

GIẢI VÀ PHÂN TÍCH MỘT SỐ CÂU KHÓ TRONG ĐỀ THAM KHẢO MÔN TOÁN THPT QG 2018

(Lê Phúc Lữ tổng hợp và giới thiệu)

**Xin cảm ơn các thầy cô của trung tâm STAR EDUCATION, TP HCM đã giới thiệu các tài liệu để
bài viết này có thể được hoàn tất.**

Trong bài viết này, tác giả giải chi tiết (một hoặc hai cách) từ câu 35 đến câu 50 của đề tham khảo môn Toán thi THPT Quốc gia ra ngày 24/01/2018 của Bộ GD-ĐT. Ở một số câu, sẽ có phân tích thêm các nội dung liên quan cũng như đề xuất bài tập tương tự.



Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{m+3}\sqrt[3]{m+3}\sin x = \sin x$ có nghiệm thực?

A. 5.

B. 7.

C. 3.

D. 2.

Lời giải. Chọn câu A.

Đặt $a = \sin x$ thì phương trình đã cho có nghiệm khi $\sqrt[3]{m+3}\sqrt[3]{m+3}a = a$ có nghiệm $a \in [-1;1]$.

Đặt $b = \sqrt[3]{m+3} \Rightarrow b^3 = m+3$, thay vào phương trình trên, ta có $\sqrt[3]{m+3}b = a \Leftrightarrow a^3 = m+3b$.

Ta có $\begin{cases} b^3 = m+3a \\ a^3 = m+3b \end{cases}$, trừ từng vế của hệ thì

$$a^3 - b^3 = 3b - 3a \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 3(b-a) \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow a = b.$$

Vì thế nên ta đưa về tìm m để phương trình $a^3 = m+3a \Leftrightarrow a^3 - 3a = m$ có nghiệm $a \in [-1;1]$.

Khảo sát hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ trên $[-1;1]$, ta có $m \in [-2;2]$ nên có tất cả 5 số nguyên là $\pm 2, \pm 1, 0$ thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Bài toán khéo léo kết hợp giữa 3 nội dung: hệ đối xứng loại 2, miền giá trị của hàm $y = \sin x$ và khảo sát hàm số. Dạng này tuy cũ nhưng cách đặt vấn đề khá mới mẻ.

Bài tập tương tự.

Tìm giá trị nhỏ nhất của m để phương trình $\ln(m + \ln(m+x)) = x$ có nghiệm thực?

Bài 36. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 6.

Lời giải. Chọn câu B.

Theo giả thiết thì

$$|x^3 - 3x + m| \leq 3, \forall x \in [0;2] \Leftrightarrow -3 \leq x^3 - 3x + m \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -x^3 + 3x + 3 \\ m \geq -x^3 + 3x - 3 \end{cases}, \forall x \in [0;2].$$

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 3x$ trên $[0;2]$ thì $f'(x) = 3x^2 - 3$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

So sánh các số $f(0), f(1), f(2)$ ta có $\min_{[0;2]} f(x) = -2, \max_{[0;2]} f(x) = 2$. Suy ra

$$\max_{[0;2]} \{-x^3 + 3x - 3\} \leq m \leq \min_{[0;2]} \{-x^3 + 3x + 3\} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1.$$

Đây chỉ là điều kiện cần của m , ta thử lại như sau:

- Với $m = 1$ thì với $x = 2$, ta sẽ có $y = |f(2) + 1| = 3$.
- Với $m = -1$ thì với $x = 1$, ta sẽ có $y = |f(1) - 1| = 3$.
- Với $m = 0$ thì $y = |f(x)| \leq 2$ nên không thể có giá trị lớn nhất là 3 được, không thỏa.

Vậy $S = \{-1; 1\}$ nên có tất cả hai số thỏa mãn đề bài.

Nhận xét.

Ta thấy $y = |f(x)|$ đạt giá trị lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất (có thể là số âm nhưng giá trị tuyệt đối lớn). Khi đó, ta có thể so sánh các giá trị $f(0) = m, f(1) = -2 + m, f(2) = 2 + m$ để xét trường hợp; tuy nhiên, bài toán sẽ trở nên rắc rối nếu đạo hàm có nhiều nghiệm hơn.

Bài tập tương tự.

1) Tính tổng tất cả các giá trị m sao cho giá trị lớn nhất của $\left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m \right|$ trên $[-6; 4]$ không vượt quá 10.

2) Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $|\ln x - 2x^2 + m|$ trên $[0; 1]$ là nhỏ nhất.

Bài 37. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $4 + \ln 15$

B. $2 + \ln 15$

C. $3 + \ln 15$

D. $\ln 15$

Lời giải. Chọn câu C.

Ta có $f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{2}{2x-1}dx = \ln|2x-1| + C$. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ nên

sẽ liên tục trên từng khoảng $(-\infty; \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}; +\infty)$. Do đó, hàm số $f(x)$ có dạng $\begin{cases} \ln|2x-1| + C_1, x < \frac{1}{2} \\ \ln|2x-1| + C_2, x > \frac{1}{2} \end{cases}$.

Thay $x = 0$ thì có $\ln|1| + C_1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 1$; tương tự thay $x = 1$ thì có $\ln|1| + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2$.

Do đó $f(-1) + f(3) = \ln 3 + 1 + \ln 5 + 2 = 3 + \ln 15$.

Nhận xét.

Bài toán đặt ra khá thú vị và mới mẻ. Ở đây ta cần hiểu rằng hàm số có đạo hàm thì trước hết nó phải liên tục, cụ thể là liên tục trên từng khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Do hai khoảng này độc lập nhau nên mỗi khoảng sẽ được cho một hằng số C khác nhau trong công thức nguyên hàm. Tất nhiên ta không thể tùy tiện tiếp tục chia khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ thành hai hay nhiều khoảng nữa rồi cho các hằng số C khác nhau vì lúc đó, hàm số sẽ không còn liên tục trên cả miền đó nữa.

Bài tập tương tự.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$. Biết rằng $f(-3) + f(3) = 0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Tính $T = f(-2) + f(0) + f(4)$.

