

KÊNH PPT – TIVI – 2020
MỘT SỐ THỦ THUẬT TÍNH TÍCH PHÂN
TRONG ĐỀ MH-BGD NĂM 2020 VÀ CÁC ĐỀ PHÁT TRIỂN

Tổng hợp: Thủy Đình Ngọc



I. CÁC PP HAY SỬ DỤNG

- PP tự luận
- PP Casio
- PP chọn hàm đại diện....

II. BÀI TẬP

ĐỀ MINH HỌA CỦA BỘ GIÁO DỤC NĂM 2020.

- Câu 1. [CÂU 48-MH-BGD-L1]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-1}^0 f(x)dx$?
- A. $\frac{-17}{20}$. B. $\frac{-13}{4}$. C. $\frac{17}{4}$. D. -1 .
- Câu 2. [CÂU 7-MH-BGD-L1]** Nếu $\int_1^2 f(x)dx = -2$ và $\int_2^3 f(x)dx = 1$ thì $\int_1^3 f(x)dx$ bằng
- A. -3 . B. -1 . C. 1 . D. 3 .
- Câu 3. [CÂU 18-MH-BGD-L2]** Nếu $\int_0^1 f(x)dx = 4$ thì $\int_0^1 2f(x)dx$ bằng
- A. 16 . B. 4 . C. 2 . D. 8 .
- Câu 4. [CÂU 45-MH-BGD-L2]** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \cos x \cos^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\pi} f(x)dx$ bằng
- A. $\frac{1041}{225}$. B. $\frac{208}{225}$. C. $\frac{242}{225}$. D. $\frac{149}{225}$.

ĐỀ PHÁT TRIỂN

- Câu 5. [TRẦN BÌNH TRỌNG-KHÁNH HÒA-2020]** Cho hàm số $f(x)$ có $f(3) = \frac{9}{2}$ và $f'(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 + x + \sqrt{x+1}}, \forall x > -1$. Tính $I = \int_0^3 f(x)dx$.
- A. $I = -\frac{29}{6}$ B. $I = -\frac{101}{6}$ C. $I = \frac{43}{6}$ D. $I = \frac{52}{6}$.
- Câu 6.** Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(\ln 3) = 4$ và $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}}, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_{\ln 3}^{\ln 8} e^x f(x)dx$ bằng:
- A. 2 B. $\frac{38}{3}$ C. $\frac{76}{3}$ D. $\frac{136}{3}$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = -1$ và $xf(1-x^3) + f'(x) = x^7 + x - 2, x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{-5}{9}$. C. $\frac{5}{9}$. D. $\frac{-2}{3}$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $4xf(x^2) + 6f(2x) = \frac{3}{5}x^3 + 4$. Giá trị

$$\int_0^4 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{52}{25}$. B. 52. C. $\frac{48}{25}$. D. 48.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(3x) + x.f(x^2 + 2) = 5x^5 + 18x^3 + 45x^2 + 11x + 1, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó } \int_{-3}^3 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. 96. B. 64. C. 192. D. 32.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và $(f'(x))^2 + 4(6x^2 - 1)f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4, \forall x \in [0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{23}{15}$. B. $\frac{17}{15}$. C. $\frac{13}{15}$. D. $-\frac{7}{15}$.

Câu 11. [SỞ HÀ NỘI LẦN 1 – CÂU 31 - 2020] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 3$ và $f(1) = 4$. Tích phân $\int_0^1 xf'(x) dx$ có giá trị là

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. -1.

Câu 12. [LAM SƠN – THANH HÓA – CÂU 40 - 2020] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 7, \int_2^{10} f(x) dx = 1$. Tính $P = \int_0^1 f(2x) dx$.

- A. $P = 6$. B. $P = -6$. C. $P = 3$. D. $P = 12$.

Câu 13. [CHUYÊN SP HÀ NỘI – CÂU 40 - 2020] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập số thực thỏa mãn $f(x) + (5x - 2).f(5x^2 - 4x) = 50x^3 - 60x^2 + 23x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Giá trị của biểu thức } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 6.

Câu 14. [CHUYÊN BIÊN HÒA – HÀ NAM – CÂU 42- 2020] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{-5}^1 f(x) dx = 9$. Tính tích phân $\int_0^2 [f(1-3x) + 9] dx$.

- A. 15. B. 27. C. 75. D. 21.

- Câu 23.** Cho hàm số liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ và thỏa điều kiện $\int_0^1 (3x+1)f'(x)dx = 2019$ và $4f(1) - f(0) = 2020$. Tính $\int_0^{\frac{1}{3}} f(3x)dx$.
- A. $\frac{1}{9}$. B. 3. C. $\frac{1}{3}$. D. 1.
- Câu 24.** Cho $\int_0^4 f(x)dx = 16$. Tính $I = \int_0^2 f(2x)dx$.
- A. $I = 32$. B. $I = 8$. C. $I = 16$. D. $I = 4$.
- Câu 25.** Cho $\int_4^9 f(x)dx = 10$. Tính tích phân $J = \int_0^1 f(5x+4)dx$.
- A. $J = 2$. B. $J = 10$. C. $J = 50$. D. $J = 4$.
- Câu 26.** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$ thỏa mãn $\int_0^2 f(x)dx = 6$. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x)\cos x dx$.
- A. 3. B. -3. C. 6. D. -6.
- Câu 27.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.
- A. $I = -12$. B. $I = 8$. C. $I = 1$. D. $I = -8$.
- Câu 28.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và thỏa mãn $\int_0^1 (2x+1)f'(x)dx = 10$, $3f(1) - f(0) = 12$. Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$.
- A. $I = 1$. B. $I = -2$. C. $I = 2$. D. $I = -1$.
- Câu 29.** Biết rằng $\int_1^2 \frac{8x+5}{6x^2+7x+2} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a,b,c là các số thực. Tính $P = a^2 + b^2 + 3c$
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 30.** Biết $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}} dx = \frac{a\sqrt{2}+4}{b}$; $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A. $a+b=7$. B. $a-b=-7$. C. $a+b=15$. D. $a-b=9$.
- Câu 31.** [CHUYÊN NGUYỄN TRÃI – HẢI DƯƠNG - CÂU 37 - 2020]
- Cho $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính $S = a^2 + b^2 + c^2$.
- A. $S = 5$. B. $S = 3$. C. $S = 4$. D. $S = 6$.
- Câu 32.** Cho $I = \int_1^e x \ln x dx = \frac{a.e^2+b}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a + b + c$.
- A. 5. B. 3. C. 4. D. 6.

