b-2)} = \frac{1}{10 + (a-2) + \frac{16}{a-2}} \leq \frac{1}{10 + 2\sqrt{(a-2) \cdot \left(\frac{16}{a-2}\right)}} = \frac{1}{18}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $(a-2)^2 = 16 \Leftrightarrow a-2 = 4 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow b = 3$

Suy ra:  $20x^2 - 24y^6 = 20a - 24b^2 = 20 \cdot 6 - 24 \cdot 3^2 = -96$ . **Chọn đáp án C.**

**Câu 48:** Xét hàm số  $g(x) = f(x^2 - 6x + m) - 2 \int (x-3) [x^4 - 13x^3 + (3m+41)x^2 - 18mx + 2m^2] dx$  trong đó ta có

$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{4}$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m \in [0; 10]$  để hàm số  $g(x)$  có

đúng 2 điểm cực trị. Số phần tử của tập  $S$  là

- A. 7.                      B. 8.                      C. 6.                      D. 3.

**Lời giải**

Ta xét:  $f'(x) = x^2$  và  $g'(x) = 2(x-3)f'(x^2 - 6x + m) - 2(x-3)[x^4 - 13x^3 + (3m+41)x^2 - 18mx + 2m^2] = 0$

$$\text{Giải } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ f'(x^2 - 6x + m) - [x^4 - 13x^3 + (3m+41)x^2 - 18mx + 2m^2] = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Giải riêng (\*), tương đương với:  $(x^2 - 6x + m)^2 - [x^4 - 13x^3 + (3m+41)x^2 - 18mx + 2m^2] = 0$

$$\Leftrightarrow (x^4 - 12x^3 + (2m+36)x^2 - 12mx + m^2) - [x^4 - 13x^3 + (3m+41)x^2 - 18mx + 2m^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - (m+5)x^2 + 6mx - m^2 = 0 \Leftrightarrow (x-m)(x^2 - 5x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - 5x + m = 0 \end{cases}$$

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

Để thấy với  $m = 3$  thì  $x = 3$  là nghiệm bội chẵn và  $x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$  (2 nghiệm) thỏa mãn (nhận)

Xét  $m \neq 3$  khi đó ta có 2 trường hợp sau:

**Trường hợp 1:** (\*) có 1 nghiệm duy nhất khác 3, khi đó phương trình  $x^2 - 5x + m = 0$  có nghiệm  $x = m$

Khi ấy suy ra:  $m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$  (nhận)

**Trường hợp 2:**  $x = m$  là nghiệm duy nhất của (\*) phương trình  $x^2 - 5x + m = 0$  vô nghiệm

Suy ra:  $\Delta = 25 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > 6,25 \xrightarrow{m \in [0;10]} m \in \{7;8;9;10\}$  (nhận)

Tóm lại ta suy ra:  $m \in \{0;3;4;7;8;9;10\}$  tức có 7 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn. **Chọn đáp án A.**

**Câu 49:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , xét số phức  $z$  có phần ảo khác 0 thỏa mãn  $\frac{2z^2 + 3z + 4}{z^2 + z + 1}$  là số thực. Gọi  $(H)$  là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức  $z$ . Đường thẳng  $y = 1$  chia hình  $(H)$  thành hai phần. Gọi  $(H_1)$  là phần diện tích nhỏ. Tính thể tích hình tròn xoay được tạo thành khi quay phần hình  $(H_1)$  quanh  $Ox$

- A.  $12\pi\sqrt{3}$ .      B.  $\frac{14\pi\sqrt{2}}{3}$ .      C.  $8\pi\sqrt{2}$ .      D.  $\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$ .

**Lời giải**

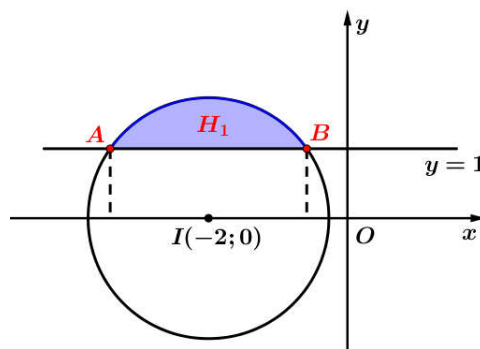
Ta có:  $w = \frac{2z^2 + 3z + 4}{z^2 + z + 1} = 2 + \frac{z+2}{z^2 + z + 1}$  là số thực nên  $\frac{z+2}{z^2 + z + 1}$  là số thực. Khi đó ta có:  $\frac{z+2}{z^2 + z + 1} = \overline{\left(\frac{z+2}{z^2 + z + 1}\right)}$

Suy ra:  $\frac{z+2}{z^2 + z + 1} = \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}^2 + \bar{z} + 1} \Leftrightarrow (z+2)(\bar{z}^2 + \bar{z} + 1) = (\bar{z}+2)(z^2 + z + 1) \Leftrightarrow z.\bar{z}(\bar{z}-z) + 2(\bar{z}^2 - z^2) + (\bar{z}-z) = 0$

$\Leftrightarrow (z.\bar{z}+1)(\bar{z}-z) + 2(\bar{z}-z)(\bar{z}+z) = 0 \Leftrightarrow (\bar{z}-z)(z.\bar{z}+1+2(\bar{z}+z)) = 0$  (\*)

Đến đây ta đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )  $\Rightarrow \bar{z} - z = -2bi \neq 0$  thì khi đó phương trình (\*) trở thành:

