

CHƯƠNG 2: MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

BÀI 1: MẶT NÓN

A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

MẶT NÓN TRÒN XOAY

Trong mặt phẳng (P) . Cho hai đường thẳng Δ là ℓ cắt nhau tại O và tạo thành góc β với $0^\circ < \beta < 90^\circ$. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng ℓ sinh ra một mặt tròn xoay đỉnh O gọi là mặt nón tròn xoay (hay đơn giản là mặt nón). Khi đó:

- Đường thẳng Δ gọi là trục của mặt nón.
- Đường thẳng ℓ được gọi là đường sinh của mặt nón.
- Góc 2β gọi là góc ở đỉnh của mặt nón.

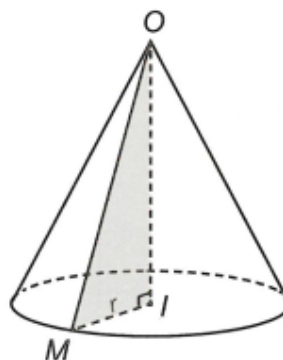
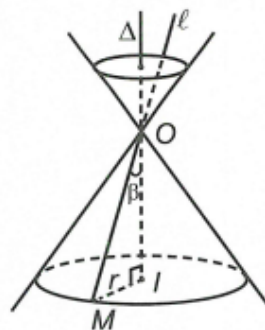
Nhận xét: Nếu M là một điểm tùy ý của mặt nón (N) khác với điểm O thì đường thẳng OM là đường sinh của mặt nón đó.

HÌNH NÓN TRÒN XOAY

Cho $\triangle OIM$ vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón).

Khi đó:

- Đường thẳng OI gọi là trục, O là đỉnh, OI gọi là đường cao và OM gọi là đường sinh của hình nón.
- Hình tròn tâm I , bán kính $r = IM$ là đáy của hình nón.



Chú ý: Nếu cắt mặt nón (N) bởi hai mặt phẳng song song (P) và (Q) với (P) qua O và vuông góc với Δ thì phần mặt nón (N) giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) và hình tròn giao tuyến của (Q) và mặt nón (N) là hình nón.

KHỐI NÓN TRÒN XOAY

Phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình đó ta gọi là khối nón tròn xoay hay ngắn gọn là khối nón.

Các khái niệm tương tự như hình nón.

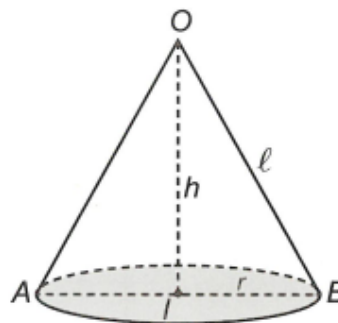
Xét khối nón có hình biểu diễn là hình bên thì ta có nhận xét:

- Nếu mp (P) chứa OI thì thiết diện của mp (P) và khối nón là một hình tam giác cân tại O .
- Nếu mp (P) vuông góc với OI (không chứa O) thì thiết diện của mp (P) và khối nón (nếu có) là một hình tròn. Hình tròn thiết diện này có diện tích lớn nhất khi mp (P) đi qua I .

CÔNG THỨC CẦN NHỚ

Hình nón có chiều cao là h , bán kính đáy r và độ dài đường sinh là ℓ thì có:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi r \ell$.
- Diện tích đáy (hình tròn): $S_{ht} = \pi r^2$.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi r \ell + \pi r^2$.
- Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3} S_{ht} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.



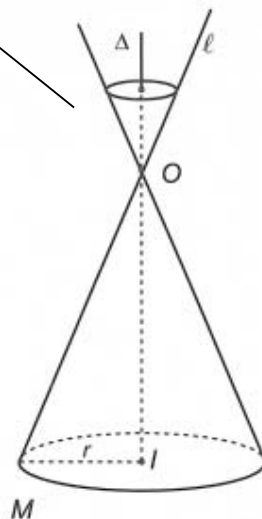
Chú ý: Vẽ hình biểu diễn hình nón hay khối nón ta thường vẽ như hình bên.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

MẶT NÓN

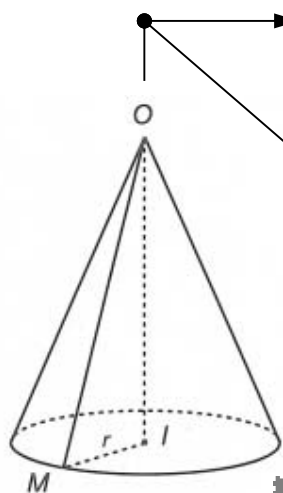
MẶT NÓN TRÒN XOAY

Trong mặt phẳng (P) . Cho hai đường thẳng Δ và ℓ cắt nhau tại O và tạo thành góc β . Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng ℓ sinh ra một mặt tròn xoay đỉnh O gọi là mặt nón tròn xoay.



HÌNH NÓN TRÒN XOAY

Cho $\triangle OMI$ vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay.



KHOÍ NÓN TRÒN XOAY

Phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình đó ta gọi là khối nón tròn xoay hay ngắn gọn là khối nón.

CÁC CÔNG THỨC

Diện tích xung quanh

$$S_{xq} = \pi r \ell$$

Diện tích đáy

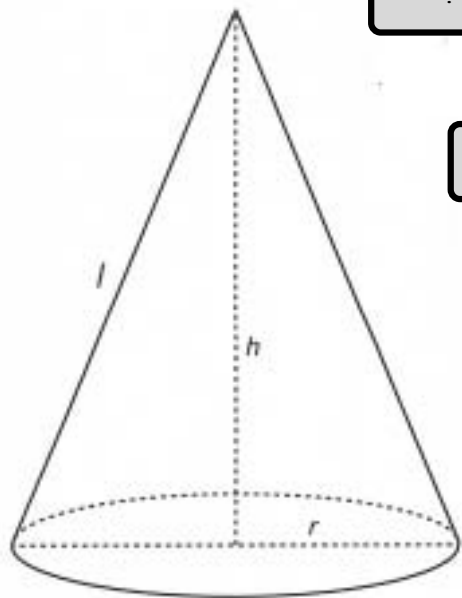
$$S_{ht} = \pi r^2$$

Diện tích toàn phần

$$S_{tp} = \pi r \ell + \pi r^2$$

Thể tích

$$V = \frac{1}{3} S_{ht} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, độ dài đường sinh, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện của hình nón

1. Phương pháp giải

Nắm vững các công thức về diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, diện tích đáy. Biết sử dụng các kết quả của phân kiến thức quan hệ song song, quan hệ vuông góc, các hệ thức lượng trong tam giác... để áp dụng vào tính toán.

