ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH 11 — HỌC KÌ I

Từ cơ bản đến nâng cao

2020

Hãy là mình!

NHÓM TOÁN

LÊ VĂN ĐOÀN

Nguyễn Tiến Hà - Bùi Sỹ Khanh
Nguyễn Đức Nam - Đỗ Minh Tiến

NHÓM TOÁN THẦY LÊ VĂN ĐOÀN

Thành công là nói không với lười biếng !

Điện thoại ghi danh

Zalo: 0933.755.607 (thầy Lê Văn Đoàn)

Zalo: 0983.047.188 (thầy Nguyễn Đức Nam)

MỤC LỤC

Trang

ĐỊA CHỈ GHI DANH

- TRUNG TÂM THẾ VINH – 45A LÊ THÚC HOẠCH – Q. TÂN PHÚ (ĐỐI DIỆN TRƯỜNG THPT TRẦN PHÚ).
- TRUNG TÂM HOÀNG GIA – 56 PHỐ CHỢ – P. TÂN THÀNH – Q. TÂN PHÚ (SAU CHỢ TÂN PHÚ).
- 71/25/10 PHÚ THỌ HÒA – P. PHÚ THỌ HÒA – Q. TÂN PHÚ – TP. HỒ CHÍ MINH.

ĐIỆN THOẠI GHI DANH

- 0983.047.188 – Zalo (Thầy Nguyễn Đức Nam) – Face: https://www.facebook.com/marion.zack/
- 0933.755.607 – Zalo (Thầy Lê Văn Đoàn) – 0929.031.789 – Face: https://www.facebook.com/levan.doan.902

NHÓM TOÁN THẦY LÊ VĂN ĐOÀN

Ths. Lê Văn Đoàn – Ths. Trương Huy Hoàng – Ths. Nguyễn Tiến Hà – Thầy Bùi Sỹ Khanh – Thầy Nguyễn Đức Nam – Thầy Đỗ Minh Tiến – Thầy Nguyễn Duy Tùng – Thầy Trần Nguyễn Vĩnh Nghi – Thầy Hoàng Minh Thiện – Thầy Trần Quốc Tuấn.

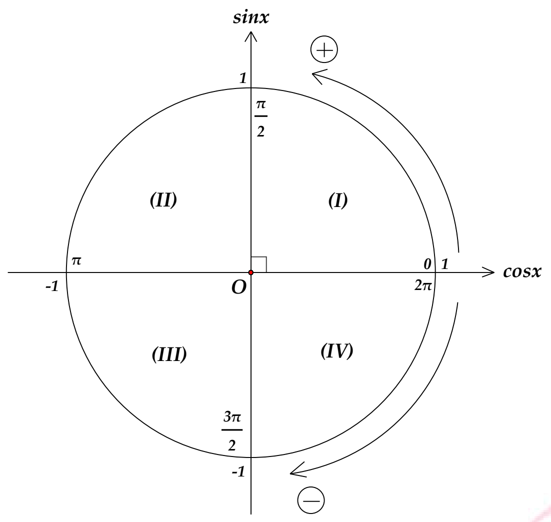
THỜI KHÓA BIỂU CÁC LỚP TOÁN ĐANG HỌC

KHỐI 6	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
19’15 – 21’15			**T6A**		**T6A**		**Giải đề**
KHỐI 7	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17’30 -19’30			**T7A**		**T7A**		**Giải đề**
KHỐI 8	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
19’15 – 21’15	**T8A**		**T8A**				**Giải đề**
KHỐI 9	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17’30 -19’30	**T9A**	**T9B**	**T9A**	**T9B**			**Giải đề**
KHỐI 10	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17’45 -19’15						**T10C**	**T10C**
19’30 – 21’00	**T10A** **10HG**	**T10B**	**T10A** **10HG**	**T10B**	**T10A** **10HG**	**T10B**	**Giải đề**
KHỐI 11	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17’45 -19’15	**T11A**	**T11B1** **T11B2**	**T11A**	**T11B1** **T11B2**	**T11A**	**T11B1** **T11B2**	Giải đề
19’30 – 21’00		**T11-C**		**T11-C**		**T11-C**	
KHỐI 12	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17’45 -19’15	**T12A1** **T12A2** **T12HG1**	**T12C**	**T12A1** **T12A2** **T12HG1**	**T12C**	**T12A1** **T12A2** **T12HG1**	**T12C** **T12HG2**	**Lớp chuyên đề VD và VDC**
19’30 – 21’00	**T12B**		**T12B**	**T12HG2**	**T12B**	**T12HG2**	

Chöông 1 : HAM SO LÖÔNG GIAC – PHÖÔNG TRÌNH LÖÔNG GIAC

§ 0. CONG THÖC LÖÔNG GIAC CAN NAM VÖNG

1. Đường tròn lượng giác và dấu của các giá trị lượng giác



Giá trị LG \ Cung phần tư	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\tan\alpha$	+	–	+	–
$\cot\alpha$	+	–	+	–

(Nhất cả – Nhì sin – Tam tan – Tứ cos)

2. Công thức lượng giác cơ bản

$\tan\alpha.\cot\alpha = 1$	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$	$1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

3. Cung góc liên kết

Cung đối nhau	Cung bù nhau	Cung phụ nhau
$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$
$\sin(-a) = -\sin a$	$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$
$\tan(-a) = -\tan a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$
$\cot(-a) = -\cot a$	$\cot(\pi - a) = -\cot a$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$

Cung hơn kém π	Cung hơn kém $\dfrac{\pi}{2}$
$\sin(\pi + a) = -\sin a$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$
$\cos(\pi + a) = -\cos a$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$
$\tan(\pi + a) = \tan a$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$
$\cot(\pi + a) = \cot a$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$

4. Công thức cộng cung

$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b.$	$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b.$
$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}.$	$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}.$
Hệ quả: $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = \dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$ và $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}.$	

5. Công thức nhân đôi và hạ bậc

Nhân đôi	Hạ bậc
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$	$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$
$\cos 2\alpha = \left[\begin{array}{l}\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha\end{array}\right.$	$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$
$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$	$\tan^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$
$\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$	$\cot^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$
Nhân ba	
$\left[\begin{array}{l}\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \\ \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\end{array}\right.$	$\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

6. Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}$	$\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}$
$\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}$	$\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}$
$\tan a + \tan b = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos a\cdot\cos b}$	$\tan a - \tan b = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cdot\cos b}$
$\cot a + \cot b = \dfrac{\sin(a+b)}{\sin a\cdot\sin b}$	$\cot a - \cot b = \dfrac{\sin(b-a)}{\sin a\cdot\sin b}$
Đặc biệt	
$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$	$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

7. Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos a\cdot\cos b = \dfrac{1}{2}\cdot\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$	$\sin a\cdot\sin b = \dfrac{1}{2}\cdot\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$
$\sin a\cdot\cos b = \dfrac{1}{2}\cdot\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$	

§ 1. HAM SO LÖÔNG GIAC

Dạng toán 1: Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Phương pháp giải. Để tìm tập xác định của hàm số lượng giác ta cần nhớ:

- $y=\tan f(x)=\dfrac{\sin f(x)}{\cos f(x)}\xrightarrow{\text{ĐKXĐ}}\cos f(x)\neq 0\Leftrightarrow f(x)\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z}).$
- $y=\cot f(x)=\dfrac{\cos f(x)}{\sin f(x)}\xrightarrow{\text{ĐKXĐ}}\sin f(x)\neq 0\Leftrightarrow f(x)\neq k\pi,\ (k\in\mathbb{Z}).$
- Một số trường hợp tìm tập xác định thường gặp:
  - $y=\dfrac{1}{P(x)}\xrightarrow{\text{ĐKXĐ}}P(x)\neq 0.$
  - $y=\sqrt[2n]{P(x)}\xrightarrow{\text{ĐKXĐ}}P(x)\geq 0.$
  - $y=\dfrac{1}{\sqrt[2n]{P(x)}}\xrightarrow{\text{ĐKXĐ}}P(x)>0.$ *(có mẫu không ?, có tan, cot không ? có căn không ?)*
- Lưu ý rằng: $-1\leq\sin f(x);\ \ \cos f(x)\leq 1$ và $A.B\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}A\neq 0\\ B\neq 0\end{cases}.$
- Với $k\in\mathbb{Z}$, ta cần nhớ những trường hợp đặc biệt:
  - $\left|\begin{array}{l}+\ \sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ +\ \sin x=0\ \Leftrightarrow x=k\pi\\ +\ \sin x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right..$
  - $\left|\begin{array}{l}+\ \cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi\\ +\ \cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ +\ \cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\end{array}\right..$
  - $\left|\begin{array}{l}+\ \tan x=0\Leftrightarrow x=k\pi\\ +\ \tan x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ +\ \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right..$
  - $\left|\begin{array}{l}+\ \cot x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ +\ \cot x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ +\ \cot x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right..$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. Hãy tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số lượng giác: $y=\dfrac{\tan 2x}{\cos x+1}+\sin x.$

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x+1\neq 0\\ \cos 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq -1\\ \cos 2x\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pi+k2\pi\\ 2x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pi+k2\pi\\ x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\end{cases}\ (k\in\mathbb{Z}).$

Tập xác định:

$\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\pi+k2\pi;\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})\right\}.$

2. Hãy tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số lượng giác: $y=\dfrac{\cos 3x}{1-\sin x}+\tan x.$

....

....

....

....

....

Đáp số: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$ ....

3. Hãy tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số lượng giác: $y = \dfrac{2\tan 2x - 5}{\sin 2x + 1}\cdot$

Đáp số: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

4. Hãy tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số lượng giác: $y = \dfrac{1}{\tan x - 1}\cdot$

Đáp số: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right\}.$

5. Hãy tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số lượng giác: $y = \dfrac{3}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \tan x.$

Đáp số: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}.$

6. Hãy tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số lượng giác: $y = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\cos x}\cdot$

Đáp số: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

7. Hãy tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số lượng giác: $y = \sqrt{\dfrac{2 - \sin x}{\cos x + 1}}\cdot$

Vì $\begin{cases} -1 \le \sin x \le 1 \\ -1 \le \cos x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - \sin x > 0 \\ \cos x + 1 \ge 0 \end{cases}.$

Hàm số xác định khi $\dfrac{2 - \sin x}{\cos x + 1} \ge 0$

$\Rightarrow \cos x + 1 \ne 0 \Leftrightarrow \cos x \ne -1$

$\Leftrightarrow x \ne \pi + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

8. Hãy tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số lượng giác: $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin x}}\cdot$

Đáp số: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi / 2 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

9. Hãy tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số lượng giác: $y=\sqrt{\dfrac{\cos x+4}{\sin x+1}}$.

Đáp số: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-\pi/2+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

10. Hãy tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số lượng giác: $y=\sqrt{\dfrac{2-\cos x}{1-\sin x}}$.

Đáp số: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pi/2+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

11. Hãy tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số lượng giác: $y=\sqrt{4\pi^2-x^2}+\cot 2x$.

Điều kiện: $\begin{cases}4\pi^2-x^2\geq 0\\ \sin 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\begin{cases}-2\pi\leq x\leq 2\pi\\ x\neq\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Xét $\begin{cases}x=\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\\ -2\pi\leq x\leq 2\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\in\mathbb{Z}\\ -2\pi\leq\dfrac{k\pi}{2}\leq 2\pi\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}k\in\mathbb{Z}\\ -4\leq k\leq 4\end{cases}\Rightarrow k\in\{\pm4;\pm3;\pm2;\pm1;0\}$.

$\Rightarrow x\in\left\{\pm2\pi;\pm\dfrac{3\pi}{2};\pm\pi;\pm\dfrac{\pi}{2};0\right\}$.

$\Rightarrow$ TXĐ: $\mathscr{D}=(-2\pi;2\pi)\setminus\left\{\pm\dfrac{3\pi}{2};\pm\pi;\pm\dfrac{\pi}{2};0\right\}$.

12. Hãy tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số lượng giác: $y=\sqrt{\pi^2-x^2}+\cot 2x$.

Đáp số: $\mathscr{D}=(-\pi;\pi)\setminus\{\pm\pi/2;0\}$.

13. Hãy tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số lượng giác: $y=\dfrac{\sqrt{\pi^2-x^2}}{\sin 2x}$.

Đáp số: $\mathscr{D}=(-\pi;\pi)\setminus\{\pm\pi/2;0\}$.

14. Hãy tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số lượng giác: $y=\dfrac{\sqrt{\pi^2-4x^2}}{\cos 2x}$.

Đáp số: $\mathscr{D}=[-\pi/2;\pi/2]\setminus\{\pm\pi/4\}$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 1. **(THPT Chuyên Bắc Ninh)** Hàm số $y = \dfrac{2\sin x + 1}{1 - \cos x}$ xác định khi

A. $x \neq k\pi$. **B.** $x \neq k2\pi$.

C. $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$. **D.** $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Câu 2. **(THPT Hùng Vương – Bình Phước)** Hàm số $y = \dfrac{1 - 3\cos x}{\sin x}$ xác định khi

A. $x \neq k\pi$. **B.** $x \neq k2\pi$.

C. $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$. **D.** $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Câu 3. **(THPT Yên Mỹ – Hưng Yên)** Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x - 1}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$.

Câu 4. **(THPT Nghĩa Hưng – Nam Định)** Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\cot x}{\cos x - 1}$ là

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{2}\right\}$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

C. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$.

Câu 5. **(THPT Chuyên Trần Phú – Hải Phòng)** Hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x - \cos x}$ xác định khi

A. $x \neq k2\pi$. **B.** $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

C. $x \neq k\pi$. **D.** $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 6. **(THPT Kinh Môn – Hải Dương)** Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\tan 2x}{\cos x}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\right\}$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

Câu 7. **(THPT Sơn Tây – Hà Nội)** Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\tan x - 5}{1 - \sin^2 x}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}.$ **B.** $\mathbb{R}.$

C. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right\}.$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\{\pi+k\pi\}.$

Câu 8. **(THPT Hoài Ân – Hải Phòng)** Hàm số $y=\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ xác định khi

A. $x\neq\pm\dfrac{\pi}{2}+k2\pi.$ **B.** $x\neq -k\pi.$

C. $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k2\pi.$ **D.** $x\neq-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi.$

Câu 9. **(THPT Chuyên Biên Hòa – Hà Nam)** Tập xác định hàm số $y=\sqrt{\dfrac{\sin 2x+2}{1-\cos x}}$ là

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}.$ **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi\}.$

C. $\mathscr{D}=\{k2\pi\}.$ **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}.$

Câu 10. **(THPT Tân Bình – TP.HCM)** Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\dfrac{\tan 2x}{\sqrt{\sin x+1}}$ là

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right\}.$

B. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right\}.$

C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi\}.$

D. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right\}.$

Câu 11. **(THPT Trần Phú TP. HCM)** Tập xác định của hàm $y=\cot\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ là

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{3}+k\pi;\ \dfrac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$

B. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

D. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{6}+k\pi;\ k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$

Dạng toán 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

Phương pháp giải.

Phương pháp 1. Dựa vào tập giá trị của hàm số lượng giác.

- Dựa vào tập giá trị của hàm số lượng giác, chẳng hạn:
  - $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \le |\sin x| \le 1 \\ 0 \le \sin^2 x \le 1 \end{array} \right.$ hoặc $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \le |\cos x| \le 1 \\ 0 \le \cos^2 x \le 1 \end{array} \right.$.
  - Biến đổi về dạng: $m \le y \le M$.
- Kết luận: $\max y = M$ và $\min y = m$.

Phương pháp 2. Khảo sát parabol

Trong trường hợp hàm số có dạng bậc hai theo một hàm lượng giác, ta có thể sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa về hàm bậc hai, sau đó khảo sát hàm này và kết luận.

Kiến thức cơ bản về parabol:

- Đỉnh parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ là $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)\cdot$
- Bảng biến thiên:
  - $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y		$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	

  - $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y		$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	

Phương pháp 3. Sử dụng bất đẳng thức.

- Bất đẳng thức Cauchy:
  - $\forall a,\ b \ge 0$ thì $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = b \ge 0$.
  - $\forall a,\ b,\ c \ge 0$ thì $\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$. Dấu " = " xảy ra khi $a = b = c \ge 0$.
- Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz:
  - $\forall x,\ y,\ a,\ b \in \mathbb{R}$ thì $|ax + by| \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$. Dấu " = " khi và chỉ khi $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}\cdot$
  - $\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ a,\ b > 0$ thì $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} \ge \dfrac{(x+y)^2}{a+b}\cdot$ Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}\cdot$

Lưu ý

Trong trường hợp đề bài yêu cầu tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác trên đoạn cho trước, ta sẽ sử dụng đường tròn lượng giác để giới hạn miền của sin hoặc cos. Sau đó thêm bớt giống phương pháp 1 hoặc bậc 2 thì sử dụng parabol.

- $m \ge f(x),\ \forall x \in \mathscr{D} \Leftrightarrow m \ge \max\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.
- $m \le f(x),\ \forall x \in \mathscr{D} \Leftrightarrow m \le \min\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 5 - 3\cos 4x$.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $-1 \le \cos 4x \le 1 \Leftrightarrow 3 \ge -3\cos 4x \ge -3$

$\Leftrightarrow 5 + 3 \ge 5 - 3\cos 4x \ge 5 - 3 \Leftrightarrow 8 \ge y \ge 2$

$\Leftrightarrow 2 \le y \le 8$.

- $\max y = 8$ khi $\cos 4x = -1 \Leftrightarrow$ ...
- $\min y = 2$ khi $\cos 4x = 1 \Leftrightarrow$ ...

2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 + 3\cos x$.

Đáp số: $\max y = 5$, $\min y = -1$.

3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 - 2\sin 2x$.

Đáp số: $\max y = 5$, $\min y = 1$.

4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 - 2\left|\sin 2x\right|$.

Đáp số: $\max y = 3$, $\min y = 1$.

5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{1 + 4\cos^2 x}{3}$.

Đáp số: $\min y = 1/3$; $\max y = 5/3$.

6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$.

Đáp số: $\min y = 0,5$; $\max y = 1$.

7. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \sin(x + 2\pi/3)$.

Ghi CT: $\sin a + \sin b =$ ...

Đáp số: $\min y = -1$; $\max y = 1$.

8. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos x + \cos(x + \pi/3)$.

Ghi CT: $\cos a + \cos b =$ ...

Đáp số: $\min y = -\sqrt{3}$; $\max y = \sqrt{3}$.

9. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{4}{2 - \sin x}$.

Đáp số: $\min y = 4/3;\ \max y = 4.$

10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{8}{3 - \cos^2 x}$.

Đáp số: $\min y = 8/3;\ \max y = 4.$

11. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{3}{3 - \sqrt{1 - \cos x}}$.

Đáp số: $\min y = 1;\ \max y = 3/(3 - \sqrt{2}).$

12. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{2 - \sin^2 3x}}$.

Đáp số: $\min y = \sqrt{2}/2;\ \max y = 1.$

Gặp hàm số $y = a\sin x \pm b\cos x + c$ thì ta sẽ rút $\sqrt{a^2 + b^2}$, rồi áp dụng công thức cộng cung ngược:
$\sin x.\cos\alpha \pm \cos x.\sin\alpha = \sin(x \pm \alpha)$ *và* $\cos x.\cos\alpha \pm \sin x.\sin\alpha = \cos(x \mp \alpha)$.

Lưu ý. *Ta có thể sử dụng BĐT Cauchy – Schwarz dạng:* $\left|ax + by\right| \le \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.

13. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 12$.

Ta có: $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 12$

$$= 2\left(\sin x \cdot \frac{1}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 12$$

$$= 2\left(\sin x.\cos\frac{\pi}{3} + \cos x.\sin\frac{\pi}{3}\right) + 12$$

$$= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 12.$$

14. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 5$.

Đáp số: $\min y = 3,\ \min y = 7.$

15. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x + 4$.

Đáp số: $\min y = 2, \ \ \max y = 6.$

16. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y = \sqrt{3}(\cos^4 x - \sin^4 x) + \sin 2x + 1$.

Ta có: $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2$

$=$ ...

Suy ra $y = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x + 1$

Đáp số: $\min y = -1, \ \ \max y = 3.$

17. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4\sin^2 x - 4\sin x + 3$.

Đặt $\sin x = t$ thì $t \in [-1;1]$. Khi đó hàm số trở thành $y = 4t^2 - 4t + 3$ là một parabol có

Đỉnh $I\left(\frac{1}{2};2\right)$ và $a = 4 > 0$ nên có BBT:

t	-1		$\frac{1}{2}$		1
y	11	$\searrow$	2	$\nearrow$	3

- $\min y = 2$ khi $t = \sin x = 1/2$.
- $\max y = 11$ khi $t = \sin x = -1 \Leftrightarrow$ ...

18. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos^2 x - 2\cos x - 4$.

Đáp số: $\min y = -5, \ \ \max y = -1.$

19. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$.

Đáp số: $\min y = 0, \ \ \max y = 4.$

20. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y = \cos^4 x - 2\sin^2 x + 1$.

Đáp số: $\min y = -1, \ \ \max y = 2.$

21. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{5-4\sin x+\sin^2 x}$.

Xét hàm số $g(x)=5-4\sin x+\sin^2 x$ trên $\mathbb{R}$.

Đáp số: $\min y=\sqrt{2},\ \ \max y=\sqrt{10}$.

22. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{\cos^2 x+6\cos x+14}$.

Xét hàm số $g(x)=\cos^2 x+6\cos x+14$ trên $\mathbb{R}$.

Đáp số: $\min y=3,\ \ \max y=\sqrt{21}$.

23. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y=2(\sin x+\cos x)+\sin 2x+3$.

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)$.

Khi đó $t\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$.

$\Rightarrow t^2=(\sin x+\cos x)^2=$

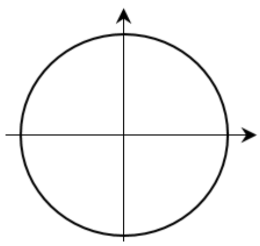
Đáp số: $\min y=1,\ \ \max y=4+2\sqrt{2}$.

24. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y=\sin x+\cos x+2\sin x\cos x-1$.

Đáp số: $\min y=-2{,}25$ và $\max y=\sqrt{2}$.

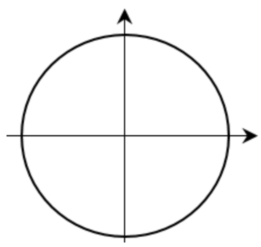
25. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3-\sin 2x$ trên đoạn $[0;\pi/2]$?

Do $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow 2x\in[0;\pi]$.



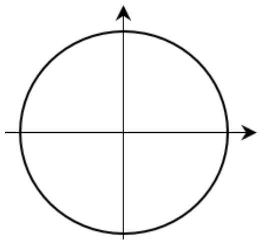
Đáp số: $\min y=2,\ \ \max y=3$.

26. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin 2x+2$ trên $[0;\pi/2]$?



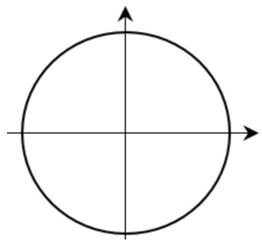
Đáp số: $\min y=2,\ \ \max y=3$.

27. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ trên $[0;\pi]$.



Đáp số: $\min y = -1$; $\max y = 0,5$.

28. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{1}{2}$ trên $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$.



Đáp số: $\min y = (1-\sqrt{2})/2$; $\max y = 3/2$.

29. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x - 1$ trên $\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right]$.

Ta có: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 \cos^2 x$

$= 1 - \dfrac{1}{2}(2\sin x\cos x)^2 = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$

$= 1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\cos 4x}{2}\right) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4x.$

Suy ra $y =$

Đáp số: $\min y = -\sqrt{3}/4$; $\max y = 0$.

30. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x$ trên $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Sử dụng: $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

Ta có: $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$

$=$

$=$

$= \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\cos 4x \Rightarrow y = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\cos 4x.$

Đáp số: $\min y = 1/4$; $\max y = 7/4$.

31. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x + 3$, $\left[-\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Đáp số: $\min y = 2$; $\max y = 6$.

32. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y = \sin 2x + \cos 2x + 3$ trên $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Đáp số: $\min y = 2$; $\max y = 3 + \sqrt{2}$.

33. *Cho hàm số $y=\sin^{13}x+10\cos x$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho ?

Có $\forall x$ thì $\sin^{13}x\le\sin^2x\Rightarrow y\le\sin^2x+10\cos x$

$\Leftrightarrow y\le1-\cos^2x+10\cos x$

$\Leftrightarrow y\le-\cos^2x+10\cos x+1 \qquad (*)$

Đặt $\cos x=t,\ t\in[-1;1]$. Khi đó:

$(*)$ trở thành $y\le-t^2+10t+1=g(t),\ t\in[-1;1]$

Đáp số: $\max y=10$.

34. *Cho hàm số $y=\sin^5x+\sqrt{3}\cos x$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho ?

Ta có: $y=\sin^5x+\sqrt{3}\cos x\le\sin^4x+\sqrt{3}\cos x$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{1}{2}(2-2\cos x)(1+\cos x)(1+\cos x)\le\frac{32}{27}<\sqrt{3}$$

☞ **Nhận xét**. *Nếu học sinh làm theo cách của bài 33, sẽ sai đáp án vì sai điểm rơi của bài toán. Ta có thể tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên bằng đánh giá $y\ge-\sin^4x+\sqrt{3}\cos x$ và ghép Cauchy tương tự $\Rightarrow \min y=-\sqrt{3}$. **(Dành cho học sinh rèn luyện)***

35. *Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2-\cos x}+\dfrac{1}{1+\cos x}$ với mọi $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot$ Tìm GTNN của hàm số ?

Đáp số: $\min y=4/3$.

36. * Cho hàm số $y=\dfrac{\sin^2x}{\cos x(\sin x-\cos x)}+\dfrac{1}{4}$ với mọi $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot$ Tìm GTNN của hàm số ?

Đáp số: $\min y=17/4$.

37. * Tìm giá trị lớn nhất của hàm số sau: $y=\sqrt{\sin x+1}+\sqrt{3-\sin x}$.

Đáp số: $\max y=2\sqrt{2}$.

38. *Hàm số $f(x)=\cos x+\sqrt{4-\cos x}+m$ có giá trị lớn nhất bằng $3\sqrt{2}$. Tìm tham số m.

Đáp số: $m=\sqrt{2}$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 1. **(THPT Lê Quý Đôn – Điện Biên)** Tập giá trị của hàm số $y = 2\cos 3x + 1$ là

A. $T = [-3;1]$.   **B.** $T = [-3;-1]$.
C. $T = [-1;3]$.   **D.** $T = [1;3]$.

Câu 2. **(KTNL GV Bắc Giang)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\sin x + 1$ là

A. -1.   **B.** 1.
C. $0,5$.   **D.** 3.

Câu 3. **(THPT Lê Hoàn – Thanh Hóa)** Giá trị lớn nhất của $y = 3\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{12}\right) + 4$ là

A. 7.   **B.** 1.
C. 4.   **D.** 3.

Câu 4. **(THPT Chuyên Hùng Vương – Phú Thọ)** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3 - 2\left|\sin 5x\right|$ lần lượt là

A. $2;\ 3$.   **B.** $-1;\ 3$.
C. $1;\ 4$.   **D.** $1;\ 3$.

Câu 5. **(THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai)** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 1 - (\sin 2x + \cos 2x)^3$ lần lượt là

A. $1 - \sqrt{2};\ 1 + 2\sqrt{2}$.
B. $1 - 2\sqrt{2};\ 1 + 2\sqrt{2}$.
C. $1 + \sqrt{2};\ 1 + 2\sqrt{2}$.
D. $2 - 2\sqrt{2};\ 1 + 2\sqrt{2}$.

Câu 6. **(THPT Chuyên Lương Văn Chanh – Phú Yên)** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{4 - 2\sin^5 2x} - 8$ lần lượt là

A. $\sqrt{2} - 8,\ \sqrt{6} - 8$.
B. $\sqrt{2} - 8,\ \sqrt{6} + 8$.
C. $2\sqrt{2};\ 2 + 2\sqrt{2}$.
D. $\sqrt{2} + 8,\ \sqrt{6} + 8$.

Câu 7. **(THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp 2019)** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{3}{3 - \sqrt{1 - \cos x}}$ lần lượt là

A. $1;\ \dfrac{9+3\sqrt{2}}{7}\cdot$

B. $1;\ 9+3\sqrt{2}.$

C. $2;\ 9-3\sqrt{2}.$

D. $2;\ 9-3\sqrt{2}.$

Câu 8. **(THPT Chuyên Đại học Vinh năm 2020)** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{4}{\sqrt{5-2\cos^2 x\sin^2 x}}$ lần lượt là

A. $\dfrac{4\sqrt{5}}{5};\ 2\sqrt{2}.$

B. $4\sqrt{2};\ 4\sqrt{5}.$

C. $\dfrac{4\sqrt{5}}{5};\ \dfrac{4\sqrt{2}}{3}\cdot$

D. $\dfrac{4\sqrt{5}}{7};\ \dfrac{4\sqrt{2}}{3}\cdot$

Câu 9. **(THPT Chu Văn An – Hà Nội)** Gọi $M,\ m$ tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2\cos x+1}{\cos x-2}\cdot$ Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

A. $M+9m=0.$

B. $9M-m=0.$

C. $9M+m=0.$

D. $M+m=0.$

Câu 10. **(THPT Chuyên Trần Phú – Hải Phòng)** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{12}{7-4\sin x}$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right]$ lần lượt là

A. $\dfrac{12}{5};\ \dfrac{12}{7}\cdot$

B. $4;\ 3.$

C. $-1;\ 1.$

D. $4;\ \dfrac{4}{3}\cdot$

Câu 11. **(THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội)** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\cos x-\sqrt{3}\sin x+3$ lần lượt là

A. $2;\ 6.$

B. $1;\ 5.$

C. $-1;\ 5.$

D. $2;\ 5.$

Câu 12. **(THPT NewTon – Hà Nội)** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $y = 3\sin x - 4\cos x - 2$ lần lượt là

A. $3;\ 7.$

B. $-7;\ 3.$

C. $-7;\ 1.$

D. $1;\ 3.$

Câu 13. **(THPT Ngọc Tảo – Hà Nội)** Cho hàm số $y = 2\sin^2 x - \sin 2x + 10.$ Giá trị lớn nhất của hàm số bằng

A. $10.$

B. $11 - \sqrt{2}.$

C. $11 + \sqrt{2}.$

D. $9 + \sqrt{2}.$

Câu 14. **(THPT Phan Đình Phùng – Hà Tĩnh)** Cho hàm số $y = 2\cos^2 x - \sin 2x + 5.$ Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng

A. $\sqrt{2}.$

B. $-\sqrt{2}.$

C. $6 - \sqrt{2}.$

D. $6 + \sqrt{2}.$

Câu 15. **(THPT Trần Hưng Đạo – Tp.HCM)** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right].$ Tính $M,\ m.$

A. $M = 1,\ m = -1.$

B. $M = 2,\ m = -2.$

C. $M = 1,\ m = -2.$

D. $M = 2,\ m = -1.$

Câu 16. **(THPT Chuyên Hoàng Lê Kha – Tây Ninh)** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \cos^2 x - 2\cos x - 3$ lần lượt là

A. $-3;\ 0.$

B. $-4;\ 1.$

C. $-4;\ 0.$

D. $-3;\ 1.$

Câu 17. **(THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội)** Giá trị lớn nhất của hàm $y = 2\sin^2 x - \cos x$ là phân số tối giản có dạng $\dfrac{a}{b}$ với $a,\ b \in \mathbb{Z}^+.$ Giá trị của $a - b$ bằng

A. $8.$

B. $9.$

C. $7.$

D. $10.$

Câu 18. **(THPT Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^9 x + \cos^{12} x$ bằng

A. 2.
B. 1.
C. $0,5$.
D. $1,5$.

Câu 19. **(Tạp Chí Toán Học & Tuổi Trẻ số 489 năm 2018)** Số giờ có ánh sáng của một thành phố X ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số: $d(t) = 3\sin\left[\dfrac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12,\ t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \le 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có nhiều giờ ánh sáng nhất ?

A. 262.
B. 353.
C. 80.
D. 171.

Câu 20. **(THPT Minh Châu – Hưng Yên 2019)** Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h\ (m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t\ (h)$ được cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\dfrac{\pi t}{6} + \dfrac{\pi}{3}\right) + 12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất ?

A. $t = 22\ (h)$.
B. $t = 15\ (h)$.
C. $t = 14\ (h)$.
D. $t = 10\ (h)$.

Dạng toán 3: Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

Phương pháp giải.

- **Bước 1.** Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số lượng giác.
  Nếu $\forall x \in \mathscr{D}$ thì $-x \in \mathscr{D} \Rightarrow \mathscr{D}$ là tập đối xứng và chuyển sang bước 2.
- **Bước 2.** Tính $f(-x)$, nghĩa là sẽ thay x bằng $-x$, sẽ có 2 kết quả thường gặp sau:
  - Nếu $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.
  - Nếu $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

Lưu ý:

- Nếu không là tập đối xứng ($\forall x \in \mathscr{D} \Rightarrow -x \notin \mathscr{D}$) hoặc $f(-x)$ không bằng $f(x)$ hoặc $-f(x)$ ta sẽ kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.
- Ta thường sử dụng cung góc liên kết dạng cung đối trong dạng toán này, cụ thể:
  $\cos(-a) = \cos a,\ \ \sin(-a) = -\sin a,\ \ \tan(-a) = -\tan a,\ \ \cot(-a) = -\cot a.$
- Lũy thừa: $\sin^{2n}(-\alpha) = \sin^{2n}\alpha,\ \ \cos^{2n}(-\alpha) = \cos^{2n}\alpha,\ \ \tan^{2n}(-\alpha) = \tan^{2n}\alpha, \ldots$
- Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung là trục đối xứng, đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

1. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số sau:
$f(x)=\sin^2 2x+\cos 3x.$

- Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}.$
- $\forall x\in\mathscr{D}$ thì $-x\in\mathscr{D}\Rightarrow\mathscr{D}$ là tập đối xứng.
- $\forall -x\in\mathscr{D}$, xét $f(-x)=\sin^2(-2x)+\cos(-3x)$
  $=(-\sin 2x)^2+\cos 3x$
  $=\sin^2 2x+\cos 3x=f(x).$
- **Kết luận**: Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

2. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số sau:
$f(x)=\cos^2 3x+\cos x.$

Đáp số: Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn.

3. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số sau:
$f(x)=\dfrac{\sin^2 x-\cos 2x}{\sin 3x}.$

Đáp số: Hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ

4. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số sau:
$f(x)=1+\cos x.\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2x\right).$

Đáp số: Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn.

5. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số sau:
$f(x)=\cos\sqrt{x^2-16}.$

Đáp số: Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn.

6. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số sau:
$f(x)=\tan x+\cot x.$

Đáp số: Hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ.

7. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số sau:
$f(x)=\cot(4x+5\pi)\tan(2x-3\pi).$

Đáp số: Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn.

8. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số sau:
$f(x)=\sin^3(3x+\pi)+\cot(2x-7\pi).$

Đáp số: Hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ.

9. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số sau:
$y=\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|+\left|\sin x+\dfrac{1}{2}\right|.$

Đáp số: Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn.

10. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số sau:
$y=\dfrac{\sqrt{\cos x+2}+\cot^2 x}{\sin 4x}.$

Đáp số: Hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ.

Dạng toán 4: Tìm chu kỳ của hàm số lượng giác

Phương pháp giải.

- Hàm số $y=\sin x,\ y=\cos x$ tuần hoàn với chu kì $T_{\text{o}}=2\pi$, nghĩa là: $\sin(x+k2\pi)=\sin x$ và $\cos(x+k2\pi)=\cos x$.

  $\Rightarrow$ Hàm số $y=\sin(ax+b),\ y=\cos(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T_{\text{o}}=\dfrac{2\pi}{|a|}\cdot$

- Hàm số $y=\tan x,\ y=\cot x$ tuần hoàn với chu kì $T_{\text{o}}=\pi$.

  $\Rightarrow$ Hàm số $y=\tan(ax+b),\ y=\cot(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T_{\text{o}}=\dfrac{\pi}{|a|}\cdot$

Lưu ý. Giả sử hàm số $f(x)=g(x)\pm h(x)$ có hàm $g(x)$ tuần hoàn với chu kì T_1 và hàm $h(x)$ tuần hoàn với chu kì T_2 thì hàm số $f(x)$ sẽ tuần hoàn với chu kì T_{o} là bội chung nhỏ nhất của hai chu kì T_1 và T_2.

Câu 1. **(THPT Kinh Môn 2 – Hải Dương)** Hàm số $y=\sin 2x$ có chu kỳ là

A. $T=2\pi$. **B.** $T=\dfrac{\pi}{2}\cdot$
C. $T=\pi$. **D.** $T=4\pi$.

Câu 2. **(THPT Thạch Thành – Thanh Hóa)** Hàm số $y=\tan 2x$ có chu kỳ là

A. $T_{\text{o}}=\dfrac{\pi}{3}\cdot$ **B.** $T_{\text{o}}=\dfrac{\pi}{2}\cdot$
C. $T_{\text{o}}=2\pi$. **D.** $T_{\text{o}}=\pi$.

Câu 3. **(THPT Xuân Hòa – Nam Định)** Hàm số $y=3\sin\dfrac{x}{2}$ có chu kỳ là

A. $T_{\text{o}}=0$. **B.** $T_{\text{o}}=\dfrac{\pi}{2}\cdot$
C. $T_{\text{o}}=2\pi$. **D.** $T_{\text{o}}=4\pi$.

Câu 4. **(THPT Chuyên Hạ Long – Quảng Ninh)** Hàm số $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+2\cos\dfrac{3x}{2}$ có chu kỳ là

A. 5π. **B.** $\dfrac{\pi}{2}\cdot$
C. 2π. **D.** 4π.

Câu 5. **(Lê Trọng Tấn – Tp. HCM)** Tìm m để hàm số $y=\cos mx$ tuần hoàn với chu kì $T_{\text{o}}=\pi$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$.
C. $m=\pi/2$. **D.** $m=\pi$.

§ 2. PHÖÔNG TRÌNH LÖÔÏNG GIAÙC CÔ BAÛN

Với $k \in \mathbb{Z}$, ta có các phương trình lượng giác cơ bản sau:

- $\boxed{\sin a = \sin b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b + k2\pi \\ a = \pi - b + k2\pi \end{array}\right.}$.
- $\boxed{\cos a = \cos b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b + k2\pi \\ a = -b + k2\pi \end{array}\right.}$.
- $\boxed{\tan a = \tan b \Leftrightarrow a = b + k\pi}$.
- $\boxed{\cot a = \cot b \Leftrightarrow a = b + k\pi}$.

Nếu đề bài cho dạng độ (α°) thì ta sẽ chuyển $k2\pi \to k360^\circ$, $k\pi \to k180^\circ$, với $\pi = 180^\circ$.

Trường hợp đặc biệt (cách nhớ: 0, ± 1 chỉ có 1 tập nghiệm, $= 0 \to$ đuôi $k\pi$, $= \pm 1$ đuôi $k2\pi$) :

- $\left|\begin{array}{l} + \ \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ + \ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ + \ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$.
- $\left|\begin{array}{l} + \ \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \\ + \ \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ + \ \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \end{array}\right.$.
- $\left|\begin{array}{l} + \ \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ + \ \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ + \ \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$.
- $\left|\begin{array}{l} + \ \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ + \ \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ + \ \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$.

Nếu $\alpha \in [-1;1]$, $k \in \mathbb{Z}$ và không là cung góc đặc biệt thì:

- $\sin x = \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin \alpha + k2\pi \end{array}\right.$.
- $\cos x = \alpha \Leftrightarrow x = \pm \arccos \alpha + k2\pi$.
- $\tan x = \alpha \Leftrightarrow x = \arctan \alpha + k\pi$.
- $\cot x = \alpha \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} \alpha + k\pi$.

1. Giải phương trình: $\sin 2x = -1/2$.

Đáp số: $S = \{-\pi/12 + k\pi;\ 5\pi/12 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Giải phương trình: $\sin 3x = \sqrt{2}/2$.

Đáp số: $S = \{\pi/12 + k2\pi/3;\ \pi/4 + k2\pi/3\}$.

3. Giải phương trình: $2\sin(2x - \pi/6) = 1$.

Đáp số: $S = \{\pi/6 + k\pi;\ \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

4. Giải phương trình: $2\sin(3x - \pi/4) = \sqrt{3}$.

ĐS: $S = \{7\pi/36 + k2\pi/3;\ 11\pi/36 + k2\pi/3\}$.

5. Giải phương trình: $2\sin(x-20^\circ)-\sqrt{3}=0.$

Đáp số: $S=\{80^\circ+k360^\circ;\ 140^\circ+k360^\circ\}.$

6. Giải phương trình: $\sin(4x+45^\circ)=\sin 2x.$

Đáp số: $S=\{22,5^\circ+k60^\circ;\ -22,5^\circ+k180^\circ\}.$

7. Giải phương trình: $\sin 3x=-1.$

Đáp số: $S=\{-\pi/6+k2\pi/3,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

8. Giải phương trình: $\sin 3x=0.$

Đáp số: $S=\{k\pi/3,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

$$\boxed{\cos a=\cos b\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b+k2\pi\\ a=-b+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})}$$

- $\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi.$
- $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi.$
- $\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi.$

9. Giải phương trình: $2\cos 2x=-\sqrt{2}.$

Kết luận: $S=\{\pm 3\pi/8+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

10. Giải phương trình $2\cos(2x-\pi/3)+\sqrt{3}=0.$

Đáp số: $S=\{7\pi/12+k\pi;\ -\pi/4+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

11. Giải ptrình: $2\cos(3x+15^\circ)-\sqrt{3}=0.$

Đáp số: $S=\{-15^\circ+k120^\circ,\ 5^\circ+k120^\circ\}.$

12. Giải phương trình: $2\cos(x-55^\circ)=\sqrt{2}.$

Đáp số: $S=\{100^\circ+k360^\circ;\ 10^\circ+k360^\circ\}.$

$\boxed{\tan a = \tan b \Leftrightarrow a = b + k\pi}$ và $\boxed{\cot a = \cot b \Leftrightarrow a = b + k\pi}$

○ $\left|\begin{array}{l} + \ \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ + \ \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ + \ \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$.

○ $\left|\begin{array}{l} + \ \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ + \ \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ + \ \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$.

13. Giải phương trình: $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Kết luận: $S = \{\pi/12 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

14. Giải phương trình: $\tan\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.

Đáp số: $S = \{-\pi/4 + k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

15. Giải phương trình: $3\tan(2x + \pi/6) = -\sqrt{3}$.

Đáp số: $S = \{-\pi/6 + k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

16. Giải phong trình: $\tan(x - \pi/4) + \sqrt{3} = 0$.

Đáp số: $S = \{-\pi/12 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

17. Giải phương trình: $\cot\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.

Đáp số: $S = \{5\pi/36 + k\pi/3,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

18. Giải phương trình: $\cot\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Đáp số: $S = \{16\pi/15 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

19. Giải phương trình: $\cot(x + \pi/3) = -1$.

Đáp số: $S = \{-7\pi/12 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

20. Giải phương trình: $\tan(x + \pi/3) = 1$.

Đáp số: $S = \{-\pi/12 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 1. **(THPT Minh Châu – Hưng Yên)** Nghiệm của phương trình $2\cos x+1=0$ là

A. $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi.$ B. $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi.$

C. $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi.$ D. $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi.$

Câu 2. **(THPT Sơn Tây – Hà Nội)** Họ nghiệm của phương trình $\cos x=1$ là

A. $x=\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$ B. $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ D. $x=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Câu 3. **(THPT Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai)** Phương trình $2\sin x-1=0$ có tập nghiệm là

A. $\left\{\dfrac{\pi}{3}+k2\pi;-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\right\}.$ B. $\left\{\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\right\}.$

C. $\left\{\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\ -\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\right\}.$ D. $\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right\}.$

Câu 4. **(Lê Văn Thịnh Bắc Ninh)** Với $k\in\mathbb{Z}$, phương trình $\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ có tập nghiệm là

A. $\left\{k2\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}.$ B. $\left\{k\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}.$

C. $\left\{k\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right\}.$ D. $\left\{k2\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right\}.$

Câu 5. **(THPT Yên Phong – Nam Định)** Với $k\in\mathbb{Z}$, phương trình $2\sin x+1=0$ có tập nghiệm là

A. $\left\{\dfrac{-\pi}{6}+k2\pi;\dfrac{-7\pi}{6}+k\pi\right\}.$ B. $\left\{\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\right\}.$

C. $\left\{\dfrac{-\pi}{6}+k2\pi;\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\right\}.$ D. $\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi;-\dfrac{7\pi}{6}+k\pi\right\}.$

Câu 6. **(Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc)** Với $k\in\mathbb{Z}$, phương trình $2\sin x-\sqrt{3}=0$ có tập nghiệm là

A. $\left\{\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\right\}.$ B. $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\right\}.$

C. $\left\{\dfrac{\pi}{3}+k2\pi;\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\right\}.$ D. $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\right\}.$

Câu 7. **(THPT Việt Trì – Phú Thọ)** Phương trình $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ có họ nghiệm là

A. $-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ B. $-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

C. $\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ D. $-\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Phương trình tích số $A.B=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array}\right.$.

21. Giải: $(\sqrt{3}\tan x+3)(2\cos 2x+1)=0.$

Đáp số: $S=\{-\pi/3+k\pi,\ \ \pm\pi/3+k\pi\}.$

22. Giải: $(\sqrt{2}\sin 2x+2)(2\cos x+\sqrt{2})=0.$

Đáp số: $S=\{\pm 3\pi/4+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

23. Giải: $(\sin x+1)(2\cos 2x-\sqrt{2})=0.$

ĐS: $S=\{-\pi/2+k2\pi;\ \ \pm\pi/8+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

24. Giải: $(2\sin x-1)(\sqrt{3}\cos x-5)=0.$

Đáp số: $S=\{\pi/6+k2\pi,\ 5\pi/6+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

Nhóm bài toán áp dụng công thức nhân đôi $\sin 2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha \longrightarrow$

- $\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x$
- $\sin 6x=2\sin 3x\cos 3x\ \cdots$
- $\sin 3x=2\sin\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{3x}{2}$

25. Giải phương trình: $\sin 3x\cos 3x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}=0.$

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin 3x.\cos 3x-2.\dfrac{\sqrt{2}}{4}=0$

$\Leftrightarrow$

Đáp số: $S=\{\pi/24+k\pi/3;\ \pi/8+k\pi/3\}.$

26. Giải phương trình: $\sin x\cos x\cos 2x=\dfrac{1}{4}\cdot$

Đáp số: $S=\{\pi/8+k\pi/2,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

27. Giải: $\sin 2x.\cos 2x.\cos 4x + \dfrac{1}{8} = 0.$

Đáp số: $S = \{-\pi/48 + k\pi/4;\ 7\pi/48 + k\pi/4\}.$

28. Giải: $\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \dfrac{1}{16}\cdot$

Đáp số: $S = \{\pi/32 + k\pi/8,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

29. Giải: $2\sin x - \sqrt{2}\sin 2x = 0.$

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin x - 2\sqrt{2}\sin x \cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x.(1 - \sqrt{2}\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow$

Đáp số: $S = \{k\pi;\ \ \pm\pi/4 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

30. Giải: $\sin 4x + \sqrt{3}\sin 2x = 0.$

Đáp số: $S = \{k\pi/2;\ \ \pm 5\pi/12 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

31. Giải phương trình: $\sin x - \sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2} = 0.$

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} - \sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{x}{2}\cdot\left(2\sin\dfrac{x}{2} - \sqrt{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow$

Đáp số: $\{\pi + k2\pi;\ 4\pi/3 + k4\pi;\ 2\pi/3 + k4\pi\}.$

32. Giải phương trình: $\sin x + \sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2} = 0.$

Đáp số: $S = \{k2\pi;\ \ \pm 5\pi/3 + k4\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$

Nhóm sử dụng cung góc liên kết

1) Muốn biến đổi sin thành cos, tan thành cot và ngược lại, ta sẽ làm như thế nào ?