Câu 33. Biết $\int_0^2 2x \ln(x+1) dx = a \cdot \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $6a + 7b$.

- A. 33. B. 25. C. 42. D. 39.

Câu 34. Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2 + 3x + 2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào đúng?

- A. $a + 2b = 0$. B. $a - 2b = 0$. C. $a + b = -2$. D. $a + b = 2$.

Câu 35. Cho biết $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x + 3}}{x} dx = \frac{a}{3} + b\sqrt{3}$, với a, b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $\frac{1}{2^b} + \log_2 a$ bằng

- A. -1. B. $\frac{7}{2}$. C. 8. D. 6.

Câu 36. Biết $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2 + x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của $T = a + b + c$.

- A. $T = 2$. B. $T = 3$. C. $T = -1$. D. $T = 5$.

Câu 37. Biết $\int_0^2 2x \ln(1+x) dx = a \cdot \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $3a + 4b$.

- A. 42. B. 21. C. 12. D. 32.

Câu 38. Cho $\int_1^3 \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx = \frac{a}{b} \cdot \ln 3 - c \cdot \ln 2$ với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của $a + b + c$ bằng

- A. 8. B. 7. C. 6. D. 9.

Câu 39. Biết $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1 + \sqrt{e^x + 3}} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $T = a + b + c$.

- A. $T = -1$. B. $T = 0$. C. $T = 2$. D. $T = 1$.

Câu 40. Cho biết $\int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{a\sqrt{2} - 1}{b}$ với a, b là các số tự nhiên. Giá trị của $a^2 - b^2$ bằng

- A. -5. B. 5. C. 2. D. 7.

-----Hết-----

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.B	3.D	4.C	5.C	6.C	7.D	8.A	9.A	10.D
11.C	12.C	13.A	14.D	15.A	16.A	17.C	18.B	19.A	20.A
21.C	22.C	23.A	24.B	25.A	26.A	27.D	28.A	29.D	30.A
31.D	32.D	33.D	34.A	35.C	36.A	37.B	38.A	39.B	40.A

HƯỚNG DẪN PHÂN ĐỀ MINH HỌA CỦA BỘ GIÁO DỤC NĂM 2020.

Câu 1. [CÂU 48-MH-BGD-L1] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó } \int_{-1}^0 f(x) dx ?$$

A. $\frac{-17}{20}.$

B. $\frac{-13}{4}.$

C. $\frac{17}{4}.$

D. $-1.$

Lời giải

Chọn B

Cách 1: PP tự luận

$$\text{Ta có } xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x \Rightarrow x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) = -x^{11} + x^7 - 2x^2.$$

Lấy tích phân hai vế cận từ 0 đến 1 ta được:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 f(x^3) dx + \int_0^1 xf(1-x^2) dx &= \int_0^1 (-x^{11} + x^7 - 2x^2) dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 f(x^3) d(x^3) - \frac{1}{2} \int_0^1 f(1-x^2) d(1-x^2) &= -\frac{5}{8} \Rightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2} \int_1^0 f(t) dt = -\frac{5}{8} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt &= -\frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{5}{6} \int_0^1 f(t) dt = -\frac{5}{8} \Leftrightarrow \int_0^1 f(t) dt = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(x) dx = -\frac{3}{4}.$$

Lấy tích phân hai vế cận từ -1 đến 0 ta được:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 x^2 f(x^3) dx + \int_{-1}^0 xf(1-x^2) dx &= \int_{-1}^0 (-x^{11} + x^7 - 2x^2) dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(x^3) d(x^3) - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 f(1-x^2) d(1-x^2) &= -\frac{17}{24} \\ \Rightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt &= -\frac{17}{24} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = -\frac{17}{24} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(t) dt &= -\frac{17}{24} + \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt \\ \Rightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(x) dx &= -\frac{17}{24} + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = -\frac{17}{24} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{13}{12} \Rightarrow \int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{13}{4}. \end{aligned}$$

Cách 2: PP chọn hàm đại diện:

Từ đẳng thức $xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra chọn đặt hàm số $f(x)$ là hàm số bậc 3 dạng $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$$\text{Ta có } f(x^3) = ax^9 + bx^6 + cx^3 + d \Rightarrow xf(x^3) = ax^{10} + bx^7 + cx^4 + dx$$

$$f(1-x^2) = -ax^6 + (3a+b)x^4 - (3a+2b+c)x^2 + a+b+c+d$$

$$\Rightarrow f(x^3) + f(1-x^2) = ax^{10} + bx^7 - ax^6 + (3a+b+c)x^4 - (3a+2b+c)x^2 + dx + a+b+c+d$$

$$\text{Đồng nhất thức ta được } \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 3 \\ d = -2 \end{cases}. \text{ Suy ra } f(x) = -x^3 + 3x - 2$$

$$\text{Vậy } \int_{-1}^0 f(x)dx = \int_{-1}^0 (-x^3 + 3x - 2)dx = -\frac{13}{4}.$$

Câu 2. [CÂU 7-MH-BGD-L1] Nếu $\int_1^2 f(x)dx = -2$ và $\int_2^3 f(x)dx = 1$ thì $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

A. -3.

B. -1.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: PP tự luận

Áp dụng tính chất $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, a < c < b$

$$\text{Ta có } \int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = -2 + 1 = -1.$$

Cách 1: PP chọn hàm đại diện

Gợi ý: Do cho hai điều kiện nên chọn hàm có hai hệ số chưa biết dạng $f(x) = ax + b$, cách này dài hơn tự luận.

