

CỰC TRỊ SỐ PHỨC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bất đẳng thức tam giác:

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, dấu "=" khi $z_1 = kz_2$ với $k \geq 0$.
- $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, dấu "=" khi $z_1 = kz_2$ với $k \leq 0$.
- $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$, dấu "=" khi $z_1 = kz_2$ với $k \leq 0$.
- $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$, dấu "=" khi $z_1 = kz_2$ với $k \geq 0$.

2. Công thức trung tuyến: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

3. Tập hợp điểm:

- $|z - (a + bi)| = r$: Đường tròn tâm $I(a; b)$ bán kính r .
 - $|z - (a_1 + b_1i)| = |z - (a_2 + b_2i)|$: Đường trung trực của AB với $A(a_1; b_1), B(a_2; b_2)$.
 - $|z - (a_1 + b_1i)| + |z - (a_2 + b_2i)| = 2a$:
 - Đoạn thẳng AB với $A(a_1; b_1), B(a_2; b_2)$ nếu $2a = AB$.
 - Elip (E) nhận A, B làm hai tiêu điểm với độ dài trục lớn là $2a$ nếu $2a > AB$.
- Đặc biệt $|z + c| + |z - c| = 2a$: Elip $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Phương pháp đại số

VÍ DỤ 1 (Sở GD Hưng Yên 2017). Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z + 2 + i|$. Tính $S = M^2 + m^2$.

- A. $S = 34$ B. $S = 82$ C. $S = 68$ D. $S = 36$

LỜI GIẢI 1. Ta có

$$4 = |z + 2 + i - (3 + 3i)| \geq ||z + 2 + i| - |3 + 3i|| = ||z + 2 + i| - 3\sqrt{2}| \Rightarrow \begin{cases} |z + 2 + i| \leq 4 + 3\sqrt{2} = M \\ |z + 2 + i| \geq 3\sqrt{2} - 4 = m \end{cases}$$

Khi đó $S = M^2 + m^2 = 68$.

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 2 (Sở GD Hà Tĩnh 2017). Trong các số phức z thỏa mãn $|z - (2 + 4i)| = 2$, gọi z_1 và z_2 là số phức có mô đun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần ảo của hai số phức z_1 và z_2 bằng

- A. $8i$ B. 4 C. -8 D. 8

LỜI GIẢI. Ta có

$$2 \geq ||z| - |2 + 4i|| = ||z| - 2\sqrt{5}| \Rightarrow 2\sqrt{5} - 2 \leq |z| \leq 2\sqrt{5} + 2.$$

Giá trị lớn nhất $|z|$ là $2\sqrt{5} - 2$ khi $z = k(2 + 4i)$ với $(k - 1)\sqrt{5} = 1 \Rightarrow k = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}$. Do đó

$$z_1 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)(2 + 4i).$$

Giá trị nhỏ nhất $|z|$ là $2\sqrt{5} - 2$ khi $z = k(2 + 4i)$ với $(1 - k)\sqrt{5} = 1 \Rightarrow k = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}$. Do đó

$$z_2 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)(2 + 4i).$$

Như vậy, tổng hai phần ảo của z_1, z_2 là $4\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 8$.

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 3 (THPT Chuyên Thái Nguyên 2017 L3). Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 + 4| = 2|z|$.
Kí hiệu $M = \max|z|, m = \min|z|$. Tìm mô đun của số phức $w = M + mi$.

A. $|w| = 2\sqrt{3}$

B. $|w| = \sqrt{3}$

C. $|w| = 2\sqrt{5}$

D. $|w| = \sqrt{5}$

LỜI GIẢI. Ta có

$$2|z| \geq |z|^2 - 4 \Leftrightarrow |z|^2 - 2|z| - 4 \leq 0 \Rightarrow |z| \leq 1 + \sqrt{5} = M.$$

và

$$2|z| \geq 4 - |z|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + 2|z| - 4 \geq 0 \Rightarrow |z| \geq -1 + \sqrt{5} = m.$$

Vậy $|w| = \sqrt{M^2 + m^2} = 2\sqrt{3}$.

