

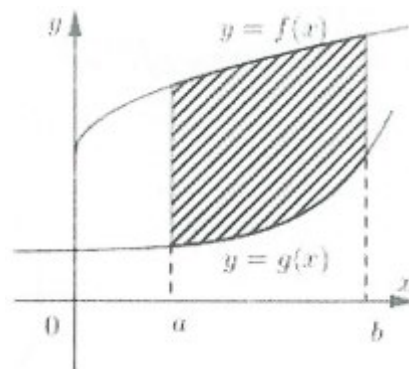
CHỦ ĐỀ 12: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH

A. LÝ THUYẾT

1) Công thức tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số

Cho hai đồ thị của hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a; x = b (a < b)$. Khi đó hình phẳng giới hạn bởi bốn đường $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a; x = b$ có diện tích S được tính theo công thức:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$



Đặc biệt: Trong trường hợp $g(x)$ là trục hoành ($g(x) = 0$) ta được công thức tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx \quad (1).$$

Để tính diện tích S ta phải tính tích phân (1), muốn vậy ta phải phá dấu giá trị tuyệt đối:

- Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$ thì $S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b f(x) dx$.
- Nếu $f(x) \leq 0, \forall x \in [a; b]$ thì $S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b (-f(x)) dx$.

Muốn xét dấu của biểu thức $f(x)$ ta thường có một số cách làm như sau:

✎ **Cách 1:** Sử dụng bảng xét dấu cho $f(x)$ với ghi nhớ qua nghiệm bội lẻ $f(x)$ đổi dấu, qua nghiệm bội chẵn $f(x)$ không đổi dấu.

✎ **Cách 2:** Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ để suy ra dấu của $f(x)$ trên đoạn đó:

- Nếu trên đoạn $[a; b]$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía trên trục hoành thì $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$.
- Nếu trên đoạn $[a; b]$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía dưới trục hoành thì $f(x) \leq 0, \forall x \in [a; b]$.

✎ **Cách 3:** Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$ thì ta có: $S = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.

✎ **Cách 4:** Sử dụng máy tính **CASIO**, tuy nhiên xu hướng ra đề thi **THPT Quốc gia** sẽ hạn chế **CASIO** nên cần chú ý cách giải tổng quát và hiểu rõ bản chất!

Chú ý:

- Khi tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số ta có:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^b |h(x)| dx \text{ ta làm hoàn toàn tương tự như trên.}$$

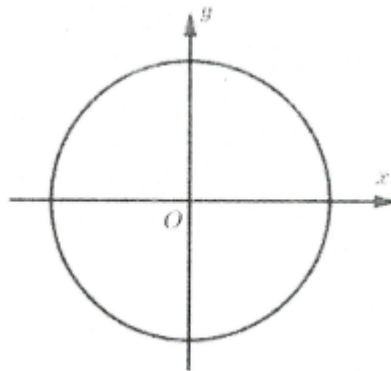
- Nếu đề bài không cho các đường thẳng giới hạn $x = a; x = b$ ta giải phương trình $f(x) = g(x)$ (hoặc $f(x) = 0$ trong trường hợp $g(x)$ là trục hoành) để tìm cận của tích phân.

2) Ứng dụng tính diện tích hình tròn và hình Elip

a) Tính diện tích hình tròn

Trong hệ tọa độ Oxy cho đường tròn có phương trình: $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$). Khi đó hình tròn đó có diện tích là: $S = \pi r^2$.

Ta có $x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$



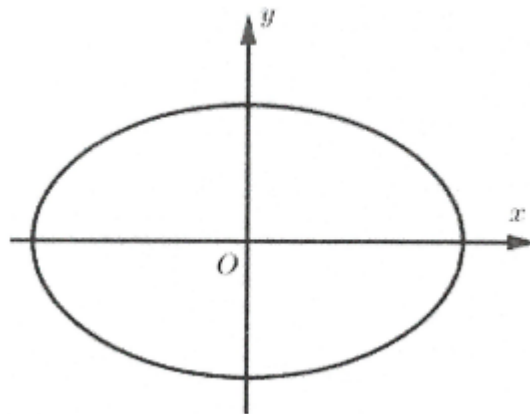
Với $y \geq 0$, ta có: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ có đồ thị là nửa đường tròn phía trên trục hoành.

Bằng cách đặt $x = r \sin t$ ta có diện tích $S_1 = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi r^2}{2}$.

Do đó $S = 2S_1 = \pi r^2$.

b) Tính diện tích hình Elip

Trong hệ tọa độ Oxy cho elip có phương trình: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, 0 < b < a$.



Chứng minh tương tự ta có diện tích của elip là: $S = \pi ab$ (đvdt).

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Tính diện tích hình phẳng trên được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x - 2$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 3$.

Lời giải

Diện tích S của hình phẳng trên là $S = \int_0^3 |-x^2 + 2x - 2| dx$.

Ta có: $-x^2 + 2x - 2 \leq 0, \forall x \in [0; 3]$.

$$S = \int_0^3 |-x^2 + 2x - 2| dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right) \Big|_0^3 = 6 \text{ (đvdt)}.$$

Ví dụ 2: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{-x-2}{x-1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = -1, x = 0$.

Lời giải

Gọi S là diện tích của hình phẳng trên, ta có: $S = \int_{-1}^0 \left| \frac{-x-2}{x-1} \right| dx$

Ta có: $\frac{-x-2}{x-1} \geq 0, \forall x \in [-1; 0]$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } S &= \int_{-1}^0 \left| \frac{-x-2}{x-1} \right| dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{-x-2}{x-1} \right) dx = \int_{-1}^0 \frac{-(x-1)-3}{x-1} dx = \int_{-1}^0 \left(-1 - \frac{3}{x-1} \right) dx \\ &= \left(-x - 3 \ln|x-1| \right) \Big|_{-1}^0 = 3 \ln 2 - 1 \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^2 - x + 1, y = x + 1$ là

A. $-\frac{4}{3}$

B. $\frac{4}{3}$

C. 1

D. $\frac{2}{3}$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm 2 đồ thị là: $x^2 - x + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích cần tìm là: } S &= \int_0^2 |x^2 - x + 1 - x - 1| dx = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx \\ &= \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}. \text{ Chọn B.} \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = e^x + x$ và các đường thẳng

$$x - y + 1 = 0, x = \ln 5.$$

A. $S = 5 - \ln 4$

B. $S = 4 - \ln 5$

C. $S = 4 + \ln 5$

D. $S = 5 + \ln 4$

Lời giải

Ta có: $x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là: $e^x + x = x + 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int_0^{\ln 5} |e^x - 1| dx = \int_0^{\ln 5} (e^x - 1) dx = (e^x - x) \Big|_0^{\ln 5} = 4 - \ln 5$. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 11x - 6; y = 6x^2; x = 0; x = 2$.

Lời giải

Đặt $f(x) = (x^3 + 11x - 6) - 6x^2 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; x = 2 \\ x = 3 \text{ (loại)} \end{cases}$. Gọi S là diện tích phần giới hạn bởi các đường ta có:

Bảng xét dấu:

x	0		1		2
$h(x)$		-	0	+	0

Khi đó $S = -\int_0^1 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx + \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx$

$$= -\left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x\right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x\right) \Big|_1^2 = \frac{5}{2} \text{ (đvdt)}.$$

Ghi nhớ: Nếu phương trình $f(x) = 0$ có k nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \dots x_k$ thuộc $(a; b)$ thì trên mỗi khoảng $(a; x_1), (x_1; x_2), \dots, (x_k; b)$ biểu thức $f(x)$ có dấu không đổi.

Khi đó để tính tích phân $S = \int_a^b |f(x)| dx$ ta có thể tính như sau:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_k}^b f(x) dx \right|.$$

Áp dụng với bài trên ta có: $S = \left| \int_0^1 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx \right|$.

Ví dụ 6: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y^2 - 2y + x = 0; x + y = 0$.

Lời giải

Phương trình tung độ giao điểm là: $2y - y^2 = -y \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 3 \end{cases}$.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn với các đường đã cho ta có:

$$S = \int_0^3 |2y - y^2 - (-y)| dy = \int_0^3 |3y - y^2| dy = \int_0^3 (-y^2 + 3y) dy = \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{3y^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \frac{9}{2} \text{ (đvdt)}.$$

Nhận xét: Đối với bài toán này việc tính theo dx gặp khá nhiều khó khăn, do đó ta nên tính diện tích hình phẳng theo dy bằng cách coi x là hàm của biến y , diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $x = g(y)$, $x = h(y)$ (g và h là hai hàm liên tục trên đoạn $[c; d]$) và hai đường thẳng $y = c, y = d$ là:

$$S = \int_c^d |g(y) - h(y)| dy.$$

Ví dụ 7: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$ như hình vẽ ở bên

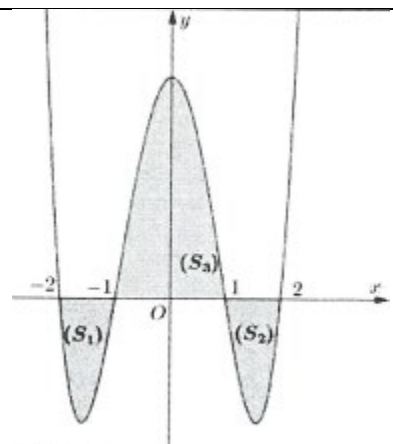
và có diện tích $S_1 = S_2 = \frac{22}{15}, S_3 = \frac{76}{15}$. Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$.

A. $I = \frac{32}{15}$

B. $I = 8$

C. $I = \frac{18}{5}$

D. $I = -\frac{32}{15}$



Lời giải

Ta có $I = \int_{-2}^2 f(x) dx = S_3 - S_1 - S_2 = \frac{76}{15} - 2 \cdot \frac{22}{15} = \frac{32}{15}$. **Chọn A.**

Ví dụ 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$

được cho như hình bên. Diện tích các hình phẳng $(K), (H)$ lần lượt là

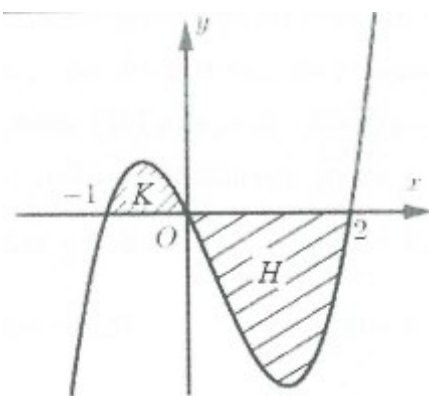
$\frac{5}{12}$ và $\frac{8}{3}$. Biết $f(-1) = \frac{19}{12}$, tính $f(2)$.

A. $f(2) = \frac{11}{6}$

B. $f(2) = -\frac{2}{3}$

C. $f(2) = 3$

D. $f(2) = 0$

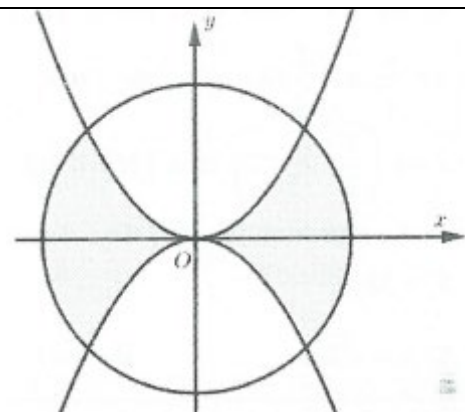


Lời giải

Ta có: $K = \int_{-1}^0 f'(x) dx = f(0) - f(-1) = \frac{5}{12} \Rightarrow f(0) = \frac{5}{12} + f(-1) = 2$.

Lại có: $H = \int_0^2 |f'(x) dx| = -\int_0^2 f'(x) dx = f(0) - f(2) = \frac{8}{3} \Rightarrow f(2) = f(0) - \frac{8}{3} = \frac{-2}{3}$. **Chọn B.**

Ví dụ 9: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = x^2$ và $y = -x^2$ đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 2$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính diện tích S của hình (H)



- A. $S = \pi + \frac{2}{3}$ B. $S = 2\pi - \frac{2}{3}$
C. $S = \pi - \frac{2}{3}$ D. $S = 2\pi + \frac{2}{3}$

Lời giải

Xét phần tô đậm nằm phía trên trục Ox , nửa đường tròn phía trên Ox có phương trình $y = \sqrt{2 - x^2}$.

Giải phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = \sqrt{2 - x^2} \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Diện tích phần không tô đậm phía trên trục hoành là: $S = \int_{-1}^1 (\sqrt{2 - x^2} - x^2) dx$

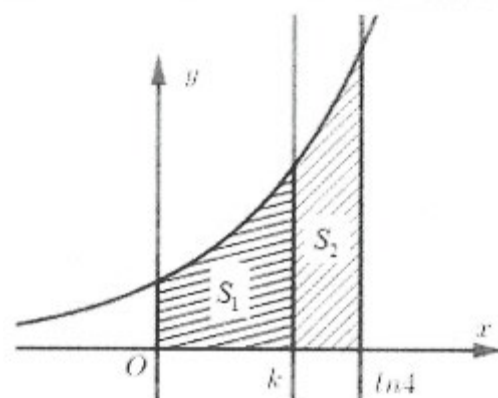
$$= \int_{-1}^1 \sqrt{2 - x^2} dx - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 \xrightarrow{x = \sqrt{2} \sin t} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2 - 2 \sin^2 t} d(\sqrt{2} \sin t) - \frac{2}{3} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos^2 t dt - \frac{2}{3}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt - \frac{2}{3} = \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$$

Diện tích nửa đường tròn là $S' = \frac{\pi R^2}{2} = \pi$.