Ví dụ: Tính diện tích xung quanh của khối nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông cân diện tích bằng 2?

- A. $S = 2\sqrt{2}\pi$. B. $S = 4\pi$.
C. $S = 2\pi$. D. $S = 4\sqrt{2}\pi$.

Hướng dẫn giải

Tam giác OAB vuông cân diện tích bằng 2

$$\Rightarrow \frac{1}{2}OA^2 = 2$$

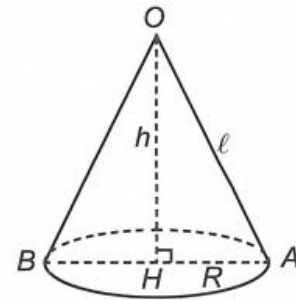
$$\Rightarrow OA = OB = 2$$

$$AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow h = R = \frac{AB}{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Suy ra } S_{xq} = \pi \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = 2\sqrt{2}\pi.$$

Chọn A.



2. Bài tập

Bài tập 1: Cắt một hình nón bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Tính diện tích toàn phần của hình nón đó.

- A. $6\pi a^2$. B. $24\pi a^2$. C. $3\pi a^2$. D. $12\pi a^2$.

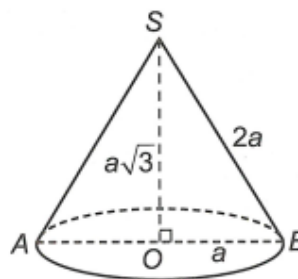
Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } h = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}, \ell = 2a, r = a.$$

Diện tích toàn phần của hình nón là

$$S_{tp} = \pi r \ell + \pi r^2 = \pi a \cdot 2a + \pi a^2 = 3\pi a^2.$$



Lưu ý: Diện tích tam giác

$$\text{đều cạnh } x \text{ là: } S = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \text{ và}$$

độ dài chiều cao là:

$$h = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Ở bài toán này $x = 2a$.

Bài tập 2: Cho hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy, diện tích đáy của hình nón bằng 9π . Độ dài đường cao của hình nón bằng

- A. $3\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

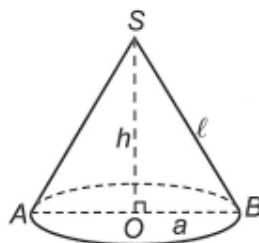
Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi r, ℓ, h lần lượt là bán kính đường tròn đáy, đường sinh, chiều cao của hình nón đã cho.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} \pi r^2 = 9\pi \\ \ell = 2r \end{cases}$ nên $\begin{cases} r = 3 \\ \ell = 6 \end{cases}$.

Lại có $h = \sqrt{\ell^2 - r^2}$ do đó $h = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}$.



Bài tập 3: Thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng 1. Mặt phẳng (α) qua đỉnh S của hình nón đó cắt đường tròn đáy tại M, N . Tính diện tích tam giác SMN , biết góc giữa (α) và đáy hình nón bằng 60° .

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi O là tâm đường tròn đáy, H là trung điểm của MN .

Ta có MN là giao tuyến của đường tròn đáy và mặt phẳng (α) , lại có $OH \perp MN, SH \perp MN$.

Do đó góc giữa (α) và đáy hình nón là

$$\widehat{SHO} = 60^\circ.$$

Vì thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác vuông có cạnh góc

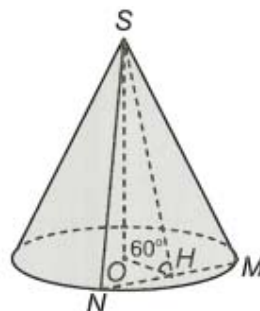
$$\text{vuông bằng } 1 \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Xét } \triangle SOH \text{ vuông tại } O \text{ có } \sin 60^\circ = \frac{SO}{SH} \Rightarrow SH = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Khi đó } MN = 2\sqrt{SN^2 - SH^2} = 2\sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy diện tích tam giác } SMN \text{ là } S_{\triangle SMN} = \frac{1}{2} SH \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Bài tập 4: Cho hình nón đỉnh S , đường cao SO , A và B là hai điểm thuộc



Lưu ý: Tam giác SMN là tam giác cân tại S và $SM = SN = 1$.

đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng

$\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SAO} = 30^\circ$, $\widehat{SAB} = 60^\circ$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a

bằng

- A. $a\sqrt{2}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $2a\sqrt{3}$. D. $a\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm của AB , dựng $OH \perp SI$.

Ta có $OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do $\widehat{SAB} = 60^\circ$ nên tam giác SAB đều.

Suy ra $SA = SB = AB$.

Mặt khác

$$\widehat{SAO} = 30^\circ \Rightarrow SO = SA \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} SA$$

$$\text{và } OA = SA \cdot \cos 30^\circ = \frac{SA\sqrt{3}}{2}.$$

Xét tam giác SOI ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OA^2 - AI^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)SA^2} + \frac{1}{\left(\frac{SA\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}SA\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{6}{SA^2} \Leftrightarrow SA = OH\sqrt{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{6} = a\sqrt{2}.$$

Bài tập 5: Cho hình nón đỉnh S , đáy là đường tròn tâm O bán kính bằng

$2a$ và độ dài đường sinh bằng $a\sqrt{5}$. Mặt phẳng (P) qua đỉnh S cắt hình

nón theo thiết diện là một tam giác có chu vi bằng $2(1+\sqrt{5})a$. Khoảng

cách d từ O đến mặt phẳng (P) là

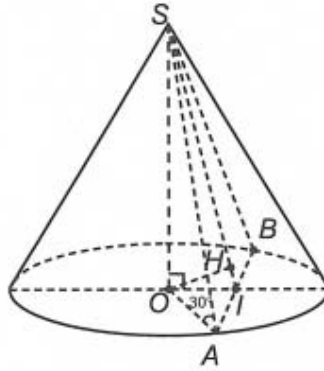
- A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $d = \frac{a}{2}$. C.

$$d = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}. \quad \text{D. } d = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Giả sử thiết diện là tam giác SAB , khi đó ta có



Lưu ý:

• Ta có: $OH \perp SI$ (1)

$$\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI)$$

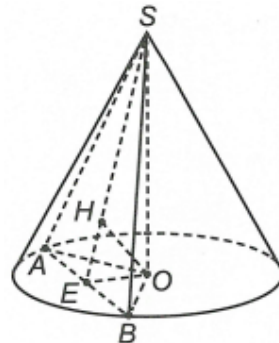
$$\Rightarrow AB \perp OH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$OH \perp (SAB)$, do đó

$$d(O; (SAB)) = OH.$$

• Có thể đặt $SA = x$.



$$\text{Do: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OE^2} + \frac{1}{OS^2}$$

$$SA + SB + AB = 2(1 + \sqrt{5})a$$

$$\Leftrightarrow OH = \frac{OS \cdot OE}{\sqrt{OS^2 + OE^2}}$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{5} + a\sqrt{5} + AB = 2(1 + \sqrt{5})a$$

$$\Leftrightarrow AB = 2a.$$

Gọi E là trung điểm AB , ta có $AB \perp SE$, mặt khác $AB \perp SO$ nên $AB \perp (SOE)$.