$\Rightarrow |z|^2 + 1 + 2(\bar{z} + z) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = 3$  tức tập hợp các điểm biểu diễn  $M(z)$  là một đường tròn  $(C)$  tâm  $I(-2;0)$ , bán kính  $R = \sqrt{3}$ , khi đó ta có hình vẽ như sau:



Đường thẳng  $y = 1$  chia  $(H)$  thành hai phần và cắt  $(C)$  tại  $A, B$ . Khi đó diện tích giới hạn bởi cung nhỏ  $\widehat{AB}$  của đường tròn  $(C)$  và dây cung  $AB$  chính là  $(H_1)$ . Xét phương trình hoành độ giao điểm  $\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

Suy ra  $\begin{cases} x_A = -\sqrt{2}-2, x_B = \sqrt{2}-2 \\ p(x) = \sqrt{3-(x+2)^2} \end{cases}$ , khi đó:  $V = \pi \int_{x_A}^{x_B} (p^2(x) - 1^2) dx = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$ . **Chọn đáp án D.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 50:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)$ . Điểm  $M$  thay đổi trên mặt phẳng  $(ABC)$  và điểm  $N$  trên tia  $OM$  sao cho  $OM.ON = 6$ . Biết rằng khi  $M$  thay đổi thì điểm  $N$  luôn thuộc một mặt cầu  $(S)$  cố định có tâm  $I(a;b;c)$ . Tính  $T = a + b + c$  ?

**A.**  $\frac{7}{2}$ .

**B.** 11.

**C.**  $-\frac{11}{2}$ .

**D.**  $\frac{11}{2}$ .

**Lời giải**

Trước hết ta có:  $(ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow (P): 6x + 3y + 2z - 6 = 0$ , tới đây ta có 2 cách.

Cách 1: Ta gọi  $C$  là hình chiếu của  $O$  lên  $(P)$ , khi ấy ta suy ra:  $OC = d(O; (P)) = \frac{6}{7}$  (1)

Tiếp đến ta gọi  $D \in OC$  sao cho  $\widehat{DNO} = 90^\circ$  với điểm  $N$  trên tia  $OM$  sao cho  $OM.ON = 6$

Khi ấy ta suy ra:  $\triangle OND \sim \triangle OCM \Rightarrow \frac{ON}{OC} = \frac{OD}{OM} \Leftrightarrow OC.OD = \overline{OM.ON = 6}$  (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra:  $OD = \frac{6}{OC} = 7$ , cùng với  $\widehat{DNO} = 90^\circ$  ta suy ra  $N$  thuộc mặt cầu đường kính  $DO$

Trước hết ta giải ra được hình chiếu  $C\left(\frac{36}{49}; \frac{18}{49}; \frac{12}{49}\right)$ , kể đến với  $OC = \frac{6}{7}; OD = 7$ , suy ra  $\frac{OC}{OD} = \frac{6}{49}$

Mà  $O, D, C$  thẳng hàng nên  $\overline{OI} = \frac{1}{2}\overline{OD} = \frac{49}{12}\overline{OC} = \frac{49}{12}\left(\frac{36}{49}; \frac{18}{49}; \frac{12}{49}\right) = \left(3; \frac{3}{2}; 1\right)$  tức thu được tọa độ  $I\left(3; \frac{3}{2}; 1\right)$

Suy ra:  $a + b + c = 3 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{11}{2}$ . **Chọn đáp án D.**

**Cách 2:** Giả sử gọi  $N(x; y; z)$  là điểm sao cho  $O, M, N$  thẳng hàng, khi ấy ta luôn tồn tại số thực  $k$  dương sao cho thỏa mãn  $\overline{OM} = k\overline{ON}$ , khi ấy suy ra:  $M(kx; ky; kz)$

Mà  $M \in (P): 6x + 3y + 2z - 6 = 0$  nên suy ra  $k(6x + 3y + 2z) - 6 = 0 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z = \frac{6}{k}$  (1)

Lại có  $OM.ON = \overline{OM}.\overline{ON} = 6 \Leftrightarrow k(x^2 + y^2 + z^2) = 6 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{6}{k}$  (2)

Nên từ (1) và (2) ta suy ra  $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{6}{k} = 6x + 3y + 2z \Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{49}{4}$

Khi ấy  $N$  thuộc mặt cầu  $(S): (x-3)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{49}{4}$  có tâm  $I\left(3; \frac{3}{2}; 1\right)$ , bán kính  $R = \frac{7}{2}$

Suy ra:  $a + b + c = 3 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{11}{2}$ . **Chọn đáp án D.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**  
**ĐỀ THI THỬ LIÊN TRƯỜNG HƯNG YÊN**

**Câu 7:** Xét các số phức  $z, w$  với  $w \neq 4$  sao cho  $\frac{w+4}{w-4}$  là số thuần ảo. Khi  $|z-w| = \sqrt{13}$  thì giá trị của  $|3z+2w|$  là

**A.**  $\sqrt{217}$ .      **B.**  $\sqrt{219}$ .      **C.**  $\sqrt{73}$ .      **D.**  $\sqrt{74}$ .

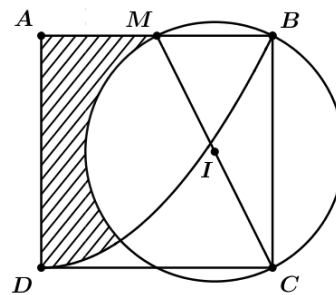
**Lời giải**

Đặt  $w = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), khi đó  $\frac{w+4}{w-4} = \frac{(w+4)(\bar{w}-4)}{|w-4|^2}$  là số thuần ảo tức  $(w+4)(\bar{w}-4)$  là số thuần ảo.