Câu 3. [CÂU 18-MH-BGD-L2] Nếu $\int_0^1 f(x)dx = 4$ thì $\int_0^1 2f(x)dx$ bằng

A. 16.

B. 4.

C. 2.

D. 8.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: PP tự luận

$$\text{Ta có } \int_0^1 2f(x)dx = 2 \int_0^1 f(x)dx = 2.4 = 8.$$

Cách 1: PP chọn hàm đại diện

Gợi ý: Do giả thiết cho một điều kiện nên chọn hàm có dạng $f(x) = a$, cách này dài hơn tự luận.

Câu 4. [CÂU 45-MH-BGD-L2] Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x \cos^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi

đó $\int_0^{\pi} f(x) dx$ bằng

A. $\frac{1041}{225}$.

B. $\frac{208}{225}$.

C. $\frac{242}{225}$.

D. $\frac{149}{225}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: PP tự luận áp dụng tính chất $f(x) = \int f'(x) dx$

$$\text{Ta có } f'(x) = \cos x \cos^2 2x = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 3x}{4} + \frac{\cos 5x}{4}$$

$$\text{Do đó } f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(\frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 3x}{4} + \frac{\cos 5x}{4} \right) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 3x}{12} + \frac{\sin 5x}{20} + C, \text{ vì } f(0) = 0 \text{ nên } C = 0$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{242}{225}$$

Cách 2: PP chọn hằng số C

$$\text{Để tính } \int_0^{\pi} f(x) dx \text{ ta đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x + C \end{cases}$$

Khi đó

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = (x+C)f(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (x+C)f'(x) dx = f(\pi)(\pi+C) - f(0) \cdot C - \int_0^{\pi} (x+C)f'(x) dx$$

Chọn $C = -\pi$

$$\text{Suy ra } \int_0^{\pi} f(x) dx = - \int_0^{\pi} (x-\pi)f'(x) dx = \int_0^{\pi} (\pi-x)\cos x \cos^2 2x dx = \frac{242}{225}$$

Bài toán tổng quát cho Câu 4

Cho hàm số $f(x)$ có biết $f(a)$ và $f'(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (b-x)g(x) dx + [(b-a)f(a)]$ (1*) - công thức tính nhanh.

Chứng minh bằng PP chọn hằng số C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x + C \end{cases}$$

Khi đó

$$\int_a^b f(x) dx = (x+C)f(x) \Big|_a^b - \int_a^b (x+C)f'(x) dx = (b+C)f(b) - (a+C)f(a) - \int_0^\pi (x+C)f'(x) dx$$

Chọn $C = -b$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_0^\pi (b-x)f'(x) dx + [(b-a)f(a)]$$

Áp dụng công thức tính nhanh (1*) cho câu 4

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (b-x)g(x) dx + (b-a)f(a) = \int_0^\pi (\pi-x)\cos x \cdot \cos^2 2x dx + (\pi-0)0 = \frac{242}{255}$$

HƯỚNG DẪN PHẦN ĐỀ PHÁT TRIỂN

Câu 5. [TRẦN BÌNH TRỌNG–KHÁNH HÒA-2020] Cho hàm số $f(x)$ có $f(3) = \frac{9}{2}$ và

$$f'(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 + x + \sqrt{x+1}}, \forall x > -1. \text{ Tính } I = \int_0^3 f(x) dx.$$

A. $I = -\frac{29}{6}$

B. $I = -\frac{101}{6}$

C. $I = \frac{43}{6}$

D. $I = \frac{52}{6}$

Lời giải

Chọn C

Cách 1: PP tự luận (chọn hằng số C)

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x + C \end{cases}$$

Khi đó:

$$\int_0^3 f(x) dx = f(x) \cdot (x+C) \Big|_0^3 - \int_0^3 (x+C)f'(x) dx = f(3)(3+C) - f(0) \cdot C - \int_0^3 (x+C)f'(x) dx$$

Chọn $C = 0$

$$\text{Suy ra } I = \frac{9}{2} \cdot 3 - \int_0^3 x \cdot \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 + x + \sqrt{x+1}} dx = \frac{43}{6}.$$

Cách 2: PP tính nhanh

Cho hàm số $f(x)$ có biết $f(a)$ và $f'(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (b-x)g(x) dx + [(b-a)f(a)]$ (1*) - công thức tính nhanh.

Áp dụng công thức (1*) ta có

(Chú ý gt cho $f(a) = f(3) = \frac{9}{2}$ vậy ta cần đổi cận trên thành cận dưới).

Lời giải

Chọn C.