Khi đó $S_{(H)} = 2(S' - S) = 2\left(\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right) = \pi - \frac{2}{3}$. **Chọn C.**

Ví dụ 10: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



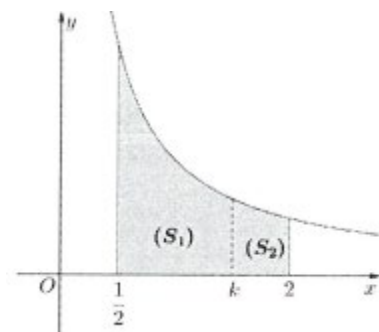
- A. $k = \frac{2}{3} \ln 4$ B. $k = \ln 2$
C. $k = \ln \frac{8}{3}$ D. $k = \ln 3$

Lời giải

$$\text{Do } S_1 = 2S_2 \Rightarrow S_1 = \frac{2}{3}S = \frac{2}{3} \int_0^{\ln 4} |e^x| dx = \frac{2}{3} \int_0^{\ln 4} e^x dx = \frac{2}{3} e^x \Big|_0^{\ln 4} = 2.$$

Do đó $S_1 = \int_0^k |e^x| dx = e^k - 1 = 2 \Leftrightarrow e^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3$. **Chọn D.**

Ví dụ 11: Cho hình thang (H) giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$ và trục hoành. Đường thẳng $x = k$ ($\frac{1}{2} < k < 2$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ dưới đây. Tìm tất cả giá trị thực của k để $S_1 = 3S_2$



A. $k = \sqrt{2}$

B. $k = 1$

C. $k = \frac{7}{5}$

D. $k = \sqrt{3}$

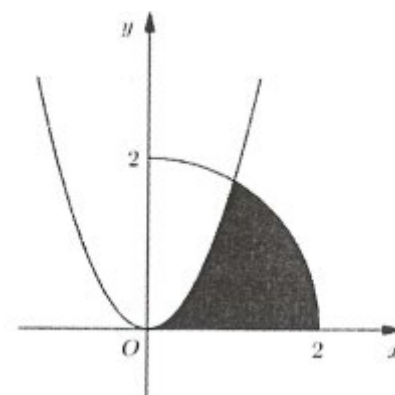
Lời giải

Gọi S là diện tích hình $(H) \Rightarrow S = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} dx = 2 \ln 2$.

Lại có $S_2 = \int_k^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 - \ln k = \frac{1}{4} S = \frac{\ln 2}{2} \Rightarrow \ln k = \frac{\ln 2}{2} = \ln \sqrt{2} \Rightarrow k = \sqrt{2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 12: [Đề tham khảo Bộ giáo dục và Đào tạo 2018] Cho (H)

là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng:



A. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$

B. $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$

D. $\frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là: $\sqrt{3}x^2 = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 3x^4 = 4 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Dựa vào hình vẽ ta có: $S = \int_0^1 \sqrt{3}x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \sqrt{3} \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + I_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} + I_1$.

Với $I_1 = \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx$, sử dụng CASIO hoặc đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$

$$\text{Đổi cận} \left\{ \begin{array}{l} x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{6} \\ x=2 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{array} \right. \Rightarrow I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1+\cos 2t) dt = (2t - \sin 2t) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{6}(4\pi - 3\sqrt{3}). \text{ Do đó } S = \frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}. \text{ Chọn B.}$$

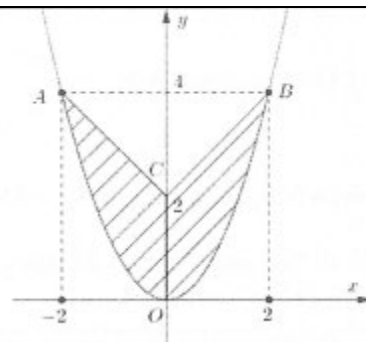
Ví dụ 13: Tính diện tích S của phần hình phẳng giới hạn bởi đường Parabol đi qua gốc tọa độ và hai đoạn thẳng AC và BC như hình vẽ bên:

A. $S = \frac{25}{6}$

B. $S = \frac{20}{3}$

C. $S = \frac{10}{3}$

D. $S = 9$



Lời giải

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = x + 2, x = 0, x = 2$.

$$\Rightarrow S_1 = \int_0^2 (x + 2 - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} = \frac{10}{3}.$$

Khi đó diện tích hình phẳng phần gạch chéo là $S = 2 \cdot S_1 = \frac{20}{3}$. **Chọn B.**

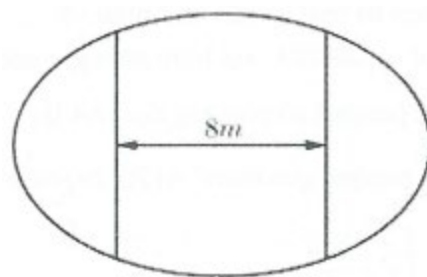
Ví dụ 14: Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16m và có độ dài trục bé bằng 10m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/1 m^2 .
Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

A. 7.862.000 đồng

B. 7.653.000 đồng

C. 7.128.000 đồng

D. 7.826.000 đồng



Lời giải

Chọn hệ trục như hình vẽ với $2a = 16; 2b = 10$

Suy ra $a = 8; b = 5$.

Khi đó phương trình elip là: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Xét đường cong nằm phía trên trục Ox có phương trình là $y = 25\sqrt{1 - \frac{x^2}{64}}$.

Ta có: $S = 5 \int_{-4}^4 \sqrt{1 - \frac{x^2}{64}} dx$. Đặt $\sin t = \frac{x}{8} \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right)$ suy ra $\cos t dt = \frac{1}{8} dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x = -4 \Rightarrow \sin t = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6} \\ x = 4 \Rightarrow \sin t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{cases}$. Do đó

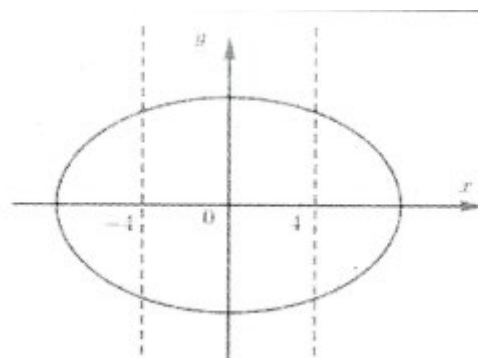
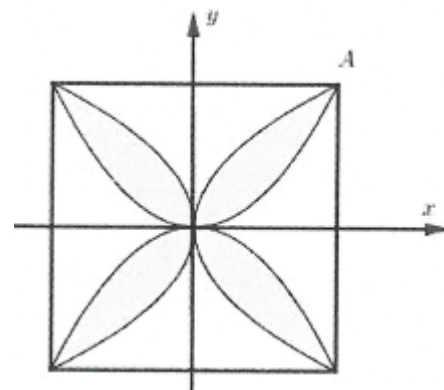
$$S = 5 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot 8 \cos t dt = 40 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt$$

$$= 20 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = 5 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{20\pi}{3} + 10\sqrt{3}.$$

Vậy diện tích trông hoa là $S_T = 2S = \frac{40\pi}{3} + 20\sqrt{3} (m^2)$.

Do đó số tiền ông An cần để trông hoa là:

$T = S_T \cdot 100.000 \approx 7.653.000$. **Chọn B.**



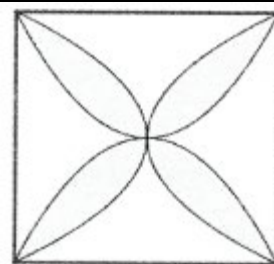
Ví dụ 15: Một viên gạch hoa hình vuông có cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm của viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô màu sẫm như hình vẽ bên). Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

A. $\frac{800}{3} cm^2$

B. $\frac{400}{3} cm^2$

C. $250 cm^2$

D. $800 cm^2$



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:

Với $A(20;20)$, xét hình phẳng ở góc phần tư thứ nhất.

Hai parabol có phương lần lượt là: $y = ax^2$ và $x = ay^2$

Do parabol qua điểm $A(20;20) \Rightarrow a = \frac{20}{20^2} = \frac{1}{20}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{20} \\ y = \sqrt{20x} \end{cases}$$

Diện tích phần tô đậm ở góc phần tư thứ nhất là:

$$S = \int_0^{20} \left(\sqrt{20x} - \frac{x^2}{20} \right) dx = \left(\frac{2}{3} \sqrt{20x^3} - \frac{x^3}{60} \right) \Big|_0^{20} = \frac{400}{3}. \text{ Chọn B.}$$

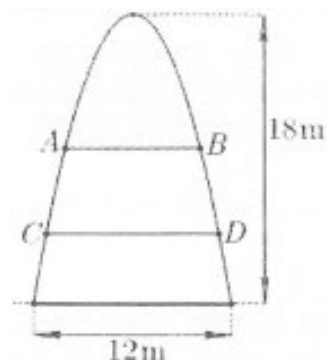
Ví dụ 16: Một cổng chào có dạng hình parabol chiều cao 18m, chiều rộng chân đế 12m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB , CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng:

A. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

B. $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

D. $\frac{4}{5}$



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Parabol có dạng $y = ax^2$, do (P) đi qua điểm $(6;18) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Diện tích thiết diện của cổng chào là: $S_0 = \int_{-6}^6 \left(18 - \frac{x^2}{2} \right) dx = 144$.

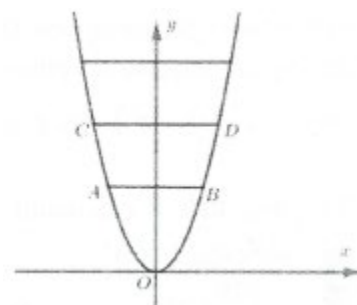
Để diện tích 3 phần bằng nhau thì diện tích mỗi phần là $\frac{S_0}{3} = 48$.

Gọi $B\left(b; \frac{b^2}{2}\right); D\left(d; \frac{d^2}{2}\right)$ khi đó $\frac{AB}{CD} = \frac{b}{d}$

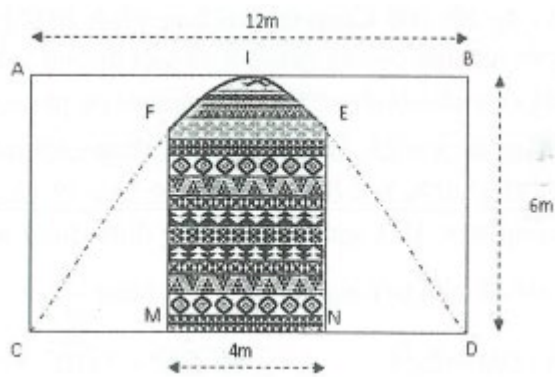
Ta có: $\int_0^b \left(\frac{b^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 24 \Leftrightarrow \left(\frac{b^2x}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^b = 24 \Rightarrow b^3 = 72$

Tương tự ta có $\int_0^d \left(\frac{d^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 48 \Rightarrow d^3 = 144 \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **Chọn**

A.



Ví dụ 17: [Đề Sở GD&ĐT Thanh Hóa] Một công ty quảng cáo X muốn làm một bức tranh trang trí hình $MNEIF$ ở chính giữa một tường hình chữ nhật $ABCD$ có chiều cao $BD = 6\text{m}$, chiều dài $CD = 12\text{m}$ (hình vẽ bên). Cho biết $MNEF$ là hình chữ nhật có $MN = 4\text{m}$, cung EIF có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D . Kinh phí làm bức tranh là 900.000 đồng/ m^2 . Hỏi công ty X cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó?



- A. 20.400.000 đồng B. 20.600.000 đồng
C. 20.800.000 đồng D. 21.200.00 đồng

Lời giải

Gọi O là trung điểm của MN và trùng với gốc tọa độ $\Rightarrow M(-2;0), N(2;0)$.

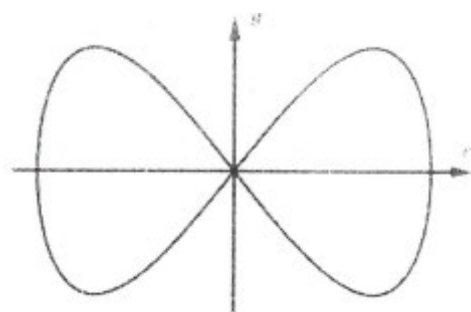
Phương trình parabol đỉnh $I(0;6)$ và đi qua hai điểm $C(-6;0), D(6;0)$ là $(P): y = 6 - \frac{1}{6}x^2$.

Diện tích bức tranh là diện tích giới hạn bởi hàm số $y = f(x) = 6 - \frac{x^2}{6}$ và $x = -2, x = 2$.

$$\text{Khi đó } S = \int_{-2}^2 \left| 6 - \frac{x^2}{6} \right| dx = \left| \int_{-2}^2 \left(6 - \frac{x^2}{6} \right) dx \right| = \left| \left(6x - \frac{x^3}{18} \right) \right|_{-2}^2 = \frac{208}{9} (\text{m}^2).$$

Số tiền công ty X cần dùng để làm bức tranh là $T = \frac{208}{9} \times 900.000 = 20.800.000$ đồng. **Chọn C.**

Ví dụ 18: [Đề Chuyên Đại học Vinh 2017] Trong công viên Toán học có những mảnh đất hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemniscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2(25 - x^2)$ như hình vẽ bên.



Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ trục tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.

- A. $S = \frac{125}{6} (\text{m}^2)$ B. $S = \frac{125}{4} (\text{m}^2)$
C. $S = \frac{250}{3} (\text{m}^2)$ D. $S = \frac{125}{3} (\text{m}^2)$

Lời giải

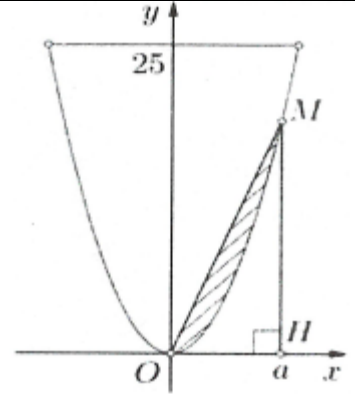
Hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là $x = 0; x = -5; x = 5$.

Dễ thấy diện tích mảnh đất Bernoulli bao gồm diện tích 4 mảnh đất nhỏ bằng nhau.

Xét diện tích s của mảnh đất nhỏ trong góc phần tư thứ nhất ta có:

$$4y = x\sqrt{25-x^2}; x \in [0; 5] \Rightarrow s = \frac{1}{4} \int_0^5 x\sqrt{25-x^2} dx = \frac{125}{12} \Rightarrow S = 4 \cdot \frac{125}{12} = \frac{125}{3} (m^2). \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 19: [Đề Chuyên Đại học Vinh 2017] Ông B có một khu vườn giới hạn bởi đường parabol và một đường thẳng. Nếu đặt trong hệ tọa độ Oxy như hình vẽ bên thì parabol có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng là $y = 25$. Ông B dự định dùng một mảnh vườn nhỏ được chia từ khu vườn bởi đường thẳng đi qua O và điểm M trên parabol để trồng hoa. Hãy giúp ông B xác định điểm M bằng cách tính độ dài OM để diện tích mảnh vườn nhỏ bằng $\frac{9}{2}$.