Khi đó:  $(w+4)(\bar{w}-4) = |w|^2 - 4w + 4\bar{w} - 16 = (x^2 + y^2 - 16) + (... )i \rightarrow x^2 + y^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16$

Ta có:  $|3z+2w|^2 + 6|z-w|^2 = 15|z|^2 + 10|w|^2 = 15.9 + 10.16 = 295 \Rightarrow |3z+2w| = \sqrt{217}$ . **Chọn đáp án A.**

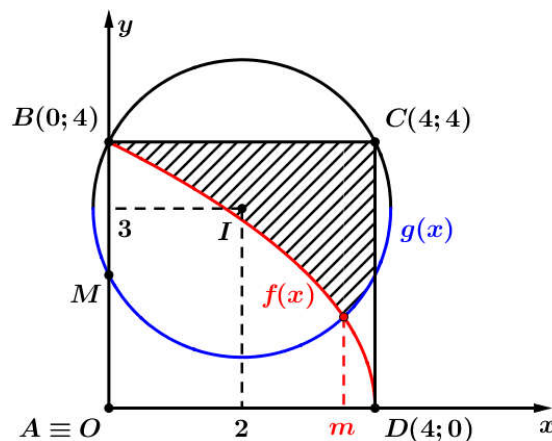
**Câu 26:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng 4. Gọi hai điểm  $M$  và  $I$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $MC$ . Một Parabol có đỉnh là  $D$  và đi qua điểm  $B$ , đường tròn tâm  $I$  đường kính  $MC$  như hình vẽ. Thể tích  $V$  của vật thể được tạo thành khi quay miền  $(R)$  (phần được gạch chéo) quanh trục  $AD$  gần với giá trị nào nhất sau đây?



**A.** 11,8.      **B.** 14,5.      **C.** 12,6.      **D.** 9,7.

**Lời giải**

Phương trình parabol nằm ngang có dạng:  $x = ay^2 + by + c$ . Do Parabol này có đỉnh là  $D$  và đi qua điểm  $B$  nên ta dễ dàng tìm được  $x = -\frac{1}{4}y^2 + 4 \Rightarrow y = \sqrt{16-4x} = f(x)$ .



Tiếp đến ta có đường tròn tâm  $I$  đường kính  $MC$  có phương trình là:  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$

Suy ra:  $y = g(x) = 3 - \sqrt{5 - (x-2)^2}$ . Giải phương trình hoành độ giao điểm của  $f(x)$  và  $g(x)$ , khi đó ta có:

$$2\sqrt{4-(x-2)} + \sqrt{5-(x-2)^2} = 3 \Leftrightarrow x = m \approx 3,53. \text{ Suy ra: } V = \pi \int_0^{3,53} f^2(x) dx + \pi \int_{3,53}^4 g^2(x) dx \approx 14.5$$

**Chọn đáp án B.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 28:** Gọi  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn  $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$  sao cho biểu

thức  $P = \frac{4x+5y-3}{x+2y+1}$  đạt giá trị lớn nhất. Khi đó  $2024x + 2025y$  bằng

**A.** 8085.

**B.** 4043.

**C.** 6065.

**D.** 6073.

**Lời giải**

Phương trình tương đương với:  $\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} 3(x+y) + 3(x+y) = \log_{\sqrt{3}} (x^2 + y^2 + xy + 2) + (x^2 + y^2 + xy + 2)$

Xét hàm số đặc trưng  $f(t) = \log_{\sqrt{3}} t + t$  trên  $(0; +\infty)$  có  $f'(t) = \frac{1}{t \ln \sqrt{3}} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$  tức hàm  $f(t)$  luôn

đồng biến trên  $(0; +\infty)$ . Khi đó ta suy ra:  $3(x+y) = x^2 + y^2 + xy + 2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(y-1)\right]^2 = 1$

Đặt  $(a; b) = \left(x + \frac{y}{2} - \frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}(y-1)\right)$  với  $(C): a^2 + b^2 = 1$ . Từ đó suy ra:  $P = \frac{4x+5y-3}{x+2y+1} = \frac{4\left(x + \frac{y}{2}\right) + 3(y-1)}{\left(x + \frac{y}{2}\right) + \frac{3}{2}(y-1) + \frac{5}{2}}$

$= \frac{8a+6b}{2a+3b+5} \Leftrightarrow \Delta: (P-4)a + (\sqrt{3}P-2\sqrt{3})b + (4P-6)^2 = 0$ . Khi đó ứng với hệ trục tọa độ  $Oab$ ,  $\exists (a; b) \rightarrow P$ ,

ta có:  $d(O; \Delta) \leq 1 \Leftrightarrow P_{\max} = 2 \Leftrightarrow (a; b) = (1; 0) \rightarrow (x; y) = (2; 1) \rightarrow 2024x + 2025y = 6073$ . **Chọn đáp án D.**

**Câu 29:** Một vận động viên bắn súng, bắn ba viên đạn. Xác suất để bắn trúng cả ba viên vòng 10 là 0,0008, xác suất để một viên trúng vòng 8 là 0,15 và xác suất để một viên trúng vòng dưới 8 là 0,4. Biết rằng các lần bắn là độc lập với nhau. Tính xác suất để vận động viên đó đạt ít nhất 28 điểm.