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8} e^x f(x) dx = \int_{\ln 3}^{\ln 8} e^x 2\sqrt{e^x + 1} dx = \frac{76}{3}$$

Chọn $C = -8$ suy ra $\int_{\ln 3}^{\ln 8} e^x f(x) dx = -4.(3-8) - \int_{\ln 3}^{\ln 8} (e^x - 8) \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} = \frac{76}{3}.$

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{-5}{9}$. **C.** $\frac{5}{9}$. **D.** $\frac{-2}{3}$

Lời giải

Chọn D

Cách 1: PP tự luận:

$$\text{Từ } xf(1-x^3) + f'(x) = x^7 + x - 2, x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 f(1-x^3) + xf'(x) = x^8 + x^2 - 2x, x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 f(1-x^3) dx + \int_0^1 xf'(x) dx = \int_0^1 (x^8 + x^2 - 2x) dx$$

$$\text{Đặt } t = 1 - x^3 \Rightarrow dt = -3x^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 f(1-x^3) dx = -\frac{1}{3} \int_1^0 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx$$

$$\text{Vậy ta có } \int_0^1 x^2 f(1-x^3) dx + \int_0^1 xf'(x) dx = \int_0^1 (x^8 + x^2 - 2x) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 xf'(x) dx = \frac{-5}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx + \left(xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx \right) = \frac{-5}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{3} \int_0^1 f(x) dx = -\frac{5}{9} - (f(1) - 0 \cdot f(0)) = -\frac{5}{9} - (-1) - 0 \cdot f(0) = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{-2}{3}$$

Cách 2: PP chọn hàm đại diện

Từ đẳng thức $xf(1-x^3) + f'(x) = x^7 + x - 2, x \in \mathbb{R}$ suy ra chọn đặt hàm số $f(x)$ là hàm số bậc 2 dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } xf(1-x^3) + f'(x) = x^7 + x - 2$$

$$\Rightarrow x \left[a(1-x^3)^2 + b(1-x^3) + c \right] + 2ax + b = x^7 + x - 2 \Rightarrow a = 1; b = -2; c = 0.$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 2x \text{ thỏa mãn } f(1) = -1.$$

$$\text{Từ đó ta có } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 2x) dx = \frac{-2}{3}.$$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $4xf(x^2) + 6f(2x) = \frac{3}{5}x^3 + 4$. Giá trị

$$\int_0^4 f(x) dx \text{ bằng}$$

~~A.~~ $\frac{52}{25}$.

B. 52.

C. $\frac{48}{25}$.

D. 48.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: PP tự luận

$$\begin{aligned}
4xf'(x^2) + 6f(2x) &= \frac{3}{5}x^3 + 4 \Rightarrow \int_0^2 [4xf'(x^2) + 6f(2x)] dx = \int_0^2 \left[\frac{3}{5}x^3 + 4 \right] dx \\
&\Rightarrow 2 \int_0^2 f(x^2) d(x^2) + 3 \int_0^2 f(2x) d(2x) = \frac{52}{5} \Rightarrow 2 \int_0^4 f(t) dt + 3 \int_0^4 f(u) du = \frac{52}{5} \\
&\Rightarrow 2 \int_0^4 f(x) dx + 3 \int_0^4 f(x) dx = \frac{52}{5} \Rightarrow 5 \int_0^4 f(x) dx = \frac{52}{5} \Rightarrow \int_0^4 f(x) dx = \frac{52}{25}
\end{aligned}$$

Cách 2: PP khác (xin đề nghị Quý độc giả đề xuất).

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(3x) + x.f(x^2 + 2) = 5x^5 + 18x^3 + 45x^2 + 11x + 1, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó } \int_{-3}^3 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. 96.

B. 64.

C. 192.

D. 32.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: PP tự luận

$$\text{Ta có : } f(3x) + x.f(x^2 + 2) = 5x^5 + 18x^3 + 45x^2 + 11x + 1 \quad (1).$$

$$\text{Thay } x \text{ bởi } -x \text{ vào (1) ta có : } f(-3x) - x.f(x^2 + 2) = -5x^5 - 18x^3 - 45x^2 - 11x + 1 \quad (2).$$

Cộng (1) và (2) vế với vế ta được:

$$f(3x) + f(-3x) = 90x^2 + 2 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(3x) dx + \int_{-1}^1 f(-3x) dx = 64.$$

$$\text{Xét } \int_{-1}^1 f(3x) dx. \text{ Đặt } t = 3x \Rightarrow dt = 3dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x = -1 \Rightarrow t = -3; x = 1 \Rightarrow t = 3.$$

$$\text{Khi đó } \int_{-1}^1 f(3x) dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx.$$

$$\text{Tương tự ta có } \int_{-1}^1 f(-3x) dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx.$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx + \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx = 64 \Leftrightarrow \int_{-3}^3 f(x) dx = 96.$$

Cách 2: PP khác (xin đề nghị Quý độc giả đề xuất).

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và

$$(f'(x))^2 + 4(6x^2 - 1)f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4, \forall x \in [0;1]. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{23}{15}$.

B. $-\frac{17}{15}$.

C. $\frac{13}{15}$.

D. $-\frac{7}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: PP tự luậnLấy tích phân hai vế đẳng thức trên đoạn $[0;1]$ ta có:

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx + 4 \int_0^1 (6x^2 - 1)f(x) dx = \int_0^1 (40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4) dx = \frac{376}{105}.$$

Theo công thức tích phân từng phần có:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (6x^2 - 1)f(x) dx &= \int_0^1 f(x) d(2x^3 - x) = (2x^3 - x)f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (2x^3 - x)f'(x) dx \\ \Leftrightarrow \int_0^1 (6x^2 - 1)f(x) dx &= 1 - \int_0^1 (2x^3 - x)f'(x) dx. \end{aligned}$$

Thay lại đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f'(x))^2 dx + 4 \left(1 - \int_0^1 (2x^3 - x)f'(x) dx \right) &= \frac{376}{105} \\ \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx - 4 \int_0^1 (2x^3 - x)f'(x) dx + \frac{44}{105} &= 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) - 2(2x^3 - x))^2 dx = 0 \\ \Leftrightarrow f'(x) &= 2(2x^3 - x), \forall x \in [0;1] \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + C. \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } f(1) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^4 - x^2 + 1) dx = \frac{13}{15}.$$

