

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Ngày thi : 21/12/2021

Thời gian làm bài : 180 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (4 điểm)

a) Cho hàm số $y = 2(x+1)[4x^2 + 4(m+2)x + 5m+7] + 4$ có đồ thị là (C_m) , với m là tham số. Cho đường thẳng (d): $y = 2x + 6$ và điểm $I(-3;4)$. Tìm m để (d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(-1;4)$, B , C sao cho tam giác IBC có diện tích bằng 4.

b) Một đại lý xăng dầu cần làm một cái bồn chứa dầu hình trụ có thể tích bằng $\frac{125\pi}{4}(m^3)$. Tìm bán kính đáy của bồn chứa dầu sao cho bồn chứa dầu được làm ra tốn ít nguyên vật liệu nhất.

Câu 2. (4 điểm)

a) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ và hai số thực a, b thỏa mãn các điều kiện: $a > 2021^{\log_{2021} b} \geq 1$; $f(\log_{2021} a) + 2 = f(\log_{2021} b)$. Tính $\log_{2021}(a+b)$.

b) Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn điều kiện $\tan B = \frac{3-2\tan C}{2+3\tan C}$. Chứng minh ΔABC có một góc tù và tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC , biết rằng $BC = 6$.

Câu 3. (4 điểm)

a) Một hộp đựng 10 quả cầu được đánh số từ 1 đến 10. Lấy ra n quả cầu trong 10 quả cầu đó, biết xác suất lấy được ít nhất một quả cầu mà số ghi trên đó chia hết cho 5 trong n quả cầu được lấy ra là $\frac{2}{3}$.

Tìm n .

b) Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{9-4x} + 2x^3 - 7x^2 + 6x - 1}{\sqrt{12x-15} + 3x^2 - 14x + 13}$.

Câu 4. (4 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , góc $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$, $AB = a\sqrt{6}$, $AC = a\sqrt{3}$, khoảng cách từ C đến (SAB) bằng $\frac{12a}{7}$.

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

b) Gọi O, M lần lượt là trung điểm của BC, SC ; (P) là mặt phẳng chứa BM và song song với AO . Gọi góc giữa SB và (P) là α . Tính $\sin \alpha$.

c) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $M.ABC$.

Câu 5. (2 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3^{\sqrt{\frac{x}{3}-1}+1} - 3^{\sqrt{y+1}+1} + x - 3y = 6 \\ \sqrt{3x^2+48} - 2\sqrt{6y+24} = 4\sqrt{6-x} \end{cases}$$

Câu 6. (2 điểm)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab \geq 1$ và $c(a+b+c) \geq 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{b+2c}{1+a} + \frac{a+2c}{1+b} + 6\ln(a+b+2c)$.

----- Hết -----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Lời giải được thực hiện bởi tập thể quý thầy cô: Trường Giang, Quỳnh Hương, Trần Xuân Thiện, Kỳ Tổng, Đường Ngọc Lan và Anh Tuấn.

- Câu 1.** a) Cho hàm số $y = 2(x+1)[4x^2 + 4(m+2)x + 5m + 7] + 4$ có đồ thị là (C_m) , với m là tham số. Cho đường thẳng $(d): y = 2x + 6$ và điểm $I(-3; 4)$. Tìm m để (d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(-1; 4)$, B , C sao cho tam giác IBC có diện tích bằng 4.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và đồ thị (C_m) :

$$\begin{aligned} 2(x+1)[4x^2 + 4(m+2)x + 5m + 7] + 4 &= 2x + 6 \\ \Leftrightarrow 2(x+1)[4x^2 + 4(m+2)x + 5m + 7] - 2(x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(x+1)[4x^2 + 4(m+2)x + 5m + 6] &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 4x^2 + 4(m+2)x + 5m + 6 = 0 (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = [2(m+2)]^2 - 4(5m+6) > 0 \\ 4 - 4(m+2) + 5m + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty) \\ m \neq -2 \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$.

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m - 2 \\ x_1 x_2 = \frac{5m + 6}{4} \end{cases}$.

Ta có tọa độ $B(x_1; 2x_1 + 6)$, $C(x_2; 2x_2 + 6)$. Suy ra $\overline{BC} = (x_2 - x_1; 2(x_2 - x_1))$.

Khi đó $BC = |\overline{BC}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 4(x_2 - x_1)^2}$.

Theo đề bài diện tích $\triangle IBC$ bằng 4, nên suy ra

$$\begin{aligned} S_{\triangle IBC} &= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot d(I, BC) \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 4(x_2 - x_1)^2} \cdot \frac{|2 \cdot (-3) - 4 + 6|}{\sqrt{2^2 + 1}} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{5} &= \sqrt{5(x_2 - x_1)^2} \Leftrightarrow 2 = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2} \Leftrightarrow 2 = \sqrt{(m+2)^2 - 5m - 6} \Leftrightarrow 2 = \sqrt{m^2 - m - 2} \\ \Leftrightarrow m^2 - m - 6 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- b) Một đại lý xăng dầu cần tìm một cái bồn chứa dầu hình trụ có thể tích bằng $\frac{125\pi}{4}(m^3)$. Tìm bán kính đáy của bồn chứa dầu sao cho bồn chứa dầu được làm ra tốn ít nguyên vật liệu nhất.

Lời giải

- b) Gọi bán kính đáy và chiều cao của bồn chứa dầu lần lượt là $x, h(m)$, $(x > 0, h > 0)$.

