

Câu 1: Tìm m để góc giữa hai vector: $\vec{u} = (1; \log_3 5; \log_m 2)$, $\vec{v} = (3; \log_5 3; 4)$ là góc nhọn. Chọn phương án đúng và đầy đủ nhất.

A. $m > \frac{1}{2}, m \neq 1$

B. $m > 1$ hoặc $0 < m < \frac{1}{2}$

C. $0 < m < \frac{1}{2}$

D. $m > 1$

➤ **Giải:**

❖ Ta có $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{3 + \log_3 5 \cdot \log_5 3 + 4 \log_m 2}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$. Do mẫu số luôn lớn hơn 0 nên ta đi tìm điều kiện để tử số dương.

❖ Mặt khác $3 + \log_3 5 \cdot \log_5 3 + 4 \log_m 2 > 0 \Leftrightarrow 4 \log_m 2 > -4 \Leftrightarrow \log_m 2 > -1 \Leftrightarrow \log_m 2 > \log_m \frac{1}{m}$

❖ Với $0 < m < 1$ thì $\Leftrightarrow \frac{1}{m} > 2 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$. Kết hợp với điều kiện suy ra $0 < m < \frac{1}{2}$.

❖ Với $m > 1$ thì $\Leftrightarrow \frac{1}{m} < 2 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$. Kết hợp điều kiện suy ra $m > 1$.

❖ Vậy $m > 1$ hoặc $0 < m < \frac{1}{2}$

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $3x - 3y + 2z + 37 = 0$ các điểm $A(4;1;5)$, $B(3;0;1)$, $C(-1;2;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho biểu thức

$P = \overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MB} \cdot \overline{MC} + \overline{MC} \cdot \overline{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $a + b + c$ bằng:

A. 10

B. 13

C. 9

D. 1

➤ **Giải:**

❖ $M(a;b;c) \Rightarrow P = 3[(a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-2)^2 - 5]$

❖ $M \in P \Rightarrow 3a - 3b + 2c + 37 = 0 \Leftrightarrow 3(a-2) - 3(b-1) + 2(c-2) = -44$

❖ Áp dụng BĐT Bunhiacốpxki ta có:

$$(-44)^2 = [3(a-2) - 3(b-1) + 2(c-2)]^2 \leq (3^2 + 3^2 + 2^2)[(a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-2)^2]$$

$$\Rightarrow (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-2)^2 \geq \frac{(-44)^2}{3^2 + 3^2 + 2^2} = 88$$

❖ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{a-2}{3} = \frac{b-1}{-3} = \frac{c-2}{2} \Leftrightarrow M(-4;7;-2) \Rightarrow a+b+c=1$

- ❖ **Câu 3:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x - y + 2 = 0$ và đường thẳng d_m : $\begin{cases} (2m+1)x + (1-m)y + m - 1 = 0 \\ mx + (2m+1)z + 4m + 2 = 0 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm m để đường thẳng d_m song song với mặt phẳng (P).

- A. $m = \frac{1}{2}$ B. $m = 1$ C. $m = -\frac{1}{2}$ D. $m = -1$

➤ **Giải:**

❖ $d_m // (P) \Leftrightarrow$ hệ PT ẩn x, y, z sau vô nghiệm: $\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ (2m+1)x + (1-m)y + m - 1 = 0 \\ mx + (2m+1)z + 4m + 2 = 0 \end{cases}$

❖ $(1) \Rightarrow y = 2x + 2$. Thay vào (2) ta được: $x = \frac{m-1}{3} \Rightarrow y = \frac{2m+4}{3}$

❖ Thay x, y vào (3) ta được: $(2m+1)z = -\frac{1}{3}(m^2 + 11m + 6)$. Để PT này vô nghiệm thì $m = -\frac{1}{2}$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, một mặt phẳng đi qua điểm $M(1;3;9)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị của biểu thức $P = a + b + c$ để thể tích tứ diện OABC đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $P = 44$ B. $P = 39$ C. $P = 27$ D. $P = 16$

➤ **Giải:**

❖ $V_{OABC} = \frac{1}{6}OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6}abc$

❖ Phương trình mặt phẳng đi qua A, B, C: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

❖ Vì $M \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{3}{b} + \frac{9}{c} = 1$

❖ Áp dụng BĐT Côsi: $1 = \frac{1}{a} + \frac{3}{b} + \frac{9}{c} \geq 3\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{3}{b} \cdot \frac{9}{c}} \Rightarrow 1 \geq \frac{27}{abc} \Rightarrow \frac{1}{6}abc \geq 121,5 = \min V_{OABC}$

❖ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{3}{b} + \frac{9}{c} = 1 \\ \frac{1}{a} = \frac{3}{b} = \frac{9}{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 9 \\ c = 27 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 39$$

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ và ba điểm $A(3;2;-1)$, $B(-3;-2;3)$, $C(5;4;-7)$. Gọi tọa độ điểm $M(a;b;c)$ nằm trên Δ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất, khi đó giá trị của biểu thức $P=a+b+c$ là:

A. $P = \frac{16+6\sqrt{6}}{5}$

B. $P = \frac{42-6\sqrt{6}}{5}$

C. $P = \frac{16-6\sqrt{6}}{5}$

D. $P = \frac{16+12\sqrt{6}}{5}$

➤ **Giải**

❖ $M \in \Delta$ nên $M(1+t;2t;-1-t)$

$\overline{AM} = (t-2;2t-2;-t) \Rightarrow AM = \sqrt{6t^2 - 12t + 8}$

$\overline{BM} = (t+4;2t+2;-t-4) \Rightarrow BM = \sqrt{6t^2 + 24t + 36}$

❖ $MA+MB = \sqrt{6t^2 - 12t + 8} + \sqrt{6t^2 + 24t + 36} = \sqrt{6} \left[\underbrace{\sqrt{(1-t)^2 + \frac{1}{3}} + \sqrt{(t+2)^2 + 2}}_{f(x)} \right]$

❖ Áp dụng BĐT Vectơ ta có: $f(x) \geq \sqrt{(1-t+t+2)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}\right)^2}$

❖ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{1-t}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{t+2}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{8-3\sqrt{6}}{5}$

❖ Do đó: $M\left(\frac{13-3\sqrt{6}}{5}; \frac{16-6\sqrt{6}}{5}; \frac{3\sqrt{6}-13}{5}\right) \Rightarrow P = \frac{16-6\sqrt{6}}{5}$

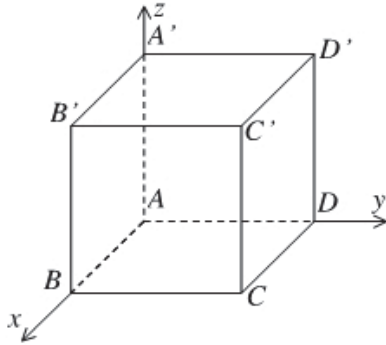
Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc của hệ tọa độ. Cho $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ với $a,b>0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (BDM) vuông góc với nhau.

A. $\frac{a}{b} = 2$

B. $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$

C. $\frac{a}{b} = 3$

D. $\frac{a}{b} = 1$



-Từ giả thiết ta có: $C(a;a;0); C(a;a;b) \Rightarrow M\left(a;a;\frac{b}{2}\right)$

- Mặt phẳng (BDM) có VTPT là:

- Mặt phẳng (A'BD) có VTPT là:

-Yêu cầu của bài toán tương đương với:

$$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{2} - a^4 = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 1 = 0$. Mặt phẳng (Q) chứa Δ và tạo với (P) một góc α nhỏ nhất, khi đó góc α gần với giá trị nào nhất sau đây?

A. 6°

B. 8°

C. 10°

D. 5°

➤ **Giải:**

❖ $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases}$ Chọn 2 điểm $(1;0;-1)$ và $(3;1;-2)$ với $t = 1$

❖ (Q) chứa Δ suy ra (Q): $a(x-1) + by + c(z+1) = 0 \Rightarrow ax + by + cz - a + c = 0$

❖ Và $(3;1;-2) \in (Q) \Rightarrow 3a + b - 2c - a + c = 0 \Rightarrow 2a + b - c = 0 \Rightarrow c = 2a + b$

❖ Vậy (Q): $ax + by + (2a + b)z + a + b = 0$. Gọi $\alpha = ((P), (Q)), \alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$

❖ Ta có: $\cos \alpha = \frac{|\vec{n_P} \cdot \vec{n_Q}|}{|\vec{n_P}| \cdot |\vec{n_Q}|} = \frac{|b + 6a|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + (2a + b)^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{b^2 + 12ab + 36a^2}{2b^2 + 4ab + 5a^2}}$

❖ Nếu $a = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

❖ Nếu $a \neq 0$, đặt $t = \frac{b}{a}$ thì ta có: $\frac{b^2 + 12ab + 36a^2}{2b^2 + 4ab + 5a^2} = \frac{t^2 + 12t + 36}{2t^2 + 4t + 5} = f(t)$

❖ $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-7}{10} \\ t = -6 \end{cases}$. Từ bảng biến thiên ta có thể dễ nhận thấy:

$$\diamond \max f(t) = f\left(-\frac{7}{10}\right) = \frac{53}{6} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{53}{6}}\right) \approx 8^\circ$$

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(0;1;1)$, $B(1;0;-3)$, $C(-1;-2;-3)$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$. Điểm $D(a;b;c)$ trên mặt cầu (S) sao cho tứ diện ABCD có thể tích lớn nhất, khi đó $a+b+c$ bằng:

- A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 1 D. $\frac{4}{3}$

➤ **Giải:**

❖ Tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $R=2$. (ABC): $2x - 2y + z + 1 = 0$

❖ $V_{ABCD} = \frac{1}{3}d(D;(ABC)) \cdot S_{ABC}$ khi đó V_{ABCD} max khi và chỉ khi $d(D;(ABC))$ max

❖ Gọi D_1, D_2 là đường kính của (S) vuông góc với (ABC). Ta thấy với D là điểm bất kỳ thuộc (S) thì $d(D;(ABC)) \leq \max\{d(D_1;(ABC)), d(D_2;(ABC))\}$

❖ Dấu “=” xảy ra khi D trùng với D_1 hoặc D_2

❖ $D_1, D_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ thay vào (S) ta suy ra: $\begin{cases} t = \frac{2}{3} \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow D_1\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right), D_2\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right)$

❖ Vì $d(D_1;(ABC)) > d(D_2;(ABC))$ nên $D\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow a+b+c = \frac{2}{3}$

Câu 9: Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$ và đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = m + t \end{cases}$. Tìm m để

d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho các mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A và tại B vuông góc với nhau.