Cách 2: PP chọn hàm đại diện

Từ đẳng thức $(f'(x))^2 + 4(6x^2 - 1)f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4, \forall x \in [0;1]$ suy ra chọn đặt hàm số $f(x)$ là hàm số bậc 4 trùng phương dạng $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Khi đó ta có $(4ax^3 + 2bx)^2 + 4(6x^2 - 1)(ax^4 + bx^2 + c) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4, \forall x \in [0;1]$

$$\text{Đồng nhất hai vế ta có } \begin{cases} 40a = 40 \\ 16ab + 24b - 4a = -44 \\ 4b^2 + 24c - 4b = 32 \\ -4c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } f(x) = x^4 - x^2 + 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^4 - x^2 + 1) dx = \frac{13}{15}$$

Câu 11. [SỞ HÀ NỘI LẦN 1 – CÂU 31 - 2020] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$,

thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 3$ và $f(1) = 4$. Tích phân $\int_0^1 xf'(x) dx$ có giá trị là

A. $-\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. -1 .

Lời giải

Chọn C

Cách 1: PP tự luận:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) + C \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 xf'(x) dx = [f(x) + C]x \Big|_0^1 - \int_0^1 (f(x) + C) dx$$

$$I = [f(1) + C] - \int_0^1 f(x) dx - C \int_0^1 dx = 4 + C - 3 - C = 1$$

Cách 2: PP chọn hàm đại diện

Ta có hàm số $f(x)$ có hai giả thiết $\int_0^1 f(x) dx = 3$ và $f(1) = 4$ nên dự kiến chọn đặt hàm số là

$$y = f(x) = ax + b \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 3 \Rightarrow \int_0^1 (ax + b) dx = 3 \Rightarrow \left(\frac{ax^2}{2} + bx \right) \Big|_0^1 = 3 \Rightarrow \frac{a}{2} + b = 3(1).$$

$$f(1) = 4 \Rightarrow a + b = 4(2). \text{ Từ (1), (2) suy ra: } \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow y = f(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 2.$$

$$\int_0^1 xf'(x) dx = \int_0^1 2x dx = 1.$$

Câu 12. [LAM SƠN – THANH HÓA – CÂU 40 - 2020] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$

thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 7$, $\int_2^{10} f(x) dx = 1$. Tính $P = \int_0^1 f(2x) dx$.

A. $P = 6$.

B. $P = -6$.

C. $P = 3$.

D. $P = 12$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: PP tự luận:

$$\text{Ta có } \int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0) = -[F(10) - F(2)] + [F(10) - F(0)]$$

$$= -\int_2^{10} f(x) dx + \int_0^{10} f(x) dx = -1 + 7 = 6.$$

Đổi biến: $x = 2t$, $dx = 2dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 2 \Rightarrow t = 1$.

Khi đó $6 = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 2f(2t) dt \Rightarrow \int_0^1 f(2t) dt = 3$, hay $\int_0^1 f(2x) dx = 3$.

Cách 2: PP chọn hàm đại diện

Giả thiết cho hai điều kiện $\int_0^{10} f(x) dx = 7$, $\int_2^{10} f(x) dx = 1$ nên chọn đặt $f(x) = ax + b$.

Khi đó $\int_0^{10} f(x) dx = \int_0^{10} (ax + b) dx = 50a + 10b = 7$

và $\int_2^{10} f(x) dx = \int_2^{10} (ax + b) dx = 48a + 8b = 1$.

Suy ra hệ $\begin{cases} 50a + 10b = 7 \\ 48a + 8b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-23}{40} \\ b = \frac{143}{40} \end{cases}$. Do đó $f(x) = \frac{-23}{40}x + \frac{143}{40}$.

$P = \int_0^1 f(2x) dx = \int_0^1 \left(\frac{-23}{20}x + \frac{143}{40} \right) dx = 3$.

Câu 13. [CHUYÊN SP HÀ NỘI – CÂU 40 - 2020] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập số thực thỏa mãn $f(x) + (5x - 2) \cdot f(5x^2 - 4x) = 50x^3 - 60x^2 + 23x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Giá trị của biểu thức $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: PP tự luận:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (50x^3 - 60x^2 + 23x - 1) dx - \int_0^1 (5x - 2) f(5x^2 - 4x) dx = 3 - \int_0^1 (5x - 2) f(5x^2 - 4x) dx \quad (1)$$

Xét tích phân $\int_0^1 (5x - 2) f(5x^2 - 4x) dx$:

Đặt $t = 5x^2 - 4x$ thì $dt = (5.2x - 4) dx = 2(5x - 2) dx$

Khi $x = 1$ thì $t = 1$; Khi $x = 0$ thì $t = 0$

Suy ra: $\int_0^1 (5x - 2) f(5x^2 - 4x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx$

Thay vào (1) ta được: $\int_0^1 f(x) dx = 3 - \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow \frac{3}{2} \int_0^1 f(x) dx = 3 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 2$

Cách 2: PP chọn hàm đại diện

Từ công thức $f(x) + (5x - 2) \cdot f(5x^2 - 4x) = 50x^3 - 60x^2 + 23x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ta dự đoán hàm số là bậc nhất dạng $f(x) = ax + b$, thay vào điều kiện ta được

$$ax + b + (5x - 2)[a(5x^2 - 4x) + b] \equiv 50x^3 - 60x^2 + 23x - 1$$

$$\Leftrightarrow ax + b + (5x - 2)(5ax^2 - 4ax + b) \equiv 50x^3 - 60x^2 + 23x - 1$$

$$\Leftrightarrow 25ax^3 - 30ax^2 + (9a + 5b)x - b \equiv 50x^3 - 60x^2 + 23x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25a = 50 \\ 30a = 60 \\ -(9a + 5b) = -23 \\ -b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Do vậy } f(x) = 2x + 1 \text{ suy ra } \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (2x + 1)dx = 2.$$