$\longrightarrow$ ....

2) Hãy viết các công thức cung góc liên kết dạng cung góc phụ nhau ?

$\longrightarrow$ ....

33. Giải phương trình $\sin 3x - \cos 5x = 0.$

Ta có $\sin 3x - \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \cos 5x = \sin 3x$

$\Leftrightarrow \cos 5x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = \dfrac{\pi}{2} - 3x + k2\pi \\ 5x = -\dfrac{\pi}{2} + 3x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{4} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right..$

$\Rightarrow S = \{\pi/16 + k\pi/4;\ -\pi/4 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

34. Giải phương trình $\sin x - \cos 2x = 0.$

....

Đáp số: $S = \{\pi/6 + k2\pi/3;\ -\pi/2 + k2\pi\}.$

35. Giải: $\tan\left(3x - \dfrac{\pi}{5}\right) = \cot x.$

....

Đáp số: $S = \left\{\dfrac{7\pi}{40} + \dfrac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

36. Giải: $\cot\left(2x - \dfrac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right).$

....

Đáp số: $S = \left\{\dfrac{17\pi}{36} + \dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

37. Giải: $\tan 3x.\tan x = 1.$

....

Đáp số: $S = \left\{\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

38. Giải: $\sin(2x+1) + \cos(3x-1) = 0.$

....

Đáp số: $S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2 + k2\pi;\ -\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k2\pi}{5}\right\}.$

1) Muốn bỏ dấu "–" trước sin, cos, tan, cotan ta sẽ làm như thế nào ?

⟶ ....

2) Hãy viết công thức cung góc liên kết dạng cung đối nhau ?

⟶ ....

39. Giải: $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Phương trình $\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)$

40. Giải: $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Phương trình $\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-x-\frac{\pi}{4}\right)$

41. Giải: $\tan\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan x$.

42. Giải: $\cot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\cot x$.

43. Giải: $\sin\left(3x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{7\pi}{5}\right)=0$.

44. Giải: $\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Tìm nghiệm thuộc miền cho trước

45. Giải: $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ với $x \in (0;2\pi)$.

Đáp số: $S = \{4\pi/3;\ 5\pi/3\}$.

46. Giải: $2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$ với $-\pi < x < \pi$.

Đáp số: $S = \{0;\ 2\pi/3\}$.

47. Giải: $2\sin 2x + 1 = 0$ với $0 < x < 90^\circ$.

Đáp số: $S = \{105^\circ;\ 165^\circ\}$.

48. Giải: $\cos^3 x - 2\cos^2 x = 0,\ \forall x \in [0;720^\circ]$.

Đáp số: $S = \{90^\circ;\ 270^\circ;\ 450^\circ;\ 630^\circ\}$.

49. Giải phương trình: $\sin(\pi \sin 2x) = 1$.

Ta có $\sin(\pi\sin 2x) = 1 \Leftrightarrow \pi \sin 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow \sin 2x = \dfrac{1}{2} + 2k,\ k \in \mathbb{Z} \qquad (1)$

Để (1) có nghiệm thì $-1 \le \dfrac{1}{2} + 2k \le 1$

$\Leftrightarrow -\dfrac{3}{4} \le k \le \dfrac{1}{4} \xrightarrow{\text{do: } k \in \mathbb{Z}} k = 0.$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \sin 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$ ……………………

Kết luận: $S = \{\pi/12 + k\pi;\ 5\pi/12 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

50. Giải phương trình: $\sin(\pi\cos 2x) = 1$.

Đáp số: $S = \{\pi/6 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CÓ ĐIỀU KIỆN

- *Họ nghiệm* $x = \alpha + \dfrac{k2\pi}{n}$ *sẽ có* n *điểm cách đều trên vòng tròn lượng giác.*
- *Biểu diễn họ nghiệm và điều kiện trên cùng vòng tròn, những điểm trùng sẽ loại và ghi lại họ nghiệm mới.*

51. Giải p.trình: $\sin 4x.(2 + \tan^2 x) = 0.$

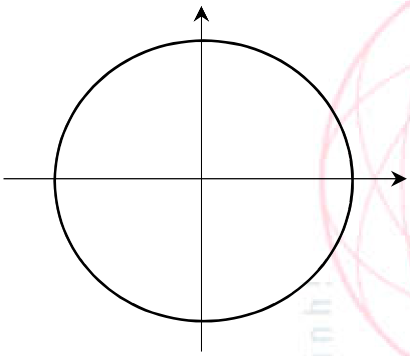
Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Vì $2 + \tan^2 x > 0$ nên phương trình

$\Leftrightarrow \sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = l\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{l\pi}{4},\ l \in \mathbb{Z}.$

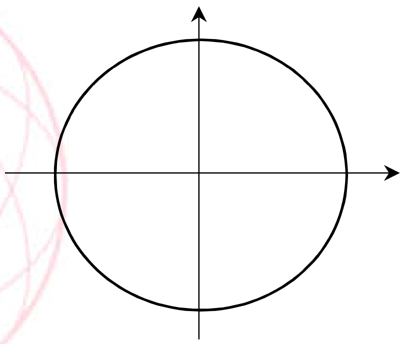
So với điều kiện trên vòng tròn lượng giác, ta được họ nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{m\pi}{2},\ m \in \mathbb{Z}.$

Học sinh nghe giảng và thực hành nháp:



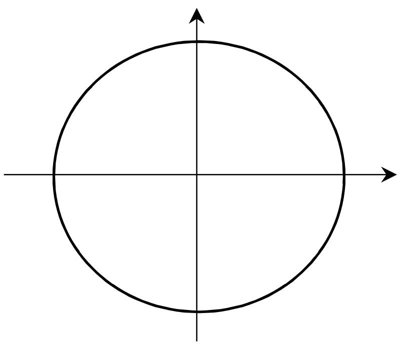
52. Giải p.trình: $(\cos 4x - 1)(1 + \cot^2 x) = 0.$

Đáp số: $S = \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$



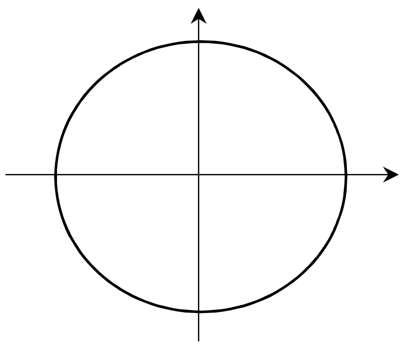
53. Giải phương trình $\dfrac{\cos 2x - 1}{1 - \cos x} = 0.$

Đáp số: $S = \{\pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$



54. Giải phương trình: $\dfrac{\cos 2x}{\tan x - 1} = 0.$

Đáp số: $S = \{-\pi/2 + k\pi;\ -\pi/4 + k\pi\}.$



BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 1. **(THPT Lương Tài 2 Bắc Ninh)** Họ nghiệm của phương trình $\left(2\cos\frac{x}{2}-1\right)\left(\sin\frac{x}{2}+2\right)=0$ là

A. $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi$. **B.** $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$.

C. $x=\pm\frac{\pi}{3}+k4\pi$. **D.** $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k4\pi$.

Câu 2. **(Kinh Môn 2 Hải Dương)** Phương trình $(\sqrt{3}\tan x+1)(\sin^2 x+1)=0$ có họ nghiệm là

A. $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 3. **(Chuyên Lương Văn Chánh Phú Yên)** Tập nghiệm của $8\cos 2x\sin 2x\cos 4x=-\sqrt{2}$ là

A. $\left\{\frac{\pi}{32}+\frac{k\pi}{4};\frac{3\pi}{32}+\frac{k\pi}{4}\right\}$. **B.** $\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{8};\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{8}\right\}$.

C. $\left\{-\frac{\pi}{32}+\frac{k\pi}{4};\frac{5\pi}{32}+\frac{k\pi}{4}\right\}$. **D.** $\left\{\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{8};\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{8}\right\}$.

Câu 4. **(Chuyên Lương Văn Tụy Ninh Bình)** Họ nghiệm của phương trình $\sin x\cos x\cos 2x=0$ là

A. $x=k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$. **B.** $x=\frac{k\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $x=\frac{k\pi}{4},\ (k\in\mathbb{Z})$. **D.** $x=\frac{k\pi}{8},\ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu 5. **(THPT Chuyên Đại Học Vinh)** Họ nghiệm của phương trình $\sin 2x-\cos x=0$ là

A. $\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{k2\pi}{3};\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right\}$. **B.** $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3};\frac{\pi}{2}+k2\pi\right\}$.

C. $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3};\frac{\pi}{4}+k2\pi\right\}$. **D.** $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3};\frac{\pi}{2}+k2\pi\right\}$.

Câu 6. **(THPT Chuyên Bắc Giang)** Phương trình $\sin x=\cos x$ có số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ là

A. 3.
B. 5.
C. 2.
D. 4.

Câu 7. **(THPT Lê Văn Thịnh – Bắc Ninh năm 2019)** Phương trình $2\sin 2x+\sqrt{2}=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$?

A. 3.
B. 1.
C. 2.
D. 4.

Câu 8. **(THPT Thạch Thành 2 – Thanh Hóa)** Phương trình $\sin 2x + 3\cos x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0;\pi)$?

A. 3.
B. 1.
C. 2.
D. 4.

Câu 9. **(THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội)** Tìm số đo ba góc của một tam giác cân, biết rằng có số đo của một góc là nghiệm của phương trình $2\cos 2x + 1 = 0$?

A. $\left\{\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right\},\left\{\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right\}$. B. $\left\{\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right\}$.

C. $\left\{\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right\},\left\{\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right\}$. D. $\left\{\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right\}$.

Câu 10. **(Sở GD & ĐT Ninh Bình)** Gọi S là tổng các nghiệm trong khoảng $(0;\pi)$ của phương trình $2\sin x = 1$. Giá trị của S bằng

A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{3}$.

C. π. D. 0.

Câu 11. **(THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Vĩnh Phúc)** Số nghiệm của phương trình $\sin(\cos x) = 0$ trên đoạn $[0;2\pi]$ bằng

A. 0. B. 1.

C. 2. D. Vô số.

Câu 12. Gọi $x_\circ$ là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\frac{2\cos 2x}{1-\sin 2x} = 0$. Mệnh đề nào **đúng** ?

A. $x_\circ \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right]$. B. $x_\circ \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$.

C. $x_\circ \in \left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$. D. $x_\circ \in \left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $3\sin x + m = 1$ có nghiệm ?

A. 3. B. 5.

C. 6. D. 7.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $3\sin 2x + 5 = m^2$ có nghiệm ?

A. 6. B. 2.

C. 1. D. 7.

Ghép cung thích hợp để áp dụng công thức tích thành tổng

• $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}\cdot$	• $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}\cdot$
• $\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}\cdot$	• $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}\cdot$

Khi áp dụng tổng thành tích đối với hai hàm sin và cosin thì được hai cung mới là: $\dfrac{a+b}{2};\ \dfrac{a-b}{2}\cdot$ Do đó khi sử dụng nên nhẩm (tổng và hiệu) hai cung mới này trước để nhóm hạng tử thích hợp sao cho xuất hiện nhân tử chung (cùng cung) với hạng tử còn lại hoặc cụm ghép khác trong giải.

55. Giải: $\sin 5x + \sin 3x + \sin x = 0.$

Phương trình $\Leftrightarrow (\sin 5x + \sin x) + \sin 3x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 2x + \sin 3x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 3x.(2\cos 2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0\\ \cos 2x = -0,5\end{array}\right. \Leftrightarrow$

Kết luận: $S = \{k\pi/3;\ \ \pm\pi/ + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

56. Giải: $\sin 7x + \sin 4x + \sin x = 0.$

Đáp số: $S = \{k\pi/4;\ 2\pi/9 + k2\pi/3,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

57. Giải: $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0.$

Đáp số: $\{\pi/4 + k\pi/2; -\pi/6 + k2\pi; 7\pi/6 + k2\pi\}.$

58. Giải: $\sin x - 4\cos x + \sin 3x = 0.$

Đáp số: $S = \{-5\pi/6 + k2\pi; -\pi/ + k2\pi; k\pi/4\}.$

59. Giải: $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0.$

Đáp số: $S = \{-5\pi/6 + k2\pi; -\pi/6 + k2\pi; k\pi/4\}.$

60. Giải: $\cos 3x + 2\sin 2x - \cos x = 0.$

Đáp số: $S = \{-\pi/2 + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

➢ Nếu gặp số 1, ta thường ghép: $\boxed{1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha}$, $\boxed{1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha}$, $\boxed{\cos 2\alpha = 1-2\sin^2 x}$

61. Giải: $\cos 3x + \cos 2x + \cos x + 1 = 0.$

$\Leftrightarrow (\cos 3x + \cos x) + (1+\cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos x + 2\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow$ ...

ĐS: $S = \{\pi/2 + k\pi;\ \pi/3 + k\pi/3;\ \ -\pi + k\pi\}.$

62. Giải: $1 - \sin x - \cos 2x + \sin 3x = 0.$

Đáp số: $S = \{k\pi/2;\ \ \pm\pi/6 + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

63. Giải: $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1.$

ĐS: $S = \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}; \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3}\right\}.$

64. Giải: $\sin 3x + \cos 2x - \cos x = 0.$

PT $\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{3x}{2} - 2\sin\dfrac{3x}{2}\sin\dfrac{x}{2} = 0$

ĐS: $S = \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ \ -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$

65. Giải $\cos 3x - 2\sin 2x - \cos x - \sin x = 1.$

ĐS: $\left\{-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi;\ \ -\dfrac{\pi}{12} + k\pi;\ \ \dfrac{7\pi}{12} + k\pi\right\}.$

66. Giải: $4\sin 3x + \sin 5x = 2\sin x\cos 2x.$

Đáp số: $S = \left\{\dfrac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$

Hạ bậc khi gặp bậc chẵn của sin và cos

• $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.	• $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

Lưu ý đối với công thức hạ bậc của sin và cosin:

— *Mỗi lần hạ bậc xuất hiện hằng số $1/2$ và cung góc tăng gấp đôi.*

— ***Mục đích của việc hạ bậc**: hạ bậc để triệt tiêu hằng số không mong muốn và nhóm hạng tử thích hợp để sau khi áp dụng công thức (tổng thành tích sau khi hạ bậc) sẽ xuất hiện nhân tử chung.*

67. Giải phương trình: $\sin^2\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Ta có $\sin^2\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1-\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(4x-\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 4x-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$.

68. Giải phương trình: $\cos^2 x = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$.

ĐS: $x=\pm\pi/12+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.

69. Giải: $\sin^2\left(3x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{4}-x\right)$.

ĐS: $S=\{13\pi/48+k\pi/4;\ -29\pi/24+k\pi/2\}$.

70. Giải: $\sin^2\left(3x+\dfrac{2\pi}{5}\right)-\cos^2\left(\dfrac{x}{4}-\pi\right)=0$.

ĐS: $\{22\pi/65+k4\pi/13;-38\pi/55+k4\pi/11\}$.

71. Giải phương trình: $\sin^2 2x+\sin^2 x=1$.

PT $\Leftrightarrow \sin^2 2x = 1-\sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 2x=\cos^2 x$

ĐS: $S=\{\pi/6+k\pi/3;\ \pi/2+k\pi\}$.

72. Giải phương trình: $\sin^2 2x+\cos^2 3x=1$.

ĐS: $S=\{k\pi;\ k\pi/5,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

73. Giải: $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \dfrac{3}{2}\cdot$

ĐS: $S = \{\pi/8 + k\pi/4;\ \ \pm\pi/3 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

74. Giải: $\sin^2 2x - \cos^2 8x = \dfrac{1}{2}\cos 10x.$

ĐS: $S = \{\pi/20 + k\pi/10;\ \ \pm\pi/9 + k\pi/3\}$.

75. Giải: $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x.$

ĐS: $S = \{\pi/2 + k\pi;\ \pi/4 + k\pi/2;\ \pi/10 + k\pi/5\}$.

76. Giải: $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x.$

ĐS: $x = \{k\pi/2;\ k\pi/9,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

77. $\cos^2 3x.\cos 2x - \cos^2 x = 0.$

ĐS: $S = \{k\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

78. *Giải $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 1{,}5.$

$\{\pi/8 + k\pi/4; \pm 0{,}5\arccos(-1 \pm \sqrt{5})/4 + k\pi/2\}$.

Áp dụng công thức tích thành tổng

$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$	$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$
$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot \left[\sin(a-b) + \sin(a+b)\right]$	

79. Giải: $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$.

Phương trình $\Leftrightarrow \sin 7x . \sin x = \sin 5x . \sin 3x$

Kết luận: $S = \{k\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

80. Giải: $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0$.

ĐS: $S = \{k\pi/5;\ k\pi/7,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

81. Giải: $\sin 4x \sin 2x + \sin 9x \sin 3x = \cos^2 x$

ĐS: $x = \{\pm\pi/12 + k\pi/6,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

82. Giải: $4 \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x$.

ĐS: $S = \{k\pi/2;\ \pi/8 + k\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

83. Giải: $\cos 8x \cos 5x = \cos 7x \cos 4x$.

84. Giải: $\cos x \cos 5x = \cos 2x \cos 4x$.

85. Giải: $\sin 7x \cos x = \sin 5x \cos 3x$.

86. Giải: $\cos 5x \sin 4x = \cos 3x \sin 2x$.

Nhóm bài toán đưa về tích số

— Các biểu thức có nhân tử chung với $\boxed{\cos x \pm \sin x}$ thường gặp là:

- $1 \pm \sin 2x = \sin^2 x \pm 2\sin x \cos x + \cos^2 x = (\sin x \pm \cos x)^2.$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x).$
- $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x).$
- $\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x \mp \sin x)(1 \pm \sin x \cos x).$
- $1 \pm \tan x = 1 \pm \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x \pm \sin x}{\cos x}\cdot$ • $1 \pm \cot x = 1 \pm \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x \pm \cos x}{\sin x}\cdot$
- $\sqrt{2}\cos(x - \pi/4) = \sqrt{2}\sin(x + \pi/4) = (\sin x + \cos x)....$

— Nhìn dưới góc độ hằng đẳng thức số 3, dạng $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, chẳng hạn:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1^2 - \cos^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$
- $\cos^3 x = \cos x.\cos^2 x = \cos x.(1^2 - \sin^2 x) = \cos x(1 - \sin x)(1 + \sin x).$
- $\sin^3 x = \sin x.\sin^2 x = \sin x.(1^2 - \cos^2 x) = \sin x(1 - \cos x)(1 + \cos x).$
- $3 - 4\cos^2 x = 3 - 4(1 - \sin^2 x) = (2\sin x)^2 - 1^2 = (2\sin x - 1)(2\sin x + 1).$
- $\sin 2x = (1 + \sin 2x) - 1 = (\sin x + \cos x)^2 - 1^2 = (\sin x + \cos x - 1)(\sin x + \cos x + 1).$
- $-\sin 2x = (1 - \sin 2x) - 1 = (\sin x - \cos x)^2 - 1^2 = (\sin x - \cos x + 1)(\sin x + \cos x - 1).$
- $2(\cos^4 x - \sin^4 x) + 1 = 3\cos^2 x - \sin^2 x = (\sqrt{3}\cos x - \sin x)(\sqrt{3}\sin x + \cos x)$.........

— Phân tích tam thức bậc hai dạng: $f(X) = aX^2 + bX + c = a.(X - X_1)\cdot(X - X_2)$ với X có thể là $\sin x,\ \cos x,$....... và $X_1,\ X_2$ là hai nghiệm của $f(X) = 0.$

87. Giải: $2\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}.$

....

....

....

....

....

....

88. Giải: $2(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x.$

....

....

....

....

....

....

89. Giải: $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x.$

....

....

....

....

....

....

90. Giải: $\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 2 = 0.$

....

....

....

....

....

....

BÀI TẬP ĐƯA VỀ TÍCH SỐ (Nâng cao)

BT 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x + \cos x = \cos 2x.$

b) $\cos 2x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0.$

c) $(\tan x + 1)\sin^2 x + \cos 2x = 0.$

d) $\sin x.(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + \cos x.$

e) $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\cdot$

f) $\cos x + \cos 3x = 1 + \sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)\cdot$

BT 2. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 1.$

b) $4\sin 2x\sin x + 2\sin 2x - 2\sin x = 4 - 4\cos^2 x.$

c) $4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4.$

d) $(\cos x + 1)(\cos 2x + 2\cos x) + 2\sin^2 x = 0.$

e) $(2\cos x + 1)(\sin 2x + 2\sin x - 2) = 4\cos^2 x - 1.$

f) $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 3) = 4\sin^2 x - 1.$

g) $(2\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) + 4\cos^2 x = 3.$

h) $2(\cos^4 x - \sin^4 x) + 1 = \sqrt{3}\cos x - \sin x.$

i) $\sqrt{3}\sin x + \cos x + 1 = 2(\sin^4 x - \cos^4 x).$

j) $\sin 2x = (\sin x + \cos x - 1)(2\sin x + \cos x + 2).$

BT 3. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x.$

b) $\sin 2x + \sqrt{3} = 2\cos x + \sqrt{3}\sin x.$

c) $\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x.$

d) $\sin 2x - \sin x = 2 - 4\cos x.$

e) $\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1 = 0.$

f) $\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 2 = 0.$

g) $\sin 2x + 1 = 6\sin x + \cos 2x.$

h) $\sin 2x - \cos 2x = 2\sin x - 1.$

i) $\sin 2x + 2\sin x + 1 = \cos 2x.$

j) $\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + \cos x.$

k) $\sin 2x - \sin x + 2\cos 2x = 1.$

l) $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x.$b

m) $\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x).$

n) $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x.$

o) $\sin 2x + 2\sin^2 x = \sin x + \cos x.$

p) $\cos 3x + \cos x = 2\sqrt{3}\cos 2x\sin x.$

q) $\cos 3x - \cos x = 2\sin x\cos 2x.$

r) $2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x + \cos x = 1.$

s) $\cos x + \tan x = 1 + \tan x\sin x.$

t) $\tan x = \sin 2x - 2\cot 2x.$

u) $4\cos^2 x - 2\sin x + 2\sin 2x - 4\cos x + 1 = 0.$

v) $4\sin^2 x - 2\sqrt{3}\cos x + 2\sin 2x = 4\sqrt{3}\sin x - 3.$

BT 4. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos x + 2\sin x(1 - \cos x)^2 = 2 + 2\sin x.$

b) $2(\cos x + \sin 2x) = 1 + 4\sin x(1 + \cos 2x).$

c) $1 - \sin x\cos x = 2\left(\sin x - \cos^2\dfrac{x}{2}\right)\cdot$

d) $\sin 2x + \cos x - \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1.$

e) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

f) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

g) $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x + \cos x.$

h) $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin^5 x + \cos^5 x).$

i) $2\sin^3 x + \cos 2x + \cos x = 0.$

j) $\sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \dfrac{5}{4}\cos 2x.$

k) $\sin 2x + 2\tan x = 3.$

l) $\cos 2x + 3\cos x - \sin x + 2 = 0.$

m) $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x.$

n) $\cos\dfrac{4x}{3} = \cos^2 x.$

ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA SỐ 01

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \tan x + \cot x + \dfrac{1}{2 + \sin x}\cdot$ b) $y = \dfrac{3\cot 2x}{\sin x - 1}\cdot$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = \cos x + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)\cdot$ b) $y = \dfrac{31}{2} - 8\sin^2 x\cos^2 x.$

c) $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 3.$ d) $y = 2\sin x - 1,\ \forall x \in [0;\pi].$

Bài 3. Tìm các nghiệm của phương trình $2\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$ trong khoảng $[0;\pi].$

Bài 4. Tìm tham số m để phương $(m^2 - m)\cos x = m - 1$ có nghiệm ?

Bài 5. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $(\sin x + 1)(2\cos 2x - \sqrt{2}) = 0.$ b) $\sin x + \sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2} = 0.$

c) $1 + \sin 4x = 2\cos^2 x.$ d) $\sin x.(1 + 2\cos 2x) = 1.$

Bài 6. Giải phương trình: $\dfrac{\cos 2x - 1}{1 - \cos x} = 0.$

ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA SỐ 02

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2\sin x + \tan x}{\sin 3x - 1}\cdot$ b) $y = \dfrac{5\cot x + 1}{\sqrt{1 - \sin 2x}}\cdot$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{4 - 2\sin^2 3x}.$ b) $y = -2\sin^2 x + 2\cos x + 9.$

Bài 3. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $2\sin(2x - 15^\circ) = \sqrt{2}$ trong đoạn $[-120^\circ;90^\circ]$?

Bài 4. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $(3\tan x + \sqrt{3})(2\sin x - 1) = 0.$ b) $\tan 3x.\tan x = 1.$

c) $4\cos^2 x = 2 + \sqrt{3}.$ d) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0.$

e) $8x^3 - 6x - \sqrt{3} = 0.$ f) $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = 2 + \sqrt{1 - x^2}.$

Bài 5. Giải phương trình:

a) $\sqrt{3}\sin x - \sin 2x = 0.$ b) $\sin^3 x\cos x - \sin x\cos^3 x = \sqrt{2}/8.$

c) $\dfrac{\sin x}{1 - \cos 2x} = 0.$ d) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\sin x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1.$

Bài 6. Giải phương trình: $2021\tan x + \cot x = 2\left(1010\sqrt{3} + \dfrac{1}{\sin 2x}\right)\cdot$

§ 3. PHÖÔNG TRÌNH LÖÔNG GIAC THÖÔNG GAP

Dạng toán 1. Phương trình bậc hai và bậc cao theo một hàm lượng giác

Quan sát và dùng các công thức biến đổi để đưa phương trình về cùng một hàm lượng giác (cùng sin hoặc cùng cos hoặc cùng tan hoặc cùng cot) với cung góc giống nhau, chẳng hạn:

Dạng	Đặt ẩn phụ	Điều kiện
$a\sin^2 X + b\sin X + c = 0$	$t = \sin X$	$-1 \le t \le 1$
$a\cos^2 X + b\cos X + c = 0$	$t = \cos X$	$-1 \le t \le 1$
$a\tan^2 X + b\tan X + c = 0$	$t = \tan X$	$X \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$a\cot^2 X + b\cot X + c = 0$	$t = \cot X$	$X \ne k\pi$

Nếu đặt $t = \sin^2 X,\ \cos^2 X$ hoặc $t = \left|\sin X\right|,\ \left|\cos X\right|$ thì điều kiện là $0 \le t \le 1.$

Nhóm 1. Phương trình bậc hai cơ bản

1. Giải phương trình: $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$

ĐS: $S = \{\pi/2 + k2\pi; -\pi/6 + k2\pi; 7\pi/6 + k2\pi\}.$

2. Giải phương trình: $4\sin^2 x + 12\sin x - 7 = 0.$

ĐS: $S = \{\pi/6 + k2\pi;\ 5\pi/6 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

3. Giải phương trình: $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0.$

Đáp số: $S = \{\pm\pi/3 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

4. Giải phương trình: $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0.$

Đáp số: $S = \{k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

5. Giải: $3\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x - 3 = 0.$

ĐS: $S = \{-\pi/6 + k\pi;\ \pi/3 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

6. Giải: $\tan^2 x + (1-\sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0.$

Đáp số: $S = \{\pi/3 + k\pi;\ -\pi/4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

7. Giải: $\sqrt{3}\cot^2 x - (1+\sqrt{3})\cot x + 1 = 0.$

Đáp số: $S = \{\pi/4 + k\pi;\ \pi/3 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

8. Giải: $\sqrt{3}\cot^2 x + (1-\sqrt{3})\cot x - 1 = 0.$

Đáp số: $S = \{\pi/4 + k\pi;\ -\pi/3 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

Nhóm 2. *Sử dụng công thức* $\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha\end{array}\right.$.

9. Giải phương trình: $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0.$

Đáp số: $S = \{-\pi/6 + k2\pi;\ 7\pi/6 + k2\pi\}.$

10. Giải phương trình: $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0.$

Đáp số: $S = \{k2\pi;\ \pm\pi/3 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

11. Giải phương trình: $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0.$

Đáp số: $S = \{\pi/6 + k2\pi;\ 5\pi/6 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

12. Giải: $2\sin^2 x + (\sqrt{3}+4)\cos x = 2\sqrt{3} + 2.$

Đáp số: $S = \{\pm\pi/6 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

13. Giải phương trình: $4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7.$

PT $\Leftrightarrow 4(\sin^2 x)^2 + 12(1-\sin^2 x) - 7 = 0$

Đáp số: $S = \{\pi/4 + k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

14. Giải phương trình: $3\sin^2 x + 2\cos^4 x = 2.$

Đáp số: $S = \{k\pi;\ \pi/4 + k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

Nhóm 3. *Sử dụng công thức* $\cos 2x = \left[\begin{array}{ll} 2\cos^2 x - 1 & (1) \\ 1 - 2\sin^2 x & (2) \end{array}\right.$ ***khi cung góc gấp đôi nhau.***

15. Giải phương trình: $2\cos 2x - 8\cos x + 5 = 0.$

PT $\Leftrightarrow 2(2\cos^2 x - 1) - 8\cos x + 5 = 0$

Đáp số: $S = \{\pm\pi/3 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

16. Giải phương trình: $\cos 2x + 5\sin x + 2 = 0.$

PT $\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$

Đáp số: $S = \{-\pi/6 + k2\pi; 7\pi/6 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

17. Giải phương trình: $\cos 2x + 9\cos x + 5 = 0.$

Đáp số: $S = \{\pm 2\pi/3 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

18. Giải phương trình: $\cos 4x + 9\sin 2x - 8 = 0.$

PT $\Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 2x) + 9\sin 2x - 8 = 0$

Đáp số: $S = \{\pi/4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

19. Giải p/trình: $5\cos x - 2\sin(x/2) + 7 = 0.$

Phương trình $\Leftrightarrow 5\cos 2\dfrac{x}{2} - 2\sin\dfrac{x}{2} + 7 = 0$

Đáp số: $S = \{\pi + k4\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

20. Giải p/trình: $\sin^2 x + \cos 2x + \cos x - 2 = 0.$

Đáp số: $S = \{k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

Nhóm 4. *Vừa hạ bậc, vừa nhân đôi khi tồn tại cung góc gấp 4 lần nhau*

- Hạ bậc: $\left[\begin{array}{l} \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \end{array}\right.$
- Nhân đôi: $\left|\begin{array}{l} \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \\ \cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 \\ \cos 6x = 2\cos^2 3x - 1 \end{array}\right.$ ....

21. Giải phương trình: $\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0$

Ta có: $\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos^2 2x - 1) + 12.\dfrac{1-\cos 2x}{2} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 - 6(1-\cos 2x) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + 6\cos 2x - 8 = 0$

Đáp số: $S = \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

22. Giải phương trình: $1 + \cos 4x - 2\sin^2 x = 0$.

Đáp số: $S = \{\pi/2 + k\pi;\ \pm\pi/6 + k\pi\}$.

23. Giải phương trình: $\cos 4x - 2\cos^2 x + 1 = 0$.

Đáp số: $S = \{k\pi;\ \pm\pi/3 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

24. Giải phương trình: $8\cos^2 x - \cos 4x = 7$.

Đáp số: $S = \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

25. Giải phương trình: $6\cos^2 3x + \cos 12x = 7$.

Phương trình $\Leftrightarrow 6\cos^2 3x + \cos(2.6x) = 7$

$\Leftrightarrow$

Đáp số: $S = \{k\pi/3,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

26. Giải: $5(1+\cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$.

PT $\Leftrightarrow 5(1+\cos x) = 2 + (\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2$

$\Leftrightarrow$

Đáp số: $S = \{\pm 2\pi/3 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

27. Giải phương trình $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \dfrac{x}{2}$

PT $\Leftrightarrow (2\cos^2 x - 1) - 3\cos x = 4.\dfrac{1+\cos x}{2}$

Đáp số: $S = \{\pm 2\pi/3 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

28. Giải phương trình $\cos 2x + 2\cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$

Đáp số: $S = \{\pm \pi/3 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Nhóm 5. *Sử dụng công thức liên quan đến tan, cot đưa về phương trình bậc hai*

$$\tan x.\cot x = 1 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\cot x} \quad \& \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}.$$
$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad \& \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$$

29. Giải phương trình: $\tan x + \cot x = 2$.

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$.

Ta có $\tan x + \cot x = 2 \Leftrightarrow \tan x + \dfrac{1}{\tan x} = 2$

$\Leftrightarrow$

Đáp số: $S = \{\pi/4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

30. Giải phương trình: $2\tan x + \cot x - 3 = 0$.

Đáp số: $S = \{\pi/4 + k\pi;\ \arctan 1/2 + k\pi\}$.

31. Giải phương trình: $5\tan x - 2\cot x - 3 = 0$.

Đáp số: $S = \{\pi/4 + k\pi;\ \arctan(-2/5) + k\pi\}$.

32. Giải: $\sqrt{3}\tan x - 6\cot x + 2\sqrt{3} - 3 = 0$.

Đáp số: $S = \{\pi/3 + k\pi;\ \arctan(-2) + k\pi\}$.

33. Giải phương trình: $\dfrac{3}{\cos^2 x} = 3 + 2\tan^2 x.$

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Phương trình $\Leftrightarrow 3(1 + \tan^2 x) = 3 + 2\tan^2 x$

$\Leftrightarrow$ ....

Đáp số: $S = \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

34. Giải phương trình: $\dfrac{4}{\cos^2 x} + \tan x = 7.$

Đáp số: $S = \{-\pi/4 + k\pi;\ \operatorname{arctan}(3/4) + k\pi\}.$

35. Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} = 3\cot x + \sqrt{3}.$

Đáp số: $S = \{\pi/2 + k\pi;\ \pi/6 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

36. Giải phương trình: $\dfrac{1}{\sin^2 x} = \cot x + 3.$

Đáp số: $S = \{-\pi/4 + k\pi;\ \operatorname{arccot}(2) + k\pi\}.$

37. Giải phương trình: $9 + \dfrac{4}{1 + \tan^2 x} = 13\cos x.$

Điều kiện: $\cos x \neq 0.$ Áp dụng công thức:

$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \dfrac{1}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x$

Phương trình trở thành: $9 + 4\cos^2 x = 13\cos x$

Đáp số: $S = \{k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

38. Giải phương trình: $2\tan^2 x + 3 = \dfrac{3}{\cos x}\cdot$

Đáp số: $S = \{k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

Nhóm 6. Phương trình quy về phương trình bậc hai (vận dụng & vận dụng cao)

39. Giải: $4\cos^2(6x-2)+16\cos^2(1-3x)=13.$

PT $\Leftrightarrow 4\left[\cos 2.(3x-1)\right]^2+16\left[\cos(3x-1)\right]^2=13$

$\Leftrightarrow$ ....

40. Giải: $\cos(2x+150^\circ)+3\sin(15^\circ-x)=1.$

....

41. Giải: $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)+4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=4.$

Nhận xét: $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\cdot$

PT $\Leftrightarrow \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)+4\cos\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)\right]=4$

$\Leftrightarrow \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)+4\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)-4=0$

$\Leftrightarrow$ ....

42. Giải: $5\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=4\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}-x\right)-9.$

....

43. Giải: $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x-\sqrt{3}\sin x+4=\cos x.$

PT $\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+(\sqrt{3}\sin x+\cos x)=4$

Đặt $t=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

Vì $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\in[-1;1]\Rightarrow t\in[-2;2].$

Khi đó $t^2=(\sqrt{3}\sin x+\cos x)^2$

$\Leftrightarrow t^2=\sqrt{3}\sin 2x+(2\sin^2 x-1)+2$

$\Leftrightarrow t^2-2=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x.$

Phương trình trở thành $t^2+t-6=0$

$\Leftrightarrow$ ....

44. Giải: $\sqrt{3}\sin 2x+\sqrt{3}\sin x+\cos 2x-\cos x=2.$

....

45. $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x + 4 = 4.(\sqrt{3}\sin x + \cos x).$

46. $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x + 2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x = 2.$

47. Giải: $2\left(\cos^2 x + \dfrac{4}{\cos^2 x}\right) + 9\left(\dfrac{2}{\cos x} - \cos x\right) = 1.$

Điều kiện: $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Đặt $\dfrac{2}{\cos x} - \cos x = t \Rightarrow \left(\dfrac{2}{\cos x} - \cos x\right)^2 = t^2$

$\Leftrightarrow \cos^2 x + \dfrac{4}{\cos^2 x} = t^2 + 4.$ Khi đó phương trình trở thành: $2(t^2 + 4) + 9t - 1 = 0$

ĐS: $S = \{\pi + k2\pi;\ \ \pm 2\pi/3 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

48. Giải: $4\left(\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right) + 4\sin x + \dfrac{4}{\sin x} = 7.$

ĐS: $S = \{-\pi/6 + k2\pi;\ 7\pi/6 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

49. Giải: $\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x} + 2 = 2\cos x + \dfrac{2}{\cos x}\cdot$

Đáp số: $S = \{k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

50. Giải: $9\left(\dfrac{2}{\cos x} + \cos x\right) + 2\left(\cos^2 x + \dfrac{4}{\cos^2 x}\right) = 1.$

Đáp số: $S = \{\pm 2\pi/3 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

51. Giải phương trình $\cos\dfrac{4x}{3} = \cos^2 x.$

Phương trình $\Leftrightarrow \cos 2.\left(\dfrac{2x}{3}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2.\left(\dfrac{2x}{3}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 3.\left(\dfrac{2x}{3}\right)$

ĐS: $S = \{k3\pi;\ \ \pm\pi/4 + k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

52. Giải: $\sin\left(\dfrac{3\pi}{10} - \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{3x}{2}\right).$

PT $\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{3\pi}{10} - \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sin\left[\pi - 3\cdot\left(\dfrac{3\pi}{10} - \dfrac{x}{2}\right)\right]$

ĐS: $S = \{3\pi/5 - k2\pi;\ 2\pi/5 - k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

53. Giải phương trình: $2\cos^2\dfrac{3x}{5} + 1 = 3\cos\dfrac{4x}{5}\cdot$

$\{k4\pi/3; \pm\alpha + k4\pi/3, \cos(3\alpha/2) = (1-\sqrt{21})/4\}.$

54. Giải phương trình: $\cos\dfrac{8x}{3} = \cos^2\dfrac{2x}{3}\cdot$

$\{3\pi/4 + k3\pi/2; \pm\alpha + k2\pi, \cos(4\alpha/3) = 3/4\}.$

55. Giải: $3\cos 4x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0.$

56. Giải: $4 + 3\sin x + \sin^3 x = 3\cos^2 x + \cos^6 x.$

Đề rèn luyện về nhà số 01

Giải các phương trình lượng giác sau:

1) $2\cos^2 x + (\sqrt{2}-2)\cos x - \sqrt{2} = 0.$ **ĐS**: $S = \left\{k2\pi;\ \pm\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

2) $-2\sin^3 x + \sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$ **ĐS**: $S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

3) $6 - 4\cos^2 x - 9\sin x = 0.$ **ĐS**: $S = \left\{\arcsin\dfrac{1}{4} + k2\pi;\ \pi - \arcsin\dfrac{1}{4} + k2\pi\right\}.$

4) $4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7$ **ĐS**: $S = \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

5) $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0.$ **ĐS**: $S = \left\{\pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi;\ \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

6) $4\cos 2x = 5\sin x + 1.$ **ĐS**: $\left\{-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \arcsin\dfrac{3}{8} + k2\pi; \pi - \arcsin\dfrac{3}{8} + k2\pi\right\}.$

7) $5\tan x - 2\cot x - 3 = 0.$ **ĐS**: $S = \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ \arctan\left(-\dfrac{2}{5}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

8) $1 + \cos 4x - 2\sin^2 x = 0.$ **ĐS**: $S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

9) $\sin^2 8x + 3\sin 4x\cos 4x - \dfrac{5}{2} = 0.$ **ĐS**: $S = \left\{\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Đề rèn luyện về nhà số 02

Giải các phương trình lượng giác sau:

1) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0.$ **ĐS**: $S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi;\ \dfrac{\pi}{6} + k2\pi;\ \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\right\}.$

2) $3\cot^2 x + 2\sqrt{3}\cot x + 1 = 0.$ **ĐS**: $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$

3) $4\sin x + 3 = 2(1 - \sin x)\tan^2 x.$ **ĐS**: $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \ \vee\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$

4) $\cos 2x - 4\cos x + \dfrac{5}{2} = 0.$ **ĐS**: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$

5) $-\dfrac{1}{2}\tan^2 x + \dfrac{2}{\cos x} - \dfrac{5}{2} = 0.$ **ĐS**: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$

6) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\cos x}\cdot$ **ĐS**: $x = k\pi \ \vee\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$

7) $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2\dfrac{x}{2}\cdot$ **ĐS**: $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$

8) $\sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \sin^2 x - \dfrac{1}{\sin^2 x}\cdot$ **ĐS**: $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$

9) $2\cos^2 x\left(1 + \tan x\tan\dfrac{x}{2}\right) = \cos 2x - 3.$ **10)** $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} - \tan x - 2\sqrt{3} = \sin x\left(1 + \tan x\tan\dfrac{x}{2}\right)\cdot$

Dạng toán 2. Phương trình lượng giác bậc nhất đối với sin và cos (pt cổ điển)

Dạng tổng quát: $\boxed{a\sin x + b\cos x = c}$ $(*)$, $\left(a,\ b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\right)$.

Điều kiện có nghiệm của phương trình: $a^2 + b^2 \ge c^2$, (kiểm tra trước khi giải)

Phương pháp giải:

- Chia 2 vế $\sqrt{a^2+b^2} \ne 0$, thì $(*) \Leftrightarrow \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $(**)$
- Giả sử: $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \left(\alpha \in [0;2\pi]\right)$ thì:

$(**) \Leftrightarrow \sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$: dạng cơ bản.

Lưu ý. Hai công thức sử dụng nhiều nhất là: $\begin{cases}\sin a\cdot\boxed{\cos b} \pm \cos a\cdot\sin b = \sin(a\pm b)\\ \cos a\cdot\boxed{\cos b} \pm \sin a\cdot\sin b = \cos(a\mp b)\end{cases}$.

Nhóm 1. Dạng cơ bản $a\sin X + b\cos X = c$.

57. Giải phương trình: $\sin x - \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{3}$.

ĐK có nghiệm: $1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 > (-\sqrt{3})^2$: đúng.

Chia 2 vế cho $\sqrt{a^2+b^2} = 2$ thì

phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x\cos\dfrac{\pi}{3} - \cos x\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

Kết luận: $S = \{k2\pi;\ 5\pi/3 + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

58. Giải phương trình: $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$.

Đáp số: $S = \{-\pi/6 + k2\pi;\ \pi/2 + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

59. Giải phương trình: $\sqrt{3}\sin x + \cos x = -1$.

ĐS: $S = \{-\pi/3 + k2\pi;\ \pi + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

60. Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$.

ĐS: $S = \{\pi/12 + k2\pi;\ -5\pi/12 + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

61. Giải phương trình: $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$.

62. Giải phương trình: $\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}$.

ĐS: $S = \{7\pi/24 + k\pi;\ \pi/24 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

ĐS: $S = \{5\pi/36 + k2\pi/3;\ 11\pi/36 + k2\pi/3\}$.

63. Giải phương trình $\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \sin x = 2$.

Áp dụng công thức phụ: $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ thì phương trình đã cho trở thành:

ĐS: $S = \{\pi/3 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

64. Giải: $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2x\right) + \sqrt{3}\sin(\pi - 2x) = 1$.

Áp dụng công thức hơn kém $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$ và $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ thì phương trình trở thành:

ĐS: $S = \{\pi/3 + k\pi;\ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

65. * Giải: $\sqrt{3}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}$.

Nhận xét: Ta có: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}$.

PT $\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left[\dfrac{\pi}{2} - \left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}$

ĐS: $S = \{-\pi/6 + k2\pi;\ \pi/3 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

66. * Giải: $\sqrt{3}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = 2$.

ĐS: $S = \{\pi/3 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

67. *Giải $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x + 2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}$

ĐS: $S = \{5\pi/24 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

68. *Giải $2\sqrt{3}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\sqrt{3}$

ĐS: $S = \{\pi/2 + k2\pi;\ 5\pi/6 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

69. Giải $\sin 3x\cos x - \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3} + \cos 3x\sin x$

$\Leftrightarrow (\sin 3x\cos x - \cos 3x\sin x) - \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3}$

ĐS: $S = \{\pi/3 + k\pi;\ \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

70. Giải $\cos 7x\cos 5x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 - \sin 7x\sin 5x$

ĐS $S = \{-\pi/3 + k\pi;\ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Nhóm 2. **Dạng**

- $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\beta x + \gamma)$
- $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\beta x + \gamma)$

$(a^2 + b^2 \neq 0)$

71. Giải: $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\dfrac{\pi}{12}\cdot$

Chia 2 vế cho $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$ phương trình trở thành $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x = \sin\dfrac{\pi}{12}$

$\Leftrightarrow$

ĐS: $S = \{-\pi/12 + k2\pi;\ 3\pi/4 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

72. Giải: $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\cdot$

ĐS: $S = \{\pi/4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

73. Giải: $\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\sin 2x.$

ĐS: $S = \{\pi/3 + k2\pi;\ 4\pi/15 + k2\pi/5,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

74. Giải: $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos 3x.$

ĐS: $S = \{\pi/6 + k\pi;\ \pi/12 + k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

Nhóm 3. Dạng $a\sin(mx) + b\cos(mx) = c\sin(nx) + d\cos(nx)$

$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \neq 0$

75. Giải: $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}\sin x + \cos x.$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$$

ĐS: $x = -2\pi/3 + k2\pi \ \vee\ x = k2\pi/3,\ k \in \mathbb{Z}.$

76. Giải: $\sqrt{3}(\cos 2x + \sin 3x) = \sin 2x + \cos 3x.$

ĐS: $x = -\pi/6 + k2\pi \ \vee\ x = -\pi/10 + k2\pi/5.$.

77. Giải: $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x).$

ĐS: $x = \pi/12 + k\pi \ \vee\ x = \pi/8 + k\pi/2.$

78. Giải: $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x).$

ĐS: $x = \pi/4 + k\pi \ \vee\ x = \pi/12 + k\pi/7.$

Đề rèn luyện về nhà số 03

Câu 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2.$ **ĐS**: $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

b) $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2},\ \forall x \in \left(\dfrac{2\pi}{5};\dfrac{6\pi}{7}\right).$ **ĐS**: $x = \dfrac{53\pi}{84} \vee x = \dfrac{5\pi}{12} \vee x = \dfrac{59\pi}{84}\cdot$

c) $2\cos 3x + \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0.$ **ĐS**: $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

d) $2\sin 17x + \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 0.$ **ĐS**: $x = -\dfrac{\pi}{66} + \dfrac{k\pi}{11} \vee x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{k\pi}{6}\cdot$

e) $(\sqrt{3}-1)\sin x + (\sqrt{3}+1)\cos x = 2\sqrt{2}\sin 2x.$ **ĐS**: $x = \dfrac{5\pi}{12} + k2\pi \vee x = \dfrac{7\pi}{36} + \dfrac{k2\pi}{3}\cdot$

f) $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x).$ **ĐS**: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{7}\cdot$

g) $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x + 2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}.$ **ĐS**: $x = \dfrac{5\pi}{24} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Câu 2. Tìm tất cả các tham số m để phương trình $m\cos 2x + (m+1)\sin 2x = m+2$ có nghiệm ?