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 4 (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc 2017). Trong các số phức z thỏa mãn $|2z + \bar{z}| = |z - i|$, tìm số phức có phần thực không âm sao cho $|z^{-1}|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $z = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{i}{2}$

B. $z = \frac{i}{2}$

C. $z = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{8}$

D. $z = \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{i}{8}$

LỜI GIẢI. Gọi $z = a + bi$ ($a \geq 0$) thì $\bar{z} = a - bi$. Khi đó

$$\sqrt{9a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (b - 1)^2} \Leftrightarrow 2b = 1 - 8a^2 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} - 4a^2.$$

Ta có $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$ lớn nhất khi và chỉ khi $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nhỏ nhất.

$$|z|^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2} - 4a^2\right)^2 = 16a^4 - 3a^2 + \frac{1}{4} = \left(4a^2 - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{7}{64} \geq \frac{7}{64} \Rightarrow |z| \geq \frac{\sqrt{7}}{8}.$$

Do đó số phức z cần tìm thỏa mãn $\begin{cases} a^2 = \frac{3}{32} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{6}}{8} \\ b = \frac{1}{2} - 4a^2 = \frac{1}{8} \end{cases}$. Vậy $z = \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{i}{8}$.

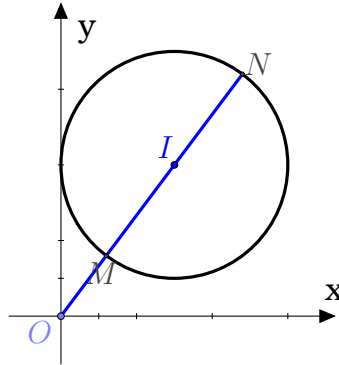
Đáp án là D. □

Phương pháp hình học

VÍ DỤ 5 (THPT Phan Bội Châu-Đắk Lắk 2017). Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = 1$. Mô đun lớn nhất của số phức z là:

- A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

LỜI GIẢI.



Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn giả thiết là đường tròn tâm $I(3; 4)$ bán kính $r = 1$. Khi đó $|z| = OM$ với O là gốc tọa độ. Do đó

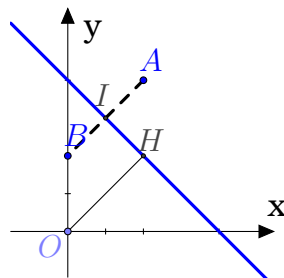
$$\max |z| = OI + r = 5 + 1 = 6.$$

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 6 (THPT Đồng Quan-Hà Nội 2017, THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam 2017). Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Tìm số phức z có mô đun nhỏ nhất

- A. $z = 2 - 2i$ B. $z = 1 + i$ C. $z = 2 + 2i$ D. $z = 1 - i$

LỜI GIẢI.



Gọi $A(2; 4), B(0; 2)$, tập hợp các điểm z thỏa mãn giả thiết đề bài là đường trung trực d của AB có phương trình $x + y - 4 = 0$. Khi đó $|z| = OM$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của O trên d là $H(2; 2)$.

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 7 (THPT Trần Phú-Hà Nội 2017). Cho số phức z thỏa mãn $|z + 3| + |z - 3| = 10$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

LỜI GIẢI. Gọi $A(-3; 0), B(3; 0)$ có trung điểm là $O(0; 0)$. Điểm M biểu diễn số phức z . Theo công thức trung tuyến thì

$$|z|^2 = MO^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}.$$

Ta có

$$MA^2 + MB^2 \geq \frac{(MA + MB)^2}{2} = 50$$

Do đó

$$m = \sqrt{\frac{50}{2} - \frac{36}{4}} = 4.$$

Vậy $\min |z| = 4$.

Đáp án là B. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Phương pháp đại số

BÀI 1 (Sở GD Long An 2017). Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. $1 + \sqrt{13}$

B. $\sqrt{13}$

C. $2 + \sqrt{13}$

D. $\sqrt{13} - 1$

BÀI 2 (THPT Hưng Nhân-Thái Bình 2017 L3). Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết

$$\left| \frac{-2 - 3i}{3 - 2i} z + 1 \right| = 1.$$

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. 1

D. 3

BÀI 3 (THPT Nguyễn Huệ-Huế 2017 L2, Hà Huy Tập-Hà Tĩnh 2017 L2). Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\bar{z}|$.