Bài 38. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0$ và $|z| > 1$. Tính $P = a + b$.

A. $P = -1$.

B. $P = -5$.

C. $P = 3$.

D. $P = 7$.

Lời giải. Chọn câu D.

Theo giả thiết thì

$$\begin{aligned} a + bi + 2 + i - \sqrt{a^2 + b^2}(1 + i) &= 0 \\ \Leftrightarrow a + 2 - \sqrt{a^2 + b^2} + (b + 1 - \sqrt{a^2 + b^2})i &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ b + 1 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $a + 2 = b + 1 \Leftrightarrow b = a + 1$ nên thay vào phương trình đầu của hệ, ta có

$$a + 2 = \sqrt{a^2 + (a + 1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ a^2 - 2a - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

Tuy nhiên $a = -1, b = 0$ thì $|z| = 1$, không thỏa. Do đó $a = 3, b = 4$ và $P = 7$.

Nhận xét. Bài toán này chỉ thuần túy là một dạng dùng điều kiện bằng nhau của số phức để đưa về hệ phương trình. Trong đề bài tuy có biểu thức môđun nhưng chỉ có vai trò làm cho bài toán khó hơn chứ không tạo ra tình huống đẹp (theo dạng tính môđun hai vế) tương tự đề minh họa năm trước. Thực ra từ các phương án A, B, C, D, ta cũng có thể dự đoán $a, b, \sqrt{a^2 + b^2}$ phải đều là các số nguyên và có thể thử các số bằng máy tính để tìm ra lời giải nhanh hơn.

Bài tập tương tự.

Cho số phức z thỏa mãn $z[(1 + 3i)|z| - 3 + i] = 4\sqrt{10}$. Tính $|\bar{z} + z|$.

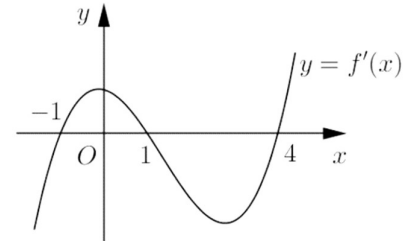
Bài 39. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(1; 3)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(-2; 1)$

D. $(-\infty; -2)$



Lời giải. Chọn câu C.

Ta có $(f(2 - x))' = -f'(2 - x)$ nên để tìm khoảng đồng biến, ta sẽ tìm x để cho $f'(2 - x) < 0$.

Dựa theo đồ thị thì khoảng nghịch biến của $f(x)$ là $(-\infty; -1)$ và $(1; 4)$. Suy ra

$$\begin{cases} 2 - x \in (-\infty; -1) \\ 2 - x \in (1; 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$$

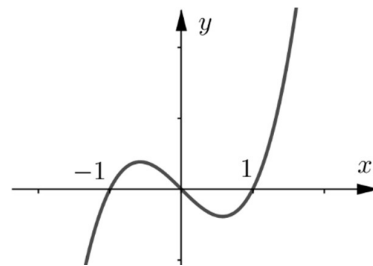
Nhận xét. Các bài toán về nhận biết, phân tích đồ thị luôn là các bài toán đẹp. Trong các đề minh họa, đề thi thử, đề chính thức năm trước, ta cũng đã thấy nhiều dạng bài như thế.

Ở bài toán trên, ta cũng có thể chỉ ra một hàm cụ thể thỏa mãn hình vẽ là $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ thì tìm được $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x$ rồi thay $f(2 - x)$ vào và lại đạo hàm để tìm khoảng đơn điệu.

Tất nhiên cách đó không cần suy luận nhiều nhưng hơi dài dòng. Ngoài ra, nếu đề thay $f(2-x)$ thành $f(x^2)$ hay $f(x^3-3x)$ (như một số đề thi thử gần đây) thì bài toán sẽ phức tạp hơn nhiều, vì ta cần xét dấu của biểu thức u' trong công thức đạo hàm của $f(u)$.

Bài tập tương tự.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ.



1) Tìm khoảng nghịch biến của $f(x^2)$.

2) Tìm khoảng đồng biến của $f(x^3-3x)$.

Bài 40. Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A . Tổng giá trị tất cả phần tử của S là

- A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải. Chọn câu C.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến của (C) . Ta có $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$ nên phương trình tiếp tuyến

của (C) là $(d): y = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{-x_0+2}{x_0-1}$ hay $(d): y = -\frac{x}{(x_0-1)^2} + \frac{-x_0^2+4x_0-2}{(x_0-1)^2}$.

Cần tìm a để phương trình $1 = -\frac{a}{(x_0-1)^2} + \frac{-x_0^2+4x_0-2}{(x_0-1)^2}$ có nghiệm duy nhất. Chú ý rằng phương trình trên tương đương $2x_0^2-6x_0+3+a=0$ (*), $x_0 \neq 1$ nên ta có hai trường hợp:

- Nếu (*) có nghiệm duy nhất thì $\Delta' = 3^2 - 2(3+a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$.

- Nếu (*) có hai nghiệm phân biệt nhưng có một nghiệm là 1 thì $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 2-6+3+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy $S = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$ nên tổng cần tính là $1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

Nhận xét. Ta rất dễ bị thiếu sót trường hợp thứ hai là phương trình có hai nghiệm nhưng một nghiệm lại không thỏa mãn điều kiện của đề bài. Các dạng toán này đòi hỏi viết phương trình tiếp tuyến đi qua điểm, đòi hỏi biến đổi hơi cồng kềnh. Tất nhiên ta có thể thay phương trình của dạng trên thành $y = kx + b$ với $k = f'(a)$ để xử lý gọn hơn một chút.

Bài tập tương tự.

1) Tìm m để từ $M(1;2)$ có thể kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$.

2) Biết rằng tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ mà từ đó kẻ được 2 tiếp tuyến vuông góc nhau đến đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$ là một đường tròn có bỏ đi 4 điểm trên đó, hỏi bán kính đường tròn đó là mấy?

Bài 41. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$?

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 8.

Lời giải. Chọn câu A.

Xét phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, trong đó $|a| = |b| = |c| = k > 0$.