**A.** 0,3572.

**B.** 0,0935.

**C.** 0,0494.

**D.** 0,0394.

**Lời giải**

Xác suất bắn trúng 1 viên dưới 8 điểm là  $P(A) = 0,4$ . Xác suất bắn trúng 1 viên 8 điểm, 9 điểm và 10 điểm lần lượt là  $P(B) = 0,15, P(C), P(D)$ . Do bắn trúng cả 3 viên vòng 10 là 0,0008 nên:  $P^3(D) = 0,0008 \rightarrow P(D) = 0,0928$

Suy ra:  $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1 \rightarrow P(C) = 1 - 0,4 - 0,15 - 0,0928 = 0,357$ . Khi đó ta lần lượt suy ra:

+) Với 2 khả năng đạt 28 điểm là (2 lần 10 điểm, 1 lần 8 điểm) và (2 lần 9 điểm, 1 lần 10 điểm) suy ra xác suất để vận động viên đạt 28 điểm là  $P_1 = P^2(C) \times P(D) \times C_3^2 + P^2(D) \times P(B) \times C_3^2$

+) Xác suất để vận động viên đạt 29 điểm là: (2 lần 10 điểm và 1 lần 9 điểm)  $P_2 = P^2(D) \times P(C) \times C_3^2$

+) Xác suất để vận động viên đạt 30 điểm là: (3 lần đều 10 điểm)  $P_3 = P^3(D) = 0,0008$

Vậy xác suất để vận động viên đó đạt ít nhất 28 điểm là:  $P = P_1 + P_2 + P_3 = 0,0494$ . **Chọn đáp án C.**

**Câu 30:** Xét hai số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|z+2w|=2$  và  $|2z-3w-7i|=4$ . Giá trị lớn nhất của  $P = |z-2i| + |w+i|$  là

**A.**  $4\sqrt{3}$ .

**B.**  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ .

**C.**  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

**D.**  $2\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

Đặt  $\begin{cases} z_1 = z - 2i \\ z_2 = w + i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |z+2w| = |z_1+2z_2| = 2 \\ |2z-3w-7i| = |2z_1-3z_2| = 4 \end{cases} \rightarrow 3|z_1+2z_2|^2 + |2z_1-3z_2|^2 = 7|z_1|^2 + 21|z_2|^2 \rightarrow |z_1|^2 + 3|z_2|^2 = 4$

Suy ra:  $P = |z-2i| + |w+i| = |z_1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}|z_2| \leq \sqrt{\left(1+\frac{1}{3}\right)(|z_1|^2 + 3|z_2|^2)} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \rightarrow P_{\max} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$  **Chọn đáp án B.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**  
**ĐỀ THI THỬ THPT THẤP MƯỜI – ĐỒNG THÁP**

**Câu 44:** Cho hai số phức  $z_1, z_2 \neq 2$  thỏa mãn các điều kiện  $|z_1| = 2, \frac{z_2 + 2}{z_2 - 2}$  là số thuần ảo và  $|z_1 + 2z_2| = 4$ . Khi ấy

giá trị của biểu thức  $|2z_1 - z_2|$  bằng

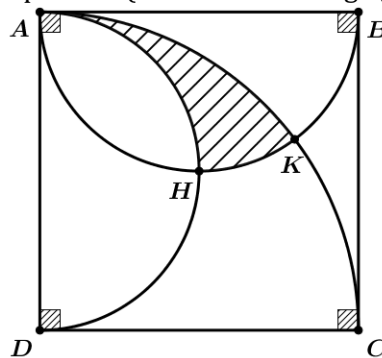
- A. 8. B.  $\sqrt{6}$ . C.  $3\sqrt{6}$ . D.  $2\sqrt{6}$ .

**Lời giải**

Đặt  $z_2 = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ),  $\frac{z_2 + 2}{z_2 - 2} = \frac{|z_2|^2 + 2(\overline{z_2} - z_2) - 4}{|z_2 - 2|^2} = \frac{(x^2 + y^2 - 4) + 4yi}{|z_2 - 2|^2}$  là thuần ảo. Suy ra:  $x^2 + y^2 - 4 = 0$

$$\Rightarrow |z_2|^2 = |z_1|^2 = 4. \text{ Suy ra: } \begin{cases} 16 = |z_1 + 2z_2|^2 = |z_1|^2 + 4|z_2|^2 + 2(\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}) \Rightarrow \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} = -2 \\ |2z_1 - z_2| = \sqrt{4|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2(\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2})} = 2\sqrt{6} \end{cases} \quad \text{. Chọn đáp án D.}$$

**Câu 45:** Ông An có một bức tường lớn kích thước  $8m \times 8m$  (hình vuông ABCD) trước đại sảnh của một toà biệt thự. Ông An cần sơn cho bản thiết kế bởi một loại sơn đặc biệt. Đầu tiên vẽ hai nửa đường tròn đường kính AB, AD cắt nhau tại H; tiếp theo vẽ đường tròn tâm D, bán kính AD, cắt nửa đường tròn đường kính AB tại K. Biết tam giác "cong" AHK được sơn màu đen (phần tô đậm) và các phần còn lại được sơn màu trắng (tham khảo hình vẽ). Biết rằng một mét vuông sơn trắng, sơn đen lần lượt có giá là 1 triệu đồng và 1,5 triệu đồng. Tính số tiền ông An phải trả (làm tròn đến hàng ngàn) khi sơn tường?



- A. 86,124,000 (đồng). B. 70,405,000 (đồng). C. 60,567,000 (đồng). D. 67,128,000 (đồng).

**Lời giải**

Xét hình vẽ đề cho, trước hết ta chọn hệ trục tọa độ Oxy với điểm D trùng với gốc tọa độ.