A. 2

B. $\sqrt{5}$

C. $2\sqrt{2}$

D. $\sqrt{2}$

BÀI 4 (Chuyên Nguyễn Trãi-Hải Dương 2017 L3). Xác định số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 2i| = \sqrt{2}$ mà $|z|$ đạt giá trị lớn nhất

A. $z = 1 + i$

B. $z = 3 + i$

C. $z = 3 + 3i$

D. $z = 1 + 3i$

BÀI 5 (THPT Yên Khánh A-Ninh Bình 2017, THPT Kim Liên-Hà Nội 2017). Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$ là

A. $\sqrt{13} - 1$

B. 4

C. 6

D. $\sqrt{13} + 1$

BÀI 6 (THPT Đống Đa-Hà Nội 2017). Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 + 2z + 2| = |z + 1 - i|$. Biểu thức $|z|$ có giá trị lớn nhất là

A. $\sqrt{2} + 1$

B. 2

C. $\sqrt{2} + 2$

D. $\sqrt{2} - 1$

BÀI 7 (THPT Hùng Vương-Phú Thọ 2017). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1| = |(1 + i)z|$. Đặt $m = |z|$, tìm giá trị lớn nhất của m .

A. $\sqrt{2} + 1$

B. 1

C. $\sqrt{2} - 1$

D. $\sqrt{2}$

BÀI 8 (THPT Chuyên Lào Cai 2017 L2). Cho số phức z thỏa mãn $\left| z + \frac{4i}{z} \right| = 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M + m$?

A. 2

B. $2\sqrt{5}$

C. $\sqrt{13}$

D. $\sqrt{5}$

BÀI 9 (THPT Hưng Nhân-Thái Bình 2017 L3). Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} |z_1 + 3 - 4i| = 1 \\ |z_2 + 6 - i| = 2 \end{cases}.$$

Tính tổng Giá trị lớn nhất và Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$.

- A. 18 B. $6\sqrt{2}$ C. 6 D. $3\sqrt{2}$

BÀI 10 (Sở GD Điện Biên 2017, Gia Lộc-Hải Dương 2017 L2). Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 1$. Đặt $A = \frac{2z - i}{2 + iz}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $|A| < 1$ B. $|A| \leq 1$ C. $|A| \geq 1$ D. $|A| > 1$

BÀI 11 (Sở GD Hải Dương 2017). Cho số phức z thỏa mãn $z\bar{z} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z^3 + 3z + \bar{z}| - |z + \bar{z}|$.

- A. $\frac{15}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{13}{4}$ D. 3

BÀI 12 (Chuyên Ngoại Ngữ-Hà Nội 2017). Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z + 1| + 2|z - 1|$

- A. $\max T = 2\sqrt{5}$ B. $\max T = 2\sqrt{10}$ C. $\max T = 3\sqrt{5}$ D. $\max T = 3\sqrt{2}$

BÀI 13 (Sở GD Bắc Ninh 2017). Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z + 1| + 3|z - 1|$

- A. $\max T = 3\sqrt{10}$ B. $\max T = 2\sqrt{10}$ C. $\max T = 6$ D. $\max T = 4\sqrt{2}$

BÀI 14 (Chu Văn An-Hà Nội 2017 L2). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |z + i| + |z - 2 - i|$

- A. $\max T = 8\sqrt{2}$ B. $\max T = 4$ C. $\max T = 4\sqrt{2}$ D. $\max T = 8$

Phương pháp hình học

BÀI 15 (Sở GD Đà Nẵng 2017). Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$. Mô đun lớn nhất của số phức z là:

- A. $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$ B. $\frac{\sqrt{15(14 - 6\sqrt{5})}}{5}$ C. $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$ D. $\frac{\sqrt{15(14 + 6\sqrt{5})}}{5}$

BÀI 16 (THPT Bình Xuyên-Vĩnh Phúc 2017 L3). Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$

- A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. 2 D. $\sqrt{5} - 1$

BÀI 17 (Chuyên Nguyễn Trãi-Hải Dương 2017 L3). Cho số phức z, w thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = |z + 5i|, w = iz + 20$. Giá trị nhỏ nhất m của $|w|$ là

- A. $m = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ B. $m = 7\sqrt{10}$ C. $m = \frac{\sqrt{10}}{2}$ D. $m = 2\sqrt{10}$

BÀI 18 (THPT Cổ Loa-Hà Nội 2017 L3). Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \frac{5}{2} - 2i\right| = \left|z + \frac{3}{2} + 2i\right|$.