Khi đó $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1$, nhân hai vế cho k và chú ý rằng $\frac{k}{a}, \frac{k}{b}, \frac{k}{c} \in \{-1; 1\}$ thì

$$\frac{k}{a} + \frac{k}{b} + 2 \cdot \frac{k}{c} = k \Leftrightarrow (\pm 1) + (\pm 1) + 2 \cdot (\pm 1) = k.$$

Dễ thấy chỉ có ba lựa chọn để $k > 0$ là $1 + 1 + 2 \cdot 1 = 4, (-1) + 1 + 2 = 2, 1 + (-1) + 2 = 2$ nên có tất cả ba mặt phẳng (P) thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Cách tiếp cận theo phương trình mặt phẳng chắn trục tọa độ ở trên là hiệu quả nhất, nếu viết theo dạng tổng quát rồi cho cắt các trục thì quá phức tạp. Tất nhiên cũng cần có cách tiếp cận phù hợp như trên để hạn chế xét trường hợp, và cũng bằng cách này, ta có thể giải quyết bài toán sau không mấy khó khăn.

Bài tập tương tự.

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$ Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = 2OB = 3OC \neq 0$?

Bài 42. Xét dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2 \log u_{10}} = 2 \log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5^{100}$ bằng

A. 247.

B. 248.

C. 229.

D. 290.

Lời giải. Chọn câu B.

Dãy số đã cho là một cấp số nhân có công bội là 2 nên ta cần tìm giá trị của số hạng đầu $u_1 > 0$.

Theo giả thiết thì

$$\sqrt{2 + \log u_1 - 2 \log u_{10}} = 2 \log u_{10} - \log u_1 \Leftrightarrow \sqrt{2 - x} = x \text{ với } x = 2 \log u_{10} - \log u_1 \geq 0.$$

Phương trình tương đương với $x \geq 0, x^2 = 2 - x \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow 2 \log u_{10} - \log u_1 = 1$.

Chú ý rằng $u_{10} = u_1 \cdot 2^9$ nên $2 \log(u_1 \cdot 2^9) - \log u_1 = 1 \Leftrightarrow \log \left(\frac{u_1^2 \cdot 2^{18}}{u_1} \right) = 1 \Leftrightarrow u_1 = \frac{5}{2^{17}}$.

Do đó, với $n \geq 1$ thì $u_n = u_1 \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^{n-18}$, ta cần có

$$5 \cdot 2^{n-18} \geq 5^{100} \Leftrightarrow 2^{n-18} \geq 5^{99} \Leftrightarrow n \geq 99 \cdot \log_2 5 + 18 \approx 247,87.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm của n là $n = 248$.

Nhận xét. Bài toán kết hợp giữa cấp số nhân, phương trình logarit và bất phương trình mũ khá thú vị. Tất nhiên ta hoàn toàn có thể định hướng được với giả thiết cho trước công bội thì điều kiện còn lại sẽ dùng để xác định số hạng đầu. Bài này cùng với bài 22 của đề là hai câu đòi hỏi phải phụ thuộc vào máy tính mới có thể tìm được đáp số chính xác.

Bài tập tương tự.

Cho cấp số cộng (a_n) , cấp số nhân nhân (b_n) thỏa mãn $a_2 > a_1 \geq 0, b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $b_n > 2017a_n$.

Bài 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Lời giải. Chọn câu B.

$$\text{Đặt } f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \text{ thì } y = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{|f(x)|}.$$

Chú ý rằng $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x+1)(x-2)$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1, x = 2$.

Ta thấy y' sẽ đổi dấu tại các nghiệm của $f'(x) = 0$ và không xác định tại nghiệm của $f(x) = 0$ nên tập hợp điểm cực trị của $y = |f(x)|$ sẽ thuộc tập nghiệm của $f'(x) = 0, f(x) = 0$.

Tuy nhiên, tập nghiệm này có không quá 7 nghiệm nên để thỏa mãn đề bài thì $y = f(x)$ có 4 nghiệm phân biệt khác $-1; 0; 2$.

Khảo sát và vẽ bảng biến thiên của hàm số này, ta thấy $-5 < m < 0$ nên $m \in \{-4; -3; -2; -1\}$.

Nhận xét. Bài toán nhắc ta nhớ đến cách xác định điểm cực trị của hàm số: các điểm làm cho đạo hàm đổi dấu và các điểm mà tại đó, $f(x)$ liên tục nhưng $f'(x)$ thì không tồn tại. Các hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối thường sẽ sinh ra các điểm cực trị dạng thứ hai này. Nói theo ý nghĩa hình học, khi vẽ đồ thị của chúng, ta phải lấy đối xứng đồ thị qua trục hoành và tại các giao điểm, đồ thị sẽ nhọn chứ không còn cong nữa, dẫn đến không tồn tại tiếp tuyến.

Bài tập tương tự.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có nhiều hơn 3 nhưng ít hơn 7 điểm cực trị?

Bài 44. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; 1), B\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Đường thẳng đi qua tâm đường

tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng OAB có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2}.$

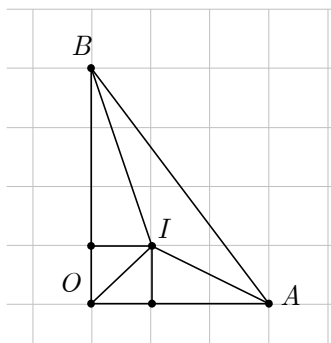
B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z-4}{2}.$

C. $\frac{x+\frac{1}{3}}{1} = \frac{y-\frac{5}{3}}{-2} = \frac{z-\frac{11}{6}}{2}.$

D. $\frac{x+\frac{2}{9}}{1} = \frac{y-\frac{2}{9}}{-2} = \frac{z+\frac{5}{9}}{2}.$

Lời giải. Chọn câu A.

Ta tính được $OA = 3, OB = 4, AB = 5$ nên tam giác OAB vuông ở O .



Sử dụng công thức $r = \frac{S}{p} = \frac{3 \cdot 4}{(3+4+5)} = 1$, ta có bán kính đường tròn

nội tiếp tam giác OAB là $r = 1$. Khi đó, $IO = \sqrt{2}, IA = \sqrt{5}, IB = \sqrt{10}$.

