

Câu 1: (3,0 điểm)

Giải phương trình $x + 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 11$.

Câu 2: (3,0 điểm)

Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} xyz + z = a \\ xyz^2 + z = b \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$
 Tìm tất cả các giá trị của a, b để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thuộc $[0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$.

b) Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \geq 6$.

Câu 4: (5,0 điểm)

a) Cho điểm M tùy ý nằm bên trong tam giác ABC . Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các tam giác MBC, MAC, MAB . Chứng minh rằng $S_1 \cdot \overrightarrow{MA} + S_2 \cdot \overrightarrow{MB} + S_3 \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b) Trong mặt phẳng Oxy , cho parabol $(P): y = x^2 + px + q$ với $(q \neq 0)$. Biết rằng (P) cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A, B và cắt trục Oy tại C . Chứng minh rằng khi p và q thay đổi, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5: (3,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 2; u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1}$, với $n = 1.2.3 \dots$

a) Chứng minh rằng dãy số (u_n) giảm và bị chặn.

b) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Câu 6: (3,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f\left(\frac{x+y}{2020}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2019}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Giải phương trình $x + 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 11$.

Lời giải

Điều kiện: $-3 \leq x \leq \frac{3}{2}$ (*).

Với điều kiện (*) phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$4\sqrt{x+3} - (x+7) + 2[\sqrt{3-2x} - (2-x)] = 0 \Leftrightarrow \frac{4(x+3) - (x+7)^2}{4\sqrt{x+3} + (x+7)} + 2 \cdot \frac{3-2x - (2-x)^2}{\sqrt{3-2x} + (2-x)} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 2x - 1}{4\sqrt{x+3} + x + 7} + 2 \cdot \frac{-x^2 + 2x - 1}{\sqrt{3-2x} + 2 - x} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \left(\frac{-1}{4\sqrt{x+3} + x + 7} + \frac{-2}{\sqrt{3-2x} + 2 - x} \right) = 0.$$

Với $-3 \leq x \leq \frac{3}{2}$ thì $4\sqrt{x+3} + x + 7 > 0$, $\sqrt{3-2x} + 2 - x = \frac{1}{2}(\sqrt{3-2x} + 1)^2 > 0$.

Từ đó suy ra: $\frac{-1}{4\sqrt{x+3} + x + 7} + \frac{-2}{\sqrt{3-2x} + 2 - x} < 0, \forall x \in \left[-3; \frac{3}{2}\right]$.

Từ phương trình trên ta được: $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{1\}$.

Câu 2: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} xyz + z = a \\ xyz^2 + z = b \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$
 Tìm tất cả các giá trị của a, b để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Lời giải

Giả sử (x_0, y_0, z_0) là nghiệm của hệ phương trình, khi đó $(-x_0, -y_0, z_0)$ cũng là nghiệm. Do đó để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì:

$$\begin{cases} x_0 = -x_0 \\ y_0 = -y_0 \\ z_0 = z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z = z_0 \end{cases}.$$

Từ hệ phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} z^2 = 4 \\ z = a \\ z = b \end{cases} \Rightarrow (a, b) \in \{(2, 2), (-2, -2)\}.$

Trường hợp 1: $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$ Ta có: $\begin{cases} xyz + z = 2 \\ xyz^2 + z = 2 \end{cases} \Rightarrow 0 = xyz(z-1) \Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 0 \\ z = 1 \end{cases}.$

Với $z=1$ ta có: $\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ hoặc $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$ thì hệ phương trình có 2 nghiệm (loại).

Trường hợp 2: $\begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases}$ Ta có: $\begin{cases} xyz + z = -2 \\ xyz^2 + z = -2 \end{cases} \Rightarrow 0 = xyz(z-1) \Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 0 \\ z = 1 \end{cases}.$

Với $z=1$ ta có : $\begin{cases} xy = -3 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$.

Ta có $(x+y)^2 = (x^2 + y^2) + 2xy = 3 - 6 < 0$ nên hệ phương trình vô nghiệm.

Tương tự $z=0$ nên hệ phương trình vô nghiệm.

Vậy $\begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases}$ ta có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases}$.

Câu 3:

a) Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thuộc $[0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$.

b) Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \geq 6$.

