

Chương 2

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

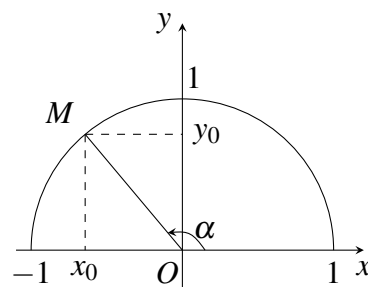
§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KỲ TỪ 0° ĐẾN 180°

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Giá trị lượng giác của một góc bất kỳ từ 0° đến 180°

Định nghĩa 1.

Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), ta xác định một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ và giả sử điểm M có tọa độ $M(x_0; y_0)$. Khi đó ta định nghĩa:



- **sin** của góc α là y_0 , ký hiệu $\sin \alpha = y_0$;
- **cô-sin** của góc α là x_0 , ký hiệu $\cos \alpha = x_0$;
- **tang** của góc α là $\frac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \neq 0$), ký hiệu $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$;
- **cô-tang** của góc α là $\frac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$), ký hiệu $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$.

Các số $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là các *giá trị lượng giác của góc α* .

Chú ý.

- Nếu α là góc tù thì $\cos \alpha < 0, \tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$.
- $\tan \alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 90^\circ$.
- $\cot \alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 0^\circ$ và $\alpha \neq 180^\circ$.

Tính chất 1. Về dấu của các giá trị lượng giác.

- $\sin \alpha > 0$ với $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- $\cos \alpha > 0$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $\cos \alpha < 0$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- $\tan \alpha > 0$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $\tan \alpha < 0$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- $\cot \alpha > 0$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $\cot \alpha < 0$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Như vậy, $\cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ luôn cùng dấu với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Tính chất 2. Mối quan hệ giữa hai góc bù nhau.

- $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$.
- $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$.
- $\tan \alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$ với $\alpha \neq 90^\circ$.
- $\cot \alpha = -\cot(180^\circ - \alpha)$ với $\alpha \neq 0^\circ, 180^\circ$.

Tính chất 3. Mỗi quan hệ giữa hai góc phụ nhau (với $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$).

- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.
- $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$ với $\alpha \neq 0^\circ$.
- $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$ với $\alpha \neq 90^\circ$.

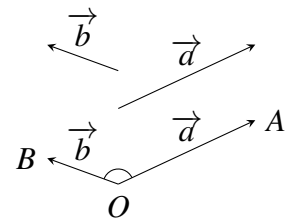
Tính chất 4. Các công thức cơ bản.

- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.
- $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

2. Góc giữa hai vec-tơ

Định nghĩa 2.

Cho hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vec-tơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kỳ, ta vẽ $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là góc giữa hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta ký hiệu góc giữa hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$. Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, ký hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.



! Từ định nghĩa ta có $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

Tính chất 5. Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$.

Tính chất 6. Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Tính các giá trị lượng giác

Sử dụng các công thức cơ bản ở phần lý thuyết để tính ra các giá trị lượng giác.

! Cần chú ý dấu của các giá trị lượng giác khi tính.

Ví dụ 1. Cho $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ biết $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Lời giải. Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$.

Với $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ thì $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Từ đó suy ra $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$, $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{15}$.

Ví dụ 2. Cho $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

Lời giải. Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$.

$$\text{Với } \cos \alpha = -\frac{1}{3} \text{ thì } \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

$$\text{Vì } \sin \alpha \text{ luôn dương nên } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -2\sqrt{2}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ví dụ 3. Cho $\tan x = 2$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc x .

Lời giải. Trước hết, ta có $\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{2}$.

$$\text{Mặt khác, } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + 2^2} = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Vì } \tan x \text{ và } \cos x \text{ cùng dấu nên } \cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Áp dụng công thức } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}. \text{ Từ đó suy ra } \sin x = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Ví dụ 4. Cho $\cot x = -3$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc x .

Lời giải. Trước hết ta có $\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\cot x} = -\frac{1}{3}$.

$$\text{Mặt khác } 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{1 + (-3)^2} = \frac{1}{10}. \text{ Suy ra } \sin x = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{Do } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \cos x = \sin x \cdot \cot x = \frac{-3\sqrt{10}}{10}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

Lời giải. Đáp số: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cot \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Bài 2. Cho $\sin x = \frac{3}{4}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc x biết $90^\circ < x < 180^\circ$.

Lời giải. Đáp số: $\cos x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan x = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$, $\cot x = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

Bài 3. Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

Lời giải. Đáp số: $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Bài 4. Cho $\cot \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc β .

Lời giải. Đáp số: $\tan \beta = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\sin \beta = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, $\cos \beta = -\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Bài 5. Cho $\tan(180^\circ - a) = -\frac{1}{2}$. Tính các giá trị lượng giác của góc a .

Lời giải. Đáp số: $\tan a = \frac{1}{2}$, $\cot a = 2$, $\cos a = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin a = \frac{5}{5}$.

Bài 6. Cho $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Tính các giá trị còn lại của góc α .

Lời giải. Đáp số: $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\tan \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cot \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

Bài 7. Cho $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{2}{5}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính các giá trị lượng giác của góc α .

Lời giải. Đáp số: $\sin \alpha = \frac{2}{5}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$, $\cot \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Dạng 2. Tính giá trị các biểu thức lượng giác.

Từ giả thiết đề cho (thường là giá trị của góc hay một giá trị lượng giác) định hướng biến đổi biểu thức về dạng chỉ xuất hiện giá trị đã cho của giả thiết để tính.

 Cần chú ý điều kiện áp dụng (nếu có).

Ví dụ 5. Tính $A = a \cos 60^\circ + 2a \tan 45^\circ - 3a \sin 30^\circ$.

Lời giải. Ta có $A = \frac{1}{2}a + 2a - \frac{1}{2} \cdot 3a = a$.

Ví dụ 6. Cho $x = 30^\circ$. Tính $A = \sin 2x - 3 \cos x$.

Lời giải. $A = \sin 2 \cdot (30^\circ) - 3 \cos 30^\circ = \sin 60^\circ - 3 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$.

Ví dụ 7. Cho $\cos x = \frac{1}{3}$. Tính giá trị biểu thức $P = 4 \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Lời giải. Ta có $P = 4(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x = 4 - 3 \cos^2 x = 4 - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{3}$.

Ví dụ 8. Cho $\tan x = 2$. Tính $A = \frac{3 \sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

Lời giải. Ta có $A = \frac{3 \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}} = \frac{3 \tan x + 1}{\tan x - 1} = 7$.

Ví dụ 9. Cho $\sin x = \frac{2}{3}$. Tính $B = \frac{\cot x - \tan x}{\cot x + \tan x}$.

Lời giải. Ta có $B = \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}} = 2 \sin^2 x - 1 = -\frac{1}{9}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 8. Tính

a. $A = 5 - \cos^2 0^\circ + 2 \sin^2 30^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$.

b. $B = 2 \cos 2x + 3 \sin 3x$ với $x = 45^\circ$.

Bài 9. Tính

a. $A = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \dots \tan 80^\circ$.

b. $B = \cot 20^\circ + \cot 40^\circ + \dots + \cot 140^\circ + \cot 160^\circ$.

Lời giải. Hướng dẫn:

a. Ta có: $\tan 10^\circ = \cot 80^\circ$, $\tan 20^\circ = \cot 70^\circ$, $\tan 30^\circ = \cot 60^\circ$, $\tan 40^\circ = \cot 50^\circ$. Do đó, ta tính được $A = 1$.

b. Ta có: $\cot 20^\circ = -\cot 160^\circ$, $\cot 40^\circ = -\cot 140^\circ$, ... nên ta tính được $B = 0$.

Bài 10. Cho $\cot a = -3$. Tính $A = \frac{\sin a - 2 \cos a}{3 \cos a + 2 \sin a}$.

Lời giải. Đáp số: $A = -1$.

Bài 11. Biết $\tan a = 2$. Tính $B = \frac{\sin^3 a + 2 \cos^2 a \cdot \sin a}{\cot a \cdot \sin^3 a - 2 \cos a}$.

Lời giải. Đáp số: $B = 6$

Bài 12. Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$. Tính $C = \frac{2 \tan \alpha + \cot \alpha}{4 \tan \alpha - 3 \cot \alpha}$.

Lời giải. Đáp số: $C = 23$

Bài 13. Biết $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$. Tính $D = \sin x \cdot \cos x$.

Lời giải. Hướng dẫn: Ta có $\frac{1}{9} = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin x \cos x$. Từ đó suy ra $\sin x \cdot \cos x = -\frac{4}{9}$.**Dạng 3. Chứng minh đẳng thức lượng giác**

Sử dụng linh hoạt các công thức cơ bản, các phép biến đổi đại số và sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ để rút gọn và chứng minh.

Ví dụ 10. Cho $\begin{cases} a = \sin x \\ b = \cos x \sin x \\ c = \cos x \cos y \end{cases}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 + c^2 &= \sin^2 x + \cos^2 x (1 - \cos^2 y) + \cos^2 x \cos^2 y \\
 &= \sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \cos^2 y \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 11. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$.

b) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$.

c) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$.

d) $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = 1$.

Lời giải.

- a) Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$
Do $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nên ta suy ra $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$.
- b) $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2 = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
Do $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nên $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$
Tương tự ta có $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.
- c) $\tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x \sin^2 x$
- d) Ta có $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = \frac{1 + \tan x + 1 + \cot x}{(1 + \tan x)(1 + \cot x)}$.
Mặt khác $(1 + \tan x)(1 + \cot x) = 1 + \tan x \cot x + \tan x + \cot x = 2 + \tan x + \cot x$.
Từ đó suy ra $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = \frac{2 + \tan x + \cot x}{2 + \tan x + \cot x} = 1$.

Ví dụ 12. Cho A, B, C là các góc của tam giác. Chứng minh các đẳng thức sau:

- a) $\sin(A + B) = \sin C$.
b) $\cos(A + B) + \cos C = 0$.
c) $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$.
d) $\tan(A - B + C) = -\tan 2B$.

Lời giải. Do A, B, C là các góc của tam giác nên ta có $A + B + C = 180^\circ$.

- a) Ta có $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow A + B = 180^\circ - C$.
Từ đó suy ra $\sin(A + B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$.
- b) Ta có $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow A + B = 180^\circ - C$.
Từ đó suy ra $\cos(A + B) = \cos(180^\circ - C) = -\cos C \Rightarrow \cos(A + B) + \cos C = 0$.
- c) Ta có $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{180^\circ - C}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$.
Từ đó suy ra $\sin \frac{A+B}{2} = \sin \left(90^\circ - \frac{C}{2} \right) = \cos \frac{C}{2}$.
- d) Ta có $\tan(A - B + C) = \tan(A + B + C - 2B) = \tan(180^\circ - 2B) = -\tan 2B$.

Ví dụ 13. Chứng minh rằng các biểu thức sau có giá trị không phụ thuộc vào x .

- a) $A = \sin^8 x + \sin^6 x \cos^2 x + \sin^4 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x$
b) $B = \frac{1 - \sin^6 x}{\cos^6 x} - \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x}$

Lời giải.

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= \sin^8 x + \sin^6 x \cos^2 x + \sin^4 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x \\
 &= \sin^6 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin^4 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x \\
 &= \sin^6 x + \sin^4 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x \\
 &= \sin^4 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x \\
 &= \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x \\
 &= \sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x \\
 &= \sin^2 x + \cos^2 x = 1.
 \end{aligned}$$

b) Điều kiện $\cos x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1 - \sin^6 x}{\cos^6 x} - \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{1 - \sin^6 x}{\cos^6 x} - \frac{3 \sin^2 x}{\cos^4 x} \\
 &= \frac{1 - \sin^6 x}{\cos^6 x} - \frac{3 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} \\
 &= \frac{1 - \sin^6 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} \\
 &= \frac{(1 - \sin^2 x)^3 + 3 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) - 3 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} \\
 &= \frac{(\cos^2 x)^3 + 3 \sin^2 x \cos^2 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} \\
 &= \frac{\cos^6 x}{\cos^6 x} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 14. Tìm m để biểu thức $P = \sin^6 x + \cos^6 x - m(\sin^4 x + \cos^4 x)$ có giá trị không phụ thuộc vào x .

Lời giải. Ta có:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x.$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x.$$

$$\text{Từ đó suy ra } P = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x - m(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) = 1 - m + (2m - 3) \sin^2 x \cos^2 x.$$

$$\text{Do đó } P \text{ có giá trị không phụ thuộc vào } x \text{ khi và chỉ khi } 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 15. Cho a, b là các số dương và thỏa mãn hệ thức $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin^{2018} x}{a^{1008}} + \frac{\cos^{2012} x}{b^{1008}} = \frac{1}{(a+b)^{1008}}.$$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} &= \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow (a+b) \left(\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow (a+b) \left(\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} \right) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{b} \cos^4 x + \frac{b}{a} \sin^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{b}{a}} \cos^2 x - \sqrt{\frac{a}{b}} \sin^2 x \right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{b}{a}} \cos^2 x = \sqrt{\frac{a}{b}} \sin^2 x \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{a} = \frac{\cos^2 x}{b}\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\frac{\sin^2 x}{a} = \frac{\cos^2 x}{b} = \frac{1}{a+b} > 0$.

Đặt $t = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = at \\ \cos^2 x = bt \end{cases}$, do đó ta có $\begin{cases} \sin^{2018} x = a^{1009} t^{1009} \\ \cos^{2018} x = b^{1009} t^{1009} \end{cases}$.

$$\text{Vậy } \frac{\sin^{2018} x}{a^{1008}} + \frac{\cos^{2018} x}{b^{1008}} = \frac{a^{1009} t^{1009}}{a^{1008}} + \frac{b^{1009} t^{1009}}{b^{1008}} = (a+b)t^{1009} = \frac{1}{(a+b)^{1008}}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 14. Cho $A = \sin \alpha, B = \cos \alpha \sin \beta, C = \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma, D = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$. Chứng minh rằng $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$.

Bài 15. Chứng minh đẳng thức lượng giác sau:

a) $\frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 + 2 \tan^2 x$.

b) $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x = \frac{1}{\cos x}$.

c) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$.

Bài 16. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x

a) $A = \sin^4 x (3 - \sin^2 x) + \cos^4 x (3 - 2 \cos^2 x)$.

b) $B = 3 (\sin^8 x - \cos^8 x) + 4 (\cos^6 x - \sin^6 x) + 6 \sin^4 x$.

c) $C = \sin^8 x + \cos^8 x + 6 \sin^4 x \cos^4 x + 4 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^4 x + \cos^4 x)$.

Bài 17. Tìm m để biểu thức $P = \sin^6 x + \cos^6 x + m (\sin^6 x + \cos^6 x) + 2 \sin^2 2x$ không phụ thuộc vào x

Lời giải. Sử dụng các hằng đẳng thức rút gọn biểu thức P ta được $P = 1 + m + \frac{5-m}{4} \sin^2 2x$

Từ đó suy ra P không phụ thuộc vào x khi và chỉ khi $m = 5$.

Bài 18. Cho $f(x) = \sin^6 x + \frac{3}{4} \sin^2 2x + \cos^6 x$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2017}\right)$.

Lời giải. Rút gọn $f(x)$ ta có $f(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$, từ đó suy ra $f\left(\frac{\pi}{2017}\right) = 1$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 19. Cho $\cos a + 2\sin a = 0$. Tính các giá trị lượng giác của góc a .

Lời giải. Hướng dẫn: $\cos \alpha + 2\sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{1}{2}$. Từ đó ta được

$$\text{Đáp số: } \tan a = -\frac{1}{2}, \cot a = -2, \cos a = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin a = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Bài 20. Cho $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{7}{8}$. Tính các giá trị lượng giác của góc x biết x là góc tù.

Lời giải. Hướng dẫn: $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{7}{8} \Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{7}{8}$ (1). Ta lại có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (2). Giải hệ phương trình gồm (1) và (2) ta tìm được các giá trị $\sin x$ và $\cos x$.

$$\text{Đáp số: } \cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}, \sin x = \frac{1}{4}, \tan x = -\frac{\sqrt{15}}{15}, \cot x = -\sqrt{15}.$$

Bài 21. Tính $C = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 170^\circ + \sin^2 180^\circ$.

Lời giải. Hướng dẫn: $\sin 10^\circ = \sin 170^\circ, \sin 20^\circ = \sin 160^\circ, \dots$, suy ra $C = 2(\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ) + \sin^2 90^\circ$. Mặt khác ta có $\sin 80^\circ = \cos 10^\circ, \sin 70^\circ = \cos 20^\circ, \dots$, có 4 cặp như vậy nên ta tính được $C = 5$.

Bài 22. Cho $\sin x + \cos x = \frac{3}{4}$. Tính $\sin^4 x + \cos^4 x$.

Lời giải. Trước hết ta có $\frac{9}{16} = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + 2\sin x \cos x$, suy ra $\sin x \cos x = \frac{-7}{32}$.

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2(\sin x \cos x)^2 \\ &= 1 - 2\left(\frac{-7}{32}\right)^2 = \frac{463}{512} \end{aligned}$$

Bài 23. Cho $\sin^4 x + 3\cos^4 x = \frac{7}{4}$. Tính $\cos^4 x + 3\sin^4 x$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} \sin^4 x + 3\cos^4 x &= \frac{7}{4} \Leftrightarrow (1 - \cos^2 x)^2 + 3\cos^4 x = \frac{7}{4} \\ &\Leftrightarrow 4\cos^4 x - 2\cos^2 x - \frac{3}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

từ đó ta được

$$\begin{aligned} \cos^4 x + 3\sin^4 x &= \cos^4 x + 3(1 - \cos^2 x)^2 \\ &= \frac{9}{16} + 3\left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Bài 24. Cho $2\sin x \sin y - 3\cos x \cos y = 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x} + \frac{1}{2\sin^2 y + 3\cos^2 y} = \frac{5}{6}.$$

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $2\tan x = 3\cot y \Leftrightarrow \tan y = \frac{3}{2\tan x}$.

Biến đổi về trái đẳng thức cần chứng minh theo $\tan x, \tan y$ ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 25. Cho $6\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 2 = 0$. Biết $A = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{2\cos \alpha - 1} = a + b \tan \alpha$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $a + b$.

Lời giải. Điều kiện $2\cos \alpha - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos \alpha \neq \frac{1}{2}$.

$$\text{Ta có } 6\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \cos \alpha = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Do $\cos \alpha \neq \frac{1}{2}$ nên $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$.

$$\text{Mặt khác } A = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{2\cos \alpha - 1} = \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{2}{3} \tan \alpha$$

$$\text{Từ đó suy ra } \begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow a + b = -\frac{2}{3}.$$

§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

§3. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VEC-TƠ

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Trường hợp ít nhất một trong hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng véc-tơ $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.



a) Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác véc-tơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

b) Khi $\vec{a} = \vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của véc-tơ $\vec{a}$.

$$\text{Ta có: } \vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2.$$

2. Các tính chất của tích vô hướng

Tính chất 1. Với ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k \cdot \vec{b})$;
- $\vec{a}^2 \geq 0$, $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Nhận xét: Từ các tính chất của tích vô hướng hai véc-tơ ta suy ra

- $(\vec{a} + \vec{a})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$;
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$;
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trong mặt phẳng tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Khi đó tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Nhận xét:

Hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác véc-tơ $\vec{0}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

4. Ứng dụng

a) Độ dài véc-tơ:

Độ dài của véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ được xác định bởi công thức: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

b) Góc giữa hai véc-tơ: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

c) Khoảng cách giữa hai điểm:

Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ được tính theo công thức:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

II. Các dạng toán

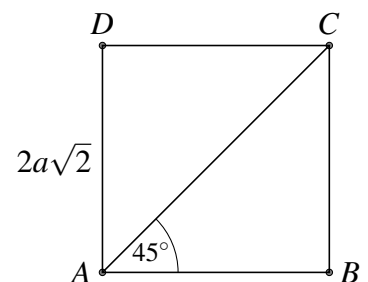
Dạng 1. Các bài toán tính tích vô hướng của hai véc-tơ

- Áp dụng công thức của định nghĩa: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
- Sử dụng tính chất phân phối: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
- Hai véc-tơ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $2a\sqrt{2}$. Tính tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AC})$. Vì tam giác ABC vuông tại A nên $AC^2 = AB^2 + BC^2 = (2a\sqrt{2})^2 + (2a\sqrt{2})^2 = 16a^2$
 $\Rightarrow AC = 4a$. Suy ra $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2a\sqrt{2} \cdot 4a \cdot \cos 45^\circ = 8a^2$.



Ví dụ 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a\sqrt{2}$, $AD = 2a$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD .

- Phân tích $\vec{BK}$, $\vec{AC}$ theo $\vec{AB}$ và $\vec{AD}$.
- Tính tích vô hướng $\vec{BK} \cdot \vec{AC}$.

Lời giải.

a) Gọi M là trung điểm của cạnh BC

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

$$\text{Mặt khác: } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

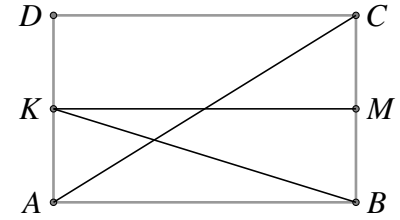
b) Ta có: $AB = a\sqrt{2}, AC = BD = \sqrt{2a^2 + 4a^2} = a\sqrt{6}$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$$

$$= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= -2a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(2a)^2 = 0.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$



Ví dụ 3. Cho hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$. Tính cosin của góc giữa hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{a} + \vec{b}$.

Lời giải.

Dựng tam giác ABC có $AB = 5, BC = 12, AC = 13$.

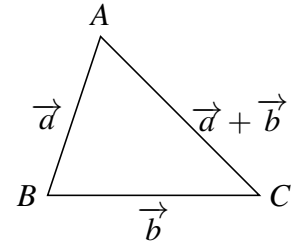
Ta có: $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 12, |\vec{a} + \vec{b}| = 13$

và $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Khi đó: $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$\text{Mặt khác: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(13^2 + 5^2 - 12^2) = 25.$$

$$\text{Vậy } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{25}{5 \cdot 13} = \frac{5}{13}.$$



Ví dụ 4. Cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm của đoạn thẳng AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $AN = 3NC$.

a) Phân tích $\overrightarrow{DN}, \overrightarrow{MN}$ theo 2 vec-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Chứng minh rằng $DN \perp MN$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{DN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

Mặt khác

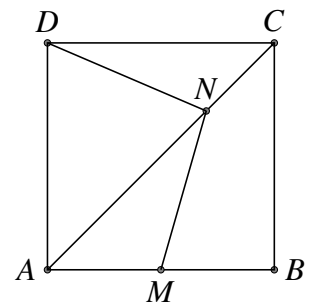
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}.$$

b) Để chứng minh $DN \perp MN$ thì ta chứng minh $\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{MN} = \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)$$

$$\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{3}{16}AB^2 - \frac{3}{16}AD^2 = 0 \text{ (vì } AB \perp AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0).$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{DN} \perp \overrightarrow{MN} \Rightarrow DN \perp MN.$$



Ví dụ 5. Cho tam giác ABC đều cạnh $3a$. Lấy M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = a, CN = 2a, AP = x (x > 0)$.

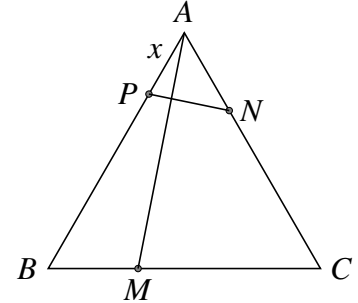
- a) Phân tích $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{NP}$ theo 2 vec-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
b) Tìm x để AM vuông góc với NP .

Lời giải.

a) Ta có: $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 3(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB})$
 $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Mặt khác: $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AN} = \frac{x}{3a}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{9a^2}{2}$.
 Để $AM \perp NP$ thì $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\frac{x}{3a}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{2x}{9a}AB^2 - \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{x}{9a}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{9}AC^2 = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{2x}{9a} \cdot (3a)^2 - \frac{2}{9} \cdot \frac{9a^2}{2} + \frac{x}{9a} \cdot \frac{9a^2}{2} - \frac{1}{9} \cdot (3a)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{4a}{5}$.

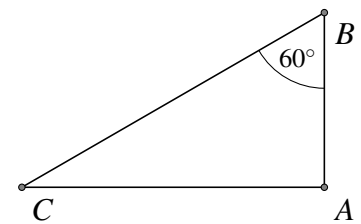


BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ, AB = a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Ta có:
 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -CA \cdot CB \cdot \cos \widehat{ACB}$
 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \cos 30^\circ = -3a^2$.

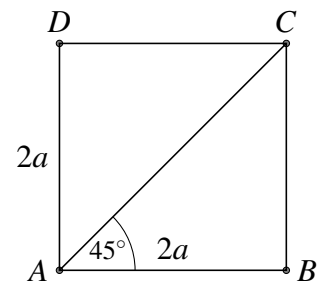


Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$ nên $AC = 2a\sqrt{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = 2a \cdot 2a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4a^2$.



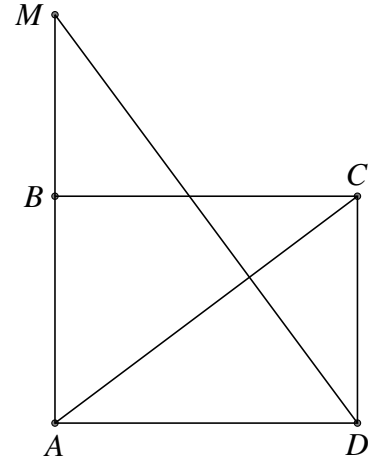
Bài 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3, AD = 4$. Gọi M là điểm thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. Tìm k để AC vuông góc với DM .

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\vec{AC} \cdot \vec{DM} &= (\vec{BC} - \vec{BA}) \cdot (\vec{AM} - \vec{AD}) \\ &= \vec{AM} \cdot (\vec{BC} - \vec{BA}) - \vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{BA} \cdot \vec{AD} \\ &= \vec{AM} \cdot \vec{AC} - \vec{BC} \cdot \vec{AD} = -16 + 9k.\end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } AC \perp DM \Leftrightarrow \vec{AC} \cdot \vec{DM} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{16}{9}.$$

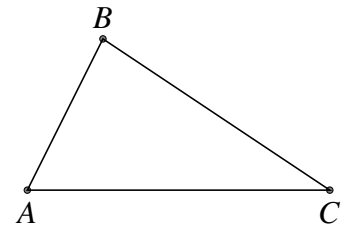


Bài 4. Cho tam giác ABC có $AB = 5, AC = 8, BC = 7$. Tính tích vô hướng $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } BC^2 = \vec{BC}^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = \vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB}.$$

$$\text{Suy ra } \vec{AC} \cdot \vec{AB} = \frac{\vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - \vec{BC}^2}{2} = 20.$$



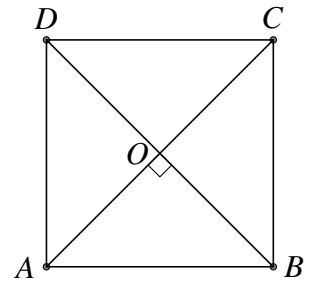
Bài 5. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MD^2.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}MA^2 + MB^2 + MC^2 &= 3MD^2 \\ \Leftrightarrow \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 &= 3\vec{MD}^2 \\ \Leftrightarrow (\vec{MO} + \vec{OA})^2 + (\vec{MO} + \vec{OB})^2 + (\vec{MO} + \vec{OC})^2 &= 3(\vec{MO} + \vec{OD})^2 \\ \Leftrightarrow \vec{MO} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - 3\vec{OD}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{MO} \cdot (\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{MO} \cdot \vec{DB} &= 0 \text{ (vì } \vec{DA} + \vec{DC} = \vec{DB}). \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{MO} = \vec{0} \\ MO \perp DB \end{cases} &\text{ . Vậy tập hợp các điểm } M \text{ là đường thẳng } AC.\end{aligned}$$



Bài 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) tâm O . Tìm vị trí điểm M thuộc đường tròn (C) để $P = MA^2 + MB^2 - 2MC^2$ đạt GTLN, GTNN.

Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBD$, R là bán kính của đường tròn (C) .

Khi đó: $\vec{CA} + \vec{CB} = \vec{CD}$; $OA = OB = OC = R$.

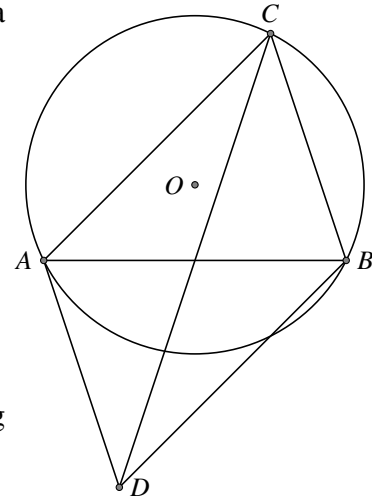
$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= MA^2 + MB^2 - 2MC^2 \\ &= (\vec{MO} + \vec{OA})^2 + (\vec{MO} + \vec{OB})^2 - 2(\vec{MO} + \vec{OC})^2 \\ &= 2\vec{MO}(\vec{OA} + \vec{OB} - 2\vec{OC}) + OA^2 + OB^2 - 2OC^2 \\ &= 2\vec{MO}(\vec{CA} + \vec{CB}) = 2\vec{MO} \cdot \vec{CD} = 2R \cdot CD \cdot \cos(\vec{MO}, \vec{CD}) \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$-1 \leq \cos(\vec{MO}, \vec{CD}) \leq 1 \Leftrightarrow -2R \cdot CD \leq P \leq 2R \cdot CD.$$

Vậy $\min P = -2R \cdot CD$ khi $\cos(\vec{MO}, \vec{CD}) = -1$ tức là M thuộc đường tròn (C) sao cho $\vec{MO}, \vec{CD}$ ngược hướng.

$\max P = 2R \cdot CD$ khi $\cos(\vec{MO}, \vec{CD}) = 1$ tức là M thuộc đường tròn (C) sao cho $\vec{MO}, \vec{CD}$ cùng hướng.



Dạng 2. Tính góc giữa hai véc-tơ -góc giữa hai đường thẳng-điều kiện vuông góc

Để tính góc giữa hai vectơ, ta sử dụng định nghĩa tích vô hướng kết hợp các kĩ thuật tính tích vô hướng.

Để tính góc giữa hai đường thẳng, ta tính góc giữa hai véc-tơ có giá là hai đường thẳng đã cho rồi suy ra góc giữa hai đường thẳng.

Để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ta chứng minh góc giữa hai đường thẳng bằng 90° .

Ví dụ 6. Cho các véc-tơ $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$. Tìm góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải. Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$

Do đó góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ mà $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC có $AB = 2, BC = 4, CA = 3$. Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ và $\cos A$.

Lời giải. Ta có $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{\vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 - (\vec{AB} - \vec{AC})^2}{2} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = -\frac{3}{2}.$

Lại có $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A$ nên $\cos A = -\frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4}.$

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $A(1;3)$ và $B(3;-1)$. Tính góc giữa đường thẳng OA và AB .

Lời giải. Ta có $\vec{AO} = (-1; -3)$ và $\vec{AB} = (2; -4).$

Ta có $\cos(\vec{AO}, \vec{AB}) = \frac{\vec{AO} \cdot \vec{AB}}{AO \cdot AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Góc giữa véc-tơ $\vec{AO}$ và $\vec{AB}$ bằng góc $\widehat{BAO} = 45^\circ$. Do đó góc giữa đường thẳng OA và đường thẳng AB bằng 45° .

Ví dụ 9. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{2}$. Chứng minh rằng hai véc-tơ $2\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau.

Lời giải. Ta có $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Do đó hai véc-tơ $2\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau.

Ví dụ 10. Cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm của AB và N là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $DM \perp AN$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}\vec{AN} \cdot \vec{DM} &= \left(\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}\right) \cdot \left(\vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{AB}\right) \\ &= \frac{1}{2}\vec{AB}^2 + \frac{1}{2}\vec{BC} \cdot \vec{DA} + \vec{AB} \cdot \vec{DA} + \frac{1}{4}\vec{BC} \cdot \vec{AB} \\ &= 0\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $DM \perp AN$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Cho hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và véc-tơ $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ vuông góc với véc-tơ $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$. Tính góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot \vec{y} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) &= 0 \\ \Leftrightarrow 5|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8|\vec{b}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}.$$

Từ đó suy ra góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 60° .

Bài 8. Cho các véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Tính góc giữa véc-tơ $\vec{a}$ và véc-tơ $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải. Ta có $\vec{c}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ nên $|\vec{c}| = \sqrt{3}$.

$$\text{Lại có } \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 3.$$

$$\text{Do đó } |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{c}) = 3 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Từ đó tính được góc giữa véc-tơ } \vec{a} \text{ và } \vec{c} \text{ là } 30^\circ.$$

Bài 9. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và BD .

Lời giải. Từ giả thiết suy ra:

$$\begin{aligned}AB^2 + CD^2 &= BC^2 + AD^2 \\ \Leftrightarrow \vec{AB}^2 + \vec{CD}^2 &= \vec{BC}^2 + \vec{AD}^2 \\ \Leftrightarrow \vec{AB}^2 - \vec{AD}^2 + \vec{CD}^2 - \vec{BC}^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\vec{AB} - \vec{AD})(\vec{AB} + \vec{AD}) + (\vec{CD} - \vec{BC})(\vec{CD} + \vec{BC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{DB}(\vec{AB} + \vec{AD}) + (\vec{CD} - \vec{BC})\vec{BD} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{DB}(\vec{AB} + \vec{AD} - \vec{CD} + \vec{BC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{DB}(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AD} + \vec{DC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{DB} \cdot 2\vec{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow DB \perp AC.\end{aligned}$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AC và BD bằng 90° .

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a; AC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC và điểm D bất kì thuộc cạnh AC . Tính AD theo a để $BD \perp AM$.

Lời giải.

Ta có

$$AM \perp BD$$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BD} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC}) \vec{BD} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{AB} + \vec{AC}) (\vec{AD} - \vec{AB}) = 0$$

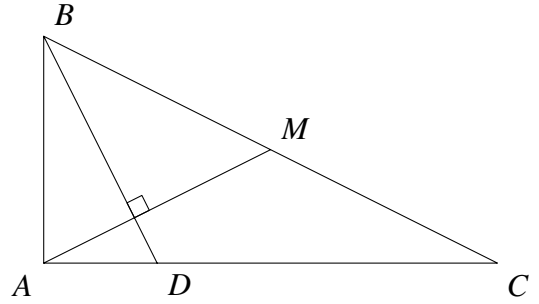
$$\Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AB}^2 + \vec{AC} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - a^2 + \vec{AC} \cdot \vec{AD} - 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{AC} \cdot \vec{AD} = a^2$$

$$\Leftrightarrow 2a \cdot AD \cdot \cos 0^\circ = a^2$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{a}{2}.$$



Bài 11. Cho tam giác ABC cân tại A , H là trung điểm BC , K là hình chiếu của H trên AC và M là trung điểm của HK . Chứng minh rằng $AM \perp BK$.

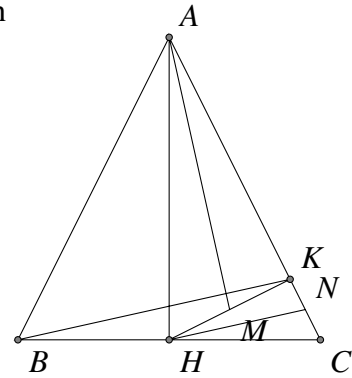
Lời giải.

Gọi N là trung điểm của KC . Khi đó $HN \parallel BK$ nên cần chứng minh $AM \perp HN$.

Ta có $2\vec{AM} = \vec{AH} + \vec{AK}$; $2\vec{HN} = \vec{HK} + \vec{HC}$. Do đó

$$\begin{aligned} 4\vec{AM} \cdot \vec{HN} &= (\vec{AH} + \vec{AK}) \cdot (\vec{HK} + \vec{HC}) \\ &= \vec{AH} \cdot \vec{HK} + \vec{AH} \cdot \vec{HC} + \vec{AK} \cdot \vec{HK} + \vec{AK} \cdot \vec{HC} \\ &= \vec{AH} \cdot \vec{HK} + \vec{AK} \cdot \vec{HC} \\ &= AH \cdot HK \cdot \cos(\vec{AH}, \vec{HK}) + AK \cdot HC \cdot \cos(\vec{AK}, \vec{HC}) \\ &= -AH \cdot HK \cdot \cos \widehat{AHK} + AK \cdot HC \cdot \cos \widehat{ACH}. \quad (*) \end{aligned}$$

Để thấy tam giác AHK và HCK đồng dạng nên $AH \cdot HK = AK \cdot HC$ và $\widehat{AHK} = \widehat{ACH}$ nên từ (*) có $\vec{AM} \cdot \vec{HN} = 0$ hay $AM \perp HK$.



Dạng 3. Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng hoặc về độ dài.

Liên quan đến đẳng thức về tích vô hướng hoặc độ dài ta có hai bài toán tiêu biểu:

- Bài toán 1: Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng hoặc độ dài. Đối với dạng này ta thường sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các tính chất của véc tơ để biến đổi tương đương đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức luôn đúng hoặc biến đổi về này thành về kia hoặc biến đổi cả 2 về cùng bằng một biểu thức trung gian.
- Bài toán 2: Tìm điểm hoặc tập hợp điểm M thỏa mãn một đẳng thức véc tơ hoặc độ dài. Thông thường ta biến đổi đẳng thức ban đầu về dạng $IM = R$ trong đó I cố định, R không đổi hoặc $\vec{IM} \cdot \vec{u} = 0$ trong đó I cố định và $\vec{u}$ là một véc tơ xác định.

Ví dụ 11. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì. Chứng minh rằng:

$$\vec{DA} \cdot \vec{BC} + \vec{DB} \cdot \vec{CA} + \vec{DC} \cdot \vec{AB} = 0.$$

Lời giải. Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{DA}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) = 0 \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} = 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC có diện tích bằng S . Chứng minh rằng:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4} AB^2 \cdot AC^2 \cdot \sin^2 A = \frac{1}{4} AB^2 \cdot AC^2 (1 - \cos^2 A) \\ &= \frac{1}{4} [AB^2 \cdot AC^2 - (AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}))^2] \\ &= \frac{1}{4} [AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2] \end{aligned}$$

Vậy ta được $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$.

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC có trực tâm H và trung điểm cạnh BC là M . Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4} BC^2$.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ và $\overrightarrow{HM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$ nên

$$\begin{aligned} 4 \cdot \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MH} &= 4 \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{HM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HC} \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HC} \\ &= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = CB^2. \end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4} BC^2$.

Ví dụ 14. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a . Tìm tập hợp tất cả các điểm M sao cho

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{a^2}{4}$$

Lời giải. $\oplus$ **Phân thuận.** Giả sử ta có điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Gọi O là tâm của tam giác ABC , ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MO}$, suy ra

$$\begin{aligned} & (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = 9OM^2 \\ \Leftrightarrow & MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) = 9MO^2 \end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 \\ &= 3MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{MO} \\ &= 3MO^2 + a^2 \end{aligned}$$

Như vậy, ta được

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 3MO^2 - \frac{a^2}{2}$$

Do đó

$$3OM^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow OM = \frac{a}{2}$$

⊕ **Phần đảo.** Giả sử ta có điểm M thuộc đường tròn tâm O bán kính $R = \frac{a}{2}$. Bằng cách biến đổi tương tự phần thuận ta được $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{a^2}{4}$.
Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm O bán kính $R = \frac{a}{2}$.

Ví dụ 15. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn $MA^2 - MB^2 + CA^2 - CB^2 = 0$.

Lời giải. ⊕ **Phần thuận:** Gọi I là trung điểm AB . Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 - MB^2 + CA^2 - CB^2 &= (\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2) + (\overrightarrow{CA}^2 - \overrightarrow{CB}^2) \\ &= (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \\ &= 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CI} \\ &= 2\overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{CI}). \end{aligned}$$

Dựng véc tơ $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CI}$, kết hợp với giả thiết ta được

$$0 = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ}) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MJ}$$

Do đó M thuộc đường thẳng Δ đi qua J và vuông góc với AB .

⊕ **Phần đảo:** Giả sử $M \in \Delta$, biến đổi ngược lại so với phần thuận ta được $MA^2 - MB^2 + CA^2 - CB^2 = 0$.
Vậy tập hợp điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường thẳng đi qua J và vuông góc với AB .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 12. Cho hai điểm A, B và O là trung điểm của AB . Gọi M là một điểm tùy ý Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 - OA^2$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM})(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OM} + OM^2 \\ &= OM^2 - OA^2. \end{aligned}$$

Bài 13. Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} AB^2 + CD^2 &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB})^2 + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD})^2 \\ &= AD^2 + 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AD} + DB^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CB} \\ &= BC^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{DB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) \\ &= BC^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD}. \end{aligned}$$

Do đó $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Bài 14. Cho tam giác ABC có trực tâm H . Gọi M là trung điểm BC . Chứng minh rằng $MH^2 + MA^2 = AH^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} AH^2 &= (\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MA})^2 \\ &= MH^2 + MA^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MH} \\ &= MH^2 + MA^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}BC^2 \quad (\text{Xem Ví dụ 13}) \end{aligned}$$

Do đó $MH^2 + MA^2 = AH^2 + \frac{1}{2}BC^2$

Bài 15. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp tất cả các điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ Do đó M thuộc đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .

Bài 16. Cho hai điểm A, B có $AB = a$ và một số thực $k > 0$. Tùy theo k , tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $MA^2 + MB^2 = k$.

Lời giải. Gọi O là trung điểm của AB . Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 \\ &= 2MO^2 + 2OA^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= 2MO^2 + 2OA^2 = 2MO^2 + \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

Suy ra $OM^2 = \frac{1}{2} \left(k - \frac{a^2}{2} \right)$.

- Nếu $k > \frac{a^2}{2}$ thì $OM = \sqrt{\frac{1}{2} \left(k - \frac{a^2}{2} \right)}$ nên tập hợp M là đường tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{\frac{1}{2} \left(k - \frac{a^2}{2} \right)}$.
- Nếu $k = \frac{a^2}{2}$ thì $OM = 0 \Leftrightarrow M \equiv O$ nên tập hợp điểm M là $\{O\}$.
- Nếu $k < \frac{a^2}{2}$ thì không tồn tại M nên tập hợp điểm M là tập $\emptyset$.

Bài 17. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp tất cả các điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = BC^2 - MB^2 + MC^2$.

Lời giải. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} BC^2 &= \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) - MB^2 - MC^2 \\ &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) \\ &= 3\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

Gọi M_0, G_0 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M và G trên BC thì đẳng thức trên tương đương với

$$3M_0G_0 \cdot BC = BC^2 \Leftrightarrow M_0G_0 = \frac{BC}{3}$$

do đó M_0 cố định. Vậy M thuộc đường thẳng đi qua M_0 và vuông góc với BC .

Bài 18. Cho tam giác ABC có trọng tâm là G . Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$. Từ đó tìm vị trí của M để tổng $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $MG = 0 \Leftrightarrow M \equiv G$.

Bài 19 (Định lý Stewart). Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Trên cạnh AB lấy điểm M . Chứng minh rằng $c^2 \cdot CM^2 = a^2 \cdot AM^2 + b^2 \cdot BM^2 + (a^2 + b^2 - c^2)AM \cdot BM$. Từ đó tính độ dài đường phân giác góc C theo độ dài ba cạnh của tam giác ABC .

Lời giải. Do M thuộc cạnh AB nên

$$\overrightarrow{AM} = -\frac{AM}{BM}\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{AM}{AB}\overrightarrow{CB} + \frac{BM}{AB}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow c \cdot \overrightarrow{CM} = AM \cdot \overrightarrow{CB} + BM \cdot \overrightarrow{CA}$$

Do đó

$$\begin{aligned} c^2 \cdot CM^2 &= AM^2 \cdot CB^2 + BM^2 \cdot CA^2 + 2AM \cdot BM \cdot \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \\ &= a^2 \cdot AM^2 + b^2 \cdot BM^2 + 2AM \cdot BM \cdot CA \cdot CB \cdot \cos C \\ &= a^2 \cdot AM^2 + b^2 \cdot BM^2 + (a^2 + b^2 - c^2)AM \cdot BM. \end{aligned}$$

Nếu D là chân đường phân giác của góc C thì dựa vào tính chất đường phân giác ta tính được

$$CD = \sqrt{\frac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2}} = \frac{2}{a+b} \sqrt{abp(p-c)}$$

trong đó $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Dạng 4. Ứng dụng của biểu thức tọa độ tích vô hướng vào tìm điểm thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp giải, kinh nghiệm: Phương pháp chung của dạng bài này là tọa độ hoá các điểm và thay vào các điều kiện để tìm điểm. Đa số các bài chỉ cần thay tọa độ và áp dụng các công thức là tính được, tuy nhiên một số bài có các tính chất đặc biệt mà nhờ nó, ta sẽ giảm đáng kể lượng công việc.

Ví dụ 16. Cho ba điểm $A(2;3), B(1;4), C(5;2)$. Chứng minh ba điểm trên tạo thành một tam giác.

Lời giải. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1;1), \overrightarrow{AC} = (3;-1) \Rightarrow \frac{-1}{3} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng, tạo thành một tam giác.

Ví dụ 17. Cho $A(3;1), B(7;2)$, tìm $C(x;y)$ thuộc trục Ox sao cho C thuộc đường tròn đường kính AB .

Lời giải. Ta có: $C \in Ox \Rightarrow C(x;0)$.

$$C \in (O; \frac{AB}{2}) \Rightarrow AC \perp BC \Rightarrow \vec{AC} \cdot \vec{CB} = 0$$

$$\vec{CA} = (3-x;1), \vec{CB} = (7-x,2) \Rightarrow (3-x)(-x+7)+2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 + \sqrt{2} \Rightarrow C(5 + \sqrt{2}; 0) \\ x = 5 - \sqrt{2} \Rightarrow C(5 - \sqrt{2}; 0) \end{cases}$$

Ví dụ 18. Cho điểm $A(0,2)$ và điểm $B(x;y) \in (d) : y = 2x - 2$ có hoành độ $x = 1$. Tìm trên (d) điểm C sao cho $\triangle ABC$ cân tại A .

Lời giải. Vì $C \in (d) \Rightarrow C(x, 2x-2); B(1,y) \in (d) \Rightarrow B(1;0)$

Ta có ngay $\vec{AB} = (1; -2), \vec{AC} = (x; 2x-4)$.

$$\text{Tam giác } ABC \text{ cân tại } A \Rightarrow |\vec{AB}| = |\vec{AC}| \Rightarrow 5 = x^2 + (2x-4)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow B(1;0) \\ x = \frac{11}{5} \Rightarrow C(\frac{11}{5}; \frac{12}{5}) \end{cases}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 20. Cho ba điểm $A(6;3), B(4;1); C(9;0)$. Chứng minh ba điểm trên không thẳng hàng. Tính diện tích tam giác ABC .

Lời giải. Ta có $\vec{AB} = (-2; -2), \vec{AC} = (3; -3) \Rightarrow \frac{-2}{3} \neq \frac{-3}{-2} \Rightarrow A, B, C$ tạo thành một tam giác. Lại có $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -6 + 6 = 0 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại A . $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{8} \sqrt{18} = 24$

Bài 21. Cho $A(11;4), B(8;2), C(13;y)$. Tìm y để tam giác ABC cân tại A .

Lời giải. Ta có $\vec{AB} = (-3; -2), \vec{AC} = (2; y-4)$.

A, B, C không thẳng hàng $\Rightarrow \frac{-3}{-2} \neq \frac{2}{y-4} \Rightarrow y \neq \frac{16}{3}$.

$$\text{Tam giác cân tại } A \Rightarrow AB = AC \Rightarrow 13 = 4 + (y-4)^2 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow C(2;1) \\ y = 7 \Rightarrow C(2;7) \end{cases}$$

Bài 22. Cho $A(3,4)$, Tìm hai điểm B, C trên trục Ox sao cho tam giác ABC đều.

Lời giải. Ta có $B, C \in Ox \Rightarrow B(x_b; 0), C(x_c; 0)$. $\vec{AB} = (x_b-3; -4), \vec{AC} = (x_c-3; -4), \vec{CB} = (x_b-x_c; 0)$.

$$\text{Tam giác } ABC \text{ đều} \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AC = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_b-3)^2 = (x_c-3)^2 \\ (x_b-x_c)^2 = (x_b-3)^2 + 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_b + x_c - 6 = 0 \\ (x_b - x_c)^2 = (x_b - 3)^2 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_c = 6 - x_b \\ 3(x_b - 3)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_b = 3 + \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_c = 3 - \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow B(3 + \frac{4}{\sqrt{3}}; 0), C(3 - \frac{4}{\sqrt{3}}; 0) \\ x_b = 3 - \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_c = 3 + \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow B(3 - \frac{4}{\sqrt{3}}; 0), C(3 + \frac{4}{\sqrt{3}}; 0) \end{cases}$$

Bài 23. Cho $A(2;1), C(5;0)$, tìm $M \in (d) : y = \frac{1}{2}x + 2$ sao cho $MA = \sqrt{13}, MB = \sqrt{17}$.

Lời giải. $M \in (d) \Rightarrow M(x; \frac{1}{2}x + 2)$

$$\begin{cases} MA = \sqrt{13} \\ MB = \sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (\frac{1}{2}x+2)^2 = 13 \\ (x-5)^2 + (\frac{1}{2}x+2)^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}x^2 - 3x - 8 = 0 \\ \frac{5}{4}x^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow C(5;4)$$

Bài 24. Cho ba điểm $A(3;4), B(1,2), C(-1,5)$.

- a/ Chứng minh ba điểm trên tạo thành một tam giác.
 b/ Tìm tọa độ trực tâm và chân đường cao hạ từ các đỉnh.
 c/ Tìm tọa độ chân đường phân giác trong hạ từ A .
 d/ Tìm tọa độ của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Lời giải.

a/ Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -2), \overrightarrow{AC} = (-4; 1), \overrightarrow{BC} = (-2; 3) \Rightarrow \frac{-2}{-2} \neq \frac{-4}{1} \Rightarrow$ ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.

b/ Gọi $H(x; y)$ là tọa độ trực tâm của tam giác. Ta có $\overrightarrow{AH} = (x-3; y-4), \overrightarrow{BH} = (x-1; y-2)$, H là trực tâm $\Rightarrow AH \perp BC, BH \perp AC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(x-3) + 3(y-4) = 0 \\ -4(x-1) + (y-2) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{14}{5} \end{cases} \Leftrightarrow H(\frac{6}{5}; \frac{14}{5})$$

c/ Gọi $E(x; y)$ là chân đường phân giác trong của góc A. Ta có $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} = \sqrt{\frac{8}{17}}$.

$$\overrightarrow{BE} = (x-1; y-2), \overrightarrow{EC} = (-1-x; 5-y).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BE} = \sqrt{\frac{8}{17}} \overrightarrow{EC} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{\frac{8}{17}}(-1-x) \\ y-2 = \sqrt{\frac{8}{17}}(5-y) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{\frac{8}{17}}}{1 + \sqrt{\frac{8}{17}}}; \quad y = \frac{5\sqrt{\frac{8}{17}} + 2}{1 + \sqrt{\frac{8}{17}}}$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{1 - \sqrt{\frac{8}{17}}}{1 + \sqrt{\frac{8}{17}}}; \frac{5\sqrt{\frac{8}{17}} + 2}{1 + \sqrt{\frac{8}{17}}}\right)$$

d/ Gọi tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $O(x; y)$.

Ta có trung điểm các cạnh AB, AC, BC lần lượt là $D, I, F \Rightarrow D(2; 3), I(1; \frac{9}{2}), F(0; \frac{7}{2})$

$$\overrightarrow{DO} = (x-2; y-3), \overrightarrow{IO} = (x-1; y-\frac{9}{2}), \overrightarrow{FO} = (x; y-\frac{7}{2})$$

$$DO, IO \text{ lần lượt vuông góc với } AB, AC \Rightarrow \begin{cases} -2(x-2) - 2(y-3) = 0 \\ -4(x-1) + (y-\frac{9}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{10} \\ y = \frac{41}{10} \end{cases} \Rightarrow O(\frac{9}{10}; \frac{41}{10})$$

Bài 25. Cho $A(-2;0), B(4;0), C(3;5)$. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C . Tìm tọa độ của D, E, F và tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB} = (6;0), \overrightarrow{AC} = (5;5), \overrightarrow{BC} = (-1;5)$. $E(x; y)$ là chân đường vuông góc hạ từ B xuống $AC \Rightarrow BE \perp AC \Rightarrow 5(x-5) + 5(y) = 0$ (1)

$$\overrightarrow{AE} = (x+2; y), \text{ ba điểm } A, C, E \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \frac{x+2}{y} = \frac{5}{5} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow E(1; 3)$$

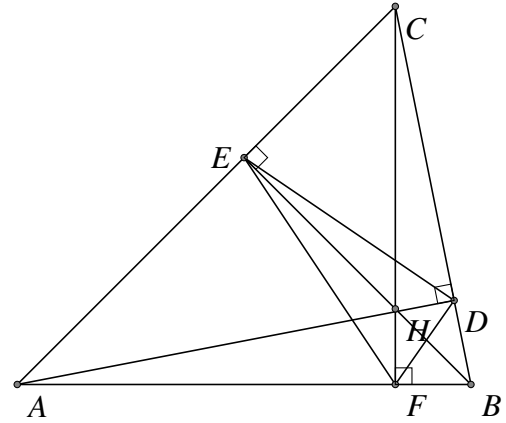
$$\text{Tương tự ta có } D\left(\frac{49}{13}; \frac{15}{13}\right), F(0; 3)$$

Trục tâm của tam giác ABC là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF !

$$H(x; y) \text{ là trục tâm tam giác } ABC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

Với $\overrightarrow{AH} = (x + 2; y)$, $\overrightarrow{BH} = (x - 4; y)$, $\overrightarrow{BC} = (-1; 5)$, $\overrightarrow{AC} = (5; 5)$, ta tìm được $H(3; 1)$.

Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .
 Dễ dàng chứng minh được rằng các tứ giác $CDFE, ABDE, CBFE$ nội tiếp. $\Rightarrow \widehat{EDA} = \widehat{EBA} = \widehat{ACF} = \widehat{ADF} \Rightarrow AD$ là tia phân giác của $\widehat{EDF}$. Chứng minh tương tự ta được H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .



Bài tập tổng hợp

Bài 26. Cho ba điểm $A(-2;3), B(\frac{1}{4};0), C(2;0)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải. $AB = \frac{15}{4}, AC = 5, k = -\frac{AB}{AC} = -\frac{3}{4}$

Gọi D là giao điểm của phân giác trong góc $\widehat{A}$ và $BC \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} - x = -\frac{3}{4}(2 - x) \\ -y = -\frac{3}{4}(0 - y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow D(1;0).$$

$$BA = \frac{15}{4}, BD = \frac{3}{4} \Rightarrow k' = -5$$

Gọi J là giao điểm của phân giác trong góc B và AD .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{JA} = -5\overrightarrow{JD} \Rightarrow \begin{cases} -2 - x = -5(1 - x) \\ 3 - y = -5(0 - y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow J(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$$

Bài 27. Cho ba điểm $A(2;6), B(-3;-4), C(5;0)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải. Làm tương tự câu trên ta thu được $J(-2; \frac{2}{3})$.

Dạng 5. Tìm tọa độ các điểm đặc biệt trong tam giác - tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của một điểm lên đường thẳng

- Trục tâm tam giác
- Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác
- Tâm đường tròn nội tiếp tam giác
- Hình chiếu vuông góc của một điểm lên đường thẳng

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với $A(x_A, y_A); B(x_B, y_B)$ và $C(x_C, y_C)$

- a) Tìm tọa độ trục tâm H của tam giác ABC .

Gọi tọa độ $H(x, y)$. Khi đó

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

Ta thu được hệ 2 phương trình 2 ẩn x, y . Giải hệ ta được tọa độ điểm H .

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

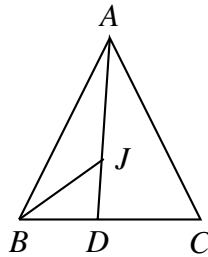
Gọi $I(x, y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó $IA = IB$ và $IA = IC$. Do đó, ta có

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 = 0$$

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = 0$$

Giải hệ phương trình ta được tọa độ điểm I .

c) Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC



* Cách 1:

+) Gọi tọa độ điểm $D(x, y)$. Ta tính độ dài cạnh AB và AC .

Ta có $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$, suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} := k$

Do đó $\overrightarrow{DB} = -k\overrightarrow{DC}$, ta được hệ phương trình ẩn x, y , giải hệ ta được tọa độ điểm D .

+) Gọi tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $J(x, y)$. Tính độ dài đoạn BD .

Ta có $\frac{JD}{BD} = \frac{JA}{AB}$ suy ra $\frac{JD}{JA} = \frac{BD}{AB} := l$.

Do đó $\overrightarrow{JD} = -l\overrightarrow{JA}$, ta được hệ phương trình ẩn x, y , giải hệ ta được tọa độ điểm J .

* Cách 2:

Áp dụng đẳng thức sau

$$a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC} = \vec{0}$$

với $AB = c, BC = a, AC = b$.

d) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng BC Gọi tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng BC là $M(x, y)$, ta có

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$\overrightarrow{BM} = t \cdot \overrightarrow{BC}$ Ta thu được hệ 2 phương trình 2 ẩn, giải hệ ta được tọa độ điểm M .

Ví dụ 19. Cho $A(4, 3); B(2, 7); C(-3, -8)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

c) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng BC

Lời giải.

a) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

Gọi $H(x, y)$. Ta có $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ và $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, suy ra $7x + 11y = 91$ và $x + 3y = 13$, giải hệ phương trình ta được $H(13, 0)$.

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Gọi $I(x, y)$. Khi đó $IA = IB$ và $IA = IC$. Do đó, ta có

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = (x-2)^2 + (y-7)^2$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = (x+3)^2 + (y+8)^2$$

giải hệ phương trình ta được $I(-5, 1)$.

c) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng BC

Gọi $M(x, y)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A lên cạnh BC . Ta có $\overrightarrow{AM} = (x-4, y-3)$ và $\overrightarrow{BC} = (-5, -15)$; $\overrightarrow{BM} = (x-2, y-7)$

Khi đó ta có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ và $\overrightarrow{BM} = t \cdot \overrightarrow{BC}$.

Suy ra $t = \frac{2}{7}$ và $M(\frac{4}{7}, \frac{19}{7})$

Ví dụ 20. Cho $A(2, 6)$; $B(-3, -4)$; $C(5, 0)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-5, -10)$; $\overrightarrow{AC} = (3, -6)$, suy ra $AB = 5\sqrt{5}$; $AC = 3\sqrt{5}$;

Gọi tọa độ điểm $D(x, y)$. Ta có $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$, suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} := \frac{5}{3}$

Do đó $\overrightarrow{DB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$, ta được hệ phương trình ẩn x, y , giải hệ ta được tọa độ điểm $D(2, -3)$.

Gọi tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $J(x, y)$.

Ta có độ dài đoạn $BD = 5\sqrt{5}$.

Khi đó $\frac{JD}{BD} = \frac{JA}{AB}$ suy ra $\frac{JD}{JA} = \frac{BD}{AB} = \frac{5}{3}$.

Do đó $\overrightarrow{JD} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{JA}$, ta được hệ phương trình ẩn x, y , giải hệ ta được tọa độ điểm $J(2, 1)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 28. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp J của tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $A(1, 5)$; $B(4, -1)$; $C(-4, -5)$.

b) $A(0, -4)$; $B(-5, 6)$; $C(3, 2)$

Lời giải. ĐS: 1) $J(1, \frac{10}{3})$; 2) $J(0, 1)$.

Bài 29. Cho $A(-1, 4)$; $B(-4, 0)$ và $C(2, -2)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC

c) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc M của điểm I lên đường thẳng BC

Lời giải. ĐS: $H(-2, 1)$; $I(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; $M(\frac{-5}{8}, \frac{-9}{8})$.

Bài 30. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với $A(-1, -3)$; $B(2, 5)$ và $C(4, 0)$. Xác định trực tâm H của tam giác ABC .

Lời giải. ĐS: $H(\frac{164}{31}, \frac{15}{31})$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 31. Cho tứ giác $ABCD$ với $A(3, 4)$; $B(4, 1)$; $C(2, -3)$; $D(-1, 6)$. Chứng minh tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Lời giải. HD: Tìm tâm I của bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta được $I(-1; 1)$. Và chứng minh $IA = ID$.

Bài 32. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(-2, -2)$; $B(5, -4)$.

- Tìm tọa độ điểm C sao cho trọng tâm của tam giác ABC là điểm $G(2, 0)$.
- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của điểm G lên đường thẳng BC .

Lời giải. ĐS: $C(3, 6)$; $I(\frac{169}{66}, \frac{47}{33})$; $H(\frac{60}{52}, \frac{21}{52})$

Bài 33. Cho $A(-2, 2)$; $B(6, 6)$; $C(2, -2)$.

- Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC ; tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC , tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Chứng minh $\vec{IH} = -3\vec{IG}$
- AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABCD$. Chứng minh rằng $BHCD$ là một hình bình hành.

Lời giải.

- Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC ; tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC , tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Gọi $H(x, y)$. Ta có $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$ và $\vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0$, suy ra $x + 2y = 2$ và $x - y = 0$, giải hệ phương trình ta được $H(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Gọi $I(x, y)$ là tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó $IA = IB$ và $IA = IC$. Do đó, ta có

$$\begin{aligned}(x+2)^2 + (y-2)^2 &= (x-6)^2 + (y-6)^2 \\ (x+2)^2 + (y-2)^2 &= (x-2)^2 + (y+2)^2\end{aligned}$$

giải hệ phương trình ta được $I(\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$.

Gọi $G(x, y)$ là tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Ta có

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 3, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 3$$

- Chứng minh $\vec{IH} = 3\vec{IG}$

Ta có $\vec{IH} = (2, 2)$; $\vec{IG} = (\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3})$ suy ra $\vec{IH} = -3\vec{IG}$

- AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABCD$. Chứng minh rằng $BHCD$ là một hình bình hành.

Ta có $\vec{BH} = (\frac{16}{3}, \frac{16}{3})$; $\vec{AC} = (4, -4)$; $D = (\frac{22}{3}, \frac{10}{3})$; $\vec{BH} = (\frac{-16}{3}, \frac{-16}{3})$;

suy ra
 $\vec{DC} \cdot \vec{AC} = 0$ và $\vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0$,

do đó

$BH \parallel CD$ và $BH = CD$.

§4. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

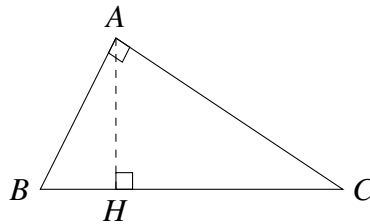
I. Tóm tắt lý thuyết

Cho tam giác ABC , ta quy ước các kí hiệu sau.

- $BC = a, CA = b, AB = c$.
- $p = \frac{a+b+c}{2}$ gọi là nửa chu vi của tam giác ABC .
- m_a, m_b, m_c là độ dài đường trung tuyến tương ứng kẻ từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC .
- h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao tương ứng kẻ từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC .
- l_a, l_b, l_c là độ dài đường phân giác trong tương ứng kẻ từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC .
- R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH .



- Định lí Pitago:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

- Nếu biết 2 cạnh góc vuông thì có thể tính được đường cao AH bởi công thức:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

- Tích 2 cạnh góc vuông bằng tích cạnh huyền với đường cao tương ứng:

$$AB.AC = BC.AH$$

- Nếu biết 1 cạnh góc vuông và cạnh huyền thì có thể tính được hình chiếu của cạnh góc vuông đó lên cạnh huyền nhờ công thức:

$$AB^2 = BH.BC; \quad AC^2 = CH.BC$$

2. Định lý hàm số cosin, công thức trung tuyến.

Định lý hàm số cosin được phát minh bởi nhà toán học Al Kashi (1380 - 1429). Đây là một mở rộng của định lý Pythagore. Định lý hàm số cosin đưa ra một phương pháp giúp ta tìm được một cạnh của tam giác bất kì khi biết độ dài hai cạnh còn lại và số đo của góc xen giữa hai cạnh đó, từ đó cũng cho chúng ta tính được số đo của các góc còn lại của tam giác. Định lý được phát biểu như sau:

Định lý 1. Trong một tam giác bất kỳ, bình phương một cạnh bằng tổng bình phương của hai cạnh còn lại trừ đi hai lần tích của chúng với cosin của góc xen giữa hai cạnh đó.

Nếu ký hiệu a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC thì ta có:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

Từ định lý hàm số cosin ta cũng suy ra công thức tính cosin các góc của tam giác theo độ dài các cạnh của tam giác như sau:

$$\begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

Mặt khác, sử dụng định lý hàm số cosin có thể giúp ta tìm được độ dài các đường trung tuyến theo ba cạnh của một tam giác. Cụ thể, nếu ký hiệu m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C thì:

$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \\ m_b^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4} \\ m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \end{cases}$$

3. Định lý sin

Định lý 2. Cho tam giác ABC , gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Đặt $AB = c, BC = a, CA = b$. Ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

4. Các công thức diện tích tam giác

Diện tích S của tam giác ABC được tính bởi một trong các công thức

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c \\ &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{abc}{4R} \\ &= pr \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

II. Các dạng toán

Dạng 1. Một số bài tập giúp nắm vững lý thuyết

Mục này đưa ra một số bài tập mà việc giải quyết chỉ dùng đến các kiến thức về tích vô hướng của hai véc-tơ ở bài trước, chưa dùng đến các công thức về hệ thức lượng ở bài 3. Kết quả của các bài tập này sẽ dùng vào việc giới thiệu các công thức mới về hệ thức lượng trong tam giác.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC

- Tính $\vec{BC}$ theo $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.
- Tính $\vec{BC} \cdot \vec{BC}$ từ đó tính tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ theo độ dài các cạnh của tam giác.
- Chứng minh rằng $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$.

Lời giải.

$$a) \vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}.$$

$$b) \vec{BC} \cdot \vec{BC} = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = AB^2 + AC^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}. \text{ Từ đó suy ra}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}.$$

c) Theo câu trên ta có

$$\begin{aligned} AB \cdot AC \cdot \cos A &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} \\ \Leftrightarrow \cos A &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến.

- Tính $\vec{BC}$ theo $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.
- Tính tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ theo độ dài các cạnh của tam giác.
- Tính $\vec{AM}$ theo $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.
- Chứng minh $AM^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$.

Lời giải.

a) Như bài trên.

b) Như bài trên.

$$c) \vec{AM} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC})$$

d) Ta có

$$\begin{aligned} AM^2 &= \frac{AB^2 + AC^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{4} \\ &= \frac{AB^2 + AC^2 + AB^2 + AC^2 - BC^2}{4} \\ &= \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4} \end{aligned}$$

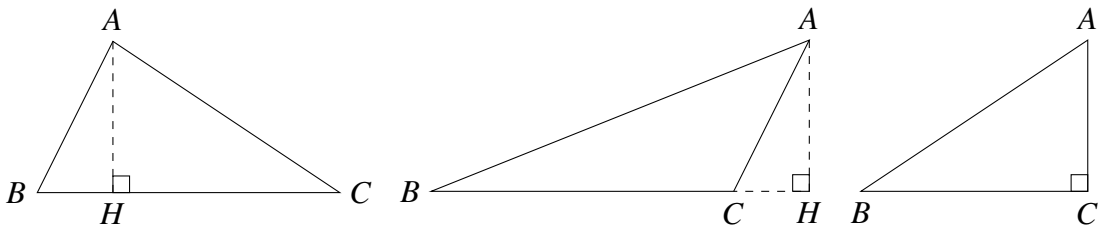
Ví dụ 3. Cho tam giác ABC , đặt $AB = c$, $CA = b$, $BC = a$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC .

a) Chứng minh rằng $h_a = b \sin C = c \sin B$; $h_b = c \sin A = a \sin C$; $h_c = a \sin B = b \sin A$.

b) Gọi S là diện tích tam giác ABC , chứng minh rằng

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$$

Lời giải.



a) Trong cả ba trường hợp $\widehat{C}$ nhọn, vuông, tù, ta đều có $\sin B = \frac{h_a}{AB}$. Suy ra $h_a = c \sin B$. Tương tự ta cũng có $h_a = b \sin C$. Thay đổi vai trò A, B, C ta được

$$h_a = b \sin C = c \sin B; h_b = c \sin A = a \sin C; h_c = a \sin B = b \sin A$$

b) Ta có $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}a \cdot b \sin C$, còn lại tương tự.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng diện tích tam giác ABC được tính bởi công thức $S = \frac{abc}{4R}$.

Lời giải. Theo định lý sin, ta có $\frac{c}{\sin C} = 2R$. Suy ra $\sin C = \frac{c}{2R}$. Từ đó

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

Ví dụ 5. Cho đường tròn tâm I bán kính r nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA của tam giác tại K, L, M . Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC . Chứng minh rằng $S = p \cdot r$.

Lời giải.

Ta có $r = IK = IM = IL$.

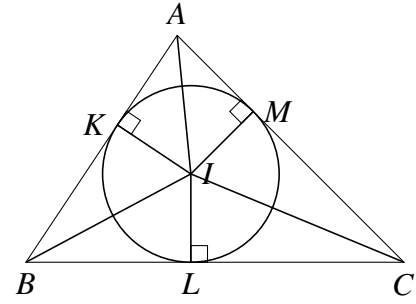
Theo tính chất hai tiếp tuyến cùng xuất phát tại một điểm ta có $AM = AK, BK = BL, CL = CM$. Chu vi tam giác là

$$2p = AM + AK + BK + BL + CL + CM = 2(AK + BL + CK)$$

Suy ra $p = AK + BL + CM$.

Diện tích tam giác ABC là

$$\begin{aligned} S &= 2(S_{AKI} + S_{BLI} + S_{CMI}) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}AK \cdot r + \frac{1}{2}BL \cdot r + \frac{1}{2}CM \cdot r\right) \\ &= (AK + BL + CM) \cdot r \\ &= pr \end{aligned}$$



Ví dụ 6. Cho tam giác ABC diện tích S . Chứng minh rằng

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \end{aligned}$$

Ví dụ 7. Chứng minh công thức tính diện tích sau (công thức Hê-rông)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

với p là nửa chu vi tam giác, $a = BC, b = AC, c = AB$ là độ dài các cạnh.

Lời giải. Ta có $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$.

Dùng kết quả bài trên, ta có

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 - \frac{1}{4} (b^2 + c^2 - a^2)^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]} \\
 &= \sqrt{\frac{b+c+a}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2}} \\
 &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}
 \end{aligned}$$

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho hai véc-tơ $a = (a_1; a_2)$, $b = (b_1; b_2)$. Chứng minh rằng

$$Q = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 Q^2 &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\
 &= a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 \\
 &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2
 \end{aligned}$$

Suy ra $Q = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$.

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Chứng minh rằng diện tích tam giác ABC là

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|$$

trong đó, người ta đặt $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (định thức cấp 2).

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
 \vec{AB} &= (x_B - x_A; y_B - y_A) \\
 \vec{AC} &= (x_C - x_A; y_C - y_A)
 \end{aligned}$$

Ta đã biết $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$. Kết quả tính toán về toạ độ của bài trên ta được

$$S = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|.$$

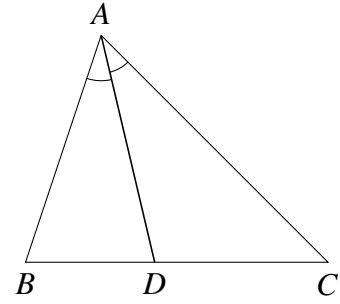
Ví dụ 10. Cho tam giác ABC , gọi l_a là độ dài đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC .

Chứng minh rằng $l_a = \frac{bc \sin A}{(b+c) \sin \frac{A}{2}}$.

Lời giải.

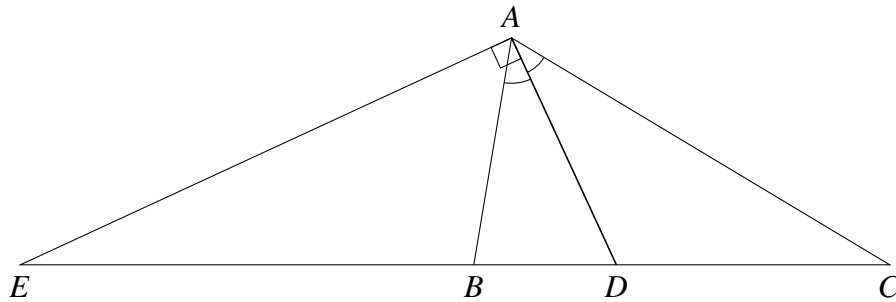
Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC . Ta có $l_a = AD$. Ta có

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ABD} + S_{ACD} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\sin A &= \frac{1}{2}AB.AD.\sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}AC.AD.\sin \frac{A}{2} \\ \Leftrightarrow cb \sin A &= l_a(c+b) \sin \frac{A}{2} \\ \Leftrightarrow l_a &= \frac{bc \sin A}{(b+c) \sin \frac{A}{2}} \end{aligned}$$



Ví dụ 11. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ (hay $c < b$), gọi l'_a là độ dài đường phân **ngoài** kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC . Chứng minh rằng $l'_a = \frac{bc \sin A}{(b-c) \cos \frac{A}{2}}$.

Lời giải.



Gọi E là chân đường phân giác ngoài kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC . Ta có $l'_a = AE$. Ta có

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ACE} - S_{ABE} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\sin A &= \frac{1}{2}AC.AE.\sin \left(90^\circ + \frac{A}{2}\right) - \frac{1}{2}AB.AE.\sin \left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) \\ \Leftrightarrow cb \sin A &= l'_a(b-c) \cos \frac{A}{2} \\ \Leftrightarrow l'_a &= \frac{bc \sin A}{(b-c) \cos \frac{A}{2}} \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

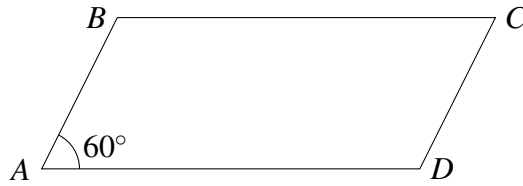
Bài 1. Cho tam giác ABC có $AB = 1, AC = \sqrt{3}, \hat{A} = 60^\circ$.

- Tính $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- Tính độ dài BC .

Lời giải.

- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 + 3 - \sqrt{3}$. Suy ra $BC = \sqrt{4 - \sqrt{3}}$.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a, AD = 2a$ và $\widehat{DAB} = 60^\circ$.

a) Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ c) Tính AC b) Tính $\vec{AC}$ theo hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AD}$.d) Tính BD **Lời giải.**

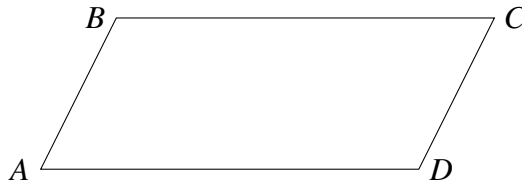
$$a) \vec{AB} \cdot \vec{AD} = AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{DAB} = a \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} = a^2.$$

$$b) \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}.$$

$$c) AC^2 = AB^2 + AD^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} = a^2 + 4a^2 + 2a^2 = 7a^2. \text{ Suy ra } AC = a\sqrt{7}.$$

$$d) \vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}. \text{ Suy ra } BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2\vec{AD} \cdot \vec{AB} = 3a^2. \text{ Suy ra } BD = a\sqrt{3}.$$

Bài 3. Chứng minh rằng tổng bình phương các đường chéo của hình bình hành bằng tổng bình phương các cạnh.

Lời giải.

Ta có $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$. Suy ra $AC^2 = AB^2 + AD^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

Tương tự $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$. Suy ra $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

Từ đó suy ra $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2) = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

Bài 4. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 5, BC = 4$. Tính các tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}, \vec{BA} \cdot \vec{BC}, \vec{CA} \cdot \vec{CB}$.

Lời giải.

$$\bullet \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{4 + 25 - 16}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\bullet \vec{BA} \cdot \vec{BC} = -\frac{5}{2}$$

$$\bullet \vec{CA} \cdot \vec{CB} = \frac{37}{2}$$

Bài 5. Cho tam giác ABC có trọng tâm G , M là điểm bất kì. Chứng minh rằng

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Lời giải. Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

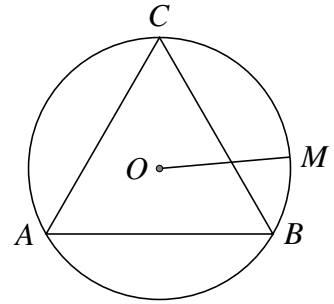
$$\begin{aligned} & MA^2 + MB^2 + MC^2 \\ &= (\vec{MG} + \vec{GA})^2 + (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + (\vec{MG} + \vec{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\vec{MG} \cdot (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \end{aligned}$$

Bài 6. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O , M là một điểm thay đổi trên đường tròn. Chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ không đổi.

Lời giải.

Gọi R là bán kính của đường tròn. Áp dụng bài trên ta có

$$\begin{aligned} & MA^2 + MB^2 + MC^2 \\ &= 3MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 \\ &= 3R^2 + R^2 + R^2 + R^2 \\ &= 6R^2 \end{aligned}$$



Dạng 2. Xác định các yếu tố còn lại của một tam giác khi biết một số yếu tố về cạnh và góc của tam giác đó

Ở dạng toán này, chúng ta áp dụng trực tiếp định lý hàm số cosin hoặc hệ quả của định lý hàm số cosin để tìm các yếu tố còn lại của tam giác đã cho.

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC có $b = 5, c = 7$ và $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính cạnh a và cosin các góc còn lại của tam giác đó.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 25 + 49 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \\ \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{32 + 49 - 25}{56\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{32 + 25 - 49}{40\sqrt{2}} = \frac{8}{40\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}. \end{aligned}$$

Ví dụ 13. Một người đứng trên ngọn hải đăng A ở bờ biển quan sát hai chiếc tàu ở hai điểm B và C . Khoảng cách từ người đó tới chiếc tàu ở điểm B và C lần lượt là 5 km và 6 km. Góc tạo bởi hai hướng nhìn AB và AC là 60° . Tính khoảng cách d giữa hai chiếc tàu.

Lời giải. Xét tam giác ABC với $AC = 6$ km, $AB = 5$ km, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Áp dụng định lý cos ta có

$$BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2 \cdot CA \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAC}$$

Từ đó suy ra $BC^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 31 \Rightarrow BC = \sqrt{31}$.

Vậy khoảng cách giữa hai chiếc tàu là $d = \sqrt{31}$ km.

Ví dụ 14. Cho x là số thực lớn hơn 1 và $\begin{cases} a = x^2 + x + 1 \\ b = 2x + 1 \\ c = x^2 - 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và tính số đo của góc đối diện với cạnh a .

Lời giải. Do $x > 1$ nên dễ dàng chứng minh được: $\begin{cases} a + b > c \\ b + c > a, \\ c + a > b \end{cases}$ từ đó suy ra a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Gọi A là góc đối diện với cạnh a , khi đó: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\ b^2 = 4x^2 + 4x + 1 \\ c^2 = x^4 - 2x^2 + 1 \\ bc = 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $b^2 + c^2 - a^2 = -bc \Rightarrow \cos A = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^\circ$.

Ví dụ 15. Cho $\triangle ABC$ có các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Biết rằng tồn tại số tự nhiên $n > 2$ sao cho $a^n = b^n + c^n$. Chứng minh rằng A là góc có số đo lớn nhất của tam giác, từ đó suy ra $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases}$, do đó $\begin{cases} A > B \\ A > C \end{cases}$. Vậy A là góc lớn nhất của $\triangle ABC$.

$$\text{Ta có } a^n = b^n + c^n \Leftrightarrow a^2 = b^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{n-2} + c^2 \left(\frac{c}{a}\right)^{n-2}.$$

$$\text{Do } \begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} \frac{b}{a} < 1 \\ \frac{c}{a} < 1 \end{cases}. \text{ Từ đó suy ra } a^2 < b^2 + c^2 \text{ hay } b^2 + c^2 - a^2 > 0.$$

Mà $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ nên suy ra $\cos A > 0$ hay A là góc nhọn, do đó B, C cũng là các góc nhọn.

Ví dụ 16. Cho tam giác ABC có $m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}c$. Chứng minh rằng:

$$m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c).$$

Lời giải. Ta có $m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}c \Rightarrow m_c^2 = \frac{3}{4}c^2 \Rightarrow \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} = \frac{3}{4}c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2c^2$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2(b^2 + c^2) - a^2 = 3b^2 \\ 2(c^2 + a^2) - b^2 = 3a^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 4m_a^2 = 3b^2 \\ 4m_b^2 = 3a^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}b \\ m_b = \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases} \\ &\Rightarrow m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c) \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Cho tam giác ABC có $AC = 10$ cm, $BC = 16$ cm và $C = 120^\circ$, tính độ dài cạnh AB .

Lời giải. Áp dụng định lý hàm số cosin ta có $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cos C$ ta suy ra $AB = \sqrt{516}$ cm

Bài 8. Cho tam giác ABC có $BC = 3, CA = 4$ và $AB = 6$, Tính cosin của góc có số đo lớn nhất của tam giác đã cho.

Lời giải. Do $AB > AC > BC$ nên $C > B > A$.

Áp dụng định lý hàm số cosin ta có $\cos C = -\frac{11}{24}$.

Bài 9. Cho a^2, b^2, c^2 là độ dài các cạnh của một tam giác nào đó và a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác ABC . Chứng minh rằng tam giác ABC có ba góc nhọn.

Lời giải. Do a^2, b^2, c^2 là độ dài các cạnh của một tam giác nên

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - c^2 > 0 \\ b^2 + c^2 - a^2 > 0 \\ c^2 + a^2 - b^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \cos A, \cos B, \cos C > 0.$$

Bài 10. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có $AB = CD = a, AD = b, BC = c$. Chứng minh rằng $\cos A = \frac{b-c}{2a}$.

Lời giải. Áp dụng định lý hàm số cosin cho hai tam giác BAD, BCD và chú ý $\widehat{BAD} + \widehat{BCD}$ ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 11. Cho tam giác ABC có $m_a = 15, m_b = 18, m_c = 27$.

- Tính diện tích của tam giác ABC .
- Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC .

Lời giải.

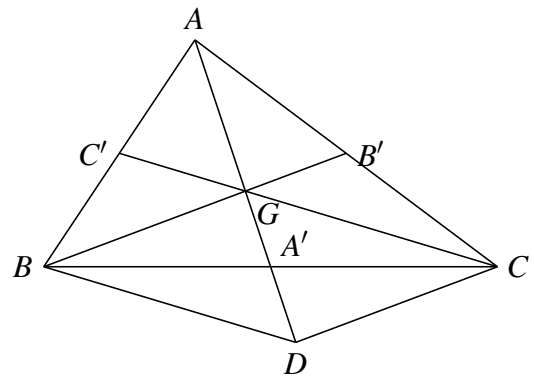
- Gọi G là trọng tâm ΔABC ; A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB và D là điểm đối xứng của A qua G . Khi đó ta có $BGCD$ là hình bình hành.

$$S_{\Delta ABC} = 3S_{\Delta GBC} = \frac{1}{2}S_{\Delta BGD} = S_{\Delta BGD}.$$

Tam giác BGD có độ dài các cạnh lần lượt là 10, 12, 18 nên $S_{\Delta BGD} = \sqrt{20 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 2} = 40\sqrt{2}$.

$$\text{Vậy } S_{\Delta ABC} = 120\sqrt{2}.$$

- Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến ta tính được $a = 2\sqrt{209}, b = 8\sqrt{11}, c = 2\sqrt{41}$.



Bài 12. Cho ΔABC có các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$ thỏa mãn hệ thức

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$$

Chứng minh rằng $B = 60^\circ$.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} &= \frac{3}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} = 3 \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} = 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} = 1 \\ &\Leftrightarrow c(b+c) + a(a+b) = (a+b)(b+c) \\ &\Leftrightarrow c^2 + bc + a^2 + ab = ab + b^2 + ac + bc \\ &\Leftrightarrow c^2 + a^2 - b^2 = ac \\ &\Leftrightarrow \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos B = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow B = 60^\circ. \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 13. Cho tam giác ABC có $BC = 10$. I là điểm trên cạnh BC sao cho $2IB = 3IC$. Đường tròn tâm I bán kính 3 tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm M, N . Tính độ dài các cạnh AB, AC .

Lời giải. Trước hết ta có
$$\begin{cases} \sin B = \frac{IM}{BI} = \frac{1}{2} \\ \sin C = \frac{IN}{CI} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Từ đó suy ra
$$\begin{cases} \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos C = \frac{\sqrt{7}}{4} \end{cases} \text{ (Do } B, C \text{ là các góc nhọn).}$$

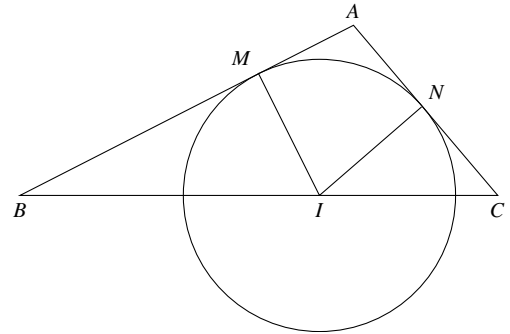
Đặt $AB = c, AC = b$. Do AI là phân giác góc A nên $\frac{c}{b} = \frac{6}{4} \Rightarrow 2c = 3b$.

Mặt khác, theo định lý cosin trong tam giác ABC ta có

$$\begin{cases} c^2 = b^2 + BC^2 - 2b \cdot BC \cdot \cos C \\ b^2 = c^2 + BC^2 - 2c \cdot BC \cdot \cos B \end{cases}$$

Thay số vào ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2c = 3b \\ c^2 = b^2 + 100 - 5\sqrt{7} \cdot b \\ b^2 = c^2 + 100 - 10\sqrt{3} \cdot c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2(3\sqrt{3} - \sqrt{7}) \\ c = 3(3\sqrt{3} - \sqrt{7}) \end{cases}$$



Bài 14. Cho $\triangle ABC$ có $BC = a, CA = b, AB = c$ và có diện tích S . Chứng minh rằng:

a) $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$.

b) Nếu $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$ thì $\cot B + \cot C = 2 \cot A$, ở đó m_b, m_c là độ dài các trung tuyến xuất phát từ B, C .

Lời giải.

a) Theo định lý hàm số cosin ta có: $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$.

Mặt khác, $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ nên ta có

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} = \frac{2bc \cos A}{2bc \sin A} = \cot A$$

b) Ta có $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1 \Leftrightarrow \frac{c^2}{b^2} = \frac{m_b^2}{m_c^2} = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

Từ đó suy ra $2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - b^4 \Rightarrow 2a^2(c^2 - b^2) = c^4 - b^4 = (c^2 + b^2)(c^2 - b^2)$.

Do $b \neq c$ nên $c^2 - b^2 \neq 0$, do đó $b^2 + c^2 = 2a^2$.

$$\text{Từ } \begin{cases} \cot B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S} \\ \cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} \end{cases} \Rightarrow \cot B + \cot C = \frac{2a^2}{4S} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } 2 \cot A = 2 \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} = \frac{2a^2}{4S} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh.

Dạng 3. Diện tích tam giác

Dạng này thường sử dụng các công thức về diện tích sau

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c \\
 &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\
 &= \frac{abc}{4R} \\
 &= pr \\
 &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}
 \end{aligned}$$

Bài 15. Cho $A(1, 5); B(4, -1); C(-4, -5)$. Tính diện tích của tam giác ABC .

Lời giải. Ta có $\vec{AB} = (3, -6); \vec{BC} = (-8, -4)$, nên tam giác ABC vuông tại B .

Do đó, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} = 30$ (đvdt).

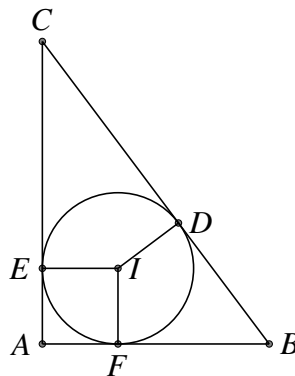
Bài 16. Tính diện tích tam giác ABC , biết chu vi tam giác bằng $2p$, các góc $\hat{A} = \alpha^\circ, \hat{B} = \beta^\circ$.

Lời giải. Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$. Theo định lý hàm sin ta có $abc = 8R^3 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$, suy ra $S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$.

và $R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{2p}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\pi - \alpha - \beta)}$. Vậy $S = 2 \left(\frac{2p}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)} \right)^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$.

Bài 17. Cho ΔABC có $\hat{A} = 90^\circ$, bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = 7$ và bán kính đường tròn nội tiếp là $r = 3$. Tính diện tích S của tam giác.

Lời giải.



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC .

Gọi tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) với các cạnh BC, CA, AB lần lượt là D, E, F .

Vì ΔABC vuông tại A nên $BC = 2R = 14$ và $AE = AF = r = 3$.

Ta có $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = AE + BC = 14 + 3 = 17$

Vậy $S = pr = 17 \times 3 = 51$

Bài 18. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn $(O, 3)$. Biết rằng $\hat{A} = \hat{B} = 30^\circ$. Tính diện tích S của ΔABC

Lời giải. Áp dụng định lý sin trong ΔABC ta có:

$$BC = 2R \sin A = 6 \sin 30^\circ = 3 \text{ và } AC = 2R \sin B = 6 \sin 30^\circ = 3$$

Ta có $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{A} = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$.

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{2}BC.AC.\sin\widehat{C} = \frac{3^2}{2}\sin 120^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

Bài 19. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{2Rr}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2Rr} = \frac{1}{2 \cdot \frac{abc}{4s} \cdot \frac{S}{p}} = \frac{2p}{abc} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$$

$$\text{Bất đẳng thức ban đầu} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$$

Ta thấy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) \\ &\geq \sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{a^2}} \\ &= \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \end{aligned}$$

Bài 20. Cho hình vuông MNPQ nội tiếp trong tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$S_{ABC} \geq 2S_{MNPQ}.$$

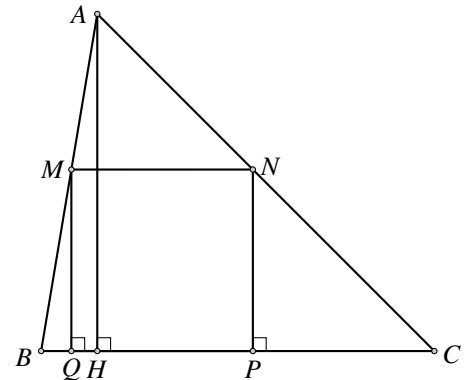
Lời giải.

Ta thấy:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &\geq 2S_{MNPQ} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}BC.AH &\geq 2MN.PQ \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} &\geq \frac{MN}{BC} \cdot \frac{MQ}{AH} \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} \frac{MN}{BC} \cdot \frac{MQ}{AH} &= \frac{AM}{AB} \cdot \frac{BM}{AB} = \frac{1}{AB^2} \cdot AM \cdot BM \\ &\leq \frac{1}{AB^2} \left(\frac{AM+BM}{2} \right)^2 = \frac{1}{AB^2} \cdot \frac{AB^2}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



Dạng 4. Chứng minh hệ thức liên quan giữa các yếu tố trong tam giác

- Dùng các hệ thức cơ bản để biến đổi vế này thành vế kia hoặc chứng minh cả hai vế cũng bằng một hệ thức đã biết là đúng.
- Khi chứng minh cần khai thác các giả thiết và kết luận để tìm đúng các hệ thức thích hợp làm trung gian cho quá trình biến đổi.

Ví dụ 17. Cho $\triangle ABC$ có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. p là nửa chu vi tam giác. Chứng minh rằng:

$$abc.(\cos A + \cos B + \cos C) = a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c).$$

Lời giải. Áp dụng định lý cos trong ΔABC , ta có:

$$\begin{aligned} VT &= abc \cdot \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) \\ &= a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + b \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} + c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \\ &= \frac{a^2}{2}(b + c - a) + \frac{b^2}{2}(a + c - b) + \frac{c^2}{2}(a + b - c) \\ &= a^2(p - a) + b^2(p - b) + c^2(p - c) = VP. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 18. Cho ΔABC có trung tuyến AM , $\widehat{AMB} = \alpha$, $AC = b$, $AB = c$, S là diện tích ΔABC . Với $0 < \alpha < 90^\circ$. Chứng minh: $\cot \alpha = \frac{b^2 - c^2}{4S}$.

Lời giải.

Đặt $BC = a$.

Gọi H là chân đường cao kẻ từ A đến BC .

$$\text{Có } \Delta AHM \text{ vuông} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{HM}{AH} = \frac{MB - BH}{AH} = \frac{BC}{2AH} - \frac{BH}{AH}.$$

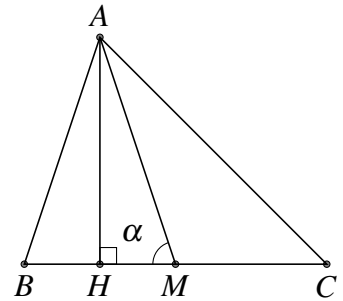
$$\text{Hay } \cot \alpha = \frac{a}{2AH} - \frac{BH}{AH} \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng định lý cos và công thức tính diện tích:

$$\begin{aligned} \frac{b^2 - c^2}{4S} &= \frac{(a^2 + c^2 - 2ac \cos B) - c^2}{2AH \cdot a} \\ &= \frac{a^2 - 2ac \cos B}{2AH \cdot a} = \frac{a}{2AH} - \frac{c \cdot \cos B}{AH}. \end{aligned}$$

$$\text{Hay } \frac{b^2 - c^2}{4S} = \frac{a}{2AH} - \frac{BH}{AH} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \cot \alpha = \frac{b^2 - c^2}{4S}.$$



Ví dụ 19. Cho ΔABC có trọng tâm G và $\widehat{GAB} = \alpha$, $\widehat{GBC} = \beta$, $\widehat{GCA} = \gamma$. Đặt $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ và S là diện tích ΔABC . Chứng minh:

$$\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}.$$

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC . Kẻ $MH \perp AB$.

$$\Delta AMH \text{ vuông} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AH}{AM}.$$

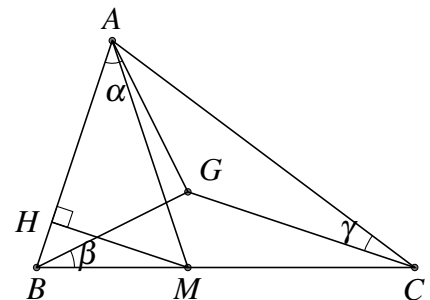
$$\Delta BHM \text{ vuông} \Rightarrow \cos B = \frac{BH}{MB} = \frac{2BH}{a}.$$

$$\text{Ta có } AB = HA + HB \Rightarrow c = AM \cdot \cos \alpha + \frac{a}{2} \cdot \cos B$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{AM} \left(c - \frac{a}{2} \cos B \right) \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng định lý hàm số sin cho ΔAMB :

$$\frac{MB}{\sin \alpha} = \frac{MA}{\sin B} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{AM} \cdot MB \sin B = \frac{a}{2AM} \sin B \quad (2)$$



Từ (1) và (2) ta được:

$$\cot \alpha = \frac{c - \frac{a}{2} \cos B}{\frac{a}{2} \sin B} = \frac{2c - a \cos B}{a \cdot \frac{b}{2R}} = \frac{R(4c - 2a \cos B)}{ab} = \frac{4c^2 - 2ac \cos B}{\frac{abc}{R}} = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4S}.$$

$$\text{Tương tự: } \cot \beta = \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{4S}; \cot \gamma = \frac{3b^2 + a^2 - c^2}{4S}.$$

$$\text{Do đó, } \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4S} + \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{4S} + \frac{3b^2 + a^2 - c^2}{4S} = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 21. Cho ΔABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. R là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Chứng minh rằng: $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} R$.

Lời giải. Áp dụng định lý cos và sin, ta được:

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc \cdot \frac{a}{2R}} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2) R}{abc}.$$

Tương tự với $\cot B$ và $\cot C$, cộng về theo về được đpcm.

Bài 22. Cho ΔABC có trọng tâm G , R là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng:

$$3 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) = \frac{3}{4R^2} (GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Lời giải. Áp dụng công thức trung tuyến, ta được $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Áp dụng định lý sin: $a = 2R \sin A$; $b = 2R \sin B$; $c = 2R \sin C$.

$$\text{Suy ra } m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = 3R^2 (3 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C) \quad (1)$$

$$\text{Theo tính chất trọng tâm, có } m_a = \frac{3}{2}GA, m_b = \frac{3}{2}GB, m_c = \frac{3}{2}GC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) thu được đẳng thức cần chứng minh.

Bài 23. Cho ΔABC có h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài đường cao xuất phát từ A, B, C ; p là nửa chu vi. R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng:

$$p^2 = \frac{R}{2r^2} h_a h_b h_c$$

Lời giải. Ta có $ah_a = bh_b = ch_c = 2S \Rightarrow h_a h_b h_c = \frac{2S}{abc}$.

$$\text{Lại có } S = pr \Rightarrow \frac{2p^2 r^2}{h_a h_b h_c} = \frac{abc}{4S} = R.$$

Bài 24. Cho ΔABC có $\sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin^2 A$. Chứng minh $\cos A \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải. Áp dụng định lý sin, có:

$$\sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin^2 A \Leftrightarrow \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} = 2 \frac{a^2}{4R^2} \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2.$$

Áp dụng định lý cos, có:

$$b^2 + c^2 = 2(b^2 + c^2 - 2bc \cos A) \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2}{4bc}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si: $b^2 + c^2 \geq 2bc$. Suy ra $\cos A \geq \frac{1}{2}$.

Bài 25. Cho ΔABC có $AB = c, BC = a, CA = b$; l_a, l_b, l_c lần lượt là độ dài đường phân giác xuất phát từ A, B, C . Chứng minh: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c}$.

Lời giải. Gọi D là chân đường phân giác kẻ từ A . Ta có:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}b.l_a \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}c.l_a \sin \frac{A}{2} \Leftrightarrow l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}.$$

Vì $0^\circ < \hat{A} < 180^\circ$ nên $0 < \cos \frac{A}{2} < 1$.

$$\text{Suy ra } l_a < \frac{2bc}{b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{l_a} > \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$$

Tương tự với l_b và l_c . Cộng vế theo vế ta được đpcm.

Bài 26. Cho ΔABC diện tích S có $AB = c, BC = a, CA = b$. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

Lời giải. Theo công thức Hê-rông: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Ta có $\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{p-a+p-b}{2} = \frac{c}{2}$. Tương tự có $\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{a}{2}$; $\sqrt{(p-a)(p-c)} \leq \frac{b}{2}$.

$$\text{Do đó } S^2 \leq p \cdot \frac{abc}{8} = \frac{(a+b+c)abc}{16}.$$

$$\text{Lại có } (a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 3abc(a+b+c) \geq 3 \cdot 16 \cdot S^2.$$

Suy ra đpcm.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 27. Cho ΔABC có $AB = c, BC = a, CA = b$; trọng tâm G và tâm đường tròn nội tiếp I . Biết GI vuông góc với đường phân giác trong của $\widehat{BCA}$. Chứng minh: $\frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b}$.

Lời giải. Vẽ $GH \perp AC, GK \perp BC, ID \perp AC$.

Gọi L và N lần lượt là giao điểm của IG với AC và BC .

$$\text{Ta có: } S_{\Delta CLN} = 2S_{\Delta LIC} = ID \cdot IC = r \cdot LC \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } S_{\Delta CLN} = S_{\Delta GLC} + S_{\Delta GCN} = \frac{1}{2}(GH \cdot LC + GK \cdot CN) \quad (2)$$

$$\text{Do } \Delta CLN \text{ cân nên } LC = CN \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra } r \cdot LC = \frac{1}{2}LC(GH + GK) \Leftrightarrow 2r = GH + GK.$$

Gọi h_a, h_b lần lượt là độ dài đường cao của ΔABC xuất phát từ A và B .

$$\text{Ta có: } \frac{GK}{h_a} = \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}; \frac{GH}{h_b} = \frac{1}{3}. \text{ Do đó } 2r = \frac{1}{3}(h_a + h_b).$$

$$\text{Mà } S_{\Delta ABC} = pr = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b \Rightarrow h_a = \frac{2pr}{a}; h_b = \frac{2pr}{b}.$$

$$\text{Suy ra } 2r = \frac{2}{3}pr \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{3}p \left(\frac{a+b}{ab} \right) \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Bài 28. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp với $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ và p là nửa chu vi, S là diện tích tứ giác. Chứng minh rằng:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{B+D}{2}}.$$

Lời giải. Áp dụng định lý hàm số cos trong các tam giác ABD, CBD ta có:

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C.$$

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C.$$

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad \cos A - 2bc \cos C. \quad (1)$$

Bình phương hai vế của (1) ta có:

$$(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4(ad \cos A - 2bc \cos C)^2. (2)$$

Ta có:

$$S = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}ad \sin A + \frac{1}{2}bc \sin C.$$

$$16S^2 = 4(ad \sin A + bc \sin C)^2. (3)$$

Cộng từng vế (2),(3) ta được:

$$\begin{aligned} (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 + 16S^2 &= 4 \left[a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos A \cos C - \sin A \sin C) \right] \\ &= 4 \left[a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos(A+C)) \right] \\ &= 4 \left[a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \left(2 \frac{\cos^2(A+C)}{2} - 1 \right) \right] \\ &= 4 \left[(ad+bc)^2 - 4abcd \frac{\cos^2(A+C)}{2} \right]. (4) \end{aligned}$$

Từ (4) suy ra

$$\begin{aligned} 16S^2 &= 4(ad+bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcd \frac{\cos^2(A+C)}{2} \\ &= (2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2) - 16abcd \frac{\cos^2(A+C)}{2} \\ &= [(a+d)^2 - (b-c)^2] [(b+c)^2 - (a-d)^2] - 16abcd \frac{\cos^2(A+C)}{2} \\ &= (2p-2c)(2p-2b)(2p-2d)(2p-2a) - 16abcd \frac{\cos^2(A+C)}{2}. (5) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{B} + \widehat{D}}{2} = 180^\circ \Rightarrow \cos^2 \frac{B+D}{2} = \cos^2 \frac{A+C}{2}$$

nên từ (5) suy ra

$$\begin{aligned} S^2 &= (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{B+D}{2}. \\ \Rightarrow S &= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{B+D}{2}}. \end{aligned}$$

Dạng 5. Nhận dạng tam giác vuông

Sử dụng các phép biến đổi tương đương hoặc hệ quả để biến đổi “Điều kiện cho trước” đến một đẳng thức mà từ đó ta dễ dàng kết luận được tính chất của tam giác.

Ví dụ 20. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện

$$\sin 2A + \sin 2B = \frac{\sin 2A \sin 2B}{\cos A \cos B}.$$

Chứng minh tam giác ABC vuông.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}
 \sin 2A + \sin 2B &= \frac{\sin 2A \sin 2B}{\cos A \cos B} \\
 \Leftrightarrow 2 \sin A \cos A + 2 \sin B \cos B &= \frac{2 \sin A \cos A \cdot 2 \sin B \cos B}{\cos A \cos B} \\
 \Leftrightarrow \sin A \cos A + \sin B \cos B &= 2 \sin A \sin B \\
 \Leftrightarrow \sin 2A + \sin 2B &= 4 \sin A \sin B \\
 \Leftrightarrow 2 \sin(A+B) \cos(A-B) &= 2[\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\
 \Leftrightarrow \sin C \cdot \cos(A-B) &= \cos(A-B) + \cos C \\
 \Leftrightarrow \cos(A-B) \cdot \cos C(1 - \sin C) + \cos^2 C &= 0 \\
 \Leftrightarrow \cos(A-B) \cdot \cos C(1 - \sin C) + 1 - \sin^2 C &= 0 \\
 \Leftrightarrow (1 - \sin C)(\cos(A-B) \cos C + 1 + \sin C) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 1 - \sin C &= 0 \\
 \Leftrightarrow C &= \frac{\pi}{2} \\
 \Leftrightarrow \triangle ABC &\text{ vuông tại } C.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 21. Cho $\triangle ABC$ có $\sin 2A \cos 2A + \sin 2B \cos 2B + \sin 2C \cos 2C = 0$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}
 &\sin 2A \cos 2A + \sin 2B \cos 2B + 2 \sin 2C \cos 2C \\
 &= \sin 4A + \sin 4B + 2 \sin 2C \cos 2C \\
 &= 2 \sin 2(A+B) \cos 2(A-B) + 2 \sin 2C \cos 2C \\
 &= -2 \sin 2C \cos 2(A-B) + 2 \sin 2C \cos 2(A+B) \\
 &= -2 \sin 2C [\cos 2(A-B) - \cos 2(A+B)] \\
 &= -4 \sin 2C \sin 2A \sin 2B.
 \end{aligned}$$

Do đó $\sin 2A \cos 2A + \sin 2B \cos 2B + \sin 2C \cos 2C = 0 \Leftrightarrow -4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2A = 0 \\ \sin 2B = 0 \\ \sin 2C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = \pi \\ 2B = \pi \\ 2C = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{2} \\ B = \frac{\pi}{2} \\ C = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông.}$$

Ví dụ 22. Cho $\triangle ABC$ có $\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt[2017]{\sin C}$ và các góc A, B nhọn. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải. Ta có: $\sin C \in [0, 1] \Rightarrow \sqrt[2017]{\sin C} = \sin^{2017} C \geq \sin^2 C \Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B \geq \sin^2 C$
 $\Leftrightarrow 4R^2[\sin^2 A + \sin^2 B] \geq 4R^2 \sin^2 C \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 \geq 0$.

Theo định lý hàm số cosin ta có: $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \geq 0$.

Ta thấy:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 A + \sin^2 B &= \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} \\
 &= 1 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} \\
 &= 1 - \cos(A+B) \cos(A-B) \\
 &= 1 + \cos C \cos(A-B) \geq 1.
 \end{aligned}$$

Mặt khác: $\sqrt[2017]{\sin C} \leq \sqrt[2017]{1} = 1$.

Do đó: $\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt[2017]{\sin C}$ khi $\begin{cases} \cos C \cos(A-B) = 0 \\ \sin C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông.}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 29. Cho A, B là hai góc nhọn của tam giác ABC thỏa mãn:

$$\sin^2 A + \sin^2 B = 1.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại C .

Lời giải.

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \sin^2 B &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos(A+B) \cos(A-B) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos C \cos(A-B) &= 0. \end{aligned}$$

Mà A, B là hai góc nhọn nên $\cos(A-B) \neq 0$.

Do đó $\cos C \cdot \cos(A-B) = 0 \Leftrightarrow \cos C = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C .

Bài 30. Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn đẳng thức :

$$\sin C = \sin A \cos B.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A .

Lời giải.

$$\begin{aligned} \sin C &= \sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)] \\ \Rightarrow 2 \sin C &= \sin C + \sin(A-B) \\ \Rightarrow \sin C &= \sin(A-B) \\ \Rightarrow \sin(A+B) &= \sin(A-B) \\ \Rightarrow \sin A \cos B + \sin B \cos A &= \sin A \cos B - \sin B \cos A \\ \Rightarrow \sin B \cos A &= 0 \\ \Rightarrow \cos A &= 0 \Rightarrow A = \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \triangle ABC &\text{ vuông tại } A. \end{aligned}$$

Bài 31. Cho tam giác ABC có $C < B$ và b, c là các cạnh của tam giác. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông nếu có:

$$\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}.$$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} &= \frac{\sin B \cos C - \sin C \cos B}{\sin B \sin C + \sin C \sin B} \\ &= \frac{\frac{b}{2R} \cos C - \frac{c}{2R} \cos B}{\frac{b}{2R} \cos C + \frac{c}{2R} \cos B} \\ &= \frac{2ab \cos C - 2ac \cos B}{2ab \cos C + 2ac \cos B} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 - c^2) - (a^2 + c^2 - b^2)}{(a^2 + b^2 - c^2) + (a^2 + c^2 - b^2)} \\ &= \frac{b^2 - c^2}{a^2}.\end{aligned}$$

$$\text{Mà } \frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}.$$

$$\text{Do đó: } \frac{b^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại } A.$$

Bài 32. Cho tam giác ABC có: $5(\sin A + 3 \cos B) + 9(\sin B + 3 \cos A) = 20$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}&4(\sin A + 3 \cos B) + 3(\cos A + 3 \sin B) \\ &= (3 \cos A + 4 \sin A) + (9 \sin B + 12 \cos B) \\ &\leq \sqrt{(4^2 + 3^2)(\sin^2 A + \cos^2 A)} + \sqrt{(9^2 + 12^2)(\sin^2 B + \cos^2 B)} \\ &= 5 + 15 = 20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Dấu bằng xảy ra} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3}{4} \\ \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{9}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \tan A = \cot B = \frac{3}{4} \\ \Rightarrow \tan A &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} - B \Leftrightarrow A + B = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại } C.\end{aligned}$$

Dạng 6. Nhận dạng tam giác cân

Sử dụng các phép biến đổi tương đương hoặc hệ quả để biến đổi “Điều kiện cho trước” đến một đẳng thức mà từ đó ta dễ dàng kết luận được tính chất của tam giác.

Ví dụ 1. Chứng tỏ rằng tam giác ABC cân nếu $\tan B + \tan C = 2 \tan \frac{B+C}{2}$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}
 \tan B + \tan C &= 2 \tan \frac{B+C}{2} \\
 \Leftrightarrow \tan B - \tan \frac{B+C}{2} + \tan C - \tan \frac{B+C}{2} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\cos B \cos \frac{B+C}{2}} + \frac{\sin \frac{C-B}{2}}{\cos C \cos \frac{B+C}{2}} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sin \frac{B-C}{2} \left(\frac{1}{\cos B \cos \frac{B+C}{2}} - \frac{1}{\cos C \cos \frac{B+C}{2}} \right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sin \frac{B-C}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{B-C}{3} = 0 \\
 \Leftrightarrow B = C \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } A.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn hệ thức: $\sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{C}{2} = \sin \frac{C}{2} \cos^3 \frac{B}{2}$. Chứng minh tam giác ABC cân.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{C}{2} &= \sin \frac{C}{2} \cos^3 \frac{B}{2} \\
 \Leftrightarrow \tan \frac{B}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2}} &= \tan \frac{C}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{C}{2}} \\
 \Leftrightarrow \tan \frac{B}{2} (1 + \tan^2 \frac{B}{2}) &= \tan \frac{C}{2} (1 + \tan^2 \frac{C}{2}).
 \end{aligned}$$

Đặt $x = \tan \frac{B}{2}$; $y = \tan \frac{C}{2}$ khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
 x(1+x^2) &= y(1+y^2) \\
 \Leftrightarrow x^3 - y^3 + x - y &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.
 \end{aligned}$$

Do đó ta có: $\tan \frac{B}{2} = \tan \frac{C}{2} \Rightarrow \frac{B}{2} = \frac{C}{2} \Leftrightarrow B = C \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn: $\frac{c}{b \sin A} = 2 \tan A$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{b \sin A} &= 2 \tan A \\
 \Leftrightarrow \frac{\sin C}{\sin B} &= 2 \cos A \\
 \Leftrightarrow \sin C &= 2 \sin B \cos A \\
 \Leftrightarrow \sin C &= \sin(B+A) + \sin(B-A) \\
 \Leftrightarrow \sin C &= \sin C + \sin(B-A) \\
 \Leftrightarrow \sin(B-A) &= 0 \Rightarrow B-A=0 \Leftrightarrow B=A \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } C.
 \end{aligned}$$

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có đường cao $AH = h_a$ thỏa mãn hệ thức : $h_a^2 = bc \cos^2 \frac{A}{2}$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân.

Lời giải. Ta có: $h_a = c \sin B = b \sin C \Rightarrow h_a^2 = bc \sin B \sin C$.

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned}
 \sin B \sin C &= \cos^2 \frac{A}{2} \\
 \Leftrightarrow \cos(B-C) - \cos(B+C) &= 1 + \cos A \\
 \Leftrightarrow \cos(B-C) + \cos A &= 1 + \cos A \\
 \Leftrightarrow \cos(B-C) &= 1 \\
 \Rightarrow B-C &= 0 \\
 \Leftrightarrow B=C &\Rightarrow \triangle ABC \text{ cân.}
 \end{aligned}$$

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn hệ thức:

$$\frac{4 - 2 \sin^2 B - 2 \sin^2 C}{\sin^2 B + \sin^2 C} = (\cot B + \cot C)^2 - 2 \cot B \cdot \cot C.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 \frac{4 - 2 \sin^2 B - 2 \sin^2 C}{\sin^2 B + \sin^2 C} &= (\cot B + \cot C)^2 - 2 \cot B \cdot \cot C \\
 \Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 B + \sin^2 C} - 2 &= \cot^2 B + \cot^2 C \\
 \Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 B + \sin^2 C} - 2 &= \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} - 2 \\
 \Leftrightarrow (\sin^2 B + \sin^2 C) \left(\frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \right) &= 4 \\
 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} + \frac{\sin^2 C}{\sin^2 B} - 2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{\sin B}{\sin C} - \frac{\sin C}{\sin B} \right)^2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sin B &= \sin C \\
 \Leftrightarrow B=C &\Rightarrow \triangle ABC \text{ cân.}
 \end{aligned}$$

Bài 4. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức: $\sin \frac{B}{2} = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Lời giải. $\sin^2 \frac{B}{2} = \frac{1 - \cos B}{2} = \frac{1 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}{2} = \frac{b^2 - (a - c)^2}{4ac}.$

Mà: $\sin^2 \frac{B}{2} = \frac{b^2}{4ac}.$

Do đó: $\frac{b^2 - (a - c)^2}{4ac} = \frac{b^2}{4ac} \Leftrightarrow b^2 - (a - c)^2 = b^2 \Leftrightarrow a - c = 0 \Leftrightarrow a = c \Rightarrow \triangle ABC$ cân.

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ có: $\frac{1 + \cos A}{\sin A} = \frac{2b + c}{\sqrt{4b^2 - c^2}}.$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos A}{\sin A} &= \frac{2b + c}{\sqrt{4b^2 - c^2}} \\ \Leftrightarrow \frac{(1 + \cos A)^2}{\sin^2 A} &= \frac{(2b + c)^2}{4b^2 - c^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} &= \frac{2b + c}{2b - c} \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} &= \frac{2 \sin B + \sin C}{2 \sin B - \sin C} \\ \Leftrightarrow 2 \sin B + 2 \cos A \sin B - \sin C - \cos A \sin C &= 2 \sin B - 2 \sin B \cos A + \sin C - \sin C \cos A \\ \Leftrightarrow 4 \sin A \cos B - 2 \sin C &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin(A + B) + \sin(A - C) &= \sin C \\ \Leftrightarrow \sin C + \sin(A - B) &= \sin C \\ \Leftrightarrow \sin(A - B) &= 0 \\ \Leftrightarrow A - B &= 0 \\ \Leftrightarrow A = B &\Rightarrow \triangle ABC \text{ cân.} \end{aligned}$$

Dạng 7. Nhận dạng tam giác đều.

Sử dụng các phép biến đổi tương đương hoặc hệ quả để biến đổi “Điều kiện cho trước” đến một đẳng thức mà từ đó ta dễ dàng kết luận được tính chất của tam giác. Ngoài ra đối với các bất đẳng thức đối xứng với ba góc A, B, C hoặc ba cạnh a, b, c đều xảy ra dấu bằng tại trạng thái $A = B = C = 60^\circ$ hoặc $a = b = c$ để chứng minh tam giác ABC đều.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có:

$$\begin{cases} \sin B \sin C = \frac{3}{4} \\ a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \end{cases}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \\
 \Leftrightarrow a^2(a - b - c) &= a^3 - b^3 - c^3 \\
 \Leftrightarrow a^2(b + c) &= (b + c)(b^2 - bc + c^2) \\
 \Leftrightarrow a^2 &= b^2 - bc + c^2 \\
 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 &= bc \\
 \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} &= \frac{1}{2} \\
 \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A &= \frac{\pi}{3}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned}
 \sin B \sin C &= \frac{3}{4} \\
 \Leftrightarrow \cos(B - C) - \cos(B + C) &= \frac{3}{2} \\
 \Leftrightarrow \cos(B - C) + \cos A &= \frac{3}{2} \\
 \Leftrightarrow \cos(B - C) &= 1 \\
 \Rightarrow B - C = 0 \Leftrightarrow B = C \Rightarrow \triangle ABC &\text{ cân.} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ABC$ đều.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có: $\cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2} = 9$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

Lời giải. Theo định lý hàm số cos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \geq 2bc - 2bc \cos A = 4bc \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} \geq \frac{4bc}{a^2} \Rightarrow \cot^2 \frac{A}{2} \geq \frac{4bc}{a^2} - 1.$$

Chứng minh tương tự ta có: $\cot^2 \frac{B}{2} \geq \frac{4ac}{b^2} - 1$; $\cot^2 \frac{C}{2} \geq \frac{4ab}{c^2} - 1$.

$$\text{Do đó: } \cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2} \geq \frac{4bc}{a^2} + \frac{4ac}{b^2} + \frac{4ab}{c^2} - 3 \geq 3\sqrt{\frac{4bc}{a^2} \cdot \frac{4ac}{b^2} \cdot \frac{4ab}{c^2}} - 3 = 9.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \triangle ABC$ đều.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ có:

$$\begin{cases} \sin B + \sin C = 2 \sin A \\ \cos B + \cos C = 2 \cos A \end{cases}$$

Chứng minh tam giác ABC đều.

Lời giải. Ta có: $(\sin B + \sin C)^2 + (\cos B + \cos C)^2 = (2 \sin A)^2 + (2 \cos A)^2$
 $\Leftrightarrow 2(\sin B \sin C + \cos B \cos C) + 2 = 4 \Leftrightarrow \cos(B - C) = 1 \Leftrightarrow B - C = 0 \Leftrightarrow B = C$

Khi đó: $\begin{cases} B = C \\ 2 \cos B = 2 \cos A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ B = A \end{cases} \Rightarrow A = B = C \Rightarrow \triangle ABC$ đều.

Bài 2. Cho tam giác ABC có:

$$\frac{a^2 \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} + \frac{b^2 \cos \frac{C-A}{2}}{2 \sin \frac{B}{2}} + \frac{c^2 \cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2}} = a^2 + b^2 + c^2.$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{a^2 \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} &= \frac{a(2R \sin A) \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} \\ &= 2aR \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ &= 2aR \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ &= aR (\sin B + \sin C) = \frac{a(b+c)}{2}\end{aligned}$$

Tương tự và suy ra ta có:

$$\begin{aligned}\frac{a^2 \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} + \frac{b^2 \cos \frac{C-A}{2}}{2 \sin \frac{B}{2}} + \frac{c^2 \cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2}} &= \frac{a(b+c)}{2} + \frac{b(c+a)}{2} + \frac{c(a+b)}{2} = ab + bc + ca \\ &\leq \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{c^2+a^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2\end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c \Leftrightarrow \triangle ABC$ đều.

Dạng 8. Ứng dụng giải tam giác vào đo đạc

Sử dụng định lý sin và định lý cos để giải.

Ví dụ 3. Tính khoảng cách từ một điểm trên bờ sông đến một gốc cây trên một cù lao giữa sông.

Lời giải.

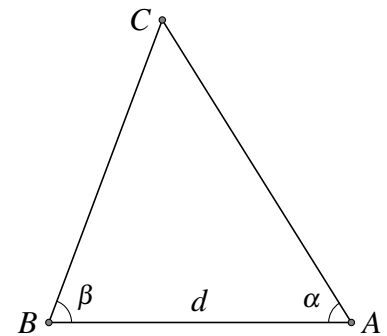
Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo khoảng cách $AB = d$, góc $\widehat{CAB} = \alpha$ và $\widehat{CBA} = \beta$.

Khi đó, khoảng cách AC được tính như sau:

Áp dụng định lý sin vào tam giác ABC , ta có

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\text{Vì } \sin C = \sin(\alpha + \beta) \text{ nên } AC = \frac{AB \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$



Ví dụ 4. Trong một buổi gặp nhau cuối tuần nghệ sĩ hài Xuân Bắc đặt ra một tình huống đối với giáo sư Cù Trọng Xoay như sau: “Một người có chiều cao từ chân đến mắt là l m. Với hai dụng cụ đo là thước dây và giác kế, người đó muốn đo chiều cao của một cái cây cao. Vậy làm thế nào để đo được chiều cao của cây”.

Nếu được ở vị trí của giáo sư Cù Trọng Xoay em làm cách nào để đo được chiều cao của cây? Hãy minh họa bằng một kết quả cụ thể.

Lời giải.

Chọn vị trí đứng là điểm C , gọi A là vị trí mắt người đó đứng tại C , O là vị trí gốc cây, B là vị trí đỉnh cây.

Các yếu tố có thể đo được bằng thước dây và giác kế là $\widehat{CAB}, \widehat{AOB}, CO$.

Dùng thước dây đo độ dài $CO = d$, áp dụng vào tam giác AOC để tính AO và góc $\widehat{AOC}$.

Dùng giác kế đo được góc BAO , từ đó áp dụng định lý sin để tính BO .

Ta có: $AO = \sqrt{AC^2 + CO^2} = \sqrt{l^2 + d^2}$ và $\cos \widehat{AOC} = \frac{OC}{OA}$, suy ra được góc $\widehat{AOC}$.

Để thấy $\beta = 90^\circ - \widehat{AOC}$. Áp dụng định lý sin cho tam giác ABO ta có:

$$\frac{OB}{\sin \alpha} = \frac{OA}{\sin \widehat{ABO}} \Rightarrow OB = \frac{OA \sin \alpha}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{\sqrt{l^2 + d^2} \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

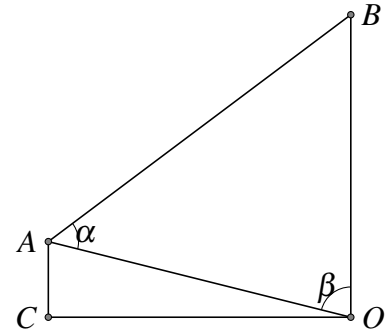
Giả sử người đó cao 1,6m, đứng cách cây 10m và nhìn ngọn cây và gốc cây một góc 30° .

$$\text{Ta có: } OA = \sqrt{1,6^2 + 10^2} = \frac{2\sqrt{641}}{5} \text{ và } \cos \widehat{AOC} = \frac{OC}{OA} = \frac{50}{2\sqrt{641}} \Rightarrow$$

$$\widehat{AOC} \approx 9,1^\circ.$$

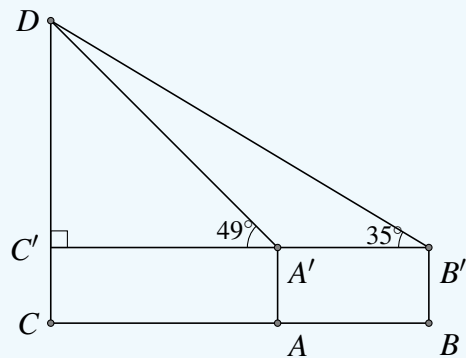
$$\text{Suy ra } \beta = 90 - 9,1 = 80,9^\circ.$$

$$\text{Khi đó chiều cao của cây là: } OB = \frac{\sqrt{1,6^2 + 10^2} \sin 30^\circ}{\sin(30^\circ + 80,9^\circ)} \approx 5,42\text{m}$$



Ví dụ 5.

Muốn đo chiều cao của tháp Chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm A, B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12\text{m}$ cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao $h = 1,3\text{m}$. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A', B' cùng thẳng hàng với điểm C' thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được góc $\widehat{DA'C'} = 49^\circ$ và góc $\widehat{DB'C'} = 35^\circ$. Hãy tính chiều cao $CD = C'D + C'C$ của tháp đó.



Lời giải. Ta có $CC' = 1,3\text{m}$.

$$\text{Áp dụng định lý sin trong } \triangle A'B'D \text{ ta được } \frac{B'D}{\sin(180^\circ - \widehat{C'A'D})} = \frac{A'B'}{\sin(180^\circ - \widehat{C'A'D} - 35^\circ)} \Leftrightarrow \frac{B'D}{\sin 131^\circ} =$$

$$\frac{12}{\sin 14^\circ} \Leftrightarrow B'D = \frac{12 \cdot \sin 131^\circ}{\sin 14^\circ}.$$

$$\text{Xét } \triangle B'C'D \text{ có } C'D = B'D \cos 35^\circ = \frac{12 \cdot \sin 131^\circ \cdot \cos 35^\circ}{\sin 14^\circ} \approx 30,7\text{m}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 3. Bạn Tèo chỉ có dụng cụ là thước thẳng dài và bạn ấy muốn đo bán kính của đường tròn lớn của tượng đài ở công viên Sông Ray (tâm của đường tròn lớn này bị che khuất bởi tượng cây đuốc). Bạn Tèo đang loay hoay không biết làm cách nào để đo được bán kính của đường tròn này. Hãy tìm cách giúp bạn Tèo hoàn thành công việc.

Lời giải.

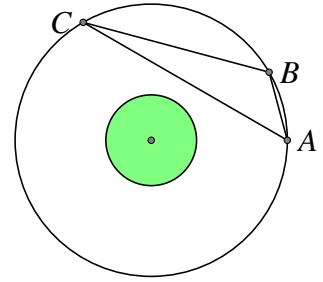
Lấy ba điểm A, B, C khác nhau thuộc đường tròn.

Đo độ dài các đoạn thẳng $BC = a, AC = b, AB = c$.

Áp dụng công thức Hê-rông tính diện tích tam giác ABC :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

$$\text{Suy ra bán kính của đường tròn là: } R = \frac{abc}{4S}.$$

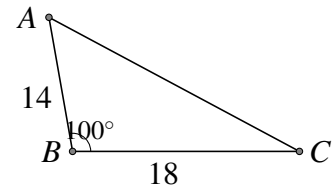


Bài 4. Một ô tô đi từ A đến C nhưng ở giữa A và C là một ngọn núi cao nên ô tô phải chạy thành hai đoạn đường từ A đến B và từ B đến C , các đoạn đường này tạo thành tam giác ABC có $AB = 14\text{km}$, $BC = 18\text{km}$ và góc $\widehat{B} = 100^\circ$, biết rằng cứ 1km đường ô tô phải tốn $0,1$ lít xăng.

- Tính số xăng mà xe tiêu thụ khi chạy đoạn đường từ A đến C mà phải qua B .
- Giả sử không có ngọn núi và có con đường thẳng từ A đến C thì ô tô chạy hết con đường này tốn bao nhiêu lít xăng?

Lời giải.

- Tính số xăng mà xe tiêu thụ khi chạy đoạn đường từ A đến C mà phải qua B .
Tổng đoạn đường xe đi từ A đến C là $AB + BC = 14 + 18 = 32\text{km}$.
Do đó số xăng mà xe tiêu thụ là $32 \cdot 0,1 = 3,2\text{lit}$.



- Áp dụng định lý côsin ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(\widehat{ABC}) = 14^2 + 18^2 - 2 \cdot 14 \cdot 18 \cdot \cos 100^\circ =$$

Bài 5. Người ta dự định xây một cây cầu bắc qua một con sông tương đối rộng và chảy xiết. Trong một đợt khảo sát người ta muốn đo khoảng cách giữa hai điểm A và B ở hai bên bờ sông. Khó khăn là người ta không thể qua sông bằng bất kì phương tiện gì. Em hãy đặt mình vào vị trí của người khảo sát để giải quyết tình huống này. Biết rằng em có dụng cụ ngắm đo góc và thước dây.

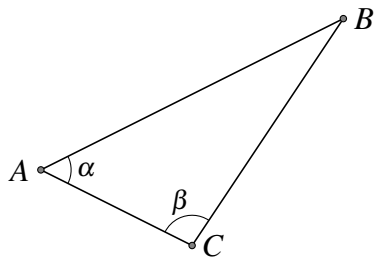
Lời giải.

Để tính được chiều dài đoạn AB ta sẽ tạo một tam giác mà có AB là một cạnh. Ta chọn một điểm C nằm trên bờ (có thể cùng phía với A hoặc với B) và ta xem trong tam giác này ba yếu tố nào ta đo được bằng các dụng cụ đã có.

Giả sử điểm C nằm cùng bờ với điểm A như hình vẽ. Các yếu tố đo được là cạnh AC và hai góc $\widehat{BAC} = \alpha$ và $\widehat{ACB} = \beta$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta có:

$$\frac{AB}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin(\alpha + \beta)} \Leftrightarrow AB = \frac{AC \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$



Bài 6. Một cây cột điện cao 20m được đóng trên một triền dốc thẳng nghiêng hợp với phương nằm ngang một góc 17° . Người ta nối một dây cáp từ đỉnh cột điện đến cuối dốc. Tìm chiều dài của dây cáp biết rằng đoạn đường từ đáy cọc đến cuối dốc bằng 72m .

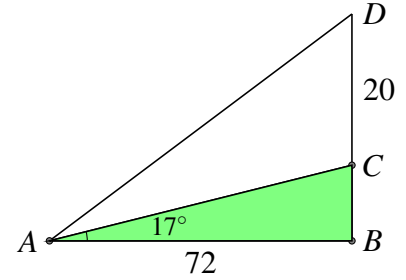
Lời giải.

Ta có $\widehat{ACD} = 180^\circ - (90^\circ - 17^\circ) = 107^\circ$.

Trong tam giác ABC vuông tại B có $AC = \frac{AB}{\cos 17^\circ} \approx 75,3\text{m}$.

Áp dụng định lý cos trong tam giác ACD , ta có:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2.AC.CD.\cos\widehat{ACD} = 75,3^2 + 20^2 - 2.75,3.20.\cos 107^\circ \approx 6950,7 \Rightarrow AD \approx 83,4\text{m}.$$



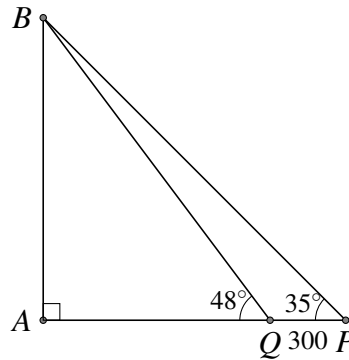
Bài 7. Hai chiếc tàu thủy P và Q cách nhau 300m. Từ P và Q thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $\widehat{BPA} = 35^\circ$, $\widehat{BQA} = 48^\circ$. Tính chiều cao của tháp.

Lời giải. Ta có: $AQ = AB \cot 48^\circ$.

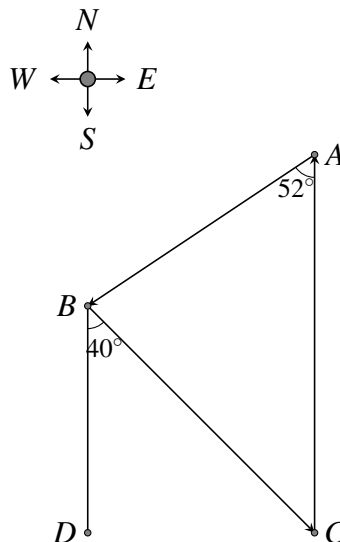
$$AP = AB \cot 35^\circ.$$

$$PQ = AP - AQ = AB(\cot 35^\circ - \cot 48^\circ)$$

$$\Rightarrow AB = \frac{PQ}{\cot 35^\circ - \cot 48^\circ} \approx 568,5\text{m}.$$



Bài 8. Một cuộc đua thuyền xuất phát từ điểm A như hình vẽ bên và di chuyển theo hướng tây nam một góc 52° tới điểm B , sau đó di chuyển theo hướng đông nam 40° tới điểm C , cuối cùng quay trở lại điểm A . Điểm C cách điểm A một khoảng 8km. Tính gần đúng tổng khoảng cách của đường đua.



Lời giải. Vì đường thẳng BD và AC song song, suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{CBD} = 40^\circ$. Do đó, $\widehat{ABC} = 180^\circ - (52^\circ + 40^\circ) = 88^\circ$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta được: $\frac{a}{\sin 52^\circ} = \frac{b}{\sin 88^\circ} = \frac{c}{\sin 40^\circ}$.

$$\text{Vì } b = 8 \text{ theo đề, nên: } a = \frac{8 \sin 52^\circ}{\sin 88^\circ} \approx 6,308\text{km và } c = \frac{8 \sin 40^\circ}{\sin 88^\circ} \approx 5,145\text{km}.$$

Tổng khoảng cách của đường đua là: $8 + 6,308 + 5,145 = 19,453\text{km}$.

Bài 9. Hai lực $\vec{f}_1$ và $\vec{f}_2$ cho trước cùng tác dụng lên một vật và tạo thành góc nhọn $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = \alpha$. Hãy lập công thức tính cường độ của hợp lực $\vec{s}$.

Lời giải.

Đặt $\vec{AB} = \vec{f}_1, \vec{AD} = \vec{f}_2$ và vẽ hình bình hành $ABCD$.

Khi đó $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{s}$.

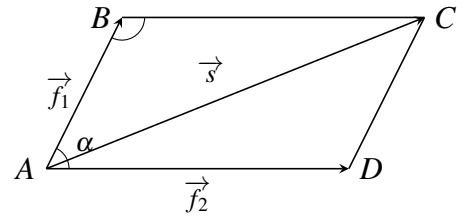
Vậy $|\vec{s}| = |\vec{AC}| = |\vec{f}_1 + \vec{f}_2|$.

Theo định lí côsin đối với tam giác ABC , ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B, \text{ hay } |\vec{s}|^2 = |\vec{f}_1|^2 + |\vec{f}_2|^2 -$$

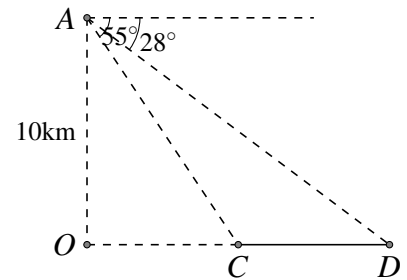
$$2 |\vec{f}_1| \cdot |\vec{f}_2| \cdot \cos(180^\circ - \alpha).$$

$$\text{Do đó: } |\vec{s}| = \sqrt{|\vec{f}_1|^2 + |\vec{f}_2|^2 + 2 |\vec{f}_1| \cdot |\vec{f}_2| \cdot \cos \alpha}.$$



Bài 10.

Một hành khách ngồi trong một máy bay, bay ở độ cao 10km nhìn xuống hai thị trấn dưới mặt đất. Góc hợp bởi phương ngang và hai thị trấn lần lượt là 28° và 55° (hình vẽ). Tính khoảng cách giữa hai thị trấn.



Lời giải. Ta có $\widehat{CAD} = 55^\circ - 28^\circ = 27^\circ$.

Xét tam giác ACO có $\widehat{OAC} = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$ và $\cos \widehat{OAC} = \frac{AO}{AC} \Leftrightarrow AC = \frac{10}{\cos 35^\circ} \approx 12,2\text{km}$.

Trong tam giác ACD có $\widehat{ACD} = 180^\circ - \widehat{OCA} = 125^\circ$ và $\widehat{ADC} = 180^\circ - (125^\circ + 27^\circ) = 28^\circ$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ACD , ta có

$$\frac{CD}{\sin 27^\circ} = \frac{AC}{\sin 28^\circ} \Leftrightarrow CD = \frac{12,2 \sin 27^\circ}{\sin 28^\circ} \approx 11,79\text{km}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai thị trấn khoảng 11,9km.

§5. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG II

I. Đề số 1a

Bài 1. Cho $A(1, 5); B(4, -1); C(-4, -5)$.

- Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng BC .

Lời giải.

- Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC . Ta có $\vec{AB} = (3, -6); \vec{BC} = (-8, -4)$, suy ra $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$, nên tam giác ABC vuông tại B . Vậy trực tâm $H(x, y)$ là điểm $B(4, -1)$.
..... 1,0 điểm
- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
Gọi $I(x, y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, do đó I là trung điểm của AC , có tọa độ $I\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$.
..... 1,0 điểm
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng BC .
Vì tam giác ABC vuông tại B nên hình chiếu của A lên BC là $B(4, -1)$.
..... 1,0 điểm

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB = 6, AC = 8; \hat{A} = 120^\circ$.

- Tính diện tích tam giác ABC .
- Tính độ dài cạnh BC và bán kính tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải.

- Tính diện tích tam giác ABC .
Ta có $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ = 12\sqrt{3}$ (đvdt) 1,0 điểm
- Tính độ dài cạnh BC và bán kính tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
Áp dụng định lý cô sin ta có
 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{-1}{2} = 148$, suy ra $BC = 2\sqrt{37}$
..... 0,5 điểm
Ta có $R = \frac{4S}{abc} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{37}}$
..... 0,5 điểm

Bài 3. Tính giá trị của biểu thức sau $P = \tan 6^\circ \cdot \tan 12^\circ \cdot \tan 18^\circ \dots \tan 78^\circ \cdot \tan 84^\circ$.

Lời giải. Ta có $\tan 6^\circ \cdot \tan 84^\circ = \tan 12^\circ \cdot \tan 78^\circ = \tan 18^\circ \cdot \tan 72^\circ = \dots = \tan 42^\circ \cdot \tan 48^\circ$.

Suy ra $P = 1$ 1,0 điểm

Bài 4. Chứng minh rằng nếu $m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$ thì $a^2 = S \cdot \cot t$, trong đó m_a, m_b, m_c lần lượt là các trung tuyến ứng với các cạnh a, b, c và S là diện tích tam giác ABC .

Lời giải. Từ điều kiện bài toán ta có

$$b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} = c^2 + a^2 - \frac{b^2}{2} + a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}$$

Suy ra $b^2 + c^2 = 5a^2$.

..... 1,0 điểm

Theo định lí hàm cosin ta có $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cdot \cos A$. Do đó $2a^2 = bc \cdot \cos A \Rightarrow \frac{2S}{\sin A} \cdot \cos A = 2a^2 \Rightarrow S \cdot \cot A = a^2$ 1,0 điểm

Bài 5. Cho $A(2, 6); B(-3, -4); C(5, 0)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-5, -10); \overrightarrow{AC} = (3, -6)$, suy ra $AB = 5\sqrt{5}; AC = 3\sqrt{5}$;

..... 0,5 điểm

Gọi tọa độ điểm $D(x, y)$. Ta có $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$, suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$

Do đó $\overrightarrow{DB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$, ta được hệ phương trình ẩn x, y , giải hệ ta được tọa độ điểm $D(2, -3)$.

..... 0,5 điểm

Gọi tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $J(x, y)$.

Ta có độ dài đoạn $BD = 5\sqrt{5}$.

Khi đó $\frac{JD}{BD} = \frac{JA}{AB}$ suy ra $\frac{JD}{JA} = \frac{BD}{AB} = \frac{5}{3}$.

..... 0,5 điểm

Do đó $\overrightarrow{JD} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{JA}$, ta được hệ phương trình ẩn x, y , giải hệ ta được tọa độ điểm $J(2, 1)$.

..... 0,5 điểm

II. Đề số 1b

Bài 1. Cho $A(-5, 6); B(-4, -1); C(4, 3)$.

- Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng BC

Lời giải.

- Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

Gọi $H(x, y)$. Ta có $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ và $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, suy ra $2x + y = -4$ và $x - 3y = -11$, giải hệ phương trình ta được $H(-3, 2)$.

..... 1,0 điểm

- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Gọi $I(x, y)$. Khi đó $IA = IB$ và $IA = IC$. Do đó, ta có

$$(x+5)^2 + (y-6)^2 = (x+4)^2 + (y+1)^2$$

$$(x+5)^2 + (y-6)^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2$$

suy ra $3x - y = 6$ và $x - 7y = 22$, giải hệ phương trình ta được $I(\frac{-16}{5}, \frac{-18}{5})$.

..... 1,0 điểm

c) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng BC

Gọi $M(x, y)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A lên cạnh BC . Ta có $\overrightarrow{AM} = (x+5, y-6)$ và $\overrightarrow{BC} = (8, 4)$; $\overrightarrow{BM} = (x+4, y+1)$

Khi đó ta có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ và $\overrightarrow{BM} = t \cdot \overrightarrow{BC}$.

Suy ra $t = \frac{2}{7}$ và $M(-2, 0)$

..... 1,0 điểm

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 4; \hat{A} = 60^\circ$.

a) Tính diện tích tam giác ABC .

b) Tính độ dài cạnh BC và bán kính tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải.

a) Tính diện tích tam giác ABC .

Ta có $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$ (đvdt) 1,0 điểm

b) Tính độ dài cạnh BC và bán kính tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Áp dụng định lí cô sin ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 13, \text{ suy ra } BC = \sqrt{13}$$

..... 0,5 điểm

$$\text{Ta có } R = \frac{4S}{abc} = \frac{\sqrt{39}}{13}$$

..... 0,5 điểm

Bài 3. Biết $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$

Lời giải. Ta có $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{-3}{8}$.

..... 0,5 điểm

Ta lại có $P = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{49}{6}$ 0,5 điểm

Bài 4. Chứng minh rằng nếu các góc của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $\sin B = 2 \sin A \cdot \cos C$, thì tam giác đó cân.

Lời giải. Từ điều kiện bài toán, áp dụng định lí sin $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, ta có

$$b = 2 \cdot a \cdot \cos C = 2a \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{b}$$

Suy ra $c^2 = 5a^2 \Rightarrow a = c$.

..... 1,0 điểm

Theo định lí hàm cosin ta có $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cdot \cos A$. Do đó $2a^2 = bc \cdot \cos A \Rightarrow \frac{2S}{\sin A} \cdot \cos A = 2a^2 \Rightarrow S \cdot \cot A = a^2$ 1,0 điểm

Bài 5. Cho $A(2, 5); B(-3, -5); C(5, -1)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-5, -10); \overrightarrow{AC} = (3, -6)$, suy ra $AB = 5\sqrt{5}; AC = 3\sqrt{5}$;

..... 0,5 điểm

Gọi tọa độ điểm $D(x, y)$. Ta có $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$, suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$

Do đó $\overrightarrow{DB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$, ta được hệ phương trình ẩn x, y , giải hệ ta được tọa độ điểm $D(2, -\frac{5}{2})$.

..... 0,5 điểm
Gọi tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $J(x, y)$.

Ta có độ dài đoạn $BD = \frac{5}{2}\sqrt{5}$.

Khi đó $\frac{JD}{BD} = \frac{JA}{AB}$ suy ra $\frac{JD}{JA} = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}$.

..... 0,5 điểm
Do đó $\overrightarrow{JD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{JA}$, ta được hệ phương trình ẩn x, y , giải hệ ta được tọa độ điểm $J(2, \frac{10}{3})$.

..... 0,5 điểm

III. Đề số 2a

Bài 1. (1,5 điểm) Cho ΔABC có $AB = 2, AC = 3, BC = 4$. Tính diện tích S của ΔABC ?

Lời giải.

Ta có: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{2+3+4}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow p-a = \frac{1}{2}, p-b = \frac{3}{2}, p-c = \frac{5}{2}$

Vậy $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$.

Bài 2. (1,5 điểm) Cho ΔABC có $AB = 2, AC = 3, BC = 4$. Tính đường cao h_a .

Lời giải.

Ta có: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{2+3+4}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow p-a = \frac{1}{2}, p-b = \frac{3}{2}, p-c = \frac{5}{2}$

Vậy $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$. Ta có: $S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{3\sqrt{15}}{8}$.

Bài 3. (1 điểm) Cho ΔABC có $AB = 2, AC = 3, BC = 4$. Tính bán kính R đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Lời giải.

Ta có $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{8\sqrt{15}}{5}$.

Bài 4. (1 điểm) Tính giá trị của biểu thức $A = 4\sin^4 135^\circ + \sqrt{3}\cos^3 150^\circ - 3\cot^2 120^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\sin 135^\circ = \sin^4 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cot 120^\circ = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy ta có $A = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{9}{8}$.

Bài 5. (3 điểm) Cho ΔABC biết $A(1;2), B(-1;1), C(5;-1)$.

a) Tìm tọa độ chân đường cao A_1 hạ từ đỉnh A của ΔABC .

b) Tìm tọa độ trực tâm H của ΔABC .

Lời giải.

a) Gọi $A_1(x; y)$ là chân đường cao hạ từ đỉnh A của ΔABC .

$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA_1} \parallel \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA_1} \parallel \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x-1) - 2(y-2) = 0 \\ \frac{x+1}{6} = \frac{y-1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy tọa độ $A_1(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

b) Gọi $H(x; y)$ là trực tâm của ΔABC .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CA} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Vậy tọa độ $H(2; 5)$.

Bài 6. (2 điểm) Cho nửa đường tròn đường kính AB . Có AC, BD là hai dây cung thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = AB^2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} \quad (1).$$

$$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} \quad (2).$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được:

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE}) \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2.$$

IV. Đề số 2b

Bài 1. (1,5 điểm) Cho ΔABC có $AB = \sqrt{3} + 1, AC = 2, BC = \sqrt{6}$. Tính góc A của ΔABC ?

Lời giải.

$$\text{Theo định lý cos trong tam giác ta có: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 60^\circ.$$

Bài 2. (1,5 điểm) Cho ΔABC có $AB = c, AC = b, BC = a$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a, b, c .

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}. \quad (1)$$

Bình phương vô hướng hai vế của (1) ta được:

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Leftrightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2).$$

Bài 3. (1 điểm) Tính tổng $S = \cos 10^\circ + \cos 30^\circ + \dots + \cos 150^\circ + \cos 170^\circ$.

Lời giải.

Ta viết lại S dưới dạng:

$$S = (\cos 10^\circ + \cos 170^\circ) + (\cos 30^\circ + \cos 150^\circ) + (\cos 50^\circ + \cos 130^\circ) + (\cos 70^\circ + \cos 110^\circ) + \cos 90^\circ \\ = (\cos 10^\circ - \cos 10^\circ) + (\cos 30^\circ - \cos 30^\circ) + (\cos 50^\circ - \cos 50^\circ) + (\cos 70^\circ - \cos 70^\circ) = 0.$$

Bài 4. (1 điểm) Cho ΔABC biết $AB = 2, BC = 3, CA = 4$ và đường cao AD . Tính độ dài đoạn CD .

Lời giải.

$$\text{Ta có: } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{Trong } \Delta ACD \text{ ta có: } CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \frac{7}{2}.$$

Bài 5. (2 điểm) Chứng minh rằng $\left(\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}} \right)^2 = 4 \tan^2 \alpha$.

Lời giải.

Ta biến đổi VT của đẳng thức:

$$VT = \left[\frac{(\sqrt{1-\cos \alpha})^2 - (\sqrt{1+\cos \alpha})^2}{\sqrt{(\sqrt{1+\cos \alpha})(\sqrt{1-\cos \alpha})}} \right]^2 = \left[\frac{-2\cos \alpha}{\sqrt{\sqrt{1-\cos^2 \alpha}}} \right] = \left[\frac{-2\cos \alpha}{|\sin \alpha|} \right] \\ = \frac{4\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 4 \tan^2 \alpha \quad (\text{ĐPCM}).$$

Bài 6. (3 điểm) Cho tam giác ABC có các cạnh $AC = b, BC = a$ và $AB = c$.

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a, b, c .

b) Gọi M là trung điểm BC và G là trọng tâm ΔABC . Tính độ dài AM và AG .

c) Tính $\cos$ góc tạo bởi AG và BC theo a, b, c .

Lời giải.

a) Ta có : $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ (1).

Bình phương hai vế (1) ta được:

$$\vec{BC}^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 \Leftrightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2.\vec{AC}.\vec{AB}.$$

$$\text{Vậy ta có: } \vec{AC}.\vec{AB} = \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - a^2).$$

b) Theo đẳng thức vectơ về trung điểm ta có: $\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AB})$. (2)

Bình phương hai vế (2) ta được:

$$\begin{aligned}\vec{AM}^2 &= \frac{1}{4}(\vec{AC} + \vec{AB})^2 = \frac{1}{4}(AC^2 + AB^2 + 2.\vec{AC}.\vec{AB}) \\ &= \frac{1}{4}\left[c^2 + b^2 + 2.\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)\right] = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} (*).$$

$$\text{Suy ra : } AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = \frac{1}{3}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

c) Gọi α là góc tạo bởi AG và BC .

$$\text{Khi đó } |\vec{AG}.\vec{BC}| = |\vec{AG}|.|\vec{BC}|.\cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{AG}.\vec{BC}|}{|\vec{AG}|.|\vec{BC}|}. (3)$$

$$\text{Ta có } \vec{AG}.\vec{BC} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}).(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{3}(AC^2 - AB^2) = \frac{1}{3}(b^2 - c^2) (4).$$

$$\text{Thế (4) vào (3) ta được: } \cos \alpha = \frac{\frac{1}{3}|b^2 - c^2|}{\frac{1}{3}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}.a} = \frac{|b^2 - c^2|}{a\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}}.$$

V. Đề số 3a

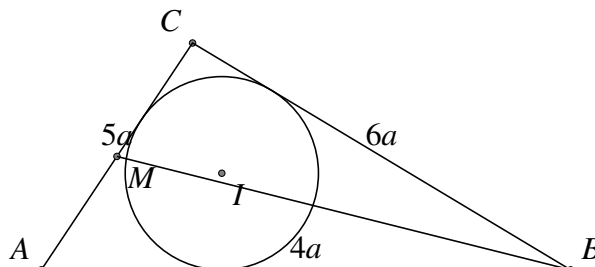
Bài 1. (2,5đ) Cho tam giác ABC có $AB = 4a$, $AC = 5a$, $BC = 6a$.

a) Tính $\cos \hat{A}$.

b) Tính độ dài đường trung tuyến hạ từ B .

c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải.



$$\text{a) } \cos \hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{(4a)^2 + (5a)^2 - (6a)^2}{2.4a.5a} = \frac{1}{8}. \quad (0,25 \times 2)$$

b) Trung tuyến hạ từ đỉnh B :

$$m_b^2 = \frac{2(AB^2 + BC^2) - AC^2}{4} = \frac{2[(4a)^2 + (6a)^2] - (5a)^2}{4} = \frac{79a^2}{4} \quad (0,25 \times 2).$$

$$\Rightarrow m_b = \frac{a\sqrt{79}}{2}. \quad (0,25)$$

c) Nửa chu vi tam giác $p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{15a}{2}$. (0,25)

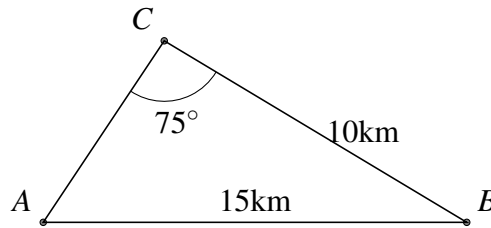
Diện tích tam giác $S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \frac{15\sqrt{7}a^2}{4}$. (0,25 × 2)

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC :

$$S = p \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{15\sqrt{7}a^2}{4}}{\frac{15a}{2}} = \frac{\sqrt{7}a}{2}. \quad (0,25 \times 2)$$

Bài 2. (1đ) Lắp một đường dây cao thế từ vị trí A đến vị trí B phải tránh một ngọn núi, do đó người ta phải nối thẳng đường dây từ vị trí A đến vị trí C dài 15km rồi từ vị trí C nối thẳng đến vị trí B dài 10km. Góc tạo bởi hai đoạn dây AC và CB là 75° . Hỏi việc nối thẳng từ A đến B người ta đã tốn thêm bao nhiêu km dây?

Lời giải.



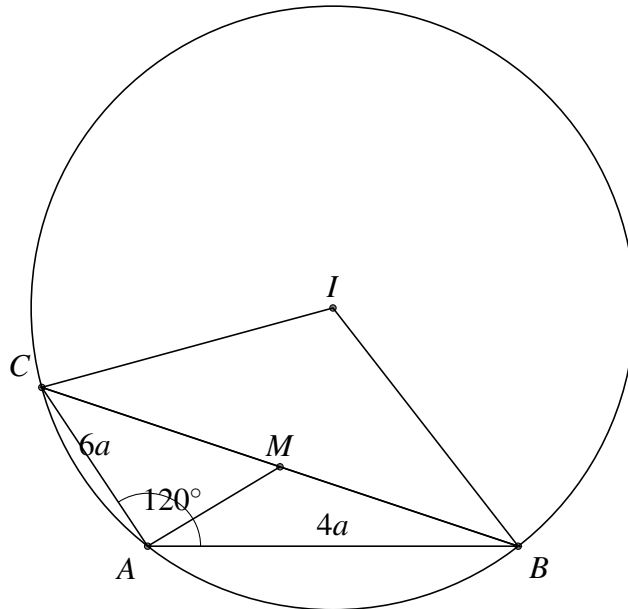
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos 75^\circ \approx 247,4. \quad (0,25 \times 2)$$

$$\Rightarrow AB \approx 15,73 \text{ km}. \quad (0,25)$$

Như vậy so với việc nối thẳng từ A đến B người ta tốn thêm $25 - 15,73 \approx 9,27$ km dây. (0,25)

Bài 3. (2,5đ) Cho tam giác ABC có $AB = 4a$, $AC = 6a$ và góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh BC , đường trung tuyến AM , diện tích tam giác IBC (I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Lời giải.



Ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = (4a)^2 + (6a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 6a \cdot \cos 120^\circ = 76a. \quad (0,25 \times 2)$$

$$\Rightarrow BC = 2a\sqrt{19}. \quad (0,25)$$

Đường trung tuyến AM :

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} = \frac{2((4a)^2 + (6a)^2) - 76a^2}{4} = 7a^2. \quad (0,25 \times 2)$$

$$\Rightarrow AM = a\sqrt{7}. \quad (0,25)$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC :

$$R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{2a\sqrt{19}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a\sqrt{57}}{3} = IB. \quad (0,25 \times 2)$$

Diện tích tam giác IBC bằng:

$$S_{IBC} = \frac{1}{2}IB \cdot IC \cdot \sin \widehat{BIC} = \frac{1}{2}IB^2 \sin 120^\circ. \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow S_{IBC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{76a^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{19a^2\sqrt{3}}{3}. \quad (0,25)$$

Bài 4. (2đ) Tính góc A của ΔABC biết $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} b(b^2 - a^2) &= c(a^2 - c^2) \\ \Leftrightarrow b(b^2 - b^2 - c^2 + 2bc \cdot \cos A) &= c(b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A - c^2) \quad (0,25 \times 2) \\ \Leftrightarrow -bc^2 + 2b^2c \cdot \cos A &= cb^2 - 2bc^2 \cdot \cos A \\ \Leftrightarrow bc^2(2\cos A - 1) + cb^2(2\cos A - 1) &= 0 \quad (0,25 \times 2) \\ \Leftrightarrow (2\cos A - 1)(bc^2 + cb^2) &= 0 \quad (0,25) \\ \Leftrightarrow (2\cos A - 1) &= 0 \quad (0,25) \quad (\text{Do } bc^2 + cb^2 > 0) \\ \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A} &= 60^\circ \quad (0,25 \times 2) \end{aligned}$$

Bài 5. (2đ) Cho tam giác ABC thỏa mãn $\frac{\sin A}{m_a} = \frac{\sin B}{m_b} = \frac{\sin C}{m_c}$. Chứng minh tam giác ABC đều.

Lời giải. Xét $\frac{\sin A}{m_a} = \frac{\sin B}{m_b}$.

Ta có $\sin A = \frac{a}{2R}$ và $\sin B = \frac{b}{2R}$.

$$\Rightarrow \frac{a}{m_a} = \frac{b}{m_b} \Rightarrow m_a = \frac{a \cdot m_b}{b}. \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow m_a^2 = \left(\frac{a \cdot m_b}{b} \right)^2.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} &= \frac{a^2 \cdot m_b^2}{b^2} \\ \Leftrightarrow \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} &= \frac{a^2(2(a^2 + c^2) - b^2)}{4b^2} \quad (0,25 \times 2) \\ \Leftrightarrow 2b^2(b^2 + c^2) - a^2b^2 &= 2a^2(a^2 + c^2) - a^2b^2 \\ \Leftrightarrow 4b^4 - 4a^4 + 2b^2c^2 - 2a^2c^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (b^2 - a^2)[2(b^2 + c^2) + c^2] &= 0 \\ \Leftrightarrow b^2 - c^2 &= 0 \quad (0,25) \\ \Leftrightarrow b &= c. \quad (0,25) \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự với $\frac{\sin B}{m_b} = \frac{\sin C}{m_c}$ $(0,25)$.

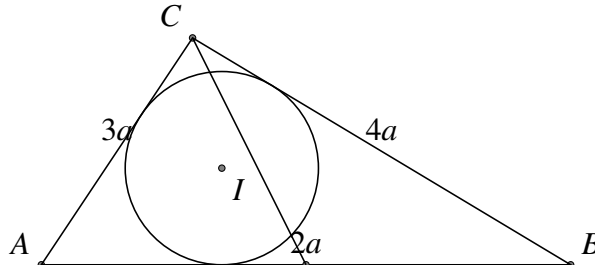
Ta được $a = b = c$ suy ra tam giác ABC đều. $(0,25)$

VI. Đề số 3b

Bài 1. (2,5đ) Cho tam giác ABC có $AB = 2a$, $AC = 3a$, $BC = 4a$.

- Tính $\cos \hat{A}$
- Tính độ dài đường trung tuyến hạ từ C .
- Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải.



$$a) \cos \hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{(2a)^2 + (3a)^2 - (4a)^2}{2 \cdot 2a \cdot 3a} = -\frac{1}{4} \quad (0,25 \times 2)$$

b) Trung tuyến hạ từ đỉnh C :

$$m_c^2 = \frac{2(AC^2 + BC^2) - AB^2}{4} = \frac{2[(3a)^2 + (4a)^2] - (2a)^2}{4} = \frac{23a^2}{4} \quad (0,25 \times 2)$$

$$\Rightarrow m_c = \frac{a\sqrt{23}}{2} \quad (0,25)$$

$$c) \text{ Nửa chu vi tam giác } p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{9a}{2} \quad (0,25)$$

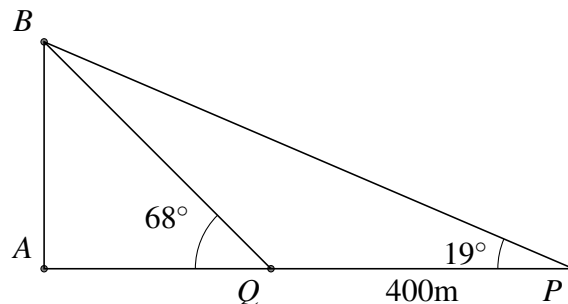
$$\text{Diện tích tam giác } S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \frac{3\sqrt{15}a^2}{4} \quad (0,25 \times 2)$$

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC :

$$S = p \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{3\sqrt{15}a^2}{4}}{\frac{9a}{2}} = \frac{\sqrt{15}a}{6} \quad (0,25 \times 2)$$

Bài 2. (1đ) Hai chiếc tàu thủy P và Q cách nhau 400m đồng thời thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng ở trên bờ biển. Từ P và Q , người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $\widehat{BPA} = 19^\circ$ và $\widehat{BQA} = 68^\circ$. Tính chiều cao AB của tháp hải đăng?

Lời giải.



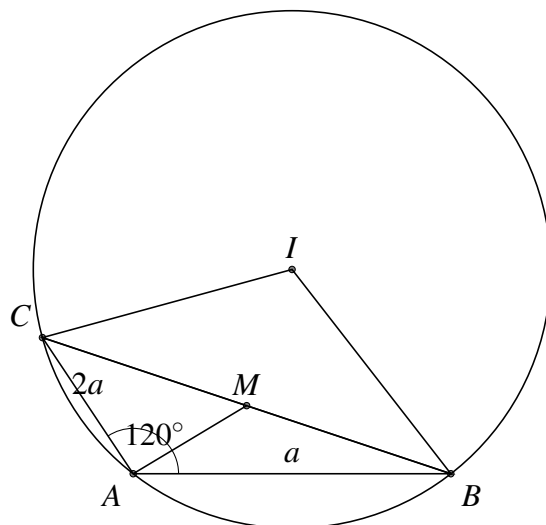
$$\text{Ta có: } AP = AB \cot 19^\circ \quad (0,25);$$

$$AQ = AB \cot 68^\circ \quad (0,25) \text{ mà } AP - AQ = PQ = 400\text{m}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{400}{\cot 19^\circ - \cot 68^\circ} \approx 90,68\text{m}. \quad (0,5)$$

Bài 3. (2đ) Cho tam giác ABC có $AB = a$, $AC = 2a$ và góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh BC , đường trung tuyến AM , diện tích tam giác IBC (I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC)

Lời giải.



Ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = (a)^2 + (2a)^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \cos 120^\circ = 7a.$$

$$\Rightarrow BC = a\sqrt{7} \quad (0,25 \times 2)$$

Đường trung tuyến AM :

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} = \frac{2((a)^2 + (2a)^2) - 7}{4} = \frac{3a^2}{4} \quad (0,25 \times 2)$$

$$\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad (0,25)$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC :

$$R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{a\sqrt{7}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{21}}{3} = IB \quad (0,25)$$

Diện tích tam giác IBC bằng:

$$S_{IBC} = \frac{1}{2} IB \cdot IC \cdot \sin \widehat{BIC} = \frac{1}{2} IB^2 \sin 120^\circ \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow S_{IBC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{21}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{7}}{4} \quad (0,25)$$

Bài 4. (2đ) Tính góc A của ΔABC biết $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} = \frac{3}{a+b+c}$.

Lời giải. Ta có:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} = \frac{3}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a+b+c}{(a+b)(a+c)} = \frac{3}{a+b+c} \quad (0,25)$$

$$\Leftrightarrow (2a+b+c)(a+b+c) = 3(a+b)(a+c) \quad (0,25)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 3ab + 3ac + 2bc + b^2 + c^2 = 3a^2 + 3ab + 3bc + 3ac \quad (0,25)$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ. \quad (0,25)$$

Bài 5. (2đ) Cho tam giác ABC thỏa $\begin{cases} \frac{1+\cos C}{1-\cos C} = \frac{2b+a}{2b-a} \\ \frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2 \end{cases}$. Chứng minh tam giác ABC đều.

Lời giải. Xét $\frac{1+\cos C}{1-\cos C} = \frac{2b+a}{2b-a}$

Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1+\cos C}{1-\cos C} \\ &= \frac{1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}} = \frac{(a+b)^2-c^2}{c^2+(a-b)^2} \quad (0,25) \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)^2-c^2}{c^2-(a-b)^2} &= \frac{2b+a}{2b-a} \\ \Leftrightarrow ((a+b)^2-c^2)(2b-a) &= (2b+a)(c^2+(a-b)^2) \\ \Leftrightarrow 2b(a+b)^2+2b(a-b)^2-4bc^2-a(a+b)^2+a(a-b)^2 &= 0 \quad (0,25) \\ \Leftrightarrow 2b[(a+b)^2+(a-b)^2]-4bc^2-a[(a+b)^2-(a-b)^2] &= 0 \\ \Leftrightarrow 4a^2b+4b^3-4bc^2-4a^2b &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2+b^2-c^2-a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow b^2=c^2 \Rightarrow b=c &\quad (0,25) \end{aligned}$$

Xét $\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} &= a^2 \\ \Leftrightarrow b^3-c^3-a^3 &= a^2(b+c-a) \\ \Leftrightarrow b^3-c^3 &= a^2b+a^2c \\ \Leftrightarrow b^3-c^3 &= (b^2+c^2-2bc\cos A)b+(b^2+c^2-2bc\cos A)c \quad (0,25 \times 2) \\ \Leftrightarrow c^2b-2b^2c\cos A+b^2c-2bc^2\cos A &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-2\cos A)(b^2c+bc^2) &= 0 \quad (0,25) \\ \Leftrightarrow \cos A &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow A &= 60^\circ \quad (0,25) \end{aligned}$$

Do đó, tam giác ABC có 2 cạnh kề bằng nhau và 1 góc bằng 60° suy ra tam giác ABC đều. (0,25)