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2\cos x - \sin x + 1}{2 + \sin x + \cos x}$?

Đề rèn luyện về nhà số 04

Câu 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2x\right) + \sqrt{3}\sin(\pi - 2x) = 1.$ **ĐS**: $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi.$

b) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right).$ **ĐS**: $x = k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$

c) $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x\cos x.$ **ĐS**: $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \vee x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k2\pi}{3}\cdot$

d) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos\left(\dfrac{9\pi}{2} - x\right) + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} + x\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$ **ĐS**: $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi.$

e) $1 + \cot 2x = \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}\cdot$ **ĐS**: $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

f) $\sqrt{3} - 2\cos^2 x(\sin 2x - \cos 2x\tan x) = \sqrt{3}\cos 2x.$ **ĐS**: $x = k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

g) $4\sin^3 x\cos 3x + 4\cos^3 x\sin 3x + 3\sqrt{3}\cos 4x = 3.$ **ĐS**: $x = -\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} \vee x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}\cdot$

Câu 2. Tìm tất cả các tham số m để phương trình $\sin x - \sqrt{5}\cos x + 1 = m(2 + \sin x)$ có nghiệm ?

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{3\cos x + 2\sin x + 1}{2 + \sin x}$?

Dạng toán 3. Phương trình lượng giác đẳng cấp

Dạng tổng quát: $\boxed{a.\sin^2 X + b.\sin X\cos X + c.\cos^2 X = d}$ (1) $\forall a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$.

Nhận dạng: *Đồng bậc hoặc lệch nhau hai bậc của hàm sin hoặc cosin (tan và cotan được xem là bậc 0).*

- Bước 1. Kiểm tra $X = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \cos X = 0$ và $\sin^2 X = 1$ có phải là nghiệm hay không ?
- Bước 2. Khi $X \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$. Chia hai vế (1) cho $\cos^2 X \neq 0$:

$$(1) \Leftrightarrow a\frac{\sin^2 X}{\cos^2 X} + b\frac{\sin X\cos X}{\cos^2 X} + c\frac{\cos^2 X}{\cos^2 X} = \frac{d}{\cos^2 X}$$
$$\Leftrightarrow a\tan^2 X + b\tan X + c = d(1+\tan^2 X)$$

- Bước 3. Giải phương trình bậc hai theo $\tan X$.

Nhóm 1. Đẳng cấp bậc hai

79. Giải: $2\cos^2 x + 4\sin x\cos x - 4\sin^2 x = 1$.

Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ thì $\cos x = 0$ và $\sin^2 x = 1$.

Phương trình trở thành $-4 = 1$: sai $\Rightarrow$ loại.

Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia 2 vế cho $\cos^2 x \neq 0$ thì:

PT $\Leftrightarrow$ ...

Đáp số: $S = \{\pi/4 + k\pi;\ \arctan(-1/5) + k\pi\}$.

80. Giải: $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2 x = -4$.

Đáp số: $S = \{\pi/2 + k\pi;\ \pi/6 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

81. Giải: $4\cos^2 x + 3\sin x\cos x - \sin^2 x = 3$.

ĐS: $S = \{\pi/4 + k\pi;\ \arctan(-1/4) + k\pi\}$.

82. Giải: $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2$.

ĐS: $S = \{\pi/2 + k\pi;\ \pi/6 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

83. Giải: $\sin^2 x + 2\cos^2 x = 3\sin x\cos x.$

ĐS: $S = \{\pi/4 + k\pi;\ \arctan 2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

84. Giải: $\sin^2 x - 3\sin x\cos x = -1.$

ĐS: $S = \{\pi/4 + k\pi;\ \arctan 0{,}5 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

Nhóm 2. Đẳng cấp bậc ba, bậc bốn

85. Giải phương trình: $\cos x = 2\sin^3 x.$

Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \cos x = 0$ và $\sin^3 x = 1.$

Khi đó phương trình: $0 = 2.1^3$: sai $\Rightarrow$ loại.

Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia 2 vế của cho $\cos^3 x \neq 0$ thì

PT $\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\cos x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = 2\dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x}$

$\Leftrightarrow 1 + \tan^2 x = 2\tan^3 x$

$\Leftrightarrow$

ĐS: $x = \pi/4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

86. Giải phương trình: $\sin x = 2\cos^3 x.$

ĐS: $x = \pi/4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

87. Giải: $3\cos^4 x - 4\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x = 0.$

ĐS: $S = \{\pm\pi/4 + k\pi;\ \pm\pi/3 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

88. $\tan x\sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x\cos x).$

ĐS: $S = \{-\pi/4 + k\pi;\ \pm\pi/3 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

Đề rèn luyện về nhà số 05

Câu 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $4\sqrt{3}\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 2\sin^2 x + \dfrac{5}{2}\cdot$ **ĐS**: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \ \vee \ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

b) $25\sin^2 x + 15\sin 2x + 9\cos^2 x = 25.$ **ĐS**: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \arctan\dfrac{8}{15} + k\pi.$

c) $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2.$ **ĐS**: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ \vee \ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi.$

d) $7\cos x = 4\cos^3 x + 4\sin 2x.$ **ĐS**: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ \vee \ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi.$

e) $\cos^3 x + 2\sin x\cos^2 x - 3\sin^3 x = 0.$ **ĐS**: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

f) $3\cos^4 x - 4\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x = 0.$ **ĐS**: $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \ \vee \ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi.$

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị tham số m để phương trình $3\sin^2 x + m\sin 2x - 4\cos^2 x = 0$ có nghiệm ?

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 5\cos^2 x + 2$?

Đề rèn luyện về nhà số 06

Câu 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin^2 x + 2\cos^2 x = 3\sin x\cos x.$ **ĐS**: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ x = \arctan 2 + k\pi.$

b) $2\sin^2 x - \sin x\cos x - \cos^2 x = 2.$ **ĐS**: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ x = \arctan(-3) + k\pi.$

c) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x = -1.$ **ĐS**: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ x = \arctan\dfrac{1}{2} + k\pi.$

d) $4\sin^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\sin x.$ **ĐS**: $x = k\pi;\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

e) $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x\cos x.$ **ĐS**: $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi.$

f) $\cos^3 x + \sin x - 3\sin^2 x\cos x = 0.$ **ĐS**: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan\left(-\dfrac{1}{2}\right) + k\pi.$

g) $4\sin^4 x + 4\cos^4 x + 5\sin 2x\cos 2x + \cos^2 2x = 6.$ **ĐS**: $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}; x = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{1}{5} + \dfrac{k\pi}{2}\cdot$

h) $\sin^2 x(1 + \tan x) - 3 = 3\sin x(\cos x - \sin x).$ **ĐS**: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi.$

Câu 2. Tìm tất cả m để phương trình $\sin^2 x + (2m-2)\sin x\cos x - (1+m)\cos^2 x = m$ có nghiệm ?

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \left|\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x + 3\right|$?

Dạng toán 4. Phương trình lượng giác đối xứng

① **Dạng 1.** $\boxed{a\cdot(\sin x\pm\cos x)+b\cdot\sin x\cos x+c=0}$ **(dạng tổng/hiệu – tích)**

$\xrightarrow{PP}$ Đặt $t=\sin x\pm\cos x,\ t\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]\Rightarrow t^2=\cdots$ và viết $\sin x\cos x$ theo t.

Lưu ý, khi đặt $t=\left|\sin x\pm\cos x\right|$ thì điều kiện là: $0\le t\le\sqrt{2}$.

② **Dạng 2.** $\boxed{a\cdot(\tan^2x+\cot^2x)+b\cdot(\tan x\pm\cot x)+c=0}$

$\xrightarrow{PP}$ Đặt $t=\tan x\pm\cot x,\ \left|t\right|\ge 2\Rightarrow t^2=\cdots$ và biểu diễn $\tan^2x+\cot^2x$ theo t và lúc này thường sử dụng: $\tan x\cot x=1,\ \tan x+\cot x=\dfrac{2}{\sin 2x}$.

89. Giải: $\sin x-\cos x+2\sin 2x+1=0$.

Đặt $\sin x-\cos x=t$ thì $t\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$.

$\Rightarrow(\sin x-\cos x)^2=t^2$

$\Leftrightarrow\sin^2x-2\sin x\cos x+\cos^2x=t^2$

$\Leftrightarrow 1-\sin 2x=t^2\Leftrightarrow\sin 2x=1-t^2$.

Phương trình trở thành: $t+2(1-t^2)+1=0$

$\Leftrightarrow$ ....

90. Giải: $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1$.

ĐS: $x=k2\pi\ \vee\ x=\pi/2+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

91. Giải: $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-\sin x\cos x=1$.

ĐS: $x=k2\pi\ \vee\ x=\pi/2+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

92. Giải: $\sin 2x-2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=5$.

ĐS: $x=-3\pi/4+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

93. Giải: $5\sin 2x+12=12(\sin x-\cos x)$.

ĐS: $S=\{k2\pi;\ \pi/2+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

94. Giải: $\sin x\cos x=6(\sin x-\cos x-1)$.

ĐS: $S=\{\pi+k2\pi;\ -\pi/2+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

95. Giải: $\cos x\sin x+\left|\cos x+\sin x\right|=1$.

96. Giải: $\left|\cos x-\sin x\right|+3\sin 2x=1$.

Đặt $\left|\sin x + \cos x\right| = t$ thì $t \in [0; \sqrt{2}]$.

Suy ra $\left|\sin x + \cos x\right|^2 = t^2$

$\Leftrightarrow$

ĐS: $S = \{k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

ĐS: $S = \{k2\pi;\ \pm\pi/2 + k2\pi;\ -\pi + k2\pi\}$.

97. Giải phương trình: $\tan^2 x + \cot^2 x - (\tan x - \cot x) - 2 = 0$.

Điều kiện: $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Đặt $\tan x - \cot x = t$. Suy ra: $(\tan x - \cot x)^2 = t^2$

$\Leftrightarrow \tan^2 x - 2\tan x \cot x + \cot^2 x = t^2 \Leftrightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 + 2$.

Đáp số: $S = \{\pi/4 + k\pi/2;\ \arctan\left[(1 \pm \sqrt{5})/2\right] + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

98. Giải phương trình: $3\tan^2 x + 4\tan x + 4\cot x + 3\cot^2 x + 2 = 0$.

Đáp số: $S = \{-\pi/4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Đề rèn luyện về nhà số 07

Giải các phương trình lượng giác sau:

1) $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-1=\sin x\cos x.$ **ĐS**: $x=k2\pi \ \vee\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

2) $4\sin x\cos x+1=\cos x-\sin x.$ **ĐS**: $x=k2\pi \ \vee\ x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

3) $\left|\cos x-\sin x\right|+6\sin x\cos x=1.$ **ĐS**: $x=k2\pi;\pm\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;x=-\pi+k2\pi.$

4) $\cos x\sin x+\left|\cos x+\sin x\right|=1.$ **ĐS**: $x=\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$

5) $\tan^2 x+\cot^2 x+2\tan x+2\cot x=6.$ **ĐS**: $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi;x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi;x=\dfrac{7\pi}{12}+k\pi.$

6) $\dfrac{2}{\cos^2 x}+2\cot^2 x+5(\tan x+\cot x)+4=0.$ **ĐS**: $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

7) $\sin^3 x+\cos^3 x=2(\sin x+\cos x)-1.$ **ĐS**: $x=k2\pi \ \vee\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

8) $3(\tan x+\cot x)=2(2+\sin 2x).$ **ĐS**: $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

9) $2\sin^3 x-\cos 2x+\cos x=0.$ **ĐS**: $x=k2\pi \ \vee\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Đề rèn luyện về nhà số 08

Giải các phương trình lượng giác sau:

1) $\sin x+\cos x+\sin x\cos x-1=0.$ **ĐS**: $x=k2\pi \ \vee\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

2) $5\sin 2x+12=12(\sin x-\cos x).$ **ĐS**: $x=k2\pi \ \vee\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

3) $\left|\sin x-\cos x\right|+8\sin x\cos x=1.$ **ĐS**: $x=\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$

4) $\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{3}{2}(\tan x+\cot x)=1.$ **ĐS**: $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

5) $(1+\cos x)(1+\sin x)=2.$ **ĐS**: $x=k2\pi \ \vee\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

6) $(1+\sin^2 x)\cos x+(1+\cos^2 x)\sin x=1+\sin 2x.$ **ĐS**: $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ x=k2\pi;\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi.$

7) $2\cos 2x+\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x=2(\sin x+\cos x).$ **ĐS**: $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ x=k2\pi;\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi.$

8) $\cos^3 x-\sin^3 x=1.$ **ĐS**: $x=k2\pi \ \vee\ x=-\pi/2+k2\pi.$

9) $\cos^3 x+\sin^3 x=\cos 2x.$ **ĐS**: $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ x=k2\pi;\ x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi.$

Dạng toán 5. Một số dạng khác

Nhóm 1. Phương trình dạng: $\boxed{m.\sin 2x + n.\cos 2x + p.\sin x + q.\cos x + r = 0}$

- Ta luôn viết $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, còn: $\cos 2x = \left[\begin{array}{ll} = \cos^2 x - \sin^2 x & (1) \\ = 2\cos^2 x - 1 & (2) \\ = 1 - 2\sin^2 x & (3) \end{array}\right.$
- Nếu thiếu $\sin 2x$, ta sẽ biến đổi $\cos 2x$ theo (1) và lúc này thường sẽ đưa được về dạng: $A^2 = B^2 \Leftrightarrow (A-B)(A+B) = 0.$
- Nếu theo (2) được: $\sin x.(2m.\cos x + p) + \underbrace{(2n.\cos^2 x + q.\cos x + r - n)}_{(i)} = 0$ và theo (3) được: $\cos x(2m.\sin x + q) + \underbrace{(-2n.\sin^2 x + p.\sin x + r + n)}_{(ii)} = 0.$

  Khi đó ta sẽ phân tích (i), (ii) thành nhân tử dựa vào: $at^2 + bt + c = a(t - t_1)(t - t_2)$ với t_1, t_2 là hai nghiệm của $at^2 + bt + c = 0$ để xác định lượng nhân tử chung.

99. Giải: $\cos 2x + 3\cos x - \sin x + 2 = 0.$

PT $\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 3\cos x - \sin x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x + 2\dfrac{3}{2}\cos x + \dfrac{9}{4} = \sin^2 x + 2\dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{4}$

....

ĐS: $x = \pi/2 + k2\pi,\ x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

100. Giải: $5 + \cos 2x = 2\cos x.(3 + 2\tan x).$

....

ĐS: $x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

101. Giải: $3\sin x - \cos x + 2 - \cos 2x = \sin 2x.$

PT $\Leftrightarrow 3\sin x - \cos x + 2 - (1 - 2\sin^2 x) = \sin 2x$

$\Leftrightarrow (2\sin^2 x + 3\sin x + 1) = \cos x + 2\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(2\sin x + 1) = \cos x(1 + 2\sin x)$

$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(\sin x - \cos x + 1) = 0$

....

ĐS: $\{-\pi/6 + k2\pi; 7\pi/6 + k2\pi; k2\pi; 3\pi/2 + k2\pi\}.$

102. Giải: $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x = 1.$

....

ĐS: $S = \{\pi/6 + k2\pi;\ 5\pi/6 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

103. Giải: $\sin 2x + 2\cos 2x = 1 + \sin x - 4\cos x.$

ĐS: $x = \pi/3 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

104. Giải: $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$

ĐS: $x = \pi/6 + k2\pi,\ x = 5\pi/6 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

105. Giải: $\sin 2x + \cos 2x - 3\cos x + 2 = \sin x.$

ĐS: $x = \pm\pi/3 + k2\pi,\ x = k2\pi,\ x = \pi/2 + k2\pi.$

106. Giải: $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x + \sqrt{3}(\sin x - 3) = 7\cos x.$

ĐS: $x = \pm 5\pi/6 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

107. Giải: $5\cos x + \sin x - 3 = \sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right).$

ĐS: $x = \pm\pi/3 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

108. Giải: $\sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x + 3\cos x - 2.$

ĐS: $x = -\pi/2 + k2\pi,\ x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Nhóm 2: Phương trình có chứa $R(...,\tan X, \cot X, \sin 2X, \cos 2X, \tan 2X,...)$, sao cho cung của sin, cos gấp đôi cung của tan hoặc cotan. Lúc đó đặt $t = \tan X$ và sẽ biến đổi:

- $\sin 2X = 2\sin X\cos X = 2\cdot\dfrac{\sin X}{\cos X}\cdot\cos^2 X = \dfrac{2\tan X}{1+\tan^2 X} = \dfrac{2t}{1+t^2}\cdot$
- $\cos 2X = 2\cos^2 X - 1 = 2\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2 X} - 1 = \dfrac{1-\tan^2 X}{1+\tan^2 X} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\cdot$
- $\tan 2X = \dfrac{\sin 2X}{\cos 2X} = \dfrac{2t}{1-t^2}$ và $\cot 2X = \dfrac{1-t^2}{2t}\cdot$

Từ đó thu được phương trình bậc 2 hoặc bậc cao theo t, giải ra sẽ tìm được $t \Rightarrow x$.

☞ **Lưu ý**. Trong một số trường hợp, ta có thể giải bằng cách đưa về phương trình tích số.

109. Giải $(1-\tan x)(1+\sin 2x) = 1+\tan x$.

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Đặt $\tan x = t \Rightarrow \sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2}\cdot$

Phương trình đã cho trở thành:

$$(1-t)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right) = 1+t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=0 \end{array}\right.\cdot$$

110. Giải phương trình: $\sin 2x + 2\tan x = 3$.

ĐS: $x = \pi/4 + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

111. Giải phương trình $\cos 2x + \tan x = 1$.

ĐS: $x = k\pi \ \vee\ x = \pi/4 + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

112. Giải phương trình $1 + 3\tan x = 2\sin 2x$

ĐS: $x = -\pi/4 + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

113. Giải phương trình: $\cos x + \tan\dfrac{x}{2} = 1$.

ĐS: $x = k2\pi \ \vee\ x = \pi/2 + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

114. Giải phương trình: $1 + \cos x = \tan\dfrac{x}{2}\cdot$

ĐS: $x = \pi/2 + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Nhóm 3: Áp dụng $\begin{cases} \tan(x+a)\tan(b-x)=1 \text{ khi } a+b=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ \cot(x+a)\cot(b-x)=1 \text{ khi } a+b=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}$ hay $\tan(a\pm b)=\dfrac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a\tan b}$

115. Giải phương trình: $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\sin 3x=\sin x+\sin 2x.$

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} \cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\neq 0 \\ \cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{\pi}{3}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x-\dfrac{\pi}{6}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x\neq\dfrac{2\pi}{3}+k\pi \end{cases} \Rightarrow x\neq\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$

Ta có: $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\tan\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\right]\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cot\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-1.$

Khi đó phương trình trở thành $-\sin 3x=\sin x+\sin 2x\Leftrightarrow(\sin 3x+\sin x)+\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow$ ....

....

....

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $x=k\pi/2,\ x=\pm 2\pi/3+k2\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$.

116. Giải phương trình: $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{7}{8}\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right).\cot\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right).$

....

....

....

....

....

Đáp số: $x=\pi/12+k\pi/2,\ k\in\mathbb{Z}$.

117. Giải phương trình: $\sin^3 x-\cos^3 x=\cos 2x\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right).$

....

....

....

....

....

....

Đáp số: $x=\pi/2+k2\pi\ \vee\ x=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Nhóm 4. Đặt số đo cung phức tạp để đưa về phương trình quen thuộc

118. Giải phương trình: $\tan^3\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\tan x-1.$

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x-\dfrac{\pi}{4}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\end{cases}$ $(k\in\mathbb{Z}).$

Đặt $t=x-\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow x=t+\dfrac{\pi}{4}$ và áp dụng công thức $\tan(a\pm b)=\dfrac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a.\tan b}$ thì phương trình trở thành $\tan^3 t=\tan\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)-1\Leftrightarrow\tan^3 t=\dfrac{\tan t+1}{1-\tan t}-1$

$\Leftrightarrow\tan^4 t-\tan^3 t+2\tan t=0\Leftrightarrow\tan t.(\tan^3 t-\tan^2 t+2)=0$

$\Leftrightarrow$ ....

....

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $x=\pi/4+k\pi,\ x=k\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$. ....

119. Giải phương trình: $8\cos^3\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos 3x.$

....

....

....

....

Đáp số: $x=\pi/2+k\pi,\ x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Đề rèn luyện về nhà số 09

1) $\sin 2x+\cos 2x=3\sin x+\cos x+2.$ **ĐS**: $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\ x=\pi+k2\pi.$

2) $(1+\tan x)(1-\sin 2x)=1-\tan x.$ **ĐS**: $x=k\pi\ \vee\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

3) $\dfrac{\sin^4 2x+\cos^4 2x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}=\cos^4 4x.$ **ĐS**: $x=\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$

4) $\sqrt{2}\sin^3\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin x.$ **ĐS**: $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

5) $\dfrac{\sin 3x}{3}=\dfrac{\sin 5x}{5}\cdot$ **ĐS**: $x=k\pi\ \vee\ x=\pm\arccos\dfrac{2}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

6) $4\cos^2 x+3\tan^2 x+2\sqrt{3}\tan x+4=4\sqrt{3}\cos x.$ **ĐS**: $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

7) $\sin^2 2x+2\sin 2x+\dfrac{1}{\cos^2 x}+2\tan x+1=0.$ **ĐS**: $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

§ 4. ÔN TẬP CHƯƠNG 1

Đề ôn tập số 01 (tự luận)

Câu 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{\cot x}{2\sin x-1}\cdot$ **ĐS**: $\mathbb{R}\backslash\left\{k\pi;\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\right\}$

b) $y=\tan x+\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}}\cdot$ **ĐS**: $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2}\right\}.$

Câu 2. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{4}{1+2\sin^2 x}\cdot$ **ĐS**: $\min y=\dfrac{4}{3};\ \ \max y=4.$

b) $y=4-2\sin 2x$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{12};\dfrac{7\pi}{12}\right].$ **ĐS**: $\min y=2,\ \ \max y=5.$

c) $y=\dfrac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4}\cdot$ **ĐS**: $\min y=\dfrac{2}{11};\ \ \max y=2.$

Câu 3. Giải phương trình $\cot\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$ trên $\left[0;\dfrac{7\pi}{3}\right].$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{11\pi}{12};\dfrac{23\pi}{12}\right\}.$

Câu 4. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos 2x+5\cos x+3=0.$ **ĐS**: $\left\{\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\right\}.$

b) $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=-1.$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi;-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}.$

c) $2\sin^2 x-3\sin x\cos x+\cos^2 x=0.$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\arctan\dfrac{1}{2}+k\pi\right\}.$

d) $\sin 2x-12(\sin x+\cos x)+12=0.$ **ĐS**: $\left\{k2\pi;\ \ \dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right\}.$

e) $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x.$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{k\pi}{9};\dfrac{k\pi}{2}\right\}.$

f) $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x-4(\sqrt{3}\sin x+\cos x)+4=0.$ **ĐS**: $\left\{k2\pi;\ \ \dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\right\}.$

Câu 5. Cho phương trình $\sin^2 x+(m-1)\sin 2x-(m+1)\cos^2 x=m\quad(1)$

a) Giải phương trình (1) khi $m=-2.$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right\}.$

b) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm. **ĐS**: $-2\le m\le 1.$

Đề ôn tập số 02 (tự luận)

Câu 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{1-\sin 2x}{\cos 3x-1}\cdot$ **ĐS**: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{3}\right\}.$

b) $y=\sqrt{\dfrac{1+\cot^2 x}{1-\sin 3x}}\cdot$ **ĐS**: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi;\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3}\right\}.$

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{2\sin x+3}.$ **ĐS**: $\min y=1,\ \ \max y=\sqrt{5}.$

b) $y=4\cos 2x-1$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{12};\dfrac{5\pi}{8}\right].$ **ĐS**: $\min y=-5,\ \ \max y=1.$

c) $y=\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}.$ **ĐS**: $\min y=0,\ \ \max y=2.$

Câu 3. Giải phương trình $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$ trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3}\right).$ **ĐS**: $\{0\}.$

Câu 4. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $4\cos^2 x=2+\sqrt{3}.$ **ĐS**: $\left\{\pm\dfrac{\pi}{12}+k2\pi\right\}.$

b) $6\cos^2 x+5\sin x-2=0.$ **ĐS**: $\left\{-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\ \dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\right\}.$

c) $5(1+\cos x)+\cos^4 x-\sin^4 x=2.$ **ĐS**: $\left\{\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\right\}.$

d) $\sqrt{3}\cos x-\sin x=\sqrt{2}.$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{\pi}{12}+k2\pi;\dfrac{5\pi}{12}+k2\pi\right\}.$

e) $\sqrt{3}\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin^2 x=1.$ **ĐS**: $\left\{-\dfrac{\pi}{12}+k\pi;\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right\}.$

f) $\cos 3x+\cos 2x+\cos x+1=0.$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2k\pi}{3}\right\}.$

g) $\sin x\sin 3x+\sin 4x\sin 8x=0.$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{k\pi}{5};\dfrac{k\pi}{7}\right\}.$

h) $9\sin x+6\cos x-3\sin 2x+\cos 2x=8.$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right\}.$

i) $2\cos^3 x+\cos 2x+\sin x=0.$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right\}.$

Câu 5. Tìm m để $\dfrac{2\sin x+\cos x+1}{\sin x-2\cos x+3}=m$ có nghiệm. **ĐS**: $-\dfrac{1}{2}\le m\le 2.$

Đề ôn tập số 03 (tự luận)

Câu 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{5\tan 2x+2019}{\sin 2x+1}\cdot$ **ĐS**: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right\}.$

b) $y=\dfrac{\sqrt{\pi^2-4x^2}}{\cos 2x}\cdot$ **ĐS**: $\mathscr{D}=\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right\}.$

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{3}{3-\sqrt{1-\cos x}}\cdot$ **ĐS**: $\min y=1;\ \ \max y=\dfrac{9+3\sqrt{2}}{7}\cdot$

b) $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ trên $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{6}\right].$ **ĐS**: $\min y=-\dfrac{\sqrt{6}}{2};\ \ \max y=\sqrt{2}.$

c) $y=4\cos^2 x-4\cos x+3.$ **ĐS**: $\min y=2,\ \ \max y=11.$

Câu 3. Tìm nghiệm $x \in (0;\pi)$ của $\sin x\cos x\cos 2x = \dfrac{1}{4}\cdot$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{\pi}{8};\dfrac{5\pi}{8}\right\}$.

Câu 4. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} = 3\cot x + \sqrt{3}$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{6}+k\pi\right\}$.

b) $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2\dfrac{x}{2}\cdot$ **ĐS**: $\left\{\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\right\}$.

c) $\cos 7x\cos 5x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 - \sin 7x\sin 5x.$ **ĐS**: $\left\{k\pi;\ -\dfrac{\pi}{3}+k\pi\right\}$.

d) $2\cos 3x.\cos x - \cos 4x - 3\cos x = -2.$ **ĐS**: $\left\{k2\pi;\ \pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right\}$.

e) $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2.$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{6}+k\pi\right\}$.

f) $2019\tan x + \cot x = 2\left(1009\sqrt{3} + \dfrac{1}{\sin 2x}\right).$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{\pi}{3}+k\pi\right\}$.

g) $\tan x - 3\cot x = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x).$ **ĐS**: $\left\{-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi;\dfrac{4\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3}\right\}$.

h) $2\sin 3x(1 - 4\sin^2 x) = 1.$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{k2\pi}{7};\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k2\pi}{5}\right\}$.

i) $2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{5\pi}{12} - x\right)\sin x = 1.$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi;\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\right\}$.

Đề ôn tập số 04 (tự luận)

Câu 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{\sqrt{3-\sin 2x}}{2\sin^2 3x - 5\sin 3x + 3}.$ **ĐS**: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3}\right\}$.

b) $y = \tan x.\sqrt{\dfrac{2+\sin x}{\cos x + 1}}.$ **ĐS**: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2}\right\}$.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{5 - 2\cos^2 x\sin^2 x}.$ **ĐS**: $\min y = \dfrac{3\sqrt{2}}{2};\max y = \sqrt{5}.$

b) $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1.$ **ĐS**: $\min y = -1;\ \max y = 2.$

c) $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 2.$ **ĐS**: $\min y = 0;\ \max y = 4.$

d) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x$ trên đoạn $\left[0;\pi/3\right]$. **ĐS**: $\min y = -1;\ \max y = 2.$

Câu 3. Giải phương trình $\sin(\pi\sin 2x) = 1.$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\pi;\ \dfrac{5\pi}{12}+k\pi\right\}$.

Câu 4. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x + \sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2} = 0.$ **ĐS**: $\left\{k2\pi;\ \pm\dfrac{5\pi}{3}+k4\pi\right\}$.

b) $\tan 3x.\tan x = 1.$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}\right\}$.

c) $\sin^2 x + \cos 2x + \cos x - 2 = 0.$ **ĐS**: $\{k2\pi\}$.

d) $\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0.$ **ĐS**: $\{k\pi\}$.

e) $\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\sin 2x.$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{\pi}{3} + k2\pi; \dfrac{4\pi}{15} + \dfrac{k2\pi}{5}\right\}$.

f) $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2 x = -4.$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ \dfrac{\pi}{6} + k\pi\right\}$.

g) $(\cos x + 1)(\cos 2x + 2\cos x) + 2\sin^2 x = 0.$ **ĐS**: $\{\pi + k2\pi\}$.

h) $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 1) = 3 - 4\cos^2 x.$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{\pi}{6} + k2\pi; \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi; \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\right\}$.

i) $2\sin^2 x + 3\tan^2 x - 6\tan x - 2\sqrt{2}\sin x + 4 = 0.$ **ĐS**: $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k2\pi\right\}$.

j) $2\sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0.$ **ĐS**: $\{k2\pi; -\pi/4 + k\pi\}$.

k) $2\cos x(\cos x + \sqrt{3}\sin x) + 5(\sin x + \sqrt{3}\cos x + 1) = 0.$ **ĐS**: $\left\{-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\right\}$.

Đề ôn tập số 05 (trắc nghiệm)

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y = \tan 3x$ là

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi/3,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y = \tan x + \cot x$ là

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\dfrac{\sin 2x + 2}{1 - \cos x}}$ là

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$.

C. $\mathscr{D} = \{k2\pi\}$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

Câu 4. Tìm m để hàm số $y = \sqrt{m - 2\sin x}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

A. $m \geq 2$. **B.** $m \leq -2$. **C.** $m \geq 0$. **D.** $m \in \mathbb{R}$.

Câu 5. Khẳng định nào dưới đây là **sai** ?

A. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ. **B.** Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

C. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ. **D.** Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

Câu 6. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ là

A. $T = k\pi$. **B.** $T = 2\pi$. **C.** $T = k2\pi$. **D.** $T = \pi$.

Câu 7. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sin 2x - 5$ lần lượt là

A. 3 và -5. **B.** -2 và -8. **C.** 2 và -5. **D.** 8 và 2.

Câu 8. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sin x + \sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$

A. -1. **B.** 0. **C.** -2. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 9. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \cos^2 x - \sin x$ là

A. $5/4$. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 10. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{2\sin x-\cos x+3}$ lần lượt là

A. -1 và $0,5.$ **B.** -1 và $2.$ **C.** $-0,5$ và $1.$ **D.** 1 và $2.$

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x-m=1$ có nghiệm ?

A. $-2\le m\le 0.$ **B.** $m\le 0.$ **C.** $m\ge 1.$ **D.** $0\le m\le 1.$

Câu 12. Họ nghiệm của phương trình $\tan 3x=\tan x$ là

A. $x=\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **C.** $x=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=\dfrac{k\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z}.$

Câu 13. Phương trình $\sin 2x\cos x=\sin 7x\cos 4x$ có các họ nghiệm là

A. $x=\dfrac{k2\pi}{5};\ x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{6}\ (k\in\mathbb{Z}).$ **B.** $x=\dfrac{k\pi}{5};\ x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z}).$

C. $x=\dfrac{k\pi}{5};\ x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{6}\ (k\in\mathbb{Z}).$ **D.** $x=\dfrac{k2\pi}{5};\ x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z}).$

Câu 14. Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[\pi;2\pi]$ của phương trình $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1.$

A. $0.$ **B.** $1.$ **C.** $2.$ **D.** $3.$

Câu 15. Với $k\in\mathbb{Z}$, họ nghiệm của phương trình $2\cos 2x+9\sin x-7=0$ là

A. $x=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$ **B.** $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$

C. $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$ **D.** $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$

Câu 16. Phương trình $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$ tương đương với phương trình nào sau đây ?

A. $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot$ **B.** $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\dfrac{1}{2}\cdot$

C. $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=1.$ **D.** $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot$

Câu 17. Với $k\in\mathbb{Z}$, họ nghiệm của phương trình $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=3$ là

A. $x=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi.$ **B.** $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi.$ **C.** $x=\dfrac{4\pi}{3}+k\pi.$ **D.** $x=\dfrac{5\pi}{3}+k\pi.$

Câu 18. Với $k\in\mathbb{Z}$, họ nghiệm của phương trình $\cos 3x+\sin 2x-\sin 4x=0$ là

A. $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3}\cdot$ **B.** $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}\cdot$ **C.** $x=\dfrac{k\pi}{3}\cdot$ **D.** $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi.$

Câu 19. Tính tổng S các nghiệm trên đoạn $[0;2\pi]$ của phương trình $\dfrac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=0.$

A. $S=\dfrac{5\pi}{2}\cdot$ **B.** $S=\dfrac{\pi}{2}\cdot$ **C.** $S=4\pi.$ **D.** $S=\dfrac{3\pi}{2}\cdot$

Câu 20. Cho phương trình $4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=m^2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x.$ Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm ?

A. $1.$ **B.** $2.$ **C.** $3.$ **D.** $5.$

BẢNG ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 05

1.A	2.B	3.B	4.A	5.A	6.D	7.B	8.A	9.A	10.B
11.A	12.B	13.C	14.A	15.D	16.A	17.B	18.B	19.A	20.D

Đề ôn tập số 06 (trắc nghiệm)

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$ là

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y=\tan x+\cot x+\sin x$ là

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ là

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 4. Tìm m để hàm số $y=\sqrt{3m+\cos x-\sqrt{3}\sin x}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

A. $m\ge\dfrac{2}{3}\cdot$ **B.** $m\ge\dfrac{\sqrt{3}+1}{3}\cdot$ **C.** $m\le\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}\cdot$ **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Câu 5. Trong các hàm số sau đây, hàm nào có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng ?

A. $y=\cos x-\sin^2 x$. **B.** $y=\tan x$.

C. $y=\sin^3 x\cos x$. **D.** $y=\sin x$.

Câu 6. Chu kỳ của hàm số $y=3\sin(x/2)$ là

A. 0. **B.** 2π. **C.** 4π. **D.** π.

Câu 7. Tìm tập giá trị của hàm số $y=2\cos 3x+1$.

A. $[-3;1]$. **B.** $[-3;-1]$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $[1;3]$.

Câu 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos 2x-\sin x+3$.

A. 1. **B.** -1. **C.** 3. **D.** $33/8$.

Câu 9. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+3}$ bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** $-1/7$. **D.** $1/7$.

Câu 10. Tìm m để phương trình $\tan x+\cot x=2m$ có nghiệm.

A. $m\ge 1$. **B.** $0<m<1$. **C.** $0\le m\le 1$. **D.** $m<1$.

Câu 11. Với $k\in\mathbb{Z}$, tập nghiệm của phương trình $\tan 3x+\tan x=0$ là

A. $\left\{k\pi;\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right\}\cdot$ **B.** $\left\{\dfrac{k\pi}{4}\right\}\cdot$ **C.** $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right\}\cdot$ **D.** $\left\{k\pi;\ \dfrac{\pi}{4}+k\pi\right\}\cdot$

Câu 12. Phương trình $\sin 2x+3\cos x=0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0;\pi)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 13. Họ nghiệm phương trình $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\sin x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=1$ có dạng $x_{\circ}=\dfrac{\pi}{m}+kn\pi;\ k,m,n\in\mathbb{Z}$. Tổng $m+n$ bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** $\dfrac{7}{3}\cdot$ **D.** $\dfrac{8}{3}\cdot$

Câu 14. Với $k\in\mathbb{Z}$, tập nghiệm của phương trình $\cos 2x-5\sin x-3=0$ là

A. $\left\{-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\ \dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\right\}$. **B.** $\left\{-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi;\ \dfrac{7\pi}{3}+k2\pi\right\}$.

C. $\left\{-\dfrac{\pi}{6}+k\pi;\ \dfrac{7\pi}{6}+k\pi\right\}$. **D.** $\left\{-\dfrac{\pi}{3}+k\pi;\ \dfrac{7\pi}{3}+k\pi\right\}$.

Câu 15. Với $k\in\mathbb{Z}$, họ nghiệm của phương trình $\sqrt{3}\cos x+\sin x=-2$ là

A. $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$. **B.** $x=-\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$. **C.** $x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$. **D.** $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$.

Câu 16. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x\cos x+\left|\sin x+\cos x\right|=1$ trong $(0;2\pi)$ bằng

A. π. **B.** 2π. **C.** 3π. **D.** 4π.

Câu 17. Số nghiệm thuộc đoạn $[2\pi;4\pi]$ của phương trình $\dfrac{\sin 3x}{\cos x+1}=0$ là

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 18. Với $k\in\mathbb{Z}$, tập nghiệm của phương trình $8.\cos 2x.\sin 2x.\cos 4x=\sqrt{2}$ là

A. $\left\{\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{8};\ \dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{8}\right\}$. **B.** $\left\{\dfrac{\pi}{32}+\dfrac{k\pi}{8};\ \dfrac{3\pi}{32}+\dfrac{k\pi}{8}\right\}$.

C. $\left\{\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{8};\ \dfrac{3\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{8}\right\}$. **D.** $\left\{\dfrac{\pi}{32}+\dfrac{k\pi}{4};\ \dfrac{3\pi}{32}+\dfrac{k\pi}{4}\right\}$.

Câu 19. Tổng các giá trị nguyên của m để $4\sin x+(m-4)\cos x-2m+5=0$ có nghiệm là

A. 5. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 3.

Câu 20. Cho $x_{\circ}$ là nghiệm của phương trình $\sin x\cos x+2(\sin x+\cos x)=2$ thì giá trị của biểu thức $P=3+\sin 2x_{\circ}$ bằng

A. $3+\sqrt{2}$. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

BẢNG ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 06

1.C	2.C	3.C	4.A	5.A	6.C	7.C	8.A	9.D	10.A
11.A	12.B	13.A	14.A	15.B	16.C	17.A	18.D	19.C	20.B

Đề ôn tập số 07 (trắc nghiệm)

Câu 1. Với $k\in\mathbb{Z}$, tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\cot x}{2\sin x-1}$ là

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\right\}$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\right\}$.

C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\right\}$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\right\}$.

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)$ là

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{0;\pi\right\}$.

C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2}\right\}$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi\right\}$.

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\tan x-5}{1-\sin^2 x}$ là

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$ **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

C. $\mathscr{D} = \mathbb{R}.$ **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Câu 4. Tìm tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{\cos x - m}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

A. $m \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)..$ **B.** $m \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty).$

C. $m \neq 1.$ **D.** $m \in [-1;1].$

Câu 5. Trong các hàm số sau đây, hàm nào có đồ thị nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng ?

A. $y = \sin^2 x.$ **B.** $y = x.\sin x.$ **C.** $y = x.\cos 2x.$ **D.** $y = \cos x.$

Câu 6. Chu kì tuần hoàn của hàm số $y = \sin 2x$ là

A. $3\pi.$ **B.** $\dfrac{\pi}{2}\cdot$ **C.** $2\pi.$ **D.** $\pi.$

Câu 7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sin^4 x + \cos^4 x.$

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $0,5.$

Câu 8. Giả sử M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ trên $\mathbb{R}$. Tổng $M + m$ bằng

A. $1 + \sqrt{2}.$ **B.** 0. **C.** 1. **D.** $-1.$

Câu 9. Tìm tập giá trị của hàm số $y = 3(3\sin x + 4\cos x)^2 + 4(3\sin x + 4\cos x) + 1.$

A. $\left[-\dfrac{1}{3};96\right]\cdot$ **B.** $\left[\dfrac{1}{3};6\right]\cdot$ **C.** $\left[\dfrac{1}{3};96\right]\cdot$ **D.** $\left[2;6\right].$

Câu 10. Tìm m để phương trình $(m-1)\cos^2 x = m$ có nghiệm.

A. $0 \le m < 1.$ **B.** $0 \le m \le 1.$ **C.** $-1 \le m \le 1.$ **D.** $-1 < m < 1.$

Câu 11. Với $k \in \mathbb{Z}$, phương trình $(\sqrt{3}\tan x + 1)(\sin^2 x + 1) = 0$ có họ nghiệm là

A. $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi.$ **B.** $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi.$ **C.** $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi.$ **D.** $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi.$

Câu 12. Tìm số nghiệm của phương trình $\sin(\cos x) = 0$ trên đoạn $x \in [0;2\pi].$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 13. Phương trình $2\cos^2 x = 1$ có số nghiệm trên đoạn $[-2\pi;2\pi]$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 14. Phương trình $3\tan(3x - 30^\circ) + \sqrt{3} = 0$ có tập nghiệm là

A. $\{k180^\circ,\ k \in \mathbb{Z}\}.$ **B.** $\{k60^\circ,\ k \in \mathbb{Z}\}.$ **C.** $\{k360^\circ,\ k \in \mathbb{Z}\}.$ **D.** $\{k90^\circ,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

Câu 15. Với $k \in \mathbb{Z}$, phương trình $\sin x \cos x \cos 2x = 0$ có họ nghiệm là

A. $k\pi.$ **B.** $\dfrac{k\pi}{2}\cdot$ **C.** $\dfrac{k\pi}{4}\cdot$ **D.** $\dfrac{k\pi}{8}\cdot$

Câu 16. Phương trình $\sin 2x - 2\cos x = 0$ có họ nghiệm là

A. $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$ **B.** $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$ **D.** $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Câu 17. Tìm số nghiệm của phương trình $\cos 2x - \cos x - 2 = 0$ trên đoạn $[0;2\pi].$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 18. Phương trình $\sqrt{3}\cos x + \sin x = -2$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $0;4035\pi]$?

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2020.