Lời giải

a) Áp dụng định lý Viet: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)} \\ &= \frac{(1-\frac{b}{a})(2-\frac{b}{a})}{1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}} = \frac{(1+x_1+x_2)(x_1+1+x_2+1)}{1+x_1+x_2+x_1x_2} \\ &= \frac{(x_1+1)(1+x_1+x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)} + \frac{(x_2+1)(1+x_1+x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)} \\ &= (1+\frac{x_1}{x_2+1}) + (1+\frac{x_2}{x_1+1}). \end{aligned}$$

Không mất tổng quát giả sử $x_1 \geq x_2$.

$$\Rightarrow x_2(x_2 - x_1) + x_1^2 - 1 \leq 0 \quad (\text{do } x_1, x_2 \in [0; 1]).$$

$$\Rightarrow x_2^2 + x_1^2 \leq x_1x_2 + 1$$

$$\Rightarrow x_2^2 + x_2 + x_1^2 + x_1 \leq x_1x_2 + x_2 + x_1 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{x_2}{x_1+1} + \frac{x_1}{x_2+1} \leq 1.$$

$$\Rightarrow A \leq 3.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = -\frac{b}{2} = c$.

b) Ta có: $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}; \frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^2}{ca}}; \frac{c}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}}$.

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta được:

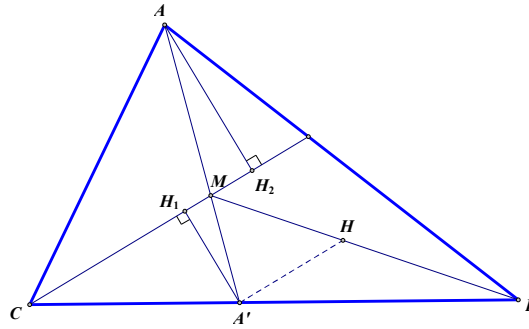
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}. \text{ Nên suy ra } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \geq 6.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

Câu 4:

- a) Cho điểm M tùy ý nằm bên trong tam giác ABC . Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các tam giác MBC, MAC, MAB . Chứng minh rằng $S_1 \cdot \overrightarrow{MA} + S_2 \cdot \overrightarrow{MB} + S_3 \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Lời giải



Gọi A' là giao điểm của đường thẳng MA với BC . Ta có:

$$\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA'} = \frac{MH}{MB} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{HA'}{MC} \cdot \overrightarrow{MC} = \frac{A'C}{BC} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{A'B}{BC} \cdot \overrightarrow{MC}.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} = \frac{MA}{MA'} \cdot \overrightarrow{A'M} = \frac{MA}{MA'} \cdot \left(\frac{A'C}{BC} \cdot \overrightarrow{BM} + \frac{A'B}{BC} \cdot \overrightarrow{CM} \right) = \frac{MA}{MA'} \cdot \frac{A'C}{BC} \cdot \overrightarrow{BM} + \frac{MA}{MA'} \cdot \frac{A'B}{BC} \cdot \overrightarrow{CM}.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta MA'C}} \cdot \frac{S_{\Delta MA'C}}{S_{\Delta MBC}} = \frac{d(A, MC) \cdot MC}{d(A', MC) \cdot MC} \cdot \frac{d(M, A'C) \cdot A'C}{d(M, BC) \cdot BC} = \frac{MA}{MA'} \cdot \frac{A'C}{BC}.$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta MA'B}} \cdot \frac{S_{\Delta MA'B}}{S_{\Delta MBC}} = \frac{MA}{MA'} \cdot \frac{A'B}{BC}.$$

Thay vào ta được:

$$\overrightarrow{MA} = \frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta MBC}} \cdot \overrightarrow{BM} + \frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta MBC}} \cdot \overrightarrow{CM}.$$

Suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot S_{\Delta MBC} + S_{\Delta MAC} \cdot \overrightarrow{MB} + S_{\Delta MAB} \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, điều phải chứng minh.

- b) Trong mặt phẳng Oxy , cho parabol $(P): y = x^2 + px + q$ với $(q \neq 0)$. Biết rằng (P) cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A, B và cắt trục Oy tại C . Chứng minh rằng khi p và q thay đổi, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 + px + q = 0$ có $\Delta = p^2 - 4q > 0$ và có hai nghiệm là $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Khi đó (P) cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt $A = (x_1; 0)$, $B = (x_2; 0)$ và (P) cắt Oy tại điểm $C = (0; q)$.

Gọi $I(x, y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + (y - q)^2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-p}{2} \\ \left(x + \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + (y - q)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{p}{2} \\ y = \frac{1}{2}q + \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Khi đó bán kính:}$$

$$R = IC = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + (q - 1)^2}.$$

Suy ra phương trình đường tròn là:

$$x^2 + y^2 + px - (q + 1)y + q = 0 \Leftrightarrow x.p + (1 - y)q + x^2 + y^2 - y = 0.$$

Do đường tròn đi qua điểm cố định với mọi p, q nên phương trình trên phải vô số nghiệm $(p; q)$

$$\text{suy ra } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ y^2 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Vậy điểm cố định là } M(0; 1).$$

Câu 5: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 2; u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1}$, với $n = 1.2.3 \dots$

- Chứng minh rằng dãy số (u_n) giảm và bị chặn.
- Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Lời giải

$$\text{a) Ta có } u_n^2 = u_n^2 + 1 - 1 \geq 2|u_n| - 1.$$

$$\text{Do đó } u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} \geq 1, \forall n.$$

$$\text{Mặt khác } u_{n+1} - u_n = u_n \left(\frac{1 - 3u_n}{2u_n - 1} \right) < 0, \forall n.$$

Suy ra dãy (u_n) là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 1 và bị chặn trên bởi $u_1 = 2$.

b) Ta có $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2}{u_n} - \frac{1}{u_n^2}$.