Ta có cung  $\widehat{AH}$  thuộc đường tròn đường kính AD có phương trình là:  $f(x) = 4 + \sqrt{16 - x^2}$

Tiếp đến cung  $\widehat{HK}$  thuộc đường tròn đường kính AB có phương trình là:  $g(x) = 8 - \sqrt{16 - (x - 4)^2}$

Và cuối cùng là cung  $\widehat{AK}$  thuộc đường tròn tâm D, bán kính AD có phương trình là:  $h(x) = \sqrt{64 - x^2}$

Khi ấy hoành độ điểm K chính là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = m \approx 6,4$

Dễ thấy vì H là điểm chính giữa của hai cung  $\widehat{AB}, \widehat{AD}$  ở mỗi đường tròn tương ứng nên suy ra  $x_H = 4$

Khi đó phần diện tích sơn đen là  $S_1 = \int_0^4 (h(x) - f(x)) dx + \int_4^m (h(x) - g(x)) dx \approx 6,255 (m^2)$

Từ đó suy ra phần diện tích sơn trắng là  $S_2 = S_{ABCD} - S_1 = 64 - S_1$

Khi đó số tiền cần bỏ ra là:  $1,500,000S_1 + 1,000,000S_2 = 1,500,000S_1 + 1,000,000(64 - S_1)$

$= 1,000,000 \times 64 + 500,000 \times S_1 \approx 1,000,000 \times 64 + 500,000 \times 6,255 \approx 67,128,000$  (đồng). **Chọn đáp án D.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 46:** Xét các số thực dương  $x, y$  thay đổi thỏa mãn  $\frac{x+y}{10} + \log\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}\right) = 1 + 2xy$ . Khi biểu thức  $\frac{20}{x^2} + \frac{5}{y^2}$  đạt giá trị nhỏ nhất, tích  $xy$  bằng

**A.**  $\frac{1}{64}$ .

**B.**  $\frac{1}{32}$ .

**C.**  $\frac{9}{200}$ .

**D.**  $\frac{9}{100}$ .

**Lời giải**

Phương trình ban đầu tương đương với:  $\frac{x+y}{10} + \log\left(\frac{x+y}{2xy}\right) = 1 + 2xy \Leftrightarrow \frac{x+y}{10} + \log(x+y) - 1 = \log(2xy) + 2xy$   
 $\Leftrightarrow \frac{x+y}{10} + \log\left(\frac{x+y}{10}\right) = \log(2xy) + 2xy$ .

Xét hàm đặc trưng  $f(t) = \log t + t$  trên  $(0; +\infty)$  có  $f'(t) = \frac{1}{t \ln 10} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$ . Suy ra  $f(t)$  luôn đồng

biến trên  $(0; +\infty)$  tức ta có được  $2xy = \frac{x+y}{10} \Rightarrow x+y = 20xy$ . Khi đó:  $P = \frac{20}{x^2} + \frac{5}{y^2} = \frac{5x^2 + 20y^2}{x^2 y^2} = 20 \frac{5x^2 + 20y^2}{(x+y)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu, suy ra:  $\frac{P}{100} = \frac{(2x)^2}{4(x+y)^2} + \frac{(2y)^2}{(x+y)^2} \geq \frac{(2x+2y)^2}{4(x+y)^2 + (x+y)^2} = \frac{4(x+y)^2}{5(x+y)^2} = \frac{4}{5}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $\frac{2x}{4(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2} \rightarrow \begin{cases} x = 4y, y > 0 \\ x+y = 20xy \end{cases} \Leftrightarrow 5y = 80y^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{16} \Rightarrow xy = 4y^2 = \frac{1}{64}$

**Chọn đáp án A.**

**Câu 47:** Xét tập hợp số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|1+z+z^2| = 4$ . Biết rằng giá trị lớn nhất của phần ảo của số phức  $z$  có dạng  $\frac{\sqrt{m}}{n}$ , trong đó  $m$  và  $n$  là các số nguyên dương và nguyên tố cùng nhau. Giá trị  $m+n$  thuộc khoảng nào sau đây?

**A.**  $(10;15)$ .

**B.**  $(18;23)$ .

**C.**  $(1;10)$ .

**D.**  $(15;18)$ .

**Lời giải**

**Cách 1:** Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) thì khi đó ta có:  $|1+z+z^2| = 4 \Leftrightarrow (1+x+x^2-y^2)^2 + y^2(1+2x)^2 = 16$

$\Leftrightarrow (1+x+x^2-y^2)^2 + 4y^2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = 16$ . (\*). Đặt  $t = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2+x+\frac{1}{4} \rightarrow x^2+x+1 = t+\frac{3}{4}$  thì khi đó (\*) trở

thành:  $\Leftrightarrow \left(t+\frac{3}{4}-y^2\right)^2 + 4y^2t = 16 \Leftrightarrow \left(t+\frac{3}{4}-y^2\right)^2 + (2y\sqrt{t})^2 = 16$

Đặt:  $\begin{cases} t+\frac{3}{4}-y^2 = 4\cos\alpha \\ 4y^2t = 16\sin^2\alpha \end{cases} \rightarrow \frac{1-\cos^2\alpha}{y^2} + \frac{3}{4} - y^2 = 4\cos\alpha \Leftrightarrow \left(\frac{\cos^2\alpha}{y^2} + 2\frac{\cos\alpha}{y} \cdot 2y + 4y^2\right) - 3y^2 - \frac{1}{y^2} - \frac{3}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\cos\alpha}{y} + 2y\right)^2 = 3y^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(2y - \frac{1}{y}\right)^2 \leq 3y^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{3}{4} \leq \left(\frac{1}{y} + 2y\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{y^2 - 4 \leq \frac{3}{4}} \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\sqrt{19}}{2}; \frac{\sqrt{19}}{2}\right]$