Ta có: $V = \pi R^2 h \Leftrightarrow \frac{125\pi}{4} = \pi x^2 h \Leftrightarrow h = \frac{125}{4x^2}$.

Để bồn chứa ít tốn nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần phải nhỏ nhất.

$$\text{Mà } S_p = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \pi \frac{125}{2x} + 2\pi x^2 = \pi \left(\frac{125}{2x} + 2x^2 \right) = \pi \left(\frac{125}{4x} + \frac{125}{4x} + 2x^2 \right).$$

Áp dụng BĐT AM-GM cho 3 số không âm $\frac{125}{4x}$, $\frac{125}{4x}$ và $2x^2$, ta được:

$$S_p \geq \pi \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{125}{4x} \cdot \frac{125}{4x} \cdot 2x^2} = \frac{75\pi}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{125}{4x} = 2x^2 \Leftrightarrow 8x^3 = 125 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy để bồn chứa dầu ít tốn nguyên vật liệu thì bán kính đáy bằng $\frac{5}{2}(m)$.

Câu 2. a) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ và hai số thực a, b thỏa mãn các điều kiện: $a > 2021^{\log_{2022} b} \geq 1$; $f(\log_{2021} a) + 2 = f(\log_{2022} b)$. Tính $\log_{2022}(a+b)$.

b) Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn điều kiện $\tan B = \frac{3-2\tan C}{2+3\tan C}$. Chứng minh ΔABC có một góc tù và tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC , biết rằng $BC = 6$.

Lời giải

a) Xét hàm: $f(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	4		0	$+\infty$

Đặt $u = \log_{2021} a$, $v = \log_{2022} b$.

Vì $a > 2021^{\log_{2022} b}$ nên $\log_{2021} a > \log_{2022} b \geq 0 \Rightarrow u > v \geq 0$.

Lại có: $f(\log_{2021} a) + 2 = f(\log_{2022} b)$.

Nên $f(u) + 2 = f(v) \Rightarrow f(v) > f(u)$ với mọi $u > v \geq 0$.

Do đó: $u, v \in [0; 1]$. Khi đó từ $f(v) - f(u) = 2 \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$.

Suy ra $a = 2021$ và $b = 1$. Vậy $\log_{2022}(a+b) = 1$.

b) Ta có:

$$\begin{aligned} \tan B = \frac{3-2\tan C}{2+3\tan C} &\Leftrightarrow \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{3\cos C - 2\sin C}{2\cos C + 3\sin C} \\ &\Leftrightarrow 2\sin B \cos C + 3\sin B \sin C = 3\cos B \cos C - 2\cos B \sin C \\ &\Leftrightarrow 2\sin(B+C) = 3\cos(B+C) \\ &\Leftrightarrow 2\sin A = -3\cos A. \end{aligned}$$

Vì $\sin A > 0$ nên $\cos A < 0$ suy ra góc A tù.

Ta có:

$$\begin{cases} 4\sin^2 A - 9\cos^2 A = 0 \\ \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \end{cases} \Rightarrow \sin A = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Áp dụng định lý Sin ta có $R = \frac{BC}{2\sin A} = \sqrt{13}$.

Vậy diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC là 13π .

Câu 3. a) Một hộp đựng 10 quả cầu được đánh số từ 1 đến 10. Lấy ra n quả cầu từ 10 quả cầu đó, biết xác suất lấy được ít nhất một quả cầu mà ghi số trên đó chia hết cho 5 trong n quả cầu được lấy ra là $\frac{2}{3}$. Tìm n .

b) Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{9-4x} + 2x^3 - 7x^2 + 6x - 1}{\sqrt{12x-15} + 3x^2 - 14x + 13}$.

Lời giải

a) Ta có $n(\Omega) = C_{10}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*, n \leq 10$).

Gọi A là biến cố lấy được ít nhất một quả cầu mà ghi số trên đó chia hết cho 5 trong n quả cầu đã cho $\Rightarrow n(A) = C_2^1 \cdot C_8^{n-1} + C_2^2 \cdot C_8^{n-2}$

Ta có: $P(A) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{C_2^1 \cdot C_8^{n-1} + C_2^2 \cdot C_8^{n-2}}{C_{10}^n} = \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow 3 \left[\frac{2 \cdot 8!}{(n-1)!(9-n)!} + \frac{8!}{(n-2)!(10-n)!} \right] = 2 \frac{10!}{n!(10-n)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{n-1} + \frac{3}{10-n} = \frac{60}{n(n-1)(10-n)} \Leftrightarrow n^2 - 19n + 60 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 \\ n = 15 \end{cases}$$

Vậy $n = 4$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{9-4x} + 2x^3 - 7x^2 + 6x - 1}{\sqrt{12x-15} + 3x^2 - 14x + 13} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{9-4x} - 1) + 2x^3 - 7x^2 + 6x}{(\sqrt{12x-15} - 3) + 3x^2 - 14x + 16} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{8-4x}{\sqrt{9-4x}+1} + x(x-2)(2x-3)}{\frac{12x-24}{\sqrt{12x-15}+3} + (x-2)(3x-8)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{-4}{\sqrt{9-4x}+1} + x(2x-3)}{\frac{12}{\sqrt{12x-15}+3} + (3x-8)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{-4}{\sqrt{9-4x}+1} + 2 + (2x^2 - 3x - 2)}{\frac{12}{\sqrt{12x-15}+3} - 2 + (3x-6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{-8}{(\sqrt{9-4x}+1)^2} + 2x+1}{\frac{-24}{(\sqrt{12x-15}+3)^2} + 3} = \frac{9}{7}. \end{aligned}$$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , góc