Kẻ $OH \perp SE$ tại H , ($H \in SE$).

Ta thấy $OH \perp AB$ vì $OH \subset (SOE) \Rightarrow OH \perp (SAB)$.

Vậy khoảng cách từ S đến (P) là OH (hay $d(O; (P)) = OH$).

$$EB = \frac{1}{2}AB = a, OB = R = 2a, OE = \sqrt{OB^2 - EB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{5a^2 - 4a^2} = a,$$

$$OH = \frac{OS \cdot OE}{\sqrt{OS^2 + OE^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Bài tập 6: Cho hình nón tròn xoay nằm giữa hai mặt phẳng song song

(P) và (Q) như hình vẽ. Kẻ đường cao

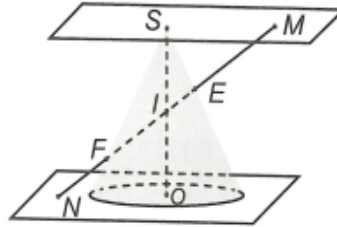
SO của hình nón và gọi I là trung điểm

của SO . Lấy $M \in (P), N \in (Q), MN = a$

và đi qua I cắt mặt nón tại E và F đồng

thời tạo với SO một góc β . Biết góc

giữa đường cao và đường sinh của hình nón bằng 45° . Độ dài đoạn EF là



A. $EF = 2a$.

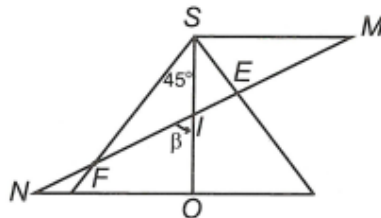
B. $EF = -\frac{a}{2} \tan 2\beta$.

C. $EF = -a \tan 2\beta$.

D. $EF = -2a \tan 2\beta$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Lưu ý:

$$S_{\Delta SFI} + S_{\Delta SEI} = S_{\Delta SFE} \quad (*)$$

$$S_{\Delta SFI} = \frac{1}{2} SF \cdot SI \cdot \sin 45^\circ$$

$$S_{\Delta SEI} = \frac{1}{2} SE \cdot SI \cdot \sin 45^\circ$$

$$S_{\Delta SFE} = \frac{1}{2} SF \cdot SE \cdot \sin 90^\circ$$

Xét tam giác NIO có $OI = NI \cdot \cos \beta = \frac{a}{2} \cos \beta$, $NO = NI \cdot \sin \beta = \frac{a}{2} \sin \beta$

Thay vào (*) ta được

$$SI = \sqrt{2} \frac{SE \cdot SF}{SE + SF}.$$

Xét tam giác SEF vuông tại S có

$$\widehat{SEF} = \widehat{ESM} + \widehat{SME} = 45^\circ + 90^\circ - \beta = 135^\circ - \beta.$$

$$SF = SE \cdot \tan \widehat{SEF} = SE \cdot \tan (135^\circ - \beta) = SE \cdot \frac{1 + \tan \beta}{\tan \beta - 1}.$$

Vì SI là độ dài đường phân giác trong góc $\widehat{FSE}$ nên

$$SI = \sqrt{2} \cdot \frac{SE \cdot SF}{SE + SF} \Leftrightarrow \frac{a}{2} \cos \beta = \sqrt{2} \frac{SE \tan (135^\circ - \beta)}{1 + \tan (135^\circ - \beta)}$$

$$\Leftrightarrow SE = \frac{a \left[1 + \frac{1 + \tan \beta}{\tan \beta - 1} \right] \cos \beta}{2\sqrt{2} \frac{1 + \tan \beta}{\tan \beta - 1}} = \frac{a \sin \beta}{\sqrt{2} (1 + \tan \beta)}$$

Do đó

$$EF = \frac{SE}{\cos \widehat{SEF}} = \frac{SE}{\cos (135^\circ - \beta)} = \frac{a \sin \beta}{(1 + \tan \beta)(-\cos \beta + \sin \beta)} = -\frac{a}{2} \tan 2\beta.$$

Bài tập 7: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đỉnh S , có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}.$

B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{10}}{8}.$

C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{4}.$

D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{6}.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi O là tâm của tam giác ABC , khi đó $SO \perp (ABC)$.

Hình nón đỉnh S , có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có đường sinh là SA , bán kính đường tròn đáy là OA .

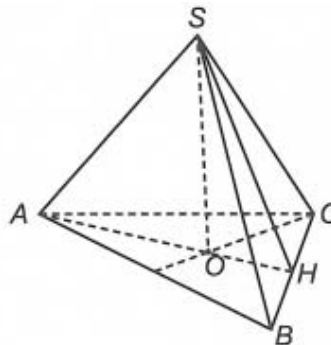
Gọi H là trung điểm của BC thì

$$(\widehat{SBC}); (\widehat{ABC}) = \widehat{SHO} = 60^\circ.$$

Tam giác ABC đều và O là tâm của tam giác đều nên

$$OH = \frac{1}{3} AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$OA = \frac{2}{3} AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Tam giác SOH vuông tại O và có $\widehat{SHO} = 60^\circ$ nên

$$SO = OH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}.$$

Tam giác SOA vuông tại O nên $SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$

Diện tích xung quanh hình nón là

$$S_{xq} = \pi r \ell = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{6} = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{6}.$$

Dạng 2: Tính thể tích khối nón, bài toán cực trị

1. Phương pháp

Ví dụ: Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° , diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Thể tích V của khối nón đã cho là

A. $V = \frac{3\pi a^3 \sqrt{2}}{4}.$ B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{4}.$

C. $V = 3\pi a^3.$ D. $V = \pi a^3.$

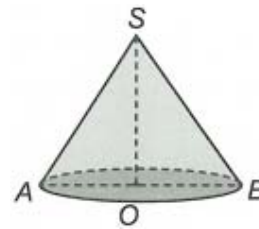
Hướng dẫn giải

Nhìn vào công thức tính thể tích khối nón

Chọn C

$$V_n = \frac{1}{3} S_{ht} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

ta thấy cần xác định chiều cao và diện tích đáy (bán kính đáy) của khối nón. Đối với bài toán cực trị ta thường tính toán đưa đại lượng cần tìm cực trị phụ thuộc vào một biến sau đó dùng đánh giá (sử dụng bất đẳng thức, khảo sát hàm số...) để tìm ra kết quả.