Câu 19. Giá trị lớn nhất của tham số a để $a\sin^2 x + 2\sin 2x + 3a\cos^2 x = 2$ có nghiệm là

A. 2. **B.** 11/3. **C.** 4. **D.** 8/3.

Câu 20. Cho $x_{\circ}$ là nghiệm của phương trình $\sin x\cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$ thì giá trị của biểu thức $P = \sin\left(x_{\circ} + \dfrac{\pi}{4}\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

BẢNG ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 07

1.C	2.D	3.A	4.A	5.C	6.D	7.A	8.D	9.A	10.A
11.B	12.C	13.D	14.B	15.C	16.A	17.C	18.A	19.D	20.A

Phương trình lượng giác qua các kỳ thi Đại học

BT 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $5\left(\sin x + \dfrac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3,\ \forall x \in (0;\ 2\pi)$. **(ĐH khối A năm 2002)**

b) $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$. **(ĐH khối B năm 2002)**

c) $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0,\ \forall x \in \left[0;\ 14\right]$. **(ĐH khối D năm 2002)**

BT 2. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cot x - 1 = \dfrac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$. **(ĐH khối A năm 2003)**

b) $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$. **(ĐH khối B năm 2003)**

c) $\sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\dfrac{x}{2} = 0$. **(ĐH khối D năm 2003)**

BT 3. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$. **(ĐH khối B năm 2004)**

b) $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$. **(ĐH khối D năm 2004)**

BT 4. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos^2 3x\cos 2x - \cos^2 x = 0$. **(ĐH khối A năm 2005)**

b) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$. **(ĐH khối B năm 2005)**

c) $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{3}{2} = 0$. **(ĐH khối D năm 2005)**

BT 5. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\dfrac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x\cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$. **(ĐH khối A năm 2006)**

b) $\cot x + \sin x\left(1 + \tan x\tan\dfrac{x}{2}\right) = 4$. **(ĐH khối B năm 2006)**

c) $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0.$ **(ĐH khối D năm 2006)**

BT 6. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $(1+\sin^2 x)\cos x + (1+\cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x.$ **(ĐH khối A năm 2007)**

b) $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x.$ **(ĐH khối B năm 2007)**

c) $\left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2.$ **(ĐH khối D năm 2007)**

BT 7. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\dfrac{7\pi}{4} - x\right)\cdot$ **(ĐH khối A năm 2008)**

b) $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x\cos x.$ **(ĐH khối B năm 2008)**

c) $2\sin x(1+\cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x.$ **(ĐH khối D năm 2008)**

BT 8. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\dfrac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)} = \sqrt{3}.$ **(ĐH khối A năm 2009)**

b) $\sin x + \cos x\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x).$ **(ĐH khối B năm 2009)**

c) $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x\cos 2x - \sin x = 0.$ **(ĐH khối D năm 2009)**

BT 9. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x.$ **(ĐH khối A năm 2010)**

b) $(\sin 2x + \cos 2x)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0.$ **(ĐH khối B năm 2010)**

c) $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0.$ **(ĐH khối D năm 2010)**

BT 10. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x} = \sqrt{2}\sin x\sin 2x.$ **(ĐH khối A năm 2011)**

b) $\sin 2x\cos x + \sin x\cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x.$ **(ĐH khối B năm 2011)**

c) $\dfrac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0.$ **(ĐH khối D năm 2011)**

BT 11. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1.$ **(ĐH khối A năm 2012)**

b) $2(\cos x + \sqrt{3}\sin x)\cos x = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 1.$ **(ĐH khối B năm 2012)**

c) $\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos 2x.$ **(ĐH khối D năm 2012)**

BT 12. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\cdot$ **(ĐH khối A năm 2013)**

b) $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1.$ **(ĐH khối B năm 2013)**

c) $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0.$ **(ĐH khối D năm 2013)**

BT 13. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x.$ **(ĐH khối A năm 2014)**

b) $\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x.$ **(ĐH khối B năm 2014)**

BT 14. Giải phương trình: $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0.$ **(TN THPT QG năm 2016)**

Phương trình lượng giác nâng cao theo nhóm bài toán

BT 1. Giải các phương trình lượng giác sau (đặt $t = a\sin x + b\cos x \Rightarrow t^2 = ...$).

a) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x - 4(\sqrt{3}\sin x + \cos x) + 4 = 0.$

b) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x + 2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x - 2 = 0.$

c) $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x - \cos x + 4 = 0.$

d) $\sqrt{3}\sin 2x + \sqrt{3}\sin x + \cos 2x - \cos x = 2.$

e) $2\cos x(\cos x + \sqrt{3}\sin x) + 5(\sin x + \sqrt{3}\cos x + 1) = 0.$

f) $(\sin x + \cos x)^3 - \sqrt{2}(\sin 2x + 1) + \sin x + \cos x = \sqrt{2}.$

g) $\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 - 5 = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)\cdot$

h) $\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 - 5 = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)\cdot$

i) $\sin x + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{\sin x + \sqrt{3}\cos x} = 2.$

j) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \dfrac{2}{\cos x + \sqrt{3}\sin x - 1}\cdot$

BT 2. Giải các phương trình lượng giác sau (nhận xét tổng, sử dụng cung liên kết).

a) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

c) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) + 4\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = 4.$

d) $\sqrt{3}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}.$

e) $\sqrt{3}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = 2.$

f) $5\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 4\sin\left(\dfrac{5\pi}{6} - x\right) - 9.$

g) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{10} - \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{3x}{2}\right).$

h) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{7}{8}\cot\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)\cot\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right).$

i) $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)\tan\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\sin 3x = \sin x + \sin 2x.$

j) $\sin^3 x - \cos^3 x = \cos 2x \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right).$

BT 3. Giải các phương trình lượng giác sau (đặt ẩn phụ bằng cung phức tạp)

a) $8\cos^3\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos 3x.$

b) $\sqrt{2}\sin^3\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sin x.$

c) $\sin^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin x.$

d) $\tan^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \tan x - 1.$

e) $\cos\dfrac{4x}{3}=\cos^2 x.$

f) $2\cos^2\dfrac{3x}{2}+1=3\cos 2x.$

g) $2\cos^2\dfrac{3x}{5}+1=3\cos\dfrac{4x}{5}.$

h) $2\cos^2\dfrac{6x}{5}+1=3\cos\dfrac{8x}{5}\cdot$

i) $\cos\dfrac{8x}{3}=\cos^2\dfrac{2x}{3}\cdot$

j) $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin 2x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot$

BT 4. Giải các phương trình lượng giác sau (sử dụng công thức $\cos 2x$, nhóm tích)

a) $9\sin x+6\cos x-3\sin 2x+\cos 2x-8=0.$

b) $\sin 2x-\cos 2x+3\sin x-\cos x-1=0.$

c) $\sin 2x+2\cos 2x=1+\sin x-4\cos x.$

d) $2\sin 2x-\cos 2x=7\sin x+2\cos x-4.$

e) $\sin 2x-\cos 2x=3\sin x+\cos x-2.$

f) $\sin 2x-\cos 2x+3(\sin x-\cos x)=1.$

g) $3\sin 2x+\cos 2x+4=3\sin x+7\cos x.$

h) $\cos 2x+\sin 2x=\cos x-\sin x+1.$

i) $2\sqrt{2}\sin 2x-\cos 2x-2\sqrt{2}\cos x+4=7\sin x.$

BT 5. Giải các phương trình lượng giác sau (đưa về phương trình tích số)

a) $(\tan x+1)\sin^2 x+\cos 2x=0.$

b) $(2\cos x+1)(\sin 2x+2\sin x-2)=4\cos^2 x-1.$

c) $2\sin^3 x-\sin x=2\cos^3 x-\cos x+\cos 2x.$

d) $\sin^3 x+\cos^3 x=2(\sin^5 x+\cos^5 x).$

e) $4\sin^8 x+\cos^8 x=8(\sin^{10} x+\cos^{10} x)+5\cos 2x.$

f) $\sin^2 x(4\cos^2 x-1)=\cos x(\sin x+\cos x-\sin 3x).$

g) $\sin x(1+\cos 2x)+\sin 2x=1+\cos x.$

h) $\tan x+\cot x=2(\sin 2x+\cos 2x).$

i) $(1+\sin^2 x)\cos x+(1+\cos^2 x)\sin x=1+\sin 2x.$

j) $(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+1)=3-4\cos^2 x.$

k) $(\cos x+1)(\cos 2x+2\cos x)+2\sin^2 x=0.$

l) $(2\cos x-1)(2\sin x+\cos x)=\sin 2x-\sin x.$

m) $4\sin 2x\sin x+2\sin 2x-2\sin x=4-4\cos^2 x.$

n) $2\cos x\cos 2x\cos 3x+5=7\cos 2x.$

o) $\tan 2x+\cot x=8\cos^2 x.$

p) $(1-\cos x)\cot x+\cos 2x+\sin x=\sin 2x.$

q) $3\sin 3x+2+\sin x(3-8\cos x)=3\cos x.$

r) $\sqrt{\dfrac{3}{4}+\cos^2 x}+\sqrt{\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}\cdot\cos 2x}=2.$

s) $\dfrac{\sin 5x}{\sin x}+\dfrac{2\sin 3x}{\sin x}+\dfrac{2\cos 3x}{\cos x}=5.$

Chöông 2: TO HÔP VA XAC SUAT

§ 1. CAC QUY TAC ÑEM CÔ BAN

☆☆☆

Nhóm 1. Các bài toán chọn người và đồ vật cơ bản

1. Một ca sĩ có 30 cái áo và 20 cái quần, trong đó có 18 áo màu xanh và 12 áo màu đỏ; 12 quần xanh và 8 quần đỏ. Có bao nhiêu cách chọn một bộ quần áo khác màu để người ca sĩ này đi trình diễn ?	**2.** Lớp $11A$ có 39 học sinh trong đó có 1 học sinh tên Chiến, lớp $11B$ có 32 học sinh trong đó có 1 học sinh tên Tranh. Có mấy cách chọn 1 tổ gồm 2 học sinh khác lớp mà không có mặt Chiến và Tranh cùng lúc.
• **TH 1**. Chọn 1 áo xanh và 1 quần đỏ. Giai đoạn 1. Chọn 1 áo xanh trong 18 áo xanh có 18 cách chọn. Giai đoạn 2. Chọn 1 quần đỏ trong 8 quần đỏ có 8 cách chọn. Theo quy tắc nhân có $18.8 = 144$ cách chọn 1 bộ đồ gồm áo xanh, quần đỏ. • **TH 2**. Chọn 1 áo đỏ và 1 quần xanh. Giai đoạn 1. Chọn 1 áo đỏ trong 12 áo màu đỏ có 12 cách chọn. Giải đoạn 2. Chọn 1 quần xanh trong 18 quần xanh có 18 cách chọn. Theo quy tắc nhân có $12.18 = 216$ cách chọn 1 bộ đồ gồm áo đỏ, quần xanh. • Vậy theo quy tắc cộng có $144 + 216 = 360$ cách chọn 1 bộ đồ khác màu.	

3. Trong lớp $11A$ có 32 học sinh, trong đó có 2 học sinh tên Ưu và Tiên. Có bao nhiêu cách chọn ra 2 học sinh đi thi mà trong đó có mặt ít nhất 1 trong 2 học sinh tên Ưu và tên Tiên ?

4. Trong lớp $11C$ có 30 học sinh, trong đó có 2 học sinh tên A và B. Có bao nhiêu cách chọn ra 2 học sinh đi thi mà trong đó có mặt ít nhất 1 trong 2 học sinh tên A và tên B ?

Nhóm 2. Bài toán đếm số cơ bản

- Khi giải các bài toán đếm liên quan đến tìm số sao cho các số đó là ***số chẵn, số lẻ, số chia hết*** ta nên ưu tiên việc thực hiện ***(chọn) chúng trước*** và nếu ***chứa số*** 0 ***nên chia 2 trường hợp*** (TH có số 0 và TH không có số 0) nhằm tránh trùng lặp với nhau.
- Dấu hiệu chia hết:

Gọi $N = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ là số tự nhiên có $n+1$ chữ số $(a_n \neq 0)$. Khi đó:

Dấu hiệu chia hết cho $2,\ 5,\ 4,\ 25,\ 8$ và 125 của số tự nhiên N :

- $N \,\vdots\, 2 \Leftrightarrow a_0 \,\vdots\, 2 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8\}.$
- $N \,\vdots\, 5 \Leftrightarrow a_0 \,\vdots\, 5 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;\ 5\}.$
- $N \,\vdots\, 4 \text{ (hay } 25) \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \,\vdots\, 4 \text{ (hay } 25).$
- $N \,\vdots\, 8 \text{ (hay } 125) \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \,\vdots\, 8 \text{ (hay } 125).$

Dấu hiệu chia hết cho $3,\ 9$ là $N \,\vdots\, 3 \text{ (hay } 9) \Leftrightarrow (a_o + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \,\vdots\, 3 \text{ (hay } 9).$

5. Cho tập hợp $X = \{1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 7;\ 8\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số được lập từ X sao cho:

a) Khác nhau từng đôi một.

Gọi số có bốn chữ số có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$, trong đó $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_4$.

Phần tử	a_1	a_2	a_3	a_4
Số cách chọn	6	5	4	3

Theo quy tắc nhân có $6.5.4.3 = 360$ số có bốn chữ số khác nhau từng đôi một.

b) Khác nhau từng đôi một và nó là số lẻ.

Gọi số có bốn chữ số có dạng $\overline{b_1 b_2 b_3 b_4}$, trong đó $b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_4$ và $b_4 \in \{1;5;7\}$.

Phần tử	b_4	b_1	b_2	b_3
Số cách chọn	3	5	4	3

Theo quy tắc nhân có $3.5.4.3 = 180$ số có bốn chữ số khác nhau và nó là số lẻ.

6. Cho tập hợp $X = \{1;\ 3;\ 4;\ 6;\ 7;\ 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số được lập từ X sao cho:

a) Khác nhau từng đôi một.

b) Khác nhau từng đôi một và nó là số lẻ.

c) Khác nhau từng đôi một và nó là số chẵn.

Gọi số có bốn chữ số có dạng $\overline{c_1c_2c_3c_4}$, trong đó $c_1 \neq c_2 \neq c_3 \neq c_4$ và $c_4 \in \{2;4;8\}$.

Phần tử	c_4	c_1	c_2	c_3
Số cách chọn	3	5	4	3

Theo quy tắc nhân có $3.5.4.3 = 180$ số.

(**Lưu ý**. *Học sinh trình bày theo cách gv ở lớp).*

c) Khác nhau từng đôi một và nó là số chẵn.

7. Cho tập hợp $X = \{1;\ 3;\ 4;\ 5;\ 7;\ 8\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số được lấy từ X sao cho:

a) Khác nhau từng đôi một.

b) Khác nhau từng đôi một và nó là số lẻ.

c) Khác nhau từng đôi một và nó là số chẵn.

d) Khác nhau đôi một và chia hết cho 5.

8. Cho tập hợp $X = \{2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 8;\ 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số được lấy từ X sao cho:

a) Khác nhau từng đôi một.

b) Khác nhau từng đôi một và nó là số lẻ.

c) Khác nhau đôi một và chia hết cho 2.

d) Khác nhau đôi một và chia hết cho 5.

9. Cho tập hợp $A = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số được lấy từ A sao cho:

a) Khác nhau từng đôi một.

Gọi số có bốn chữ số có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, trong đó $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_4$ và $a_1 \neq 0$.

Phần tử	a_1	a_2	a_3	a_4
Số cách chọn	7	7	6	5

Theo quy tắc nhân có $7.7.6.5 = 1470$ số.

b) Khác nhau từng đôi một và nó là số lẻ.

Gọi số có bốn chữ số có dạng $\overline{b_1b_2b_3b_4}$, trong đó $b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_4$, $b_1 \neq 0$ và $b_4 \in \{1;3;5;7\}$.

Phần tử	b_4	b_1	b_2	b_3
Số cách chọn	4	6	6	5

Theo quy tắc nhân có $4.6.6.5 = 720$ số.

c) Khác nhau từng đôi một và nó là số chẵn.

Gọi số có bốn chữ số có dạng $\overline{c_1c_2c_3c_4}$, trong đó $c_1 \neq c_2 \neq c_3 \neq c_4$, $c_1 \neq 0$, $c_4 \in \{0;2;4;6\}$.

TH 1. Chọn $c_4 = 0$.

Phần tử	c_4	c_1	c_2	c_3
Số cách chọn	1	7	6	5

Theo quy tắc nhân có $1.7.6.5 = 210$ số.

TH 2. Chọn $b_4 \in \{2;4;6\}$ và $b_1 \neq 0$.

Phần tử	c_4	c_1	c_2	c_3
Số cách chọn	3	6	6	5

Theo quy tắc nhân có $3.6.6.5 = 540$ số.

Theo quy tắc cộng có $210 + 540 = 750$ số.

d) Khác nhau đôi một và chia hết cho 5.

10. Cho tập hợp $X = \{0;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 8\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số được lấy từ X sao cho:

a) Khác nhau từng đôi một.

a) Khác nhau từng đôi một và nó là số lẻ.

c) Khác nhau đôi một và chia hết cho 2.

d) Khác nhau đôi một và chia hết cho 5.

11. Cho tập hợp $X = \{0;\ 1;\ 3;\ 4;\ 5;\ 7;\ 8\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số được lấy từ X sao cho:

a) Khác nhau từng đôi một.

b) Khác nhau từng đôi một và nó là số lẻ.

c) Khác nhau từng đôi một và nó là số chẵn.

d) Khác nhau đôi một và chia hết cho 5.

12. Cho tập hợp $X = \{0;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 8;\ 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số được lấy từ X sao cho:

a) Khác nhau từng đôi một.

b) Khác nhau từng đôi một và nó là số lẻ.

c) Khác nhau đôi một và chia hết cho 2.

d) Khác nhau đôi một và chia hết cho 5.

Nhóm 3. Bài toán sử dụng quy tắc bù trừ và bài toán khác

Đối tượng x cần đếm được chứa trong một đối tượng X gồm x và $\overline{x}$ đối lập nhau. Nếu X có m cách chọn, $\overline{x}$ có n cách chọn. Vậy x có $(m-n)$ cách chọn.

Về mặt thực hành, đề cho đếm những đối tượng thỏa a và $b.$ Ta cần làm:

- Bài toán $1:$ Đếm những đối tượng thỏa $a.$
- Bài toàn $2:$ Đếm những đối tượng thỏa $a,$ không thỏa $b.$

Do đó, kết quả bài toán $=$ kết quả bài toán $1-$ kết quả bài toán $2.$

13. Cho tập $A=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$, từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có chữ số 0 và $3.$

14. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau mà không bắt đầu bởi 12 ?

15. Hỏi từ 10 chữ số: $0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau, sao cho trong các chữ số đó có mặt số 0 và số 1 ?

16. Cho tập $A=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau đôi một được lấy từ tập A và trong đó có chứa chữ số 4 ?

17. Từ các chữ số: $0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm có sáu chữ số đôi một khác nhau, trong đó phải có mặt chữ số $7.$

18. Có 20 thẻ đựng trong hai hộp khác nhau, mỗi hộp chứa 10 thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến $10.$ Có bao nhiêu cách chọn hai thẻ (mỗi hộp một thẻ) sao cho tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn.

19. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm hai chữ số phân biệt khác nhau được lấy từ tập $A = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}.$ Hỏi S có bao nhiêu phần tử. Có bao nhiêu cách lấy hai phần tử từ tập S sao cho tích của hai phần tử này là một số chẵn.

20. Trong trường THPT $A,$ khối 11 có: 160 em tham gia câu lạc bộ Toán, 140 em tham gia câu lạc bộ Tin học, 50 em tham gia cả hai câu lạc bộ. Hỏi khối 11 có bao nhiêu học sinh ?

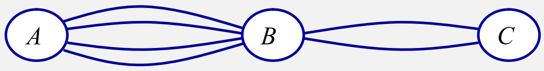
21. Một lớp có 40 học sinh, đăng ký chơi ít nhất một trong hai môn thể thao: bóng đá và cầu lông. Có 30 em đăng ký môn bóng đá, 25 em đăng ký môn cầu lông. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký cả hai môn thể thao ?

BÀI TẬP VỀ NHÀ 01

Câu 1. Một tổ có 5 học sinh nữ và 6 học sinh nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ngẫu nhiên một học sinh của tổ đó đi trực nhật ?

A. 20. **B.** 11.
C. 30. **D.** 10.

Câu 2. Các thành phố $A,\ B,\ C$ được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ thành phố A đến thành phố C mà qua thành phố B chỉ một lần duy nhất ?



A. 8. **B.** 12.
C. 6. **D.** 4.

Câu 3. Lớp $12A$ có 20 bạn nữ, lớp $12B$ có 16 bạn nam. Có bao nhiêu cách chọn một bạn nữ lớp $12A$ và một bạn nam lớp $12B$ để dẫn chương trình hoạt động ngoại khóa ?

A. 36. **B.** 320.
C. 1220. **D.** 630.

Câu 4. Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm 1 món ăn trong 5 món, 1 loại quả tráng miệng trong 5 loại quả tráng miệng và một nước uống trong 3 loại nước uống. Có bao nhiêu cách chọn thực đơn.

A. 25. **B.** 75.
C. 100. **D.** 15.

Câu 5. Một hộp có 3 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Số cách lấy ra hai viên bi, trong đó có 1 viên bi đỏ và 1 viên bi xanh bằng

A. 81. **B.** 7.
C. 12. **D.** 64.

Câu 6. Có 10 cái bút khác nhau và 8 quyển sách giáo khoa khác nhau. Một bạn học sinh cần chọn 1 cái bút và 1 quyển sách. Hỏi bạn học sinh đó có bao nhiêu cách chọn ?

A. 80. **B.** 60.
C. 90. **D.** 70.

Câu 7. Trên giá sách có 10 quyển sách Văn khác nhau, 8 quyển sách Toán khác nhau và 6 quyển sách Tiếng Anh khác nhau. Có mấy cách chọn hai quyển sách khác môn ?

A. 80. **B.** 60.
C. 48. **D.** 188.

Câu 8. Có 7 bông hồng đỏ, 8 bông hồng vàng và 10 bông hồng trắng, các bông hồng khác nhau từng đôi một. Hỏi có bao nhiêu cách lấy 3 bông hồng có đủ ba màu ?

A. 319. **B.** 3014.
C. 310. **D.** 560.

Câu 9. Có 10 cặp vợ chồng đi dự tiệc. Tổng số cách chọn một người đàn ông và một người phụ nữ trong bữa tiệc phát biểu ý kiến sao cho 2 người đó không là vợ chồng bằng

A. $100.$ **B.** $91.$
C. $10.$ **D.** $90.$

Câu 10. Từ các chữ số $2,\ 3,\ 4,\ 5$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số ?

A. $256.$ **B.** $24.$
C. $35.$ **D.** $120.$

Câu 11. Từ các số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm có 3 chữ số đôi một khác nhau ?

A. $35.$ **B.** $210.$
C. $120.$ **D.** $72.$

Câu 12. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau ?

A. $210.$ **B.** $1200.$
C. $4536.$ **D.** $5040.$

Câu 13. Có bao nhiêu số có 3 chữ số đôi một khác nhau có thể lập được từ các chữ số $0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8$?

A. $48.$ **B.** $60.$
C. $10.$ **D.** $24.$

Câu 14. Cho tập $X = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 4 chữ số khác nhau được lập từ X.

A. $2240.$ **B.** $2520.$
C. $2016.$ **D.** $256.$

Câu 15. Với năm chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7$ có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 2 ?

A. $24.$ **B.** $48.$
C. $1250.$ **D.** $120.$

Câu 16. Với năm chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6$ có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 5 ?

A. $120.$ **B.** $24.$
C. $16.$ **D.** $25.$

Câu 17. Cho tập $A = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$, từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số và chia hết cho 2 ?

A. $1230.$ **B.** $2880.$
C. $1260.$ **D.** $8232.$

Câu 18. Cho các chữ số $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. Từ các chữ số đã cho lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 4 chữ số và các chữ số đôi một bất kỳ khác nhau.

A. 160. **B.** 156.
C. 752. **D.** 240.

Câu 19. Từ các chữ số $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số 3.

A. 108. **B.** 228.
C. 36. **D.** 144.

Câu 20. Từ các chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có sáu chữ số và thỏa mãn điều kiện: sáu chữ số của mỗi số là khác nhau và chữ số hàng nghìn lớn hơn 2 ?

A. 720. **B.** 360.
C. 288. **D.** 240.

BẢNG ĐÁP ÁN BÀI TẬP VỀ NHÀ 01

1.B	2.A	3.B	4.B	5.C	6.A	7.D	8.D	9.D	10.A
11.B	12.C	13.A	14.A	15.B	16.B	17.D	18.B	19.A	20.D

BÀI TẬP VỀ NHÀ 02

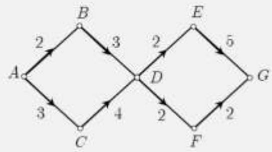
Câu 1. Trong một lớp có 22 học sinh nam và 18 học sinh nữ. Cần chọn 2 học sinh để làm trực nhật. Yêu cầu trong 2 em được chọn phải có 1 nam và 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

A. 231. **B.** 40.
C. 396. **D.** 780.

Câu 2. An muốn qua nhà Bình để cùng Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường đi, từ nhà Bình tới nhà Cường có 6 con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn đường đi đến nhà Cường ?

A. 6. **B.** 4.
C. 10. **D.** 24.

Câu 3. Xét mạng đường nối các tỉnh $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G$, trong đó số viết trên một cạnh cho biết số con đường nối hai tỉnh nằm ở hai đầu mút của cạnh (hình vẽ). Số cách đi từ tỉnh A đến tỉnh G là



A. 23. **B.** 252
C. 2880. **D.** 522.

Câu 4. Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu và cỡ áo).

A. 9. **B.** 20.
C. 50. **D.** 45.

Câu 5. Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm 1 món ăn trong 5 món ăn, 1 loại quả tráng miệng trong 4 loại quả tráng miệng và 1 loại nước uống trong 3 loại nước uống. Hỏi có bao nhiêu cách chọn thực đơn ?

A. 75. **B.** 12.
C. 60. **D.** 3.

Câu 6. Một hộp có 3 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Số cách lấy ra hai viên bi, trong đó có 1 viên bi đỏ và 1 viên bi xanh bằng

A. 81. **B.** 7.
C. 12. **D.** 64.

Câu 7. Một hình lập phương có cạnh 4cm. Người ta sơn đỏ mặt ngoài của hình lập phương rồi cắt hình lập phương bằng các mặt phẳng song song với các mặt của hình lập phương thành 64 hình lập phương nhỏ có cạnh 1cm. Có bao nhiêu hình lập phương có đúng một mặt được sơn đỏ ?

A. 16. **B.** 72.
C. 96. **D.** 24.

Câu 8. Trong một buổi khiêu vũ có 20 nam và 18 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đôi nam nữ để khiêu vũ ?

A. 703. **B.** 360.
C. 1406. **D.** 3420.

Câu 9. Một người có 7 cái áo trong đó có 3 áo trắng và 5 cái cà vạt trong đó có 2 cà vạt màu vàng. Tìm số cách chọn một áo và một cà vạt sao cho đã chọn áo trắng thì không chọn cà vạt màu vàng.

A. 29. **B.** 36.
C. 18. **D.** 35.

Câu 10. Cho các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Khi đó, có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số được lập từ các chữ số đã cho ?

A. 1. **B.** 36.
C. 72. **D.** 46656.

Câu 11. Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà cả hai chữ số đó đều lẻ ?

A. 20. **B.** 50.
C. 25. **D.** 45.

Câu 12. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số ?

A. 5040. **B.** 4536.
C. 10000. **D.** 9000.

Câu 13. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau.

A. 15 **B.** 4096

C. 360 **D.** 720

Câu 14. Nhãn mỗi chiếc ghế trong một hội trường gồm hai phần: phần đầu là một chữ cái (trong bảng 24 chữ cái tiếng Việt), phần thứ hai là một số nguyên dương nhỏ hơn 26. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu chiếc ghế được ghi nhãn khác nhau ?

A. 624. **B.** 600.

C. 49. **D.** 648.

Câu 15. Từ các chữ số của tập hợp $A=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau.

A. 418. **B.** 720.

C. 300. **D.** 731.

Câu 16. Từ các chữ số $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số ?

A. 168. **B.** 210.

C. 84. **D.** 105.

Câu 17. Từ các chữ số $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5 ?

A. 72. **B.** 120.

C. 54. **D.** 69.

Câu 18. Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Có bao nhiêu cách chọn hai thẻ sao cho tích hai số trên hai thẻ là số chẵn ?

A. 32. **B.** 36.

C. 26. **D.** 72.

Câu 19. Cho tập $X=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$. Từ tập X có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 8 chữ số đôi một khác nhau sao cho các chữ số này lẻ và không chia hết cho 5.

A. 520. **B.** 15120.

C. 120. **D.** 11520.

Câu 20. Cho tập $X=\{1;\ 2;\ 3;4;\ 5;6;\ 7;8\}$. T ừ tập X có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 8 chữ số đôi một khác nhau sao cho chữ số đầu chẵn và chữ số cuối lẻ ?

A. 1200. **B.** 15120.

C. 11520. **D.** 1400.

BẢNG ĐÁP ÁN BÀI TẬP VỀ NHÀ 02

1.C	2.D	3.B	4.A	5.C	6.C	7.D	8.B	9.A	10.D
11.C	12.D	13.C	14.B	15.B	16.A	17.C	18.C	19.B	20.C

§ 2. HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

☆☆☆

Dạng toán 1. Các bài toán liên quan đến hoán vị

Sắp xếp n phần tử theo một hàng $n! = n.(n-1).(n-2)...3.2.1$ cách xếp.

Sắp xếp n phần tử theo một vòng tròn (bàn tròn) $\Rightarrow (n-1)!$ cách.

Casio: Bấm $n!$ ta thao tác: n SHIFT x^{-1}, chẳng hạn: 3 SHIFT $x^{-1} = 6$, tức $3! = 6$.

1. Trên một kệ sách dài có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Lí, 3 quyển sách Văn. Các quyển sách đều khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các quyển sách trên nếu:

a) Xếp một cách tùy ý.

Mỗi cách sắp xếp 12 quyển sách trên kệ dài là một hoán vị của 12 phần tử.

$\Rightarrow$ có $12!$ cách xếp.

b) Xếp Theo từng môn.

5 sách Toán	4 sách Lí	3 sách Văn

- Nhóm 5 sách Toán thành khối A, 4 sách Lí thành khối B, 3 sách Văn thành khối C. Xem đây là hoán vị của 3 phần tử A, B, C $\Rightarrow$ có $3!$ cách xếp.
- Xếp 5 sách Toán trong khối A có $5!$ cách.
- Xếp 4 sách Lí trong khối B có $4!$ cách.
- Xếp 3 sách Văn trong khối C có $3!$ cách.

Theo QTN có $3!.5!.4!.3! = 103680$ cách xếp.

c) Theo từng môn và sách Toán nằm ở giữa.

- Nhóm 5 sách Toán thành khối A, 4 sách Lí thành khối B, 3 sách Văn thành khối C. Do nhóm sách Toán (khối A) nằm ở giữa nên ta chỉ có thể hoán vị 2 phần tử B và $C \Rightarrow$ có $2!$ cách.

B	A	C

C	A	B

- Xếp 5 sách Toán trong khối A có $5!$ cách.
- Xếp 4 sách Lí trong khối B có $4!$ cách.
- Xếp 3 sách Văn trong khối C có $3!$ cách.

Theo QTN có $2!.5!.4!.3! = 34560$ cách xếp.

2. Một THPT X có 4 học sinh giỏi khối 12, có 5 học sinh giỏi khối 11, có 6 học sinh giỏi khối 10. Có bao nhiêu cách xếp 20 học sinh trên thành 1 hàng ngang nhận thưởng nếu:

a) Những học sinh đứng tùy ý.

b) Các học sinh cùng khối đứng cạnh nhau.

c) Cùng khối đứng cạnh và khối 11 ở giữa.

3. Có hai dãy ghế, mỗi dãy 5 ghế. Xếp 5 nam, 5 nữ vào hai dãy ghế trên, có bao nhiêu cách xếp, nếu:

a) Nam, nữ được xếp tùy ý.

Mỗi cách xếp 5 nam và 5 nữ vào hai dãy ghế một cách tùy ý là một hoán vị của 10 người.

$\Rightarrow 10! = 3628800$ cách xếp.

b) Nam 1 dãy ghế, nữ 1 dãy ghế.

- Chọn một dãy ghế trong hai dãy ghế để xếp nam vào có 2 cách.
- Xếp 5 nam vào dãy ghế đã chọn có $5!$ cách.
- Xếp 5 nữ vào dãy ghế còn lại có $5!$ cách.

Theo QTN có: $2.5!.5! = 28800$ cách xếp.

4. Có hai dãy ghế, mỗi dãy 4 ghế. Xếp 4 nam, 4 nữ vào hai dãy ghế trên, có bao nhiêu cách xếp, nếu:

a) Nam, nữ được xếp tùy ý.

b) Nam 1 dãy ghế, nữ 1 dãy ghế.

5. Cho một bàn dài có 10 ghế và 10 học sinh trong đó có 5 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 10 học sinh sao cho:

a) $^\circ$Nam và nữ ngồi xen kẻ nhau.

Đánh số các vị trí xếp chỗ như hình dưới.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- **TH 1**. Xếp 5 học sinh nam vào vị trí chẵn có $5!$ cách, sau đó xếp 5 học sinh nữ vào 5 vị trí lẻ còn lại có $5!$ cách.

  Theo QTN có $5!.5!$ cách.
- **TH 2**. Xếp 5 học sinh nam vào vị trí lẻ có $5!$ cách, sau đó xếp 5 học sinh nữ vào 5 vị trí chẵn còn lại có $5!$ cách.

  Theo QTN có $5!.5!$ cách.
- Theo QTC có $5!.5! + 5!.5! = 28800$ cách.

b) Học sinh cùng giới thì ngồi cạnh nhau.

6. Cho một bàn dài có 8 ghế và 8 học sinh trong đó có 4 học sinh nam. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 8 học sinh sao cho:

a) $^\circ$Nam và nữ ngồi xen kẻ nhau.

b) Học sinh cùng giới thì ngồi cạnh nhau.

7. Xếp 6 học sinh $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ vào một ghế dài, có mấy cách sắp xếp nếu:

a) 6 học sinh này ngồi bất kì.

Đáp số: 720 cách xếp.

b) A và F luôn ngồi ở hai đầu ghế.

Đáp số: 48 cách xếp.

c) A và F luôn ngồi cạnh nhau.

Đáp số: 240 cách xếp.

d) $A,\ B,\ C$ luôn ngồi cạnh nhau.

Đáp số: 144 cách xếp.

e) $A,\ B,\ C,\ D$ luôn ngồi cạnh nhau.

Đáp số: 144 cách xếp.

8. Xếp 5 học sinh $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ vào một ghế dài, có mấy cách sắp xếp nếu:

a) 5 học sinh này ngồi bất kì.

b) A và E luôn ngồi ở hai đầu ghế.

c) A và E luôn ngồi cạnh nhau.

d) $A,\ B,\ C$ luôn ngồi cạnh nhau.

e) $A,\ B,\ C,\ D$ luôn ngồi cạnh nhau.

9. Từ các chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ lập các số gồm sáu chữ số khác nhau. Hỏi

a) Có tất cả bao nhiêu số ?

Mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau lập từ số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ là một hoán vị của 6 số.

$\Rightarrow$ Có $6! = 720$ số.

b) Có bao nhiêu số chẵn và bao nhiêu số lẻ ?

- Gọi số chẵn có 6 chữ số dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.

  Chọn $a_6 \in \{2;4;6\}$: có 3 cách chọn.

  Xếp 5 số còn lại vào $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ và có thể thay đổi vị trí 5 số này nên có $5!$.

  Theo QTN có $3.5! = 360$ số là số chẵn.

- Gọi số lẻ có 6 chữ số dạng $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5b_6}$.

  Chọn $b_6 \in \{1;3;5\}$: có 3 cách chọn.

  Xếp 5 số còn lại vào $b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5$ và có thể thay đổi vị trí 5 số này nên có $5!$.

  Theo QTN có $3.5! = 360$ số.

c) $^\circ$Có bao nhiêu số bé hơn 432000 ?

Gọi số thỏa bài toán dạng $\overline{abcdef}$.

- **TH 1**. Nếu $a < 4$.

  $a \in \{1;2;3\}$: có 3 cách chọn.

  5 số còn lại (trừ số đã xếp vào a) xếp vào các vị trí $b,\ c,\ d,\ e,\ f$ có $5!$ cách.

  Theo QTN có $3.5! = 360$ số.

- **TH 2**. Nếu $a = 4,\ b < 3$.

  $a = 4$: có 1 cách chọn.

  $b \in \{1;2\}$: có 2 cách chọn.

  Xếp 4 số còn lại vào $c,\ d,\ e,\ f$ có $4!$ cách.

  Theo QTN có $1.2.4! = 48$ số.

- **TH 3**. Nếu $a = 4,\ b = 3,\ c = 1$.

  Xếp 3 số $\{2;5;6\}$ vào ba vị trí $d,\ e,\ f$ có $3! = 6$ cách

  $\Rightarrow 6$ số trong trường hợp 3.

- Theo quy tắc cộng có:

  $360 + 48 + 6 = 414$ số.

10. Từ các chữ số $2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ lập các số gồm sáu chữ số khác nhau. Hỏi

a) Có tất cả bao nhiêu số ?

b) Có bao nhiêu số chẵn và bao nhiêu số lẻ ?

c) $^\circ$Có bao nhiêu số bé hơn 432000 ?

11. Xét các số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau lập từ các chữ số $1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5.$ Hỏi trong các số đó có bao nhiêu số

a) Bắt đầu bằng chữ số 5 ?

Đáp số: 24 số.

b) Không bắt đầu bằng chữ số 1 ?

Đáp số: 96 số

c) Bắt đầu bằng 23 ?

Đáp số: 6 số.

d) Không bắt đầu bằng 234 ?

Đáp số: 118 số.

12. Từ các chữ số $1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6$ thiết lập tất cả các số có sáu chữ số khác nhau. Hỏi trong các số đã thiết lập được, có bao nhiêu số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau ?

Đáp số: 480 số.

13. Từ tập hợp $A = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$, lập được bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho $5,$ gồm năm chữ số khác nhau sao cho trong đó luôn có mặt các chữ số $1,\ 2,\ 3$ và chúng đứng cạnh nhau ?

Đáp số: $36 + 30 = 66$ số.

14. Cho tập $X = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 3 được lập từ tập X ?

Đáp số: 24 số.

15. Cho tập $E = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau, biết rằng tổng của ba chữ số này bằng 9.

Đáp số: 18 số.

Dạng toán 2. Các bài toán liên quan đến hoán vị, tổ hợp và chỉnh hợp

① Chọn k trong n và sắp xếp $\Rightarrow$ Sử dụng chỉnh hợp $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ $(casio: n \text{ SHIFT } \times\ k)$.

② Chọn k trong n tùy ý $\Rightarrow$ Sử dụng tổ hợp $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!.k!}$ $(casio: n \text{ SHIFT } \div\ k)$.

16. Trong không gian cho bốn điểm A, B, C, D mà không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi

a) Có bao nhiêu đoạn thẳng được tạo thành ?

Đáp số: 6 đoạn thẳng.

b) Có bao nhiêu véctơ được tạo thành ?

Đáp số: 12 véctơ.

17. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ lập được bao nhiêu số tự nhiên

a) Gồm 4 chữ số.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4}$

Phần tử	a_1	a_2	a_3	a_4
Số cách chọn	6	6	6	6

Theo QTN có $6.6.6.6 = 6^4 = 1296$ số.

b) Gồm 3 chữ số đôi một khác nhau.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abc}$.

Chọn 3 số trong 6 số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ và **xếp** vào 3 vị trí a, b, c có $A_6^3 = 120$ số.

c) Gồm 4 số khác nhau và nó là số chẵn.

Gọi số thỏa bài toán dạng $\overline{b_1b_2b_3b_4}$.

Chọn $b_4 \in \{2;4;6\}$: có 3 cách chọn.

Chọn 3 số trong 5 số $\{1;2;3;4;5;6\} \setminus \{b_4\}$ và xếp vào các vị trí b_1, b_2, b_3 có A_5^3 cách.

Theo QTN có $3.A_5^3 = 180$ số.

18. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ lập được bao nhiêu số tự nhiên

a) Gồm 5 chữ số.

b) Gồm 4 chữ số đôi một khác nhau.

c) Gồm 5 số khác nhau và nó là số lẻ.

19. Cho $X = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số được tạo từ tập X, sao cho:

a) Khác nhau đôi một và số đó là số lẻ ?

Đáp số: 13440 số.

20. Cho tập $X = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số được tạo từ tập X, sao cho:

a) Khác nhau đôi một và đó là số chẵn.

b) Khác nhau đôi một và là số chẵn.

Đáp số: 13776 số.

b) Khác nhau đôi một và chia hết cho 5.

c) Khác nhau và luôn có mặt $1,\ 2,\ 3$.

Đáp số: 2376 số.

c) Khác nhau và luôn có mặt số 2 và số 3.

21. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số mà các chữ số khác nhau đôi một và khác 0, trong đó có đúng 3 chữ số lẻ ?

Từ $1 \to 9$ có 4 số chẵn và 5 số lẻ.
Xếp 5 số thỏa bài toán vào 5 ô tương ứng.
Chọn 3 số lẻ trong 5 số lẻ và ***đặt vào*** 3 ***ô tùy ý*** có C_5^3 cách.
Chọn 2 số chẵn trong 4 số chẵn để vào 2 ô còn lại có C_4^2 cách.
Những số đặt trong 5 ô này có thể ***thay đổi vị trí*** cho nhau nên có $5!$ cách.
Theo QTN có $C_5^3 C_4^2.5! = 7200$ số thỏa YCBT.

22. Từ $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ sẽ lập được mấy số có 6 chữ số khác nhau mà có đúng 4 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ ?

Đáp số: 7200 số.

23. * Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau biết rằng có đúng 3 chữ số chẵn, và 2 chữ số lẻ còn lại đứng kề nhau ?

Đáp số: 4080 số.

24. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn một ban cán sự lớp gồm 4 em. Hỏi có bao nhiêu cách chọn, nếu:

a) Gồm 4 học sinh tùy ý.

Đáp số: 91390 cách.

b) Có 1 nam và 3 nữ.

Đáp số: 11375 cách.

c) Có 2 nam và 2 nữ.

Đáp số: 31500 cách.

d) Có ít nhất 1 nam.

Đáp số: 90025 cách.

25. Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn 5 học sinh để trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách chọn, nếu:

a) 5 học sinh được chọn tùy ý.

Đáp số: 658008 cách.

b) Có 3 nam và 2 nữ.

Đáp số: 241500 cách.

c) Có không quá 3 nữ.

Đáp số: 620880 cách.

d) Có ít nhất 1 nữ.

Đáp số: 604878 cách.

26. Một lớp có 20 học sinh trong đó có 14 nam, 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một đội gồm 4 học sinh, trong đó có:

a) Số nam và số nữ bằng nhau ?

Đáp số: 1365 cách.

27. Một đội văn nghệ gồm 20 người, trong đó có 10 nam, 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người, sao cho:

a) Có đúng 2 nam.

Đáp số: 5400 cách.

b) Ít nhất 1 nữ.

Đáp số: 3844 cách.

b) Có ít nhất 2 nam và ít nhất 1 nữ.

Đáp số: 12900 cách.

28. Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng, 4 bông hồng đỏ (các bông hồng xem như đôi một khác nhau). Người ta muốn chọn ra 1 bó hoa hồng gồm 7 bông. Có bao nhiêu cách chọn một đóa hoa sao cho:

a) Có đúng 1 bông hồng đỏ.

Đáp số: 112 cách.

b) Có ít nhất 3 bông vàng và ít nhất 3 đỏ.

Đáp số: 150 cách.

29. Trông một hộp có 18 bi, trong đó có 9 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ, 4 bi vàng có kích thước đôi một khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi sao cho những viên bi được chọn thỏa mãn:

a) Có đúng 2 viên bi màu đỏ ?

Đáp số: 7150 cách.

b) Số bi xanh bằng số bi đỏ ?

Đáp số: 3045 cách.

30. Trong ngân hàng đề kiểm tra 30 phút môn Vật Lí có 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lý thuyết và 6 bài tập. Người ta cấu tạo thành các đề thi. Biết rằng trong mỗi đề thi phải gồm 3 câu hỏi, trong đó nhất thiết phải có ít nhất 1 câu lý thuyết và 1 bài tập. Hỏi có thể tạo ra bao nhiêu đề thi có dạng như trên ?

Đáp số: 96 cách.

31. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau và nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2.

Đáp số: 56875 cách.

32. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy ?

Đáp số: 225 cách.

33. Hội đồng quản trị của một công ty gồm 12 người, trong đó có 5 nữ. Từ hội đồng quản trị đó người ta bầu ra 1 chủ tịch hội đồng quản trị, 1 phó chủ tịch hội đồng quản trị và 2 ủy viên. Hỏi có bao nhiêu cách bầu sao cho trong 4 người được bầu nhất thiết phải có nữ ?

Đáp số: $A_{12}^2.C_{10}^2 - A_7^2.C_5^2 = 5520$ cách.

34. Lớp có 50 học sinh được chia thành 5 tổ, mỗi tổ có 10 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chia tổ ?

Đáp số: $C_{50}^{10}C_{40}^{10}C_{30}^{10}C_{20}^{10}C_{10}^{10}$ cách.

35. Một tổ có 8 học sinh đi trồng cây. Khi trồng cây cần có 2 em học sinh. Có bao nhiêu cách chia tổ thành những cặp như vậy ?

Đáp số: $C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2$ cách.

36. Giải bóng truyền VTV Cup gồm 9 đội bóng tham dự, trong đó có 6 đội nước ngoài và 3 đội Việt Nam. Ban tổ chức bốc thăm chia làm 3 bảng đấu $A,\ B,\ C$. Hỏi có bao nhiêu cách chia sao cho:

a) Mỗi bảng ba đội ?

Đáp số: $C_9^3C_6^3C_3^3$ cách.

b) Mỗi bảng ba đội và 3 đội bóng của Việt Nam ở ba bảng khác nhau ?

Đáp số: 540 cách.

37. Để sắp xếp 5 bạn nữ và 15 bạn nam thành bốn nhóm $A,\ B,\ C,\ D$, mỗi nhóm có 5 bạn. Việc chia nhóm được thực hiện một cách ngẫu nhiên. Hỏi có bao nhiêu cách chia nhóm sao cho:

a) Thành viên trong nhóm là bất kì ?

Đáp số: $C_{20}^5C_{15}^5C_{10}^5C_5^5$ cách.

b) 5 bạn nữ ở cùng một nhóm.

Đáp số: $4C_{15}^5C_{10}^5C_5^5$ cách.

38. Trong một hộp có 50 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Có bao nhiêu cách lấy ra ba thẻ sao cho có đúng 2 thẻ mang số chia hết cho 8 ?

Đáp số: 660 cách.

39. Có 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Có bao nhiêu cách chọn ra 10 tấm thẻ sao cho có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho 10 ?

Đáp số: 4459455 cách.

40. Trong một hộp có 20 viên bi được đánh số từ 1 đến 20. Có bao nhiêu cách lấy ra 5 viên bi sao cho có đúng 3 viên bi mang số lẻ, 2 viên bi mang số chẵn trong đó có đúng một viên bi mang số chia hết cho 4 ?

Đáp số: 3000 cách.

41. Trong một hộp có 100 viên bi được đánh số từ 1 đến 100. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 viên bị sao cho tổng ba số trên 3 bi chia hết cho 2.

Đáp số: 80850 cách.

42. Trong một hộp có 40 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 40. Có bao nhiêu cách chọn 3 tấm thẻ trong hộp sao cho tổng ba số trên 3 thẻ chia hết cho 3.

Đáp số: 127 cách.

43. Cho hai đường thẳng $a \parallel b$. Trên đường thẳng a có 5 điểm phân biệt và trên đường thẳng b có 10 điểm phân biệt . Hỏi có thể tạo được bao nhiêu tam giác có các đỉnh là các điểm trên hai đường thẳng a và b đã cho ?

Đáp số: 325 tam giác.

44. Cho hai đường thẳng song song $d_1,\ d_2$. Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên d_1 và d_2 đã cho ?

Đáp số: 5950 tam giác.

45. Cho 2 đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt $(n \ge 2)$. Biết có 2800 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Tìm n.

Đáp số: $n = 20$.

46. Cho hai đường thẳng $d_1 \parallel d_2$. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt $(n \in \mathbb{N},\ n \ge 2)$. Biết có 1725 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Hãy tìm n ?

Đáp số: $n = 15$.

47. Từ các chữ số $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ có thể lập được bao nhiêu số

a) Có 9 chữ số sao cho chữ số 0 có mặt 2 lần, chữ số 2 có mặt 3 lần, chữ số 3 có mặt 2 lần các chữ số còn lại có mặt đúng một lần.

Xếp số vào 9 ô trống thỏa yêu cầu đề bài.

- Chọn 2 ô trong 8 ô (bỏ ô đầu tiên) để xếp 2 chữ số 0, có C_8^2 cách.
- Chọn 3 ô trong 7 ô còn lại để xếp 3 chữ số 2, có C_7^3 cách.
- Chọn 2 ô trong 4 ô còn lại để xếp 2 chữ số 3, có C_4^2 cách.
- Xếp 2 chữ số còn lại $\{2;\ 4\}$ vào 2 ô còn lại, có $2!$ cách.

Theo QTN có $C_8^2.C_7^3.C_4^2.2! = 11760$ số.

b) Có 8 chữ số sao cho chữ số 1 có mặt 3 lần, chữ số 4 có mặt 2 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng 1 lần.

Xếp số vào 8 ô trống thỏa yêu cầu đề bài.

Trường hợp ô đầu có thể chứa số 0.

- Chọn 3 ô trong 8 ô để xếp 3 chữ số 1, có C_8^3 cách.
- Chọn 2 ô trong 5 ô còn lại để xếp 2 chữ số 4, có C_5^2 cách.
- Xếp 3 chữ số còn lại vào 3 ô còn lại, có $3!$ cách.

Vậy có $C_8^3.C_5^2.3!$ số thỏa yêu cầu, nhưng có những số có chữ số 0 đứng vị trí đầu tiên.

Trường hợp số 0 **ở ô đầu tiên.**

- Chọn 3 ô trong 7 ô còn lại, xếp 3 chữ số 1, có C_7^3 cách.
- Chọn 2 ô trong 4 ô còn lại, xếp 2 chữ số 4, có C_4^2 cách.
- Xếp 2 số còn lại vào 2 ô còn lại, có $2!$ cách.

Vậy có $C_7^3.C_4^2.2!$ số mà có chữ số 0 ở đầu.

Kết luận: Có $C_8^3.C_5^2.3! - C_7^3.C_4^2.2! = 2940$ số.

48. Từ các chữ số $0,\ 2,\ 4,\ 5,\ 9$ có thể lập được bao nhiêu số

a) Có 9 chữ số sao cho chữ số 0 có mặt 3 lần, chữ số 4 có mặt 2 lần, chữ số 5 có mặt 2 lần các chữ số còn lại có mặt đúng một lần.

b) Có 8 chữ số sao cho chữ số 2 có mặt 3 lần, chữ số 9 có mặt 3 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng 1 lần.

49. Từ các chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ có thể lập được bao nhiêu số có 12 chữ số trong đó chữ số 5 có mặt đúng 2 lần; chữ số 6 có mặt đúng 4 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần ?

Đáp số: 9979200 số.

50. Từ các chữ số $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ có thể lập được bao nhiêu số có 8 chữ số trong đó chữ số 5 có mặt 3 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần ?

Đáp số: 5880 số.

51. Từ các chữ số $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ có bao nhiêu số gồm 6 chữ số phân biệt mà

a) Các chữ số chẵn đứng cạnh nhau.