Khi ấy giá trị lớn nhất của phần ảo chính là  $y_{\max} = \frac{\sqrt{19}}{2}$  khi  $\cos\alpha = -1 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Vậy  $m = 19, n = 2$  tức  $m+n = 19+2 = 21 \in (18;23)$ . **Chọn đáp án B.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**Cách 2:** Đặt  $M(z) = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) thì khi đó ta có:  $4 = |1 + z + z^2| = \left| \left( z + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right| = \left| \left( z + \frac{1}{2} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{3}i}{2} \right)^2 \right|$

Phương trình tương đương với:  $4 = \left| z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \right| \cdot \left| z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right| = MA \cdot MB$  với  $A \left( -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right), B \left( -\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

Khi đó ta có:  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \leq AM \cdot MB = 4$  (khi  $M, A, B$  thẳng hàng)

cùng với  $\overrightarrow{AM} = \left( x + \frac{1}{2}; y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \overrightarrow{BM} = \left( x + \frac{1}{2}; y + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$  khi ấy ta suy ra được:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( y + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( y^2 - \frac{3}{4} \right) \leq 4 \Leftrightarrow \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 \leq \frac{19}{4}$$

Suy ra:  $y^2 \leq \frac{19}{4} - \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{19}{4}$  tức  $y_{\max} = \frac{\sqrt{19}}{2}$  với dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $x = -\frac{1}{2}$

Vậy  $m = 19, n = 2$  tức  $m = n = 19 + 2 = 21 \in (18; 23)$ . **Chọn đáp án B.**

**Cách 3:** Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) thì khi đó ta có:  $|1 + z + z^2| = 4 \Leftrightarrow (1 + x + x^2 - y^2)^2 + y^2(1 + 2x)^2 = 16$

Tới đây ta đạo hàm phương trình này theo ẩn  $x$ , xem  $y$  là tham số, khi ấy ta có:

$$F_y'(x) = 2(1 + x + x^2 - y^2)(1 + 2x) + 2y^2(1 + 2x) = 0 \Leftrightarrow ((2x + 1)^2 - 4y^2)(1 + 2x) + 4y^2(1 + 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow ((2x + 1)^2 - 4y^2) + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

Vậy  $m = 19, n = 2$  tức  $m = n = 19 + 2 = 21 \in (18; 23)$ . **Chọn đáp án B.**

### ĐỀ THI THỬ THPT CỤM TỈNH BẮC NINH

**Câu 40:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để bất phương trình  $(2^{x^2-2x} - 8)(3^{x^2} - m^2) \leq 0$  có 6 nghiệm nguyên?

**A.** 913924.

**B.** 921024.

**C.** 931923.

**D.** 931922.

**Lời giải**

**Trường hợp 1:**  $\begin{cases} 2^{x^2-2x} - 8 \leq 0 \\ 3^{x^2} - m^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leq 0 \\ 3^{x^2} \geq m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x^2 \geq \log_3 m^2 \end{cases}$  (vô số nghiệm) nên loại

**Trường hợp 2:**  $\begin{cases} 2^{x^2-2x} - 8 \geq 0 \\ 3^{x^2} - m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ 3^{x^2} \leq m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1, x \geq 3 \\ x^2 \leq \log_3 m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1, x \geq 3 \\ -\sqrt{\log_3 m^2} \leq x \leq \sqrt{\log_3 m^2} \end{cases}$

Khi đó tập nghiệm là:  $S = \left[ -\sqrt{\log_3 m^2}; -1 \right] \cup \left[ 3; \sqrt{\log_3 m^2} \right]$

Để có 6 nghiệm nguyên tức tập  $S' = \left[ -\sqrt{\log_3 m^2}; \sqrt{\log_3 m^2} \right] = S + [-1; 3]$  phải có 11 giá trị nguyên.

Tức độ dài đại số từ điểm  $-\sqrt{\log_3 m^2}$  đến  $\sqrt{\log_3 m^2}$  bằng trong nửa khoảng 10 đến 11. Suy ra:

$$\sqrt{\log_3 m^2} - \left( -\sqrt{\log_3 m^2} \right) + 1 = 2\sqrt{\log_3 m^2} + 1 \in [9; 11] \Leftrightarrow \sqrt{\log_3 m^2} \in [4; 5] \Leftrightarrow m^2 \in [3^{16}; 3^{25}] \Leftrightarrow m \in [3^8; \sqrt{3^{25}}]$$

Mà  $m \in \mathbb{Z}^+$  nên suy ra:  $m \in \{6561; 6562; \dots; 920481; 920482\}$  tức có  $920482 - 6561 + 1 = 913922$  giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 41:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình nón  $(N)$  có đỉnh  $S(2;4;6)$ , đáy là hình tròn tâm  $I(a;b;c)$ , hai điểm  $A(2;4;8)$  và  $B(2;8;6)$  là các điểm thuộc đường sinh của hình nón  $(N)$ , điểm  $C(8;4;6)$  nằm trên đường tròn đáy. Tính giá trị của biểu thức  $a+2b+3c$ ?

- A. 60. B. 48. C. 32. D. 40.