Câu 14. [CHUYÊN BIÊN HÒA – HÀ NAM – CÂU 42- 2020] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và

$$\text{thỏa mãn } \int_{-5}^1 f(x)dx = 9. \text{ Tính tích phân } \int_0^2 [f(1-3x) + 9]dx.$$

A. 15.

B. 27.

C. 75.

D. 21.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: PP tự luận:

$$\text{Đặt } t = 1 - 3x \Rightarrow dt = -3dx.$$

$$\text{Với } x = 0 \rightarrow t = 1 \text{ và } x = 2 \rightarrow t = -5.$$

$$\text{Ta có } \int_0^2 [f(1-3x) + 9]dx = \int_0^2 f(1-3x)dx + \int_0^2 9dx$$

$$= \int_1^{-5} [f(t)] \frac{dt}{-3} + 9x \Big|_0^2 = \frac{1}{3} \int_{-5}^1 [f(x)]dx + 18 = \frac{1}{3} \cdot 9 + 18 = 21.$$

Cách 2: PP chọn hàm đại diện

$$\text{Giả thiết cho một điều kiện } \int_{-5}^1 f(x)dx = 9 \text{ nên dự kiến chọn hàm dạng } f(x) = ax.$$

$$\text{Khi đó } \int_{-5}^1 f(x)dx = \int_{-5}^1 axdx = -12a = 9 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}. \text{ Do đó } f(x) = -\frac{3}{4}x.$$

$$\text{Vậy } \int_0^2 [f(1-3x) + 9]dx = \int_0^2 \left[-\frac{3}{4}(1-3x) + 9\right]dx = \int_0^2 \left[\frac{9}{4}x + \frac{33}{4}\right]dx = 21.$$

Câu 15. [CHUYÊN THÁI BÌNH – CÂU 37 - 2020] Biết $\int_0^1 f(x)dx = -1$ và $\int_1^2 f(2x-1)dx = 3$. Tính

$$\int_0^3 f(x)dx.$$

A. 5.

B. 2.

C. 7.

D. -4.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: PP tự luận:

Ta đặt : $t = 2x - 1 \Rightarrow dt = 2dx$.

$$\int_1^2 f(2x-1)dx = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t)dt = 3 \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = 6$$

$$\text{Mà } \int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = -1 + 6 = 5.$$

Cách 2: PP chọn hàm đại diện

Đặt $f(x) = ax + b$.

$$\text{Khi đó } \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ax + b)dx = \frac{a}{2} + b = -1$$

$$\text{và } \int_1^2 f(2x-1)dx = \int_1^2 [a(2x-1) + b]dx = \int_1^2 [2ax - a + b]dx = 2a + b = 3.$$

$$\text{Suy ra hệ } \begin{cases} \frac{a}{2} + b = -1 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{3} \\ b = -\frac{7}{3} \end{cases}. \text{ Do đó } f(x) = \frac{8}{3}x - \frac{7}{3}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \left(\frac{8}{3}x - \frac{7}{3} \right) dx = 5.$$

Câu 16. [CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH – CÂU 40 – 2020]

Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(1) = -\frac{1}{18}$, $\int_0^1 xf'(x)dx = \frac{1}{36}$. Giá

trị của $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $-\frac{1}{12}$.

B. $\frac{1}{36}$.

C. $\frac{1}{12}$.

D. $-\frac{1}{36}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: PP tự luận:

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \int_0^1 xf'(x)dx = x.f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = f(1) - \int_0^1 f(x)dx.$$

Theo giả thiết: $\int_0^1 xf'(x)dx = \frac{1}{36}, f(1) = -\frac{1}{18}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{18} - \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{36} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = -\frac{1}{18} - \frac{1}{36} = -\frac{1}{12}.$$

Cách 2: PP chọn hàm đại diện

Đặt $f(x) = ax + b$.

Khi đó $f(1) = a + b = -\frac{1}{18}$ và $\int_0^1 xf'(x)dx = \int_0^1 axdx = a \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{a}{2} = \frac{1}{36} \Rightarrow a = \frac{1}{18}$.

Suy ra hệ $\begin{cases} a + b = -\frac{1}{18} \\ a = \frac{1}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{18} \\ b = -\frac{1}{9} \end{cases}$. Do đó $f(x) = \frac{1}{18}x - \frac{1}{9}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{18}x - \frac{1}{9} \right) dx = -\frac{1}{12}$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + 2f(1-x) = 3x^2 - 6x, \forall x \in [0;1]. \text{ Tính } I = \int_0^1 f(1-x^2)dx$$

A. $I = \frac{4}{15}$.

B. $I = 1$.

C. $I = -\frac{2}{15}$.

D. $I = \frac{2}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Bài toán: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;c]$ thỏa mãn điều kiện

$$mf(x) + nf(c-x) = g(x), \forall x \in [0;c]; m \neq \pm n \text{ và } m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = \frac{mg(x) - ng(c-x)}{m^2 - n^2}.$$

Chứng minh

Đặt $t = c - x \Leftrightarrow x = c - t$. Do $x \in [0;c]$ nên $t \in [0;c]$.