Đặt $I(a, b, c)$ thì ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 2 \\ (a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-1)^2 = 5 \\ (a+\frac{8}{3})^2 + (b-\frac{4}{3})^2 + (c-\frac{8}{3})^2 = 10 \end{cases}.$$

Giải hệ này ra, ta được $I(0; 1; 1)$ và điểm này thuộc phương trình đường thẳng ở câu A.

Nhận xét.

Ta có thể dùng công thức tâm tỷ cự của tâm đường tròn nội tiếp là $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ với a, b, c là độ dài cạnh OB, OA, AB để tổng quát và tính toán đơn giản hơn. Ta thấy thật không dễ dàng để chọn được một tam giác không vuông trong không gian $Oxyz$ mà độ dài đều là các số nguyên. Vì thế nên các bài toán liên quan đến tâm nội tiếp có lẽ đều được xét trong trường hợp đặc biệt là tam giác vuông.

Bài tập tương tự.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 0; 0), B(0; 4; 0)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác OAB .

Bài 45. Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng với B qua DE . Thể tích khối đa diện $ABCDSEF$ là

- A. $\frac{7}{6}$ B. $\frac{11}{12}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

Lời giải. Chọn câu D.

Gọi $H = BS \cap DE$ thì H là trung điểm BS .

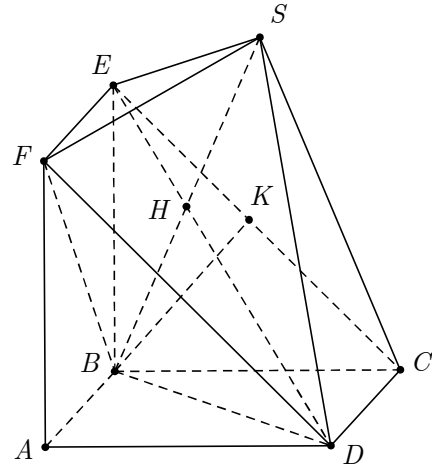
Ta chia khối đa diện đã cho thành hai phần: khối chóp $S.CDFE$ và khối lăng trụ $ADF.BCE$.

(1) Tính $V_{S.CDFE}$: ta có $S_{CDEF} = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$ (vì đây là hình chữ nhật). Ngoài ra, kẻ $BK \perp CE$ thì dễ thấy rằng $BK \perp (CDEF)$ nên $d_{S/(CDEF)} = d_{B/(CDEF)} = BK = \frac{\sqrt{2}}{2}$, từ đó

$$\text{ta có } V_{S.CDFE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{3}.$$

(2) Tính $V_{ADF.BCE}$: đây là lăng trụ có đáy là tam giác vuông cân cạnh 1 và chiều cao cũng là 1 nên $V_{ADF.BCE} = \frac{1^2}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

$$\text{Vậy nên thể tích cần tìm là } V = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$



Nhận xét. Đây là một bài toán tính thể tích đa diện khó, cần phải tìm cách chia hình thành các khối thích hợp. Trong lời giải trên, ta không sử dụng đến giả thiết $BS \perp DE$, vậy thì có phải chẳng bất kỳ điểm H nào di chuyển trên đoạn DE rồi lấy đối xứng B, S qua H thì ta đều có kết quả trên?

Câu trả lời là **không**. Lời giải trên chưa giải thích rõ tại sao nối cạnh DF mà không nối cạnh SA tạo thành cạnh của đa diện. Thực ra chứng minh điều này không khó bởi vì ta tính được $HE = \frac{1}{3}DE$ nên khi lấy hình chiếu của S xuống $(ABCD)$, điểm đó vẫn còn thuộc đoạn BD (chính xác là chia BD theo tỷ lệ $2:1$) và do đó, cạnh SA là cạnh khuất (các cạnh khác thì không thay đổi).

Bởi vậy nên khi điểm H di chuyển xuống phía D và vượt qua trung điểm DE thì cạnh SA sẽ trở thành cạnh liền và DF thành cạnh khuất (khi H là trung điểm DE thì ta có một phần của hình lập phương). Đây là điều cần hiểu rõ thêm ở bài toán này.

Bài tập tương tự.

Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi H là điểm chia DE theo tỷ lệ $1:2$ và S là điểm đối xứng với B qua H . Tính thể tích khối $ABCDSEF$.

Tiếp theo, ta xét lời giải của 5 bài khó nhất đề thi, mỗi bài đều được giải theo hai cách để có thể hình dung vấn đề dưới nhiều khía cạnh hơn.

Bài 46. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 10$.

B. $P = 4$.

C. $P = 6$.

D. $P = 8$.

Lời giải. Chọn câu A.

Cách 1. (sử dụng đại số)

Ta có $(a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 5$, cần tìm max của $P = \sqrt{(a + 1)^2 + (b - 3)^2} + \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 1)^2}$ thì theo bất đẳng thức Bunhiacopxki

$$P^2 \leq (1^2 + 1^2)((a + 1)^2 + (b - 3)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2) = 4[a^2 + b^2 - 2b + 6].$$

Đẳng thức xảy ra khi $(a + 1)^2 + (b - 3)^2 = (a - 1)^2 + (b + 1)^2 \Leftrightarrow a = 2b - 2$.

Đặt $x = a - 4, y = b - 3$ thì $x^2 + y^2 = 5$ và

$$\frac{1}{4}P^2 \leq (x + 4)^2 + (y + 3)^2 - 2(y + 3) + 6 = x^2 + y^2 + 8x + 4y + 25.$$

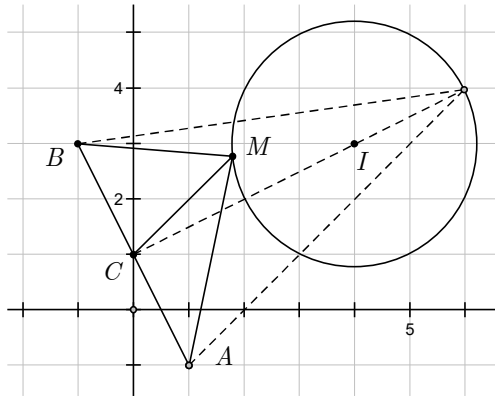
Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki thì $8x + 4y \leq \sqrt{(8^2 + 4^2)(x^2 + y^2)} = 20$ nên

$$\frac{1}{4}P^2 \leq 5 + 20 + 25 = 50 \Rightarrow P \leq 10\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = 2y > 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2, y = 1$ nên $a = 6, b = 4$ (thỏa mãn $a = 2b - 2$) nên

$$P = a + b = 10.$$

Cách 2. (sử dụng hình học)



Trong mặt phẳng tọa độ, xét điểm M biểu diễn cho số phức z . Các điểm $A(1; -1), B(-1; 3)$ thì theo giả thiết, ta cần tìm giá trị lớn nhất của $MA + MB$.