- A. $m = -1$ hoặc $m = -4$ B. $m = 0$ hoặc $m = -4$
C. $m = -1$ hoặc $m = 0$ D. Cả A, B, C đều sai

➤ **Giải:**

➤ **Bình luận:** Ta có nếu hai mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A và B vuông góc với nhau thì hai vtpt của hai mặt phẳng này cũng vuông góc với nhau. Mà hai vtpt của hai mặt phẳng này chính là $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}$. Với $I(1;0;-2)$ là tâm của mặt cầu (S).

Vậy ta có hai điều kiện sau:

1. d cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

2. $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$.

❖ Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì trước tiên d phải cắt mặt cầu, tức là phương trình $(2-t)^2 + t^2 + (m+t)^2 - 2 \cdot (2-t) + 4 \cdot (m+t) + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow 3t^2 + 2(m+1)t + m^2 + 4m + 1 = 0$$

❖ Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 3m^2 - 12m - 3 > 0$

$$\Leftrightarrow m^2 + 5m + 1 < 0.$$

❖ Với phương trình có hai nghiệm phân biệt, áp dụng định lý Viet ta có

$$t_1 t_2 = \frac{m^2 + 4m + 1}{3}; t_1 + t_2 = \frac{-2}{3}(m+1)$$

❖ Khi đó $\overrightarrow{IA} = (1-t_1; t_1; m+2+t_1), \overrightarrow{IB} = (1-t_2; t_2; m+2+t_2)$.

❖ Vậy $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = (1-t_1)(1-t_2) + t_1 t_2 + (m+2+t_1)(m+2+t_2) = 0$

$$\Leftrightarrow 3t_1 t_2 + (m+1)(t_1 + t_2) + (m+2)^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 1 - \frac{2}{3}(m+1)^2 + (m+2)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -4 \end{cases} \text{ (TM).}$$

Câu 10: Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(1;1;1), B(-1;2;0), C(3;-1;2)$. Điểm

$M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ sao cho biểu thức

$P = 2MA^2 + 3MB^2 - 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $a+b+c = ?$

A. $\frac{5}{3}$

C. $-\frac{11}{3}$

B. 0

D. $-\frac{16}{3}$

➤ **Giải:**

❖ Gọi $D(x;y;z)$ là điểm thỏa $2\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DB} - 4\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

❖ $2\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DB} - 4\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{DA} + 3(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) - 4(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = 4\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \\ 1-y = -4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \\ 1-z = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow D(-13; 12; -6)$$

❖ Khi đó: $P = 2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA})^2 + 3(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB})^2 - 4(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})^2$

$$\begin{aligned}
 &= MD^2 + 2\overrightarrow{MD}(\overrightarrow{2DA} + 3\overrightarrow{DB} - 4\overrightarrow{DC}) + 2AD^2 + 3BD^2 - 4DC^2 \\
 &= MD^2 + 2AD^2 + 3BD^2 - 4DC^2
 \end{aligned}$$

- ❖ Do $2AD^2 + 3BD^2 - 4DC^2$ không đổi nên P nhỏ nhất khi MD nhỏ nhất. Mà M thuộc Δ nên MD nhỏ nhất khi M là hình chiếu của D lên Δ
- ❖ $M(1+2t; t; -1-t)$. Ta có: $\overrightarrow{DM} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{11}{6} \Rightarrow M\left(-\frac{8}{3}; -\frac{11}{6}; \frac{5}{6}\right) \Rightarrow a+b+c = -\frac{11}{3}$

Câu 11: Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(1;1;1), B(-1;2;0), C(3;-1;2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 7 = 0$ sao cho biểu thức $P = |3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $a+b+c = ?$

- | | |
|-------|-------|
| A. 4 | C. 13 |
| B. -5 | D. 7 |

➤ **Giải:**

- ❖ Gọi $F(x;y;z)$ là điểm thỏa $3\overrightarrow{FA} + 5\overrightarrow{FB} - 7\overrightarrow{FC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{CA} + 5\overrightarrow{CB} \Rightarrow F(-23;20;-11)$
- ❖ Khi đó: $P = |3(\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FA}) + 5(\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FB}) - 7(\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FC})| = MF$
- ❖ Do đó P nhỏ nhất khi M là hình chiếu của F lên (α) . Điểm $M(-23+2t; 20-t; -11+2t)$. Vì M thuộc (α) nên:
 $2(-23+2t) - (20-t) + 2(-11+2t) + 7 = 0 \Rightarrow t = 9 \Rightarrow M(-5;11;7) \Rightarrow a+b+c = 13$

Câu 12: Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(1;1;1), B(-1;2;0), C(3;-1;2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 861$ sao cho biểu thức $P = 2MA^2 - 7MB^2 + 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $a+b+c = ?$

- | | |
|-------|------|
| A. 8 | C. 5 |
| B. -5 | D. 3 |

➤ **Giải:**

- ❖ Gọi $K(x;y;z)$ là điểm thỏa $2\overrightarrow{KA} - 7\overrightarrow{KB} + 4\overrightarrow{KC} = \vec{0} \Rightarrow K(-21;16;10)$
- ❖ Khi đó: $P = -MK^2 + 2KA^2 - 7KB^2 + 4KC^2$
- ❖ Do đó P nhỏ nhất khi MK lớn nhất. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1) \Rightarrow \overrightarrow{KI} = (22;-16;-11)$