Đặt $a = 024,\ b = 042,\ c = 204,\ d = 240,$

$e = 420$ và $f = 402.$

- Từ $\{a;1;3;5\}$ ta lập được $3.3! = 18$ số.
- Từ $\{b;1;3;5\}$ ta lập được $3.3! = 18$ số.
- Từ $\{c;1;3;5\}$ ta lập được $4! = 24$ số.
- Từ $\{d;1;3;5\}$ ta lập được $4! = 24$ số.
- Từ $\{e;1;3;5\}$ ta lập được $4! = 24$ số.
- Từ $\{f;1;3;5\}$ ta lập được $4! = 24$ số.

Theo QTC có $18 + 18 + 24 + 24 + 24 + 24 = 132$

b) Số chẵn đứng cạnh và số lẻ đứng cạnh nhau.

Gọi số cần lập là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.

- **TH 1**. $a_1,\ a_2,\ a_3$: chẵn và $a_4,\ a_5,\ a_6$: lẻ.

  a_1 có 2 cách chọn và $\overline{a_2a_3}$ có $2!$ cách chọn.

  $\overline{a_4a_5a_6}$ có $3!$ cách chọn.

  Theo QTN có $2.2!.3! = 24$ số.
- **TH 2**. $a_1,\ a_2,\ a_3$: lẻ và $a_4,\ a_5,\ a_6$: chẵn.

  $\overline{a_1a_2a_3}$ có $3!$ cách chọn.

  $\overline{a_4a_5a_6}$ có $3!$ cách chọn.

  Theo QTN có $3!.3! = 36$ số.
- Theo QTC có $24 + 36 = 60$ số thỏa mãn.

52. Từ các chữ số $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ có bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt mà

a) Các chữ số chẵn đứng cạnh nhau.

b) Số chẵn đứng cạnh và số lẻ đứng cạnh nhau.

Dạng toán 3. Giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình

☆☆☆

Phương pháp giải.

- **Bước 1**. Tìm điều kiện. Ta có các điều kiện thường gặp sau:

Các kí hiệu và công thức	Điều kiện
○ $n! = n.(n-1).(n-2)...3.2.1.$	$n \in \mathbb{N}$
○ $P_n = n!$	$n \in \mathbb{N}^*$
○ $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\begin{cases} n,\ k \in \mathbb{N} \\ 0 \le k \le n \end{cases}$
○ $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$	$\begin{cases} n,\ k \in \mathbb{N} \\ 0 \le k \le n \end{cases}$
○ $C_n^k = C_n^{n-k}$	$\begin{cases} n,\ k \in \mathbb{N} \\ 0 \le k \le n \end{cases}$
○ $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$	$\begin{cases} n,\ k \in \mathbb{N} \\ 1 \le k \le n \end{cases}$

- **Bước 2**. Thu gọn dựa vào những công thức trên và đưa về phương trình đại số. Giải phương trình đại số này tìm được biến.
- **Bước 3**. So với điều kiện để nhận những giá trị cần tìm.

53. Giải phương trình: $P_2.x^2 - P_3.x = 8.$ **ĐS**: $S = \{-1; 4\}.$

....

54. Giải phương trình: $\dfrac{P_x - P_{x-1}}{P_{x+1}} = \dfrac{1}{6}\cdot$ **ĐS**: $S = \{2; 3\}.$

....

....

55. Giải phương trình: $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72.$ **ĐS**: $n = 8.$

....

....

56. Giải phương trình: $\dfrac{n!}{(n-2)!} - \dfrac{n!}{(n-1)!} = 3.$ **ĐS**: $n = 3.$

....

....

57. Giải phương trình: $A_n^3 = 20n$. **ĐS**: $n = 6$.

58. Giải phương trình: $A_n^3 + 2C_n^2 = 16n$. **ĐS**: $n = 5$.

59. Giải phương trình: $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$. **ĐS**: $x = 5$.

60. Giải phương trình: $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$. **ĐS**: $x = 10$.

61. Cho $n \in \mathbb{Z}^+$ thỏa $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$. Chứng minh: $\dfrac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!} = \dfrac{3}{4}\cdot$

62. Giải bất phương trình: $A_n^3 + 15 < 15n$. **ĐS**: $n = 3 \ \vee \ n = 4$.

63. Giải bất phương trình: $2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 < 30$. **ĐS**: $x = 2$.

ĐỀ RÈN LUYỆN SỐ 01

Câu 1. Với k và n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \le n$, mệnh đề nào **đúng** ?

A. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\cdot$ **B.** $C_n^k = \dfrac{n!}{k!}\cdot$

C. $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}\cdot$ **D.** $C_n^k = \dfrac{k!(n-k)!}{\text{n!}}\cdot$

Câu 2. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 5 học sinh vào 5 ghế xếp thành một dãy ?

A. $120.$ **B.** $240.$ **C.** $90.$ **D.** $60.$

Câu 3. Trong một lớp học có 20 bạn học sinh, hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một bạn để làm lớp trưởng và một bạn khác làm lớp phó ?

A. $A_{20}^{18}.$ **B.** $A_{20}^{2}.$ **C.** $20^2.$ **D.** $C_{20}^{2}.$

Câu 4. Có bao nhiêu đoạn thẳng được tạo thành từ 10 điểm phân biệt khác nhau ?

A. $45.$ **B.** $90.$ **C.** $35.$ **D.** $55.$

Câu 5. Số véctơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong 6 đỉnh của lục giác bằng

A. $P_6.$ **B.** $C_6^2.$ **C.** $A_6^2.$ **D.** $36.$

Câu 6. Cần chọn 3 người đi công tác từ một tổ có 30 người, khi đó số cách chọn là

A. $A_{30}^3.$ **B.** $3^{30}.$ **C.** $10.$ **D.** $C_{30}^3.$

Câu 7. Trong một buổi khiêu vũ có 20 nam và 18 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đôi nam nữ để khiêu vũ ?

A. $C_{38}^2.$ **B.** $A_{38}^2.$ **C.** $C_{20}^2C_{18}^1.$ **D.** $C_{20}^1C_{18}^1.$

Câu 8. Có 3 bạn nam và 3 bạn nữ được xếp vào một ghế dài có 6 vị trí. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ lẫn nhau ?

A. $48.$ **B.** $72.$

C. $24.$ **D.** $36.$

Câu 9. Cho hai đường thẳng song song. Trên đường thứ nhất có 10 điểm, trên đường thứ hai có 15 điểm, có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các điểm đã cho.

A. 1725. **B.** 1050.

C. 675. **D.** 1275.

Câu 10. Trên đường thẳng d_1 cho 5 điểm phân biệt, trên đường thẳng $d_2 \parallel d_1$ cho n điểm phân biệt. Biết có 175 tam giác được tạo thành mà 3 đỉnh lấy từ $n+5$ điểm trên thì n là

A. $n = 9.$ **B.** $n = 8.$

C. $n = 10.$ **D.** $n = 7.$

Câu 11. Trong một đa giác lồi n cạnh, số đường chéo của đa giác là

A. $C_n^2.$ **B.** $A_n^2.$ **C.** $A_n^2 - n.$ **D.** $C_n^2 - n.$

Câu 12. Có bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$

A. $A_5^4.$ **B.** $P_5.$ **C.** $C_5^4.$ **D.** $P_4.$

Câu 13. Cho tập $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau ?

A. $720.$ **B.** $360.$ **C.** $120.$ **D.** $24.$

Câu 14. Cho tập $A = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được tạo từ tập A.

A. A_{10}^4. **B.** $9.C_9^4$.

C. $9.A_9^4$. **D.** C_{10}^4.

Câu 15. Nghiệm của phương trình $A_n^3 = 20n$ là

A. $n = 6$. **B.** $n = 5$.

C. $n = 8$. **D.** $n = -3$.

Câu 16. Cho $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $C_n^5 = 2002$. Tính A_n^5.

A. 2007. **B.** 10010.

C. 40040. **D.** 240240.

Câu 17. Tổng các nghiệm của bất phương trình $A_x^3 + 15 < 15x$ bằng

A. 7. **B.** 9.

C. 14. **D.** 20.

Câu 18. Có bao nhiêu cách chia hết 4 đồ vật khác nhau cho 3 người, biết rằng mỗi người nhận được ít nhất 1 đồ vật.

A. 72. **B.** 18.

C. 12. **D.** 36.

Câu 19. Cho đa giác đều $2n$ đỉnh $(n \ge 2,\ n \in \mathbb{N})$. Biết số hình chữ nhật được tạo thành từ $2n$ đỉnh của đa giác đó là 45. Tìm n.

A. $n = 12$. **B.** $n = 10$.

C. $n = 9$. **D.** $n = 45$.

Câu 20. Có 4 cặp vợ chồng được xếp ngồi trên một chiếc ghế dài có 8 chỗ. Biết rằng mỗi người vợ chỉ ngồi cạnh chồng của mình hoặc ngồi cạnh một người phụ nữ khác. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi thỏa mãn.

A. 816. **B.** 18.

C. $8!$. **D.** 604.

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 01

1.A	2.A	3.B	4.A	5.C	6.D	7.D	8.B	9.A	10.D
11.D	12.A	13.B	14.C	15.A	16.D	17.A	18.D	19.B	20.A

ĐỀ RÈN LUYỆN SỐ 02

Câu 1. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau ?

A. $A_n^k = k!C_n^{n-k}$. **B.** $C_n^k = k.A_n^k$. **C.** $A_n^k = k.C_n^k$. **D.** $C_n^k = k!A_n^k$.

Câu 2. Có $n,\ (n > 0)$ phần tử lấy ra $k,\ (0 \le k \le n)$ phần tử đem đi sắp xếp theo một thứ tự nào đó,mà khi thay đổi thứ tự ta được cách sắp xếp mới. Khi đó số cách sắp xếp là

A. C_n^k. **B.** A_k^n. **C.** A_n^k. **D.** P_n.

Câu 3. Từ các chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 4$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau ?

A. 12. **B.** 24. **C.** 42. **D.** 4^4.

Câu 4. Có bao nhiêu cách chọn 5 cầu thủ từ 11 trong một đội bóng để thực hiện đá 5 quả luân lưu $11\ \text{m}$, theo thứ tự quả thứ nhất đến quả thứ năm.

A. A_{11}^{5}. **B.** C_{11}^{5}. **C.** $A_{11}^{2}.5!$. **D.** C_{10}^{5}.

Câu 5. Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là

A. A_{10}^{8}. **B.** A_{10}^{2}. **C.** C_{10}^{2}. **D.** 10^{2}.

Câu 6. Nhân dịp lễ sơ kết học kì I, để thưởng cho ba học sinh có thành tích tốt nhất lớp cô An đã mua 10 cuốn sách khác nhau và chọn ngẫu nhiên ra 3 cuốn để phát thưởng cho 3 học sinh đó mỗi học sinh nhận 1 cuốn. Hỏi cô An có bao nhiêu cách phát thưởng.

A. C_{10}^{3}. **B.** A_{10}^{3}. **C.** 10^{3}. **D.** $3.C_{10}^{3}$.

Câu 7. Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 học sinh thành một hàng dọc ?

A. 5^{5}. **B.** $5!$. **C.** $4!$. **D.** 5.

Câu 8. Có tất cả bao nhiêu cách chia 10 người thành hai nhóm, một nhóm có 6 người và một nhóm có 4 người ?

A. 210. **B.** 120.
C. 100. **D.** 140.

Câu 9. Trong kho đèn trang trí đang còn 5 bóng đèn loại I, 7 bóng đèn loại II, các bóng đèn đều khác nhau về màu sắc và hình dáng. Lấy ra 5 bóng đèn bất kỳ. Hỏi có bao nhiêu khả năng xảy ra số bóng đèn loại I nhiều hơn số bóng đèn loại II ?

A. 246. **B.** 3480.
C. 245. **D.** 3360.

Câu 10. Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lý nam. Lập một đoàn công tác gồm 3 người cần có cả nam và nữ, có cả nhà toán học và vật lý thì có bao nhiêu cách.

A. 120. **B.** 90.
C. 80. **D.** 220.

Câu 11. Tổ 1 lớp 11A có 6 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra 4 học sinh của tổ 1 để lao động vệ sinh cùng cả trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 4 học sinh trong đó có ít nhất một học sinh nam ?

A. 600. **B.** 25.
C. 325. **D.** 30.

Câu 12. Có 9 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 9. Có bao nhiêu cách chọn ra 2 tấm thẻ mà nhân 2 số trên 2 thẻ lại với nhau là một số chẵn.

A. 10. **B.** 26.
C. 36. **D.** 27.

Câu 13. Cho tập hợp $A = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$. Hỏi từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho một trong 3 chữ số đầu tiên phải bằng 1.

A. 65. **B.** 2280.
C. 2520. **D.** 2802.

Câu 14. Có bao nhiêu số chẵn mà mỗi số có 4 chữ số đôi một khác nhau ?

A. 2520. **B.** 50000.
C. 4500. **D.** 2296.

Câu 15. Từ các chữ số $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5 ?

A. 72. **B.** 120.

C. 54. **D.** 69.

Câu 16. Trên đường thẳng d_1 cho 5 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 song song với đường thẳng d_1 cho n điểm phân biệt. Biết có tất cả 175 tam giác được tạo thành mà 3 đỉnh lấy từ $(n+5)$ điểm trên. Giá trị của n là

A. $n=10$.

B. $n=7$.

C. $n=8$.

D. $n=9$.

Câu 17. Cho đa giác đều $A_1A_2A_3\ldots A_{30}$ nội tiếp trong đường tròn (O). Tính số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 30 đỉnh của đa giác đó.

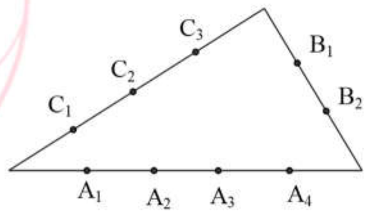
A. 105.

B. 27405.

C. 27406.

D. 106.

Câu 18. Cho một tam giác, trên ba cạnh của nó lấy 9 điểm như hình vẽ. Có tất cả bao nhiêu tam giác có ba đỉnh thuộc 9 điểm đã cho ?



A. 79.

B. 48.

C. 55.

D. 24.

Câu 19. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau chọn từ tập $A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ sao cho mỗi số lập được luôn có mặt chữ số 3.

A. 72.

B. 36.

C. 32.

D. 48.

Câu 20. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa chữ số 1 và chữ số 3 ?

A. 2942.

B. 5880.

C. 7440.

D. 3204.

BẢNG ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 02

1.A	**2.C**	**3.B**	**4.A**	**5.C**	**6.B**	**7.B**	**8.A**	**9.A**	**10.B**
11.C	**12.B**	**13.B**	**14.D**	**15.C**	**16.B**	**17.A**	**18.A**	**19.B**	**20.C**

§ 3. NHÒ THÖC NEWTON

☆☆☆

1. Nhị thức Newton: Cho $a,\ b$ là các số thực và $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.a^{n-k}.b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n}$$

- $(x+2)^4 = \sum_{k=0}^{4} C_4^k.x^{4-k}.2^k = C_4^0.x^4.2^0 + C_4^1.x^3.2^1 + C_4^2.x^2.2^2 + C_4^3.x^1.2^3 + C_4^4.x^0.2^4$

  $= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16.$

- $(x+2y)^5 =$ ....

  ....

- $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6 =$ ....

  ....

  ....

- $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^6 =$ ....

  ....

  ....

2. Nhận xét:

— Trong khai triển $(a \pm b)^n$ có $n+1$ số hạng và các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và số hạng cuối thì bằng nhau: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

— Số hạng tổng quát dạng: $T_{n+1} = C_n^k.a^{n-k}.b^k$ và số hạng thứ N thì $k = N-1$.

— Trong khai triển $(a-b)^n$ thì dấu đan nhau, nghĩa là $+$, rồi $-$, rồi $+$, ...

— Số mũ của a giảm dần, số mũ của b tăng dần nhưng tổng số mũ a và b bằng n.

3. Tam giác Pascal:

Các hệ số của khai triển: $(a+b)^0,\ (a+b)^1,\ (a+b)^2,\ \ldots,\ (a+b)^n$ có thể xếp thành một tam giác gọi là tam giác PASCAL.

$n=0:$	1							
$n=1:$	1	1						
$n=2:$	1	2	1					
$n=3:$	1	3	3	1				
$n=4:$	1	4	6	4	1			
$n=5:$	1	5	10	10	5	1		
$n=6:$	1	6	15	20	15	6	1	
$n=7:$	1	7	21	35	35	21	7	1

....

Hằng đẳng thức

$$\boxed{C_{n-1}^{k-1}} + \boxed{C_{n-1}^{k}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{C_n^k}$$

Dạng toán 1. Tìm hệ số hoặc số hạng trong khai triển nhị thức Newton

☞ **Cần nhớ**: $\boxed{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k}.b^k}$ và $x^n.x^m = x^{m+n}$, $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$, $(x.y)^n = x^n.y^n$, $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$.

1. Tìm số hạng không chứa x (độc lập với x) trong khai triển $\left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^5$, $\forall x \neq 0$.

Ta có: $a = x^3$, $b = -1/x^2$ và $n = 5$.

Số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_5^k.(x^3)^{5-k}.\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)^k$

$= C_5^k.x^{15-3k}.\dfrac{(-1)^k}{x^{2k}} = C_5^k.(-1)^k.x^{15-5k}$.

Số hạng không chứa $x \Rightarrow 15 - 5k = 0 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy số hạng cần tìm là $C_5^3.(-1)^3 = -10$.

2. Tìm số hạng không chứa x (độc lập với x) trong khai triển $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{12}$, $\forall x \neq 0$.

ĐS: 924.

3. Tìm số hạng không chứa x (độc lập với x) trong khai triển $\left(x + \dfrac{1}{x^4}\right)^{10}$, $\forall x \neq 0$.

ĐS: 45.

4. Tìm số hạng không chứa x (độc lập với x) trong khai triển $\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x}\right)^{12}$, $\forall x \neq 0$.

ĐS: 924.

5. Tìm số hạng không chứa x (độc lập với x) trong khai triển $\left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)^6$, $\forall x \neq 0$.

ĐS: 240.

6. Tìm số hạng không chứa x (độc lập với x) trong khai triển $\left(2x - \dfrac{1}{x}\right)^{10}$, $\forall x \neq 0$.

ĐS: -8064.

7. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{16} trong khai triển nhị thức $(x^2 - 2x)^{10}$.

Số hạng TQ: $T_{k+1} = C_{10}^k.(x^2)^{10-k}.(-2x)^k$

$= C_{10}^k.x^{2(10-k)}.(-2)^k.x^k = C_{10}^k.(-2)^k.x^{20-2k}.x^k$

$= C_{10}^k.(-2)^k x^{20-k}$.

Vì có số hạng $x^{16} \Rightarrow 20 - k = 16 \Rightarrow k = 4$.

Hệ số cần tìm là $C_{10}^4.(-2)^4 = 3360$.

8. Tìm hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển nhị thức $(1 - 3x)^{11}$.

ĐS: 336798.

9. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{15} trong khai triển nhị thức $(3x-x^2)^{12}$.

ĐS: -4330260.

10. Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển nhị thức $(x-3)^9$.

ĐS: -30618.

11. Tìm hệ số của số hạng chứa $x^{12}y^{13}$ trong khai triển nhị thức $(x+y)^{25}$.

ĐS: 5200300.

12. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8y^9 trong khai triển nhị thức $(2x-3y)^{17}$.

ĐS: $-C_{17}^9.2^{17-9}.3^9 = -122494394880$.

13. Tìm hệ số của số hạng chứa x^6y^7 trong khai triển nhị thức $(2x+y)^{13}$.

ĐS: 109824.

14. Tìm hệ số của số hạng chứa $x^{25}y^{10}$ trong khai triển nhị thức $(x^3-xy)^{15}$.

ĐS: 3003.

15. * Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển nhị thức $(1+x+3x^2)^{10}$.

Ta có: $(1+x+3x^2)^{10} = [1+(x+3x^2)]^{10}$

$$(a=1,\ b=x+3x^2,\ n=10)$$

$$=\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k.1^{10-k}.(x+3x^2)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x+3x^2)^k$$

$$(a=x,\ b=3x^2,\ n=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k.\sum_{p=0}^{k} C_k^p.x^{k-p}.(3x^2)^p$$

$$=\sum_{k=0}^{10}\sum_{p=0}^{k} C_{10}^k C_k^p x^{k-p} 3^p x^{2p} = \sum_{k=0}^{10}\sum_{p=0}^{k} C_{10}^k.C_k^p.3^p x^{k+p}.$$

Vì có số hạng $x^4 \Rightarrow k+p=4$ với điều kiện $0\le p\le k\le 10,\ (p,\ k\in\mathbb{N})$ nên có bảng:

p	0	1	2	3
$k=4-p$	4	3	2	1 (L)

Do đó hệ số của số hạng chứa x^4 là:

$C_{10}^4C_4^0.3^0 + C_{10}^3C_3^1.3^1 + C_{10}^2C_2^2.3^2 = 1695$.

16. * Tìm hệ số của số hạng chứa x^{17} trong khai triển nhị thức $(1+x+2x^2)^{10}$.

ĐS: 38400.

17. * Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức $(1+x^2-x^3)^8$.

ĐS: 238.

18. * Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển nhị thức $(x^2+x-1)^5$.

ĐS: 5.

19. * Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển $P(x)=(1+x+x^2+x^3)^5$.

Ta có: $P(x)=[(1+x)+x^2(1+x)]^5$

$=[(1+x)(1+x^2)]^5=(1+x)^5.(1+x^2)^5$

$=\sum_{k=0}^{5}C_5^k 1^{5-k}x^k\sum_{p=0}^{5}C_5^p 1^{5-p}x^{2p}=\sum_{k=0}^{5}\sum_{p=0}^{5}C_5^kC_5^p.x^{k+2p}.$

Vì có số hạng x^{10} nên $k+2p=10$ và có bảng

p	2	3	4	5	6
$k=10-2p$	6	4	2	0	-2
$(0\le p;\ k\le 5)$	(L)	(N)	(N)	(N)	(L)

Do đó hệ số của số hạng chứa x^{10} là

$C_5^4C_5^3+C_5^2C_5^4+C_5^0C_5^5=101.$

20. * Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $P(x)=(1+x+x^2+x^3)^{10}$.

ĐS: 1902.

21. * Xét $P(x)=x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$. Tìm hệ số x^5 trong khai triển $P(x)$.

Ta có $P(x)=x\sum_{k=0}^{5}C_5^k(-2x)^k+x^2\sum_{p=0}^{10}C_{10}^p(3x)^p$

$=\sum_{k=0}^{5}C_5^k.x.(-2)^k.x^k+\sum_{p=0}^{10}C_{10}^p.x^2.3^p.x^p$

$=$

ĐS: 3320.

22. * Xét $P(x)=x(2x-1)^6+(3x-1)^8$. Tìm hệ số x^5 trong khai triển $P(x)$.

ĐS: -13368.

23. * Tìm hệ số của x^6 trong khai triển biểu thức $P(x)=(2x+1)^6\left(x^2+x+\dfrac{1}{4}\right)^4$.

Ta có: $P(x)=(2x+1)^6\left(\dfrac{4x^2+4x+1}{4}\right)^4$

$=(2x+1)^6.\left[\dfrac{(2x+1)^2}{4}\right]^4=(2x+1)^6.\dfrac{(2x+1)^8}{4^4}$

$=\dfrac{1}{256}(2x+1)^{14}=\dfrac{1}{256}\sum\limits_{k=0}^{14}C_{14}^k.(2x)^{14-k}.1^k$

Đáp số: 3003/4.

24. * Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển $P(x)=\left(\dfrac{x^2}{4}+x+1\right)^2(x+2)^{15}$.

ĐS: $a_{10}=2956096$.

25. * Tìm hệ số của x^5 trong khai triển sau: $(2x+1)^4+(2x+1)^5+(2x+1)^6+(2x+1)^7$.

Đáp số: 896.

26. * Tìm hệ số của x^5 trong khai triển sau: $(x+1)^6+(x+1)^7+(x+1)^8+\cdots+(x+1)^{12}$

ĐS: 1715.

27. Cho $(1-2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$. Tìm a_5, biết rằng $a_0+a_1+a_2=71$.

Ta có: $(1-2x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(-2x)^k=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(-2)^kx^k$

Dạng tổng quát của hệ số là $a_k=C_n^k(-2)^k$.

- Với $k=0\Rightarrow a_0=C_n^1(-2)^0=1$.
- Với $k=1\Rightarrow a_1=-2C_n^1=-2n$.
- Với $k=2\Rightarrow a_2=4C_n^2$.

Có $a_0+a_1+a_2=71\Leftrightarrow 1-2n+4C_n^2=71$

$\Leftrightarrow$

Đáp số: $a_5=-672$.

28. Cho $(1-4x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$. Tìm a_5, biết $a_0+a_1+a_2=1197$.

ĐS: $a_5=-1317888$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 1

Câu 1. Có bao nhiêu số hạng trong khai triển nhị thức $(2x-3)^{2018}$.

A. 2017. **B.** 2018.
C. 2019. **D.** 2020.

Câu 2. Trong khai triển $(a+b)^n$, số hạng tổng quát của khai triển là

A. $C_n^k a^{n-k} b^k$. **B.** $C_n^{k-1} a^{n+1} b^{n-k+1}$.
C. $C_n^k a^{n-k} b^{n-k}$. **D.** $C_n^{k+1} a^{n-k+1} b^{k+1}$.

Câu 3. Tìm số hạng chứa x^3y^3 trong khai triển $(x+2y)^6$ thành đa thức.

A. $120x^3y^3$. **B.** $160x^3y^3$.
C. $20x^3y^3$. **D.** $8x^3y^3$.

Câu 4. Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển nhị thức Niutơn $(2x-1)^6$.

A. 160. **B.** -960.
C. 960. **D.** -160.

Câu 5. Giả sử có khai triển $(1-2x)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$. Tìm a_5.

A. $672x^5$. **B.** -672.
C. $-672x^5$. **D.** 672.

Câu 6. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{10}$.

A. $C_{10}^6.2^6.(-3)^4$. **B.** $C_{10}^6.2^4.(-3)^6$.
C. $-C_{10}^4.2^6.(-3)^4$. **D.** $-C_{10}^6.2^4.3^6$.

Câu 7. Số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = \left(2x - \dfrac{1}{x}\right)^{10}$ là số hạng thứ

A. 6. **B.** 7.
C. 8. **D.** 9.

Câu 8. Hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển nhị thức $\left(\dfrac{3}{x} - \dfrac{x}{3}\right)^{12}$ (với $x \neq 0$) là

A. $-\dfrac{220}{729}$. **B.** $\dfrac{220}{729}x^6$.
C. $-\dfrac{220}{729}x^6$. **D.** $\dfrac{220}{729}$.

Câu 9. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)^6$ là

A. 60. **B.** 120.
C. 480. **D.** 240.

Câu 10. Hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^9$, (với $x \neq 0$) bằng

A. 36. **B.** 84.
C. 126. **D.** 54.

Câu 11. Số hạng chứa x^4 trong khai triển $(2+x)^7$ thành đa thức là

A. $8C_7^4$. **B.** C_7^4.
C. $8C_7^4x^4$. **D.** $C_7^4x^4$.

Câu 12. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{45}$ là

A. $-C_{45}^5$. **B.** C_{45}^5.
C. $-C_{45}^{15}$. **D.** C_{45}^{15}.

Câu 13. Trong khai triển của $(1+3x)^9$ số hạng thứ 3 theo số mũ tăng dần của x là

A. $180x^2$. **B.** $120x^2$.
C. $324x^2$. **D.** $4x^2$.

Câu 14. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton $\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^{21}$.

A. $2^7C_{21}^7$. **B.** $2^8C_{21}^8$.
C. $-2^8C_{21}^8$. **D.** $-2^7C_{21}^7$.

Câu 15. Cho x là số thực dương, khai triển nhị thức $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$ ta có hệ số của số hạng chứa x^m bằng 495. Tập hợp giá trị của m là

A. $\{4;8\}$. **B.** $\{0\}$.
C. $\{0;12\}$. **D.** $\{8\}$.

Câu 16. Biết hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(3x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ là $3^4C_n^5$. Khi đó giá trị của n bằng

A. 15. **B.** 9.
C. 16. **D.** 12.

Câu 17. * Tìm hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển $x^3(1-x)^8$.

A. -28. **B.** 70.
C. -56. **D.** 56.

Câu 18. * Tìm hệ số x^5 trong khai triển $x(2x-1)^6+(x-3)^8$.

A. -1752. **B.** 1272.
C. 1752. **D.** -1272.

Câu 19. * Hệ số của x^4 trong khai triển đa thức $f(x)=x(1-x)^5+x^2(1+2x)^{10}$ bằng

A. 965. **B.** 263.
C. 632. **D.** 956.

Câu 20. * Giả sử $(1-x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$. Giá trị $S=a_0+a_2+\cdots+a_{2n}$ bằng

A. $\dfrac{3^n+1}{2}$. **B.** $\dfrac{3^n}{2}$.
C. $\dfrac{3^n-1}{2}$. **D.** 2^n+1.

ĐÁP ÁN BÀI TẬP VỀ NHÀ 1

1.C	2.A	3.B	4.D	5.B	6.B	7.A	8.A	9.A	10.B
11.C	12.C	13.C	14.D	15.C	16.B	17.C	18.D	19.A	20.A

BÀI TẬP VỀ NHÀ 2

Câu 1. Số hạng tổng quát trong khai triển của $(1-2x)^{12}$ là

A. $(-1)^kC_{12}^k2x^k$. **B.** $-C_{12}^k2^kx^k$.
C. $(-1)^kC_{12}^k2^kx^k$. **D.** $C_{12}^k2^kx^{12-k}$.

Câu 2. Hệ số của x^5 trong khai triển $(1+x)^{12}$ là

A. 820. **B.** 210.
C. 792. **D.** 220.

Câu 3. Hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển $(1-x)^{10}$ là

A. 30. **B.** -120.
C. 120. **D.** -30.

Câu 4. Hệ số của x^{10} trong biểu thức $P=(2x-3x^2)^5$ bằng

A. 357. **B.** 243.
C. 628. **D.** -243.

Câu 5. Trong khai triển biểu thức $(x+y)^{21}$, hệ số của số hạng chứa $x^{13}y^{8}$ là

A. 116280. **B.** 293930.
C. 203490. **D.** 1287.

Câu 6. Trong khai triển $(a-2b)^{8}$, hệ số của số hạng chứa $a^{4}.b^{4}$ là

A. 560. **B.** 70.
C. 1120. **D.** 140.

Câu 7. Tìm hệ số của x^{6} trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{10}$.

A. $C_{10}^{6}.2^{6}.(-3)^{4}$. **B.** $C_{10}^{6}.2^{4}.(-3)^{6}$.
C. $-C_{10}^{4}.2^{6}.(-3)^{4}$ **D.** $-C_{10}^{6}.2^{4}.3^{6}$.

Câu 8. Hệ số của x^{6} trong khai triển $\left(\frac{1}{x}+x^{3}\right)^{10}$ bằng

A. 792 **B.** 210
C. 165 **D.** 252

Câu 9. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{5} trong khai triển $\left(x^{2}+\frac{2}{x}\right)^{7}$.

A. 84. **B.** 672.
C. 560. **D.** 280.

Câu 10. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x-\frac{1}{x^{2}}\right)^{6}$.

A. 15. **B.** 240.
C. -240. **D.** -15.

Câu 11. Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển biểu thức $\left(3x^{3}-\frac{2}{x^{2}}\right)^{5}$.

A. -240. **B.** 810.
C. -810. **D.** 240.

Câu 12. Tìm số hạng chứa x^{5} trong khai triển $\left(\frac{x^{2}}{2}-\frac{1}{x}\right)^{7}$.

A. $\frac{35}{16}x^{5}$. **B.** $-\frac{35}{16}x^{5}$.
C. $-\frac{16}{35}x^{5}$. **D.** $\frac{16}{35}x^{5}$.

Câu 13. Xét khai triển: $(5x-1)^{2017}=a_{2017}x^{2017}+a_{2016}x^{2016}+\cdots+a_{1}x+a_{0}$. Giá trị a_{2000} bằng

A. $-C_{2017}^{17}.5^{17}$. **B.** $C_{2017}^{17}.5^{17}$.
C. $-C_{2017}^{17}.5^{2000}$. **D.** $C_{2017}^{17}.5^{2000}$.

Câu 14. Hệ số của x^2 trong khai triển của $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^7+(2x+1)^2$ bằng

A. 4. **B.** 40.
C. 35. **D.** 39.

Câu 15. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x)=(x+1)^6+(x+1)^7+\cdots+(x+1)^{12}$.

A. 1715. **B.** 1711.
C. 1287. **D.** 1716.

Câu 16. *Tìm hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển nhị thức Newton $(1+2x)(3+x)^{11}$.

A. 4620. **B.** 1380.
C. 9405. **D.** 2890.

Câu 17. *Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x)=x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$.

A. 3240. **B.** 3320.
C. 80. **D.** 259200.

Câu 18. *Cho khai triển $(1-2x)^9=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_9x^9$. Tổng $a_0+a_1+a_2$ bằng

A. 127. **B.** 46.
C. -2816. **D.** 163.

Câu 19. *Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $f(x)=(1-3x+2x^3)^{10}$ thành đa thức.

A. 204120. **B.** -262440.
C. -4320. **D.** -62640.

Câu 20. *Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $(1+x+x^2+x^3)^{10}$.

A. 582. **B.** 1902.
C. 7752. **D.** 252.

ĐÁP ÁN BÀI TẬP VỀ NHÀ 2

1.C	2.C	3.B	4.D	5.C	6.C	7.B	8.B	9.D	10.B
11.C	12.C	13.C	14.D	15.A	16.C	17.B	18.A	19.D	20.B

Dạng toán 2. Chứng minh hoặc tính tổng

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.a^{n-k}.b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

- Số mũ của a giảm dần, số mũ của b tăng dần nhưng tổng số mũ a và b bằng n.
- Trong khai triển $(a-b)^n$ thì dấu đan nhau, nghĩa là $+,$ rồi $-,$ rồi $+, \ldots\ldots$

29. Chứng minh: $3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 - \cdots\cdots\cdots - 3C_{16}^{15} + C_{16}^{16} = 2^{16}$.

☞ ***Suy luận***:

- *Số mũ của số* 3 *giảm dần* $\longrightarrow$ *Chọn* $a = 3$.
- *Không có số mũ của số nào tăng* $\longrightarrow$ *Chọn* $b = 1$ *(vì* $1^0 = 1^1 = 1^2 = \cdots = 1^{16} = 1$).
- *Dấu đan nhau (cộng rồi trừ, cộng trừ…..) nên chọn khai triển* $(a-b)^n = (3-1)^n$.
- *Vì tổ hợp dạng:* $C_{16}^0,\ C_{16}^1,\ C_{16}^2,\ \ldots C_{16}^{16}$ *nên chọn* $n = 16$.

Lời giải tham khảo

Xét $(3-1)^{16} = \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k.3^{16-k}.(-1)^k = 3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 - \cdots - 3C_{16}^{15} + C_{16}^{16}$

$\Leftrightarrow 2^{16} = 3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 - \cdots - 3C_{16}^{15} + C_{16}^{16}$ (đpcm).

30. Tính tổng $S = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + \cdots\cdots + 2^5C_5^5$.

....

....

Đáp số: $S = 3^5$. ....

31. Tính tổng $S = 4^0C_8^0 + 4^1C_8^1 + 4^2C_8^2 + \cdots\cdots + 4^8C_8^8$.

....

....

Đáp số: $S = 5^8$. ....

32. Tìm $n \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $3^nC_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - 3^{n-3}C_n^3 + \cdots\cdots + (-1)^nC_n^n = 2048$.

....

....

....

Đáp số: $n = 11$. ....

33. Tìm $n \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 4095$.

....

....

....

....

Đáp số: $n = 12$. ....

Dạng toàn chẵn hoặc toàn lẻ

☞ Trong biểu thức có $C_n^{\boxed{0}} + C_n^{\boxed{2k}} + \ldots$ (toàn chẵn) hoặc $C_n^{\boxed{1}} + C_n^{\boxed{2k+1}} + \ldots$ (toàn lẻ) thì đó là dấu hiệu nhận dạng khai triển hai biểu thức dạng $(a-b)^n$ và $(a+b)^n$ khi chọn $a,\ b$ rồi cộng lại (khi toàn chẵn) hoặc trừ đi (khi toàn lẻ) theo từng vế.

34. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn: $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + C_{2n}^6 + \cdots\cdots + C_{2n}^{2n} = 512.$

☞ ***Suy luận***: *Đây là dạng toàn chẵn, sẽ khai triển 2 nhị thức $(a+b)^{2n}$ và $(a-b)^{2n}$ rồi cộng lại.*

- *Không có số mũ của số nào giảm* $\longrightarrow$ *Chọn* $a = 1.$
- *Không có số mũ của số nào tăng* $\longrightarrow$ *Chọn* $b = 1.$

Lời giải tham khảo

Xét $(1+1)^{2n} = \sum\limits_{k=0}^{2n} C_{2n}^k.1^{2n-k}.1^k \quad = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + C_{2n}^4 + \cdots + C_{2n}^{2n}$ (1)

Xét $(1-1)^{2n} = \sum\limits_{k=0}^{2n} C_{2n}^k.1^{2n-k}.(-1)^k = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + C_{2n}^4 - \cdots + C_{2n}^{2n}$ (2)

Lấy $(1)+(2) \Rightarrow 2^{2n} + 0^{2n} = 2.(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + C_{2n}^6 + \cdots + C_{2n}^{2n})$

$\Leftrightarrow 2^{2n} = 2.512 \Leftrightarrow 2^{2n} = 1024 \Leftrightarrow 2^{2n} = 2^{10} \Leftrightarrow 2n = 10 \Leftrightarrow n = 5.$

35. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \cdots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024.$

....

....

....

....

Đáp số: $n = 5.$

36. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn: $C_{2014}^2 + C_{2014}^4 + C_{2014}^6 + C_{2014}^8 + \cdots + C_{2014}^{1006} = 2^{503n} - 1.$

....

....

....

....

....

Đáp số: $n = 4.$

37. Chứng minh: $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}.$

....

....

....

....

....

....

38. Tính tổng: $S = C_{100}^0 + C_{100}^2 + C_{100}^4 + \cdots + C_{100}^{100}$.

ĐS: $S = 2^{99}$.

39. Tính tổng: $S = C_{2001}^0 + 3^2 C_{2001}^2 + 3^4 C_{2001}^4 + \cdots + 3^{2020} C_{2001}^{2000}$.

ĐS: $S = 4^{2001} - 2^{2001}$.

40. * Tìm số tự nhiên n thỏa mãn: $C_{2n}^0 + 3^2 C_{2n}^2 + 3^4 C_{2n}^4 + \cdots + 3^{2n} C_{2n}^{2n} = 2^{15}(2^{16}+1)$.

ĐS: $n = 8$.

Nhóm bài toán tính tổng hoặc chứng minh dựa vào tính chất hoặc biến đổi (nâng cao)

41. * Tính tổng: $S = \dfrac{1}{2!.2012!} + \dfrac{1}{4!.2010!} + \cdots + \dfrac{1}{2012!.2!} + \dfrac{1}{2014!}$.

☞ ***Suy luận***: *Dựa vào công thức tổ hợp* $C_n^k = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$, *có:* $k + (n-k) = n$ *nên sẽ phân tích* $\dfrac{1}{2!.2012!} = \dfrac{1}{2!.(2014-2)!}$ *và gợi cho ta nhân thêm hai vế cho* $2014!$ *sẽ đưa được về* C_{2014}^2.

Lời giải tham khảo

Ta có: $S = \dfrac{1}{2!.2012!} + \dfrac{1}{4!.2010!} + \cdots + \dfrac{1}{2012!.2!} + \dfrac{1}{2014!}$

$\Leftrightarrow 2014!.S = \dfrac{2014!}{2!.2012!} + \dfrac{2014!}{4!.2010!} + \cdots + \dfrac{2014!}{2012!.2!} + \dfrac{2014!}{2014!}$

$\Leftrightarrow 2014!.S = \dfrac{2014!}{2!.(2014-2)!} + \dfrac{2014!}{4!.(2014-4)!} + \cdots + \dfrac{2014!}{2012!.(2014-2)!} + \dfrac{2014!}{2014!.(2014-2014)!}$

$\Leftrightarrow 2014!.S = C_{2014}^2 + C_{2014}^4 + C_{2014}^6 + \cdots + C_{2014}^{2012} + C_{2014}^{2014}$.

Xét

Đáp số: $S = (2^{2013} - 1)/2014!$.

42. * Tính tổng: $S=\dfrac{1}{2019!}+\dfrac{1}{3!.2017!}+\cdots+\dfrac{1}{2017!.3!}+\dfrac{1}{2020!}\cdot$

Đáp số: $S=\dfrac{2^{2019}-1}{2020!}$.

43. *Tính tổng: $S=\dfrac{C_{2013}^0}{1}+\dfrac{C_{2013}^1}{2}+\dfrac{C_{2013}^2}{3}+\cdots+\dfrac{C_{2013}^{2013}}{2014}\cdot$

Ta có: $S=\dfrac{C_{2013}^0}{1}+\dfrac{C_{2013}^1}{2}+\dfrac{C_{2013}^2}{3}+\cdots+\dfrac{C_{2013}^{2013}}{2014}=\sum\limits_{k=0}^{2013}\dfrac{C_{2013}^k}{1+k}=\sum\limits_{k=0}^{2013}\dfrac{1}{1+k}\cdot C_{2013}^k$

$$=\sum_{k=0}^{2013}\frac{1}{1+k}\cdot\frac{2013!}{k!.(2013-k)!}=\sum_{k=0}^{2013}\frac{1}{2014}\cdot\frac{2014.2013!}{(1+k).k!.(2013-k)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{2013}\frac{1}{2014}\cdot\frac{2014!}{(k+1)!.[2014-(k+1)]!}=\sum_{k=0}^{2013}\frac{1}{2014}C_{2014}^{k+1}=\frac{1}{2014}\cdot\left(C_{2014}^1+C_{2014}^2+\cdots+C_{2014}^{2014}\right).$$

Đáp số: $S=\dfrac{2^{2014}-1}{2014}$.

44. * Chứng minh: $k^2C_n^k=n(n-1)C_{n-2}^{k-2}+nC_{n-1}^{k-1}$, với $k,\ n$ là số nguyên thỏa $2\le k\le n$.

Tính tổng: $S=1^2.C_{2013}^1+2^2.C_{2013}^2+3^2.C_{2013}^3+\cdots+2013^2.C_{2013}^{2013}$.

Ta có: $k^2C_n^k=k.k.C_n^k=k.[(k-1)+1].C_n^k=k(k-1).C_n^k+k.C_n^k$

$=$

Đáp số: $S=2013.2014.2^{2011}$.

45. * Chứng minh: $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$ với $n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$.

☞ **Suy luận**: *Ta có* $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(x+1)^n$ *nên suy nghĩ đến việc khai triển* $(1+x)^{2n}$ *và khai triển tích* $(1+x)^n.(x+1)^n$, *sau đó so sánh hệ số* x^n *với nhau sẽ đưa đến đpcm.*

Lời giải tham khảo

Xét khai triển: $P(x) = (1+x)^{2n} = \sum\limits_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k$ có hệ số của x^n là C_{2n}^n.

Xét khai triển $P(x) = (1+x)^n(x+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k.x^k.\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n}\left[\sum\limits_{k=0}^{n}(C_n^k)^2.x^n\right]$ có hệ số của x^n là $\sum\limits_{k=0}^{n}(C_n^k)^2.x^n$. Suy ra: $\sum\limits_{k=0}^{n}(C_n^k)^2.x^n = C_{2n}^n \Leftrightarrow (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$ (đpcm).

46. * Tính tổng: $S = (C_{2020}^0)^2 + (C_{2020}^1)^2 + (C_{2020}^2)^2 + \cdots + (C_{2020}^{2020})^2$.

ĐS: $S = C_{4040}^{2020}$.

47. * Cho số tự nhiên $n \geq 2$, chứng minh: $\left(\dfrac{C_n^0}{1}\right)^2 + \left(\dfrac{C_n^1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{C_n^n}{n+1}\right)^2 = \dfrac{C_{2n+2}^{n+1} - 1}{(n+1)^2}$.

Ta có: $\left(\dfrac{C_n^0}{1}\right)^2 + \left(\dfrac{C_n^1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{C_n^n}{n+1}\right)^2 = \sum\limits_{k=0}^{n}\left(\dfrac{C_n^k}{k+1}\right)^2 = \sum\limits_{k=0}^{n}\left[\left(\dfrac{1}{k+1}\cdot\dfrac{n!}{k!.(n-k)!}\right)^2\right]$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n!.(n+1)}{k!.(k+1).(n-k)!}\right]^2 = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!.[(n+1)-(k+1)!}\right]^2$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{n+1}\cdot C_{n+1}^{k+1}\right]^2 = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n+1)^2}\cdot(C_{n+1}^{k+1})^2.$$

Suy ra $VT = \dfrac{1}{(n+1)^2}\left[(C_{n+1}^1)^2 + (C_{n+1}^1)^2 + \cdots + (C_{n+1}^{n+1})^2\right]$

48. * Tìm số nguyên dương n thỏa mãn: $2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + \cdots + (3n+2)C_n^n = 1600.$

Hướng dẫn: $2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + \cdots + (3n+2)C_n^n = \sum_{k=0}^{n}(3k+2)C_n^k$ **ĐS**: $n = 7.$

49. * Tính tổng: $S = \dfrac{C_{12}^{12}}{11.12} + \dfrac{C_{13}^{12}}{11.12} + \dfrac{C_{14}^{12}}{11.12} + \cdots + \dfrac{C_{2013}^{12}}{2012.2013} + \dfrac{C_{2014}^{12}}{2013.2014}\cdot$

Hướng dẫn: $S = \sum_{k=12}^{2014}\dfrac{C_k^{12}}{(k-1).k} = \cdots = \dfrac{C_{n-2}^{10}}{132}\cdot$ **ĐS**: $S = \dfrac{C_{2013}^{11}}{132}\cdot$

50. * Tìm số nguyên dương n thỏa mãn: $C_n^0 + \dfrac{1}{2}C_n^1 + \dfrac{1}{3}C_n^2 + \dfrac{1}{4}C_n^3 + \cdots + \dfrac{1}{n+1}C_n^n = \dfrac{1023}{n+1}\cdot$

Hướng dẫn: $VT = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k+1}C_n^k = \cdots = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}.$ **ĐS**: $n = 9.$

51. * Tính tổng: $S = 1.2.C_{2013}^2 + 2.3.C_{2013}^3 + \cdots + 2012.2013.C_{2013}^{2013}.$

Hướng dẫn: $S = \sum_{k=2}^{2013}(k-1).k.C_{2013}^k = \cdots = 2012.2013.C_{2011}^{k-2}.$ **ĐS**: $2012.2013.2^{2011}.$

52. * Tính tổng: $S = C_{2012}^0 + 2C_{2012}^1 + 3C_{2012}^2 + 4C_{2012}^3 + 5C_{2012}^4 + \cdots + 2013C_{2012}^{2012}.$

Hướng dẫn: $S = \sum_{k=0}^{2012}(k+1)C_{2012}^k = \cdots = \sum_{k=1}^{2011}2012C_{2011}^{k-1} + \sum_{k=0}^{2012}C_{2012}^k.$ **ĐS**: $1007.2^{2012}.$

53. * Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa: $C_{2011}^0 C_{2011}^{2010} + C_{2011}^1 C_{2010}^{2009} + \cdots + C_{2011}^k C_{2011-k}^{2010-k} + \cdots + C_{2011}^{2010}C_1^0 = 2011.2^n.$

Hướng dẫn: $VT = \sum_{k=0}^{2010}C_{2011}^k C_{2011-k}^{2010-k} = \cdots = 2011C_{2010}^k.$ **ĐS**: $n = 2010.$

54. * Tìm số nguyên dương $n \ge 3$ thỏa mãn: $\dfrac{1}{C_3^3} + \dfrac{1}{C_4^3} + \dfrac{1}{C_5^3} + \cdots + \dfrac{1}{C_n^3} = \dfrac{89}{30}\cdot$

Hướng dẫn: $VT = \sum_{k=3}^{n}\dfrac{1}{C_k^3} = \cdots = \sum_{k=3}^{n}3\left[\dfrac{1}{(k-1)(k-2)} - \dfrac{1}{k(k-1)}\right].$ **ĐS**: $n = 10.$

55. * Tính tổng: $S = \dfrac{A_{2013}^0}{0!} + \dfrac{A_{2013}^1}{1!} + \dfrac{A_{2013}^2}{2!} + \cdots + \dfrac{A_{2013}^{2013}}{2013!}\cdot$

Hướng dẫn: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{A_n^k}{k!}$ và $0! = 1.$ **ĐS**: $S = 2^{2013}.$

56. * Tìm số nguyên dương $n \ge 2$ thỏa mãn: $\dfrac{1}{A_2^2} + \dfrac{1}{A_3^2} + \dfrac{1}{A_4^2} + \cdots + \dfrac{1}{A_n^2} = \dfrac{2013}{2014}\cdot$

Hướng dẫn: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{A_n^k}{k!} \Rightarrow \dfrac{1}{A_n^k} = \dfrac{1}{k!C_n^k} \Rightarrow VT = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{C_2^2} + \dfrac{1}{C_3^2} + \dfrac{1}{C_4^2} + \cdots + \dfrac{1}{C_n^2}\right)$

57. * Tính tổng: $S = C_{20}^0 C_{12}^{11} + C_{20}^1 C_{12}^{10} + C_{20}^2 C_{12}^9 + \cdots + C_{20}^{10}C_{12}^1 + C_{20}^{11}C_{12}^0.$

Hướng dẫn: So sánh hệ số x^{11} trong $(1+x)^{32}$ và $(1+x)^{20}(1+x)^{12}.$ **ĐS**: $S = C_{32}^{11}.$

BÀI TẬP VỀ NHÀ 3

Câu 1. Xét $(1-2x)^{20} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x_{20}$. Giá trị $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$ bằng

A. 1. **B.** 3^{20}.
C. 0. **D.** -1.

Câu 2. Tính tổng các hệ số trong khai triển $(1-2x)^{2018}$.