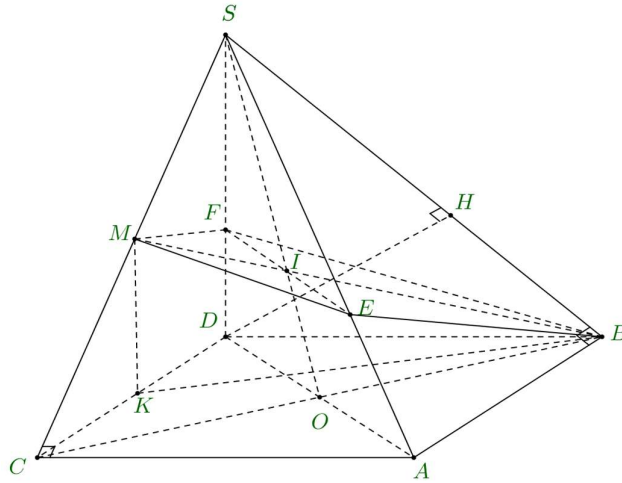
$\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$, $AB = a\sqrt{6}$, $AC = a\sqrt{3}$, khoảng cách từ C đến (SAB) bằng $\frac{12a}{7}$.

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

b) Gọi O, M lần lượt là trung điểm của BC, SC ; (P) là mặt phẳng chứa BM và song song với AO . Gọi góc giữa SB và (P) là α . Tính $\sin \alpha$.

c) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $M.ABC$.

Lời giải



a) Gọi D là hình chiếu của S trên $mp(ABC)$. Ta có:

$$\diamond \begin{cases} AB \perp SB \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBD) \Rightarrow AB \perp BD.$$

$$\diamond \begin{cases} AC \perp SC \\ AC \perp SD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SCD) \Rightarrow AC \perp CD.$$

$\Rightarrow ABDC$ là hình chữ nhật.

Kẻ đường cao DH của tam giác. Ta có:

$$\begin{cases} DH \perp SB \\ DH \perp AB \end{cases} \Rightarrow DH \perp (SAB) \Rightarrow DH = d(D, (SAB)) = d(C, (SAB)) = \frac{12a}{7}.$$

Trong $\triangle SBD$ vuông tại D , ta có: $\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{BD^2} \Leftrightarrow \frac{49}{144a^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{3a^2} \Rightarrow SD = 12a.$

Vậy: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SD.S_{ABC} = \frac{1}{3}.SD.\frac{1}{2}.AC.AB = \frac{1}{3}.12a.\frac{1}{2}.a\sqrt{3}.a\sqrt{6} = 6\sqrt{2}a^3.$

b) Gọi I là giao điểm của SO và $BM \Rightarrow I \in (P) \cap (SAD) \Rightarrow (P) \cap (SAD) = EF$, với EF đi qua I và song song AD , $E \in SA, F \in SD$.

Gọi K là trung điểm của $CD \Rightarrow MK \parallel SD \Rightarrow MK \perp (ABDC).$

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DK}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{AC} = 3a^2 - \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a\sqrt{6} = 0$$

$$\Rightarrow BK \perp AD \Rightarrow AD \perp (BMK) \Rightarrow AD \perp BM, \text{ mà } EF \parallel AD \Rightarrow EF \perp BM.$$

Ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 3a \Rightarrow AD = 3a; SB = \sqrt{SD^2 + BD^2} = 7\sqrt{3}a;$

$$SC = \sqrt{SD^2 + DC^2} = 5\sqrt{6} \Rightarrow BM = \sqrt{\frac{SB^2 + BC^2}{2} - \frac{SC^2}{4}} = \frac{9\sqrt{2}a}{2}$$

Do I là trọng tâm $\triangle SBC$ nên $EF = \frac{2}{3}AD = 2a.$

$$\text{Vậy } S_{BEMF} = \frac{1}{2} EF \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} a = \frac{9\sqrt{2}}{2} a^2.$$

$$\text{Ta có: } \frac{V_{S.MEF}}{V_{S.CAD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SE}{SA} \cdot \frac{SF}{SD} = \frac{2}{9} \Rightarrow V_{S.MEF} = \frac{2}{9} V_{S.CAD} = \frac{1}{9} V_{S.ABDC};$$

$$\frac{V_{S.BEF}}{V_{S.BAD}} = \frac{SE}{SA} \cdot \frac{SF}{SD} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.BEF} = \frac{4}{9} V_{S.BAD} = \frac{2}{9} V_{S.ABDC}$$

$$\Rightarrow V_{S.BEMF} = V_{S.MEF} + V_{S.BEF} = \frac{1}{3} V_{S.ABDC} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = 4\sqrt{2}a^3 \Rightarrow d(S; (BEMF)) = \frac{3V_{S.BEMF}}{S_{BEMF}} = \frac{8a}{3}.$$

$$\text{Vậy: } \sin \alpha = \frac{d(S; (BEMF))}{SB} = \frac{8\sqrt{3}}{63}.$$

c) Do $ABDC$ là hình chữ nhật nên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $M.ABC$ cũng là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $M.ABDC$.

$$\text{Xét tam giác } DMC \text{ có } DM = MC = \frac{SC}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2} a \Rightarrow \triangle MDC \text{ cân tại } M.$$

Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle MDC \Rightarrow P$ thuộc đường thẳng MK .

Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle MDC$, ta có:

$$\cos \widehat{DMC} = \frac{MD^2 + MC^2 - DC^2}{2MD \cdot MC} = \frac{23}{25} \Rightarrow \sin \widehat{DMC} = \frac{4\sqrt{6}}{25} \Rightarrow r = \frac{DC}{2 \sin \widehat{DMC}} = \frac{25a}{8}$$

Dựng đường thẳng d đi qua P và vuông góc với $(DMC) \Rightarrow d$ là trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle MDC$.

Dựng đường thẳng Δ đi qua O và vuông góc với $(ABC) \Rightarrow \Delta$ là trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Gọi Q là giao điểm của d và $\Delta \Rightarrow Q$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $M.ABC$.

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $M.ABC$, ta có:

$$R = \sqrt{MP^2 + PQ^2} = \sqrt{MP^2 + OK^2} = \sqrt{\left(\frac{25a}{8}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{673}}{8} a.$$

Câu 5. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3^{\sqrt[3]{\frac{x}{3}-1}+1} - 3^{\sqrt[3]{y+1}+1} + x - 3y = 6 \\ \sqrt{3x^2 + 48} - 2\sqrt{6y + 24} = 4\sqrt{6-x} \end{cases}.$$

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \leq 6 \\ y \geq -4 \end{cases}.$$

Ta có $3^{\sqrt[3]{\frac{x}{3}-1}+1} - 3^{\sqrt[3]{y+1}+1} + x - 3y = 6 \Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{\frac{x}{3}-1}+1} + 3\left(\frac{x}{3}-1\right) = 3^{\sqrt[3]{y+1}+1} + 3(y+1) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{3}-1\right) = f(y+1)$,

với $f(t) = 3^{\sqrt[3]{t}+1} + 3t$.

Hàm số $f(t) = 3^{\sqrt[3]{t}+1} + 3t$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Khi đó $f\left(\frac{x}{3}-1\right) = f(y+1) \Leftrightarrow \frac{x}{3}-1 = y+1 \Leftrightarrow x = 3y+6$.

Thay $x = 3y+6$ vào phương trình $\sqrt{3x^2+48} - 2\sqrt{2x+12} = 4\sqrt{6-x}$.

Điều kiện của phương trình $-6 \leq x \leq 6$

$$\sqrt{3x^2+48} - 2\sqrt{2x+12} = 4\sqrt{6-x} \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+48} = 2(\sqrt{2x+12} + 2\sqrt{6-x})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ 3x^2+48 = -8x+144+16\sqrt{72-2x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ 16\sqrt{72-2x^2} = 3x^2+8x-96 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x \leq 6, 3x^2+8x-96 \geq 0 \\ 16\sqrt{72-2x^2} = 3x^2+8x-96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x \leq 6, 3x^2+8x-96 \geq 0 \\ 9x^4+48x^3-1536x-9216 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x \leq 6, 3x^2+8x-96 \geq 0 \\ (3x^2-96)(3x^2+16x+96) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x \leq 6, 3x^2+8x-96 \geq 0 \\ \begin{cases} 3x^2-96 = 0 \\ 3x^2+16x+96 = 0 \text{ (vn)} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x \leq 6, 3x^2+8x-96 \geq 0 \\ \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \\ x = -4\sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4\sqrt{2}$$

Thay $x = 4\sqrt{2}$ vào (3) ta được $y = \frac{4\sqrt{2}-6}{3}$. Hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left(4\sqrt{2}; \frac{4\sqrt{2}-6}{3}\right)$

Câu 6.

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab \geq 1, c(a+b+c) \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{b+2c}{1+a} + \frac{a+2c}{1+b} + 6\ln(a+b+2c).$$

Lời giải

Ta có: $P+2 = \left(\frac{b+2c}{1+a} + 1\right) + \left(\frac{a+2c}{1+b} + 1\right) + 6\ln(a+b+2c)$

$$= \frac{a+b+2c+1}{a+1} + \frac{a+b+2c+1}{b+1} + 6\ln(a+b+2c)$$

$$= (a+b+2c+1) \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \right) + 6\ln(a+b+2c).$$

Ta lại có: $\left(\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}}\right) + \left(\frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}}\right)$

$$= \frac{\sqrt{ab}-a}{(1+a)(1+\sqrt{ab})} + \frac{\sqrt{ab}-b}{(1+b)(1+\sqrt{ab})}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{1+\sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{a}}{1+a} - \frac{\sqrt{b}}{1+b} \right) \\
&= \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{1+\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(1+a)(1+b)} \\
&= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{ab}-1)}{(1+\sqrt{ab})(1+a)(1+b)} \geq 0, (do\ a, b > 0; ab \geq 1) \\
\Rightarrow \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} &\geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{1+\frac{ab+1}{2}} = \frac{4}{ab+3} \geq \frac{4}{ab+c(a+b+c)} = \frac{4}{(a+c)(b+c)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P+2 &= \frac{a+b+2c+1}{1+a} + \frac{a+b+2c+1}{1+b} + 6\ln(a+b+2c). \\
&= (a+b+2c+1) \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \right) + 6\ln(a+b+2c).
\end{aligned}$$

Đặt $t = a+b+2c > 0$ ta có $P+2 \geq \frac{16(t+1)}{t^2} + 6\ln t$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{16(t+1)}{t^2} + 6\ln t \Rightarrow f'(t) = \frac{6t^2 - 16t - 32}{t^3} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

t	0	4	$+\infty$
$f'(t)$		- 0 +	
$f(t)$			

$f(4) = 5 + 6\ln 4 \Rightarrow P \geq 3 + 6\ln 4 \Rightarrow \min P = 3 + 6\ln 4$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