- A. $OM = 2\sqrt{5}$ B. $OM = 3\sqrt{10}$
C. $OM = 15$ D. $OM = 10$

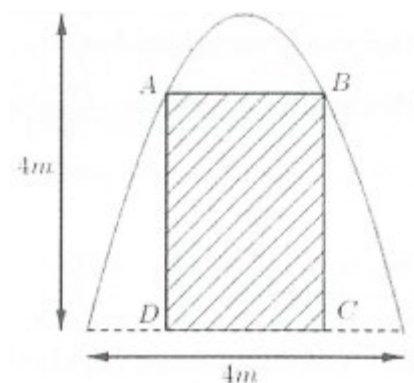
Lời giải

Giả sử $M(a; a^2)$, suy ra phương trình $OM: y = ax$.

$$\text{Diện tích khu vườn là } S = \int_0^a (ax - x^2) dx = \left(a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{a^3}{6} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow a = 3.$$

Khi đó $OM = \sqrt{a^2 + a^4} = \sqrt{9 + 81} = 3\sqrt{10}$. **Chọn B.**

Ví dụ 20: Trong đợt hội trại “Khi tôi 18” được tổ chức tại THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi ảnh dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 100.000 đồng cho một m^2 bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng nghìn)



- A. 615.000 đồng B. 450.000 đồng
C. 451.00 đồng D. 616.000 đồng

Lời giải

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol có phương trình $y = 4 - x^2$ và trục hoành.

$$\text{Suy ra } S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \frac{32}{3} m^2.$$

Gọi điểm $C(a;0), a > 0$, suy ra $\begin{cases} D(-a;0) \\ B(a;4-a^2), A(-a;4-a^2) \end{cases}$.

Gọi S_1 là diện tích $ABCD$, suy ra $S_1 = AB \cdot BC = 2a(4-a^2)m^2$.

Gọi S_2 là diện tích có hoa văn, suy ra $S_2 = S - S_1$; S_2 nhỏ nhất khi và chỉ khi S_1 lớn nhất.

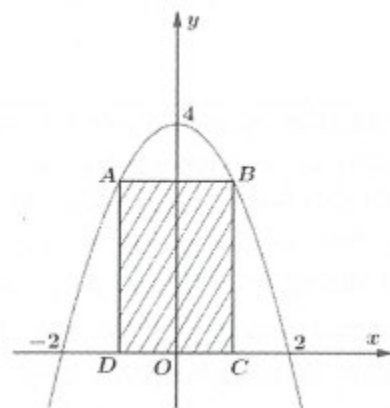
Xét hàm số $f(a) = 2a(4-a^2), a \in (0;4)$

Ta có $f'(a) = 8-6a^2 \Rightarrow f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Xét bảng biến thiên hàm số $f(a)$ với $a \in (0;4)$.

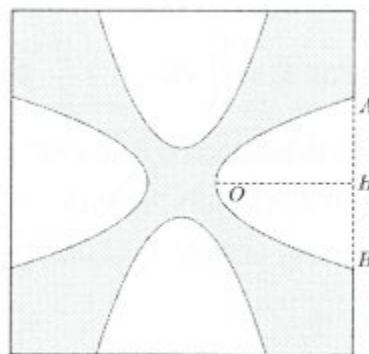
Ta có $\max_{(0;4)} f(a) = f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{32\sqrt{3}}{9} \Rightarrow S_1(\max) = \frac{32\sqrt{3}}{9}m^2$.

Suy ra $S_2(\min) = \frac{32}{3} - \frac{32\sqrt{3}}{9} \approx 4,51m^2$. Suy ra số tiền ít nhất cần là 451.000 đồng. **Chọn C.**



Ví dụ 21: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh 10(cm) bằng cách khoét bỏ đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết rằng $AB = 5(cm)$ đồng thời $OH = 4(cm)$. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó?

- A. $\frac{140}{3}(cm^2)$ B. $\frac{160}{3}(cm^2)$
C. $\frac{40}{3}(cm^2)$ D. $50(cm^2)$



Lời giải

Dựa vào đề bài ta tính được

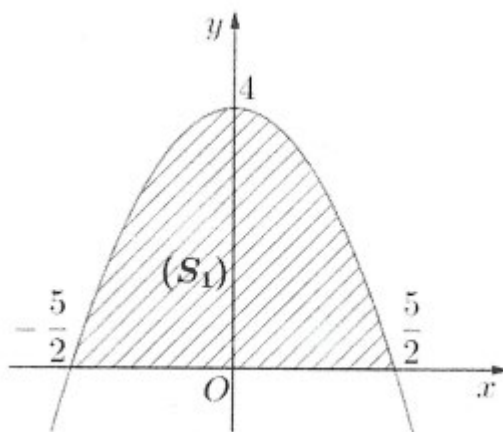
Parabol có PT (P): $y = -\frac{16}{25}x^2 + 4$.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng trong hình bên

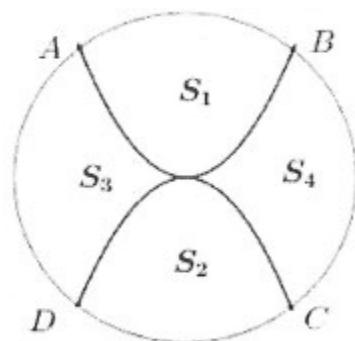
Suy ra $S_1 = \int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} \left(-\frac{16}{25}x^2 + 4\right) dx = \frac{40}{3}(cm^3)$.

Gọi S là diện tích hoa văn cần tính

Suy ra $S = 10^2 - 4S_1 = \frac{140}{3}(cm^3)$. **Chọn A.**



Ví dụ 22: Sân trường có một bồn hoa hình tròn có tâm O . Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định chia bồn hoa thành bốn phần, bởi hai đường parabol có cùng đỉnh O và đối xứng nhau qua O . Hai đường parabol này cắt đường tròn tại bốn điểm A, B, C, D tạo thành một hình vuông có cạnh bằng $4m$ (như hình vẽ). Phần diện tích S_1, S_2 dùng để trồng hoa, phần diện tích S_3, S_4 dùng để trồng cỏ (Diện tích làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Biết kinh phí để trồng hoa là $150.000 \text{ đồng}/1m^2$, kinh phí để trồng cỏ là $100.000 \text{ đồng}/1m^2$. Hỏi nhà trường cần bao nhiêu tiền để trồng bồn hoa đó? (Số tiền làm tròn đến hàng chục nghìn).

- A. 6.060.000 đồng B. 5.790.000 đồng
C. 3.270.000 đồng D. 3.000.000 đồng

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ $O(0;0); A(-2;2); B(2;2)$

Khi đó phương trình parabol phía trên có dạng là:

$$(P): y = ax^2 \text{ trong đó } B(2;2) \in (P) \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } (P): y = \frac{x^2}{2}.$$

Phương trình cung tròn nằm phía trên trục Ox là

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{OA^2 - x^2} = \sqrt{8 - x^2}$$

$$\text{Khi đó } S_1 = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx.$$

$$\text{Diện tích hình tròn là } S = \pi R^2 = \pi OA^2 = 8\pi$$

$$\text{Ta có } T = 150.2S_2 + 100.(S - 2S_1)$$

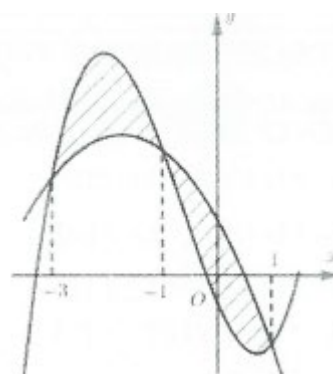
$$\text{Bấm máy ta được } T = 150.2S_1 + 100.(S - 2S_1) \approx 3.270 \text{ nghìn đồng. Chọn C.}$$

Ví dụ 23: [Đề thi THPT Quốc gia năm 2018] Cho hai hàm số

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2} \text{ và } g(x) = dx^2 + ex + 1 \quad (a, b, c, d, e \in \mathbb{R}). \text{ Biết rằng}$$

đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng:

- A. $\frac{9}{2}$ B. 8



C. 4

D. 5

Lời giải

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai hàm số là:

$$ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2} = dx^2 + ex + 1 \Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} = 0$$

Vì phương trình có các nghiệm $-3; -1; 1$ nên: $ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} = a(x+3)(x+1)(x-1)$

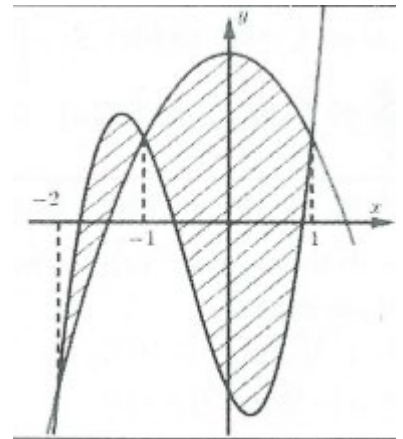
$$\Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} = a(x^3 + 3x^2 - x - 3)$$

Đồng nhất hệ số ta được:
$$\begin{cases} b-d=3a \\ c-e=-a \\ \frac{-3}{2}=-3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b-d=\frac{3}{2} \\ c-e=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ (thực ra chỉ cần tìm được } a=\frac{1}{2})$$

Suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \frac{1}{2} \int_{-3}^1 |x^3 + 3x^2 - x - 3| dx = 4$. **Chọn C.**

Ví dụ 24: [Đề thi THPT Quốc gia năm 2018] Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-2; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng:

- A. $\frac{37}{6}$ B. $\frac{13}{2}$
C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{37}{12}$

**Lời giải**

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai hàm số là:

$$ax^3 + bx^2 + cx - 2 = dx^2 + ex + 2 \Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = 0$$

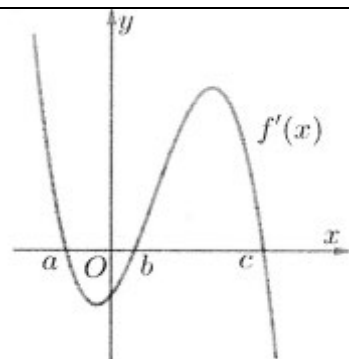
Vì phương trình có các nghiệm $-2; -1; 1$ nên: $ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = a(x+2)(x+1)(x-1)$

Đồng nhất hệ số ta được: $a = 2$

Suy ra diện tích hình phẳng cần tìm: $S = 2 \int_{-2}^1 |(x+2)(x+1)(x-1)| dx = \frac{37}{6}$. **Chọn A.**

Ví dụ 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ thỏa mãn $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $f(c) > f(a) > f(b)$ B. $f(c) > f(b) > f(a)$
C. $f(a) > f(b) > f(c)$ D. $f(b) > f(a) > f(c)$



Lời giải

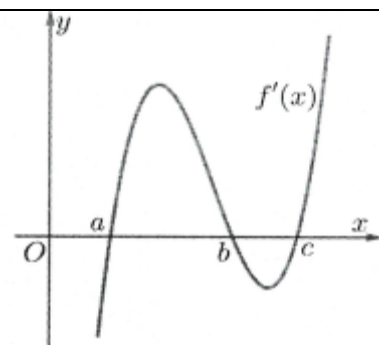
Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \{a; b; c\}$. Dựa vào BBT, ta thấy $f(b) < \{f(a); f(c)\}$.

Lại có $S_1 = \int_a^b |f'(x)| dx < S_2 = \int_b^c |f'(x)| dx \Leftrightarrow -f(x)|_a^b < f(x)|_b^c \Leftrightarrow f(a) < f(c)$.

Vậy $f(c) > f(a) > f(b)$. **Chọn A.**

Ví dụ 26: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như trong hình vẽ. Hỏi phương trình $f(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm biết $f(a) > 0$?

- A. 3 B. 2
C. 1 D. 0



Lời giải

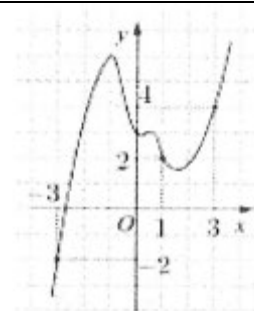
Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \{a; b; c\}$. Dựa vào BBT, ta thấy $f(b) > \{f(a); f(c)\}$.

Lại có $S_1 = \int_a^b |f'(x)| dx > S_2 = \int_b^c |f'(x)| dx \Leftrightarrow f(x)|_a^b > -f(x)|_b^c \Leftrightarrow f(a) < f(c)$.

Do đó $f(b) > f(c) > f(a) > 0$. Vậy phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm. **Chọn D.**

Ví dụ 27: (Đề thi THPT Quốc gia 2017 – Mã đề 102) Cho $y = f(x)$ có đồ thị của $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào đúng?

- A. $g(3) > g(-3) > g(1)$ B. $g(-3) > g(3) > g(1)$
C. $g(1) > g(-3) > g(3)$ D. $g(1) > g(3) > g(-3)$



Lời giải

Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1$.

Nhận thấy nghiệm của $g'(x) = 0$ chính là nghiệm của $f'(x) = x+1$, cũng là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x+1 \longrightarrow x = \{-3; 1; 3\}$.

Vẽ đường thẳng $y = x + 1$ và chia đồ thị thành 2 phần diện tích hình phẳng.

$$\text{Khi đó } 2S_1 = 2 \int_{-3}^1 [f'(x) - (x+1)] dx = \int_{-3}^1 g'(x) dx = g(1) - g(-3) > 0 \Rightarrow g(1) > g(-3)$$

$$\text{Và } 2S_2 = 2 \int_1^3 [(x+1) - f'(x)] dx = - \int_1^3 g'(x) dx = g(1) - g(3) > 0 \Rightarrow g(1) > g(3)$$

$$\text{Lại có } S_1 > S_2 \Leftrightarrow 2S_1 > 2S_2 \Leftrightarrow g(1) - g(-3) > g(1) - g(3) \Leftrightarrow g(3) > g(-3).$$

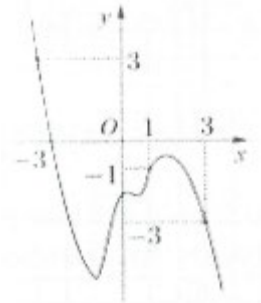
Vậy $g(1) > g(3) > g(-3)$. **Chọn D.**

Ví dụ 28: (Đề thi THPT Quốc gia 2017 – Mã đề 103) Cho $y = f(x)$ có đồ thị của

$y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = 2f(x) + x^2$. Mệnh đề nào đúng?

A. $g(3) > g(-3) > g(1)$ **B.** $g(-3) > g(3) > g(1)$

C. $g(1) > g(-3) > g(3)$ **D.** $g(1) > g(3) > g(-3)$



Lời giải

$$\text{Ta có } g'(x) = 2f'(x) + 2x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x.$$

Nhận thấy nghiệm của $g'(x) = 0$ chính là nghiệm của $f'(x) = -x$ cũng là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = -x \longrightarrow x = \{-3; 1; 3\}$.