Thay $x = c - t$ vào $mf(x) + nf(c-x) = g(x), \forall x \in [0;c]$ (1*)

ta có $mf(c-t) + nf(t) = g(c-t)$ (2*) thay tiếp $t = x$ vào (2*) ta có

$$nf(x) + mf(c-x) = g(c-x) \quad (3*)$$

Từ (1*) và (2*) ta có hệ

$$\begin{cases} mf(x) + nf(c-x) = g(x) \\ nf(x) + mf(c-x) = g(c-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 f(x) + nmf(c-x) = mg(x) \quad (4*) \\ n^2 f(x) + nmf(c-x) = ng(c-x) \quad (5*) \end{cases}$$

Trừ tương ứng từng vế của (4*) và (5*) ta có $m^2 f(x) - n^2 f(x) = mg(x) - ng(c-x)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{mg(x) - ng(c-x)}{m^2 - n^2} \text{ (công thức tính nhanh).}$$

Cách 1: PP tính nhanh

$$f(x) + 2f(1-x) = 3x^2 - 6x, \forall x \in [0;1]$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(3x^2 - 6x) - 2[3(1-x)^2 - 6(1-x)]}{1^2 - 2^2} = \frac{-3x^2 - 6x + 6}{-3} = x^2 + 2x - 2$$

$$\text{Khi đó } f(1-x^2) = (1-x^2)^2 + 2(1-x^2) - 2 = x^4 - 4x^2 + 1$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^1 f(1-x^2) dx = \int_0^1 (x^4 - 4x^2 + 1) dx = -\frac{2}{15}.$$

Cách 2: PP chọn hàm đại diện

$$\text{Từ } f(x) + 2f(1-x) = 3x^2 - 6x, \forall x \in [0;1]$$

Ta dự kiến chọn hàm đại diện là $f(x) = ax^2 + bx + c$ thì ta có

$$f(x) + 2f(1-x) = ax^2 + bx + c + 2[a(1-x)^2 + b(1-x) + c] = 3ax^2 + (-4a-b)x + 2a + 2b + 3c.$$

Đồng nhất thức hệ số ta có

$$\begin{cases} 3a = 3 \\ -4a - b = -6 \\ 2a + 2b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -2 \end{cases}. \text{ Suy ra } f(x) = x^2 + 2x - 2.$$

$$\text{Đó đó } I = \int_0^1 f(1-x^2) dx = \int_0^1 [(1-x^2)^2 + 2(1-x^2) - 2] dx = -\frac{2}{15}.$$

Cách 3: Tự luận

$$\text{Đặt } t = 1-x, \forall x \in [0;1] \Rightarrow t \in [0;1].$$

$$\text{Ta có } f(x) + 2f(1-x) = 3x^2 - 6x \Leftrightarrow f(x) + 2f(1-x) = 3(1-x)^2 - 3$$

$$\Rightarrow f(1-t) + 2f(t) = 3t^2 - 3 \Leftrightarrow 2f(x) + f(1-x) = 3x^2 - 3$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) + 2f(1-x) = 3x^2 - 6x \\ 2f(x) + f(1-x) = 3x^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 2f(1-x) = 3x^2 - 6x \\ 4f(x) + 2f(1-x) = 6x^2 - 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3f(x) = 3x^2 + 6x - 6 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3x^2 + 6x - 6}{3} = x^2 + 2x - 2$$

$$\text{Khi đó } f(1-x^2) = (1-x^2)^2 + 2(1-x^2) - 2 = x^4 - 4x^2 + 1$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^1 f(1-x^2) dx = \int_0^1 (x^4 - 4x^2 + 1) dx = -\frac{2}{15}.$$

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) = 3$ và

$$f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2; \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tích phân } \int_0^2 xf'(x) dx \text{ bằng}$$

A. $-\frac{4}{3}$.

B. $-\frac{10}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Tự luận

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có: $\int_0^2 xf'(x)dx = xf(x)|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx$.

$$\text{Từ } f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2; \forall x \in \mathbb{R} \quad (1^*)$$

Thay $x = 0$ vào (1^*) ta được $f(0) + f(2) = 2 \Rightarrow f(2) = 2 - f(0) = 2 - 3 \Rightarrow f(2) = -1$.

$$\text{Xét } I = \int_0^2 f(x)dx. \text{ Đặt } t = 1 - x \Rightarrow x = 1 - t \Rightarrow dx = -dt$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 2; x = 2 \Rightarrow t = 0$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^2 f(x)dx = -\int_2^0 f(1-t)dt = \int_0^2 f(1-t)dt = \int_0^2 f(1-x)dx$$

Do đó ta có

$$\int_0^2 [f(x) + f(2-x)]dx = \int_0^2 (x^2 - 2x + 2)dx \Leftrightarrow 2\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x^2 - 2x + 2)dx = \frac{8}{3} \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = \frac{4}{3} \quad (2^*)$$

$$\text{Vậy } \int_0^2 xf'(x)dx = xf(x)|_0^2 = 2f(2) - \int_0^2 f(x)dx = 2(-1) - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}$$

Bài toán dùng để tính nhanh (2*):

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; c]$ thỏa mãn điều kiện

$$mf(x) + nf(c-x) = g(x), \forall x \in [0; c]; m+n \neq 0; \text{ và } I = \int_0^c f(x)dx = \int_0^c \frac{g(x)}{m+n}dx.$$

Chứng minh

$$\text{Đặt } t = c - x \Leftrightarrow x = c - t. \text{ Ta có } I = \int_0^c f(x)dx = -\int_c^0 f(c-t)dt = \int_0^c f(c-x)dx$$

$$mf(x) + nf(c-x) = g(x), \forall x \in [0; c]; m+n \neq 0$$

$$\Rightarrow (m+n) \int_0^c f(x)dx = \int_0^c g(x)dx \Rightarrow I = \int_0^c f(x)dx = \int_0^c \frac{g(x)}{m+n}dx$$

Áp dụng: Biết $f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2; \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Áp dụng công thức tính nhanh ta có } \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (x^2 - 2x + 2)dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \quad (2^*)$$

Cách 2: PP chọn hàm đại diện

Từ $f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2; \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$ ta dự kiến chọn hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thay

vào đk $(*)$ ta có $f(x) + f(2-x) = ax^2 + bx + c + a(2-x)^2 + b(2-x) + c$

$$= 2ax^2 - 4ax + 4a + 2b + 2c.$$

Đồng nhất hệ số ta có
$$\begin{cases} 2a = 1 \\ -4a = -2 \\ 4a + 2b + 2c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b + c = 0 \end{cases}.$$

Do $f(0) = 3 \Rightarrow c = 3; b = -3$. Suy ra $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3; f'(x) = x - 3$.