Rõ ràng M di chuyển trên đường tròn $(I; \sqrt{5})$ với $I(3; 4)$.

Ta có $MA + MB \leq \sqrt{2(MA^2 + MB^2)}$. Hơn nữa, gọi C là trung điểm AB thì theo công thức đường trung tuyến, ta có

$$MA^2 + MB^2 = 2MC^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

Do đó, $MA^2 + MB^2$ max khi MC^2 max và điều này xảy ra khi M, I, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Khi đó, $M(6; 4)$ và ta cũng có $MA = MB$ nên các đẳng thức đều xảy ra. Vậy $z = 6 + 4i$ là số phức cần tìm và $P = 6 + 4 = 10$.

Nhận xét. Dạng toán cực trị số phức sử dụng hình học sau một năm phát động thi trắc nghiệm giờ gần như đã quá quen thuộc (ít nhất là đối với giáo viên). Thậm chí, các bất đẳng thức hình học nổi tiếng nhưng không có trong chương trình phổ thông như BĐT Ptolemy, điểm Torricelli, ... cũng đã được khai thác. Ở bài toán này, điểm A, B cách đều tâm I nên việc tìm cực trị là khá dễ dàng, các dấu bằng đều xảy ra đồng thời.

Ta thử xây dựng và khai thác một mô hình sau đây, cũng tương đối mới liên quan đến bài toán trên. Xét điểm A, B nằm ngoài đường tròn (I, R) sao cho $AI = kR, k > 1$. Ta cần tìm vị trí của $M \in (I)$ sao cho $T = MA + kMB$ nhỏ nhất.

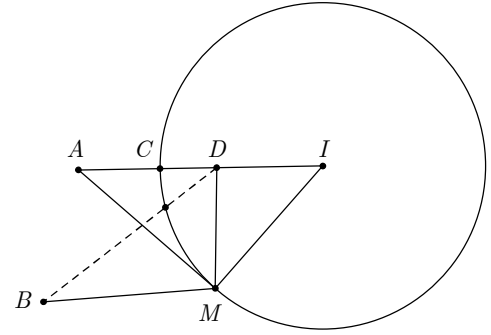
Xét C là giao điểm của đoạn AI và (I) , lấy $D \in IC$ sao cho

$ID = \frac{1}{k}R$. Khi đó $ID \cdot IA = R^2 = IM^2$ nên

$$\triangle IMD \sim \triangle IAM \Rightarrow \frac{MD}{AM} = \frac{IM}{IA} = \frac{1}{k}$$

nên $AM = kMD$ và $T = k(MD + MB)$. Đến đây, dễ thấy rằng M là giao điểm của đoạn BD và (I) thì cực trị xảy ra.

Cho $k = \frac{3}{2}$, ta có bài toán sau.



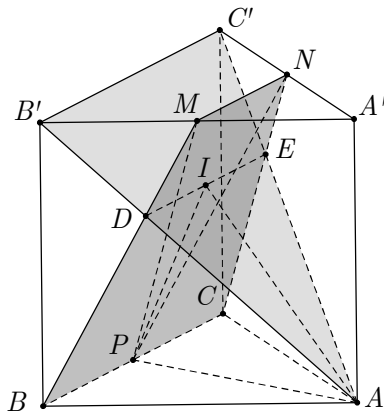
Bài tập tương tự.

Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 3 - 3i| = 6$. Tính $P = a + b$ khi biểu thức $2|z + 6 - 3i| + 3|z + 1 + 5i|$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 47. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $A'B', A'C'$ và BC . Cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) là

- A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$. B. $\frac{\sqrt{13}}{65}$. C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. D. $\frac{18\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải. Chọn câu B.



Cách 1. (sử dụng hình học thuần túy) Ta thấy $MN \parallel BC, P \in BC$ nên $(MNP) \equiv (BCNM)$.

Đặt $D = AB' \cap BM, E = A'C' \cap CN$ thì DE là giao tuyến của $(BCNM), (AB'C')$. Gọi I là trung điểm DE thì theo tính đối xứng, dễ thấy rằng $IA \perp DE, IP \perp DE$.

Do đó, cosin cần tìm chính là $|\cos \widehat{AIP}|$.

Ta có $AP = 3$ và $\frac{DE}{B'C'} = \frac{AD}{AB'} = \frac{AB}{AB + B'M} = \frac{2}{3}$ nên rõ ràng I là trọng tâm của $AB'C'$. Suy ra

$$AI = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2(AB'^2 + AC'^2) - B'C'^2}{4}} = \frac{2\sqrt{13}}{3}.$$

Tương tự thì I là trọng tâm của MNP nên $PI = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2(PM^2 + PN^2) - MN^2}{4}} = \frac{5}{3}$.

Từ đó theo định lý cosin, ta tính được $|\cos \widehat{AIP}| = \frac{\sqrt{13}}{65}$.

Cách 2. (sử dụng hình giải tích) Xét hệ trục tọa độ gốc tại P và chiều dương của Ox, Oy, Oz trùng với các tia PA, PB, AA' . Ta có $B(0; \sqrt{3}; 0), A(3; 0; 0), A'(3; 0; 2), B'(0; \sqrt{3}; 2), M(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 2)$.

Khi đó, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ cùng phương với vector $\vec{u} = (0; 1; 0)$, còn $\overrightarrow{PM} = (\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 2)$ nên ta tính được

vector pháp tuyến của (MNP) là $[\vec{u}, \overrightarrow{PM}] = (2; 0; -\frac{3}{2}) \Rightarrow \vec{n}_1 = (4; 0; -3)$.