Biết biểu thức $Q = |z - 2 - 4i| + |z - 4 - 6i|$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Tính $P = a - 4b$

- A. $P = -2$ B. $P = \frac{1333}{272}$ C. $P = -1$ D. $P = \frac{691}{272}$

BÀI 19 (THPT Cao Nguyên-Dăk Lăk 2017). Cho số phức z thỏa mãn $\left|iz + \frac{2}{1-i}\right| + \left|iz + \frac{2}{i-1}\right| = 4$. Gọi M và m lần lượt là Giá trị lớn nhất và Giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M.m$

- A. $Mm = 2$ B. $Mm = 1$ C. $Mm = 2\sqrt{2}$ D. $Mm = 2\sqrt{3}$

BÀI 20 (Lương Đức Trọng 2017). Xét số phức z thỏa mãn $4|z+i| + 3|z-i| = 10$. Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M+m$

- A. $\frac{35\sqrt{2}}{15}$ B. $\frac{80}{7}$ C. $\frac{50}{11}$ D. $\frac{30}{7}$

BÀI 21 (THPT Thăng Long-Hà Nội 2017 L2). Cho z là số phức thay đổi thỏa mãn $|z-2| + |z+2| = 4\sqrt{2}$. Trong mặt phẳng tọa độ, gọi M, N là điểm biểu diễn z và $\bar{z}$. Tính giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN .

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

BÀI 22 (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình 2017 L3). Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phương trình $|6-3i+iz| = |2z-6-9i|$ thỏa mãn $|z_1-z_2| = \frac{8}{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z_1+z_2|$ là

- A. $\frac{31}{5}$ B. $\frac{56}{5}$ C. $4\sqrt{2}$ D. 5

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 1. Ta có

$$1 \geq |z| - |2+3i| = |z| - \sqrt{13} \Rightarrow |z| \leq 1 + \sqrt{13}.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2. Ta có

$$1 \geq \left| \frac{-2-3i}{3-2i} z \right| - 1 = \left| \frac{-2-3i}{3-2i} \right| \cdot |z| - 1 = |z| - 1 \Rightarrow |z| \leq 2.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 3. Ta có

$$1 \geq |z^2| - |i| = |z|^2 - 1 \Rightarrow |z|^2 \leq 2 \Rightarrow |z| \leq \sqrt{2}.$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 4. Ta có

$$\sqrt{2} \geq |z| - |2+2i| = |z| - 2\sqrt{2} \Rightarrow |z| \leq 3\sqrt{2}.$$

Dấu "=" khi $z = k(2+2i)$ với $2k\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow k = \frac{3}{2}$. Vậy $k = 3+3i$.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5. Ta có

$$|\bar{z} + 1 + i| = |z + 1 - i| = |(z - 2 - 3i) + (3 + 2i)| \geq ||z - 2 - 3i| - |3 + 2i|| = \sqrt{13} - 1.$$

Vậy min $|\bar{z} + 1 + i| = \sqrt{13} - 1$.

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 6. Ta có

$$|z^2 + 2z + 2| = |(z + 1)^2 - i^2| = |z + 1 - i| \cdot |z + 1 + i| = |z + 1 - i| \Leftrightarrow \begin{cases} z + 1 - i = 0 \\ |z + 1 + i| = 1 \end{cases}$$

- Nếu $z = i - 1$ thì $|z| = \sqrt{2}$.
- Nếu $|z + 1 + i| = 1$ thì $1 \geq |z| - |1 + i| = |z| - \sqrt{2}$. Do đó $|z| \leq 1 + \sqrt{2}$.

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 7. Ta có

$$|z - 1| = 2|z| \leq |z| + 1 \Rightarrow |z| \leq 1.$$

Do đó $\max |z| = 1$.

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 8. Ta có

$$2|z| \geq |z|^2 - 4 \Leftrightarrow |z|^2 - 2|z| - 4 \leq 0 \Rightarrow |z| \leq 1 + \sqrt{5} = M.$$

và

$$2|z| \geq 4 - |z|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + 2|z| - 4 \geq 0 \Rightarrow |z| \geq -1 + \sqrt{5} = m.$$

Vậy $M + m = 2\sqrt{5}$.

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 9. Ta có

$$|z_1 - z_2| = |(z_1 + 3 - 4i) - (z_2 + 6 - i) + (3 + 3i)| \leq |z_1 + 2 - 4i| + |z_2 + 6 - i| + |3 + 3i| = 3 + 3\sqrt{2} = \max.$$

và

$$|z_1 - z_2| = |(z_1 + 3 - 4i) - (z_2 + 6 - i) + (3 + 3i)| \geq |3 + 3i| - |z_1 + 2 - 4i| - |z_2 + 6 - i| = 3\sqrt{2} - 3 = \min.$$

Do đó tổng Giá trị lớn nhất và Giá trị nhỏ nhất là $6\sqrt{2}$.