$$\text{Thể tích } V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot SO.$$

$$\text{Ta có } \widehat{ASB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ASO} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{OA}{SO} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SO = OA\sqrt{3}.$$

Lại có

$$S_{xq} = \pi R \ell = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \cdot OA \cdot \sqrt{OA^2 + SO^2} = 6\pi a^2$$

$$\Rightarrow OA \sqrt{OA^2 + 3OA^2} = 6a^2 \Rightarrow 2OA^2 = 6a^2$$

$$\Rightarrow OA = a\sqrt{3} \Rightarrow SO = 3a \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi \cdot 3a^2 \cdot 3a = 3\pi a^3.$$

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 45^\circ, \widehat{ACB} = 30^\circ, AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Quay tam giác ABC xung quanh cạnh BC ta được khối tròn xoay có thể tích V bằng

A. $V = \frac{\pi\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2}$

B. $V = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{24}$

C. $V = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{8}$

D. $V = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ} = \frac{BC}{\sin 105^\circ}$

$$\Rightarrow \begin{cases} AC = 1 \\ BC = \sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A .

Ta có $AH \cdot BC = AB \cdot AC \cdot \sin 105^\circ \Rightarrow AH = \frac{1}{2}$.

Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot BH + \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot CH = \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot BC = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{24}.$$

Bài tập 2: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Hình nón (N) có đỉnh A và đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Thể tích V của khối nón (N) là

A. $V = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{27}$

B. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{27}$

C. $V = \frac{\pi\sqrt{6}a^3}{9}$

D. $V = \frac{\pi\sqrt{6}a^3}{27}$

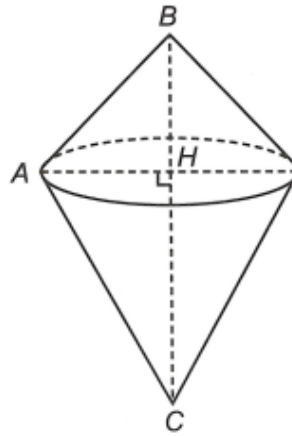
Hướng dẫn giải

Chọn D.

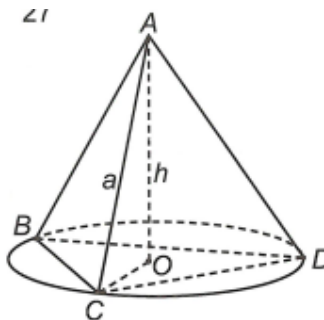
Gọi O là tâm của tam giác đều BCD .

Ta có $AO = h, OC = r$

$$\Rightarrow r = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Lưu ý: V chính là tổng thể tích của hai khối nón: Khối nón có chiều cao BH đường sinh AB và khối nón có chiều cao CH và đường sinh AC .



Suy ra

$$h = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối nón là } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{6}a^3}{27}.$$

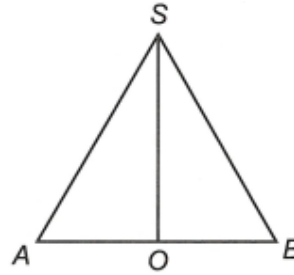
Bài tập 3: Cho hình nón (N) có góc ở đỉnh bằng 60° . Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) theo một thiết diện là tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2. Thể tích khối nón (N) là

A. $V = 3\sqrt{3}\pi$. B. $V = 4\sqrt{3}\pi$. C. $V = 3\pi$. D. $V = 6\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Tam giác SAB đều vì có $SA = SB$ và $\widehat{ASB} = 60^\circ$. Tâm đường tròn ngoại tiếp của $\triangle SAB$ là trọng tâm tam giác. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB là $r = \frac{2}{3}SO = 2 \Leftrightarrow SO = 3$.



$$\text{Mà } SO = SA \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow SA = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy bán kính đường tròn của khối nón là } R = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

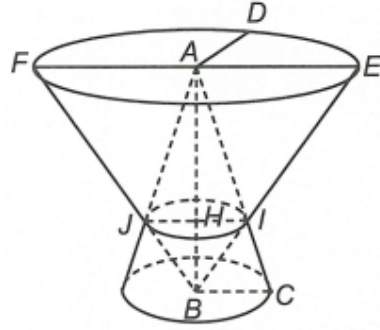
$$\text{Vậy thể tích khối nón là } V = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2 \cdot 3 = 3\pi.$$

Bài tập 4: Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B . Biết $BC = a$, $AB = a\sqrt{3}$, $AD = 3a$. Quay các tam giác ABC và ABD (bao gồm cả điểm bên trong hai tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được hai khối tròn xoay. Thể tích phần chung của hai khối tròn xoay đó bằng:

A. $\frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. B. $\frac{8\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. C. $\frac{5\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. D. $\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{16}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Khi quay tam giác ABD quanh AB ta được khối nón đỉnh B có đường cao BA , đáy là đường tròn bán kính $AE = 3\text{ cm}$. Gọi $I = AC \cap BE$, $IH \perp AB$, tại H .

Phần chung của 2 khối nón khi quay tam giác ABC và tam giác ABD quanh AB là 2 khối nón đỉnh A và đỉnh B có đáy là đường tròn bán kính IH .

$$\text{Ta có } \triangle IBC \text{ đồng dạng với } \triangle IEA \Rightarrow \frac{IC}{IA} = \frac{BC}{AE} = \frac{1}{3} \Rightarrow IA = 3IC.$$

$$\text{Mặt khác } IH \parallel BC \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{IH}{BC} = \frac{AI}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow IH = \frac{3}{4} BC = \frac{3a}{4}.$$

Gọi V_1 ; V_2 lần lượt là thể tích của khối nón đỉnh A và B có đáy là hình tròn tâm H .