A. -1. **B.** 1.
C. -2018. **D.** 2018.

Câu 3. Xét khai triển đa thức $(1+2x+3x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$. Giá trị của tổng $S = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \cdots + 2^{20}a_{20}$ bằng

A. 15^{10}. **B.** 17^{10}.
C. 7^{10}. **D.** 17^{20}.

Câu 4. Cho đa thức $P(x) = (x-2)^{2017} + (3-2x)^{2018} = a_{2018}x^{2018} + a_{2017}x^{2017} + \cdots + a_1x + a_0$. Khi đó $S = a_{2018} + a_{2017} + \cdots + a_1 + a_0$ bằng

A. 0. **B.** 1.
C. 2018. **D.** 2017.

Câu 5. Tổng $C_{2016}^1 + C_{2016}^2 + C_{2016}^3 + \cdots + C_{2016}^{2016}$ bằng

A. 4^{2016}. **B.** $2^{2016}+1$.
C. $4^{2016}-1$. **D.** $2^{2016}-1$.

Câu 6. Tính tổng $S = C_{10}^0 + 2.C_{10}^1 + 2^2.C_{10}^2 + \cdots + 2^{10}.C_{10}^{10}$.

A. $S = 2^{10}$. **B.** $S = 4^{10}$.
C. $S = 3^{10}$. **D.** $S = 3^{11}$.

Câu 7. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \cdots + 2^nC_n^n = 14348907$.

A. $n = 15$. **B.** $n = 14$.
C. $n = 10$. **D.** $n = 11$.

Câu 8. Tìm số nguyên dương n thỏa: $3^nC_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - \cdots + (-1)^nC_n^n = 2048$.

A. $n = 8$. **B.** $n = 9$.
C. $n = 10$. **D.** $n = 11$.

Câu 9. Tính tổng $S = 5^nC_n^0 + 5^{n-1}.3.C_n^{n-1} + 3^2.5^{n-2}C_n^{n-2} + \cdots + 3^nC_n^0$.

A. 28^n. **B.** $1+8^n$.
C. 8^{n-1}. **D.** 8^n.

Câu 10. Tổng tất cả các hệ số của khai triển $(x+y)^{20}$ bằng bao nhiêu ?

A. 77520. **B.** 1860480.
C. 1048576. **D.** 81920.

Câu 11. Trong khai triển nhị thức $(3+0,02)^7$, tìm tổng số ba số hạng đầu tiên ?

A. $2289,3283$. **B.** $2291,1012$.
C. $2275,93801$. **D.** $2291,1141$.

Câu 12. Tổng $C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+\cdots+C_{2n}^{2n}$ bằng

A. 2^{n-2}. **B.** 2^{n-1}.
C. 2^{2n-2}. **D.** 2^{2n-1}.

Câu 13. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1}=1024$.

A. $n=10$. **B.** $n=5$.
C. $n=9$. **D.** $n=11$.

Câu 14. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^2+C_{2n+1}^4+\cdots+C_{2n+1}^{2n}=1024$.

A. $n=6$. **B.** $n=10$.
C. $n=5$. **D.** $n=9$.

Câu 15. Tổng $T=C_{2017}^1+C_{2017}^3+C_{2017}^5+\cdots+C_{2017}^{2017}$ bằng

A. $2^{2017}-1$. **B.** 2^{2016}.
C. 2^{2017}. **D.** $2^{2016}-1$.

Câu 16. * Tổng $S=C_n^0.C_{2n}^1+C_n^1.C_{2n}^2+\cdots+C_n^n.C_{2n}^{n+1}$ bằng

A. C_{3n}^{2n}. **B.** C_{3n}^n.
C. C_{3n}^{n+1}. **D.** C_{3n}^{2n-1}.

Câu 17. * Tính tổng $P=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2$ theo n.

A. C_n^n. **B.** C_n^2.
C. C_{2n}^n. **D.** C_{2n}^{2n}.

Câu 18. * Tính tổng $S = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n$.

A. $4n.2^{n-1}$. **B.** $n.2^{n-1}$.

C. $3n.2^{n-1}$. **D.** $2n.2^{n-1}$.

Câu 19. * Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + \cdots + (3n+2)C_n^n = 1600$.

A. $n = 5$. **B.** $n = 7$.

C. $n = 10$. **D.** $n = 8$.

Câu 20. * Tính các tổng sau: $S_1 = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}C_n^n$.

A. $\frac{2^{n+1}+1}{n+1}$. **B.** $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

C. $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}+1$. **D.** $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}-1$.

ĐÁP ÁN ĐỀ VỀ NHÀ SỐ 03

1.A	2.B	3.B	4.A	5.D	6.C	7.A	8.D	9.D	10.C
11.B	12.D	13.B	14.C	15.B	16.C	17.C	18.B	19.B	20.B

Dạng toán 3. Tìm hệ số hoặc số hạng dạng có điều kiện (kết hợp giữa dạng 1 & 2)

58. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^n$, biết $C_n^1 + C_n^2 = 55$.

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$.

Ta có: $C_n^1 + C_n^2 = 55 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!2!} = 55 \Leftrightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 10 \\ n = -11\ (L) \end{array}\right.$.

Với $n = 10$ ta có $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^{10}$ với số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_{10}^k x^{3(10-k)}.\left(\frac{2}{x^2}\right)^k = C_{10}^k 2^k x^{30-5k}$.

Số hạng không chứa x ứng với k thỏa $30 - 5k = 0 \Leftrightarrow k = 6$.

Vậy số hạng không chứa x là $C_{10}^6 2^6 = 13440$.

59. Tìm số hạng chứa x^{10} trong khai triển $\left(x^3-\dfrac{1}{x^2}\right)^n$, biết $C_n^4=13C_n^2$.

ĐS: $C_{10}^4(-1)^4.x^{10}=210x^{10}$.

60. Tìm hệ số của x^{20} trong khai triển nhị thức Newton $\left(x^4-\dfrac{1}{2}\right)^n$, biết $A_n^2+3n=440$.

ĐS: $(-1)^{15}C_{20}^{15}2^{-15}$.

61. Tìm số hạng chứa x^8 trong khai triển $(x^2+2)^n$, biết $A_n^3-8C_n^2+C_n^1=49$.

ĐS: $280x^8$.

62. Tìm số hạng chứa x^2 trong khai triển $\left(x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$, $x\neq 0$, biết $C_n^0+C_n^1+C_n^2=11$.

ĐS: $6x^2$.

63. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $\left(\dfrac{2}{x}-x^3\right)^n$, $\forall x\neq 0$, biết $C_{n-4}^{n-6}+n.A_n^2=454$.

ĐS: -1792.

64. Tìm số nguyên dương n để trong khai triển $(1+x^2)^n$ có hệ số của x^8 bằng 6 lần hệ số của x^4.

Ta có: $(1+x^2)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k.1^{n-k}.(x^2)^k=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k x^{2k}.$

Hệ số của x^8 ứng với $k=4$ là C_n^4 và hệ của x^4 ứng với $k=2$ là C_n^2.

Theo đề bài, ta có: $C_n^4=6C_n^2 \Leftrightarrow$ ....

....

ĐS: $n=11$. ....

65. Tính A_{20}^n, biết hệ số của x^2 trong khai triển $(1+3x)^n$ là 90.

....

....

....

ĐS: $n=5,\ 1860480$. ....

66. Trong khai triển nhị thức $(1+2ax)^n$, $(x\neq 0)$ ta có được số hạng đầu là 1, số hạng thứ hai là $48x$, số hạng thứ ba là $1008x^2$. Tìm n và a ?

Theo đề, ta có số mũ của x tăng dần nên $(1+2ax)^n$ ta chọn $a=1,\ b=2ax$.

Ta có số hạng tổng quát: $T_{k+1}=C_n^k.1^{n-k}.(2ax)^k=C_n^k.(2a)^k.x^k$.

Số hạng thứ $2\Rightarrow k=1 \longrightarrow C_n^1.2ax=48x \Leftrightarrow na=24 \Leftrightarrow a=\dfrac{24}{n}$ (1)

Số hạng thứ $3\Rightarrow k=2 \longrightarrow C_n^2(2a)^2x^2=1008x^2 \Leftrightarrow aC_n^2=252$

$\Leftrightarrow \dfrac{n!.a}{2!.(n-2)!}=252 \Leftrightarrow na.(n-1)=504$ (2)

Thế (1) vào (2), ta được: $24(n-1)=504 \Leftrightarrow n=22$ và thế $n=22$ vào (1), được $a=3$.

67. Trong khai triển nhị thức $(1+ax)^n$, ta có số hạng đầu bằng 1, số hạng thứ hai bằng $24x$, số hạng thứ ba bằng $252x^2$. Tìm n và a ?

....

....

....

ĐS: $n=8,\ a=3$. ....

68. Biết hệ số của x^{n-2} trong khai triển $(x-2)^n$ bằng 220. Tìm hệ số của x^2.

....

....

....

ĐS: $n=11,\ 28160$. ....

69. Biết hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^n$ bằng 31. Tìm số nguyên dương n.

ĐS: $n=32$.

70. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$, biết hiệu số của số hạng thứ ba và thứ hai bằng 35.

ĐS: $n=10,\ 252$.

71. Trong khai triển của nhị thức $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^n$ cho biết tổng hệ số của ba số hạng đầu tiên trong khai triển trên bằng 97. Tìm hệ số của số hạng có chứa x^4.

ĐS: $n=8,\ 1120$.

72. Biết tổng các hệ số trong khai triển $(1+x^2)^n$ là 1024. Tìm hệ số của x^{12} ?

Tổng hệ số của khai triển nghĩa là lấy phần hệ số của từng số hạng cộng lại sẽ không có ẩn x, vậy chọn $x=1 \Rightarrow$ tổng hệ số cần tìm là $(1+1^2)^n=1024 \Leftrightarrow 2^n=2^{10} \Leftrightarrow n=10$.

Với $n=10$, ta có khai triển $(1+x^2)^{10}$ với số hạng tổng quát: $T_{k+1}=$

ĐS: $n=11$. ***Lưu ý***: *Học sinh có thể khai triển* $(1+x^2)^n$ *và xác định tổng hệ số, rồi tìm* n.

73. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x}+x^3\right)^n$, với n là số nguyên dương và biết rằng tổng các hệ số trong khai triển bằng 1024 ?

ĐS: $n=10,\ 210$.

74. Biết tổng các hệ số của khai triển nhị thức $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{3n}$ là $64.$ Tìm số hạng không chứa $x.$

ĐS: 15.

75. Tìm hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển của biểu thức $(x-4x^{\frac{1}{2}})^n$ với $x\geq 0$ và biết rằng $C_n^0+3C_n^1+3^2C_n^2+\cdots\cdots+3^n=65536$ với $n\in\mathbb{N}.$

ĐS: 17920.

76. Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển của biểu thức $\left(x^3+\dfrac{2}{x^4}\right)^n$ với $x\neq 0$ và biết rằng $C_n^0 7^n-7^{n-1}.2.C_n^1+7^{n-2}.2^2.C_n^2-\cdots\cdots+(-1)^n 2^n=390625$ với $n\in\mathbb{N}.$

ĐS: 448.

77. Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển nhị thức $(2+x)^n,$ biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $3^nC_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2-3^{n-3}C_n^3+\cdots\cdots+(-1)^nC_n^n=2048.$

ĐS: 22.

78. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $P(x)=\left(\dfrac{2}{x^3}+x^{\frac{5}{2}}\right)^n$ với $x>0$. Biết n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=4095$.

ĐS: 7920.

79. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển đa thức $(2-3x)^{2n}$, trong đó n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+C_{2n+1}^5+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1}=1024$.

ĐS: -2099520.

80. Tìm hệ số của x trong khai triển đa thức $\left(2x+x^{-\frac{1}{3}}\right)^n$, $x\neq 0$, trong đó n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+\cdots+C_{2n}^{2n}=512$.

ĐS: 40.

81. Tìm a để trong khai triển $(1+ax)(1-3x)^n$ có hệ số của hạng chứa x^3 bằng 405. Biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=64$.

Tìm n? Xét khai triển:

Với $n=6$, có $(1+ax)(1-3x)^6=(1-3x)^6+ax(1-3x)^6=\sum\limits_{k=0}^{6}C_6^k(-3x)^k+ax.\sum\limits_{p=0}^{6}C_6^p(-3x)^p$

$=$

ĐS: $a=7$.

82. Cho xét khai triển $f(x)=(1+2x)^n=a_o+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$. Tính n và a_{11} biết rằng $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\dfrac{a_3}{2^3}+\cdots+\dfrac{a_n}{2^n}=4096.$

Với $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(1+2.\dfrac{1}{2}\right)^n=a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\dfrac{a_3}{2^3}+\cdots+\dfrac{a_n}{2^n}\Leftrightarrow 2^n=4096\Leftrightarrow 2^n=2^{12}\Leftrightarrow n=12.$

Với $n=12\Rightarrow f(x)=(1+2x)^{12}$ có số hạng tổng quát là $T_{k+1}=$ ....

....

....

....

ĐS: $C_{12}^{11}2^{11}$.

83. Cho $P=(2+3x)^n,\ n\in\mathbb{N}^*$. Khai triển P ta được: $P=a_o+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$. Tính n và a_9 biết rằng $a_0+\dfrac{a_1}{3}+\dfrac{a_2}{3^2}+\dfrac{a_3}{3^3}+\cdots+\dfrac{a_n}{3^n}=177147.$

....

....

....

....

....

ĐS: $n=11,\ a_9=C_{11}^9 2^2.3^9$.

84. *Cho khai triển nhị thức: $(1-2x+x^3)^n=a_o+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{3n}x^{3n}$. Xác định n và tìm a_6, biết rằng: $a_o+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots\cdots+\dfrac{a_{3n}}{2^{3n}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{15}$.

....

....

....

....

....

ĐS: $n=5,\ a_6=-150$.

Nhóm bài toán tìm hệ số lớn nhất trong khai triển $(a+bx)^n$

Xét khai triển nhị thức Newton $(a+bx)^n$ có số hạng tổng quát: $T_{k+1}=C_n^k.a^{n-k}.b^k.x^k$.

Đặt $a_k=C_n^ka^{n-k}b^k,\ 0\le k\le n$ thì dãy hệ số là $\{a_k\}$. Khi đó hệ số lớn nhất trong khai triển này thỏa hệ bất phương trình $\begin{cases}a_k\ge a_{k+1}\\ a_k\ge a_{k-1}\end{cases}\Rightarrow k_o\Rightarrow a_{k_o\max}=C_n^{k_o}a^{n-k_o}b^{k_o}$.

85. *Xét khai triển: $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2x}{3}\right)^{11} = a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{11}x^{11}$. Hãy tìm k để hệ số a_k lớn nhất và tính nó ? $(0 \le k \le 11,\ k$: nguyên).

Ta có: $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2x}{3}\right)^{11} = \left[\dfrac{1}{3}(1+2x)\right]^{11} = \dfrac{1}{3^{11}}(1+2x) = \sum\limits_{k=0}^{11}\dfrac{C_{11}^k}{3^{11}}.2^k.x^k.$

Hệ số có dạng tổng quát: $a_k = \dfrac{2^k}{3^{11}}.C_{11}^k$ với $0 \le k \le 11,\ k \in \mathbb{N}$. Hệ số lớn nhất thỏa mãn hệ bất:

$$\begin{cases} a_k \ge a_{k+1} \\ a_k \ge a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2^k}{3^{11}}C_{11}^k \ge \dfrac{2^{k+1}}{3^{11}}C_{11}^{k+1} \\ \dfrac{2^k}{3^{11}}C_{11}^k \ge \dfrac{2^{k-1}}{3^{11}}C_{11}^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2^k}{k!(11-k)!} \ge \dfrac{2^{k+1}}{(k+1)!(10-k)!} \\ \dfrac{2^k}{k!(11-k)!} \ge \dfrac{2^{k-1}}{(k-1)!(12-k)!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+1 \ge 2(11-k) \\ 2(12-k) > k \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 7 \le k \le 8$. Do $k \in \mathbb{N}$ nên $k = 7$ hoặc $k = 8$ thì hệ số sẽ lớn nhất.

Khi đó hệ số lớn nhất là $a_{k\max} = a_7 = a_8 = \dfrac{2^7}{3^{11}}.C_{11}^7 = \dfrac{2^8}{3^{11}}.C_{11}^8 = 0,2384460363.$

86. *Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, trong đó $n \in \mathbb{Z}$ và các hệ số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ thỏa mãn hệ thức $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \cdots + \dfrac{a_n}{2^n} = 4096$. Tìm số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, \ldots, a_n$?

ĐS: $a_{\max} = a_8 = 2^8C_{12}^8 = 126720.$

87. *Cho $A = \left(x - \dfrac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \dfrac{1}{x}\right)^{10}$. Sau khi khai triển và rút gọn thì biểu thức A sẽ gồm bao nhiêu số hạng ?

Ta có: $A = \left(x - \dfrac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \dfrac{1}{x}\right)^{10} =$

$$= \sum_0^{20} C_{20}^k.(-1)^k.x^{20-3k} + \sum_0^{10} C_{10}^i.(-1)^i.x^{30-4i} = A_1 + A_2.$$

Xét trường hợp số mũ bằng nhau trong 2 khai triển $20 - 3k = 30 - 4i \Leftrightarrow k = \dfrac{4i-10}{3}\cdot$

$$\longrightarrow \begin{cases} 0 \le k \le 20 \\ 0 \le i \le 10 \\ (4i-10)\,\vdots\,3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4i-10=6 \\ 4i-10=18 \\ 4i-10=30 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} i=4 \\ i=7 \\ i=10 \end{array}\right. .$$

$\longrightarrow$ Có 3 số hạng trong khai triển A có lũy thừa của x bằng nhau.

Do khai triển A_1 có $n = 20 \Rightarrow$ có 21 số hạng sau khi khai triển và khai triển A_2 có $n = 10 \Rightarrow$ có 11 số hạng sau khi khai triển. Vậy khai triển A có $21 + 11 - 3 = 29$ số hạng.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 4

Câu 1. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $(1+3x)^{2n}$ biết $A_n^3 + 2A_n^2 = 100$.

A. 61236.
B. 63216.
C. 61326.
D. 66321.

Câu 2. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $(2x-1)^n$ biết $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 78$.

A. 25344.
B. 101376.
C. -101376.
D. -25344.

Câu 3. Tìm số hạng chứa x^4 trong khai triển biểu thức $\left(\dfrac{2}{x} - x^3\right)^n$ với mọi $x \neq 0$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^2 + nA_n^2 = 476$.

A. $1792x^4$.
B. -1792.
C. 1792.
D. $-1792x^4$.

Câu 4. Với n là số tự nhiên thỏa mãn $C_{n-4}^{n-6} + nA_n^2 = 454$, hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(\dfrac{2}{x} - x^3\right)^n$ bằng

A. 1972.
B. 786.
C. 1692.
D. -1792.

Câu 5. Với n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1 + C_n^2 = 55$, số hạng không chứa x trong khai triển của thức $\left(x^3 + \dfrac{2}{x^2}\right)^n$ bằng

A. 322560.
B. 3360.
C. 80640.
D. 13440.

Câu 6. Biết rằng hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^n$ bằng 31. Tìm n.

A. $n = 32$.
B. $n = 30$.
C. $n = 31$.
D. $n = 33$.

Câu 7. Biết hệ số của x^2 trong khai triển của $(1-3x)^n$ là 90. Tìm n.

A. $n = 5$.
B. $n = 8$.
C. $n = 6$.
D. $n = 7$.

Câu 8. Giả sử trong khai triển $(1+ax)(1-3x)^6$ với $a \in \mathbb{R}$ thì hệ số của số hạng chứa x^3 là 405. Giá trị của a bằng

A. 9.
B. 6.
C. 7.
D. 14.

Câu 9. Xét $(1-2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Tìm a_5 biết $a_0 + a_1 + a_2 = 71$.

A. -672.
B. 672.
C. 627.
D. -627.

Câu 10. Tổng các hệ số trong khai triển $(3x-1)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ là 2^{11}. Tìm a_6.

A. -336798.
B. 336798.
C. -112266.
D. 112266.

Câu 11. Với n thỏa mãn $3C_{n+1}^3 - 3A_n^2 = 52(n-1)$. Trong khai triển $(x^3+2y^2)^n$, gọi T_k là số hạng mà tổng số mũ của x và y của số hạng đó bằng 34. Hệ số của T_k bằng

A. 54912.
B. 1287.
C. 2574.
D. 41184.

Câu 12. Biết rằng hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x-\frac{1}{4}\right)^n$ bằng 31. Tìm n.

A. $n = 32$.
B. $n = 30$.
C. $n = 31$.
D. $n = 33$.

Câu 13. Cho $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 1023$. Tìm hệ số của x^2 trong khai triển $[(12-n)x+1]^n$ thành đa thức.

A. 90.
B. 2.
C. 45.
D. 180.

Câu 14. Cho tổng các hệ số của khai triển của nhị thức $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ bằng 64. Số hạng không chứa x trong khai triển đó là

A. 20.
B. 10.
C. 15.
D. 25.

Câu 15. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \cdots + 2^nC_n^n = 14348907$. Hệ số cỉa số hạng chứa x^{10} trong khai triển của biểu thức $\left(x^2 - \dfrac{1}{x^3}\right)^n$ bằng

A. -1365.
B. 32760.
C. 1365.
D. -32760.

Câu 16. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 + \cdots + C_{2n+1}^{2n} = 1024$.

A. 2099529.
B. -2099520.
C. -1959552.
D. 1959552.

Câu 17. Cho $(1+2x)^n = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$. Biết $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{2^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{2^n} = 4096$. Số lớn nhất trong các số $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ có giá trị bằng

A. 126720.
B. 924.
C. 972.
D. 1293600.

Câu 18. Khai triển $(\sqrt{5} - \sqrt[4]{7})^{124}$. Có bao nhiêu số hạng hữu tỉ trong khai triển trên ?

A. 30.
B. 31.
C. 32.
D. 33.

Câu 19. Cho khai triển $(x+3)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$ là các số thực. Gọi S là tập hợp chứa các số tự nhiên n để a_{10} là số lớn nhất trong các số $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. $205.$
B. 123
C. 81
D. 83

Câu 20. Khai triển đa thức $P(x) = (1+2x)^{12} = a_0 + a_1x + \cdots + a_{12}x^{12}$. Tìm hệ số a_k lớn nhất trong khai triển trên.

A. $C_{12}^{8}2^{8}.$
B. $C_{12}^{9}2^{9}.$
C. $C_{12}^{10}2^{10}.$
D. $1 + C_{12}^{8}2^{8}.$

ĐÁP ÁN BÀI TẬP VỀ NHÀ SỐ 04

1.A	2.D	3.D	4.D	5.D	6.A	7.A	8.C	9.A	10.A
11.D	12.A	13.D	14.C	15.C	16.D	17.A	18.C	19.A	20.A

§ 4. BIEN CO VA XAC SUAT CUA BIEN CO

☆☆☆

Trong thực tiễn, chúng ta thường gặp những hiện tượng ngẫu nhiên. Đó là những hiện tượng (biến cố) mà chúng ta không thể dự báo một cách chắc chắn là nó xảy ra hay không xảy ra.

Lý thuyết xác suất là bộ môn toán học nghiên cứu các hiện tượng ngẫu nhiên. Sự ra đời của lý thuyết xác suất bắt đầu từ những thư từ trao đổi giữa hai nhà toán học vĩ đại người Pháp là Pascal (1623 – 1662) và Phec – ma (1601 – 1665) xung quanh các giải đáp một số vấn đề rắc rối nảy sinh trong quá trình trò chơi cờ bạc của một nhà quý tộc Pháp đặt ra cho Pascal. Năm 1812, nhà toán học Pháp La – pha – xơ đã dự báo rằng: "Môn khoa học bắt đầu từ việc xem xét các trò chơi may rủi này sẽ hứa hẹn trở thành một đối tượng quan trọng nhất của tri thức loài người".

Này nay, lý thuyết xác suất đã trở thành một ngành toán học quan trọng, được ứng dụng trong rất nhiều lĩnh vực của khoa học tự nhiên, khoa học xã hội, công nghệ, kinh tế, y tế, sinh học,.........

① Biến cố

a) Phép thử và không gian mẫu

— Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà:

+ Kết quả của nó không đoán trước được.
+ Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.

— Tập hợp mọi kết quả của một phép thử T được gọi là **không gian mẫu** của T và được kí hiệu là Ω. Số phần tử của không gian mẫu được kí hiệu là $n(\Omega)$.

Ví dụ 1. Phép thử: "Gieo 1 con súc sắc" có không gian mẫu là $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$.

Ví dụ 2. Xét phép thử: "Gieo hai đồng xu phân biệt". Nếu kí hiệu S để chỉ đồng xu "sấp", kí hiệu N để chỉ đồng xu "ngửa" thì không gian mẫu của phép thử trên là:

$\Omega = \{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\} \Rightarrow n(\Omega) = \ldots\ldots$

Ví dụ 3. Xét phép thử T là: "Gieo ba đồng xu phân biệt". Hãy cho biết không gian mẫu và số phần tử của không gian mẫu đó ?

Giải ....

....

....

b) Biến cố

Ví dụ. Xét phép thử T : "Gieo một con súc sắc" có không gian mẫu là $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$. Xét biến cố A : "Số chấm trên mặt xuất hiện là số chẵn".

Biến cố A xảy ra khi kết quả của phép thử T là: ....

Các kết quả này được gọi là *kết quả thuận lợi cho* A được mô tả bởi: $\Omega_A = \{\cdots\cdots\cdots\cdots\}$ là một tập con của $\Omega \Rightarrow$ Số phần tử thuận lợi của biến cố A là $n(A) =$ ....

Tổng quát:

- Biến cố A liên quan đến phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của A tùy thuộc vào kết quả của T.
- Mỗi kết quả của phép thử T làm cho A xảy ra, được gọi là một kết quả thuận lợi cho A.
- Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được kí hiệu là Ω_A.

Câu hỏi ? Xét phép thử T như trên và biến cố B : "Số chấm trên mặt xuất hiện là một số lẻ" và biến cố C : "Số chấm xuất hiện trên mặt là nguyên tố". Hãy mô tả biến cố B và C.

Giải: $\Omega_B = \{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\} \Rightarrow n(B) = \ldots\ldots\ldots$

$\Omega_C = \{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\} \Rightarrow n(C) = \ldots\ldots\ldots$

② **Xác suất**

Ví dụ 1. Xét phép thử T : "Gieo hai con súc sắc". Các kết quả xảy ra của T là các cặp $(x;y)$ được cho bởi bảng sau:

	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

- Không gian mẫu T là $\Omega = \{(1;1);(1;2);(1;3);\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;(6;5);(6;6)\} \Rightarrow n(\Omega) = 36.$
- Các mặt của con súc sắc có cùng khả năng xuất hiện nên 36 kết quả của T là **đồng khả năng** xảy ra. Xét biến cố A : "Tổng số chấm xuất hiện trên mặt là 7".

  Lúc này ta có: $\Omega_A = \{(1;6);(2;5);(3;4);(4;3);(5;2);(6;1)\} \Rightarrow n(A) = 6.$

  Khi đó tỉ số $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ được gọi là **xác suất của** biến cố A.

➢ **Tổng quát**: Giả sử phép thử T có không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn và các kết quả của T là đồng khả năng. Nếu A là một biến cố liên quan với phép thử T và Ω_A là một tập hợp các kết quả thuận lợi cho A thì xác suất của A là một số, kí hiệu là $P(A)$, được xác định bởi công thức:

$$\boxed{P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}} = \frac{\text{Số phần tử của } A}{\text{Số phần tử của } \Omega}.$$

Từ định nghĩa, suy ra: $0 \le P(A) \le 1,\ P(\Omega) = 1,\ P(\varnothing) = 0.$

Ví dụ 2. Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất các biến cố sau:

a) A : "mặt lẻ xuất hiện".

b) B : "xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 3".

c) C : "Mặt xuất hiện có số chấm lớn hơn 2".

Giải. Ta có các trường hợp xuất hiện khi gieo con súc sắc là: $\Omega = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow n(\Omega) = \ldots\ldots$

a) Các phần tử của biến cố A là $\Omega_A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow n(A) = \ldots. \Rightarrow P(A) = \ldots\ldots\ldots$

b) Các phần tử của biến cố B là $\Omega_B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow n(B) = \ldots \Rightarrow P(B) = \ldots\ldots\ldots$

c) Các phần tử của biến cố C là $\Omega_C = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow n(C) = \ldots \Rightarrow P(C) = \ldots\ldots\ldots$

Nhóm 1. Xác suất liên quan đến sắp xếp hoặc chọn đồ vật

1. Từ hộp chứa 4 quả cầu trắng, 6 quả cầu xanh kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu. Tính xác suất để 3 quả cầu lấy được có đúng 1 màu ?

Lời giải. Chọn 3 quả cầu trong 10 quả cầu, suy ra số phần tử không gian mẫu là:

$n(\Omega) = C_{10}^3 = 120.$

Gọi A là biến cố: "ba quả lấy cùng màu".

- TH1: Chọn 3 quả màu trắng có C_4^3 cách.
- TH2: Chọn 3 quả màu xanh có C_6^3 cách.

Theo quy tắc cộng $\Rightarrow n(A) = C_4^3 + C_6^3 = 24.$

Do đó xác suất cần tìm của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}\cdot$$

2. Từ hộp chứa 5 quả cầu trắng, 4 quả cầu xanh kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu. Tính xác suất để 3 quả cầu lấy được có đúng 1 màu ?

Đáp số: $P = \frac{1}{6}\cdot$

3. Một hộp chứa 15 quả cầu xanh và 5 quả cầu đỏ. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp trên. Tính xác suất để chọn được 2 quả cầu khác màu.

Đáp số: $P = 15/38.$

4. Một bể cá gồm có 5 chú cá bảy màu và 7 chú cá vàng. Một người vớt ngẫu nhiên 4 chú cá từ bể cá trên. Tính xác suất để vớt được 2 chú cá bảy màu và 2 chú cá vàng.

Đáp số: $P = 14/33.$

5. Một hộp chứa 12 quả cầu, trong đó có 7 quả cầu đỏ, 5 quả cầu xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu. Tính xác suất để lấy được ít nhất 2 quả cầu đỏ.

Đáp số: $P = 7/11.$

6. Một hộp có 7 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi (không kể thứ tự ra khỏi hộp). Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi đỏ.

Đáp số: $P = 12/13.$

7. Một hộp chứa 3 quả cầu đỏ, 6 quả cầu xanh và 9 quả cầu vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu trong hộp. Tính xác suất để 2 quả cầu chọn được khác màu.

8. Một hộp đựng 5 bi đỏ, 6 bi xanh và 7 bi trắng. Chọn ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để 6 bi được chọn có cùng màu.

Đáp số: $P = 11/765$.

Đáp số: $P = 2/4641$.

9. Một hộp chứa 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Chọn 6 viên bi ngẫu nhiên từ hộp đó rồi cộng các số trên 6 bi lại với nhau. Tính xác suất để kết quả thu được là số lẻ.

Đáp số: $P = 118/231$.

10. Một hộp đựng 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp, rồi cộng các số trên các bi lại. Tính xác suất để kết quả thu được là 1 số lẻ.

Đáp số: $P = 16/33$.

11. Trong một hộp đựng 8 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp trên. Tính xác suất để 4 viên bi được lấy ra có cả bi xanh và bi đỏ ?

Đáp số: $P = 916/1001$.

12. Trong chiếc hộp có 6 bi đỏ, 5 bi vàng và 4 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên trong hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để trong 4 viên bi lấy ra không đủ cả ba màu ?

Đáp số: $P = 43/91$.

13. Trong một chiếc hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh và 7 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 1 lần 3 viên bi. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy được chỉ có 2 màu ?

Đáp số: $P = 53/80$.

14. Hộp chứa 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 4 bi. Tính xác suất để 4 bi được chọn có đủ 3 màu và số bi đỏ nhiều nhất ?

Đáp số: $P = 16/91$.

15. Một hộp đựng 3 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 5 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 5 viên bi từ hộp. Tính xác suất để trong 5 bi lấy ra có đủ 3 màu và số bi xanh bằng bi đỏ ?

Đáp số: $P = 35/132$.

16. Một lô hàng có 10 sản phẩm cùng loại, trong đó có 2 phế phẩm. Chọn ngẫu nhiên 6 sản phẩm đi kiểm định. Tính xác suất để có nhiều nhất một phế phẩm ?

Đáp số: $P = 2/3$.

17. Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ công ty sữa, người ta đã gửi đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 sữa dâu và 3 sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm lấy ngẫu nhiên 3 hộp sữa để phân tích mẫu. Tính xác suất để 3 hộp được chọn có cả 3 loại ?

Đáp số: $P = 3/11$.

18. Trong một lô hàng của một công ty có 12 sản phẩm khác nhau, trong đó có đúng 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 6 sản phẩm từ lô hàng đó. Hãy tính xác suất để trong 6 sản phẩm được lấy ra có không quá một phế phẩm ?

Đáp số: $P = 17/22$.

19. Một ngân hàng đề thi gồm có 20 câu hỏi. Mỗi đề thi gồm có 4 câu được lấy ngẫu nhiên từ ngân hàng đề thi. Thí sinh A đã học thuộc 10 câu trong ngân hàng đề thi. Tìm xác suất để thí sinh A rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất 2 câu đã học thuộc ?

....

....

....

....

....

Đáp số: $P = 229/323$. ....

20. Một ngân hàng đề thi gồm có 15 câu hỏi. Mỗi đề thi gồm có 4 câu được lấy ngẫu nhiên từ ngân hàng đề thi. Bạn Thủy đã học thuộc 8 câu trong ngân hàng đề thi. Tính xác suất để bạn Thủy rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất 2 câu đã thuộc ?

....

....

....

....

....

Đáp số: $P = 10/13$. ....

21. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất 2 lần. Tính xác suất của biến cố:

- Không gian mẫu là $\Omega = \{(x;y) : 1 \le x;\ y \le 6\}$, trong đó x là số chấm trong lần gieo thứ nhất và y là số chấm trong lần gieo thứ hai $(x;\ y \in \mathbb{N}^*)$.
- Theo quy tắc nhân, suy ra số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = 6.6 = 36$.

a) Số chấm xuất hiện ở hai lần gieo là giống nhau.

Gọi A là biến cố: “ .... “

Liệt kê, ta có: $A = \{(....,....);(....,....);(....,....);(....,....);(....,....);(....,....)\} \Rightarrow n(A) = ...$

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{1}{6}\cdot$

b) Mặt 5 chấm xuất hiện ít nhất một lần.

Gọi B là biến cố: “ .... “

Liệt kê, ta có: $B =$ ....

.... $\Rightarrow P(B) = 11/16$.

c) Tổng số chấm trong hai lần gieo không bé hơn 10.

....

....

Đáp số: $P(C) = 1/6$. ....

d) Tổng số chấm trong hai lần gieo bằng 7.

....

....

Đáp số: $P(D) = 1/6$. ....

e) Tổng số chấm trong hai lần gieo chia hết cho 5.

....

....

Đáp số: $P(E) = 7/36$. ....

Nhóm 2. Xác suất liên quan đến sắp xếp hoặc chọn người.

22. Một lớp có 20 nam sinh và 15 nữ sinh. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ ?

Đáp số: $P = 4615/5236$.

23. Một lớp học có 15 nam và 10 nữ để tham gia đồng diễn. Cần chọn ra 5 học sinh. Tính xác suất học sinh được chọn có cả nam lẫn nữ và số nữ ít hơn số nam ?

Đáp số: $P = 325/506$.

24. Một chi đoàn có 15 đoàn viên, trong đó có 7 nam và 8 nữ. Chọn ra 4 người trong chi đoàn đó để lập một đội thanh niên tình nguyện. Tính xác suất sao cho trong 4 người được chọn có ít nhất một nữ ?

Đáp số: $P = 38/39$.

25. Một đội văn nghệ của trường THPT X gồm 5 học sinh nữ và 10 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 8 học sinh trong đội văn nghệ để lập một tốp ca. Tính xác suất để tốp ca có ít nhất 3 học sinh nữ ?

Đáp số: $P = 82/143$.

26. Một đội văn nghệ có 15 người gồm 9 nam và 6 nữ. Chọn ngẫu nhiên 8 người đi hát đồng ca. Tính xác suất để trong 8 người được chọn có số nữ nhiều hơn số nam ?

Đáp số: $P = 12/143$.

27. Một tổ có 11 học sinh, trong đó có 5 nam và 6 nữ. Giáo viên chọn 5 học sinh làm trực tuần. Tính xác suất để chọn được nhiều nhất 2 học sinh nam ?

Đáp số: $P = 281/462$.

28. Tổ một có 3 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Tổ hai có 5 học sinh nam và 2 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên mỗi tổ một học sinh đi làm nhiệm vụ. Tính xác suất sao cho chọn được 2 học sinh có cả nam và nữ ?

Đáp số: $P = 26/49$.

29. Tổ một có 4 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Tổ hai có 4 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên mỗi tổ một học sinh để kéo cờ. Tính xác suất sao cho chọn được 2 học sinh có cả nam và nữ ?

Đáp số: $P = 32/63$.

30. Trong một giải cầu lông có 8 người tham gia, trong đó có 2 bạn tên Việt và Nam. Các vận động viên được chia làm hai bảng A và B, mỗi bảng gồm 4 người. Giả sử việc chia bảng là ngẫu nhiên. Tính xác suất để cả hai bạn Việt và Nam nằm chung một bảng đấu ?

Mô tả không gian mẫu:

Chọn 4 bạn trong 8 để đưa vào bảng A, có C_8^4 cách và chọn 4 trong 4 bạn còn lại để đưa vào bảng B, có C_4^4 cách.

Theo QTN $\Rightarrow n(\Omega) = C_8^4 C_4^4 = 70$.

Gọi E là biến cố: "chọn bạn Việt và Nam nằm chung một bảng".

Bước 1. Xếp 2 bạn Việt và Nam nằm chung một bảng đấu, có C_2^1 cách.

Bước 2. Xếp 6 bạn còn lại vào 2 bảng A, B cho đủ mỗi bảng là 4, có $C_6^2.C_4^4$ cách.

Theo QTN, suy ra $n(E) =$ ....

Xác suất cần tìm $P(E) = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{\quad}{\quad}$

31. Chuẩn bị chào mừng ngày nhà giáo Việt Nam 20/11, đội văn nghệ của trường THPT X gồm 9 học sinh, trong đó có 3 học sinh nữ chia thành 3 tổ đều nhau (mỗi tổ 3 học sinh) để làm công tác biểu diễn văn nghệ. Tính xác suất để mỗi tổ có đúng 1 nữ ?

Đáp số: $P = 9/28$.

32. Trong giải bóng truyền VTV Cup gồm 12 đội bóng tham dự, trong đó có 9 đội nước ngoài và 3 đội của Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm để chia thành 3 bảng đấu A, B, C, mỗi bảng 4 đội. Tính xác suất để 3 đội bóng của Việt Nam ở 3 bảng khác nhau ?

33. Trong cuộc thi "Tìm kiếm tài năng Việt", có 20 bạn lọt vào vòng chung kết, trong đó có 5 bạn nữ và 15 bạn nam. Để sắp xếp vị trí thi đấu, Ban tổ chức chia thành 4 nhóm A, B, C, D, mỗi nhóm có 5 bạn. Tính xác suất để 5 bạn nữ thuộc cùng một nhóm ?

Đáp số: $P = 16/55$.

Đáp số: $P = 1/3876$.

34. Một tàu điện gồm 3 toa tiến vào một sân ga, ở đó đang có 12 hành khách chờ lên tàu. Giả sử hành khách lên tàu một cách ngẫu nhiên và độc lập với nhau, mỗi toa còn ít nhất 12 chổ trống. Tìm xác suất xảy ra các tình huống sau:

Ở đây bài toán không quan tâm đến chỗ ngồi mà chỉ quan tâm đến toa. Phép thử ở đây là: Mỗi người chọn cho mình một toa, mỗi người có quyền chọn 1 trong 3 toa để lên nên có 3 cách chọn. Theo quy tắc nhân, suy ra số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = 3^{12}$.

a) Tất cả cùng lên toa thứ ba.

Gọi A là biến cố: "tất cả cùng lên toa thứ ba".

Mỗi người chỉ có một cách chọn là lên toa thứ ba. Số trường hợp thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = 1^{12} = 1 \Rightarrow P(A) = 1/3^{12}$.

b) Tất cả cùng lên một toa.

Gọi B là biến cố: "tất cả cùng lên một toa".

- Người đầu tiên chọn 1 toa trong 3 toa để lên tàu có $C_3^1 = 3$ cách.
- 11 người lên sau chỉ có 1 cách chọn là lên toa mà người đầu tiên đã chọn.

Số phần tử của biến cố B là $n(B) = 3.1^{11} = 3 \Rightarrow P(B) = 3/3^{12} = 1/3^{11}$.

c) Toa thứ nhất có 4 người, toa thứ hai có 5 người và còn lại toa ba.

Gọi C là biến cố: "toa thứ nhất có 4 người, toa thứ hai có 5 người và còn lại toa ba".

- Chọn 4 người trong 12 người lên toa thứ nhất có C_{12}^4 cách.
- Chọn 5 người trong 8 người lên toa thứ hai có C_8^5 cách.
- 3 người còn lại bắt buộc lên toa thứ ba có 1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố C là $n(C) = C_{12}^4.C_8^5.1 = 27720 \Rightarrow P(C) =$ ____________

d) Một toa 4 người, một toa 5 người, một toa 3 người.

Đáp số: $P(D) \simeq 0,31296$.

e) Toa một có 4 người.

Đáp số: $P(E) \simeq 0,238446$.

35. Có 7 học sinh nam và 5 học sinh nữ tập trung ngẫu nhiên theo 1 hàng dọc. Tính xác suất để người đứng ở đầu hàng và cuối hàng đều là học sinh nam ?

Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = 12!$.

Gọi A là biến cố: "người đứng đầu hàng và cuối hàng đều là nam".

Chọn 1 nam trong 7 nam để xếp đầu hàng, có A_7^1 cách.

Chọn 1 nam trong 6 nam còn lại để xếp cuối hàng, có A_6^1 cách.

Giữa nam đầu hàng và cuối hàng, xếp 10 bạn còn lại, có $10!$ cách.

Theo QTN $\Rightarrow n(A) = A_7^1.A_6^1.10!$.

Xác xuất cần tìm $P(A) = \dfrac{A_7^1.A_6^1.10!}{12!} = \dfrac{7}{22}$.

36. Có 4 bạn nam và 4 bạn nữ, được xếp ngồi ngẫu nhiên vào 8 ghế xếp thành hàng ngang. Tìm xác suất sao cho hai đầu ghế là các bạn phải khác giới ?

Đáp số: $P = 4/7$.

37. Xếp ngẫu nhiên 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ thành một hàng ngang. Tính xác suất để có 2 học sinh nữ đứng cạnh nhau.

Đáp số: $P = 2/5$.

38. Xếp ngẫu nhiên 5 học sinh nữ và 8 học sinh nam thành một hàng dọc. Tính xác suất để không có 2 em nữ nào đứng cạnh.

Đáp số: $P = 14/143$.

39. Có 6 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 xếp ngẫu nhiên vào 9 ghế thành một dãy. Tính xác suất để xếp được 3 học sinh lớp 12 xen kẽ giữa 6 học sinh lớp 11.

Xếp 9 học sinh vào một dãy ghế, suy ra số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = 9!$.

Gọi A là biến cố: "Xếp được 3 học sinh lớp 12 xen kẽ giữa 6 học sinh lớp 11".

Mô tả khả năng thuận lợi của biến cố A :

- Xếp 6 học sinh lớp 11 một dãy, có $6!$ cách.
- Giữa 6 học sinh lớp 11 có 7 vách ngăn (gồm 5 vị trí giữa 6 học sinh và 2 vị trí đầu). Chọn 3 vách ngăn trong 7 vách ngăn để xếp 3 học sinh lớp 12, có A_7^3 cách.

Theo quy tắc nhân $\Rightarrow n(A) = 6!.A_7^3$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{\quad}{\quad}$.

40. Có 8 học sinh nam và 4 học sinh nữ được xếp thành hàng ngang. Tính xác suất để khi xếp sao cho hai học sinh nữ không đứng cạnh nhau ?

Đáp số: $P = \dfrac{14}{55}$.

41. Một tổ học sinh có 4 em nữ và 5 em nam được xếp thành một hàng dọc. Tính xác suất để chỉ có hai em nữ A, B đứng cạnh nhau, còn các em nữ còn lại không đứng cạnh nhau và cũng không đứng cạnh hai em A và B.

Đáp số: $P = 5/63$.

42. Có 12 quyển sách, trong đó 3 quyển sách Toán, 3 quyển sách Lí, 3 quyển sách Hóa và 3 quyển sách Sinh xếp thành 1 dãy. Tính xác suất để 3 quyển thuộc cùng 1 môn không xếp liền nhau.