Vẽ đường thẳng $y = -x$ và chia đồ thị thành 2 phần diện tích hình phẳng.

$$\text{Khi đó } 2S_1 = 2 \int_{-3}^1 [-x - f'(x)] dx = - \int_{-3}^1 g'(x) dx = g(-3) - g(1) > 0 \Rightarrow g(-3) > g(1)$$

$$\text{Và } 2S_2 = 2 \int_1^3 [f'(x) - (-x)] dx = \int_1^3 g'(x) dx = g(3) - g(1) > 0 \Rightarrow g(3) > g(1).$$

$$\text{Lại có } S_1 > S_2 \Leftrightarrow 2S_1 > 2S_2 \Leftrightarrow g(-3) - g(1) > g(3) - g(1) \Leftrightarrow g(-3) > g(3).$$

Vậy $g(-3) > g(3) > g(1)$. **Chọn B.**

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, trục hoành, các đường thẳng $x = a, x = b$ được xác định bằng công thức nào?

A. $S = -\int_a^b f(x) dx$ B. $S = \int_b^a f(x) dx$ C. $S = \int_a^b f(x) dx$ D. $S = \int_a^b |f(x)| dx$

Câu 2: Công thức tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ và các đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$) là công thức nào sau đây?

A. $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$ B. $S = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)| dx$
C. $S = \left| \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx \right|$ D. $S = \int_a^b |f_1(x) + f_2(x)| dx$

Câu 3: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = 2 - x$ và $y = 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (x - 2) dx$ B. $S = \left| \int_0^2 (x^2 + x - 2) dx \right|$
C. $S = \frac{1}{2} + \int_0^1 x^2 dx$ D. $S = \int_0^1 |x^2 - (2 - x)| dx$

Câu 4: Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^3 - x, y = 2x$ và các đường $x = -1, x = 1$ được xác định bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \left| \int_{-1}^1 (3x - x^3) dx \right|$ B. $S = \int_{-1}^1 (3x - x^3) dx$
C. $S = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) dx + \int_0^1 (3x - x^3) dx$ D. $S = \int_{-1}^0 (3x - x^3) dx + \int_0^1 (x^3 - 3x) dx$

Câu 5: Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đồ thị của hai hàm số $y = \sqrt{2}x, y = 4 - x$ và trục hoành Ox được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $S = \int_0^4 \sqrt{2}x dx + \int_0^4 (4 - x) dx$ B. $S = \int_0^2 \sqrt{2}x dx + \int_2^4 (4 - x) dx$
C. $S = \int_0^4 (\sqrt{2}x - 4 + x) dx$ D. $S = \int_0^2 (4 - x - \sqrt{2}x) dx$

Câu 6: Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường $y = x^2 - x, y = 0, x = 0$ và $x = 2$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \int_0^2 (x - x^2) dx$

B. $S = \int_1^2 (x^2 - x) - \int_0^1 (x^2 - x) dx$

C. $S = \int_0^1 (x^2 - x) + \int_1^2 (x^2 - x) dx$

D. $S = \int_0^2 (x^2 - x) dx$

Câu 7: Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^2$ và $y = 2 - x^2$ được xác định bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx$

B. $S = 4 \int_0^1 (1 - x^2) dx$

C. $S = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx$

D. $S = 2 \int_0^1 (x^2 - 1) dx$

Câu 8: Hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = -1, x = 2, y = 0, y = x^2 - 2x$ có diện tích S được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S = \int_{-1}^2 (x^2 - 2x) dx$

B. $S = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx$

C. $S = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (x^2 - 2x) dx$

D. $S = \int_{-1}^2 |x^2 - 2x| dx$

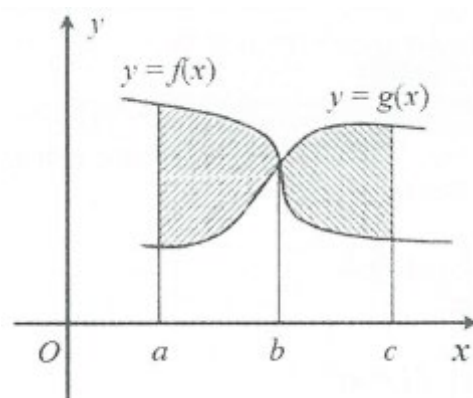
Câu 9: Tìm công thức tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ như hình vẽ dưới đây.

A. $S = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^b [g(x) - f(x)] dx$

B. $S = \int_a^c [g(x) - f(x)] dx + \int_c^b [f(x) - g(x)] dx$

C. $S = \left| \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \right|$

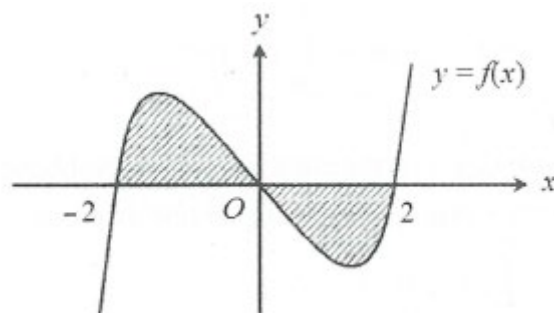
D. $S = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$



Câu 10: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng S (phần tô đậm trong hình) được xác định bằng công thức nào?

A. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx$

B. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx$



$$\text{C. } S = \left| \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx \right|$$

$$\text{D. } S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx$$

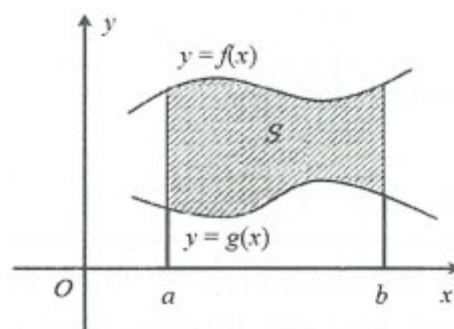
Câu 11: Công thức nào sau đây dùng để tính diện tích hình phẳng S phần gạch của hình vẽ.

$$\text{A. } S = \left| \int_a^b g(x) dx \right| - \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$\text{B. } S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{C. } S = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{D. } S = \int_a^b g(x) dx + \int_a^b f(x) dx$$



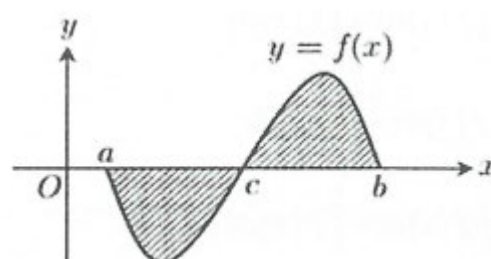
Câu 12: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a, x = b$ (như bên dưới). Hỏi cách tính S nào dưới đây **đúng**?

$$\text{A. } S = \left| \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right|$$

$$\text{B. } S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\text{C. } S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\text{D. } S = \int_a^b f(x) dx$$



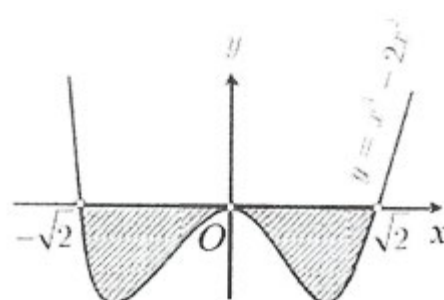
hàm
hình

Câu 13: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm $y = x^4 - 2x^2$ và trục hoành như hình vẽ. Tìm khẳng định sai?

$$\text{A. } S = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} |f(x)| dx$$

$$\text{B. } S = 2 \left| \int_0^{\sqrt{2}} f(x) dx \right|$$

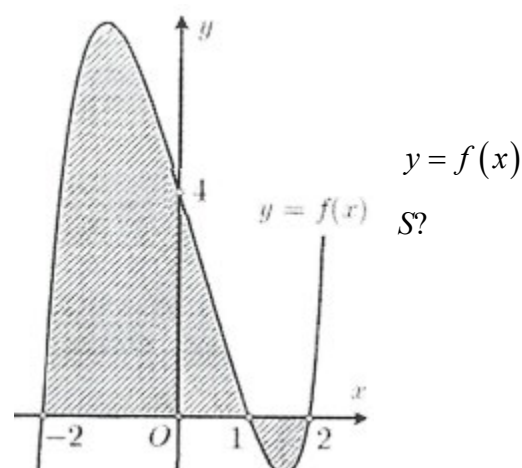
$$\text{C. } S = -2 \int_0^{\sqrt{2}} f(x) dx$$



số

D. $S = - \int_{-\sqrt{2}}^0 f(x) dx - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x) dx$

Câu 14: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục hoành (như hình vẽ). Công thức nào dùng để tính diện tích



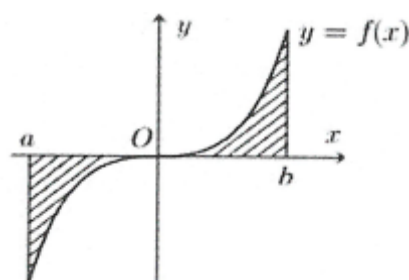
A. $S = \int_{-2}^2 f(x) dx$

B. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$

C. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$

D. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx$

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai thẳng $x = a, x = b$ (như hình vẽ bên dưới). Giả sử S_D là diện tích của hình phẳng D . Chọn công thức đúng trong các phương án A, B, C, D dưới đây?



D là
đường
tích của

A. $S_D = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$

B. $S_D = - \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$

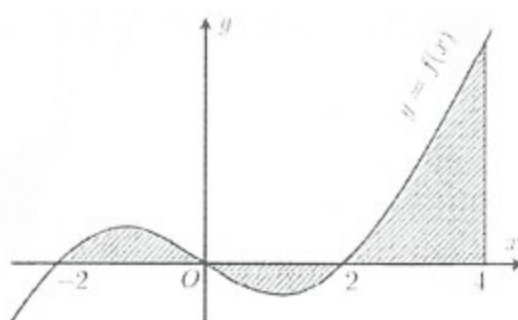
C. $S_D = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx$

D. $S_D = - \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx$

Câu 16: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng (phần gạch chéo) trong hình được tính theo công thức:

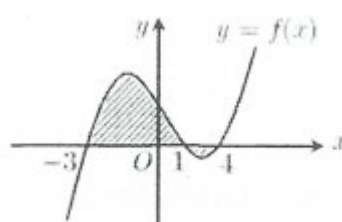
A. $S = \int_{-2}^4 f(x) dx$

B. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx$



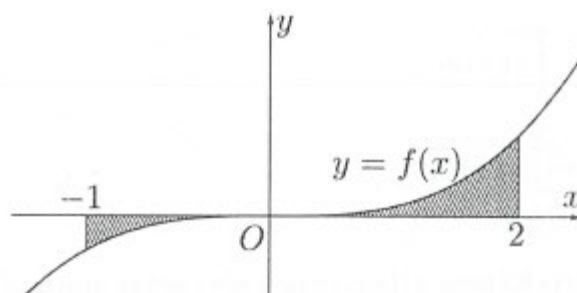
C. $S = \left| \int_{-2}^0 f(x) dx \right| + \left| \int_0^4 f(x) dx \right|$

D. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx$



Câu 17: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành (phần gạch sọc trong hình vẽ). Đặt $a = \int_{-3}^1 f(x) dx, b = \int_1^2 f(x) dx$. Mệnh đề

nào **đúng**?



A. $a + b$

B. $a - b$

C. $b - a$

D. $-b - a$

Câu 18: Gọi S là diện tích hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$ (như hình vẽ). Đặt

$a = \int_{-1}^0 f(x) dx, b = \int_0^2 f(x) dx$. Mệnh đề nào dưới đây

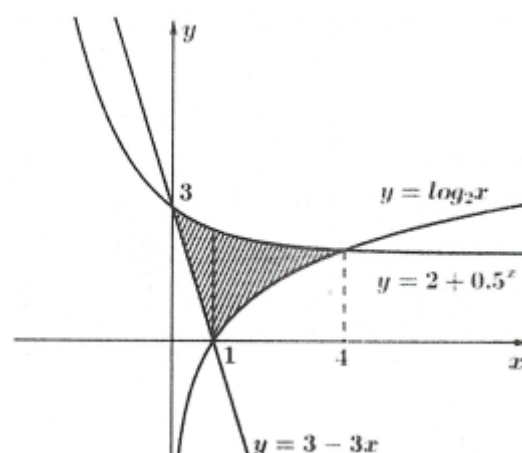
đúng?

A. $S = -a - b$

B. $S = a - b$

C. $S = b + a$

D. $S = b - a$



Câu 19: Tìm công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi phần gạch sọc trong hình vẽ.

A. $S = \int_1^3 (3x + 0,5^x - 1) dx + \int_1^4 (\log_2 x - 0,5^x - 2) dx$

B. $S = \int_1^3 (3x + 0,5^x + 1) dx + \int_1^4 (\log_2 x - 0,5^x - 2) dx$

C. $S = \int_0^1 (3x + 0,5^x - 1) dx - \int_1^4 (\log_2 x - 0,5^x - 2) dx$

D. $S = \int_0^1 (3x + 0,5^x - 1) dx + \int_1^4 (\log_2 x - 0,5^x - 2) dx$

Câu 20: Kí hiệu S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $x = g(y)$, trục tung và hai đường thẳng $y = a, y = b$ như hình. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $S = \int_a^b g(y) dx$ B. $S = \int_b^a g(y) dy$

C. $S = \int_a^b g(y) dy$ D. $S = \left| \int_a^b g(y) dx \right|$

Câu 21: Kí hiệu S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $x = f(y), x = g(y)$ và hai đường thẳng $y = a, y = b$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $S = \int_a^c [g(y) - f(y)] dx + \int_c^b [f(y) - g(y)] dx$

B. $S = \left| \int_a^b [g(y) + f(y)] dy \right|$

C. $S = \int_a^c [g(y) - f(y)] dy + \int_c^b [f(y) - g(y)] dy$

D. $S = \left| \int_a^b [g(y) - f(y)] dy \right|$

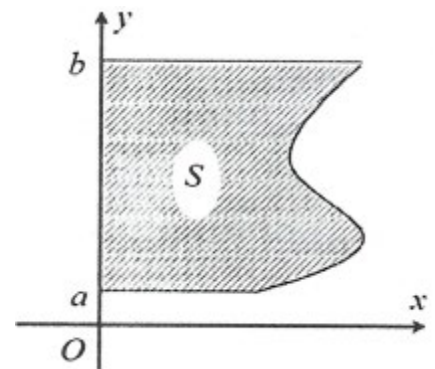
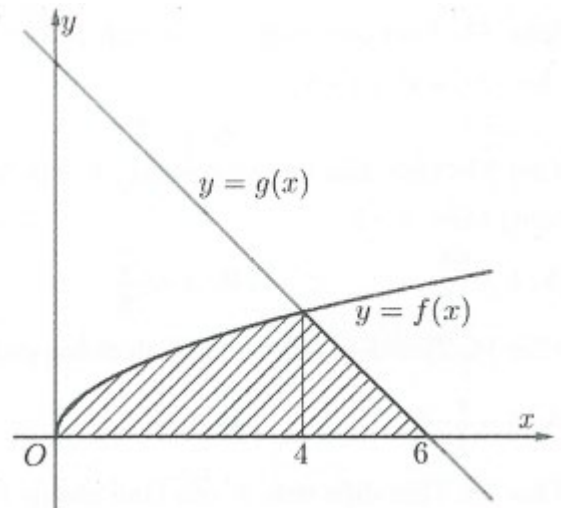
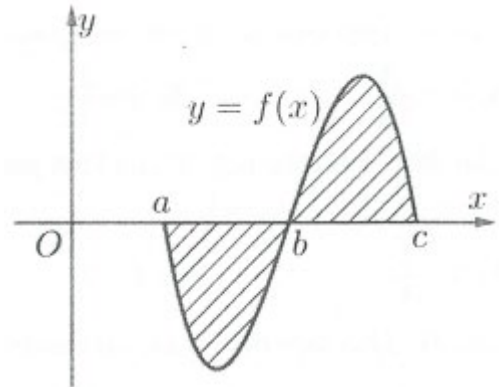
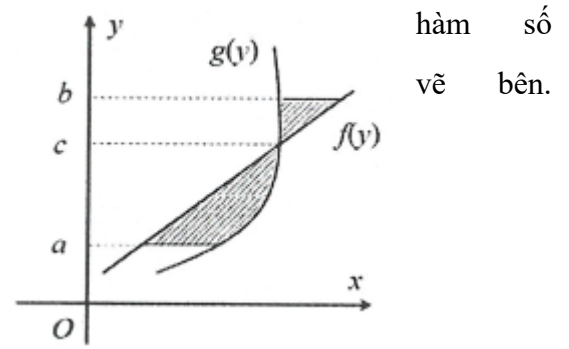
Câu 22: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a, x = b$

(như hình bên). Biết $\int_a^b f(x) dx = -3$ và $\int_b^c f(x) dx = 5$. Tìm S .