❖ Phương trình đường thẳng KI: $\begin{cases} x = 1 + 22t \\ y = -16t \\ z = -1 - 11t \end{cases}$. Thay x, y, z vào (S) ta được:

$$(22t)^2 + (-16t)^2 + (-11t)^2 = 861 \Leftrightarrow t = \pm 1. \text{ Suy ra KI cắt (S) tại hai điểm}$$

$$\begin{cases} K_1 = (23; -16; -12) \\ K_2 = (-21; 16; 10) \end{cases}$$

❖ Vì $KK_1 > KK_2$ nên MK lớn nhất khi và chỉ khi $M \equiv K_1(23; -16; -12)$. Vậy $M = (23; -16; -12)$

Câu 13: Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(1; 1; -1), B(-3; 5; 5)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - 8 = 0$ sao cho biểu thức $P = MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tính $a + b + c = ?$

- A. 7
B. 3
C. 2
D. 4

➤ **Giải:**

❖ $M(a; b; c)$. Đặt $f(M) = 2a - b + 2c - 8$

❖ Ta có $f(A) \cdot f(B) > 0$, nên A, B ở về cùng một phía so với (α) . Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (α)

❖ Phương trình đường thẳng AA': $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$. Tọa độ giao điểm I của AA' và (α)

là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 2t \\ 2x - y + 2z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(3; 0; 1)$

❖ Vì I là trung điểm AA' nên $A'(5; -1; 3)$ và A', B nằm khác phía so với (α) . Khi đó với mọi điểm M thuộc (α) ta luôn có:

$$MA + MB = A'M + MB \geq A'B. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } M = A'B \cap (\alpha)$$

$$\diamond \overline{A'B} = (-8; 6; 2) \Rightarrow A'B: \begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ . Tọa độ giao điểm M của A'B và } (\alpha) \text{ là nghiệm}$$

$$\text{của hệ: } \begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 + t \\ 2x - y + 2z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(1; 2; 4)$$

Câu 14: Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(1; 1; -1), C(7; -4; 4)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - 8 = 0$ sao cho biểu thức $P = |MA - MC|$ đạt giá trị lớn nhất.

Tính $a + b + c = ?$

- A. 7
B. 3
C. 2
D. 4

➤ **Giải:**

$$\diamond M(a; b; c) \text{ . Đặt } f(M) = 2a - b + 2c - 8$$

❖ Ta có $f(A) \cdot f(C) < 0$ nên A và C nằm về hai phía so với (α)

❖ Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (α)

$$\diamond \text{ Phương trình đường thẳng AA': } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \text{ . Tọa độ giao điểm I của AA' và } (\alpha)$$

$$\text{là nghiệm của hệ: } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 2t \\ 2x - y + 2z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(3; 0; 1)$$

❖ Vì I là trung điểm AA' nên $A'(5; -1; 3)$. Khi đó với mọi điểm M thuộc (α) ta luôn có:

$$|MA - MC| = |MA' - MC| \leq A'C \text{ . Đẳng thức xảy ra khi } M = A'C \cap (\alpha)$$

$$\diamond \overrightarrow{A'C} = (2; -3; 1) \Rightarrow A'C: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ . Tọa độ giao điểm M của } A'C \text{ và } (\alpha) \text{ là nghiệm}$$

$$\text{của hệ: } \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 3 + t \\ 2x - y + 2z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(3; 2; 2)$$

Câu 15: Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 3 = 0$ chứa Δ và cách O một khoảng lớn nhất. Tính $a + b + c = ?$

- A. -2
B. 3
C. 1
D. -1

➤ **Giải:**

$$\diamond \text{ Gọi K là hình chiếu vuông góc của O lên } \Delta, \text{ suy ra } K(1+t; 1+2t; 2t),$$

$$\overrightarrow{OK} = (1+t; 1+2t; 2t)$$

$$\diamond \text{ Vì } OK \perp \Delta \text{ nên } \overrightarrow{OK} \cdot \vec{u}_{\Delta} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} K\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right) \\ \overrightarrow{OK} = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

$\diamond$ Gọi H là hình chiếu của O lên (P), ta có: $d(O; (P)) = OH \leq OK = 1$. Đẳng thức xảy ra khi $H \equiv K$. Do đó (P) cách O một khoảng lớn nhất khi và chỉ khi (P) đi qua K và vuông góc với OK. Từ đó ta suy ra phương trình của (P) là:
 $2x + y - 2z - 3 = 0 \Rightarrow a + b + c = 1$

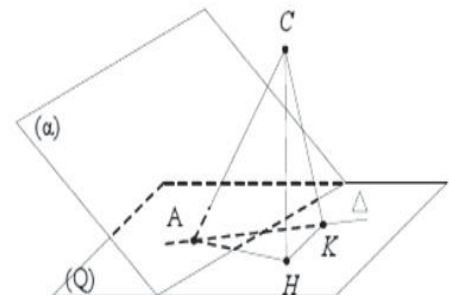
Câu 15: Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 2z - 5 = 0$. Mặt phẳng (Q): $ax + by + cz + 3 = 0$ chứa Δ và tạo với (α) một góc nhỏ nhất. Tính $a + b + c = ?$

- A. -1
B. 3
C. 5
D. 1

➤ **Giải:**

➤ **Công thức giải nhanh:** $\vec{n}_{(Q)} = \left[\left[\vec{n}_{(\alpha)}, \vec{n}_{\Delta} \right], \vec{n}_{\Delta} \right]$