Đáp số: $P = 1/28512$.

43. **(Đề tham khảo – Bộ GD & ĐT năm 2018)** Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Xác suất để 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau bằng

Đáp số: $P = 11/630$.

44. Trong một buổi liên hoan có 10 cặp nam nữ, trong đó có 4 cặp vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên 3 người để biểu diễn một tiết mục văn nghệ. Tính xác suất để 3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào.

Chọn 3 trong 20 người, suy ra số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{20}^3 = 1140$.

Gọi A là biến cố: "3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào".

$\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố: "3 người được chọn luôn có 1 cặp vợ chồng".

Mô tả khả năng thuận lợi của biến cố $\overline{A}$:

- Chọn 1 cặp vợ chồng trong 4 cặp vợ chồng có C_4^1 cách.
- Chọn 1 người trong 18 người, có C_{18}^1 cách.

Theo quy tắc nhân $\Rightarrow n(\overline{A}) = C_4^1.C_{18}^1 = 72$.

Xác suất cần tìm là:

$$P(A) = 1 - \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = 1 - \frac{72}{1140} = \frac{89}{95}.$$

45. Một lớp 40 học sinh trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Cần chọn ra 3 học sinh để làm cán sự lớp. Tính xác suất để 3 học sinh làm cán sự lớp mà không có cặp anh em sinh đôi nào.

Đáp số: $P = 64/65$.

Nhóm 3. Xác suất liên quan đến sắp xếp hoặc chọn số.

46. Một chiếc hộp gồm có 9 thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 9. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ trong hộp. Tính xác suất để 2 thẻ lấy được có tích của nó là số chẵn.

Đáp số: $P = 13/18$.

47. Một hộp chứa 18 thẻ được đánh số từ 1 đến 18. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ trong hộp. Tính xác suất để 2 thẻ lấy được tích của nó là số chẵn ?

Đáp số: $P = 13/17$.

48. Cho 14 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 14. Chọn ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để tích 3 số ghi trên 3 tấm thẻ này chia hết cho 3.

Đáp số: $P = 61/91$.

49. Từ một hộp chứa 16 thẻ đánh số từ $1 \to 16$, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều là số chẵn ?

Đáp số: $P = 1/26$.

50. Có 30 tấm thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Hãy tìm xác suất để trong 10 tấm thẻ được chọn có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10 ?

Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = C_{30}^{10}$.

Gọi A là biến cố: "10 tấm thẻ được chọn có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10".

Trong 30 thẻ có 15 thẻ mang số lẻ, 15 thẻ mang số chẵn và trong 15 số chẵn này có 3 số chia hết cho 10.

- Chọn 1 thẻ mang số chia hết cho 10 trong 3 thẻ mang số chia hết cho 10, có C_3^1 cách.
- Chọn 4 thẻ mang số chẵn trong 12 thẻ mang số chẵn (bỏ 3 thẻ $\vdots 10$), có C_{12}^4 cách.
- Chọn 5 thẻ mang số lẻ trong 15 thẻ mang số lẻ, có C_{15}^5 cách.

Nên $n(A) = C_3^1.C_{12}^4.C_{15}^5. \Rightarrow P(A) = \dfrac{C_3^1.C_{12}^4.C_{15}^5}{C_{30}^{10}}$.

51. Trong một hộp có 20 tấm thẻ được đánh số 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên ra 5 tấm thẻ. Tính xác suất để trong 5 tấm thẻ được chọn ra có 3 tấm thẻ mang số lẻ, 2 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho số 4 ?

Đáp số: $P = 125/646$.

52. Có 40 tấm thẻ đánh số thứ tự từ 1 đến 40. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để lấy được 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có đúng một thẻ mang số chia hết cho 6.

Đáp số: $P = 126/1147$.

53. Một hộp chứa 10 quả cầu màu đỏ được đánh số từ 1 đến 10 và 15 quả cầu màu xanh được đánh số từ 1 đến 15. Chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu từ hộp. Tính xác suất để chọn được hai quả cầu khác màu và tổng của các số trên hai quả cầu được chọn là một số lẻ.

Đáp số: $P = 1/4$.

54. Một hộp chứa 12 viên bi, trong đó có 5 viên bi xanh được đánh số từ 1 đến 5, có 4 viên bi đỏ được đánh số từ 1 đến 4 và 3 viên bi vàng được đánh số liên tiếp từ 1 đến 3. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi. Tính xác suất để 2 viên bi được lấy vừa khác màu, vừa khác số ?

Đáp số: $P = 37/66$.

55. Một hộp đựng 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi, rồi cộng các số trên các bi lại với nhau. Tính xác suất để kết quả thu được là 1 số lẻ.

Đáp số: $P = 16/33$.

56. Cho 100 tấm thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 100, chọn ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên 3 thẻ được chọn là một số chia hết cho 2.

Chọn 3 thẻ trong 100 thẻ, suy ra số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{100}^3$.

Gọi A là biến cố: "tổng 3 số ghi trên 3 thẻ là một số chia hết cho 2".

- Số chia hết cho 2 (dạng $2n$) gồm các số: $2,\ 4,\ 8, \ldots,\ 100$ có: $\dfrac{100-2}{2}+1 = 50$ số.
- Số chia cho 2 dư 1 (dạng $2n+1$) gồm: $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ 99$ có $\dfrac{99-1}{2}+1 = 50$ số.

Mô tả khả năng thuận lợi của biến cố A:

- **TH 1**: $2n+2n+2n = 6n \vdots 2$, tức chọn 3 số dạng $2n$ trong 50 số có C_{50}^3 số.
- **TH 2**: $2n+(2n+1)+(2n+1) = 6n+2 \vdots 2$, tức chọn 1 số dạng $2n$ trong 50 số và chọn 2 số dạng $2n+1$ trong 50 số có: $C_{50}^1.C_{50}^2$ số.

Suy ra $n(A) = C_{50}^3 + C_{50}^1.C_{50}^2$. Do đó xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{C_{50}^3 + C_{50}^1.C_{50}^2}{C_{100}^3} = \dfrac{1}{2}\cdot$

57. Trong hộp có 40 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 40, chọn ngẫu nhiên 3 thẻ trong hộp. Tính xác suất để tổng 3 số trên 3 thẻ lấy được là một số chia hết cho 3.

- Số chia hết cho 3 (dạng $3n$) gồm các số $3,\ 6,\ 9, \ldots, 39,$ có $\dfrac{39-3}{3}+1 = 13$ số.
- Số chia cho 3 dư 1 dạng $(3n+1)$ gồm các số $1,\ 4,\ 7, \ldots, 40,$ có
- Số chia cho 3 dư 2 dạng $(3n+2)$ gồm các số

Đáp số: $P = 127/380.$

58. Trong hộp có 50 viên bi được đánh số từ 1 đến 50, chọn ngẫu nhiên 3 viên bi trong hộp. Tính xác suất để tổng 3 số trên 3 viên bi được chọn là một số chia hết cho 3.

Đáp số: $P = 409/1225.$

59. (Đề thi THPT QG 2018 – Mã 104) Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;16]$. Tính xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3.

Phép thử T : "Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;16]$".

Bạn A lên bảng viết từ số $1 \to 16$ có 16 cách, tương tự B, C đều có 16 cách.

Suy ra số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = 16.16.16 = 16^3$.

Gọi A là biến cố: "ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3".

Số dạng $3n$ (chia hết cho 3) gồm: ....

Số dạng $3n+1$ (chia cho 3 dư 1) gồm: ....

Số dạng $3n+2$ (chia cho 3 dư 2) gồm: ....

Đáp số: $P = 683/2048$.

60. (Đề thi THPT QG 2018 – Mã 101) Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;17]$. Tính xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3.

Đáp số: $P = 1637/4913$.

61. (Đề thi THPT QG 2019 – Mã 101) Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;19]$. Tính xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3.

Đáp số: $P = 2287/6859$.

62. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để chọn được là số chẵn ?

- Xác định số phần tử của S ?

Gọi số có ba chữ số phân biệt có dạng $\overline{abc}$.
Chọn 3 số trong 7 số và xếp vào các vị trí $a,\ b,\ c$ có $A_7^3 = 210$ cách
$\Rightarrow$ có 210 số có ba chữ số phân biệt.
$\Rightarrow$ Số phần tử của S là 210.

- Chọn ngẫu nhiên một số từ $S \Rightarrow$ số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = C_{210}^1 = 210$.
- Gọi A là biến cố: "số được chọn là số chẵn"

Gọi số có ba chữ số phân biệt là số chẵn được lấy từ $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ có dạng $\overline{a_1a_2a_3}$.
Có $a_3 \in \{2;4;6\}$ nên có 3 cách chọn.
Chọn 2 số từ 6 số để đặt vào $a_1,\ a_2$ có A_6^2 cách chọn.
Theo QTN có $3A_6^2 = 90$ số chẵn.
Chọn 1 số từ $90 \Rightarrow n(A) = C_{90}^1 = 90$.
Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{90}{210} = \dfrac{3}{7}\cdot$

63. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên 1 số từ S, tính xác suất để số được chọn có mặt số 6.

Đáp số: $P = 2/3$.

64. Gọi X là tập hợp các số gồm hai chữ số khác nhau được lấy từ: $0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6$. Lấy ngẫu nhiên 2 phần tử của X. Tính xác suất để 2 số lấy được đều là số chẵn ?

Đáp số: $P = 1/3$.

65. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 2 chữ số khác nhau lập từ $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$ Chọn ngẫu nhiên 2 số từ tập S. Tính xác suất để tích 2 số được chọn là số chẵn ?

Đáp số: $P = 5/6.$

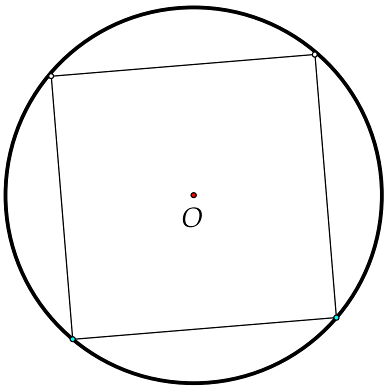
66. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9.$ Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp $S.$ Tính xác suất để phần tử được chọn chỉ chứa 3 chữ số lẻ ?

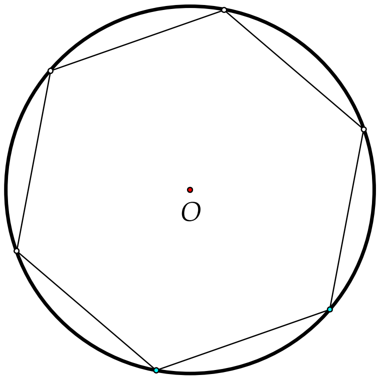
Đáp số: $P = 10/21.$

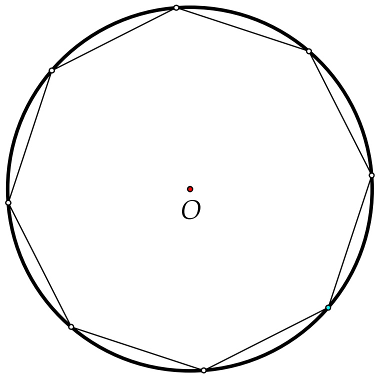
67. Gọi E là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau lập từ các chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7.$ Tập E có bao nhiêu phần tử ? Chọn ngẫu nhiên một phần tử của $E,$ tính xác suất được chọn chia hết cho 3 ?

Đáp số: $P = 2/5.$

Nhóm 4. Xác suất liên quan đến hình học







Đa giác đều $2n$ đỉnh nội tiếp đường tròn tâm O. Trả lời các câu hỏi sau:

1) Số cạnh được tạo thành từ $2n$ đỉnh là bao nhiêu ?

....

2) Số tam giác được tạo thành từ $2n$ đỉnh của đa giác đều bằng bao nhiêu ?

....

3) Có bao nhiêu đường chéo được tạo thành ?

....

4) Có bao nhiêu đường chéo đi qua tâm O ?

....

5) Số hình chữ nhật được tạo thành ?

....

6) Số hình vuông được tạo thành từ $2n$ đỉnh của đa giác bằng bao nhiêu ?

....

7) Số tam giác vuông được tạo thành từ $2n$ đỉnh của đa giác bằng bao nhiêu ?

....

8) Số tam giác cân tạo thành từ $2n$ đỉnh của đa giác bằng bao nhiêu ?

....

9) Có bao nhiêu tam giác vuông mà không cân được tạo từ $2n$ đỉnh của đa giác ?

....

....

10) Đa giác đều có $3n$ đỉnh $(n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}^*)$ sẽ có bao nhiêu tam giác đều được tạo thành ?

....

....

11) Đa giác đều có $3n$ đỉnh $(n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}^*)$ sẽ có bao nhiêu tam giác cân mà không đều ?

....

....

....

68. Cho hai đường thẳng song song a và b. Trên đường thẳng a lấy 6 điểm phân biệt; trên đường thẳng b lấy 5 điểm phân biệt. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm trong các điểm đã cho trên hai đường thẳng a và b. Tính xác xuất để 3 điểm được chọn tạo thành một tam giác.

Đáp số: $P = 9/11$.

69. Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2. Trên d_1 có 6 điểm phân biệt được tô màu đỏ. Trên d_2 có 4 điểm phân biết được tô màu xanh. Xét tất cả các tam giác được tạo thành khi nối các điểm đó với nhau. Chọn ngẫu nhiên một tam giác, tính xác suất để thu được tam giác có hai đỉnh màu đỏ.

Đáp số: $P = 5/8$.

70. Có 5 đoạn thẳng có độ dài lần lượt là 2cm, 4cm, 6cm, 8cm và 10cm. Lấy ngẫu nhiên 3 đoạn thẳng trong 5 đoạn thẳng trên, tính xác suất để 3 đoạn thẳng lấy ra lập thành một tam giác.

Chọn 3 đoạn thẳng trong 5 đoạn thẳng $\Rightarrow$ Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = C_5^3 = 10$.

Gọi A là biến cố " 3 đoạn thẳng lấy ra lập thành một tam giác".

Để tạo được thành 1 tam giác thì tổng độ dài của hai cạnh phải lớn hơn độ dài cạnh còn lại.

Do đó ta có các biến cố thuận lợi của A là $(4\text{cm},\ 6\text{cm},\ 8\text{cm})$ hoặc $(6\text{cm},\ 8\text{cm},\ 10\text{cm})$ hoặc $(4\text{cm},\ 8\text{cm},\ 10\text{cm})$. Suy ra số phần tử của biến cố A là $n(A) = 3$.

Xác suất cần tìm là $P =$ ....

71. Có 5 đoạn thẳng có độ dài lần lượt là 1cm, 2cm, 3cm, 4cm, 5cm. Lấy ngẫu nhiên ra 3 đoạn thẳng, tính xác suất để 3 đoạn thẳng được chọn ra là độ dài ba cạnh của 1 tam giác.

Đáp số: $P = 3/10$.

72. Cho đa giác đều 20 đỉnh. Trong các tứ giác có bốn đỉnh là đỉnh của đa giác, chọn ngẫu nhiên một tứ giác. Tính xác suất để tứ giác được chọn là hình chữ nhật.

Đáp số: $P = 3/323$.

73. Cho một đa giác đều 12 đỉnh $A_1A_2...A_{12}$ nội tiếp đường tròn (O). Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của đa giác đó. Tính xác suất để 4 đỉnh được chọn ra tạo thành một hình chữ nhật.

Đáp số: $P = 1/33$.

74. Cho một đa giác đều gồm $2n$ đỉnh $(n \geq 2,\ n \in \mathbb{N})$. Chọn ngẫu nhiên ba đỉnh trong số $2n$ đỉnh của đa giác, xác suất ba đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông là $0,2$. Tìm giá trị của n.

Đáp số: $n = 8$.

75. Cho đa giác đều $2n$ đỉnh $(n \geq 2,\ n \in \mathbb{N})$. Chọn ngẫu nhiên bốn đỉnh từ các đỉnh của đa giác đã cho. Biết rằng xác suất để bốn đỉnh được chọn là bốn đỉnh của hình chữ nhật bằng $1/65$. Tìm giá trị của n.

Đáp số: $n = 8$.

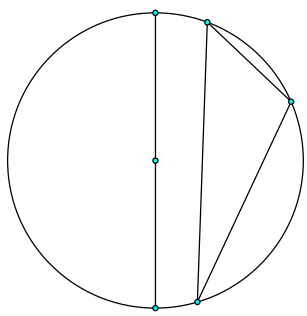
76. Cho một đa giác đều 48 đỉnh. Lấy ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác. Tính xác suất để tam giác tạo thành từ ba đỉnh đó là một tam giác nhọn.

Chọn ra 3 đỉnh từ 48 đỉnh của đa giác $\Rightarrow$ Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{48}^3$.

Gọi A là biến cố "tam giác tạo thành từ ba đỉnh đó là một tam giác nhọn".

- **Tìm số tam giác tù tạo thành ?**

  Xét đa giác đều 48 đỉnh nội tiếp đường tròn tâm O và chia ra hai miền như hình vẽ.



+ Chọn đỉnh thứ nhất của tam giác, có 48 cách.

+ Để tạo thành tam giác tù thì ba đỉnh của tam giác phải thuộc cùng 1 nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác. Trong 47 đỉnh còn lại sẽ có 23 đỉnh cùng với đỉnh đã chọn thuộc cùng một nửa đường tròn ngoại tiếp. Do đó số cách chọn 2 đỉnh còn lại là C_{23}^2.

Theo quy tắc nhân, số tam giác tù tạo thành là $48C_{23}^2$ tam giác.

- **Tìm số tam giác vuông tạo thành ?**

....

....

Số tam giác vuông tạo thành là .... $= 1104$ tam giác.

- **Số tam giác nhọn** là $C_{48}^3 - 48C_{23}^2 - 1104 = 4048$ tam giác $\Rightarrow n(A) = 4048$.
- Xác suất cần tìm là $P(A) =$ ....

77. Cho đa giác đều 100 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác. Tính xác suất ba đỉnh được trọn là ba đỉnh của tam giác tù.

....

....

....

....

....

....

....

....

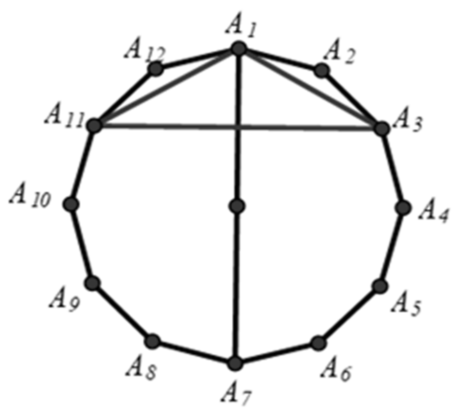
Đáp số: $P = 8/11$. ....

78. Chọn ngẫu nhiên ba đỉnh bất kỳ từ các đỉnh của đa giác đều có 12 cạnh $A_1A_2....A_{12}$. Tính xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác cân.

Chọn 3 đỉnh trong 12 đỉnh, suy ra số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{12}^3 = 220$.

Gọi A là biến cố: “...”.

Mô tả khả năng thuận lợi của biến cố A :



Chọn đỉnh A_1 khi đó chọn được 5 cặp đỉnh cách đều A_1 nên có 5 tam giác cân là các tam giác sau $A_1A_2A_{12}$, $A_1A_3A_{11}$, $A_1A_4A_{10}$, $A_1A_5A_9$, $A_1A_6A_8$.

Chọn đỉnh A_2 khi đó chọn được 5 cặp đỉnh cách đều A_2 nên có 5 tam giác cân là các tam giác sau $A_2A_1A_3$, $A_2A_{12}A_4$, $A_2A_{11}A_5$, $A_2A_{10}A_6$, $A_2A_9A_7$.

Tương tự cho các đỉnh còn lại, mỗi đỉnh có 5 tam giác cân.

Do đó: $n(A) = 12.5 = 60$. Xác suất cần tìm là: $P(A) = \frac{\quad}{\quad} = \frac{3}{11}$.

<u>79.</u> Cho đa giác đều 20 đỉnh. Lấy ngẫu nhiên 3 đỉnh. Tính xác suất để 3 đỉnh đó là 3 đỉnh của 1 tam giác vuông không cân.

<u>Đáp số</u>: $P = 8/57$.

<u>80.</u> Cho một đa giác đều có 18 đỉnh nội tiếp trong một đường tròn tâm O. Gọi X là tập hợp các tam giác có các đỉnh là các đỉnh của đa giá trên. Tính xác suất để chọn được một tam giác từ tập X là tam giác cân nhưng không phải là tam giác đều.

<u>Đáp số</u>: $P = 23/136$.

<u>81.</u> Chọn ngẫu nhiên ba đỉnh từ $4n+1$ đỉnh của đa giác đều $4n+1$, đỉnh $n \in \mathbb{N}^*$. Xác suất ba đỉnh được chọn là ba đỉnh của tam giác tù bằng bao nhiêu ?

<u>Đáp số</u>: $P = \frac{3(2n-1)}{2(4n-1)}$.

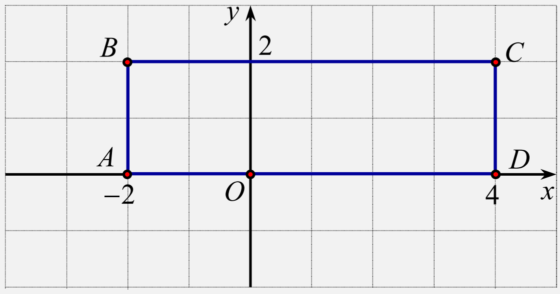
82. Cho đa giác đều 36 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh trong 36 đỉnh của đa giác. Tính xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một hình vuông.

Đáp số: $P = 1/6545.$

83. Cho hình vuông $ABCD.$ Trên các cạnh $AB,\ BC,\ CD,\ DA$ lần lượt lấy $1,\ 2,\ 3$ và n điểm phân biệt $(n \geq 3,\ n \in \mathbb{N})$ khác $A,\ B,\ C,\ D.$ Tìm $n,$ biết số tam giác lấy từ $n+6$ điểm đã cho là $439.$

Hướng dẫn: Sử dụng biến cố đối, suy ra $n = 10.$

84. Trên mặt phẳng Oxy, ta xét một hình chữ nhật $ABCD$ với các điểm $A(-2;0)$, $B(-2;2)$, $C(4;2)$ và $D(4;0)$ như hình vẽ. Một con châu chấu nhảy trong hình chữ nhật đó tính cả trên cạnh hình chữ nhật sao cho chân nó luôn đáp xuống mặt phẳng tại các điểm có tọa độ nguyên(tức là điểm có cả hoành độ và tung độ đều nguyên). Tính xác suất để nó đáp xuống các điểm $M(x;y)$ mà $x+y<2$.



Lời giải tham khảo

Không gian mẫu là: "Con châu chấu nhảy trong hình chữ nhật $ABCD$ và cả trên các cạnh của hình chữ nhật đó, chân nó luôn đáp xuống mặt phẳng tại các điểm có tọa độ nguyên".

Do $x \in [-2;4]$, $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 7 số x và $y \in [0;2]$, $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 3 số y.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 3.7 = 21$.

Gọi A là biến cố: "Con châu chấu luôn đáp xuống các điểm $M(x;y)$ mà $x+y<2$".

Ta có các trường hợp thuận lợi của biến cố A là:

$(x;y) \in \left\{(-2;0),\ (-1;0),\ (0;0),\ (1;0),\ (0;1),\ (-1;1),\ (-2;1),\ (-2;2),\ (-1;2)\right\}$.

Suy ra số phần tử của A là: $n(A) = 9$. Do đó xác suất cần tìm là: $P(A) = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{\quad}{\quad}$.

85. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $OMNP$ với $M(0;10)$, $N(100;10)$, $P(100;0)$. Gọi S là tập hợp tất cả các điểm $A(x;y)$ với $x,\ y \in \mathbb{Z}$ nằm bên trong kể cả trên cạnh của hình chữ nhật $OMNP$. Lấy ngẫu nhiên 1 điểm $A(x;y) \in S$. Tính xác suất để $x+y \le 90$.

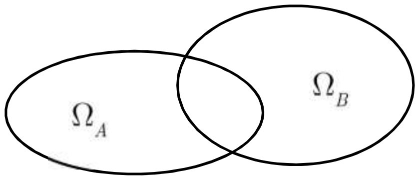
Đáp số: $P = 86/101$.

§ 5. CAC QUY TAC TÍNH XAC SUAT

☆☆☆

① Quy tắc cộng xác suất

a) Biến cố hợp

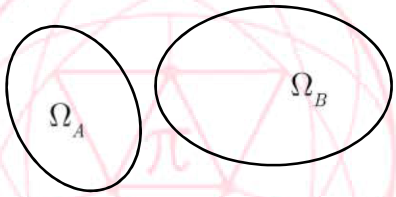


Cho hai biến cố A và B. Biến cố "A hoặc B xảy ra", kí hiệu là $A \cup B$, được gọi là hợp của hai biến cố A và B. Khi đó: $\Omega_A \cup \Omega_B \subset \Omega$.

Ví dụ. Chọn ngẫu nhiên một bạn học sinh lớp 11 của trường. Gọi A là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi toán" và B là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi Lý".

Khi đó: $A \cup B$ là biến cố: " .... "

b) Biến cố xung khắc



Cho hai biến cố A và B. Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra. Khi đó: $\Omega_A \cap \Omega_B = \varnothing$.

Ví dụ. Chọn ngẫu nhiên một học sinh lớp 11 của trường. Gọi A là biến cố: "Bạn đó là học sinh lớp $11C_1$" và gọi B là biến cố: "Bạn đó là học sinh lớp $11C_2$". Khi đó A và B là hai biến cố xung khắc.

c) Quy tắc cộng xác suất hai biến cố xung khắc

- Nếu A và B là biến cố xung khắc thì xác suất biến cố $A \cup B$ là $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Cho n biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ đôi một là các biến cố xung khắc với nhau.

  Khi đó: $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n)$.

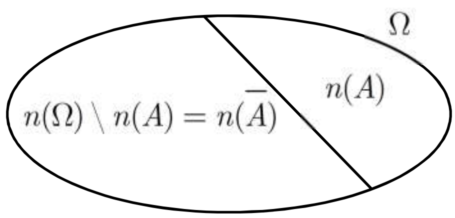
Ví dụ. Một hộp đựng 4 bi xanh và 3 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để có ít nhất 2 bi xanh.

....

....

....

d) Biến cố đối



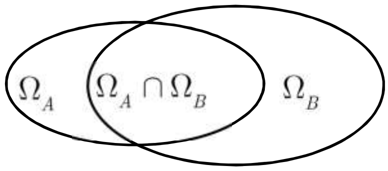
Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố "không A", kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là biến cố đối của A. Ta nói A và $\overline{A}$ là hai biến cố đối của nhau.

Khi đó: $\Omega_{\overline{A}} = \Omega \setminus \Omega_A \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

<u>**Ví dụ**</u>. Xạ thủ bắn vào bia 1 viên đạn với xác suất $2/7$. Khi đó xác suất bắn trượt là ....

② Quy tắc nhân xác suất

a) Biến cố giao



Cho hai biến cố A và B. Biến cố "A và B cùng xảy ra", kí hiệu $A \cap B$ (hay AB), gọi là giao của hai biến cố A và B.

<u>**Ví dụ**</u>. Chọn ngẫu nhiên một học sinh lớp 11 của trường. Gọi A là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi toán" và gọi B là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi Lý".

Khi đó: $A \cap B$ là biến cố: " .... "

b) Hai biến cố độc lập

<u>**Ví dụ**</u>. Gieo một đồng xu liên tiếp 2 lần. Gọi A là biến cố: "Lần gieo thứ nhất xuất hiện mặt sấp" và gọi B là biến cố: "Lần gieo thứ hai xuất hiện mặt ngửa" là 2 biến cố độc lập.

- Hai biến cố được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng xác suất xảy ra của biến cố kia.
- Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì A và $\overline{B}$, $\overline{A}$ và B, $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng là độc lập.

c) Quy tắc nhân xác suất hai biến cố độc lập

- Nếu A và B là hai biến cố độc lập với nhau thì ta luôn có: $P(AB) = P(A).P(B)$.
- Cho n biến cố $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots\ldots, A_n$ độc lập với nhau từng đôi một. Khi đó:

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n) = P(A_1).P(A_2).P(A_3)\ldots\ldots P(A_n) \text{ hay } P\left(\prod_1^n A_i\right) = \prod_1^n P\left(A_i\right).$$

<u>**Ví dụ 1**</u>. Một cầu thủ sút bóng vào cầu môn hai lần. Biết rằng xác suất sút vào cầu môn là $\dfrac{3}{8}\cdot$ Tính xác suất để cầu thủ đó sút hai lần bóng đều vào được cầu môn ?

<u>**Giải**</u>. ....

<u>**Ví dụ 2**</u>. Có hai xạ thủ bắn bia. Xác suất xạ thủ thứ nhất bắn trúng bia là $0,8$. Xác suất xạ thủ thứ hai bắn trúng bia là $0,7$. Tính xác suất để:

a) Cả hai xạ thủ đều bắn trúng bia. ....

....

b) Cả hai xạ thủ đều không bắn trúng bia. ....

....

....

c) Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia. ....

....

86. Trong phòng làm việc có hai máy tính hoạt động độc lập với nhau, khả năng hoạt động tốt trong ngày của hai máy này tương ứng là 75% và 85%. Tính xác suất để có đúng một máy hoạt động không tốt trong ngày.

Gọi $A,\ B$ lần lượt là biến cố "khả năng hoạt động tốt trong ngày của hai máy đã cho".

Suy ra $H = A\overline{B} \cup \overline{A}B$ là biến cố "có đúng một máy hoạt động không tốt trong ngày".

Ta có: $P(A) = 0,75 \Rightarrow P(\overline{A}) = 0,25$ và

$P(B) = 0,85 \Rightarrow P(\overline{B}) = 0,15.$

$$P(H) = P(A).P(\overline{B}) + P(\overline{A}).P(B)$$
$$= 0,75 \times 0,15 + 0,25 \times 0,85 = 0,325.$$

87. Hai người độc lập nhau cùng bắn mỗi người một viên đạn vào bia. Xác suất bắn trúng bia của họ lần lượt là $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{5}\cdot$ Tính xác suất để có đúng một người bắn trúng vào bia.

Đáp số: $P = 2/5$.

88. Ba xạ thủ cùng bắn vào một tấm bia, xác suất trúng đích lần lượt là $0,5;\ 0,6$ và $0,7$. Tính xác suất để có đúng hai người bắn trúng vào bia.

Đáp số: $P = 0,44$.

89. Ba xạ thủ cùng bắn vào một tấm bia, xác suất trúng đích lần lượt là $0,5;\ 0,6$ và $0,7$. Tính xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng vào bia.

Đáp số: $P = 0,94$.

90. Một chiếc máy bay có hai động cơ I và II hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để động cơ I và động cơ II hoạt động tốt lần lượt là $0,8$ và $0,7$. Tính xác suất để:

a) Cả hai động cơ đều chạy tốt.

Đáp số: $P = 0,56$.

b) Cả hai động cơ đều chạy không tốt.

Đáp số: $P = 0,06$.

91. Xác suất câu được cá của người thứ nhất là $0,5;$ xác suất câu được cá của người thứ hai là $0,4;$ xác suất câu được cá của người thứ ba là $0,2.$ Tính xác suất để:

a) Có đúng 1 người câu được cá.

Đáp số: $P = 0,42$.

b) Người thứ ba luôn câu được cá.

Đáp số: $P = 0,2$.

c) Có ít nhất một động cơ chạy tốt.

Đáp số: $P = 0,94.$

c) Có ít nhất một người câu được cá.

Đáp số: $P = 0,76.$

92. Một máy bay có 5 động cơ gồm 3 động cơ bên cánh trái và 2 động cơ bên cánh phải. Mỗi động cơ bên cánh phải có xác suất bị hỏng là $0,09,$ mỗi động cơ bên cánh trái có xác suất bị hỏng là $0,04.$ Các động cơ hoạt động độc lập với nhau. Máy bay chỉ thực hiện được chuyến bay an toàn nếu ít nhất 2 động cơ làm việc. Tìm xác suất để máy bay thực hiện được chuyến bay an toàn.

Đáp số: $P = 0,9999074656.$

93. Một người bắn súng 3 lần vào bia, xác suất trúng vào hồng tâm bằng $\dfrac{3}{7}\cdot$ Tính xác suất bắn trúng hồng tâm đúng 1 lần của người bắn súng đó.

Gọi $A_i,\ (i = \overline{1,3})$ lần lượt là biến cố bắn trúng vào tâm ở các lần thứ nhất, thứ hai và thứ ba. Theo đề bài, ta có: $P(A_i) = \dfrac{3}{7}\cdot$

Gọi $\overline{A}_i,\ (i = \overline{1,3})$ lần lượt là biến cố không bắn trúng vào tâm ở các lần thứ nhất, thứ hai và thứ ba. Suy ra: $P(\overline{A}_i) = 1 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{4}{7}\cdot$

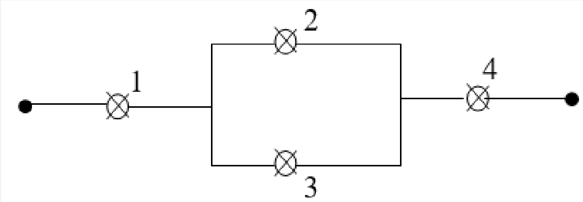
Gọi A là biến cố: "người đó bắn ba lần và trúng mục tiêu một lần".

$$P(A) = P(A_1.\overline{A}_2.\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1.A_2.\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1.\overline{A}_2.A_3)$$
$$= P(A_1.\overline{A}_2.\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1.A_2.\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1.\overline{A}_2.A_3)$$
$$= P(A_1).P(\overline{A}_2).P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1).P(A_2).P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)$$
$$= \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7} + \frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7} = \frac{144}{343}\cdot$$

94. Xác suất câu được cá của người thứ nhất là $0,5;$ xác suất câu được cá của người thứ hai là $0,4;$ xác suất câu được cá của người thứ ba là $0,2.$ Tính xác suất để có 2 người câu được cá.

Đáp số: $P = 0,2.$

95. Một mạch điện gồm 4 linh kiện như hình vẽ, trong đó xác suất hỏng của từng linh kiện trong một khoảng thời gian t nào đó tương ứng là $0,2$; $0,1$; $0,05$ và $0,02$. Biết rằng các linh kiện làm việc độc lập với nhau và các dây luôn tốt. Tính xác suất để mạng điện hoạt động tốt trong khoảng thời gian t.



Đáp số: $P = 0,78008$.

96. Một đề thi trắc nghiệm gồm 50 câu, mỗi câu có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có 1 phương án đúng, mỗi câu trả lời đúng được $0,2$ điểm. Một thí sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên 1 trong 4 phương án của câu. Tính xác suất để thí sinh đó được 6 điểm.

Khi chọn ngẫu nhiên 1 trong 4 đáp án thì:

Xác suất trả lời đúng là $P(A) = \dfrac{1}{4}$ và xác suất trả lời sai là $P(\overline{A}) = \dfrac{3}{4}\cdot$

Mỗi câu trả lời đúng được $0,2$ điểm. Gọi x là số câu trả lời đúng.

Để được 6 điểm thì học sinh này cần trả lời đúng $0,2x = 6 \Leftrightarrow x = 30$ câu và sai 20 câu.

Chọn 20 câu trong 50 câu có, C_{50}^{20} cách.

Theo quy tắc nhân xác suất, xác suất để được 6 điểm là $P = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{30}.\left(\dfrac{3}{4}\right)^{20}.C_{50}^{20}$.

97. Trong kì thi thử THPT Quốc Gia, An làm đề thi trắc nghiệm môn Toán. Đề thi gồm 50 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng; trả lời đúng mỗi câu được $0,2$ điểm. An trả lời hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu, 5 câu còn lại An chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để điểm thi của An không dưới $9,5$ điểm.

Đáp số: $P = 13/1024$.

98. Trong kì thi THPT Quốc Gia, bạn X dự thi hai môn trắc nghiệm môn Hóa và Lí. Đề thi của mỗi câu gồm 50 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn, trong đó có 1 phương án đúng, làm đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Mỗi môn thi bạn X làm hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu, 5 câu còn lại X chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để tổng hai môn thi của X không dưới 19 điểm.

99. Một bài trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn trong đó có 1 đáp án đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 4 điểm và mỗi câu trả lời sai được trừ 2 điểm. Một học sinh không học bài nên đánh hú họa 1 câu trả lời. Tìm xác suất để học sinh này nhận điểm dưới 1.

Khi chọn ngẫu nhiên 1 trong 4 đáp án thì:

Xác suất trả lời đúng là $P(A) = \dfrac{1}{4}$ và xác suất trả lời sai là $P(\overline{A}) = \dfrac{3}{4}\cdot$

Gọi x là câu trả lời đúng $(0 \le x \le 10,\ x \in \mathbb{Z})$. Khi đó câu trả lời sai là $10 - x$.

Số điểm học sinh này đạt được là: $4x - 2(10 - x) = 6x - 20$ điểm.

Học sinh này nhận điểm dưới 1 khi $6x - 20 < 1 \Leftrightarrow 6x < 21 \Leftrightarrow x < \dfrac{21}{6} \Leftrightarrow x < 3,5$.

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

Gọi A_i $(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ là biến cố: "Học sinh trả lời đúng i câu".

Xác suất cần tìm là $P(A) = P(A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$

$=$

Đáp số: $P(A) = 0,7759$.

100. Ba cầu thủ sút phạt luân lưu 11 mét, mỗi người đá một lần với xác suất làm bàn tương ứng là $x;\ y$ và $0,6$ (với $x > y$). Biết xác suất để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là $0,976$ và xác suất để ba cầu thủ đều ghi bàn là $0,336$. Tính xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn ?

Đáp số: $P = 0,452$.

Chöông 3 : DAY SO – CAP SO CONG – CAP SO NHAN

§ 1. PHÖÔNG PHAP QUY NAP TOAN HOC

☆☆☆

- **Bài toán.** Chứng minh mệnh đề chứa biến $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương $n.$
- **Phương pháp**

— **Bước 1.** Với $n=1,$ ta chứng minh $P(1)$ đúng.

— **Bước 2.** Giả sử $P(n)$ đúng với $n=k\geq 1.$

Ta phải chứng minh $P(n)$ đúng với $n=k+1.$

Kết luận: mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương $n.$

Lưu ý. Để chứng minh mệnh đề chứa biến $P(n)$ đúng với $n\geq p,\ p:$ nguyên dương. Ta cũng làm các bước tương tự như trên:

— **Bước 1.** Với $n=p,$ ta chứng minh $P(p)$ đúng.

— **Bước 2.** Giả sử $P(n)$ đúng với $n=k\geq p.$

Ta phải chứng minh $P(n)$ đúng với $n=k+1.$

Kết luận: mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương $n.$

1. Chứng minh rằng với mọi $n\in\mathbb{N}^*,$ ta có: $1.4+2.7+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2\quad(*)$

Lời giải tham khảo

- Với $n=1\Rightarrow VT_{(*)}=VP_{(*)}=4.$ Suy ra $(*)$ đúng với $n=1.$
- Giả sử $(*)$ đúng với $n=k,$ nghĩa là có: $1.4+2.7+\cdots+k(3k+1)=k(k+1)^2.$
- Ta chứng minh $(*)$ đúng với $n=k+1,$ nghĩa là cần chứng minh:

  $1.4+2.7+\cdots+k(3k+1)+(k+1)(3k+4)=(k+1)(k+2)^2.$

  Thật vậy, ta có: $\underbrace{1.4+2.7+\cdots+k(3k+1)}_{k(k+1)^2}+(k+1)(3k+4)=k(k+1)^2+(k+1)(3k+4)$

  $=(k+1)(k+2)^2\Rightarrow(*)$ đúng khi $n=k+1.$
- **Kết luận**: Theo nguyên lý quy nạp, $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương $n.$

2. Chứng minh rằng với mọi $n\in\mathbb{N}^*,$ ta có: $1.4+2.7+\cdots\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2.$

3. Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $1 + 3 + 6 + 10 + \cdots\cdots + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} \cdot$

4. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $2 + 5 + 8 + \cdots\cdots\cdots + (3n-1) = \dfrac{n(3n+1)}{2} \cdot$

5. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot$

6. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots\cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3} \cdot$

7. Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots\cdots + (2n)^2 = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3} \cdot$

8. Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots\cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}\cdot$

....

....

....

....

....

9. Chứng minh với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}\cdot$

....

....

....

....

....

10. Chứng minh: $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\cdots\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n},\ \forall n \ge 2,\ n \in \mathbb{N}.$

....

....

....

....

....

....

....

....

11. Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{2^n - 1}{2^n}\cdot$

....

....

....

....

....

....

....

....

12. Chứng minh với mọi số $n \in \mathbb{N}^*$, thì $u_n = n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

- Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 12 \,\vdots\, 6$. Do đó u_n đúng khi $n = 1$.
- Giả sử với $n = k$ thì $u_k = k^3 + 11k \,\vdots\, 6$.

  Ta cần chứng minh $n = k + 1$ thì $u_{k+1} = (k+1)^3 + 11(k+1) \,\vdots\, 6$

  Thật vậy: $u_{k+1} = (k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11$

  $= (k^3 + 11k) + 3k(k+1) + 12 = u_k + 3k(k+1) + 12$.

  Mà $u_k \,\vdots\, 6,\ 12 \,\vdots\, 6$ và có $k(k+1) \,\vdots\, 2 \Rightarrow 3k(k+1) \,\vdots\, 6$ nên tổng của chúng sẽ chia hết cho 6. Nghĩa là $u_{k+1} \,\vdots\, 6$. Do đó u_n đúng khi $n = k + 1$.
- Theo nguyên lý quy nạp, ta có $u_n = n^3 + 11n$ chia hết cho 6 (đpcm).

☞ **Cần nhớ**: $n \in \mathbb{N}^*$ thì ta luôn có $n(n+1) \,\vdots\, 2$.

13. Chứng minh với mọi số $n \in \mathbb{N}^*$, thì $u_n = 2n^3 - 3n^2 + n$ chia hết cho 6.

....

....

....

....

....

....

14. Chứng minh với mọi số $n \in \mathbb{N}^*$, thì $u_n = 4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9.

- Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 4^1 + 15.1 - 1 = 18 \,\vdots\, 9$. Do đó u_n đúng khi $n = 1$.
- Giả sử với $n = k$ thì $u_k = 4^k + 15k - 1 \,\vdots\, 9 \Rightarrow 4u_k = 4(4^k + 15k - 1) \,\vdots\, 9$.

  Ta cần chứng minh $n = k + 1$ thì $u_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 \,\vdots\, 9$.

  Thật vậy: $u_{k+1} = 4.4^k + 15k + 14 = 4(4^k + 15k - 1) - 45k + 18 = 4.u_k + 9(2 - 5k)$

  Mà $4u_{k+1} \,\vdots\, 9$ và $9(2 - 5k) \,\vdots\, 9$ nên tổng của chúng sẽ chia hết cho 9 nghĩa là $u_{k+1} \,\vdots\, 9$.

  Do đó u_n đúng khi $n = k + 1$.
- Theo nguyên lý quy nạp, ta có $u_n = 4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9. (đpcm).

☞ **Cần nhớ**: Gặp dạng u_n có chứa a^n ta sẽ nhân thêm a để dễ nhìn nhận u_{k+1} chia hết.

15. Chứng minh với mọi số $n \in \mathbb{N}^*$, thì $u_n = 4^n + 6n + 8$ chia hết cho 8.

....

....

....

....

....

....

§ 2. DAY SO

☆☆☆

① Định nghĩa

— Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (hay gọi tắt là dãy số).

— Mỗi giá trị của hàm số u được gọi là một số hạng của dãy số. Chẳng hạn:

+ $u_1 = u(1)$: số hạng thứ nhất (hay còn gọi là số hạng đầu).

+ $u_2 = u(2)$: số hạng thứ hai.

+ $u_n = u(n)$: số hạng thứ n (hay còn gọi là số hạng tổng quát).

② Cách cho một dãy số

— **Cách 1**. Cho dãy số bởi công thức của số hạng tổng quát.

Ví dụ 1. Cho dãy (u_n) với $u_n = \dfrac{n-1}{3n+1}$.

Dãy số được viết dưới dạng khai triển là: ....

Tính: $u_{50} =$ .... và tính: $u_{99} =$ ....

— **Cách 2**. Cho dãy số bởi hệ thức truy hồi (hay quy nạp):

+ Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu),

+ Cho một công thức tính u_n theo u_{n-1} (hoặc một vài số hạng đứng ngay trước nó).

Ví dụ 2. Cho dãy số u_n được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, \ (n \ge 2) \end{cases}$.

Dạng khai triển của dãy số trên là: ....

Tính $u_8 = ?$ ....

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1, \ u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \ (n \ge 3) \end{cases}$ (Dãy số Phibônaxi)

Dạng khai triển của dãy số trên là: ....

Tính $u_7 = ?$ ....

Ví dụ 4. Tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n của các dãy số $(u_n) : \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$.

....

....

....

....

....

....

③ Dãy số tăng, dãy số giảm

• (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow n \in \mathbb{N}^*, \ u_n < u_{n+1}$. • (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow n \in \mathbb{N}^*, \ u_n > u_{n+1}$.

Dạng toán 1. Phương pháp xét tính tăng giảm của dãy số

Phương pháp 1. Xét dấu của hiệu số $u_{n+1} - u_n$. **(sử dụng khi đề cho đa thức)**

- Nếu $u_{n+1} - u_n > 0$ thì (u_n) tăng.
- Nếu $u_{n+1} - u_n < 0$ thì (u_n) giảm.

Phương pháp 2. Nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$ thì so sánh tỉ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ với số 1. **(sử dụng khi có** a^n**)**.

- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

1. Xét tính tăng, giảm của dãy số sau:

$$u_n = \frac{n-1}{n+1} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Thực hiện phép chia đa thức, ta có:

$u_n = \dfrac{n-1}{n+1} = 1 - \dfrac{2}{n+1}$.

Xét $u_{n+1} - u_n = 1 - \dfrac{2}{n+2} - \left(1 - \dfrac{2}{n+1}\right)$

$= \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$

$= \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $u_{n+1} - u_n > 0$.

Kết luận: Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

2. Xét tính tăng, giảm của dãy số sau:

$$u_n = \frac{2n-1}{n+3} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

ĐS: Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

3. Xét tính tăng, giảm của dãy số sau:

$$u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n+1} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

ĐS: Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

4. Xét tính tăng, giảm của dãy số sau:

$$u_n = \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

ĐS: Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

5. Xét tính tăng, giảm của dãy số sau:

$$u_n = n - \sqrt{n^2 - 1} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải tham khảo

Ta có: $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$

$$= \frac{(n - \sqrt{n^2 - 1})(n + \sqrt{n^2 - 1})}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$$

$$= \frac{n^2 - (n^2 - 1)}{n + \sqrt{n^2 - 1}} = \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}}.$$

Mà với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, lại có:

$$(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 - 1} > n + \sqrt{n^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 - 1}} < \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0.$$

Do đó dãy số (u_n) là dãy số giảm.

6. Xét tính tăng, giảm của dãy số sau:

$$u_n = 2n - \sqrt{4n^2 - 1} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

7. Xét tính tăng, giảm của dãy số sau:

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1} - 1}{n} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

8. Xét tính tăng, giảm của dãy số sau:

$$u_n = \frac{3 - \sqrt{3 - n}}{n} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

9. Xét tính tăng, giảm của dãy số sau:

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải tham khảo

Nhận thấy $u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot \dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{2^n.\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}.2.2^n}$

$= \dfrac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} < 1,\ (\forall n \ge 1).$

Thật vậy $\dfrac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{n+1}{4n} < 1^2$

$\Leftrightarrow 4n > n+1 \Leftrightarrow 3n > 1$: đúng $\forall n \ge 1$.