A. $S = 3$ B. $S = 5$
C. $S = 8$ D. $S = 2$

Câu 23: Cho hai hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ và $g(x) = 6 - x$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là diện tích hình phẳng (phần gạch chéo) trong hình. Công thức nào sau đây **sai**?

A. $S = \int_0^4 f(x) dx + \int_4^6 g(x) dx$



$$\text{B. } S = \int_0^6 |f(x) - g(x)| dx$$

$$\text{C. } S = \int_0^2 |y^2 - 6y + y| dy$$

$$\text{D. } S = \int_0^2 (6 - y - y^2) dy$$

Câu 24: Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đồ thị của các đường $y = x^2 - 4x + 1$, $y = m$ ($m \leq -3$) và $x = 0, x = 3$.

$$\text{A. } S = 3m + 6$$

$$\text{B. } S = 6 - 3m$$

$$\text{C. } S = 3m - 6$$

$$\text{D. } S = -3m - 6$$

Câu 25: Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đồ thị của các đường $y = \frac{10}{3}x - x^2$ và

$$y = \begin{cases} -x & \text{khi } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}.$$

$$\text{A. } S = 13$$

$$\text{B. } S = \frac{15}{2}$$

$$\text{C. } S = \frac{13}{2}$$

$$\text{D. } S = 7$$

Câu 26: (Đề thi minh họa – Bộ GD&ĐT 2017) Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

$$\text{A. } S = \frac{37}{12}$$

$$\text{B. } S = \frac{9}{4}$$

$$\text{C. } S = \frac{81}{12}$$

$$\text{D. } S = 13$$

Câu 27: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ và đồ thị hàm số $y = x$.

$$\text{A. } S = 3$$

$$\text{B. } S = 4$$

$$\text{C. } S = 6$$

$$\text{D. } S = 8$$

Câu 28: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2 + x - 1$ và đường thẳng $y = 2x + 1$.

$$\text{A. } S = \frac{9}{2}$$

$$\text{B. } S = 4$$

$$\text{C. } S = \frac{11}{2}$$

$$\text{D. } S = 3$$

Câu 29: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và $y = x$.

$$\text{A. } S = -\frac{1}{6}$$

$$\text{B. } S = \frac{2}{3}$$

$$\text{C. } S = 1$$

$$\text{D. } S = \frac{1}{6}$$

Câu 30: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ và các đường thẳng $y = 0, x = -1, x = 1$.

$$\text{A. } S = \frac{2}{3}$$

$$\text{B. } S = 2$$

$$\text{C. } S = \frac{4}{3}$$

$$\text{D. } S = \frac{8}{3}$$

Câu 31: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2 - 5x + 3$ và $y = -2x^2 + 2x - 1$.

$$\text{A. } S = \frac{1}{54}$$

$$\text{B. } S = \frac{833}{54}$$

$$\text{C. } S = \frac{263}{162}$$

$$\text{D. } S = \frac{35}{54}$$

Câu 32: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^2 - x + 5$ và $y = -2x^3 + x^2 + x + 5$.

- A. $S = 1$ B. $S = 2$ C. $S = 3$ D. $S = 4$

Câu 33: Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = 2x^2$ và $y = x^4 - 2x^2$ trong miền $x > 0$.

- A. $S = \frac{64}{15}$ B. $S = \frac{32}{25}$ C. $S = \frac{32}{15}$ D. $S = \frac{15}{32}$

Câu 34: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = (e+1)x$ và $y = (1+e^x)x$.

- A. $S = \frac{e}{2} - 1$ B. $S = 1$ C. $S = \frac{3}{2}$ D. $S = 2e - 1$

Câu 35: Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$ và trục hoành.

- A. $S = \frac{20}{3}$ B. $S = \frac{25}{3}$ C. $S = \frac{16}{3}$ D. $S = \frac{22}{3}$

Câu 36: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$.

- A. $S = e^2 - 1$ B. $S = \frac{e^2 + 1}{4}$ C. $S = \frac{e^2 - 1}{2}$ D. $S = \frac{e^2 - 1}{4}$

Câu 37: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = (x-1)e^x$, $y = x^2 - 1$.

- A. $S = e + \frac{8}{3}$ B. $S = e + \frac{2}{3}$ C. $S = e - \frac{2}{3}$ D. $S = e - \frac{8}{3}$

Câu 38: Biết rằng hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = 2 - x$, $y = 0$, $x = k$, $x = 3$ với $k < 2$ và có diện tích bằng S_k . Xác định giá trị của k để $S_k = 16$.

- A. $k = 2 + \sqrt{15}$ B. $k = 2 + \sqrt{31}$ C. $k = 2 - \sqrt{15}$ D. $k = 2 - \sqrt{31}$

Câu 39: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \ln x$, $y = 0$, $x = k$ ($k > 1$). Tìm k để diện tích hình phẳng (H) bằng 1.

- A. $k = 2$ B. $k = e$ C. $k = e^3$ D. $k = e^2$

Câu 40: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ với $a < b$. Kí hiệu S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2f(x)$, $y = 2g(x)$, $x = a$ và $x = b$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) - 2$, $y = g(x) - 2$, $x = a$ và $x = b$. Chọn khẳng định đúng?

- A. $S_1 = S_2$ B. $S_1 = 2S_2$ C. $S_1 = 2S_2 - 2$ D. $S_1 = 2S_2 + 2$

Câu 41: Trong mặt phẳng tọa độ, cho hình chữ nhật (H) có một cạnh nằm trên trục hoành và có hai đỉnh trên một đường chéo là $A(-1;0)$ và $C(a;\sqrt{a})$ với $a > 0$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau, tìm a .

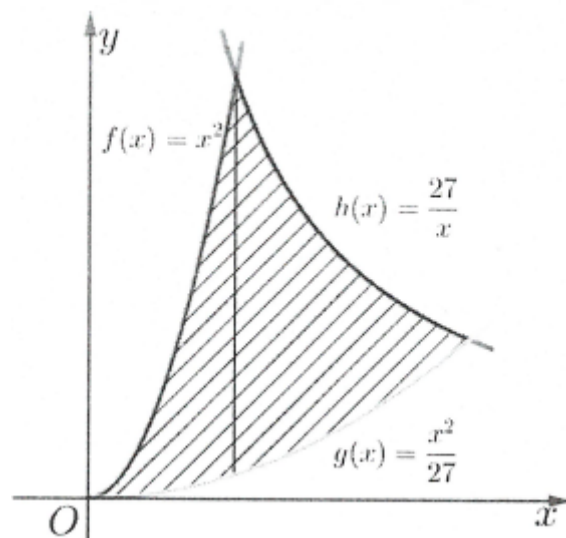
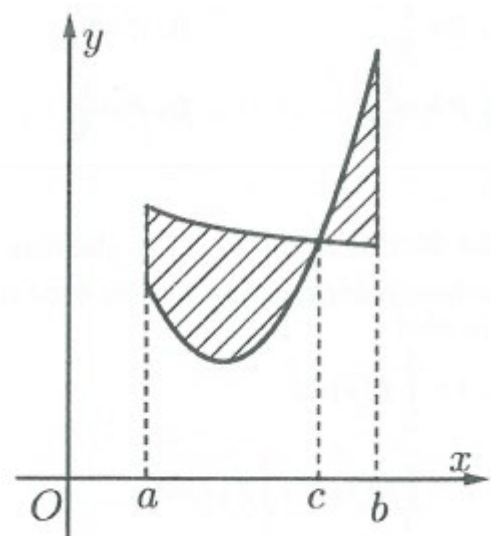
- A. $a = 9$ B. $a = 4$ C. $a = \frac{1}{2}$

Câu 42: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = \frac{2x-1}{x+1}$, tiệm cận ngang của đồ thị (C) , trục tung và đường thẳng $x = a$ ($a > 0$). Tìm a để $S = 3 \ln 5$.

- A. $a = 5$ B. $a = 4$ C. $a = 3$

Câu 43: Tính diện tích hình phẳng trong phần tô đậm của hình vẽ bên.

- A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{11}{3}$
C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{10}{3}$



Câu 44: Tìm công thức tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ như hình vẽ bên cạnh. Biết rằng $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a; b]$ và $f(x) \leq g(x), \forall x \in [c; d]$.

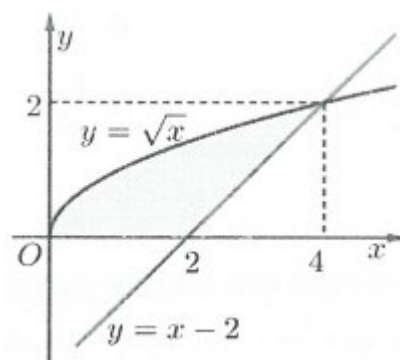
A. $S = \int_a^c [g(x) - f(x)] dx + \int_c^b [f(x) - g(x)] dx$

B. $S = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^b [g(x) - f(x)] dx$

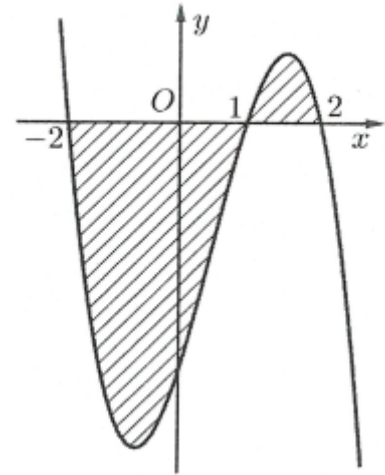
C. $S = \left| \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \right|$

D. $S = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$

Câu 45: Diện tích phần gạch chéo trong hình vẽ bằng bao nhiêu?



- A. $27\ln 2$
 B. $27\ln 3$
 C. $28\ln 3$
 D. $29\ln 3$



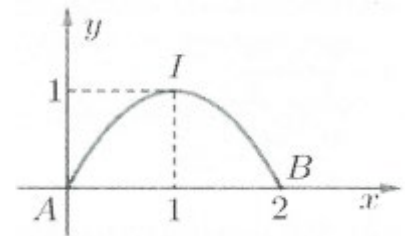
Câu 46: Diện tích hình phẳng tô đậm trong hình vẽ bằng bao

nhiều?

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{4}$
 C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 47: Biết diện tích phần gạch chéo của hình vẽ bên bằng

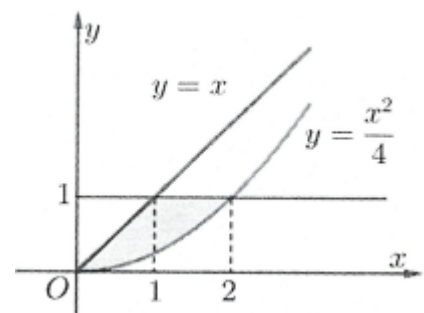
$ae + \frac{b}{e} + c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $P = a + b + c$.



- A. $P = \frac{1}{3}$ B. $P = 0$
 C. $P = -\frac{1}{2}$ D. $P = \frac{1}{5}$

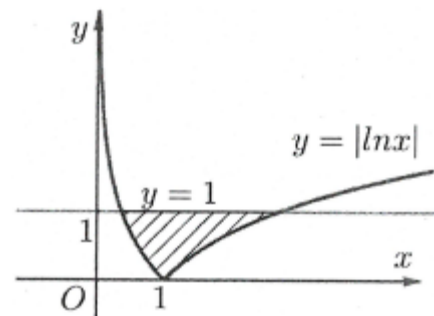
Câu 48: Cho đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ. Diện tích S của hình phẳng (phần gạch chéo) được xác định bởi công thức nào?

- A. $S = \int_{-2}^2 f(x) dx$
 B. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$
 C. $S = \int_1^{-2} f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$
 D. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$



Câu 49: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol như hình và trục hoành Ox .

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{17}{2}$



C. 9

D. $\frac{1}{9}$

Câu 50: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol như hình vẽ và đường thẳng $y = 3$.

A. $S = \frac{3}{4}$

B. $S = \frac{4}{3}$

C. $S = \frac{14}{3}$

D. $S = 6$

Câu 51: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và Ox , Oy . Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua hai điểm $A(0;1)$, $B\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

A. $1 - \ln 2$

B. $1 - \ln \frac{1}{2}$

C. $2 - \ln \frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2}$

Câu 52: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{2-x^2}$, đường thẳng $y = x$ và trục hoành.

A. $S = \pi$

B. $S = \frac{3\pi}{4}$

C. $S = \frac{\pi}{2}$

Câu 53: Cho S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tìm số nguyên lớn nhất không vượt quá S .

A. 0

B. 1

C. 2

Câu 54: Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đồ thị của hai hàm số $y = 3^x$, $y = 4 - x$ và trục tung.

A. $S = \frac{9}{2} + \frac{2}{\ln 3}$

B. $S = \frac{9}{2} + \frac{3}{\ln 3}$

C. $S = \frac{7}{2} - \frac{3}{\ln 3}$

Câu 55: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = 2\sqrt{ax}$ ($a > 0$), trục hoành và đường thẳng $x = a$ bằng ka^2 . Tính giá trị của tham số k .