➤ **Chứng minh công thức:**



- ❖ $A(1;1;0) \in \Delta$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (α) ,

suy ra $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2t \end{cases}$, chọn $C(2;-1;2) \in d, C \neq A$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của

C lên (Q) và Δ , khi đó $\varphi = \angle ACH$ và $\sin \varphi = \sin \angle ACH = \frac{AH}{AC} \geq \frac{AK}{AC}$. Mà $\frac{AK}{AC}$ không đổi nên suy ra φ nhỏ nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$ hay (Q) là mặt phẳng đi qua Δ và vuông góc với mặt phẳng (ACK)

- ❖ Mặt phẳng (ACK) đi qua Δ và vuông góc với (α) nên: $\overrightarrow{n_{(ACK)}} = [\overrightarrow{n_{(\alpha)}}, \overrightarrow{n_{\Delta}}]$

- ❖ Do (Q) đi qua Δ và vuông góc với mặt phẳng (ACK) nên:

$$\overrightarrow{n_{(Q)}} = [\overrightarrow{n_{(ACK)}}, \overrightarrow{n_{\Delta}}] = [[\overrightarrow{n_{(\alpha)}}, \overrightarrow{n_{\Delta}}], \overrightarrow{n_{\Delta}}]$$

- ❖ Áp dụng công thức trên ta có $\overrightarrow{n_{(Q)}} = (-8; 20; -16)$ suy ra:

$$(Q): -8(x-1) + 20(y-1) - 16z = 0 \Leftrightarrow 2x - 5y + 4z + 3 = 0 \Rightarrow a + b + c = 1$$

Câu 16: Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$ và hai điểm

$M(1;2;1), N(-1;0;2)$. Mặt phẳng $(\beta): ax + by + cz - 43 = 0$ đi qua M, N và tạo với (Δ) một góc lớn nhất. Tính $a + b + c = ?$

- | | |
|--------|--------|
| A. -22 | C. -33 |
| B. 33 | D. 11 |

➤ **Giải:**

➤ **Công thức giải nhanh:** $\overrightarrow{n_{(\beta)}} = [[\overrightarrow{n_{NM}}, \overrightarrow{n_{\Delta}}], \overrightarrow{n_{NM}}]$

- ❖ **Chứng minh tương tự câu 15:** $\overrightarrow{n_{(\beta)}} = (1; 10; 22)$ suy ra

$$(\beta): 1(x-1) + 10(y-2) + 22(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + 10y + 22z - 43 = 0 \Rightarrow a + b + c = 33$$

Câu 17: Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(1;2;3), B(-1;0;-3), C(2;-3;-1)$. Điểm

$M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 2z - 1 = 0$ sao cho biểu thức

$P = 3MA^2 + 4MB^2 - 6MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $a + b + c = ?$

- | | |
|-------|-------|
| A. 15 | C. 20 |
|-------|-------|

B. 12

D. 7

➤ **Giải:**

$$\diamond M(a; b; c) \in (\alpha) \Rightarrow 2a + b - 2c - 1 = 0$$

$$\diamond P = a^2 + b^2 + c^2 + 26a - 48b - 6c - 2 = (a + 11)^2 + (b - 25)^2 + (c - 1)^2 + 2(2a + b - 2c - 1) - 747 \geq -747$$

$$\diamond \text{ Dấu "=" xảy ra khi: } a = -11; b = 25; c = 1 \Rightarrow a + b + c = 15$$

Câu 18: Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(1; 2; 3), B(-1; 0; -3), C(2; -3; -1)$. Điểm

$M(a; b; c)$ thuộc đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$ sao cho biểu thức

$P = |\overrightarrow{MA} - 7\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $a + b + c = ?$

A. $\frac{31}{4}$

C. $\frac{12}{5}$

B. $\frac{11}{3}$

D. $\frac{55}{7}$

➤ **Giải:**

$$\diamond M \in \Delta \Rightarrow M(1 + 2t; -1 + 3t; 1 - t)$$

$$\diamond \overrightarrow{MA} - 7\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC} = (2t + 19; 3t - 14; -t + 20)$$

$$\diamond P = \sqrt{(2t + 19)^2 + (3t - 14)^2 + (20 - t)^2} = \sqrt{14\left(t - \frac{12}{7}\right)^2 + \frac{6411}{7}} \geq \sqrt{\frac{6411}{7}}$$

$$\diamond \text{ Dấu "=" xảy ra khi: } t = \frac{12}{7} \Rightarrow a + b + c = \frac{55}{7}$$

Câu 19: Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(1; 2; 3), B(-1; 0; -3), C(2; -3; -1)$. Điểm

$M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 8)^2 = \frac{283}{2}$ sao cho biểu thức

$P = MA^2 - 4MB^2 + 2MC^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $a + b + c = ?$

C. -28

C. 6

D. 7

D. -3

➤ **Giải:**

$$\diamond \text{ Gọi } E(x; y; z) \text{ là điểm thỏa } \overrightarrow{EA} - 4\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0} \Rightarrow E(-9; 4; -13)$$

$$\diamond \text{ Khi đó: } P = -EM^2 + EA^2 - 4EB^2 + 2EC^2$$

❖ P lớn nhất khi EM nhỏ nhất. Mặt cầu (S) có tâm

$$I(2;2;8) \Rightarrow \overline{IE} = (-11;2;-21) \Rightarrow IE: \begin{cases} x = 2 - 11t \\ y = 2 + 2t \\ z = 8 - 21t \end{cases}. \text{ Thay } x, y, z \text{ vào (S) ta được } t = \pm \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra IE cắt (S) tại hai điểm } \begin{cases} E_1 \left(-\frac{7}{2}; 3; -\frac{5}{2} \right) \\ E_2 \left(-\frac{15}{2}; 1; \frac{37}{2} \right) \end{cases}$$