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi IH^2 \cdot AH; \quad V_2 = \frac{1}{3} \pi IH^2 \cdot BH$$

$$\Rightarrow V = V_1 + V_2 \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} IH^2 \cdot AB \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{9a^2}{16} \cdot a\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{16} \pi.$$

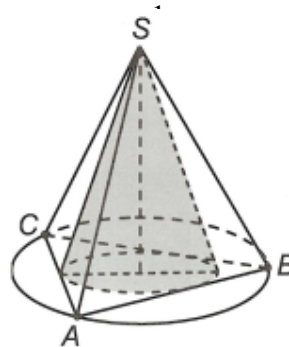
Bài tập 5: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC gọi là hình nón nội tiếp hình chóp $S.ABC$, hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC gọi là hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Tỉ số thể tích của hình nón nội tiếp và hình nón ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hai hình nón có cùng chiều cao nên tỉ số thể tích bằng tỉ số diện tích mặt đáy. Vì tam giác ABC đều nên bán kính đường tròn ngoại tiếp

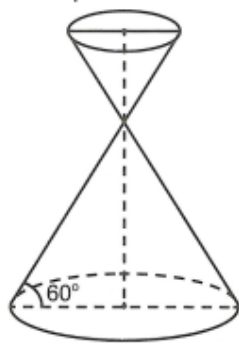


bằng $\frac{2}{3}$ đường cao của tam giác, bán kính đường tròn nội tiếp bằng $\frac{1}{3}$

đường cao của tam giác.

$$\text{Suy ra } \frac{r}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}.$$

Bài tập 6: Cho một đồng hồ cát gồm 2 hình nón chung đỉnh ghép lại, trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60° như hình bên dưới. Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30cm và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi (cm^3)$. Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần trên thì khi chảy hết xuống dưới, khi đó tỉ lệ thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần dưới là bao nhiêu?



A. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

B. $\frac{1}{8}$.

C. $\frac{1}{27}$.

D. $\frac{1}{64}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi bán kính của hình nón lớn và nón nhỏ lần lượt là x, y ($x > y$).

Suy ra chiều cao của hình nón lớn và nón nhỏ lần lượt là $x\sqrt{3}, y\sqrt{3}$.

$$\text{Theo giả thiết, ta có } \begin{cases} x\sqrt{3} + y\sqrt{3} = 30 \\ \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot x\sqrt{3} + \frac{1}{3}\pi y^2 \cdot y\sqrt{3} = 1000\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10\sqrt{3} \\ x^3 + y^3 = 1000\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{3}, y = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Do hai hình nón đồng dạng nên tỉ số cần tính bằng $\left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Bài tập 7: Trong tất cả các hình nón có độ dài đường sinh bằng ℓ . Hình nón có thể tích lớn nhất bằng

A. $\frac{\pi \ell^3 \sqrt{3}}{9}$. B. $\frac{2\pi \ell^3 \sqrt{3}}{9}$. C. $\frac{\pi \ell^3 \sqrt{3}}{27}$. D. $\frac{2\pi \ell^3 \sqrt{3}}{27}$.

Hướng dẫn giải

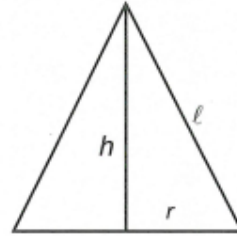
Chọn D.

Gọi h ($0 < h < \ell$) là chiều cao hình nón, suy ra

bán kính $r = \sqrt{\ell^2 - h^2}$.

Suy ra thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (\ell^2 h - h^3) = \frac{1}{3} \pi f(h).$$



Xét hàm $f(h) = \ell^2 h - h^3$ trên $(0; \ell)$.

$$f'(h) = \ell^2 - 3h^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{\ell}{\sqrt{3}} \\ h = -\frac{\ell}{\sqrt{3}} \text{ (không thỏa mãn)} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta được

h	0	$\frac{\ell}{\sqrt{3}}$	ℓ
$f'(h)$	+	0	-
$f(h)$			

Ta thấy $\max f(h) = f\left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\ell^3}{3\sqrt{3}}$.

Vậy $V_{\max} = \frac{2\pi \ell^3 \sqrt{3}}{27}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow h = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$.

Bài tập 8: Trong các hình nón cùng có diện tích toàn phần bằng S . Hình nón có thể tích lớn nhất khi (r , ℓ lần lượt là bán kính đáy và đường sinh của hình nón)

A. $\ell = 3r$. B. $\ell = 2\sqrt{2}r$. C. $\ell = r$. D. $\ell = 2r$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $S = \pi r \ell + \pi r^2 \rightarrow \ell = \frac{S - \pi r^2}{\pi r}$.

Thể tích

Lưu ý: điều kiện của

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{\ell^2 - r^2} = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{\frac{(S - \pi r^2)^2}{\pi^2 r^2} - r^2} = \frac{1}{3}\sqrt{S(Sr^2 - 2\pi r^4)}.$$

biến khi khảo sát hàm.

Lập bảng biến thiên cho hàm $f(r) = Sr^2 - 2\pi r^4$ trên $(0; +\infty)$, ta thấy

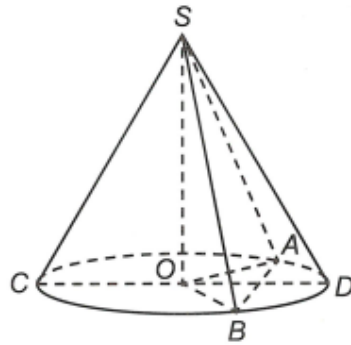
hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} \rightarrow \ell = 3r$.

Bài tập 9: Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O . Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác cân với cạnh đáy bằng a và có diện tích là a^2 . Gọi A, B là hai điểm bất kỳ trên đường tròn (O) . Thể tích khối chóp $S.OAB$ đạt giá trị lớn nhất bằng

- A. $\frac{a^3}{2}$. B. $\frac{a^3}{6}$. C. $\frac{a^3}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



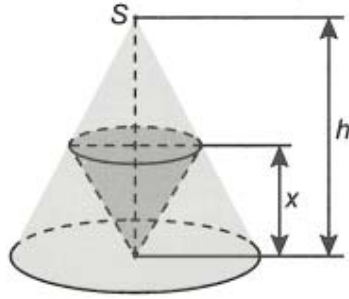
Tam giác cân SCD , có $S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2}CD.SO \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2}a.SO \rightarrow SO = 2a$.

Khối chóp $S.OAB$ có chiều cao $SO = 2a$ không đổi nên để thể tích lớn nhất khi và chỉ khi diện tích tam giác OAB lớn nhất.

Mà $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB.\sin \widehat{AOB} = \frac{1}{2}r^2.\sin \widehat{AOB}$ (với r là bán kính đường tròn mặt đáy hình nón). Do đó để $S_{\Delta OAB}$ lớn nhất khi $\sin \widehat{AOB} = 1$. Khi đó

$$V_{\max} = \frac{a^3}{12}.$$

Bài tập 10: Cho hình nón (N_1) có đỉnh S , chiều cao h . Một hình nón (N_2) có đỉnh là tâm của đáy (N_1) và có đáy là một thiết diện song song với đáy của (N_2) như hình vẽ.



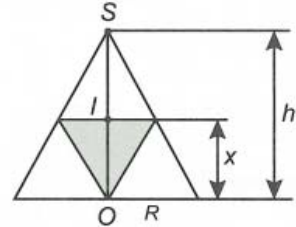
Khối nón (N_2) có thể tích lớn nhất khi chiều cao x bằng

- A. $\frac{h}{2}$. B. $\frac{h}{3}$. C. $\frac{2h}{3}$. D. $\frac{h\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Xét mặt cắt qua trục hình nón và kí hiệu như hình vẽ. Với O, I lần lượt là tâm đáy của hình nón $(N_1), (N_2)$; R, r lần lượt là các bán kính của hai đường tròn đáy của $(N_1), (N_2)$.