A. $k = \frac{7}{3}$

B. $k = \frac{4}{3}$

C. $k = \frac{12}{5}$

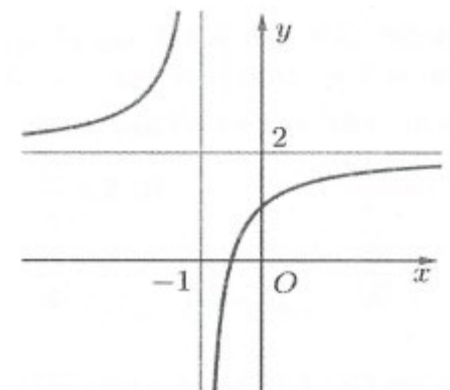
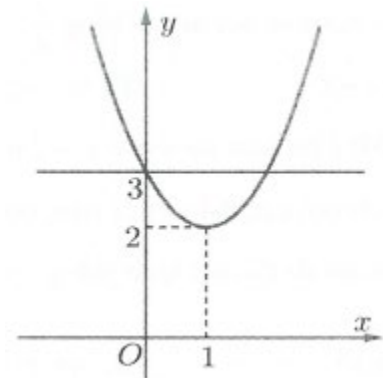
Câu 56: Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đồ thị của các đường $y = x^2 - 2x + 1$, $y = x + 1$, $x = 0$, $x = m$ với $m \in (0;3)$.

A. $S = \frac{m^3}{3} - \frac{3m^2}{2}$

B. $S = \frac{3m^2}{2} - \frac{m^3}{3}$

C. $S = \frac{m^3}{3} - \frac{m^2}{2} + 2m$

D. $S = \frac{m^3}{3} - \frac{m^2}{2} - 2m$



Câu 57: Biết diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đồ thị của các đường $y = x^2 - 2x + 1$, $y = 1 - x$ và $x = 0, x = m$ với $m < 0$ bằng $\frac{5}{6}$. Tìm giá trị của tham số m .

- A. $m = -3$ B. $m = -2$ C. $m = -1$

Câu 58: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 2m^2x^2 + 2$. Tìm các giá trị của tham số m cho đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu, đồng thời đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại tạo với đồ thị một hình phẳng có diện tích bằng $\frac{64}{15}$.

- A. $m \in \emptyset$ B. $m \in \{\pm 1\}$ C. $m \in \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm 1\right\}$ D. $m \in \left\{\pm \frac{1}{2}; \pm 1\right\}$

Câu 59: Tính diện tích S của phần hình phẳng gạch sọc (như hình vẽ bên dưới) giới hạn bởi đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và trục hoành.

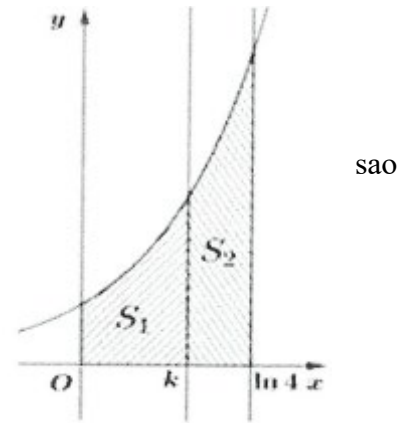
- A. $S = \frac{31\pi}{5}$ B. $S = \frac{27}{4}$
C. $S = \frac{19}{3}$ D. $S = \frac{31}{5}$

Câu 60: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $2my = x^2, 2mx = y^2$ ($m > 0$). Tìm giá trị của m để $S = 3$.

- A. $m = \frac{3}{2}$ B. $m = 2$ C. $m = 3$ D. $m = \frac{1}{2}$

Câu 61: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0, x = 0, x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $4S_1 + S_2 = 8$.

- A. $k = \frac{2}{3} \ln 4$ B. $k = \ln 2$
C. $k = \ln \frac{8}{3}$ D. $k = \ln \frac{2}{3}$



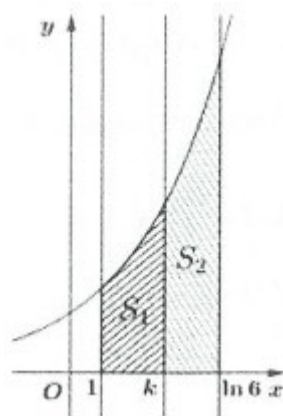
Câu 62: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{2}, x = 2$ và trục hoành. Đường thẳng $x = k, \left(\frac{1}{2} < k < 2\right)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của k để $S_1 = 3S_2$.

A. $k = \sqrt{2}$

B. $k = 1$

C. $k = \frac{7}{5}$

D. $k = \sqrt{3}$



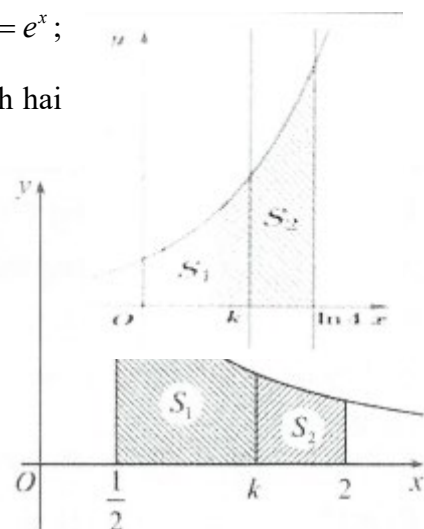
Câu 63: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x; y = 0; x = 0$ và $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k (0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1, S_2 và như hình vẽ bên dưới. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.

A. $k = \ln \frac{8}{3}$

B. $k = \frac{2}{3} \ln 4$

C. $k = \ln 3$

D. $k = \ln 2$



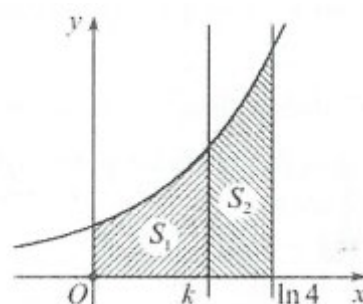
Câu 64: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x; y = 0; x = 1; x = \ln 6$. Đường thẳng $x = k (1 < k < \ln 6)$ chia (H) thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $P = S_1^2 + S_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $k = \frac{-e+6}{2}$

B. $k = \frac{e+6}{2}$

C. $k = -\ln \frac{e+6}{2}$

D. $k = \ln \frac{e+6}{2}$



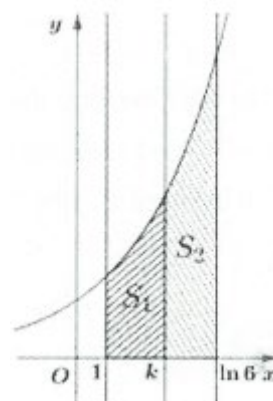
Câu 65: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x; y = 0; x = 1; x = \ln 6$. Đường thẳng $x = k (1 < k < \ln 6)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 < S_2 - 2$.

A. $1 < k < \frac{e+4}{2}$

B. $k < \frac{e+4}{2}$

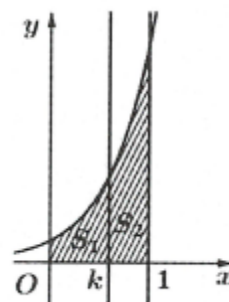
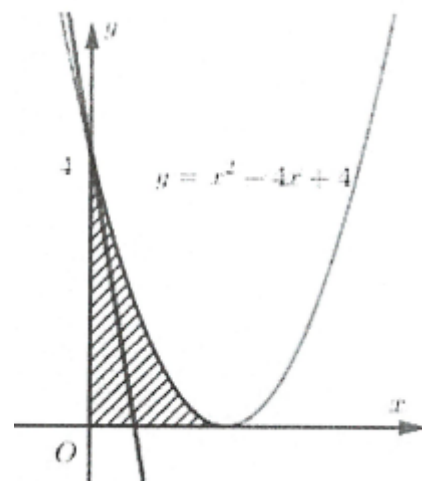
C. $k < \ln \frac{e+4}{2}$

D. $1 < k < \ln \frac{e+4}{2}$



Câu 66: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường

Câu 67: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 4$,



- A.** $I = \frac{5}{4}$
- B.** $I = \frac{5}{2}$
- C.** $I = 5$
- D.** $I = \frac{11}{2}$

Câu 70: Một sân chơi dành riêng cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 50m và chiều rộng 30m, người ta làm một con đường trong sân (như hình vẽ). Biết viên ngoài và viên trong của con đường là hai đường elip và chiều rộng của mặt đường là 2m. Kinh phí để làm mỗi m^2 làm đường 500.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó (số tiền làm tròn đến hàng nghìn).

- A. 119.000.000 đồng B. 152.000.000 đồng C. 119.320.000

đồng

Câu 71: Người ta trồng hoa và phần đất được gạch sọc được giới hạn bởi cạnh AB , CD , đường trung bình MN của mảnh đất hình chữ nhật một đường cong hình sin (như hình vẽ). Biết $AB = 2\pi(m)$ và

hạn bởi $ABCD$ và $AD = 2(m)$.

Tính diện tích phần còn lại.

- A. $4\pi - 1$ B. $4(\pi - 1)$ C.

$\frac{4\pi - 2}{2}$ D. $\frac{4\pi - 3}{2}$

Câu 72: Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một parabol. Giá $1m^2$ của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cửa sắt (làm tròn đến hàng phần nghìn).

- A. 6.520.000 đồng B. 6.320.000 đồng
C. 6.417.000 đồng D. 6.620.000 đồng

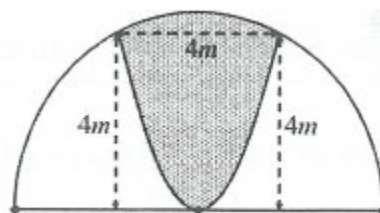
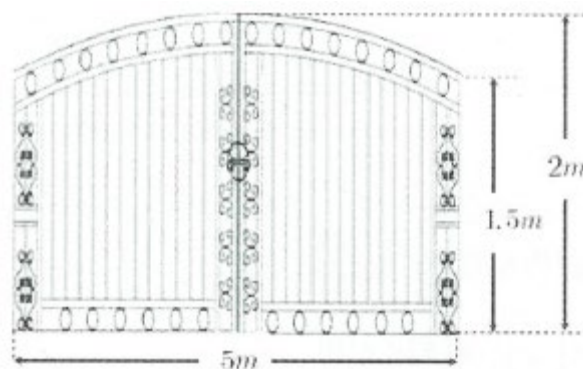
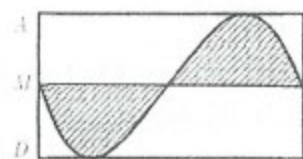
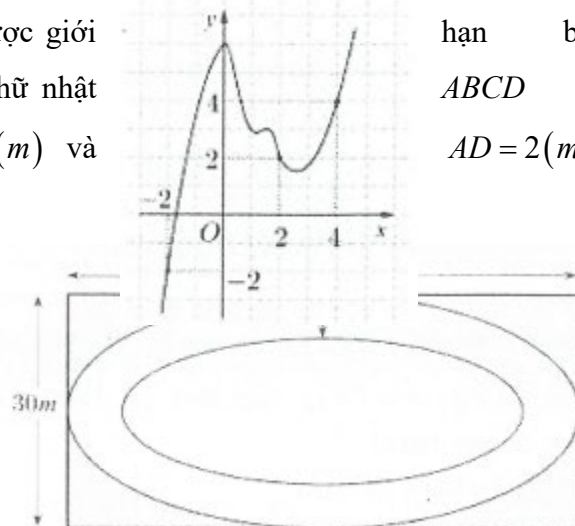
Trục hoành và hai đường thẳng $x = \frac{-5}{2}; x = \frac{5}{2}$

Câu 73: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}m$. Trên đó người ta thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa đường tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng 4m. Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản? (làm tròn đến hàng nghìn)

- A. 3.895.000 đồng B. 1.948.000 đồng C.
2.388.000 đồng D. 1.194.000 đồng

Câu 74: (Đề thi THPT Quốc gia 2017 – Mã đề 101) Cho $y = f(x)$ có đồ thị của $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$. Mệnh đề nào đúng?

- A. $h(4) = h(-2) > h(2)$



B. $h(4) = h(-2) < h(2)$

C. $h(2) > h(4) > h(-2)$

D. $h(2) > h(-2) > h(4)$

Câu 75: (Đề thi THPT Quốc gia 2017 – Mã đề 104) Cho $y = f(x)$ có đồ thị của $y = f'(x)$ như hình vẽ.

Đặt $g(x) = 2f(x) + (x+1)^2$. Mệnh đề nào đúng?