❖ Vì $EE_1 < EE_2$ nên EM nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv E_1 \left(-\frac{7}{2}; 3; -\frac{5}{2} \right)$, suy ra

$$M = (6; 0; 12)$$

Câu 20: Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $d: \frac{x}{a} = \frac{y+1}{b} = \frac{z-2}{c}$ cắt đường thẳng

$d': \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$ sao cho khoảng cách từ điểm $B(2;1;1)$ đến đường thẳng d là nhỏ nhất.

Tính $a+b+c=?$

A. -28

C. 6

B. 7

D. 18

➤ **Giải:**

❖ Gọi $\begin{cases} M = d \cap d' \\ A(0; -1; 2) \in d \end{cases} \Rightarrow M(-1+2t; t; 2-t)$, suy ra $\begin{cases} [\overline{AB}, \overline{AM}] = (1-t; 1; 4-2t) \\ \overline{u_d} = \overline{AM} = (2t-1; t+1; -t) \end{cases}$

$$\text{❖ } d(B, d) = \frac{[\overline{AB}, \overline{AM}]}{|\overline{AM}|} = \sqrt{\frac{5t^2 - 18t + 18}{6t^2 - 2t + 2}} = \sqrt{f(t)}$$

$$\text{❖ } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2 \end{cases} \Rightarrow \min f(t) = f(2) = \frac{1}{11} \Rightarrow \overline{u_d} = (3; 3; -2) \Rightarrow a+b+c=4$$

Câu 21: Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $d: \frac{x}{a} = \frac{y+1}{b} = \frac{z-2}{c}$ cắt đường thẳng

$d': \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$ sao cho khoảng cách giữa d và $\Delta: \frac{x-5}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ là lớn nhất. Tính

$a+b+c=?$

A. -8

C. 1

B. -1

D. 12

➤ **Giải:**

$$\diamond \text{ Gọi } \begin{cases} M = d \cap d' \\ A(0; -1; 2) \in d \end{cases} \Rightarrow M(-1 + 2t; t; 2 - t), \text{ suy ra } \overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{AM} = (2t - 1; t + 1; -t)$$

$$\diamond N(5; 0; 0), \overrightarrow{u_\Delta} = (2; -2; 1) \Rightarrow [\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{AM}] = (t - 1; 4t - 1; 6t)$$

$$\diamond d(d, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{[u_\Delta, \overrightarrow{AM}]} \cdot \overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{[u_\Delta, \overrightarrow{AM}]}|} = 3\sqrt{\frac{(2+t)^2}{53t^2 - 10t + 2}} = 3\sqrt{f(t)}$$

$$\diamond f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{37} \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \min f(t) = f\left(\frac{4}{37}\right) \Rightarrow \overrightarrow{u_d} = -\frac{1}{37}(29; -41; 4) \Rightarrow a + b + c = -8$$

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$, $(Q): x + y - 2z + 1 = 0$ và điểm $I(1; 1; -2)$. Mặt cầu (S) tâm I , tiếp xúc với (P) và mặt phẳng $(\alpha): ax + by + cz + m = 0$ vuông góc với $(P), (Q)$ sao cho khoảng cách từ I đến (α) bằng $\sqrt{29}$. Biết rằng tổng hệ số $a + b + c + m$ dương.

Cho các mệnh đề sau đây:

(1) Điểm $A(1; 1; 0)$ và $B(-1; 1; -2)$ thuộc mặt cầu (S) .

(2) Mặt phẳng (α) đi qua $C(0; -5; -3)$.

(3) Mặt phẳng (α) song song với đường thẳng $(d) \begin{cases} x = 2t \\ y = -5 - t \\ z = -3 \end{cases}$

(4) Mặt cầu (S) có bán kính $R = 2$.

(5) Mặt phẳng (α) và Mặt cầu (S) giao nhau bằng một đường tròn có bán kính lớn hơn 2.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề sai?

A . 1

B . 3

C . 2

D . 4

➤ **Giải: Chọn đáp án C**

$$\diamond R = d(I, (P)) = 2. \text{ Phương trình mặt cầu: } (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 4.$$

$$\diamond \overrightarrow{n_\alpha} = (2; 3; 4) \Rightarrow (\alpha): 2x + 4y + 3z + m = 0. d(I; (\alpha)) = \sqrt{29} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{29}$$

$$\diamond \text{ Vậy } (\alpha): 2x + 4y + 3z \pm 29 = 0 \text{ chọn } (\alpha): 2x + 4y + 3z + 29 = 0 \text{ do } a + b + c + m > 0.$$

❖ Đối chiếu:

(1) **Đúng:** Thay tọa độ điểm vào mặt cầu ta thấy.

(2) **Đúng:** Thay tọa độ điểm vào mặt phẳng

(3) **Sai:** Thực chất ta tưởng lầm rằng mặt phẳng phẳng (α) song song (d) nhưng thực chất là (d) thuộc phẳng phẳng (α), các em kiểm tra bằng cách tính khoảng cách 2 điểm bất kỳ đến (α) đều bằng 0.