Ta có $\frac{SI}{SO} = \frac{r}{R} \Leftrightarrow \frac{h-x}{h} = \frac{r}{R} \rightarrow r = \frac{R(h-x)}{h}$.

Thể tích khối nón (N_2) là

$$V_{(N_2)} = \frac{1}{3} \pi r^2 x = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2 (h-x)^2}{h^2} x = \frac{\pi R^2}{3h^2} x (h-x)^2.$$

Xét hàm $f(x) = x(h-x)^2 = x^3 - 2hx^2 + h^2x$ trên $(0; h)$. Ta có

$$f'(x) = 3x^2 - 4hx + h^2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = h \\ x = \frac{h}{3} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta có

x	0	$\frac{h}{3}$	h
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Vậy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; h)$ tại $x = \frac{h}{3}$.

Bài tập 11: Xét các hình nón có đường sinh với độ dài đều bằng 10cm.

Chiều cao của hình nón có thể tích lớn nhất là

- A. $5\sqrt{3}$ cm. B. $10\sqrt{3}$ cm. C. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm. D. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Xét hình nón có chiều cao là x cm và bán kính đáy là y cm (x, y dương).

Ta có $x^2 + y^2 = 10^2 \Rightarrow y^2 = 100 - x^2$, ta có điều kiện $x, y \in (0; 10)$.

Thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (100 - x^2) x.$$

Xét hàm số $f(x) = (100 - x^2)x = 100x - x^3$, $x \in (0; 10)$;

$$f'(x) = 100 - 3x^2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{10\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

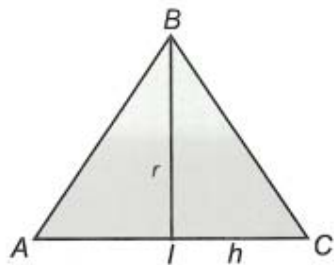
Ta thấy V lớn nhất khi $f(x)$ lớn nhất tại $x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

Bài tập 12: Giả sử đồ thị hàm số $y = (m^2 + 1)x^4 - 2mx^2 + m^2 + 1$ có 3 điểm cực trị là A, B, C mà $x_A < x_B < x_C$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC ta được một khối tròn xoay. Giá trị của m để thể tích của khối tròn xoay đó lớn nhất thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $(4; 6)$. B. $(2; 4)$. C. $(-2; 0)$. D. $(0; 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



$$y' = 4(m^2 + 1)x^3 - 4mx = 4x[(m^2 + 1)x^2 - m].$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x[(m^2 + 1)x^2 - m] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{m}{m^2 + 1}} (m > 0) \end{cases}.$$

Với $m > 0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị (với $x_A < x_B < x_C$) là

$$A\left(-\sqrt{\frac{m}{m^2 + 1}}; -\frac{m^2}{m^2 + 1} + m^2 + 1\right); B(0; m^2 + 1);$$

$$C\left(\sqrt{\frac{m}{m^2 + 1}}; -\frac{m^2}{m^2 + 1} + m^2 + 1\right).$$

Quay $\triangle ABC$ quanh AC thì được khối tròn xoay có thể tích là

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{2}{3} \pi BI^2 \cdot IC = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{m^2}{m^2 + 1}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{m}{m^2 + 1}} = \frac{2}{3} \pi \sqrt{\frac{m^9}{(m^2 + 1)^5}}.$$

$$\text{Xét hàm } f(m) = \frac{m^9}{(m^2 + 1)^5}.$$

$$\text{Ta có } f'(m) = \frac{m^8(9 - m^2)}{(m^2 + 1)^6}; f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = 3 (m > 0).$$

Ta có bảng biến thiên

m	0	3	$+\infty$
$f'(m)$	+	0	-
$f(m)$			

Vậy thể tích cần tìm lớn nhất khi $m = 3$.

Bài tập 13: Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 6$ cm, $AC = 3$ cm.

Gọi M điểm di động trên cạnh BC sao cho MH vuông góc với AB tại H .

Cho tam giác AHM quay quanh cạnh AH tạo nên một hình nón, thể tích lớn nhất của hình nón được tạo thành là

A. $\frac{\pi}{3}$.

B. $\frac{4\pi}{3}$.

C. $\frac{8\pi}{3}$.

D. 4π .

Hướng dẫn giải**Chọn C.**Đặt $AH = x \text{ (cm)}$, $0 < x < 6$.Khi đó $BH = 6 - x \text{ (cm)}$.Xét tam giác BHM vuông tại H .

Ta có $\tan \widehat{HBM} = \frac{HM}{BH}$

$$\Rightarrow HM = BH \cdot \tan \widehat{HBM} = (6 - x) \cdot \tan \widehat{HBM}.$$

Mà $\tan \widehat{HBM} = \tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Do đó $HM = (6 - x) \cdot \frac{1}{2}$.

Thể tích của khối nón tạo thành khi tam giác AHM quay quanh cạnh AH

là $V = \frac{1}{3} AH \cdot \pi \cdot HM^2 = \frac{\pi}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{4} (6 - x)^2 = \frac{\pi}{12} (x^3 - 12x^2 + 36x)$ (1).

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$ với $0 < x < 6$, ta có

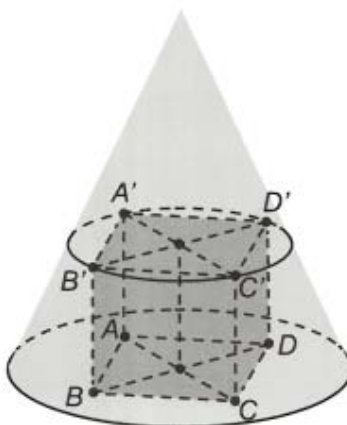
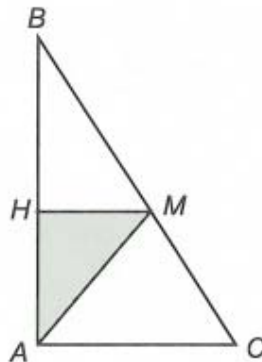
$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$ với $0 < x < 6$

x	0	2	6
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		32	

Từ (1) và bảng biến thiên ta có thể tích lớn nhất của khối nón tạo thành là

$$V = \frac{\pi}{12} \cdot 32 = \frac{8\pi}{3}.$$

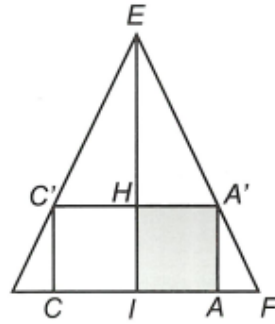
Bài tập 14: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1.Gọi (N) là một hình nón có tâm đường tròn đáy trùng với tâm của

hình vuông $ABCD$, đồng thời các điểm A', B', C', D' nằm trên các đường sinh của hình nón như hình vẽ. Thể tích khối nón (N) có giá trị nhỏ nhất bằng

- A. $\frac{2\pi}{3}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{9\pi}{8}$. D. $\frac{9\pi}{16}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Xét phần mặt cắt qua trục hình nón và đi qua mặt phẳng $(AA'C'C)$, kí hiệu như hình vẽ. Với I, H lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD, A'B'C'D'$ và đỉnh A' nằm trên đường sinh EF của hình nón.