HẾT

Câu 1. [HSG-QUẢNG NINH-B 2021-2022] a) Cho hàm số $y = 2(x+1)[4x^2 + 4(m+2)x + 5m + 7] + 4$ có đồ thị là (C_m) , với m là tham số và đường thẳng $(d): y = 2x + 6$. Tìm m để (d) cắt (C_m) tại 3 điểm phân biệt $A(-1; 4)$, B, C sao cho $BC = 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$2(x+1)[4x^2 + 4(m+2)x + 5m + 7] + 4 = 2x + 6$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)[4x^2 + 4(m+2)x + 5m + 7] - 2(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)[4x^2 + 4(m+2)x + 5m + 5] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)g(x) = 0 \quad (*)$$

Để (d) cắt (C_m) tại 3 điểm phân biệt $A(-1; 4)$, B, C thì phương trình $4x^2 + 4(m+2)x + 5m + 5 = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt x_B, x_C khác -1 . Điều kiện đó tương đương với

$$\begin{cases} a = 4 \neq 0 \\ \Delta' = 4(m^2 - m - 1) > 0 \\ g(-1) = m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ m \neq -1 \end{cases}$$

Khi đó tọa độ 2 giao điểm B, C là $B(x_B; 2x_B + 6), C(x_C; 2x_C + 6)$ với $\begin{cases} x_B + x_C = -(m+2) \\ x_B x_C = \frac{5(m+1)}{4} \end{cases}$.

Theo giả thiết $BC = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow BC^2 = 20 \Leftrightarrow 5(x_C - x_B)^2 = 20$

$$\Leftrightarrow (x_C - x_B)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_C + x_B)^2 - 4x_C x_B = 4 \Leftrightarrow (m+2)^2 - 5(m+1) = 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \\ m = \frac{1-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

Câu 1. [HSG-QUẢNG NINH-B 2021-2022] b) Một đại lý xăng dầu cần làm một cái bồn chứa dầu hình trụ có thể tích bằng $\frac{125\pi}{4}(m^3)$. Tính bán kính đáy của bồn chứa dầu sao cho bồn chứa dầu được làm ra tốn ít nguyên liệu nhất?

Lời giải

Gọi $r, h(m)$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của chiếc bồn $r, h > 0$.

Theo giả thiết ta có: $V = \pi r^2 h = \frac{125\pi}{4} \Rightarrow h = \frac{125}{4r}$.

Để bồn chứa dầu được làm ra tốn ít nguyên liệu nhất thì diện tích toàn phần của chiếc bồn hình trụ phải nhỏ nhất.

Tácó diện tích toàn phần của chiếc bồn là: $S_p = 2\pi r \frac{125}{4r} + 2\pi r^2 = 2\pi \left(\frac{125}{4r} + r^2 \right)$.

Xét hàm số $f(r) = 2\pi \left(\frac{125}{4r} + r^2 \right)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(r) = 2\pi \left(\frac{-125 + 8r^3}{4r^2} \right)$; $f'(r) = 0 \Rightarrow r = \frac{5}{2} \in (0; +\infty)$.

Ta tính được giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(r) = 2\pi \left(\frac{125}{4r} + r^2 \right)$ ứng với $r = \frac{5}{2}(m)$.

Câu 2. [HSG-QUẢNG NINH-B 2021-2022]

a) Cho a, b, c là các số thực dương khác 1 thỏa mãn: $\log_{2022} a = 3$; $\log_a \sqrt{b} = 2$; $\log_c \sqrt[6]{b} = \frac{1}{3}$. Tính

$$\log_{2022} \sqrt[9]{(abc)^4}.$$

b) Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn điều kiện $\tan B = \frac{3 - 2 \tan C}{2 + 3 \tan C}$. Chứng minh $\triangle ABC$ có một góc tù và tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC , biết rằng $BC = 6$.

Lời giải

$$a) \begin{cases} \log_{2022} a = 3 \\ \log_a \sqrt{b} = 2 \\ \log_c \sqrt[6]{b} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2022^3 \\ b = a^4 = 2022^{12} \\ c = \sqrt{b} = 2022^6 \end{cases} \Rightarrow \log_{2022} \sqrt[9]{(abc)^4} = \log_{2022} \sqrt[9]{(2022^{21})^4} = \frac{28}{3}.$$

b) Vì A, B, C là ba góc của một tam giác nên $0^\circ < A, B, A + C < 180^\circ$. Với điều kiện này ta có:

$$\tan B = \frac{3 - 2 \tan C}{2 + 3 \tan C} \Leftrightarrow -\tan(A + C) = \frac{\frac{3}{2} - \tan C}{1 + \frac{3}{2} \tan C}$$

$$\Leftrightarrow \tan(-A - C) = \tan(\alpha - C), \text{ (với } \tan \alpha = \frac{3}{2} \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \tan(-A) = \tan \alpha$$

$$\Leftrightarrow \tan A = -\frac{3}{2} < 0 \text{ suy ra góc } A \text{ tù hay } \triangle ABC \text{ có một góc tù (đpcm).}$$

$$\tan A = -\frac{3}{2} \Rightarrow \cot A = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 A} = \frac{13}{9} \Rightarrow \sin A = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

$$\text{Gọi } R \text{ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác } ABC \text{ ta có } 2R = BC \sin A = 6 \cdot \frac{3\sqrt{13}}{13} \Rightarrow R = \frac{9\sqrt{13}}{13}.$$

$$\text{Diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác } ABC \text{ là: } S = \pi R^2 = \frac{81\pi}{13}.$$