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 10. Ta có

$$2A + Aiz = 2z - i \Leftrightarrow (2 - Ai)z = 2A + i \Rightarrow z = \frac{2A + i}{2 - Ai}.$$

Đặt $A = a + bi$. Suy ra

$$|z| \leq 1 \Rightarrow |2A + i| \leq |2 - Ai| \Leftrightarrow 4a^2 + (2b + 1)^2 \leq a^2 + (b + 2)^2 \Leftrightarrow 3a^2 + 3b^2 \leq 3 \Rightarrow |A| = \sqrt{a^2 + b^2} \leq 1.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 11. Ta có

$$|z^3 + 3z + \bar{z}| = |z^3 \cdot \bar{z} + 3z \cdot \bar{z} + \bar{z}^2| = |z^2 + 3 + \bar{z}^2| = |(z + \bar{z})^2 + 1|.$$

Suy ra

$$P = (z + \bar{z})^2 + 1 - (z + \bar{z}) = \left(z + \bar{z} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 12. Áp dụng công thức trung tuyến ta có

$$|z + 1|^2 + |z - 1|^2 = 2|z|^2 + \frac{|1 + 1|^2}{2} = 4.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki thì

$$T^2 \leq (|z + 1|^2 + |z - 1|^2)(1^2 + 2^2) = 20 \Rightarrow T \leq 2\sqrt{5}.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 13. Áp dụng công thức trung tuyến ta có

$$|z + 1|^2 + |z - 1|^2 = 2|z|^2 + \frac{|1 + 1|^2}{2} = 4.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki thì

$$T^2 \leq (|z + 1|^2 + |z - 1|^2)(1^2 + 3^2) = 40 \Rightarrow T \leq 2\sqrt{10}.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 14. Áp dụng công thức trung tuyến ta có

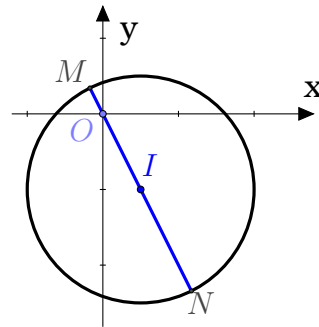
$$|z + i|^2 + |z - 2 - i|^2 = 2|z - 1|^2 + \frac{|2 + 2i|^2}{2} = 8.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki thì

$$T^2 \leq (|z + 1|^2 + |z - 1|^2)(1^2 + 1^2) = 16 \Rightarrow T \leq 4.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 15.

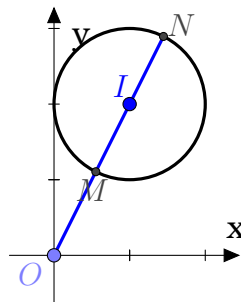


Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn giả thiết là đường tròn tâm $I(1; -2)$ bán kính $r = 3$. Khi đó $|z| = OM$ với O là gốc tọa độ. Do đó

$$\max |z| = OI + r = 3 + \sqrt{5}.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 16.

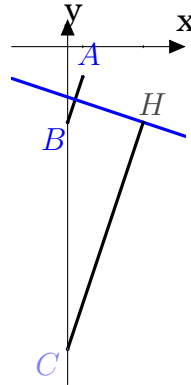


Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn giả thiết là đường tròn tâm $I(1; -2)$ bán kính $r = 1$. Khi đó $|z| = OM$ với O là gốc tọa độ. Do đó

$$\min |z| = OI - r = \sqrt{5} - 1.$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 17.



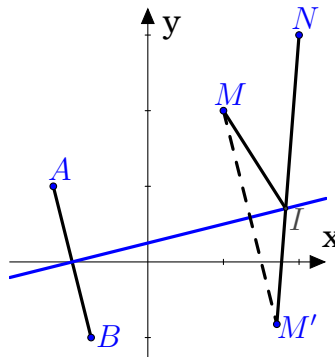
Gọi $A(1; -2)$, $B(0; -5)$, tập hợp các điểm z thỏa mãn giả thiết đề bài là đường trung trực d của AB có phương trình $x + 3y + 10 = 0$. Ta có

$$|w| = |iz + 20| = |z - 20i| = CM$$

với M là điểm biểu diễn số phức z và $C(0; 20)$. Do đó $\min |w| = d(C, d) = 7\sqrt{10}$.