Hình lập phương có thể tích bằng 1 nên $AA' = HI = 1, A'H = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Đặt $EH = x (x > 0)$. Khi đó, ta có

$$\frac{EH}{EI} = \frac{A'H}{FI} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2FI} \rightarrow FI = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x+1}{x} \right) = r.$$

Thể tích khối nón (N) là

$$V_{(N)} = \frac{1}{3} \pi r^2 EI = \frac{1}{6} \pi \left(\frac{x+1}{x} \right)^2 (x+1) = \frac{\pi (x+1)^3}{6x^2}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$ trên $(0; +\infty)$. Ta có $f'(x) = \frac{(x-2)(x+1)^2}{x^3}$.

Lập bảng biến thiên

x	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$				

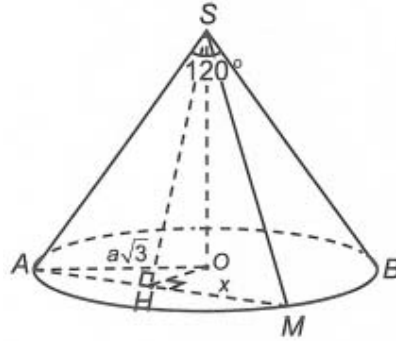
Ta được $\min_{(0;+\infty)} f(x) = \frac{27}{4}$ tại $x = 2$. Suy ra $\min V_{(N)} = \frac{9\pi}{8}$.

Bài tập 15: Một hình nón đỉnh S bán kính đáy $R = a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là 120° . Mặt phẳng qua đỉnh hình nón cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác. Diện tích lớn nhất của tam giác đó bằng

- A. $\sqrt{3}a^2$. B. $2a^2$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. D. $2\sqrt{3}a^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Giả sử ΔSAM là thiết diện tạo bởi mặt phẳng và hình nón.

Gọi $AM = x$ ($0 < x \leq 2a\sqrt{3}$).

Gọi H là trung điểm của AM

$\Rightarrow OH \perp AM \Rightarrow AM \perp (SOH) \Rightarrow AM \perp SH$.

$$\text{Vì } \widehat{ASB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ASO} = 60^\circ \Rightarrow \begin{cases} SA = \frac{AO}{\sin 60^\circ} = 2a \\ SO = \frac{AO}{\tan 60^\circ} = a \end{cases}.$$

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{x^2}{4}} \Rightarrow SH = \sqrt{OH^2 + SO^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

$$S_{\Delta SAM} = \frac{1}{2} AM \cdot SH = \frac{1}{2} x \sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

Ta có

$$S' = \frac{1}{2} \left[\sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}} \right] = \frac{16a^2 - 2x^2}{8\sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}} \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow x = 2a\sqrt{2}.$$

x	0	$2a\sqrt{2}$	$+\infty$
S'	+	0	-
S		$2a^2$	

$$\Rightarrow S_{\max} = 2a^2.$$

Bài tập 16: Cho mặt cầu (S) bán kính R . Hình nón (N) thay đổi có đỉnh và đường tròn đáy thuộc mặt cầu (S) . Thể tích lớn nhất của khối nón (N) là

- A. $\frac{32\pi R^3}{81}$. B. $\frac{32R^3}{81}$. C. $\frac{32\pi R^3}{27}$. D. $\frac{32R^3}{27}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có thể tích khối nón đỉnh S lớn hơn hoặc bằng thể tích khối nón đỉnh S' . Do đó chỉ cần xét khối nón đỉnh S có bán kính đường tròn đáy là r và đường cao là $SI = h$ với $h \geq R$. Thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) là

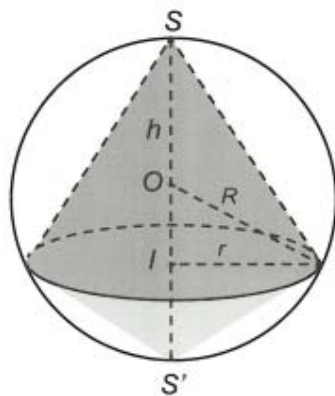
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}hS_{(C)} = \frac{1}{3}h\pi r^2 \\ &= \frac{1}{3}h\pi[R^2 - (h-R)^2] \\ &= \frac{1}{3}\pi(-h^3 + 2h^2R). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(h) = -h^3 + 2h^2R$ với $h \in [R; 2R]$.

Ta có $f'(h) = -3h^2 + 4hR$.

$$f'(h) = 0 \Leftrightarrow -3h^2 + 4hR = 0 \Leftrightarrow h = 0 \text{ (loại) hoặc } h = \frac{4R}{3}.$$

Bảng biến thiên



Chú ý: Sau khi tính được

$$V = \frac{1}{3}\pi(-h^3 + 2h^2R) \text{ ta}$$

có thể làm như sau:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi(-h^3 + 2h^2R) \\ &= \frac{1}{3}\pi h^2(2R - h) \\ &= \frac{\pi}{6}h.h(4R - 2h) \\ &\leq \frac{\pi}{6}\left(\frac{h + h + 4R - 2h}{3}\right)^3 \\ &= \frac{32\pi R^3}{81}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$h = 4R - 2h \Leftrightarrow h = \frac{4R}{3}.$$

h	R	$\frac{4R}{3}$	$2R$
$f'(h)$	+	0	-
$f(h)$	R^3	$\frac{32R^3}{27}$	0

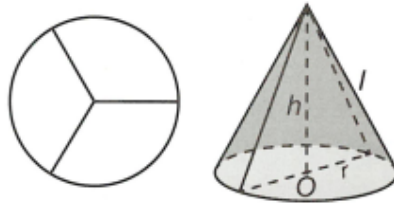
Ta có $\max f(h) = \frac{32}{27}R^3$ tại $h = \frac{4R}{3}$.