Câu 3. [HSG-QUẢNG NINH-B 2021-2022]

a) Cho đa thức $P(x) = (x - 2)^{3n+5}$ biết n thỏa mãn $3A_n^2 - 5C_n^3 = 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển của $P(x)$.

$$b) \text{ Tính giới hạn } I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-3)\sqrt{9-4x} + x^2 - x - 3}{\sqrt{12x-15} + 2x-7}.$$

Lời giải

a) Ta có

$$3A_n^2 - 5C_n^3 = 2n \Leftrightarrow 3 \frac{n!}{(n-2)!} - 5 \frac{n!}{3!(n-3)!} = 2n$$

$$\Leftrightarrow 3n(n-1) - \frac{5}{6}n(n-1)(n-2) = 2n$$

$$\Leftrightarrow 18(n-1) - 5(n-1)(n-2) = 12$$

$$\Leftrightarrow -5n^2 + 33n - 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = \frac{8}{5} \end{cases}$$

Do đó $P(x) = (x-2)^{20}$.

Số hạng tổng quát: $C_{20}^k x^{20-k} (-2)^k$, $\begin{cases} k \in \mathbb{N}^* \\ k \leq n \end{cases}$.

Theo yêu cầu bài toán: $20 - k = 7 \Leftrightarrow k = 13$.

Vậy hệ số của x^7 trong khai triển là $C_{20}^{13} (-2)^{13}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-3)\sqrt{9-4x} + x^2 - x - 3}{\sqrt{12x-15} + 2x-7} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-3)(\sqrt{9-4x}-1) + x^2 + x - 6}{\sqrt{12x-15} + 2x-7} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-3)(\sqrt{9-4x}-1)}{\sqrt{12x-15} + 2x-7} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{12x-15} + 2x-7}. \end{aligned}$$

Ta tính

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-3)(\sqrt{9-4x}-1)}{\sqrt{12x-15} + 2x-7} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-3)(9-4x-1)(\sqrt{12x-15}-2x+7)}{(\sqrt{9-4x}+1)(12x-15-4x^2+28x-49)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(2x-3)(2-x)(\sqrt{12x-15}-2x+7)}{(\sqrt{9-4x}+1)(-4x^2+40x-64)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(2x-3)(2-x)(\sqrt{12x-15}-2x+7)}{-4(\sqrt{9-4x}+1)(x-2)(x-8)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-3)(\sqrt{12x-15}-2x+7)}{(\sqrt{9-4x}+1)(x-8)} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

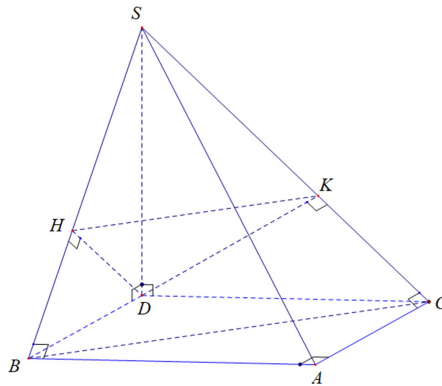
$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{12x-15} + 2x-7} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)(\sqrt{12x-15}-2x+7)}{-4x^2 + 40x - 64} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)(\sqrt{12x-15}-2x+7)}{-4(x-8)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(\sqrt{12x-15}-2x+7)}{-4(x-8)} \\ &= \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Vậy $I = \frac{-1}{2} + \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$.

Câu 4. [HSG-QUẢNG NINH-B 2021-2022] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , góc $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$, $AB = a\sqrt{6}$, $AC = a\sqrt{3}$, khoảng cách từ C đến (SAB) bằng $\frac{12a}{7}$.

- Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.
- Gọi O , M lần lượt là trung điểm của BC , SC ; (P) là mặt phẳng chứa BM và song song với AO . Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (P) .
- Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $M.ABC$.

Lời giải



a) Dựng hình chữ nhật $ABDC \Rightarrow SD \perp (ABCD)$.

Do $\left. \begin{array}{l} AC \perp CD \\ AC \perp SC \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (SCD) \Rightarrow SD \perp AC \quad (1).$

Tương tự: $SD \perp AB \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra $SD \perp (ABCD)$.

Đặt $SD = x, x > 0$.

Kẻ $DH \perp SB, (H \in SB) \Rightarrow DH \perp (SAB)$.

Suy ra $d(D, (SAB)) = DH = \frac{BD \cdot SD}{\sqrt{BD^2 + SD^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot x}{\sqrt{3a^2 + x^2}}.$

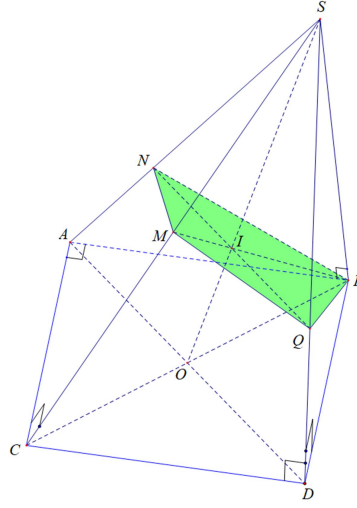
Do $CD \parallel AB \Rightarrow d(C, (SAB)) = d(D, (SAB)) \Leftrightarrow \frac{12a}{7} = \frac{a\sqrt{3} \cdot x}{\sqrt{3a^2 + x^2}} \Leftrightarrow 12\sqrt{3a^2 + x^2} = 7\sqrt{3} \cdot x$

$\Leftrightarrow 12\sqrt{3a^2 + x^2} = 7\sqrt{3} \cdot x \Leftrightarrow 144(3a^2 + x^2) = 49 \cdot 3x^2 \Leftrightarrow 144a^2 = x^2 \Leftrightarrow x = 12a.$

Suy ra $SD = 12a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3} \cdot SD \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot 12a \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{6} \cdot a\sqrt{3} = 6\sqrt{2}a^3$ (đvtt).

b)



Gọi $BM \cap SO = I$.