(4) **Đúng**

(5) **Sai:** Do khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng lớn hơn bán kính mặt cầu nên hai mặt không giao nhau.

Câu 23: Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(2;3;0), B(0;-\sqrt{2};0)$ và đường thẳng d

có phương trình $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=2-t \end{cases}$. Điểm $C(a;b;c)$ trên đường thẳng d sao cho tam giác ABC có

chu vi nhỏ nhất. Tính $a+b+c=?$

A. 2

C. 1

B. 3

D. 4

➤ **Giải:**

❖ Vì AB không đổi nên tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất khi $CA+CB$ nhỏ nhất

❖ Gọi $C(t;0;2-t)$. Ta có $CA=\sqrt{2(t-2)^2+3^2}, CB=\sqrt{2(1-t)^2+2^2}$

❖ Đặt $\vec{u}=(\sqrt{2}(t-2);3)$ $\vec{v}=(\sqrt{2}(1-t);2) \Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=(-\sqrt{2};5)$

❖ Áp dụng tính chất $|\vec{u}|+|\vec{v}| \geq |\vec{u}+\vec{v}|$. Dấu "=" xảy ra khi $\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{v}$

❖ $CA+CB=|\vec{u}|+|\vec{v}| \geq |\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{2+25}=3\sqrt{3}$

❖ Dấu "=" xảy ra khi $\frac{\sqrt{2}(t-2)}{\sqrt{2}(1-t)}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow t=\frac{7}{5} \Rightarrow a+b+c=2$

Câu 24: Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(a;b;c)$ với $c < 0$ thuộc mặt cầu

$(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$ sao cho biểu thức $P=a+2b+2c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $a+b+c=?$

A. 1

C. -1

B. 9

D. 3

➤ **Giải**

❖ $M(a;b;c) \in (S) \Rightarrow (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 9$

$$\diamond P = (a-2) + 2(b-1) + 2(c-1) + 6 \leq \sqrt{(1+4+4)\left[(a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2\right]} = 9 + 6 = 15$$

$$\diamond \text{ Dấu "=" xảy ra khi: } \begin{cases} a-2 = \frac{b-1}{2} \\ a-2 = \frac{c-1}{2} \\ (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow a+b+c = -1$$

Câu 25: Trong không gian Oxyz, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;2;-1)$ và điểm $M(a;b;c)$ sao cho biểu thức $P = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $a+b+c = ?$

- A. $\frac{7}{4}$ C. $\frac{21}{4}$
 B. $\frac{23}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

➤ **Giải:**

- $\diamond$ Gọi G là trọng tâm của ABCD suy ra $G\left(\frac{7}{4}; \frac{14}{4}; 0\right)$
 $\diamond$ $P = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$. Vì $GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$ không đổi nên P nhỏ nhất khi MG nhỏ nhất hay $M \equiv G\left(\frac{7}{4}; \frac{14}{4}; 0\right)$

Câu 26: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 5 = 0$ và mặt phẳng (P): $2x + 2y - z + 16 = 0$. Điểm $M(a;b;c)$ di động trên (S) và điểm $N(m;n;p)$ di động trên (P) sao cho độ dài đoạn thẳng MN là ngắn nhất, khi đó $a+b+c+m+n+p = ?$

- A. 3 C. 0
 B. 2 D. 1

➤ **Giải:**

- $\diamond$ Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;3)$ và bán kính $R = 3$
 $\diamond$ $d(I;(P)) = 5 > R$. Do đó (S) và (P) không có điểm chung. Suy ra $\min MN = 5 - 3 = 2$

Câu 28: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 1 = 0$, $(Q): x + 2y - 2z - 4 = 0$.

Tìm m để mặt cầu (S) cắt đường thẳng d tại hai điểm M, N sao cho $MN = 8$

A. $m = 12$

C. $m = -3$

B. $m = -5$

D. $m = -12$

➤ Giải:

❖ Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 3; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{13 - m} = IM (m < 13)$

❖ Gọi H là trung điểm của MN suy ra $MH = 4$. $IH = d(I; d) = \sqrt{-m - 3}$. (d) qua A có

$$\text{VTCP } \vec{u} = (2; 1; 2) \Rightarrow d(I; d) = \frac{\left| \left[\vec{u}; \overrightarrow{AI} \right] \right|}{\left| \vec{u} \right|} = 3. \text{ Vậy } \sqrt{-m - 3} = 3 \Rightarrow m = -12$$

Câu 29: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $E(2; 1; 5)$, $F(4; 3; 9)$. Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 1 = 0$, $(Q): x - y + 2z - 7 = 0$. Điểm $I(a; b; c)$ thuộc Δ sao cho biểu thức $P = |IE - IF|$ lớn nhất. Tính $a + b + c = ?$

A. 4

C. 3

B. 1

D. 2

➤ Giải:

$$\text{❖ } \Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -5t \\ z = 3 - 3t \end{cases}, EF: \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = 1 + t' \\ z = 5 + 2t' \end{cases}$$

$$\text{❖ Xét hệ: } \begin{cases} 1 + t = 2 + t' \\ -5t = 1 + t' \\ 3 - 3t = 5 + 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = -1 \end{cases} \Rightarrow EF \text{ cắt } \Delta \text{ tại } A(1; 0; 3)$$