A. $g(1) < g(3) < g(-3)$

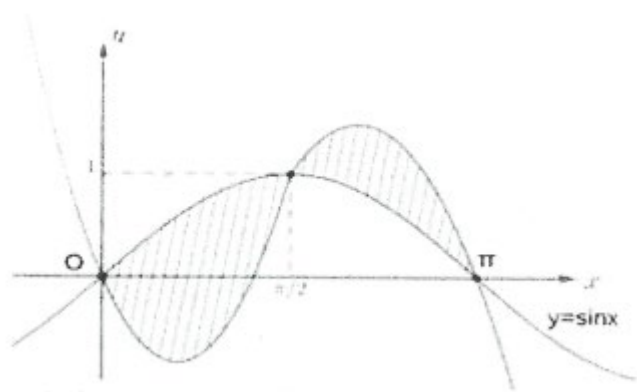
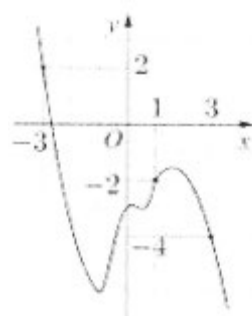
B. $g(1) < g(-3) < g(3)$

C. $g(3) = g(-3) < g(1)$

D. $g(3) = g(-3) > g(1)$

Câu 76: Cho $y = f(x)$ có đồ thị của $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt

$g(x) = f(x) + \cos x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(0) < g(\pi) < g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

B. $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < g(0) < g(\pi)$

C. $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < g(\pi) < g(0)$

D. $g(\pi) > g(0) > g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

D. LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Ta có $S = \int_a^b |f(x)| dx$. **Chọn D.**

Câu 2: Ta có $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$. **Chọn A.**

Câu 3: Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2 - x) dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 x^2 dx$. **Chọn C.**

Câu 4: Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - x = 2x \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 3 \end{cases}$

Do đó $S = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) dx + \int_0^1 (3x - x^3) dx$. **Chọn C.**

Câu 5: Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{2}x = 4 - x \Leftrightarrow x = 2$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $S = \int_0^2 \sqrt{2}x dx + \int_2^4 (4 - x) dx$. **Chọn B.**

Câu 6: Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $S = \int_1^2 (x^2 - x) dx - \int_0^1 (x^2 - x) dx$. **Chọn B.**

Câu 7: Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Ta có $S = \int_{-1}^1 |x^2 - (2 - x^2)| dx = 2 \int_{-1}^1 |1 - x^2| dx = 4 \int_0^1 (1 - x^2) dx$. **Chọn B.**

Câu 8: Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $S = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx$. **Chọn B.**

Câu 9: Dựa vào đồ thị hàm số ta có $S = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^b [g(x) - f(x)] dx$. **Chọn A.**

Câu 10: Dựa vào đồ thị hàm số ta có $S = \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx$. **Chọn A.**

Câu 11: Dựa vào đồ thị hàm số ta có $S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$. **Chọn B.**

Câu 12: Dựa vào đồ thị hàm số ta có $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$. **Chọn C.**

Câu 13: Ta có diện tích 2 bên trục tung bằng nhau nên $S = 2 \left| \int_0^{\sqrt{2}} f(x) dx \right|$. **Chọn B.**

Câu 14: Dựa vào đồ thị hàm số ta có $S = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$. **Chọn C.**

Câu 15: Dựa vào đồ thị hàm số ta có $S_D = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$. **Chọn B.**

Câu 16: Dựa vào đồ thị hàm số ta có $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_2^0 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx$. **Chọn B.**

Câu 17: Dựa vào đồ thị hàm số ta có $S = \int_{-3}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx = a - b$. **Chọn B.**

Câu 18: Dựa vào đồ thị hàm số ta có $S = -\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = b - a$. **Chọn D.**

Câu 19: Dựa vào đồ thị hàm số ta có $S = \int_0^1 (3x + 0,5^x - 1) dx + \int_1^4 (\log_2 x - 0,5^x - 2) dx$. **Chọn D.**

Câu 20: Dựa vào đồ thị hàm số ta có $S = \int_a^b g(y) dy$. **Chọn C.**

Câu 21: Dựa vào đồ thị hàm số ta có $S = \int_a^c [g(y) - f(y)] dy + \int_c^b [f(y) - g(y)] dy$. **Chọn C.**

Câu 22: Ta có $S = \int_a^b |f(x)| dx + \int_b^c |f(x)| dx = -\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = -(-3) + 5 = 8$. **Chọn C.**

Câu 23: Ta có $S = \int_0^4 |f(x)| dx + \int_4^6 |f(x)| dx = \int_0^4 f(x) dx + \int_4^6 g(x) dx$. **Chọn B.**

Câu 24: $S = \int_0^3 |x^2 - 4x + 1 - m| dx \xrightarrow{-m \geq 3} x^2 - 4x + 1 - m \geq x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0$

$\Rightarrow S = \int_0^3 (x^2 - 4x + 1 - m) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + (1 - m)x \right) \Big|_0^3 = -3m - 6$. **Chọn D.**

Câu 25: Xét PT: $\frac{10}{3}x - x^2 = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \int_0^1 \left(\frac{13}{3}x - x^2 \right) dx$.

$$\text{Lại có } \frac{10}{3}x - x^2 = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow S_2 = \int_1^3 \left(2 + \frac{7}{3}x - x^2 \right) dx$$

$$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = \left(\frac{13x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left(2x + \frac{7x^2}{6} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^3 = \frac{13}{2}. \text{ Chọn C.}$$

$$\text{Câu 26: Xét PT: } x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow S = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx$$

$$= \int_{-2}^0 |x^3 + x^2 - 2x| dx + \int_0^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx = \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx + \int_0^1 -(x^3 + x^2 - 2x) dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-2}^0 - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}. \text{ Chọn A.}$$

$$\text{Câu 27: Xét PT: } x^3 - 3x = x \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 2 \end{cases} \Rightarrow S = \int_{-2}^2 |x^3 - 4x| dx = \int_{-2}^0 |x^3 - 4x| dx + \int_0^2 |x^3 - 4x| dx$$

$$= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 (4x - x^3) dx = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \Big|_{-2}^0 + \left(2x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 8. \text{ Chọn D.}$$

$$\text{Câu 28: Xét PT: } x^2 + x - 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx = \int_{-1}^2 -(x^2 - x - 2) dx = - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}. \text{ Chọn A.}$$

$$\text{Câu 29: Xét PT: } x^2 = x \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow S = \int_0^1 |x^2 - x| dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}. \text{ Chọn D.}$$

$$\text{Câu 30: Ta có } S = \int_{-1}^1 |x^2 + 2x| dx = \int_{-1}^0 |x^2 + 2x| dx + \int_0^1 |x^2 + 2x| dx$$

$$= \int_{-1}^0 -(x^2 + 2x) dx + \int_0^1 (x^2 + 2x) dx = - \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}. \text{ Chọn A.}$$

$$\text{Câu 31: Xét PT: } x^2 - 5x + 3 = -2x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \int_1^{\frac{4}{3}} |3x^2 - 7x + 4| dx = \int_1^{\frac{4}{3}} -(3x^2 - 7x + 4) dx = - \left(x^3 - \frac{7x^2}{2} + 4x \right) \Big|_1^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{54}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 32: Xét PT: $x^2 - x + 5 = -2x^3 + x^2 + x + 5 \Leftrightarrow 2x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow S = \int_{-1}^1 |2x^3 - 2x| dx = \int_{-1}^0 |2x^3 - 2x| dx + \int_0^1 |2x^3 - 2x| dx$$

$$= \int_{-1}^0 (2x^3 - 2x) dx + \int_0^1 -(2x^3 - 2x) dx = \left(\frac{x^4}{2} - x^2 \right) \Big|_{-1}^0 - \left(\frac{x^4}{2} - x^2 \right) \Big|_0^1 = 1. \text{ Chọn A.}$$

Câu 33: Xét PT: $x^4 - 2x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow S = \int_0^2 |x^4 - 4x^2| = \left| \int_0^2 (x^4 - 4x^2) dx \right|$

$$\longrightarrow \int_0^2 (x^4 - 4x^2) dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = -\frac{64}{15} \Rightarrow S = \frac{64}{15}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 34: Xét PT: $(e+1)x = (1+e^x)x \Leftrightarrow ex = xe^x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow S = \int_0^1 |x(e^x - e)| dx = \int_0^1 x(e - e^x) dx = \left(\frac{ex^2}{2} + e^x - xe^x \right) \Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1. \text{ Chọn A.}$$

Câu 35: Xét PT: $\sqrt{x} = 6 - x \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow S = \int_0^4 |x + \sqrt{x} - 6| dx = \int_0^4 -(x + \sqrt{x} - 6) dx$

$$= - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\sqrt{x^3}}{\frac{3}{2}} - 6x \right) \Big|_0^4 = \frac{22}{3}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 36: Xét PT: $x \ln x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow S = \int_0^e |x \ln x| dx = \int_0^1 |x \ln x| dx + \int_1^e |x \ln x| dx$

$$= \int_0^1 -x \ln x dx + \int_1^e x \ln x dx \longrightarrow \int x \ln x dx = \frac{1}{2} \int \ln x d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\Rightarrow S = - \left(\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 37: Xét PT: $(x-1)e^x = x^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ e^x = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow S = \int_0^1 |(x-1)e^x - (x^2 - 1)| dx$

$$= \left| \int_0^1 (x-1)e^x - (x^2 - 1) dx \right| = \left(xe^x - e^x - e^x - \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = e - \frac{8}{3}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 38: Xét PT: $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow S = \int_k^3 |2 - x| dx = \int_k^2 (2 - x) dx + \int_2^3 (x - 2) dx$

$$= \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_k^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^3 = \frac{5}{2} - \left(2k - \frac{k^2}{2} \right) = 16 \Rightarrow k = 2 - \sqrt{31}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 39: Xét PT: $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow S = \int_1^k |\ln x| dx = x \ln x \Big|_1^k - \int_1^k x d(\ln x)$

$$= k \ln k - (k - 1) = 1 \Rightarrow k = e. \text{ Chọn B.}$$

Câu 40: $S_1 = \int_a^b |2f(x) - 2g(x)| dx; S_2 = \int_a^b |f(x) - 2 - (g(x) - 2)| dx = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \frac{1}{2} S_1. \text{ Chọn B.}$

Câu 41: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 0, x = a$ là

$$S' = \int_0^a \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_0^a = \frac{2}{3} \sqrt{a^3}.$$

Lại có $S_{(H)} = (a+1)\sqrt{a} \Rightarrow S' = \frac{1}{2} S_{(H)} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \sqrt{a^3} = \frac{1}{2} (a+1)\sqrt{a} \Rightarrow a = 3. \text{ Chọn D.}$

Câu 42: $S = \int_0^a \left| \frac{2x-1}{x+1} - 2 \right| dx = \int_0^a \frac{3}{x+1} dx = 3 \ln|x+1| \Big|_0^a = 3 \ln|a+1| = 3 \ln 5 \Rightarrow a = 4. \text{ Chọn B.}$

Câu 43: $S = \int_0^4 \sqrt{x} dx - \int_2^4 (x-2) dx = \frac{10}{3}. \text{ Chọn D.}$

Câu 44: $S = \int_a^c |f(x) - g(x)| dx + \int_c^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^b [g(x) - f(x)] dx. \text{ Chọn B.}$

Câu 45: Phương trình hoành độ giao điểm của $f(x)$ và $h(x)$ là $x^2 = \frac{27}{x} \Leftrightarrow x = 3.$

Phương trình hoành độ giao điểm của $g(x)$ và $h(x)$ là $\frac{27}{x} = \frac{x^2}{27} \Leftrightarrow x = 9.$

Khi đó, diện tích cần tìm là $S = \int_0^3 |f(x) - g(x)| dx + \int_3^9 |h(x) - g(x)| dx = 27 \ln 3. \text{ Chọn B.}$

Câu 46: Diện tích cần tìm là $S = \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx - S_{\Delta} = \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}. \text{ Chọn C.}$

Câu 47: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $|\ln x| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{e} \\ x = e \end{cases}.$

Diện tích cần tìm là $S = \int_{\frac{1}{e}}^1 (1 + \ln x) dx + \int_1^e (1 - \ln x) dx = 1 - \frac{1}{e} + e - 1 + (x \ln x - x) \Big|_{\frac{1}{e}}^1 - (x \ln x - x) \Big|_1^e$

$$= e - \frac{1}{e} + \frac{2}{e} - 1 - 1 = e + \frac{1}{e} - 2 \longrightarrow \begin{cases} a = b = 1 \\ c = -2 \end{cases}. \text{ Vậy } P = a + b + c = 1 + 1 - 2 = 0. \text{ Chọn B.}$$

Câu 48: $S = \int_{-2}^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx = -\int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$. **Chọn C.**

Câu 49: Vì parabol đi qua 3 điểm $A(0;0), B(2;0), I(1;1) \longrightarrow (P): y = -x^2 + 2x$

Do đó, diện tích hình phẳng cần tính là $S = \int_0^2 |f(x)| dx = \int_0^2 |2x - x^2| dx = \frac{4}{3}$. **Chọn A.**

Câu 50: Vì parabol đi qua điểm $A(0;3)$, đỉnh $I(1;2) \longrightarrow (P): y = x^2 - 2x + 3$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là $x^2 - 2x + 3 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Do đó, diện tích cần tính là $S = \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx = \frac{4}{3}$. **Chọn A.**

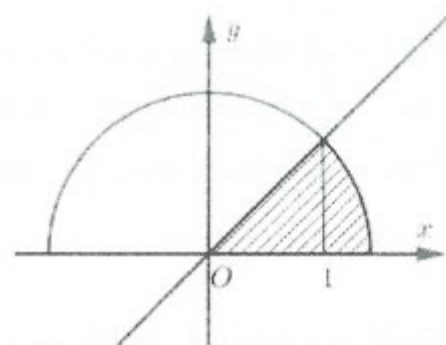
Câu 51: Gọi phương trình đồ thị hàm số là $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Vì đồ thị đi qua $A(0;1), B(-\frac{1}{2};0)$ và có hai đường tiệm cận là

$$x = -1; y = 2.$$

Suy ra $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Do đó, diện tích cần tìm là

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left| \frac{2x+1}{x+1} \right| dx = 1 - \ln 2. \text{ **Chọn A.**}$$



Câu 52: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số

$y = \sqrt{2-x^2}$ và đường thẳng $y = x$ là:

$$\sqrt{2-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Ta có: } S = \int_0^1 x dx + \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx = \frac{1}{2} + \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx$$

Xét $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx$, ta đặt $x = \sqrt{2} \sin t$

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx \xrightarrow{x=\sqrt{2} \sin t} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2-2\sin^2 t} d(\sqrt{2} \sin t) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 t dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{\pi}{4}.$$

Cách 2: Diện tích cần tìm là hình quạt có góc ở đỉnh bằng $45^\circ \Rightarrow S = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot 2 = \frac{\pi}{4}$. **Chọn D.**

Câu 53: Phương trình hoành độ giao điểm là $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int_0^2 |2x - x^2| dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$.

Vậy số nguyên lớn nhất không vượt quá S là 1. **Chọn B.**

Câu 54: Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị là: $3^x = 4 - x \Leftrightarrow f(x) = 3^x + x = 4$

Do $f'(x) = 3^x \ln 3 + 1 > 0 (\forall x \in \mathbb{R})$ và $f(1) = 4$ nên $f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1$.

Diện tích cần tìm là: $S = \int_0^1 |3^x + x - 4| dx = \int_0^1 (4 - 3^x - x) dx = \left(4x - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{2} - \frac{2}{\ln 3}$. **Chọn D.**

Câu 55: Phương trình hoành độ giao điểm $2\sqrt{ax} = 0 (a > 0; x \geq 0) \Leftrightarrow x = 0$

Diện tích cần tìm là: $S = \int_0^2 2\sqrt{ax} dx = 2\sqrt{a} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_0^2 = \frac{4}{3} a^2 \Rightarrow k = \frac{4}{3}$. **Chọn B.**

Câu 56: Ta có: $x^2 - 2x + 1 - (x + 1) = x^2 - 3x$

Khi đó $S = \int_0^m |x^2 - 3x| dx \xrightarrow{m \in (0;3)} \int_0^m (3x - x^2) dx = \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^m = \frac{3m^2}{2} - \frac{m^3}{3}$. **Chọn B.**

Câu 57: Diện tích cần tìm là: $S = \int_m^0 |x^2 - 2x + 2 - (1 - x)| dx = \int_m^0 |x^2 - x| dx \xrightarrow{m < 0} S = \int_m^0 (x^2 - x) dx$

$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_m^0 = \frac{m^2}{2} - \frac{m^3}{3} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow m = -1$. **Chọn C.**

Câu 58: Ta có: $y' = 2x^3 - 4m^2x = 2x(x^2 - 2m^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2m^2 \end{cases}$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m \neq 0$

Do $a = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(0; 2)$

Phương trình đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại là $d: y = 2$

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{2}x^4 - 2m^2x^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2m \end{cases}$

Giả sử $m > 0$ do tính chất đối xứng nên $S = 2 \int_0^{2m} \left(-\frac{1}{2}x^4 + 2m^2x^2 \right) dx = \left(-\frac{x^5}{5} + \frac{4m^2x^3}{3} \right) \Big|_0^{2m}$

$$= -\frac{32m^5}{5} + \frac{32m^5}{3} = \frac{64m^5}{15} = \frac{64}{15} \Leftrightarrow m = 1$$

Tương tự $m < 0 \Rightarrow m = -1$. Vậy $m \in \{\pm 1\}$. **Chọn B.**

Câu 59: Dựa vào đồ thị suy ra $y = a(x+2)(x-1)^2$

Do đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 2) \Rightarrow 2 = 2a \Rightarrow a = 1$

Khi đó $S = \int_{-2}^1 (x+2)(x-1)^2 dx = \frac{27}{4}$. **Chọn B.**

Câu 60: Tọa độ giao điểm của 2 đồ thị là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2m} \\ y^2 = 2mx \end{cases} \Rightarrow \frac{x^4}{4m^2} = 2mx \Leftrightarrow x(x^3 - 8m^3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } S = \int_0^{2m} \left(\sqrt{2mx} - \frac{x^2}{2m} \right) dx = \left(\frac{2}{3} \sqrt{2m} \cdot \sqrt{x^3} - \frac{x^3}{6m} \right) \Big|_0^{2m}$$

$$= \frac{8m^2}{3} - \frac{4m^2}{3} = \frac{4m^2}{3} = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 61: Ta có $S_1 + S_2 = \int_0^{\ln 4} e^x dx = 3$

Lại có: $4S_1 + S_2 = 8 \Rightarrow S_1 = \frac{5}{3} = \int_0^k e^x dx \Leftrightarrow \frac{5}{3} = e^x \Big|_0^k = e^k - 1 \Rightarrow k = \ln \frac{8}{3}$. **Chọn C.**

Câu 62: Ta có $S_1 + S_2 = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \ln 4 = 2 \ln 2$

Do $S_1 = 3S_2 \Rightarrow S_1 + \frac{S_1}{3} = 2 \ln 2 \Rightarrow S_1 = \frac{3}{2} \ln 2$

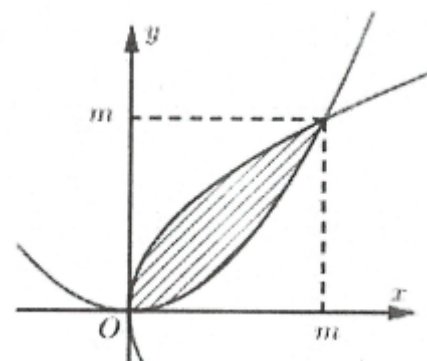
Mặt khác $S_1 = \int_{\frac{1}{2}}^k \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_{\frac{1}{2}}^k = \ln 2k = \frac{3}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{8} \Rightarrow 2k = \sqrt{8} \Leftrightarrow k = \sqrt{2}$. **Chọn A.**

Câu 63: Do $S_1 = 2S_2 \Rightarrow S_1 = \frac{2}{3} S = \frac{2}{3} \int_0^{\ln 4} |e^x| dx = \frac{2}{3} \int_0^{\ln 4} e^x dx = \frac{2}{3} e^x \Big|_0^{\ln 4} = 2$

Do đó $S_1 = \int_0^k |e^x| dx = e^x - 1 = 2 \Leftrightarrow e^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3$. **Chọn C.**

Câu 64: Ta có $S_1 + S_2 = \int_1^{\ln 6} e^x dx = 6 - e$

Do $P = S_1^2 + (6 - e - S_1)^2 = 2S_1^2 - 2(6 - e)S_1 + (6 - e)^2$



Khi đó $P_{\min} \Leftrightarrow S_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{2(6-e)}{2.2} = \frac{6-e}{2}$

Lại có: $S_1 = \int_1^k e^x dx = e^k - e = \frac{6-e}{2} \Rightarrow e^k = \frac{e+6}{2} \Rightarrow k = \ln \frac{e+6}{2}$. **Chọn D.**

Câu 65: Ta có $S_1 + S_2 = \int_1^{\ln 6} e^x dx = 6 - e$

Do $S_1 < S_2 - 2 \Rightarrow S_1 < 6 - e - S_1 - 2 \Leftrightarrow S_1 < 2 - \frac{e}{2}$

Lại có: $S_1 = \int_1^k e^x dx = e^k - e < 2 - \frac{e}{2} \Leftrightarrow e^k < \frac{e+4}{2} \Rightarrow 1 < k < \ln \frac{e+4}{2}$. **Chọn D.**

Câu 66: Ta có $S_1 + S_2 = \int_0^{\ln 4} e^x dx = 3$

Do $S_1^2 + S_2^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} S_1^2 + S_2^2 = 5 \\ S_1 + S_2 = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} S_1 = 2; S_2 = 1 \\ S_1 = 1; S_2 = 2 \end{cases}$

Lại có: $S_1 = \int_0^k e^x dx = e^k - 1 \Rightarrow \begin{cases} e^k - 1 = 2 \\ e^k - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \ln 3 \\ k = \ln 2 \end{cases} \Rightarrow$ tổng các phần tử của tập hợp X là $\ln 3 + \ln 2 = \ln 6$.

Chọn B.

Câu 67: Đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 4$ cắt trục hoành tại điểm $(2; 0)$

Diện tích phần gạch chéo là $S = \int_0^2 (x-2)^2 dx = \frac{(x-2)^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}$

Đường thẳng d đi qua điểm $A(0; 4)$ có hệ số góc k suy ra $d: y = kx + 4$

Đường thẳng d cắt Ox tại điểm $C\left(\frac{-4}{k}; 0\right) (k < 0)$ (Do C có hoành độ dương).

Theo giả thiết bài toán ta có: $\frac{1}{2} OC \cdot OA = \frac{S}{2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{-4}{k} \right| \cdot 4 = \frac{4}{3} \Rightarrow k = 6$. **Chọn C.**

Câu 68: Ta có $S_1 + S_2 = \int_0^1 e^x dx = e - 1$

Do đó $S_1 > S_2 \Leftrightarrow S_1 > e - 1 - S_1 \Leftrightarrow S_1 > \frac{e-1}{2}$

Lại có: $S_1 = \int_0^k e^x dx = e^k - 1 > \frac{e-1}{2} \Leftrightarrow e^k > \frac{e+1}{2} \Leftrightarrow k > \ln \frac{e+1}{2}$

Kết hợp $0 < k < 1 \Rightarrow \ln \frac{e+1}{2} < k < 1$. **Chọn B.**

Câu 69: Ta có $\int_1^2 g(x) dx = \frac{5}{2}$ suy ra $\int_1^2 xf(x^2) dx = \frac{5}{2}$. Đặt $t = x^2$ ta có: $dt = 2x dx$

Đổi cận suy ra $\int_1^2 xf(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_1^4 f(t) dt = \frac{5}{2} \Rightarrow \int_1^4 f(t) dt = 5 \Rightarrow I = 5$. **Chọn C.**

Câu 70: Đường elip phía ngoài có phương trình

$$\frac{x^2}{25^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1 \text{ và có diện tích } S_1 = \pi 25 \cdot 15$$

Đường elip phía trong có phương trình $\frac{x^2}{23^2} + \frac{y^2}{13^2} = 1$

và có diện tích $S_2 = \pi 23 \cdot 13$

Diện tích mặt đường là $S = S_1 - S_2$

Do đó kinh phí để làm đường là:

$$T = (S_1 - S_2) \cdot 500,000 = 119.320.000 \text{ đồng. Chọn C.}$$

Câu 71: Gọi O là trung điểm của MN . Chọn hệ trục tọa độ Oxy có trục $Ox \parallel BC$, $Oy \parallel AB$.

Khi đó đồ thị có dạng $y = A \sin bx$.

Do $AD = 2 \Rightarrow \max y = 1 \Rightarrow A = 1$

Do hàm số tuần hoàn với chu kỳ $2\pi \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = \sin x$.

Diện tích phần đất trồng hoa là: $S = 2 \int_0^\pi \sin x dx = -2 \cos x \Big|_0^\pi = 4$

Diện tích phần đất còn lại là: $2\pi \cdot 2 - 4 = 4(\pi - 1)$. **Chọn B.**

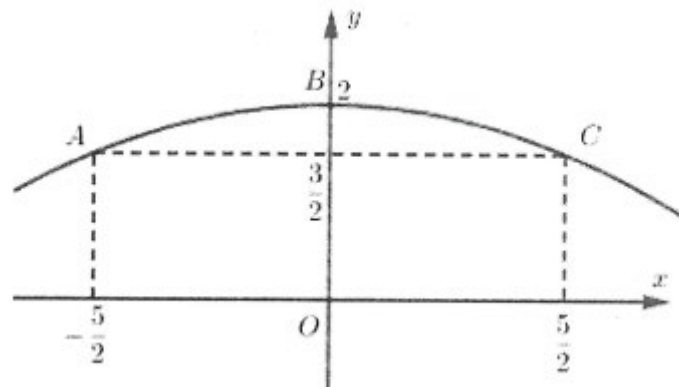
Câu 72: Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Trong đó $A\left(-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right); B\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right); C(0; 2)$

Giả sử đường cong phía trên là một Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Do Parabol đi qua các

điểm $A\left(-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right); B\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right); C(0; 2)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{25}{4}a - \frac{5}{2}b + c = \frac{3}{2} \\ \frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b + c = \frac{3}{2} \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{phương trình parabol là: } y = \frac{-2}{25}x^2 + 2$$



Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{-2}{25}x^2 + 2$, trục hoành

và hai đường thẳng $x = \frac{-5}{2}; x = \frac{5}{2}$.

$$\text{Ta có: } S = \int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} \left(\frac{-2}{25}x^2 + 2 \right) dx = \left(-\frac{2}{25} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} = \frac{55}{6}.$$

Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là $T = 700000.S = 6417000$ đồng. **Chọn C.**

Câu 73: Ta có $S = S_2 - S_1$

Trong đó S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{20 - x^2}, y = x^2, x = -2, x = 2$ được tô màu trong hình bên, S_2 là diện tích nửa hình tròn có bán kính bằng $2\sqrt{5}$.

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \pi (2\sqrt{5})^2 - \int_{-2}^2 (\sqrt{20 - x^2} - x^2) dx$$

Suy ra $S \approx 19,476(m^2) \Rightarrow$ Chi phí sẽ bằng

$100.000S = 1.948.000$ đồng. **Chọn B.**

Câu 74: Ta có $h'(x) = 2f'(x) - 2x; h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x$.

Nhận thấy nghiệm của $h'(x) = 0$ chính là nghiệm của $f'(x) = x$ cũng là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = -x \longrightarrow x = \{-2; 2; 4\}$.

Vẽ đường thẳng $y = x$ và chia đồ thị thành 2 phần diện tích hình phẳng.

$$\text{Khi đó } 2S_1 = 2 \int_{-2}^2 [f'(x) - x] dx = \int_{-2}^2 h'(x) dx = h(2) - h(-2) > 0 \Rightarrow h(2) > h(-2).$$

$$\text{Và } 2S_2 = 2 \int_2^4 [x - f'(x)] dx = - \int_2^4 g'(x) dx = h(2) - h(4) > 0 \Rightarrow h(2) > h(4)$$

Lại có

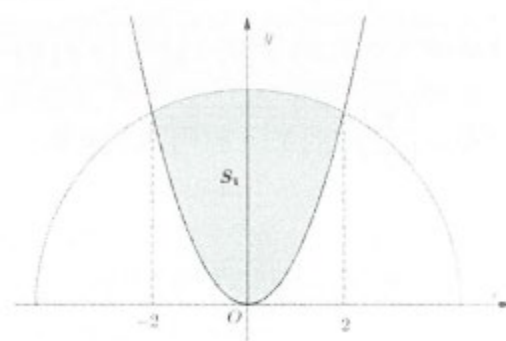
$$S_1 > S_2 \Leftrightarrow 2S_1 > 2S_2 \Leftrightarrow h(2) - h(-2) > h(2) - h(4) \Leftrightarrow h(4) > h(-2).$$

Vậy $h(2) > h(4) > h(-2)$. **Chọn C.**

Câu 75: Ta có

$$g'(x) = 2f'(x) + 2(x+1); g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x-1.$$

Nhận thấy nghiệm của $g'(x) = 0$ chính là nghiệm của



$f'(x) = -x - 1$ cũng là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = -x - 1 \longrightarrow x = \{-3; 1; 3\}$.

Vẽ đường thẳng $y = -x$ và chia đồ thị thành 2 phần diện tích hình phẳng.

$$\text{Khi đó } 2S_1 = 2 \int_{-3}^1 [-(x+1) - f'(x)] dx = - \int_{-3}^1 g'(x) dx = g(-3) - g(1) > 0 \Rightarrow g(-3) > g(1)$$

$$\text{Và } 2S_2 = 2 \int_1^3 [f'(x) - (-x-1)] dx = \int_1^3 g'(x) dx = g(3) - g(1) > 0 \Rightarrow g(3) > g(1)$$

$$\text{Lại có } S_1 > S_2 \Leftrightarrow 2S_1 > 2S_2 \Leftrightarrow g(-3) - g(1) > g(3) - g(1) \Leftrightarrow g(-3) > g(3).$$

Vậy $g(-3) > g(3) > g(1)$. **Chọn A.**

Câu 76: Ta có $g'(x) = f'(x) - \sin x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \sin x$

Nhận thấy nghiệm của $g'(x) = 0$ chính là nghiệm của $f'(x) = \sin x$ cũng là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = \sin x \longrightarrow x = \left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi\right\}$.

Vẽ đường thẳng $y = \sin x$ và chia đồ thị thành 2 phần diện tích hình phẳng.

$$\text{Khi đó } S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin x - f'(x)] dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x) dx = g(0) - g\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \Rightarrow g(0) > g\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Và } S_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f'(x) - \sin x] dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g'(x) dx = g(\pi) - g\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \Rightarrow g(\pi) > g\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Lại có } S_1 > S_2 \Leftrightarrow g(0) - g\left(\frac{\pi}{2}\right) > g(\pi) - g\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow g(0) > g(\pi).$$

Vậy $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < g(\pi) < g(0)$. **Chọn B.**