Khi đó I là trọng tâm ΔSBC .

Kẻ đường thẳng đi qua I và song song với AD , lần lượt cắt SA và SD tại N và Q .

$$\text{Do } IQ // OD \Rightarrow \frac{SI}{IO} = \frac{SQ}{QD} = 2.$$

Mặt khác

$$\frac{V_{S.MQB}}{V_{S.CDB}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SQ}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.MQB} = \frac{1}{3} V_{S.CDB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot SD \cdot DB \cdot DC = \frac{1}{18} \cdot 12a \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{6} = 2\sqrt{2}a^3$$

$$\text{Ta có } BQ^2 = QD^2 + BD^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot 12a\right)^2 + 3a^2 = 19a^2 \Rightarrow BK = a\sqrt{19}.$$

$$\text{Mặt khác } SB^2 = SD^2 + DB^2 = 144a^2 + 3a^2 = 147a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{147};$$

$$SC^2 = SD^2 + DC^2 = 144a^2 + 6a^2 = 150a^2 \Rightarrow SC = 5\sqrt{6}a;$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6a^2 + 3a^2} = 3a.$$

Áp dụng công thức đường trung tuyến vào ΔSBC ta có

$$MB^2 = \frac{SB^2 + BC^2}{2} - \frac{SC^2}{4} = \frac{147a^2 + 9a^2}{2} - \frac{150a^2}{4} = \frac{81a^2}{2} \Rightarrow MB = \frac{9\sqrt{2}}{2}a.$$

Áp dụng định lý cosin vào ΔSMQ ta có

$$MQ^2 = SM^2 + SQ^2 - 2 \cdot SM \cdot SQ \cdot \cos \widehat{MSQ} = SM^2 + SQ^2 - 2 \cdot SM \cdot SQ \cdot \cos \widehat{MSQ}$$

$$= SM^2 + SQ^2 - 2 \cdot SM \cdot SQ \cdot \frac{SD}{SC} = \frac{1}{4} SC^2 + \frac{4}{9} SD^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot SC \cdot \frac{2}{3} \cdot SD \cdot \frac{SD}{SC}$$

$$= \frac{1}{4} SC^2 + \frac{4}{9} SD^2 - \frac{2}{3} \cdot SD^2 = \frac{1}{4} SC^2 - \frac{2}{9} \cdot SD^2 = \frac{1}{4} \cdot 150a^2 - \frac{2}{9} \cdot 144a^2 = \frac{11a^2}{2} \Rightarrow MQ = \frac{a\sqrt{22}}{2}.$$

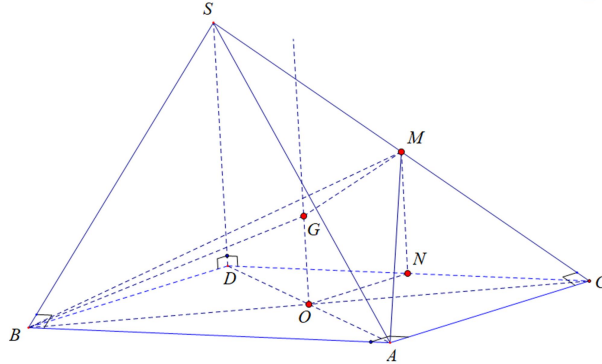
Áp dụng hệ quả định lý cosin vào $\triangle MBQ$ ta có

$$\cos \widehat{MBQ} = \frac{MB^2 + BQ^2 - MQ^2}{2 \cdot MB \cdot BQ} = \frac{\frac{81a^2}{2} + 19a^2 - \frac{11a^2}{2}}{2 \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{19}} = \frac{3\sqrt{38}}{19} \Rightarrow \sin \widehat{MBQ} = \frac{\sqrt{19}}{19}.$$

$$\text{Diện tích } \triangle MBQ \text{ là } S_{\triangle MBQ} = \frac{1}{2} \cdot MB \cdot BQ \cdot \sin \widehat{MBQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}a}{2} \cdot a\sqrt{19} \cdot \frac{\sqrt{19}}{19} = \frac{9\sqrt{2}}{4} a^2 \text{ (đvdt)}.$$

$$\text{Vậy } d(S, (P)) = d(S, (MBK)) = \frac{3V_{S.MBQ}}{S_{\triangle MBQ}} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{2}a^3}{\frac{9\sqrt{2}}{4}a^2} = \frac{8a}{3}.$$

c) Dựng đường thẳng d đi qua O và song song với SD .



Khi đó d là trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Suy ra tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $M.ABC$ là điểm $G \in d$.