**Lời giải**

Trước hết ta dễ dàng tìm được:  $SA=3, SB=4, SC=6$  với  $C$  thuộc đường tròn đáy nên  $SC$  là đoạn đường sinh của hình nón. Khi ấy ta gọi  $A', B'$  lần lượt là các giao điểm của hai tia  $SA, SB$  với đường tròn đáy, khi đó

Ta lần lượt suy ra:  $\overrightarrow{SA'} = 3\overrightarrow{SA}; \overrightarrow{SB'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{SB} \rightarrow \begin{cases} A'(2;4;12) \\ B'(2;10;6) \end{cases}$ , khi ấy dễ thấy  $\Delta A'B'C$  đều nên khi đó  $I$  là trọng tâm của  $\Delta A'B'C$  tức ta suy ra tọa độ  $I(4;6;8)$  tức  $a+2b+3c=40$ . **Chọn đáp án D.**

**Câu 42:** Cho số phức  $z, w$  thỏa mãn  $(3+2i)|z| = \frac{z}{iw-1+3i} + 1-i$ . Tính giá trị lớn nhất của  $T=|w|$

- A.  $\frac{\sqrt{5}+5\sqrt{13}}{5}$ . B.  $\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{11}}{3}$ . C.  $\frac{5}{\sqrt{2}}$ . D.  $\frac{\sqrt{2}+5\sqrt{10}}{5}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $(3+2i)|z| = \frac{z}{iw-1+3i} + 1-i \Leftrightarrow (3|z|-1) + (2|z|+1)i = \frac{z}{iw-1+3i}$  (Modun 2 về cho phương trình này)

$$\Rightarrow (3|z|-1)^2 + (2|z|+1)^2 = \frac{|z|^2}{|iw-1+3i|^2} = \frac{|z|^2}{|w+3+i|^2} \Leftrightarrow |w+3+i|^2 = \frac{|z|^2}{(3|z|-1)^2 + (2|z|+1)^2} = \frac{|z|^2}{13|z|^2 - 2|z| + 2}$$

$$\text{Do: } \frac{13|z|^2 - 2|z| + 2}{|z|^2} = 2\left(\frac{1}{|z|^2} - \frac{1}{|z|} + \frac{13}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq \frac{25}{2} \text{ nên suy ra: } |w+3+i| \leq \frac{2}{25}$$

$$\text{Khi đó: } |w+3+i| \leq \frac{\sqrt{2}}{5} \rightarrow |w| = |w+3+i - (3+i)| \leq |w+3+i| + |3+i| = \frac{\sqrt{2}}{5} + \sqrt{10} = \frac{\sqrt{2}+5\sqrt{10}}{5}. \text{ **Chọn đáp án D.**}$$

**Câu 43:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai đường thẳng  $\Delta_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$  và  $\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$ . Trong tất cả các mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ , ta gọi  $(S)$  là mặt cầu tâm  $I(a;b;c)$  có bán kính nhỏ nhất. Tính  $a-b+c$ ?

- A. -2. B. 2. C. 0. D. 4.

**Lời giải**

Mặt cầu nhỏ nhất cần tìm chính là mặt cầu có đường kính là đường vuông góc chung giữa hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  cắt nhau tại hai điểm  $A, B$  và tâm là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  (\*). Gọi  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  lần lượt là các vector chỉ phương của  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ , khi đó  $d$  là đường vuông góc chung có vector chỉ phương là  $\vec{u} = [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = m.(1; -1; 2)$

$$\text{Gọi } \begin{cases} A \in \Delta_1 \\ B \in \Delta_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(4+3a; 1-a; -5-2a) \\ B(2+b; -3+3b; b) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{BA} = (2+3a-b; 4-a-3b; -2a-b-5). \text{ Mà } AB \text{ nằm trên đường}$$

$$\text{thẳng vuông góc chung nên } \overrightarrow{BA} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+3a-b=1.k \\ 4-a-3b=-1.k \\ -2a-b-5=2.k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(1; 2; -3) \\ B(3; 0; 1) \end{cases} \xrightarrow{(*)} I(2; 1; -1)$$

Suy ra  $a-b+c=0$ . **Chọn đáp án C.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**Câu 47:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục và có đạo hàm liên tục trên  $[2;5]$  sao cho thỏa mãn điều kiện  $f(2)=1$  và

$$x(x-1)f'(x)-f(x)=x^2+2x-3. \text{ Biết } \int_3^5 f'(x)dx = a + \frac{b}{c} \ln 2 \text{ với } a, b, c \text{ là các số nguyên dương và}$$

phân số  $\frac{b}{c}$  tối giản. Tính  $a+b-2c$

**A.** 43.

**B.** 28.

**C.** 56.

**D.** 34.

**Lời giải**

Ta biến đổi phương trình sau:  $x(x-1)f'(x)-f(x)=x^2+2x-3$  (\*)

$$\text{Khi ấy ta đặt } \begin{cases} v(x)=x^2-x \\ v'(x)=-1 \end{cases} \rightarrow \frac{v'(x)}{v(x)} = -\frac{1}{x^2-x} \rightarrow \ln v(x) = \int \frac{v'(x)}{v(x)} dx = \int \frac{dx}{x-x^2} = \ln \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow \boxed{v(x) = \frac{x}{1-x}}$$

$$\text{Từ (*) ta chia hai vế cho } (x-1)^2: \underbrace{\frac{x}{x-1}}_{v(x)} \cdot f'(x) + \underbrace{\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)}_{v'(x)} f(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x-1)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x-1} f(x)\right)' = \frac{x^2+2x-3}{(x-1)^2}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{x}{x-1} f(x) = \int \frac{x^2+2x-3}{(x-1)^2} dx = \int \left(1 + \frac{4}{x-1}\right) dx = x + 4 \ln|x-1| + C$$

$$\text{Mà } f(2)=1 \text{ nên suy ra: } C=0 \text{ tức } \frac{x}{x-1} f(x) = x + 4 \ln(x-1), \forall x \in [2;5] \Rightarrow f(x) = x-1 + 4 \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln(x-1)$$

$$\text{Suy ra: } \int_3^5 f'(x) dx = f(x) \Big|_3^5 = 2 + \frac{56}{15} \ln 2 \rightarrow a=2, b=56, c=15 \rightarrow a+b-2c=28. \text{ Chọn đáp án B.}$$

**Câu 48:** Cho hàm số  $y=f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$  có đồ thị  $(C)$  đồng thời có 2 điểm cực trị là  $-1;1$ . Biết Parabol  $(P): y=g(x)=mx^2+nx+p$  đi qua hai điểm cực trị của  $(C)$ . Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương  $(c;p)$  thỏa mãn  $c+p < 10$  sao cho hình phẳng giới hạn bởi parabol  $(P): y=g(x)$  và đồ thị  $(C)$  có diện tích bằng 16 (đơn vị diện tích)?