Tương tự thì $\overrightarrow{B'C'} =$ cùng phương với vectơ $\vec{u} = (0;1;0)$ và $\overrightarrow{AB'} = (-3;\sqrt{3};2)$ nên vectơ pháp tuyến của $(AB'C')$ là $\vec{n}_2 = [\vec{u}, \overrightarrow{AB'}] = (2;0;3)$.

Do đó, cosin cần tính là $\left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 3|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2} \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{13}}{65}$.

Nhận xét. Đây là một câu hỏi ở mức vận dụng cao của chương trình lớp 11, yêu cầu xác định góc giữa hai mặt phẳng. Bài toán thực ra không khó, nhưng dài, phải tính toán nhiều yếu tố trung gian. Hai mặt phẳng ở trên cũng có quan hệ đặc biệt nên xác định được giao tuyến dễ, làm cho việc tính toán nhẹ đi; nếu không thì lời giải theo kiểu thuần túy có thể đã dài gấp đôi. Chú ý rằng khi đó, lời giải theo kiểu hình học giải tích vẫn ổn. Đây cũng là hướng tiếp cận phổ biến cho ý thứ hai trong bài toán hình không gian vào những năm thi Toán tự luận. Thực ra có nhiều cách đặt vấn đề theo kiểu tọa độ thì dễ mà thuần túy thì khó, chẳng hạn ta xét bài toán bên dưới.

Bài tập tương tự.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và diện tích của mỗi tam giác mặt bên là a^2 . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SA và DH là đường cao của tam giác SCD , $H \in SC$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM, DH .

Bài 48. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1), B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A có bán kính bằng 2, $(S_2), (S_3)$ là các mặt cầu có tâm B, C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$?

A. 5.

B. 7.

C. 6.

D. 8

Lời giải. Chọn câu B.

Cách 1. (sử dụng đại số) Xét $(\alpha) : ax + by + cz + d = 0$ là mặt phẳng thỏa mãn đề bài. Ta có

$$\begin{cases} d_{A/(\alpha)} = 2 \\ d_{B/(\alpha)} = d_{C/(\alpha)} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a + 2b + c + d| = 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ |3a - b + c + d| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ |-a - b + c + d| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}$$

Từ hai đẳng thức cuối, ta có $|3a - b + c + d| = |-a - b + c + d| \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = a + c + d \end{cases}$.

Ta xét các trường hợp sau:

(1) Nếu $a = 0$ thì ta đưa về $\begin{cases} |2b + c + d| = 2\sqrt{b^2 + c^2} \\ |-b + c + d| = \sqrt{b^2 + c^2} \end{cases} \Rightarrow |2b + c + d| = 2|-b + c + d| \Leftrightarrow \begin{cases} c + d = 0 \\ 4b = c + d \end{cases}$.

1.1/ Nếu $c = -d$ thì $|2b| = 2\sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow a = c = d = 0$ và $(\alpha) : y = 0$.

1.2/ Nếu $4b = c + d$ thì $|3b| = \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow 2\sqrt{2}|b| = |c|$, ở đây có hai mặt phẳng (α) thỏa mãn.

(2) Nếu $b = a + c + d$ thì cũng thay vào hai phương trình đầu và lập luận tương tự, thu được thêm bốn mặt phẳng nữa.

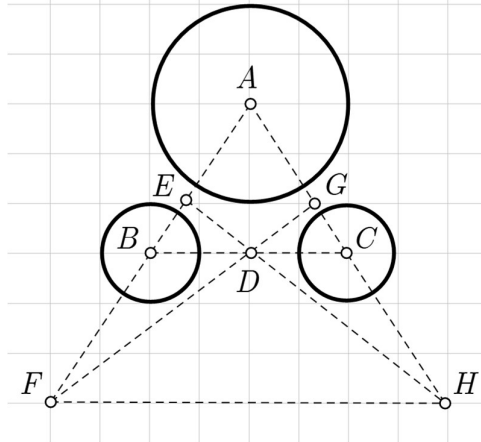
Vậy tổng cộng có 7 mặt phẳng thỏa mãn đề bài.

Cách 2. (sử dụng hình thuần túy)

Trước hết, ta có nhận xét: trong không gian, cho điểm A và đường thẳng Δ với $d_{A/\Delta} = h$. Khi đó,

- Có đúng hai mặt phẳng (P) chứa Δ và cách A một khoảng là $d > h$.
- Có đúng một mặt phẳng (P) chứa Δ và cách A một khoảng là $d = h$.

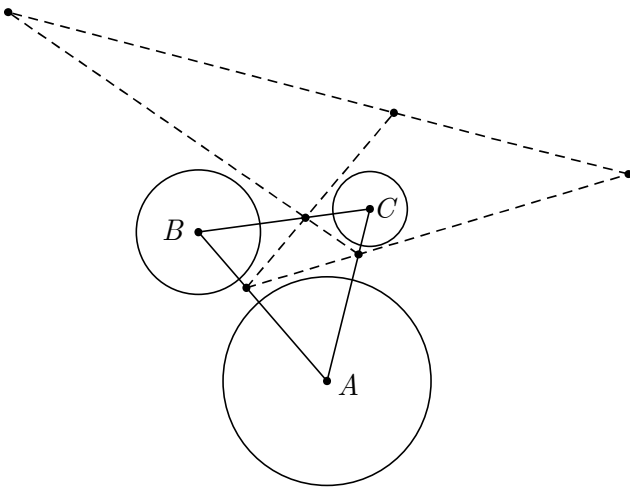
Xét mặt phẳng (α) đi qua các điểm A, B, C như hình bên dưới. Ta có $AB = AC = \sqrt{13}, BC = 4$ nên ta tìm được các điểm chia trong, chia ngoài các đoạn AB, AC theo tỷ lệ $1 : 2$ là E, F, G, H (đây là tâm vị tự của các cặp đường tròn tương ứng), còn D là trung điểm BC . Mặt phẳng (P) sẽ có 4 dạng:



- Đi qua E, G : dễ thấy EG tiếp xúc với $(S_1), (S_2), (S_3)$ nên (P) sẽ chứa EG và vuông góc với (α) , theo nhận xét trên, sẽ có đúng 1 mặt phẳng như thế.
- Đi qua E, D, H : ta thấy $d_{A/EH} > 2, d_{B/EH} = d_{C/EH} > 1$ nên sẽ có hai mặt phẳng (P) chứa EH và tiếp xúc với ba mặt cầu.
- Đi qua G, D, F và đi qua FH : cũng tương tự trên, đều có thể hai mặt phẳng nữa.