Gọi N là hình chiếu vuông góc của M trên CD . Suy ra $GO \parallel MN$ và $MN = \frac{1}{2}SD = 6a$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } R^2 &= GB^2 = GM^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB})^2 = (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM})^2 \\ &\Leftrightarrow GO^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{OB} = GO^2 + ON^2 + NM^2 + 2(\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{NM}) \\ &\Leftrightarrow GO^2 + OB^2 = GO^2 + ON^2 + NM^2 + 2\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{NM} \\ \text{Do } GO &\perp OB, GO \perp ON, ON \perp NM. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } 2\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{NM} = OB^2 - ON^2 - NM^2 = \frac{1}{4} \cdot 9a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 12a\right)^2 = -\frac{69a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot GO \cdot 6a \cdot \cos 180^\circ = -\frac{69a^2}{2} \Leftrightarrow GO = \frac{23a}{8} \Rightarrow R = \sqrt{GO^2 + OB^2} = \frac{a\sqrt{673}}{8}.$$

Câu 5. [HSG-QUẢNG NINH-B 2021-2022] Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x+2}} - 2^{\sqrt{3y+8}} + x - 3y = 6 \\ \sqrt{3x^2+13} + \sqrt{6y+24} = 2\sqrt{6-x} + 5 \end{cases}.$$

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} -2 \leq x \leq 6 \\ y \geq -\frac{8}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } 2^{\sqrt{x+2}} - 2^{\sqrt{3y+8}} + x - 3y = 6 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x+2}} + x + 2 = 2^{\sqrt{3y+8}} + 3y + 8 \Leftrightarrow f(x+2) = f(3y+8),$$

$$\text{với } f(t) = 2^{\sqrt{t}} + t.$$

$$\text{Do } f'(t) = 2^{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \ln 2 + 1 > 0, \forall t > 0 \text{ suy ra hàm số hàm số } f(t) = 2^{\sqrt{t}} + t \text{ đồng biến trên } [0; +\infty).$$

$$\text{Khi đó } f(x+2) = f(3y+8) \Leftrightarrow x+2 = 3y+8 \Leftrightarrow 3y = x-6.$$

$$\text{Thay } 3y = x-6 \text{ vào phương trình } \sqrt{3x^2+13} + \sqrt{6y+24} = 2\sqrt{6-x} + 5 \text{ ta được}$$

$$\sqrt{3x^2+13} + \sqrt{2x+12} = 2\sqrt{6-x} + 5 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+13} - 5 + \sqrt{2x+12} - 2\sqrt{6-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+13} - 5 + \sqrt{2x+12} - 2\sqrt{6-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-12}{\sqrt{3x^2+13}+5} + \frac{2x+12-4(6-x)}{\sqrt{2x+12}+2\sqrt{6-x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{3x+6}{\sqrt{3x^2+13}+5} + \frac{6}{\sqrt{2x+12}+2\sqrt{6-x}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{3x+6}{\sqrt{3x^2+13}+5} + \frac{6}{\sqrt{2x+12}+2\sqrt{6-x}} = 0(vn) \end{cases}.$$

$$\text{Với } x=2 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm } \begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Câu 6. [HSG-QUẢNG NINH-B 2021-2022] Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab \geq 1, c(a+b+c) \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{b+2c}{1+a} + \frac{a+2c}{1+b} + \frac{3(a+b+2c)}{2}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } P+2 = \left(\frac{b+2c}{1+a} + 1 \right) + \left(\frac{a+2c}{1+b} + 1 \right) + \frac{3}{2}(a+b+2c)$$

$$= \frac{a+b+2c+1}{a+1} + \frac{a+b+2c+1}{b+1} + \frac{3}{2}(a+b+2c)$$

$$= (a+b+2c+1) \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \right) + \frac{3}{2}(a+b+2c).$$

$$\text{Ta lại có: } \left(\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} \right) + \left(\frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{ab} - a}{(1+a)(1+\sqrt{ab})} + \frac{\sqrt{ab} - b}{(1+b)(1+\sqrt{ab})} \\
&= \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{1+\sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{a}}{1+a} - \frac{\sqrt{b}}{1+b} \right) \\
&= \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{1+\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(1+a)(1+b)} \\
&= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 (\sqrt{ab} - 1)}{(1+\sqrt{ab})(1+a)(1+b)} \geq 0, (do\ a, b > 0; ab \geq 1) \\
&\Rightarrow \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{1+\frac{ab+1}{2}} = \frac{4}{ab+3} \geq \frac{4}{ab+c(a+b+c)} = \frac{4}{(a+c)(b+c)} \\
&\geq \frac{4}{\left(\frac{a+c+b+c}{2}\right)^2} = \frac{16}{(a+b+2c)^2}.
\end{aligned}$$

Suy ra: $P+2 \geq \frac{16(a+b+2c+1)}{(a+b+2c)^2} + \frac{3}{2}(a+b+2c).$

Đặt $t = a+b+2c$ ($t > 0$).

Do $ab \geq 1, c(a+b+c) \geq 3 \Rightarrow ab+c(a+b+c) \geq 4$

$\Leftrightarrow (a+c)(b+c) \geq 4$

$\Rightarrow 4 \leq (a+c)(b+c) \leq \left(\frac{a+c+b+c}{2}\right)^2 = \frac{t^2}{4} \Rightarrow t \geq 4.$

Khi đó: $P \geq \frac{16(t+1)}{t^2} + \frac{3}{2}t - 2 = \left(\frac{16}{t} + t\right) + \left(\frac{16}{t^2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{4}\right) - 2$

$\geq 2\sqrt{\frac{16}{t}} \cdot t + 3\sqrt{\frac{16}{t^2} \cdot \frac{t}{4} \cdot \frac{t}{4}} - 2 = 9.$

Vậy: $\min P = 9$ khi $a = b = c = 1.$

HẾT