Vậy thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất là

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{32}{27}R^3 = \frac{32}{81}\pi R^3 \text{ khi } h = \frac{4R}{3}.$$

Dạng 3 Bài toán thực tế về hình nón, khối nón

Bài tập 1: Người thợ gia công của một cơ sở chất lượng cao X cắt một miếng tôn hình tròn với bán kính 60 cm thành ba miếng hình quạt bằng nhau. Sau đó người thợ ấy uốn và hàn ba miếng tôn đó để được ba cái phễu hình nón. Hỏi thể tích V của mỗi cái phễu đó bằng bao nhiêu?



A. $V = \frac{16000\sqrt{2}}{3}$ lít. B. $V = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít. C. $V = \frac{16000\sqrt{2}\pi}{3}$ lít. D. $V = \frac{160\sqrt{2}\pi}{3}$ lít

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đổi 60 cm = 6 dm.

Đường sinh của hình nón tạo thành là $\ell = 6$ dm.

Chu vi đường tròn ban đầu là $C = 2\pi R = 12\pi$.

Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình nón tạo thành.

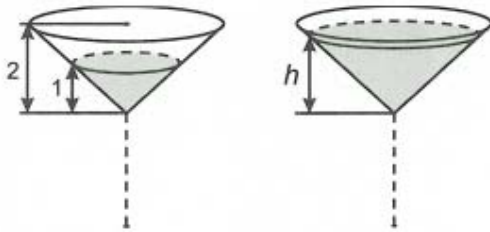
Chu vi đường tròn đáy của hình nón tạo thành là $2\pi r = \frac{2\pi \cdot 6}{3} = 4\pi$ (dm) $\Rightarrow r = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$ (dm).

Đường cao của khối nón tạo thành là $h = \sqrt{\ell^2 - r^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$.

Thể tích của mỗi phễu là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 2^2 \cdot 4\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3} (dm^3) = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ (lít).

Bài tập 2: Hai chiếc ly đựng chất lỏng giống hệt nhau, mỗi chiếc có phần

chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao 2dm (mô tả như hình vẽ). Ban đầu chiếc ly thứ nhất chứa đầy chất lỏng, chiếc ly thứ hai để rỗng. Người ta chuyển chất lỏng từ ly thứ nhất sang ly thứ hai sao cho độ cao của cột chất lỏng trong ly thứ nhất còn 1dm. Tính chiều cao h của cột chất lỏng trong ly thứ hai sau khi chuyển (độ cao của cột chất lỏng tính từ đỉnh của khối nón đến mặt chất lỏng – lượng chất lỏng coi như không hao hụt khi chuyển. Tính gần đúng h với sai số không quá 0,01dm).



- A. $h \approx 1,73$ dm. B. $h \approx 1,89$ dm. C. $h \approx 1,91$ dm. D. $h \approx 1,41$ dm.

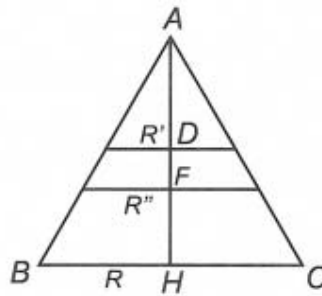
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Có chiều cao hình nón khi đựng đầy nước ở ly thứ nhất $AH = 2$.

Chiều cao phần nước ở ly thứ nhất sau khi đổ sang ly thứ hai $AD = 1$.

Chiều cao phần nước ở ly thứ hai sau khi đổ sang ly thứ hai $AF = h$.



Theo Ta-lét ta có

$$\frac{R'}{R} = \frac{AD}{AH} = \frac{1}{2}, \quad \frac{R''}{R} = \frac{AF}{AH} = \frac{h}{2} \text{ suy ra } R' = \frac{R}{2}, \quad R'' = \frac{Rh}{2}.$$

Thể tích phần nước ban đầu ở ly thứ nhất $V = 2\pi R^2$.

Thể tích phần nước ở ly thứ hai $V_1 = \pi R''^2 h = \frac{\pi R^2 h^3}{4}$.

Thể tích phần nước còn lại ở ly thứ nhất $V_2 = \frac{\pi R^2}{4}$.

$$\text{Mà } V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow \frac{\pi R^2 h^3}{4} + \frac{\pi R^2}{4} = 2\pi R^2 \Leftrightarrow \frac{h^3}{4} + \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{7} = 1,91.$$

Bài tập 2: Một bể nước lớn của khu công nghiệp có phần chứa nước là một khối nón đỉnh S phía dưới (hình vẽ), đường sinh $SA = 27$ mét. Có một lần lúc bể chứa đầy nước, người ta phát hiện nước trong bể không đạt yêu cầu về vệ sinh nên lãnh đạo khu công nghiệp cho thoát hết nước để làm vệ sinh bể chứa. Công nhân cho thoát nước ba lần qua một lỗ ở đỉnh

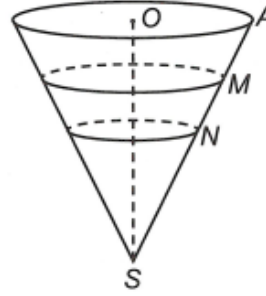
S. Lần thứ nhất khi mực nước tới điểm M thuộc SA thì dừng, lần thứ hai khi mực nước tới điểm N thuộc SA thì dừng, lần thứ ba mới thoát hết nước. Biết rằng lượng nước mỗi lần thoát bằng nhau. Tính độ dài đoạn MN .

A. $27(\sqrt[3]{2}-1)$ m.

B. $9\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{4}-1)$ m.

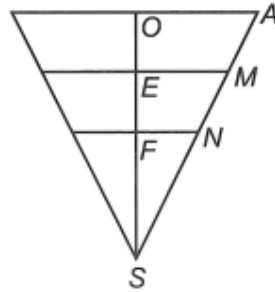
C. $9\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{2}-1)$ m.

D. $9\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}-1)$ m.



Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta gọi V_1 , V_2 , V lần lượt là thể tích khối nón có đường sinh là SN , SM , SA .

Do $\triangle SEM$ đồng dạng với $\triangle SOA$ nên ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SE}{SO} = \frac{EM}{OA}$.

$$\text{Lại có } \frac{V_2}{V} = \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot EM^2 \cdot SE}{\frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot SA} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \left(\frac{SA}{SM}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \left(\frac{SM}{27}\right)^3 \Leftrightarrow SM = \sqrt[3]{13122}$$

$$\text{Tương tự } \frac{V_1}{V} = \left(\frac{SN}{SA}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \left(\frac{SN}{27}\right)^3 \Leftrightarrow SN = \sqrt[3]{6561}.$$

$$\text{Vậy } MN = SM - SN = \sqrt[3]{13122} - \sqrt[3]{6561}.$$