Đặt $v_n = \frac{1}{u_n}$, ta có $v_{n+1} = 2v_n - v_n^2 \Leftrightarrow v_{n+1} - 1 = 2v_n - v_n^2 - 1 \Leftrightarrow v_{n+1} - 1 = -(v_n - 1)^2$.

$$\Leftrightarrow v_{n+1} - 1 = (v_{n-1} - 1)^4 \Leftrightarrow v_{n+1} - 1 = (-1)^{n+1} (v_1 - 1)^{2^n} = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}.$$

Suy ra $v_{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} + 1$, hay $v_n = (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-2}} + 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{1 + (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-2}}}.$

Câu 6: Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f\left(\frac{x+y}{2020}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2019}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$

Lời giải

Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn điều kiện trên.

Cho $y = x$, ta suy ra $f\left(\frac{x}{1010}\right) = \frac{2f(x)}{2019}, \forall x > 0.$

Áp dụng đẳng thức trên, ta suy ra:

$$\frac{f(x)+f(y)}{2019} = f\left(\frac{x+y}{2020}\right) = f\left(\frac{\frac{x+y}{2}}{1010}\right) = \frac{2f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2019}, \forall x, y > 0.$$

Từ đó, ta rút ra đẳng thức (1) rất quan trọng là:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \forall x, y > 0 \quad (1).$$

Thay y bởi $y+z$, ta dễ dàng suy ra:

$$f\left(\frac{x+y+z}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y+z)}{2} = \frac{f(x)+\frac{f(2y)+f(2z)}{2}}{2}, \forall x, y, z > 0.$$

Từ đó, với vai trò x, y, z như nhau, ta sẽ suy ra:

$$f(x) + \frac{f(2y)+f(2z)}{2} = \frac{f(2x)+f(2y)}{2} + f(z), \forall x, y, z > 0.$$

Do đó, ta phải có:

$$f(2x) - 2f(x) = f(2z) - 2f(z) = C, \forall x, z > 0.$$

Kết hợp với đẳng thức (1), ta sẽ có:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)+C+2f\left(\frac{y}{2}\right)+C}{2}, \forall x, y > 0.$$

Nói cách khác, ta phải có:

$$f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{y}{2}\right) + C, \forall x, y > 0.$$

Đặt $g(x) = f(x) + C$, ta có $g: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y > 0.$$

Hơn nữa, g cũng phải thỏa mãn điều kiện:

$$g\left(\frac{x}{1010}\right) - C = \frac{2}{2019}(g(x) - C), \forall x > 0.$$

Nói cách khác, ta sẽ có:

$$g\left(\frac{x}{1010}\right) = \frac{2g(x)}{2019} + \frac{2017}{2019}C, \forall x > 0.$$

Chứng minh bằng qui nạp, ta được $g(x) = xg(1)$ với mọi $x \in \mathbb{Q} \cap (0; +\infty)$. Nên cho hằng số

$C = f(2x) - 2f(x) = 0$ thỏa mãn điều kiện với mọi x hữu tỷ dương thì:

$$\frac{xg(1)}{1010} = \frac{2xg(1)}{2019} + \frac{2017}{2019}C \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1010} - \frac{2}{2019}\right)xg(1) = \frac{2017}{2019}C.$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $g(1) = 0$.

Thế thì ta phải có $g(x) = f(x)$ với mọi $x > 0$ và $f(2x) - 2f(x) = 0$, với mọi $x > 0$.

Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y > 0 \\ f\left(\frac{x}{1010}\right) = \frac{2f(x)}{2019}, \forall x > 0 \end{cases}.$$

Cuối cùng, không khó để chứng minh được:

$$1010f\left(\frac{x}{1010}\right) = \underbrace{f\left(\frac{x}{1010}\right) + \dots + f\left(\frac{x}{1010}\right)}_{1010 \text{ lần}} = f\left(\underbrace{\frac{x}{1010} + \dots + \frac{x}{1010}}_{1010 \text{ lần}}\right) = f(x), \forall x > 0.$$

Cho nên ta có phương trình:

$$\frac{f(x)}{1010} = \frac{2f(x)}{2019}, \forall x > 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x > 0.$$

Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = 0$ với mọi $x > 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

HẾT