**A.** 4.

**B.** 6.

**C.** 2.

**D.** 8.

**Lời giải**

Ta xét  $y=f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$  có  $f'(x)=\boxed{6}x^2+2ax+b$ . Do hàm số 2 điểm cực trị là  $-1;1$  nên ta dễ dàng

$$\text{có được: } f'(x)=\boxed{6}(x-1)(x+1)=\boxed{6}(x^2-1) \rightarrow f(x)=\int f'(x)dx=2x^3-6x+c$$

$$\text{Khi đó với } \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(-1)=c+4 \\ f(1)=c-4 \end{cases} \text{ là các điểm cực trị của đồ thị } (C) \text{ và parabol } (P): y=g(x) \text{ đi qua 2 điểm}$$

$$\text{này nên ta suy ra: } \begin{cases} g(-1)=c+4 \\ g(1)=c-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m+n+p=c-4 \\ m-n+p=c+4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n=-4 \\ m+p=c \end{cases}, \text{ khi đó ta có: } \begin{cases} c+p < 10 \\ c-p=m, \forall m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Xét phương trình hoành độ giao điểm } f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2x^3-mx^2-2x+m=0. \quad (1)$$

Do  $m \neq 0$  (để tồn tại parabol) và hai nghiệm  $-1;1$  là nghiệm của (1) nên suy ra (1) có 3 nghiệm  $-1,1,x_0$

$$\text{Khi ấy áp dụng định lí Vi-ét ta suy ra } -1+1+x_0=x_0=\frac{m}{2}$$

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**

Ta giải trước nguyên hàm:  $\int f(x) - g(x) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}mx^3 - x^2 + mx$ , khi ấy ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1:  $\frac{m}{2} > 1 \rightarrow m > 2$  thì khi ấy:  $S = \left| \int_{-1}^1 f(x) - g(x) dx \right| + \left| \int_1^{\frac{m}{2}} f(x) - g(x) dx \right| = 16$

Suy ra:  $m = 6$  (nhận)

Trường hợp 2:  $-1 < \frac{m}{2} < 1 \rightarrow -2 < m < 2$  thì khi ấy:  $S = \left| \int_{-1}^{\frac{m}{2}} f(x) - g(x) dx \right| + \left| \int_{\frac{m}{2}}^1 f(x) - g(x) dx \right| = 16$

Suy ra:  $m \in \emptyset$

Trường hợp 3:  $\frac{m}{2} < -1 \rightarrow m < -2$  thì khi ấy:  $S = \left| \int_{\frac{m}{2}}^{-1} f(x) - g(x) dx \right| + \left| \int_{-1}^1 f(x) - g(x) dx \right| = 16$

Suy ra:  $m = -6$  (nhận)

Tóm lại ta suy ra:  $m = \pm 6 \rightarrow \begin{cases} c + p < 10 \\ c - p = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (c; p) = (7; 1) \\ (c; p) = (1; 7) \end{cases}$  tức có 2 cặp thỏa mãn. **Chọn đáp án C.**

**Câu 49:** Có bao nhiêu cặp số nguyên  $(x; y)$  với  $1 \leq x \leq 2024$  và  $y \geq 2$  sao cho thỏa mãn

$$2^x \cdot \log_2 \left( \frac{2^x + x}{2} \right) + 2^{\frac{2^x + x}{y}} = x(y-1) \log_2(xy)$$

**A.** 13.

**B.** 12.

**C.** 11.

**D.** 10.

**Lời giải**

Phương trình tương đương với:  $2^x \cdot [\log_2(2^x + x) - 1] + (x - xy) \log_2(xy) + 2^{\frac{2^x + x}{y}} = 0$  (1)

Đặt  $t = 2^{\frac{2^x + x}{y}} \Leftrightarrow 2^x = ty - x$  thì khi đó (1) trở thành:  $2^x [\log_2(ty) - 1] + (x - xy) \log_2(xy) + 2^t = 0$

$\Leftrightarrow 2^t - 2^x + (ty - x) \log_2(ty) + (x - xy) \log_2(xy) = 0 \Leftrightarrow 2^t + (ty - x) \log_2(ty) = 2^x + (xy - x) \log_2(xy)$  (2)

Với  $x, y > 0$  ta xét đơn điệu hàm  $f(u) = 2^u + (uy - x) \log_2(uy)$  dễ thấy  $f'(u) > 0, \forall u > 0$

Khi đó từ (2) ta suy ra  $t = x \Leftrightarrow y = \frac{2^x}{x} + 1 \geq 2, y \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow x = 2^n \in [1; 2024] \rightarrow n \in [0; 10]$ , khi đó suy ra có 11 giá trị

$n$  tức có 11 giá trị  $x$ , mà 1 giá trị  $x$  cho ra 1 giá trị  $y$  nên có tất cả 11 cặp  $(x; y)$  thỏa mãn. **Chọn đáp án C.**

**NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG**