

ĐỀ BÀI

Câu 1(1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Câu 2 (1,0 điểm). Tìm các điểm cực trị của hàm số sau $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$.

Câu 3 (1,0 điểm).

a) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 6z + 13 = 0$, biết z_1 có phần ảo âm.

Tính $\omega = (z_1)^2 + z_2$.

b) Giải phương trình $2^x - 6 \cdot 2^{-x} - 1 = 0$.

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_1^2 x \left(\frac{1}{x} + e^{x^2} \right) dx$.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian Oxyz, cho $A(0;1;2), B(-2;-1;-2), C(2;-3;-3)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC), chứng minh rằng ABC là tam giác vuông và tính diện tích của tam giác ABC.

Câu 6 (1,0 điểm).

a) Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x: $P = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin^2 x$.

b) Trong một đợt kiểm tra chất lượng lớp 12, một học sinh tham gia kiểm tra ba môn Toán, Lý và Hóa, giả thiết rằng điểm số mỗi môn theo thang điểm 10 và được làm tròn đến hàng đơn vị. Biết rằng đối với học sinh này mỗi môn thi xác suất để đạt được 10 điểm, 9 điểm, 8 điểm đều lần lượt là $\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}$. Tìm xác suất để học sinh này đạt được tổng số điểm cả ba môn đúng 28 điểm.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, M là trung điểm của $A'C'$, $BC = a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ACB') .

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ABCD là hình thoi tâm $I(1;4)$, đường tròn tâm I bán kính IA cắt đoạn IB tại E, biết A thuộc d_1 có phương trình $x + y - 3 = 0$, E thuộc d_2 có phương trình $x + y - 9 = 0$, diện tích của hình thoi bằng 40. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi biết A có hoành độ dương.

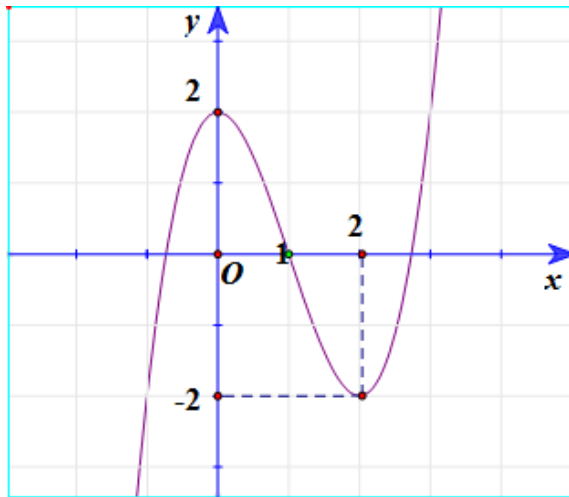
Câu 9 (1,0 điểm). Tìm m để bất phương trình sau có ít nhất một nghiệm trên $\left[\frac{1}{4}; 16\right]$.

$$\frac{(\log_2 x)^2 + 1 - 2m \log_4 x}{(\sqrt{x^2 + 3} - x - 1) \log_2 x} \geq 0 \quad (1).$$

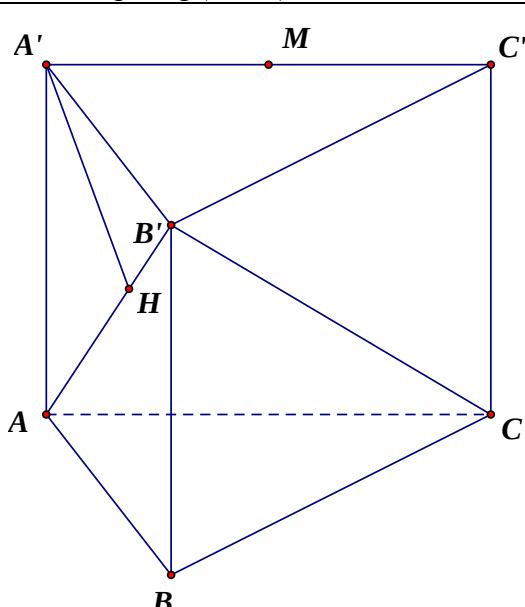
Câu 10 (1,0 điểm). Cho tam giác ABC, tìm giá trị nhỏ nhất của $\cos C$ biết rằng các góc A, B, C thỏa mãn điều kiện $\left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}\right) + 2\left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2}\right) - 3\left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}\right) = 0$.

-----Hết-----

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu	Ý	Nội dung	Điểm																				
1		Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.	1,0																				
		+ Tập xác định: Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.	0,25																				
		+ Sự biến thiên: Các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$. $y' = 3x^2 - 6x$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.	0,25																				
		Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td>-2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table> Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0), (2; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$, giá trị cực đại $y(0)=2$, hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$, giá trị cực tiểu là $y(2)=-2$.	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	y'		+	0	-	0	+	y			2		-2		$+\infty$	0,25
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$																			
y'		+	0	-	0	+																	
y			2		-2		$+\infty$																
		+ Đồ thị: 	0,25																				
2		Tìm các điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$.	1,0																				
		$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 2x(2x^2 - 3x + 1)$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$	0,25																				
		Ta có $f''(x) = 12x^2 - 12x + 2$ $f''(0) = 2 > 0, f''(1) = 2 > 0, f''\left(\frac{1}{2}\right) = -1 < 0$.	0,5																				
		Vậy: Các cực tiểu của hàm số là $x=0, x=1$; các giá trị cực tiểu tương ứng là $f(0)=0,$	0,25																				

		$f(1)=0$. Giá trị cực đại của hàm số là $x = \frac{1}{2}$, giá trị cực đại là $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$. <i>Ghi chú: Học sinh có thể giải bằng cách lập bảng biến thiên của $f(x)$ hoặc bảng xét dấu của $f'(x)$ vẫn được điểm tối đa.</i>	
3	a	Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 6z + 13 = 0$, biết z_1 có phần ảo âm. Tính $\omega = (z_1)^2 + z_2$.	0,5
		$z^2 + 6z + 13 = 0$ (1) Phương trình (1) có: $\Delta' = 9 - 13 = -4 = (2i)^2$ Do đó phương trình (1) có hai nghiệm là: $z_1 = -3 - 2i$ và $z_2 = -3 + 2i$ (thỏa z_1 có phần ảo âm). Ta có $\omega = (-3 - 2i)^2 + (-3 + 2i) = 9 + 12i + 4i^2 - 3 + 2i = 2 + 14i$.	0,25 0,25
	b	Giải phương trình $2^x - 6 \cdot 2^{-x} - 1 = 0$.	0,5
		$2^x - 6 \cdot 2^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2^x - 6 = 0$ (1) Đặt $t = 2^x$, $t > 0$ phương trình (1) trở thành $t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 3 \end{cases}$.	0,25
		Kết hợp điều kiện $t > 0$ ta được $t = 3$. Với $t = 3$, ta có $2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \log_2 3$.	0,25
4		Tính tích phân $I = \int_1^2 x \left(\frac{1}{x} + e^{x^2} \right) dx$.	1,0
		$I = \int_1^2 x \left(\frac{1}{x} + e^{x^2} \right) dx = \int_1^2 dx + \int_1^2 x e^{x^2} dx = x \Big _1^2 + \int_1^2 x e^{x^2} dx = 1 + \int_1^2 e^{x^2} \cdot x dx$ Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x \cdot dx \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$ Đổi cận: $\begin{array}{c c c} x & 1 & 2 \\ \hline t & 1 & 4 \end{array}$ Suy ra, $I = 1 + \int_1^4 e^t \cdot \frac{dt}{2} = 1 + \frac{e^t}{2} \Big _1^4 = 1 + \frac{e^4}{2} - \frac{e}{2}$. Vậy: $I = 1 + \frac{e^4}{2} - \frac{e}{2}$.	0,25 +0,25 0,25
5		Trong không gian Oxyz, cho $A(0;1;2), B(-2;-1;-2), C(2;-3;-3)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC), chứng minh rằng ABC là tam giác vuông và tính diện tích của tam giác ABC.	1,0
		Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -2; -4)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -4; -5)$ $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = (-6; -18; 12)$.	0,25
		Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm A(0;1;2) và nhận $\vec{n} = \frac{1}{6}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; -3; 2)$ làm vector pháp tuyến nên mp(ABC) có phương trình $-1(x-0) - 3(y-1) + 2(z-2) = 0$ hay $x + 3y - 2z + 1 = 0$.	0,25
		$\overrightarrow{AB} = (-2; -2; -4)$, $\overrightarrow{BC} = (4; -2; -1)$. $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -2 \cdot 4 - 2 \cdot (-2) - 4 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B.	0,25

		$AB = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{6}$, $BC = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$. Diện tích $\triangle ABC$: $S = \frac{1}{2} AB.BC = \frac{1}{2} .2\sqrt{6}.\sqrt{21} = 3\sqrt{14}$.	0,25
6	a	Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x: $P = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin^2 x$.	0,5
		$P = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin^2 x = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \cos 2x\right) + \sin^2 x$ $= \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) + \sin^2 x = \frac{1}{2}$ hay P không phụ thuộc vào x.	0,25
	b	Trong một đợt kiểm tra chất lượng lớp 12, một học sinh tham gia kiểm tra ba môn Toán, Lý và Hóa, giả thiết rằng điểm số mỗi môn theo thang điểm 10 và được làm tròn đến hàng đơn vị. Biết rằng đối với học sinh này mỗi môn thi xác suất để đạt được 10 điểm, 9 điểm, 8 điểm đều lần lượt là $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$. Tìm xác suất để học sinh này đạt được tổng số điểm cả ba môn đúng 28 điểm.	0,5
		Gọi H là biến cố “học sinh này đạt được tổng số điểm cả ba môn đúng 28 điểm” Gọi A là biến cố “Học sinh này thi được 2 môn 10 điểm và một môn 8 điểm”. Gọi B là biến cố “Học sinh này thi một môn được 10 điểm và hai môn đạt 9 điểm” Ta có $H = A \cup B$ và A, B là hai biến cố xung khắc nên xác suất của biến cố H là $P(H) = P(A) + P(B)$.	0,25
		Vì khả năng làm bài đối với mỗi môn thi là độc lập nên theo quy tắc cộng và nhân ta có xác suất xác suất của biến cố A và B lần lượt là: $P(A) = C_3^2 \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{100}$. $P(B) = C_3^1 \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{250}$. Suy ra $P(H) = \frac{1}{100} + \frac{3}{250} = \frac{11}{500}$. Vậy, xác suất cần tìm là $\frac{11}{500}$.	0,25
7		Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, M là trung điểm của $A'C'$, $BC = a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ACB') .	1,0
			0,25

	Xét tam giác ABC vuông cân tại A và $BC = a\sqrt{2}$ nên $AB = AC = BC \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = a.$ Suy ra diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{a^2}{2}.$	
	Vậy thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' là: $V = AA'.S_{\triangle ABC} = 2a.\frac{1}{2}a^2 = a^3.$	0,25
	+ Ta có $A'C' // AC \Rightarrow A'C' // (ACB') \Rightarrow d(M; (B'AC)) = d(A; (B'AC))$ (1). Trong mp (ABB'A'), kẻ A'H vuông góc với AB' tại H $\begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (ABB'A') \Rightarrow AC \perp A'H \text{ mà } A'H \perp AB' \text{ nên } A'H \perp (ACB').$ Hay $d(A'; (B'AC)) = A'H$ (2).	0,25
	+ Xét A'AB' vuông tại A' có AH là đường cao nên $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'B'^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{5}a}{5} \quad (3).$ Từ (1), (2) và (3) suy ra $d(M, (ACB')) = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$	0,25
8	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ABCD là hình thoi tâm $I(1;4)$, đường tròn tâm I bán kính IA cắt đoạn IB tại E, biết A thuộc d_1 có phương trình $x + y - 3 = 0$, E thuộc d_2 có phương trình $x + y - 9 = 0$, diện tích của hình thoi bằng 40. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi biết A có hoành độ dương.	1,0
	Vì A thuộc d_1 có phương trình $x + y - 3 = 0$ nên $A(a; 3-a)$ với $a > 0$ (do giả thiết). Vì E thuộc d_2 có phương trình $x + y - 9 = 0$ nên $E(t; 9-t)$. Suy ra $\overrightarrow{IA} = (a-1; -a-1)$, $\overrightarrow{IE} = (t-1; 5-t)$. Do ABCD là hình thoi nên $IA \perp IE$, ngoài ra E thuộc đường tròn (I; IA) nên $IE=IA$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IE} = 0 \\ IA = IE \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(t-1) - (a+1)(5-t) = 0 & (1) \\ (a-1)^2 + (a+1)^2 = (t-1)^2 + (5-t)^2 & (2) \end{cases}.$	0,25
	Khi $t=1$, thay vào (1) ta được $a=-1$ không thỏa mãn phương trình (2). Khi $t \neq 1$ ta có $(1) \Leftrightarrow a-1 = \frac{(a+1)(5-t)}{t-1}$ (3). Thay vào (2) ta được $\frac{(a+1)^2(5-t)^2}{(t-1)^2} + (a+1)^2 = (t-1)^2 + (5-t)^2 \Leftrightarrow ((t-1)^2 + (5-t)^2)((a+1)^2 - (t-1)^2) = 0$ $\Leftrightarrow (a+1)^2 = (t-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -t \\ a = t-2 \end{cases}.$ + Với $a = -t$ thay vào (3) ta được $t=2 \Rightarrow a=-2$ (không thỏa điều kiện $a>0$). + Với $a = t-2$ thay vào (3) ta được $t=4 \Rightarrow a=2$ (thỏa điều kiện $a>0$). Do đó $A(2;1)$, $E(4;5)$.	0,25
	Lúc đó $IA = IE = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, Diện tích hình thoi là $BD.IA=40$ nên $BD = \frac{40}{\sqrt{10}} = 4\sqrt{10} \Rightarrow IB = \frac{BD}{2} = 2\sqrt{10}.$ Mà E thuộc đoạn thẳng IB nên E là trung điểm của IB. Gọi $B(x_B, y_B)$ thì $\begin{cases} x_B + 1 = 2.4 \\ y_B + 4 = 2.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 7 \\ y_B = 6 \end{cases} \text{ hay } B(7;6).$	0,25
	Vì I là trung điểm BD nên $D(2.1-7; 2.4-6)$ hay $D(-5;2)$. Vì I là trung điểm AC nên $C(2.1-2; 2.4-1)$ hay $C(0;7)$.	0,25

	Lúc đó ABCD là hình bình hành có $AC \perp BD$ nên thỏa giả thiết ABCD là hình thoi. Vậy, A(2;1), B(7;6), C(0;7), D(-5;2).																				
9	Tìm m để bất phương trình sau có ít nhất một nghiệm trên $\left[\frac{1}{4};16\right]$. $\frac{(\log_2 x)^2 + 1 - 2m \log_4 x}{(\sqrt{x^2 + 3} - x - 1) \log_2 x} \geq 0 \quad (1).$	1,0																			
	Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ (\sqrt{x^2 + 3} - x - 1) \log_2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$. Ta thấy: + Nếu $\sqrt{x^2 + 3} - x - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} > x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 3 > (x + 1)^2 \Leftrightarrow x < 1$. Lúc đó $\log_2 x < 0$ nên $(\sqrt{x^2 + 3} - x - 1) \log_2 x < 0$ khi $0 < x < 1$. + Nếu $\sqrt{x^2 + 3} - x - 1 < 0 \Leftrightarrow x > 1$. Lúc đó $\log_2 x > 0$ nên $(\sqrt{x^2 + 3} - x - 1) \log_2 x < 0$ khi $x > 1$. Suy ra $(\sqrt{x^2 + 3} - x - 1) \log_2 x < 0, \forall x > 0, x \neq 1$.	0,25																			
	Do đó $(1) \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 + 1 - 2m \log_4 x \leq 0 \quad (2)$. Đặt $t = \log_2 x$, ta có $x \in \left[\frac{1}{2};16\right] \setminus \{1\} \Leftrightarrow t \in [-2;4] \setminus \{0\}$. (2) trở thành $t^2 + 1 - 2mt \leq 0 \quad (3)$ + Khi $t \in [-2;0)$: $(3) \Leftrightarrow \frac{t^2 + 1}{t} \geq m \quad (*)$ + Khi $t \in (0,4]$: $(3) \Leftrightarrow \frac{t^2 + 1}{t} \leq m \quad (**)$	0,25																			
	+ Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 1}{t}, t \neq 0$. Ta có $f'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$. $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$. Bảng biến thiên của f(t): <table><tr><td>t</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>f'(t)</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>f(t)</td><td>$-\frac{5}{2}$</td><td>-2</td><td>$+\infty$</td><td>2</td><td>$\frac{17}{4}$</td></tr></table> Từ bảng biến thiên suy ra bất phương trình (1) có nghiệm khi hoặc (*) có nghiệm $t \in [-2;0)$ hoặc (**) có nghiệm $t \in (0,4]$ khi và chỉ khi $m \leq -2$ hoặc $m \geq 2$. Vậy: $m \leq -2$ hoặc $m \geq 2$.	t	-2	-1	0	1	4	f'(t)	+	0	-	-	0	+	f(t)	$-\frac{5}{2}$	-2	$+\infty$	2	$\frac{17}{4}$	0,25
t	-2	-1	0	1	4																
f'(t)	+	0	-	-	0	+															
f(t)	$-\frac{5}{2}$	-2	$+\infty$	2	$\frac{17}{4}$																
10	Cho tam giác ABC, tìm giá trị nhỏ nhất của $\cos C$ biết rằng các góc A, B, C thỏa mãn điều kiện $\left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}\right) + 2\left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2}\right) - 3\left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}\right) = 0$.	1,0																			
	Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC, ta có	0,25																			

	$\left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}\right) + 2\left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2}\right) - 3\left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}\right) = 0$ $\Leftrightarrow \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}} + 2 \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2}} - 3 \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow \sin A + 2 \sin B = 3 \sin C.$	
	Theo định lí hàm số sin, ta có $a + 2b = 3c \Leftrightarrow a^2 + 4ab + 4b^2 = 9c^2$ Theo định lí hàm số cosin ta được $a^2 + 4ab + 4b^2 = 9(a^2 + b^2 - 2ab \cos C)$, suy ra $2ab(2 + 9 \cos C) = 8a^2 + 5b^2$.	0,25
	Theo bất đẳng thức AM-GM ta được $8a^2 + 5b^2 \geq 2\sqrt{8a^2 \cdot 5b^2} = 4\sqrt{10}ab$. Do đó ta được $2ab(2 + 9 \cos C) \geq 4\sqrt{10}ab \Rightarrow \cos C \geq \frac{2\sqrt{10} - 2}{9}$.	0,25
	Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \sqrt{8}a = \sqrt{5}b \\ a + 2b = 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{10}}{4}b \\ c = \frac{\sqrt{10} + 8}{12}b \end{cases}$ (thỏa điều kiện a, b, c là ba cạnh của tam giác). Vậy, giá trị nhỏ nhất của $\cos C$ là $\frac{2\sqrt{10} - 2}{9}$.	0,25

-----Hết-----