Vậy tổng cộng ta có 7 mặt phẳng (P) thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Bài toán chỉ có ý nghĩa khi không có mặt cầu này nằm trong mặt cầu kia. Việc tiếp cận theo hướng mặt phẳng đi qua các tâm chuyển bài toán 3D thành 2D để xử lý và hình dung hơn nhiều. Ta thử xét bài toán: *Số mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu tùy ý có thể là bao nhiêu?*



Để đơn giản, ta xét trường hợp không có mặt cầu nào tiếp xúc nhau và giả sử các bán kính của các mặt cầu đều phân biệt. Khi đó, mỗi cặp đường tròn trong hình trên sẽ cho ta một tâm vị tự trong và một tâm vị tự ngoài.

Ta có 4 cặp đường thẳng đi qua ba tâm vị tự như hình vẽ bên. Mỗi đường thẳng đó sinh ra bao nhiêu mặt phẳng tiếp tuyến tùy thuộc vào vị trí của nó với các mặt cầu. Cụ thể là:

- Nếu đường thẳng cắt 1 trong 3 mặt cầu thì số mặt phẳng cần tìm là 0.
- Nếu đường thẳng tiếp xúc với cả 3 mặt cầu (đĩ nhiên nếu tiếp xúc 1 thì tiếp xúc cả 3) thì số mặt phẳng cần tìm là 1.

- Nếu đường thẳng không cắt mặt cầu nào thì số mặt phẳng cần tìm là 2.

Từ đó, ta thấy khi ba mặt cầu nằm ngoài nhau và bán kính đôi một khác nhau thì số mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu sẽ thay đổi từ 2 đến 8, tùy thuộc vào vị trí của tâm và bán kính các mặt cầu.

Trong trường hợp đặc biệt ở bài, có hai mặt cầu cùng bán kính, ta có thể hiểu EG, FH đi qua tâm vị ngoài tại vô cực của hai mặt cầu có bán kính tại B, C . Khi đó, trong bốn đường thẳng ở trên thì có 3 đường không cắt mặt cầu nào và 1 đường tiếp xúc với cả 3 nên số mặt phẳng là $3 \times 2 + 1 = 7$.

Bài tập tương tự.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 1), B(3; -1; 1)$ và $C(-1; -1; 1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A có bán kính bằng 2, $(S_2), (S_3)$ là các mặt cầu có tâm B, C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$?

Bài 49. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B, 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Xác suất để trong 10 học sinh trên, không có hai học sinh nào cùng lớp đứng cạnh nhau là

- A. $\frac{11}{630}$. B. $\frac{1}{126}$. C. $\frac{1}{105}$ D. $\frac{1}{42}$.

Lời giải. Chọn câu A.

Không gian mẫu chính là số cách xếp tùy ý 10 học sinh trên hàng ngang và là $n(\Omega) = 10!$. Gọi A là biến cố đề yêu cầu. Đến đây, ta có hai cách tiếp cận như sau.

Cách 1. (sử dụng các phép đếm cơ bản)

Cho các học sinh lớp 12C đứng trước, có $5!$ cách xếp, xét các khoảng trống giữa họ như hình bên dưới (học sinh là dấu $\times$):

$$\text{O} \times \text{O} \times \text{O} \times \text{O} \times \text{O} \times \text{O}$$

Ta có các trường hợp:

- Nếu các học sinh 12A và 12B đứng vào 5 vị trí O trước thì hiển nhiên thỏa mãn. Số cách sắp xếp là $5!$ (cho học sinh 12A và 12B).
- Nếu các học sinh 12A và 12B đứng vào 5 vị trí O sau thì tương tự trên, cũng có $5!$ cách.
- Nếu các học sinh 12A, 12B không đứng ở hai vị trí O ở đầu và cuối thì có hai học sinh 12A, 12B đứng chung vào một ô. Ta lần lượt: chọn ô đứng chung, chọn 1 học sinh 12A và 1 học sinh 12B, sắp xếp hai học sinh này, sắp xếp 3 học sinh còn lại, có tất cả $4 \times C_2^1 \times C_3^1 \times 2 \times 3!$ cách.

Do đó, số cách sắp xếp tổng cộng là $n(A) = 5!(2 \times 5! + 4 \times C_2^1 \times C_3^1 \times 2 \times 3!)$.

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{11}{630}$.

Cách 2. (dùng theo xây dựng công thức truy hồi)

Gọi $f(a, b, c)$ là số cách xếp thỏa mãn đề bài, ứng với trường hợp có a, b, c học sinh 12A, 12B, 12C và học sinh đứng đầu là 12A (ở đây ta chỉ xét vị trí, chưa xét hoán vị của các học sinh trong mỗi lớp).

Ta cần tính $f(2, 3, 5) + f(3, 5, 2) + f(5, 2, 3)$. Giả sử $a = \max\{a, b, c\}$ thì $f(a, b, c) = 0$ nếu $a - 1 > b + c$.

Thật vậy, khi đó, giữa a học sinh có $a - 1$ khoảng trống, nhưng $b + c$ học sinh còn lại không đủ bù vào các khoảng đó nên số cách xếp là 0.