Kết luận: Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

10. Xét tính tăng, giảm của dãy số sau:

$$u_n = \frac{n+1}{3^n} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

11. Xét tính tăng, giảm của dãy số sau:

$$u_n = \frac{3^n}{n^2} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

12. Xét tính tăng, giảm của dãy số sau:

$$u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Dạng toán 2. Tìm công thức tổng quát và dãy số bị chặn

1) Tìm công thức tổng quát của dãy số.

- Nếu (u_n) có dạng $u_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ thì biến đổi a_k thành hiệu của hai số hạng, dựa vào đó thu gọn u_n.
- Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi, tính vài số hạng đầu của dãy số (chẳng $u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots$), từ đó dự đoán công thức tính u_n theo n, rồi chứng minh công thức này bằng phương pháp quy nạp. Ngoài ra cũng có thể tính hiệu $u_{n+1} - u_n$ dựa vào đó để tìm công thức tính u_n theo n.

2) Dãy số bị chặn.

- Dãy số bị chặn trên: (u_n) được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \le M$.
- Dãy số bị chặn dưới: (u_n) được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \ge m$.
- Dãy số bị chặn: (u_n) được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới. Nghĩa là tồn tại một số M và một số m sao cho $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ m \le u_n \le M$.

1. Cho dãy số (u_n) và đặt $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ với $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)}\cdot$

a) Xác định $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4$.

Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = a_1 = \dfrac{1}{1.2} = \dfrac{1}{2}\cdot$ Với $n = 2 \Rightarrow u_2 = a_1 + a_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2.(2+1)} = \dfrac{2}{3}\cdot$

Với $n = 3 \Rightarrow u_3 = a_1 + a_2 + a_3 = u_2 + a_3 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3(3+1)} = \dfrac{3}{4}\cdot$

Với $n = 4 \Rightarrow u_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = u_3 + a_4 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4.5} = \dfrac{4}{5}\cdot$

b) Xác định công thức tổng quát u_n của dãy số.

Ta có: $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\cdot$ Do đó:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}\cdot$$

c) Xét tính bị chặn.

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $u_n > 0$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới.

Ta lại có $u_n = 1 - \dfrac{n}{n+1} < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn trên.

Do đó dãy số bị chặn.

2. Cho dãy số (u_n) và đặt $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ với $a_k = \dfrac{1}{k(k+4)}\cdot$

a) Xác định $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4$.

b) Xác định công thức tổng quát u_n của dãy số.

c) Xét tính bị chặn.

3. Cho dãy số (u_n) và đặt $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ với $a_k = \dfrac{1}{4k^2 - 1}$.

a) Xác định $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4$.

b) Xác định công thức tổng quát u_n của dãy số.

c) Xét tính bị chặn.

4. Tìm 5 số hạng đầu và tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số:

a) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$.

Với $n = 1 \Rightarrow u_2 = u_1 + 2 = 3 + 2 = 5.$ Với $n = 2 \Rightarrow u_3 = u_2 + 2 = 5 + 2 = 7.$

Với $n = 3 \Rightarrow u_4 = u_3 + 2 = 7 + 2 = 9.$ Với $n = 4 \Rightarrow u_5 = u_4 + 2 = 9 + 2 = 11.$

Từ các số hạng đầu trên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng $u_n = 2n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh $u_n = 2n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (i)$

- Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 2.1 + 1 = 3$: đúng. Do đó (i) đúng khi $n = 1$.
- Giả sử (i) đúng với $n = k$, nghĩa là ta có: $u_k = 2k + 1 \qquad (ii)$
- Ta cần chứng minh (i) đúng với $n = k + 1$, nghĩa là cần $u_{k+1} = 2(k + 1) + 1 = 2k + 3$.

  Thật vậy, từ đề bài, ta có: $u_{n+1} = u_n + 2 \Rightarrow u_{k+1} = u_k + 2 = \underbrace{(2k + 1)}_{do:\ (ii)} + 2 = 2k + 3$.

Theo nguyên lý quy nạp, thì $u_n = 2n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$.

Đáp số: $u_n = 2^n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2 \end{cases}$.

Ta có: $u_{n+1} = u_n + 3n - 2 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 3n - 2$. Từ đó suy ra:

$u_1 = 5.$

$u_2 - u_1 = 3.1 - 2.$

$u_3 - u_2 = 3.2 - 2.$

$u_4 - u_3 = 3.3 - 2.$

....

$u_{n-1} - u_{n-2} = 3(n-2) - 2.$

$u_n - u_{n-1} = 3(n-1) - 2.$

Cộng từng vế cho n đẳng thức trên, ta được: $u_n = 5 + 3\left[1 + 2 + 3 + ... + (n-1)\right] - 2(n-1)$

$$= 5 + \frac{3(n-1).n}{2} - 2(n-1) = 5 + \frac{3(n-1).n - 4(n-1)}{2} = 5 + \frac{(n-1)(3n-4)}{2}.$$

6. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Đáp số: $u_n = 10^n + n$.

§ 3. CẤP SỐ CỘNG

☆☆☆

Dạng toán 1. Tìm công sai hoặc số hạng thứ n hoặc tính tổng

- $\boxed{u_k - u_{k-1} = d}$.
- $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d}$.
- $\boxed{\dfrac{u_{k+1} + u_{k-1}}{2} = u_k}$.
- $\boxed{S_n = \dfrac{n}{2}(u_1 + u_n)}$.

1. Tìm số hạng đầu, công sai và tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số (u_n), biết rằng $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$.

Lời giải kham khảo

Áp dụng công thức: $u_n = u_1 + (n-1).d$.

Ta có: $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) + (u_1 + 4d) - (u_1 + 2d) = 10 \\ (u_1 + 3d) + (u_1 + 5d) = 26 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$.

Khi đó: $u_{20} = u_1 + 19d = 1 + 19.3 = 58$.

$S_n = \dfrac{n}{2}(u_1 + u_n) \Rightarrow S_{20} = \dfrac{20}{2}(1 + 58) = 590$.

Kết luận: $u_1 = 1,\ d = 3,\ u_{20} = 58,\ S_{20} = 590$.

2. Tìm số hạng đầu, công sai và tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số (u_n), biết rằng $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_2 + u_7 = 17 \end{cases}$.

Đáp số: $u_1 = 19, d = -3,\ S_{20} = -190$.

3. Tìm số hạng đầu, công sai và tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số (u_n), biết rằng $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases}$.

Đáp số: $u_1 = 3,\ d = 4,\ S_{10} = 210$.

4. Tìm số hạng đầu, công sai và tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số (u_n), biết rằng $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases}$.

Đáp số: $u_1 = -5,\ d = 2,\ S_{10} = 65$.

5. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n), biết $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases}$.

ĐS: $u_1 = 3,\ d = 2$ hoặc $u_1 = -17,\ d = 2$.

6. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n), biết $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{12} = 129 \end{cases}$.

ĐS: $u_1 = 2,5$ và $d = 1,5$.

7. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai $d \in \mathbb{Z}$ của cấp số cộng (u_n), biết $\begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16 \end{cases}$.

ĐS: $u_1 = -2,\ d = 2$.

8. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng giảm (u_n), biết $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases}$.

ĐS: $u_1 = 5,\ d = -2$.

9. Tìm số hạng đầu và công sai cấp số cộng tăng (u_n) biết $\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21 \end{cases}$.

ĐS: $u_1 = 5,\ d = 2$.

10. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết $\begin{cases} u_5 = 18 \\ 4S_n = S_{2n} \end{cases}$.

ĐS: $d = 4,\ u_1 = 2$.

11. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d. Biết rằng $u_3 + u_{13} = 80$. Tính tổng của 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

ĐS: $S_{15} = 600$.

12. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d. Biết $u_{2013} + u_6 = 1000$. Tính tổng của 2018 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

ĐS: $S_{2018} = 1009000$.

13. * Tìm số u_1 và d của cấp số cộng (u_n), biết $\begin{cases} \dfrac{1}{u_1u_2} + \dfrac{1}{u_2u_3} + \dfrac{1}{u_3u_4} + \dfrac{1}{u_4u_5} = \dfrac{1}{2} \\ u_5 = 2u_1,\ u_1 < 0,\ d \neq 0 \end{cases}$.

Ta có: $d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = u_5 - u_4$ nên nhân $d \neq 0$ hai vế, ta được:

$$\frac{1}{u_1u_2} + \frac{1}{u_2u_3} + \frac{1}{u_3u_4} + \frac{1}{u_4u_5} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{u_2 - u_1}{u_1u_2} + \frac{u_3 - u_2}{u_2u_3} + \frac{u_4 - u_3}{u_3u_4} + \frac{u_5 - u_4}{u_4u_5} = \frac{d}{2}$$

$\Leftrightarrow$

Đáp số: $d = -0,5$ và $u_1 = -2$.

14. * Cho cấp số cộng có $u_1 = 1$ và tổng $S_{100} = 24850$. Tính $S = \dfrac{1}{u_1u_2} + \dfrac{1}{u_2u_3} + \cdots + \dfrac{1}{u_{49}u_{50}}\cdot$

Đáp số: $S = 49/246$.

15. * Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đều dương, $u_1 = 1$ và $S_{100} = 14950$. Tính giá trị của tổng

$$S = \frac{1}{u_2\sqrt{u_1} + u_1\sqrt{u_2}} + \frac{1}{u_3\sqrt{u_2} + u_2\sqrt{u_3}} + \cdots + \frac{1}{u_{2018}\sqrt{u_{2017}} + u_{2017}\sqrt{u_{2018}}}.$$

Xét $\dfrac{1}{u_{k+1}\sqrt{u_k} + u_k\sqrt{u_{k+1}}} = \dfrac{1}{\sqrt{u_k}.\sqrt{u_{k+1}}.(\sqrt{u_{k+1}} + \sqrt{u_k})} = \dfrac{1}{d}\cdot\dfrac{\sqrt{u_{k+1}} - \sqrt{u_k}}{\sqrt{u_k}.\sqrt{u_{k+1}}} = \dfrac{1}{d}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{u_k}} - \dfrac{1}{\sqrt{u_{k+1}}}\right)$

Khi đó $S =$

Đáp số: $S = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{6052}}\right)$.

Dạng toán 2. Tìm những số liên tiếp của cấp số cộng

Nhóm 1. Tìm n số hạng liên tiếp của cấp số cộng thỏa tổng và tổng bình phương hoặc tích ?

$\xrightarrow{\text{Hướng xử lý thường gặp}}$ Gọi các số hạng liên tiếp của CSC có dạng đối xứng sẽ rút ngắn bài giải:

Tìm 3 số, 5 số … (số lượng lẻ) liên tiếp của CSC, ta sẽ gọi $\ldots, x-d,\ x,\ x+d, \ldots$

Tìm 4 số, 6 số … (số lượng chẵn) liên tiếp của CSC, ta sẽ gọi $\ldots, x-3d,\ x-d,\ x+d,\ x+3d, \ldots$

Nhóm 2. Tìm $x,\ y,\ z,\ t$ để theo thứ tự lập thành cấp số cộng ?

$\xrightarrow{\text{Hướng xử lý thường gặp}}$ Sử dụng tính chất trung bình cộng, tức $\boxed{u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}}$, $\forall k \geq 2.$

16. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-d;\ x;\ x+d$.

Theo đề $\begin{cases} (x-d) + x + (x+d) = 27 \\ (x-d)^2 + x^2 + (x+d)^2 = 293 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 27 \\ 3x^2 + 2d^2 = 293 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ d^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ d = \pm 5 \end{cases}.$

Với $x = 9,\ d = -5$ ta có CSC là $14;\ 9;\ 4$.

Với $x = 9,\ d = 5$ ta có CSC là $4;\ 9;\ 14$.

17. Một cấp số cộng có số hạng biết tổng các số hạng bằng 18, tích của số hạng đầu và số hạng cuối bằng 27. Tìm cấp số cộng đó.

ĐS: Có hai CSC là $3;\ 6;\ 9$ hoặc $9;\ 6;\ 3$.

18. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng giảm, biết tổng của chúng bằng 15 và tổng bình phương của chúng bằng 83.

ĐS: $7;\ 3;\ 5$.

19. Tìm 5 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng tăng, biết tổng của chúng bằng 40 và tổng bình phương của chúng bằng 480.

ĐS: $0;\ 4;\ 8;\ 12;\ 16$.

20. Tìm 4 số hạng liên tiếp của cấp số cộng tăng, biết rằng tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương 30.

21. Tìm 4 số hạng liên tiếp của cấp số cộng giảm, biết rằng tổng của chúng bằng 16 và tổng bình phương bằng 84.

Gọi $x-3d,\ x-d,\ x+d,\ x+3d$ là bốn số hạng liên tiếp cần tìm của cấp số cộng.

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-3d+x-d+x+d+x+3d=10 \\ (x-3d)^2+(x-d)^2+(x+d)^2+(x+3d)^2=30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x=10 \\ 4x^2+20d^2=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ d=\pm\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Vì là cấp số cộng tăng $\Rightarrow d=\dfrac{1}{2};\ x=\dfrac{5}{2}$.

Bốn số cộng liên tiếp của cấp số cộng thỏa bài toán là $1,\ 2,\ 3,\ 4$.

ĐS: $7,\ 5,\ 3,\ 1$.

22. Tìm 4 số hạng liên tiếp của cấp số cộng giảm, biết rằng tổng của chúng bằng 34 và tổng bình phương bằng 414.

ĐS: $16,\ 11,\ 6,\ 1$.

23. Tìm 4 số hạng liên tiếp của cấp số cộng tăng, biết rằng tổng của chúng bằng 20 và tổng bình phương bằng 280.

ĐS: $-4,\ 2,\ 8,\ 14$.

24. Cho cấp số cộng $-2;\ x;\ 6;\ y$. Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2$.

Áp dụng tính chất: ba số liên tiếp $a,\ b,\ c$ tạo thành cấp số cộng $\dfrac{a+c}{2}=b \Leftrightarrow a+c=2b$.

Lời giải tham khảo

Theo tính chất cấp số cộng, ta có:

$$\begin{cases} -2+6=2x \\ x+y=2.6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=10 \end{cases}.$$

Do đó: $P=x^2+y^2=2^2+10^2=104$.

25. Tìm a để 3 số $1+3a,\ a^2-5,\ 1-a$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

ĐS: $a=-2,\ a=3$.

26. * Bốn số nguyên lập thành cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 20, tổng nghịch đảo của chúng bằng $\frac{25}{24}\cdot$ Tìm bốn số đó.

27. * Gọi S là tập tất cả các giá trị $x\in[0;100]$ để ba số $\sin x,\ \cos^2 x,\ \sin 3x$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tính tổng tất cả các phần tử của tập S.

Đáp số: 1008π.

Dạng toán 3. Bài toán thực tế

1. Người ta trồng cây theo hình tam giác với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây,... ở hàng thứ n có n cây. Biết đã trồng hết 4950 cây. Hỏi có mấy hàng ?

Đáp số: Có 99 hàng cây được trồng.

2. Trong sân vận động của câu lạc bộ Quận Tân Phú, có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liền sau nhiều hơn dãy trước 4 ghế, hỏi sân vận động đó có tất cả bao nhiêu ghế ?

Đáp số: Sân vận động có 2190 ghế.

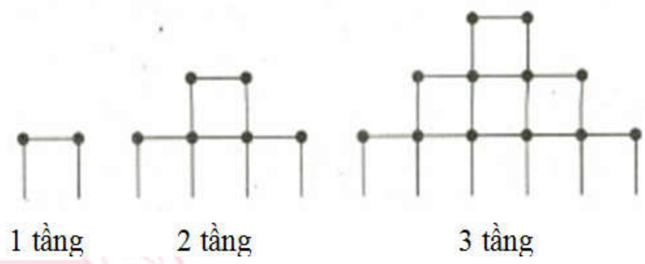
3. Một tòa nhà hình tháp có 30 tầng và tổng cộng có 1890 phòng, càng lên cao thì số phòng càng giảm, biết rằng cứ 2 tầng liên tiếp thì hơn kém nhau 4 phòng. Quy ước rằng tầng trệt là tầng số 1, tiếp theo lên là tầng số 2, 3,... Hỏi tầng số 10 có bao nhiêu phòng ?

4. Một công ti trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho các kĩ sư theo phương thức sau: Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ti là 4,5 triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 0,3 triệu đồng mỗi quý. Tính tổng tiền lương nhận được sau 3 năm.

Đáp số: Tầng 10 có 85 phòng.

Đáp số: $73,8$ triệu đồng.

5. Bạn An chơi trò chơi xếp các que diêm thành tháp theo qui tắc thể hiện như hình vẽ. Để xếp được tháp có 10 tầng thì bạn An cần đúng bao nhiêu que diêm ?



Đáp số: Bạn An cần 210 que diêm.

6. Sinh nhật bạn của An vào ngày 01 tháng 5 năm 2019. An muốn mua một món quà sinh nhật cho bạn nên quyết định bỏ ống heo 100 đồng vào ngày 01 tháng 01 năm 2019, sau đó cứ liên tục ngày sau hơn ngày trước 100 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật của bạn, An đã tích lũy được bao nhiêu tiền ? (thời gian bỏ ống heo tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2019 đến ngày 30 tháng 4 năm 2019 xem là 121 ngày).

Đáp số: 738.100 đồng.

7. Bà chủ quán trà sữa X muốn trang trí quán cho đẹp nên quyết định thuê nhân công xây một bức tường gạch với xi măng (như hình vẽ bên dưới), biết hàng dưới cùng có 500 viên, mỗi hàng tiếp theo đều có ít hơn hàng trước 1 viên và hàng trên cùng có 1 viên. Hỏi số gạch cần dùng để hoàn thành bức tường trên là bao nhiêu viên gạch ?

Đáp số: 125250

8. Trong hội chợ tết Mậu Tuất 2018, một công ty sữa muốn xếp 900 hộp sữa theo số lượng $1,\ 3,\ 5,\ldots$ từ trên xuống dưới (số hộp sữa trên mỗi hàng xếp từ trên xuống là các số lẻ liên tiếp – mô hình như hình bên). Hàng dưới cùng có bao nhiêu hộp sữa ?

Đáp số: 59.

9. Một cơ sở khoan giếng đưa ra đinh mức giá như sau: Giá từ mét khoan đầu tiên là 100000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá mỗi mét tăng thêm 30000 đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó. Một người muốn kí hợp đồng với cơ sở khoan giếng này để khoan giếng sâu 20 mét lấy nước dùng cho sinh hoạt gia đình. Hỏi sau khi hoàn thành việc khoan giếng, gia đình đó phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng số tiền bằng bao nhiêu ?

Đáp số: 7700000.

10. Chu vi một đa giác là 158cm, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3\text{cm}$. Biết cạnh lớn nhất là 44cm. Số cạnh của đa giác đó là ?

Đáp số: Số cạnh của đa giác bằng 4.

Dạng toán 4. Chứng minh hoặc tính tổng và một số bài toán khác

11. Giải phương trình: $1+6+11+16+21+\cdots\cdots\cdots+x=970.$

Lời giải tham khảo

Xét cấp số cộng $1,\ 6,\ 11,...,x$ có $u_1=1,\ d=5$ và $u_n=x.$

Theo đề bài ta có: $S_n=970 \Leftrightarrow \dfrac{n}{2}\left[2u_1+(n-1)d\right]=970 \Leftrightarrow n.\left[2.1+(n-1).5\right]=1940$

$\Leftrightarrow 5n^2-3n-1940=0 \Leftrightarrow n=20$ (nhận) hoặc $n=-\dfrac{97}{5}$ (loại).

Suy ra: $x=u_{20}=u_1+19d=1+19.5=96.$

12. Giải phương trình: $2+7+12+17+22+\cdots\cdots\cdots+x=245.$

Đáp số: $x=47.$

13. Giải phương trình: $(x+1)+(x+4)+(x+7)+\cdots\cdots\cdots+(x+28)=155.$

Đáp số: $x=1.$

14. Giải phương trình: $(2x+1)+(2x+6)+(2x+11)+\cdots\cdots\cdots+(2x+96)=1010.$

Đáp số: $x=1.$

15. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_2-u_3+u_5=10 \\ u_4+u_6=26 \end{cases}$. Tính $S=u_1+u_4+u_7+\cdots+u_{2011}.$

Đáp số: $S=2023736.$

16. Cho hai cấp số cộng $(u_n): 4,\ 7, 10, \ldots$ và $(v_m): 1,\ 6,\ 11, \ldots$ Hỏi trong 2018 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số có bao nhiêu số hạng chung ?

Lời giải tham khảo

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) là $u_n = 4 + (n-1).3 = 3n + 1.$

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (v_m) là $v_m = 1 + (m-1).5 = 5m - 4.$

Giả sử k là 1 số hạng chung của hai cấp số cộng trong 2018 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số.

Vì k là 1 số hạng của cấp số cộng (u_n) nên $k = 3i + 1$ với $1 \le i \le 2018$ và $i \in \mathbb{N}^*$.

Vì k là 1 số hạng của cấp số cộng (v_m) nên $k = 5j - 4$ với $1 \le j \le 2018$ và $j \in \mathbb{N}^*$.

Số hạng chung phải thỏa: $3i + 1 = 5j - 4 \Rightarrow 3i = 5j - 5 \Leftrightarrow 3i = 5(j-1) \Rightarrow j - 1 = \dfrac{3i}{5}\cdot$

Do đó $i \,\vdots\, 5 \Rightarrow i \in \{5;\ 10;\ 15;\ 20; \ldots; 2015\} \Rightarrow$ Có $\dfrac{2015-5}{5} + 1 = 403$ số hạng chung.

17. Cho hai cấp số cộng $(a_n): a_1 = 4,\ a_2 = 7, \ldots, a_{100}$ và $(b_n): b_1 = 1,\ b_2 = 6, \ldots, b_{100}$. Hỏi có bao nhiêu số có mặt đồng thời trong cả hai dãy số trên.

Đáp số: 20 số hạng chung.

18. Cho cấp số cộng (u_n). Gọi $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Biết $\dfrac{S_p}{S_q} = \dfrac{p^2}{q^2}$ với $p \ne q,\ p,\ q \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị biểu thức $T = \dfrac{u_{2017}}{u_{2018}}\cdot$

Lời giải tham khảo

Ta có: $\dfrac{S_p}{S_q} = \dfrac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow \dfrac{(u_1 + u_p)p}{(u_1 + u_q)q} = \dfrac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow \dfrac{u_1 + u_p}{u_1 + u_q} = \dfrac{p}{q}\cdot$

Do đó $\dfrac{u_1 + u_{2018}}{u_1 + u_{2017}} = \dfrac{2018}{2017} \Leftrightarrow \dfrac{u_1 + u_{2017} + d}{u_1 + u_{2017}} = \dfrac{2018}{2017} \Leftrightarrow 1 + \dfrac{d}{u_1 + u_{2017}} = \dfrac{2018}{2017}$

$\Leftrightarrow \dfrac{d}{u_1 + u_1 + 2016d} = \dfrac{1}{2017} \Leftrightarrow \dfrac{d}{2u_1 + 2016d} = \dfrac{1}{2017} \Leftrightarrow 2017d = 2u_1 + 2016d \Leftrightarrow d = 2u_1.$

Vậy $\dfrac{u_{2017}}{u_{2018}} = \dfrac{u_1 + 2016.(2u_1)}{u_1 + 2017.(2u_1)} = \dfrac{4032u_1}{4035u_1} = \dfrac{4032}{4035}\cdot$

19. Cho cấp số cộng (u_n). Gọi $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Biết $\dfrac{S_p}{S_q} = \dfrac{p^2}{q^2}$ với $p \neq q,\ p,\ q \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị biểu thức $T = \dfrac{u_{2018}}{u_{2019}}\cdot$

Đáp số: $T = 4035 / 4037$.

20. * Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + mx + 2 - m = 0$ có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Đáp số: $m \leq 3$.

21. * Xét phương trình $x^3 - (3m+1)x^2 + 2mx = 0$. Tìm tham số m để phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Đáp số: $m \in \{-1/2;\ 1/4;\ 1\}$.

22. * Tìm tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$ có ba nghiệm phân biệt và các nghiệm đó thành lập cấp số cộng.

Đáp số: $m = 11$.

23. * Tìm tham số m để phương trình $x^4 + 2(2m+1)x^2 - 3m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Đáp số: $m = -3.$

24. * Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ có đồ thị (C_m). Tìm m để (C_m) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Đáp số: $m = 4;\ m = -4/9.$

25. Cho $a,\ b,\ c$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

a) $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab.$

b) $a^2 + 8bc = (2b+c)^2.$

c) $2(a+b+c)^3 = 9\left[a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)\right].$

d) Ba số: $a^2 - bc,\ b^2 - ac,\ c^2 - ab$ cũng là một cấp số cộng.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

1. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 11$ và công sai $d = 4$. Giá trị của u_{99} bằng

A. 401. **B.** 403. **C.** 402. **D.** 404.

2. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -2$ và công sai $d = 3$. Giá trị của u_{10} bằng

A. 3^9. **B.** 25. **C.** 28. **D.** -29.

3. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = \dfrac{1}{3}$ và $u_8 = 26$. Công sai d bằng

A. $\dfrac{11}{3}\cdot$ **B.** $\dfrac{10}{3}\cdot$ **C.** $\dfrac{3}{10}\cdot$ **D.** $\dfrac{3}{11}\cdot$

4. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$ và $u_6 = 27$. Tìm công sai d.

A. $d = 7$. **B.** $d = 5$.
C. $d = 8$. **D.** $d = 6$.

5. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Biết tổng n số hạng đầu của dãy (u_n) là $S_n = 253$. Khi đó n bằng

A. 9. **B.** 11.
C. 12. **D.** 10.

6. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 5$ và tổng của 50 số hạng đầu bằng 5150. Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n.

A. $u_n = 1 + 4n$. **B.** $u_n = 5n$.
C. $u_n = 1{,}5 + 2n$. **D.** $u_n = 2 + 3n$.

7. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_4 = 10$ và $u_4 + u_6 = 26$, khi đó công sai d bằng

A. -3. **B.** 3.
C. 5. **D.** 6.

8. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$, $u_{20} = 60$. Tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này bằng

A. 150. **B.** 250.
C. -125. **D.** -200.

9. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$. Giá trị nhỏ nhất của $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1$ bằng

A. -20. **B.** -6.
C. -8. **D.** -24.

10. Biết bốn số $5,\ x,\ 15,\ y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị của $3x + 2y$ bằng

A. 50. **B.** 70.

C. 30. **D.** 80.

11. Một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2018$ và công sai $d = -5$. Hỏi bắt đầu từ số hạng nào của cấp số cộng đó thì nó nhận giá trị âm.

A. u_{406}. **B.** u_{403}.

C. u_{405}. **D.** u_{404}.

12. Một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 7$. Hỏi kể từ số hạng thứ mấy trở đi thì các số hạng của (u_n) đều lớn hơn 2018.

A. 287. **B.** 289.

C. 288. **D.** 286.

13. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -5$ và công sai $d = 2$. Số 81 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng ?

A. 100. **B.** 50.

C. 75. **D.** 44.

14. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -5$ và công sai $d = 3$. Số 100 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng ?

A. 15. **B.** 20.

C. 35. **D.** 36.

15. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_8 + u_9 + u_{15} = 100$. Tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng

A. 100. **B.** 200.

C. 400. **D.** 300.

16. Giả sử $a,\ b,\ c$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng có 3 số hạng, biết tổng của chúng bằng 18, tích số hạng đầu và số hạng cuối bằng 27. Giá trị $a^2 + b^2 + c^2$ bằng

A. 116. **B.** 126.

C. 162. **D.** 172.

17. Bốn số tạo thành một cấp số cộng có tổng bằng 28 và tổng các bình phương của chúng bằng 276. Tích của bốn số đó là

A. 161. **B.** 585.

C. 404. **D.** 276.

ĐÁP ÁN

1.B	2.B	3.A	4.D	5.B	6.A	7.B	8.C	9.D	10.B
11.C	12.B	13.D	14.D	15.C	16.B	17.B			

§ 4. CẤP SỐ NHÂN

☆☆☆

Dạng toán 1. Xác định các đại lượng cơ bản của cấp số nhân

- $\boxed{u_{k+1} = q.u_k}$.
- $\boxed{u_n = u_1.q^{n-1}}$.
- $\boxed{u_{k-1}.u_{k+1} = u_k^2}$.
- $\boxed{S_n = u_1.\dfrac{q^n - 1}{q - 1}}$.

1. Cho cấp số nhân thỏa: $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$.

a) Tìm số hạng đầu và công bội.

Áp dụng $\boxed{u_n = u_1 q^{n-1}}$, thì $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^4) = 51 & (1) \\ u_1 q(1 + q^4) = 102 & (2) \end{cases}$

Lập tỉ số $\dfrac{(2)}{(1)} \Rightarrow \dfrac{u_1 q(1 + q^4)}{u_1(1 + q^4)} = \dfrac{102}{51}$

$\Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = 3.$

Kết luận: $u_1 = 3$ và $q = 2$.

b) Hỏi tổng của bao nhiêu số hạng đầu tiên bằng 3069 ?

Áp dụng công thức $S_n = u_1.\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

Ta có: $S_n = 3069 \Leftrightarrow u_1.\dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 3069$

$\Leftrightarrow 3.\dfrac{2^n - 1}{2 - 1} = 3069$

$\Leftrightarrow 2^n = 1024 = 2^{10}$

$\Rightarrow n = 10.$

Kết luận: Tổng của 10 số hạng.

c) Số 12288 là số hạng thứ bao nhiêu ?

Áp dụng công thức $\boxed{u_n = u_1.q^{n-1}}$.

Ta có: $u_n = 12288$

$\Leftrightarrow u_1.q^{n-1} = 12288$

$\Leftrightarrow 3.2^{n-1} = 12288$

$\Leftrightarrow 2^{n-1} = 4096 = 2^{12}$

$\Rightarrow n - 1 = 12 \Leftrightarrow n = 13.$

Kết luận: 12288 là số hạng thứ 13.

2. Cho cấp số nhân thỏa: $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$.

a) Tìm số hạng đầu tiên và công bội q.

....

Đáp số: $u_1 = 12$ và $q = 2$.

b) Hỏi tổng của bao nhiêu số hạng đầu tiên bằng 3060 ?

....

Đáp án: Tổng của 8 số hạng đầu tiên.

c) Số 24576 là số hạng thứ bao nhiêu ?

....

Đáp số: 24576 là số hạng thứ 12.

3. Tìm số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$.

Đáp số: $u_1 = 729,\ q = \dfrac{1}{3}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 1 \\ q = -3 \end{cases}$.

4. Tìm số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1.u_2.u_3 = 64 \end{cases}$.

Đáp số: $u_1 = 8,\ q = \dfrac{1}{2}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases}$.

5. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20 \end{cases}$.

Đáp số: $u_1 = 1,\ q = 2$.

6. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$.

Đáp số: $u_1 = 5,\ q = \pm 2$.

7. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases}$.

Đáp số: $q = \dfrac{2}{3};\ u_1 = \dfrac{1215}{19}$.

8. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20,\ q > -1. \end{cases}$

Đáp số: $q = -\dfrac{1}{2};\ u_1 = 64$.

9. *Tìm số hạng đầu, công bội của cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_2^2 = 5 \end{cases}$, $(q > 0)$.

ĐS: $q = \sqrt{2},\ u_1 = 1$ hoặc $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, u_1 = 2.$

10. *Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_2^1 + u_2^2 + u_3^2 = 21 \end{cases}$.

Đáp số: $q = 2,\ u_1 = 1$ hoặc $q = \dfrac{1}{2},\ u_1 = 4.$

11. Cho ba số $x;\ 5;\ 2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và ba số $x;\ 4;\ 2y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính $\left|x - 2y\right|$.

Lời giải tham khảo

Ta có ba số $x;\ 5;\ 2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng $\Rightarrow \dfrac{x + 2y}{2} = 5$ (1)

Ba số $x;\ 4;\ 2y$ lập thành CSN $\Rightarrow x.(2y) = 4^2$ (2)

Từ $(1),\ (2) \Rightarrow \begin{cases} x + (2y) = 10 \\ x.(2y) = 16 \end{cases}$ $(*)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 10 - x \\ x(10 - x) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 10 - x \\ -x^2 + 10x - 16 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ 2y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \left|x - 2y\right| = \left|8 - 2\right| = 6.$

Lưu ý. *Từ $(*)$ có thể giải nhanh $x,\ 2y$ là hai nghiệm của phương trình $X^2 - 10X + 16 = 0$.*

12. Cho ba số $x;\ 5;\ 3y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và ba số $x;\ 3;\ 3y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính $\left|3y - x\right|$.

Đáp số: 8.

13. Cho ba số $5x-y,\ 2x+3y,\ x+2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và ba số $(y+1)^2,\ xy+1,\ (x-1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tìm x và y.

ĐS: $(x;y)=(0;0),\ \left(\dfrac{10}{3};\dfrac{4}{3}\right),\ \left(-\dfrac{3}{4};-\dfrac{3}{10}\right).$

14. Cho ba số $x+5y,\ 5x+2y,\ 8x+y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và ba số $(y-1)^2,\ xy-1,\ (x+1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tìm x và y.

ĐS: $(x;y)=\left(-\sqrt{3};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\sqrt{3};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$

15. Ba số $x,\ y,\ z$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Ba số $x,\ y-4,\ z$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Đồng thời các số $x,\ y-4,\ z-9$ theo thứ tự đó lập thành cấp sócộng . Tìm $x,\ y,\ z$.

Đáp số: $(x;y;z)=\{(1;2;4);(4;2;1)\}.$

16. Biết rằng $a,\ b,\ c$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng và $a,\ b,\ c$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, đồng thời tổng của ba số $a,\ b,\ c$ bằng 30. Hãy tìm ba số $a,\ b,\ c$.

Đáp số: $a=40;\ b=10;\ c=-20.$

17. Giả sử ba số $\dfrac{\sin\alpha}{6};\ \cos\alpha;\ \tan\alpha$ theo thứ tự đó là một cấp số nhân. Tính $\cos 2\alpha$.

Đáp số: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = -0,5.$

18. Cho tam giác ABC cân tại A. Biết rằng độ dài cạnh BC, trung tuyến AM và độ dài cạnh AB theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân có công bội q. Tìm công bội q.

Đáp số: $2q = \sqrt{2+2\sqrt{2}}$.

19. Tìm ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân dương, biết tổng của chúng bằng 7 và tổng nghịch đảo của chúng bằng $\dfrac{7}{4}\cdot$

Gọi ba số liên tiếp của cấp số nhân có dạng:
$x,\ xq,\ xq^2$ với công bội là $q,\ (x,\ q>0)$.

Theo đề có: $\begin{cases} x + xq + xq^2 = 7 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{xq} + \dfrac{1}{xq^2} = \dfrac{7}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x.(1+q+q^2) = 7 \\ \dfrac{1+q+q^2}{xq^2} = \dfrac{7}{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{chia}} x^2q^2 = 4$

$\Leftrightarrow xq = 2 \Rightarrow x = \dfrac{2}{q}$ thế vào (1), ta được:

$\dfrac{2}{q}(1+q+q^2) = 7 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{CSN}: 1,\ 2,\ 4 \\ q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \text{CSN}: 4,\ 2,\ 1 \end{array}\right.$

20. Tìm ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân dương, biết tổng của chúng bằng 14 và tổng nghịch đảo của chúng bằng $\dfrac{7}{8}\cdot$

Đáp số: $2,\ 4,\ 8$ hoặc $8,\ 4,\ 2$.

21. Giữa các số 160 và 5 hãy chèn vào bốn số nữa để tạo thành một cấp số nhân. Tìm bốn số đó.

Đáp số: $160,\ 80,\ 40,\ 20,\ 10,\ 5$.

22. Giữa các số 243 và 1 hãy đặt thêm bốn số nữa để tạo thành một cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân đó.

Đáp số: $q = 0{,}5$.

Dạng toán 2. Chứng minh hoặc tính tổng

23. Cho $A = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111...1}_{n}$.

Chứng minh: $A = \dfrac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{81}$.

Lời giải tham khảo

Ta có: $A = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111...1}_{n}$

$\Leftrightarrow 9A = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99...9}_{n}$

$= (10-1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \cdots + (10^n - 1)$

$= (10 + 10^2 + 10^3 + \cdot\cdot + 10^n) - \underbrace{(1 + 1 + \cdot\cdot + 1)}_{n}$

$= \dfrac{10(1-10^n)}{1-10} - n = \dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}$ (đpcm)

24. Cho $B = 7 + 77 + 777 + \cdots + \underbrace{777...7}_{n}$.

Chứng minh: $B = \dfrac{7(10^{n+1} - 9n - 10)}{81}$.

25. Giá trị của tổng $4 + 44 + 444 + \cdots + 44...4$ (tổng đó có 2018 số hạng) bằng bao nhiêu ?

Đáp số: Tổng có giá trị bằng $\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{10^{2019} - 10}{9} - 2018\right)$.

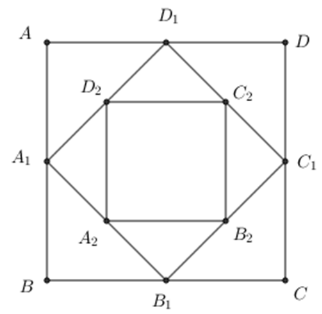
26. Giá trị của tổng $6 + 66 + 666 + \cdots + 666...6$ (tổng đó có n số hạng) bằng bao nhiêu ?

Đáp số: Tổng có giá trị bằng $S = \dfrac{20(10^n - 1)}{27} - \dfrac{2n}{3}$.

27. * Tính tổng: $S_n = \left(3 + \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \dfrac{1}{9}\right)^2 + \cdots + \left(3^n + \dfrac{1}{3^n}\right)^2$.

Đáp số: Tổng có giá trị bằng $S_n = \dfrac{(9^n - 1)(9^{n+1} + 1)}{8.9^n} + 2n$.

28. * Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a và có diện tích S_1. Nối 4 trung điểm $A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1$ theo thứ tự của 4 cạnh $AB,\ BC,\ CD,\ DA$ ta được hình vuông thứ hai có diện tích S_2. Tiếp tục làm như thế, ta được hình vuông thứ ba là $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích S_3, ...và cứ tiếp tục làm như thế, ta tính được các hình vuông lần lượt có diện tích $S_4,\ S_5,...,S_{100}$ (tham khảo hình bên). Tính tổng $S = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{100}$.



Đáp số: $2^{99}S = a^2(2^{100} - 1)$.

29. * Tính tổng: $S = \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{4^2} + \dfrac{3}{4^3} + \cdots + \dfrac{n}{4^n}\cdot$

Hướng dẫn: $4S - S = 1 + \left(\dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{4}\right) + \left(\dfrac{3}{4^2} - \dfrac{2}{4^2}\right) + \cdots + \left(\dfrac{n}{4^{n-1}} - \dfrac{n-1}{4^n}\right) + \dfrac{n}{4^n}$.

30. Cho $a,\ b,\ c,\ d$ là bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân. Chứng minh rằng:

Hướng dẫn: Vì $a,\ b,\ c,\ d$ là bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân nên có $ac = b^2$.

a) $(ab + bc + ca)^3 = abc(a + b + c)^3$.

b) $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$.

c) $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$.

31. Cho $x^3+(5-m)x^2+(6-5m)x-6m=0.$

Tìm tham số m để phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.

Lời giải tham khảo

Giải phương trình bậc ba với $m=100$, ta được $x=-2$, $x=-3$ và $x=100=m$. Kiểm tra lại thấy thỏa mãn nên có lời giải:

Ta có: $x^3+(5-m)x^2+(6-5m)x-6m=0$

$\Leftrightarrow x=-2 \ \vee \ x=-3 \ \vee \ x=m.$

Để phương trình có ba nghiệm phân biệt thì $m\neq -2,\ m\neq -3.$

Do các nghiệm này lập thành cấp số nhân và ta sắp xếp các nghiệm này theo thứ tự tăng dần được các dãy số sau:

- $-3,\ -2,\ m$ lập thành cấp số nhân nên

  $\Rightarrow -3.m=(-2)^2 \Leftrightarrow m=-\dfrac{4}{3}$: thỏa đk.
- $-3,\ m,\ -2$ lập thành cấp số nhân nên

  $\Rightarrow -3.(-2)=m^2 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{6}$: thỏa đk
- $m,\ -3,\ -2$ lập thành cấp số nhân nên

  $m.(-2)=(-3)^2 \Leftrightarrow m=-\dfrac{9}{2}$: thỏa đk.

Kết luận: $m\in\left\{-\dfrac{9}{2};\ -\sqrt{6};\ -\dfrac{4}{3};\ \sqrt{6}\right\}.$

32. Cho $y=x^3-(3m+1)x^2+(5m+4)x-8.$

Tìm tham số m để phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.

Đáp số: $m=2.$

33. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=2mx-m-1$ cắt đồ thị hàm số (C_m) $y=-x^3+(2m+1)x^2-m-1$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng ?

Đáp số: $m=-\dfrac{1}{2},\ m=\dfrac{1}{4},\ m=1.$

Dạng toán 3. Bài toán thực tế

34. Trên một bàn cờ vua kích thước 8×8 người ta đặt số hạt thóc theo cách như sau đây: Ô thứ nhất đặt một hạt thóc, ô thứ hai đặt hai hạt thóc, các ô tiếp theo đặt số hạt thóc gấp đôi ô đứng liền kề trước nó. Hỏi phải tối thiểu từ ô thứ bao nhiêu để tổng số hạt thóc từ ô đầu tiên đến ô đó lớn hơn 20172018 hạt thóc.

Đáp số: 25.

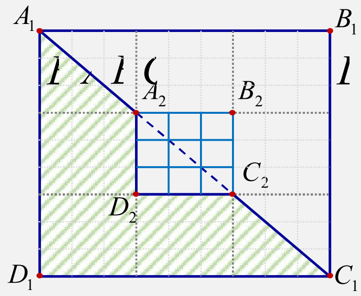
35. Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu tiên đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi tiền đặt lần trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ $10.$ Hỏi du khách đó thắng hay thua bao nhiêu ?

Đáp số: thắng 20000 đồng.

36. Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A, biết độ dài cạnh đáy BC, đường cao AH và cạnh bên AB theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội q. Hãy tìm q^2.

Đáp số: $q^2 = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

37. Với hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ như hình vẽ bên, cách tô màu như phần gạch sọc được gọi là cách tô màu "đẹp". Một nhà thiết kế tiến hành tô màu cho một hình vuông như hình bên, theo quy trình sau:



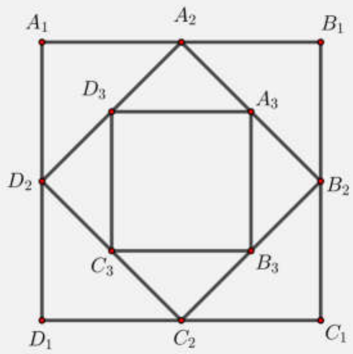
Bước 1: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$.

Bước 2: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ thành 9 phần bằng nhau như hình vẽ.

Bước 3: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ thành 9 phần bằng nhau. Cứ tiếp tục như vậy. Hỏi cần ít nhất mấy bước để tổng diện tích phần được tô màu chiếm $49,99\%$.

Đáp số: 4 bước.

38. Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 1. Gọi $A_{k+1},\ B_{k+1},\ C_{k+1},\ D_{k+1}$ thứ tự là trung điểm các cạnh $A_kB_k,\ B_kC_k,\ C_kD_k,\ D_kA_k$ (với $k = 1, 2, \ldots$). Chu vi của hình vuông $A_{2018}B_{2018}C_{2018}D_{2018}$ bằng bao nhiêu ?



Đáp số: $\dfrac{\sqrt{2}}{2^{1007}}$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

1. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 1$ và $u_4 = 64$. Công bội q của (u_n) bằng

A. $q = 21$. **B.** $q = \pm 4$.

C. $q = 4$. **D.** $q = 2\sqrt{2}$.

2. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 5$ và $u_2 = 8$. Giá trị của u_4 bằng

A. $\frac{512}{25}\cdot$ **B.** $\frac{125}{512}\cdot$ **C.** $\frac{625}{512}\cdot$ **D.** $\frac{512}{125}\cdot$

3. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_3 = 8$, $u_5 = 32$ và công bội $q > 0$. Số hạng thứ 10 bằng

A. 1024. **B.** $\sqrt{33}$.

C. 512. **D.** -512.

4. Tổng các giá trị thực của x để ba số $2x - 1$, x, $2x + 1$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân bằng

A. 0. **B.** 12.

C. 5. **D.** 6.

5. Tổng các giá trị thực của x để ba số $1 + x$; $9 + x$; $33 + x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân bằng

A. 4. **B.** 3.

C. 7. **D.** 10.

6. Giả sử $\frac{1}{6}\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ theo thứ tự đó là một cấp số nhân. Khi đó $\cos 2x$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$ **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$ **C.** $\frac{1}{2}\cdot$ **D.** $-\frac{1}{2}\cdot$

7. Cho ba số x, 5, $2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và ba số x, 4, $2y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân thì $\left|x - 2y\right|$ bằng

A. 8. **B.** 9.

C. 6. **D.** 10.

8. Cho ba số x, 5, $3y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và ba số x, 3, $3y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân thì $\left|3y - x\right|$ bằng

A. 8. **B.** 6.

C. 9. **D.** 10.

9. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Biết rằng tổng của n số hạng đầu tiên bằng 765, khi đó n bằng

A. 6. **B.** 7.
C. 8. **D.** 9.

10. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1,$ cộng bội $q = 2.$ Số 1024 là số hạng thứ

A. 11. **B.** 9.
C. 8. **D.** 10.

11. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ cộng bội $q = -2.$ Số -192 là số hạng thứ

A. 5. **B.** 6.
C. 7. **D.** 8.

12. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases}.$ Số hạng đầu và công bội lần lượt là

A. $u_1 = 3,\ q = 2.$ **B.** $u_1 = 9,\ q = 2.$
C. $u_1 = 9,\ q = -2.$ **D.** $u_1 = 3,\ q = -2.$

13. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = 44 \\ u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1104 \end{cases}.$ Giá trị của $u_2u_3 + u_3u_4 + u_4u_2$ bằng

A. 216. **B.** 416.
C. 614. **D.** 164.

14. Tổng $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - 95^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$ bằng

A. 6060. **B.** 6600.
C. 5500. **D.** 5050.

15. Viết thêm bốn số vào giữa hai số 160 và 5 để được một cấp số nhân. Tổng các số hạng của cấp số nhân đó là

A. 215. **B.** 315.
C. 415. **D.** 515.

16. Cấp số nhân (u_n) có $u_{20} = 8u_{17}$ và $u_1 + u_5 = 272.$ Tìm $u_1,$ biết rằng $u_1 \le 100.$

A. $u_1 = 16.$ **B.** $u_1 = 20.$
C. $u_1 = 15.$ **D.** $u_1 = 18.$

BẢNG ĐÁP ÁN BÀI TẬP VỀ NHÀ

1.C	2.A	3.A	4.A	5.B	6.D	7.C	8.A	9.C	10.A
11.C	12.B	13.B	14.D	15.B	16.A				