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 18.



Gọi $A\left(-\frac{5}{2}; 2\right)$, $B\left(-\frac{3}{2}; -2\right)$, tập hợp các điểm z thỏa mãn giả thiết đề bài là đường trung trực d của AB có phương trình $x - 4y + 2 = 0$. Xét hai điểm $M(2; 4)$, $N(4; 6)$ thì $Q = IM + IN$ với $I \in d$. Do đó Q nhỏ nhất khi và chỉ khi I là giao điểm của $M'N$ với $M'\left(\frac{58}{17}; -\frac{28}{17}\right)$ là điểm đối xứng của M qua d . Vậy $I\left(\frac{62}{17}; \frac{24}{17}\right)$, ứng với $z = \frac{62}{17} + \frac{24}{17}i$.

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 19. Ta có

$$4 \geq \left| iz + \frac{2}{1-i} + iz + \frac{2}{i-1} \right| = |2iz| = 2|z| \Rightarrow M = 2.$$

Theo giả thiết thì số phức z thỏa mãn

$$\left| z + \frac{2}{i(1-i)} \right| + \left| z + \frac{2}{i(i-1)} \right| = 4 \Leftrightarrow |z + 1 - i| + |z - 1 + i| = 4.$$

Gọi $A(-1; 1), B(1; -1)$ có trung điểm là $O(0; 0)$. Điểm M biểu diễn số phức z . Theo công thức trung tuyến thì

$$|z|^2 = MO^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}.$$

Ta có

$$MA^2 + MB^2 \geq \frac{(MA + MB)^2}{2} = 8$$

Do đó

$$m = \sqrt{\frac{8}{2} - \frac{8}{4}} = \sqrt{2}.$$

Vậy $Mm = 2\sqrt{2}$.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 20. Gọi $A(0; -1), B(0; 1)$ có trung điểm là $O(0; 0)$. Điểm M biểu diễn số phức z . Theo công thức trung tuyến thì

$$|z|^2 = MO^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}.$$

Theo giả thiết $4MA + 3MB = 2\sqrt{2}$. Đặt $a = MA \Rightarrow MB = \frac{10 - 4a}{3}$. Do

$$|MA - MB| = \frac{|10 - 7a|}{3} \leq AB = 2 \Rightarrow -6 \leq 10 - 7a \leq 6 \Leftrightarrow \frac{4}{7} \leq a \leq \frac{16}{7}.$$

Ta có

$$MA^2 + MB^2 = a^2 + \left(\frac{10 - 4a}{3}\right)^2 = \frac{25a^2 - 80a + 100}{9} = \frac{(5a - 8)^2 + 36}{9}.$$

Do $-\frac{36}{7} \leq 5a - 8 \leq \frac{34}{7} \Rightarrow 0 \leq (5a - 8)^2 \leq \frac{1296}{49}$ Suy ra

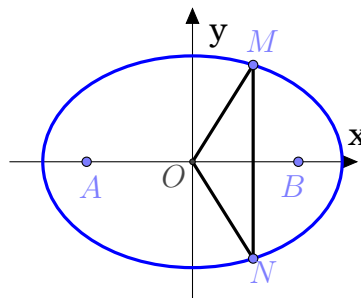
- $MA^2 + MB^2 \geq 4$ nên $|z|^2 \geq 1 \Rightarrow |z| \geq 1 = m$.

- $MA^2 + MB^2 \leq \frac{\frac{1296}{49} + 36}{9} = \frac{340}{49} \Rightarrow |z|^2 \leq \frac{121}{49} \Rightarrow |z| \leq \frac{11}{7} = M$.

Vậy $M + m = \frac{60}{49}$.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 21.



Gọi điểm M biểu diễn số phức $z = x + iy$ và N biểu diễn số phức $\bar{z}$ thì M, M' đối xứng

nhau qua Ox . Diện tích tam giác OMN là $S_{OMN} = |xy|$.

Do $|z - 2| + |z + 2| = 4\sqrt{2}$ nên tập hợp M biểu diễn z là Elip $(E) : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. Do đó

$$1 = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{8} \cdot \frac{y^2}{4}} = \frac{|xy|}{2\sqrt{2}} \Rightarrow S_{OMN} = |xy| \leq 2\sqrt{2}.$$

Đáp án là D.

□