Tiếp theo, vì đang có học sinh 12A đứng đầu nên bỏ học sinh đó ra thì sẽ có học sinh 12B hoặc 12C đứng đầu, khi đó có $a - 1$ học sinh 12A, b, c lần lượt là học sinh 12B, 12C nên ta có công thức

$$f(a, b, c) = f(b, c, a - 1) + f(c, a - 1, b) \text{ nếu } a > 1 \text{ và } f(a, b, c) = 0 \text{ nếu } a = 0.$$

Từ đó, ta tiến hành tính $f(2, 3, 5) = f(4, 2, 3) + f(3, 4, 2)$ và cứ thế, tính tiếp $f(4, 2, 3), f(3, 4, 2), \dots$ ta tính được $n(A) = 2! \times 3! \times 5! \times 44$ nên cũng có đáp số như trên.

Nhận xét. Bài toán sắp xếp có các ràng buộc đã quá quen thuộc với học sinh THPT nhưng ở đây, bài toán phát biểu khá mới mẻ. Trường hợp thứ ba trong lời giải đầu tiên ở trên rất dễ bị bỏ sót và chọn phải phương án B.

Nói thêm về dạng tổng quát của bài toán khi thay $2, 3, 5 \rightarrow a, b, c$ thì ở trên, trong lời giải thứ hai đã có nêu một công thức dưới dạng truy hồi cho nó; tuy nhiên, khó có thể tìm ra được công thức tường minh ở đây.

Đặc biệt, khi $a = b = c = n$, gọi u_n là số cách xếp thì

$$n(n+1)u_n = (n+1)(7n-4)u_{n-1} + 8(n-2)^2u_{n-2} \text{ và } u_1 = 6, u_2 = 30.$$

Chú ý rằng các nội dung này giới thiệu để bạn đọc tham khảo thêm; tất nhiên sẽ không thể xuất hiện ở mức độ kỳ thi THPT QG.

Bài tập tương tự.

Trong một CLB, có hai ban văn nghệ và học tập. Trong ban văn nghệ, có 5 nam và 5 nữ; còn trong ban học tập, có 4 nam và 4 nữ. Xếp ngẫu nhiên 18 học sinh trong CLB thành một hàng ngang. Tính xác suất để không có bạn nam trong ban này đứng cạnh bạn nữ trong ban kia.

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng:}$$

A. $\frac{7}{5}$.

B. 1.

C. $\frac{7}{4}$.

D. 4.

Lời giải. Chọn câu A.

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, ta có

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 f(x) dx = \left. \frac{x^3 f(x)}{3} \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx. \text{ Suy ra } \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1.$$

Đến đây ta có hai cách xử lý.

Cách 1. (sử dụng biến đổi thông thường)

$$\text{Ta có } \int_0^1 (f'(x) + 7x^3)^2 dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 14 \int_0^1 f'(x)x^3 dx + 49 \int_0^1 x^6 dx = 7 + 14(-1) + \frac{49}{7} = 0.$$

Mặt khác $(f'(x) + 7x^3)^2 \geq 0$ nên ta phải có $\int_0^1 (f'(x) + 7x^3)^2 dx \geq 0$, đẳng thức phải xảy ra nên ta có

$$f'(x) + 7x^3 = 0 \Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = -\frac{7x^4}{4} + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = 0 \text{ nên tìm được } C = \frac{7}{4}. \text{ Do đó } \int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{4} \int_0^1 (-x^4 + 1) dx = \frac{7}{5}.$$

Cách 2. (sử dụng bất đẳng thức tích phân)

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz trong tích phân thì

$$\left(\int_0^1 x^3 f'(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 (x^3)^2 dx \cdot \int_0^1 (f'(x))^2 dx = \frac{1}{7} \cdot 7 = 1 \text{ nên}$$

$$-1 \leq \int_0^1 x^3 f'(x) dx \leq 1.$$

Do đó, đẳng thức phải xảy ra, tức là $f'(x) = kx^3$ với $k \in \mathbb{R}$; khi đó $f(x) = \frac{kx^4}{4} + C$.

Đến đây ta cũng đưa về tình huống tương tự trên, thay vào $\int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$ để có $k = -7$.

Nhận xét. Vậy là cuối cùng thì các bất đẳng thức tích phân cũng đã xuất hiện trong chương trình thi Đại học. Ở bài toán này, có lẽ cách đánh giá đưa về tìm ra biểu thức tường minh của $f(x)$ là cách duy nhất. Thật khó để nhắm ra được một hàm như trên (bậc bốn, hệ số hữu tỷ) theo cách xây dựng hàm cụ thể thỏa mãn điều kiện.

Xin nêu một số dạng phổ biến như sau:

(1) Trên miền $[a; b]$ nếu $f(x) \geq g(x) \geq 0$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx \geq 0$.

Điều này hiển nhiên theo định nghĩa diện tích hình phẳng. Trên thực tế, ta cũng không cần ràng buộc $g(x) \geq 0$ nhưng khi đó thì cần phải xét trường hợp $f(x), g(x)$ có các phần nằm trên, dưới Ox , cũng không đơn giản.

(2) Trên miền $[a; b]$ nếu $\max f(x) = M, \min f(x) = m$ thì $(b - a)M \geq \int_a^b f(x) dx \geq (b - a)m$.

Đây là hệ quả của (1).

(3) Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz đã dùng ở trên: Với mọi hàm số liên tục $f(x), g(x)$ thì

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

Để chứng minh, ta xét số thực k nào đó thì $(f(x) - kg(x))^2 \geq 0, \forall x$ nên $\int_a^b (f(x) - kg(x))^2 dx \geq 0$.

$$\text{Suy ra } k^2 \int_a^b g^2(x) dx - 2k \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b f^2(x) dx \geq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng với mọi $k \in \mathbb{R}$ nên ta cần có

$$\Delta' = k^2 \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 - k^2 \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx \leq 0.$$

Từ đây có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi tồn tại k để $f(x) = kg(x)$.

Dạng Toán này thực ra quen thuộc ở bậc Đại học (đặc biệt là các kỳ thi Olympic Toán sinh viên), và có lẽ học sinh THPT cũng dần phải làm quen với nó.

Bài tập tương tự.

1) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) - f(0) = 2$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 4$. Tính giá trị của $\int_0^1 f^3(x) dx$.

2) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1; 3]$ và $f(1) = 0, \max_{[1; 3]} |f(x)| = \sqrt{10}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích phân

$$I = \int_1^3 [f'(x)]^2 dx.$$