❖ Trong mặt phẳng $(\Delta; EF)$ mọi điểm I thuộc Δ ta có $|IE - IF| \leq EF$

❖ Dấu "=" xảy ra khi I, E, F thẳng hàng, suy ra $I \equiv A(1; 0; 3)$

Câu 30: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(-1; -1; 2)$, $B(-2; -2; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + 3y - z + 2 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB , Δ là giao tuyến của (P) và (Q) . Điểm $M(a; b; c)$ thuộc Δ sao cho độ dài đoạn thẳng OM là nhỏ nhất, khi đó $a + b + c = ?$

A. $\frac{3}{2}$

C. 1

B. $-\frac{3}{2}$

D. 4

➤ **Giải:**

❖ Gọi I là trung điểm AB suy ra $I\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $(Q): x + y + z + \frac{3}{2} = 0$

❖ Δ là giao tuyến của (P) và (Q) suy ra $\Delta: \begin{cases} x = -\frac{7}{4} + 2t \\ y = -t \\ z = \frac{1}{4} - t \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{7}{4} + 2t; -t; \frac{1}{4} - t\right)$

❖ $OM = \sqrt{6\left(t - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{25}{32}} \geq \sqrt{\frac{25}{32}}$

❖ Dấu "=" xảy ra khi $t = \frac{5}{8} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{8}; -\frac{3}{8}\right)$

Câu 31: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(-2; 3; 4)$, mặt phẳng (P): $x + 2y - z + 5 = 0$

và đường thẳng $d: \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trên (P) đi qua giao

điểm của d và (P) đồng thời vuông góc với d. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc Δ sao cho độ dài đoạn thẳng AM là nhỏ nhất, khi đó $a + b + c = ?$

A. $\frac{13}{3}$

C. $\frac{7}{2}$

B. $-\frac{3}{2}$

D. 0

➤ **Giải:**

❖ Gọi $I = d \cap (P)$ suy ra $I(-1; 0; 4)$

❖ $\vec{u}_{\Delta} = [\vec{u}_d, \vec{n}_{(P)}] = (-3; 3; 3)$ suy ra $\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4 + t \end{cases} \Rightarrow M(1 - t; t; 4 + t)$

❖ AM ngắn nhất khi và chỉ khi $AM \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}$

❖ Vậy $M\left(-\frac{7}{3}; \frac{4}{3}; \frac{16}{3}\right)$

Câu 32: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(5;8;-11)$, $B(3;5;-4)$, $C(2;1;-6)$ và

đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc d sao cho biểu thức

$P = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $a+b+c=?$

A. $-\frac{15}{4}$

C. $\frac{7}{2}$

B. $-\frac{14}{9}$

D. 2

➤ **Giải:**

❖ $M(1+2t; 2+2t; 1+t) \in d$

❖ $P = \sqrt{(2t+1)^2 + (2t+4)^2 + t^2} = \sqrt{9\left(t + \frac{10}{9}\right)^2 + \frac{53}{9}} \geq \sqrt{\frac{53}{9}}$

❖ Dấu “=” xảy ra khi $t = -\frac{10}{9} \Rightarrow M\left(-\frac{11}{9}; -\frac{2}{9}; -\frac{1}{9}\right)$

Câu 33: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và đường thẳng

$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc d sao cho ΔMAB có diện tích nhỏ nhất, khi đó

$a+b+c=?$

A. 3

C. 4

B. 1

D. 2

➤ **Giải:**

❖ $M(-1+2t; 1-t; 2t) \in d$

❖ $S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}] \right| = \sqrt{18(t-1)^2 + 198} \geq \sqrt{198}$

❖ Dấu “=” xảy ra khi $t = 1 \Rightarrow M(1; 0; 2)$

Câu 34: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(3; -4; -2)$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -6t \\ z = -1 - 8t \end{cases}. \text{ Điểm } I(a; b; c) \text{ thuộc } d \text{ sao cho } IA + IB \text{ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó}$$

$$a + b + c = ?$$

A. $-\frac{43}{29}$

C. $\frac{65}{29}$

B. $\frac{23}{58}$

D. $-\frac{21}{58}$

➤ **Giải:**

❖ $AB = (2; -3; -4) \Rightarrow AB // d$. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d

❖ $IA + IB = IA' + IB \geq A'B$. Dấu “=” xảy ra khi A', I, B thẳng hàng suy ra $I = A'B \cap d$.
Vì $AB // d$ nên I là trung điểm của $A'B$.

❖ Gọi H là hình chiếu của A lên d suy ra $H\left(\frac{36}{29}; \frac{33}{29}; \frac{15}{29}\right)$ suy ra $A'\left(\frac{43}{29}; \frac{95}{29}; -\frac{28}{29}\right)$.

❖ Vì I là trung điểm của $A'B$ nên $I\left(\frac{65}{29}; -\frac{21}{58}; -\frac{43}{29}\right)$

Câu 35: Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 \end{cases}$ và

$d': \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Điểm $A(a; b; c) \in d$ và $B(m; n; p) \in d'$ sao cho đoạn AB có độ dài ngắn nhất, khi đó $a + b + c + m + n + p = ?$

C. 4

C. 6

D. 1

D. 5

➤ **Giải:**

❖ $A(1+t; -1-t; 2)$ và $B(3-t'; 1+2t'; t')$ suy ra $\overline{AB} = (2-t-t'; 2+t+2t'; t'-2)$

❖ AB có độ dài nhỏ nhất khi AB là đoạn vuông góc chung của d và d' hay:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_{d'}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = t' = 0 \Rightarrow A(1; -1; 2), B(3; 1; 0)$$