Vậy
$$\int_0^2 xf'(x)dx = \int_0^2 x(x-3)dx = -\frac{10}{3}.$$

Cách 3: PP tính nhanh

Do $\forall x \in [0; 2]: f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow m = n = 1$

Không dùng được công thức tính nhanh sau đây: $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = \frac{mg(x) - ng(c-x)}{m^2 - n^2}$

Câu 19. [THTT-L1-2017-2018] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và dương trên $[0; e]$, thỏa mãn và $f(x) \cdot f(e-x) = 1; \forall x \in [0; e]$. Tích phân $\int_0^e \frac{1}{1+f(x)} dx = \frac{be}{c}$ trong đó b, c là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6

Lời giải

Chọn A

Cách 1: PP tính nhanh

Bài toán: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và dương trên $[0; a]$, thỏa mãn và $f(x) \cdot f(a-x) = 1; \forall x \in [0; a]$ thì tích phân $\int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx = \frac{a}{2}$

Chứng minh:

Đặt $t = a - x$ ta có

$$\int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx = -\int_a^0 \frac{1}{1+f(a-t)} dt = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-t)} dt = \int_0^a \frac{1}{1+\frac{1}{f(t)}} dt = \int_0^a \frac{f(t)}{1+f(t)} dt$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)} dx = \int_0^a \frac{1+f(x)}{1+f(x)} dx = \int_0^a dx = a$$

$$\Rightarrow \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx = \frac{a}{2} (*)$$

Áp dụng công thức (*) vào bài toán ta có $\int_0^e \frac{1}{1+f(x)} = \frac{e}{2} = \frac{eb}{c} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{1}{2}$, do b, c là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản $\Rightarrow c = 2, b = 1 \Rightarrow b + c = 3$.

Cách 2: PP chọn hàm đại diện

Do $f(x) \cdot f(e-x) = 1; \forall x \in [0; e]$ chọn hàm đại diện $f(x) = k$ (là hàm hằng)

Ta có $f(x) \cdot f(e-x) = 1; \forall x \in [0; e] \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$.

Vậy ta chọn hàm đại diện $f(x) = 1$

$\Rightarrow \frac{eb}{c} = \int_0^e \frac{1}{1+f(x)} dx = 1 \Rightarrow \frac{eb}{c} = \frac{e}{2} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{1}{2}$, do b, c là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản $\Rightarrow c = 2, b = 1 \Rightarrow b + c = 3$

Câu 20. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(1) = 1$ và $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3}$, tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx$.

A. $I = \frac{4}{3}$.

B. $I = \frac{2}{3}$.

C. $I = \frac{1}{3}$.

D. $I = -\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: PP tự luận:

Đặt $\sin x = t \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Đổi cận: khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$. Từ đó ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cdot \cos x \cdot f'(\sin x) dx = 2 \int_0^1 t \cdot f'(t) dt$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = t \\ dv = f'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = f(t) \end{cases}.$$

$$I = 2 \left[\left(t \cdot f(t) \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(t) dt \right] = 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}.$$

Cách 2: PP chọn hàm đại diện

Phân tích có hai giả thiết, ta tìm hàm $f(x)$ thỏa hai điều kiện, chọn $f(x) = ax + b$

Khi đó: $f(1) = 1 \Leftrightarrow a + b = 1 \quad (1)$

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (ax+b) dx = a \int_0^1 x dx + \int_0^1 b dx = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{3} \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có hệ
$$\begin{cases} a+b=1 \\ \frac{1}{2}a+b=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{4}{3} \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ta được $f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}; f'(x) = \frac{4}{3}$, do đó $f'(\sin x) = \frac{4}{3}$

Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot \frac{4}{3} dx = \frac{4}{3}$.

Câu 21. Cho hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa điều kiện $\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 21$ và

$$\int_0^1 (x+1)f(x) dx = 7. \text{ Tính } I = \int_0^1 e^x f(x) dx.$$

A. e .

B. $2e$.

C. $3e$.

D. $4e$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: PP chọn hàm đại diện

Nhận xét: Giả thiết có 2 điều kiện cho trước là $\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 21$ và $\int_0^1 (x+1)f(x) dx = 7$, tìm hàm số $f(x)$ bằng cách dựa vào tỷ số

$$\frac{[f(x)]^2}{(x+1)f(x)} = \frac{21}{7} \Rightarrow f(x) = 3(x+1)$$

Ta có $I = \int_0^1 e^x f(x) dx = 3 \int_0^1 e^x (x+1) dx = 3e$

Cách 2: PP chọn hàm đại diện

Đặt $f(x) = ax + b$ dựa vào giả thiết tìm hệ số $a; b$.

Cách 3: PP chọn hàm đại diện

Nhắc lại bất đẳng thức Holder tích phân như sau:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$$

Dấu bằng xảy ra khi $f(x) = k \cdot g(x), (\forall x \in [a; b], k \in \mathbb{R})$

Đặt $g(x) = x+1$; ta có $\int_0^1 (x+1)f(x) dx = 7$

suy ra $\int_0^1 g(x)f(x) dx = 7; \int_0^1 [f(x)]^2 dx = 21; \int_0^1 (x+1)^2 dx = \frac{7}{3}$

$$\forall \left(\int_0^1 g(x)f(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 [f(x)]^2 dx \cdot \int_0^1 [g(x)]^2 dx$$

Dấu bằng xảy ra khi $f(x) = kg(x) \Rightarrow f(x) = 3g(x) = 3(x+1)$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 e^x f(x) dx = 3 \int_0^1 e^x (x+1) dx = 3e.$$

Câu 22. Cho $\int_0^1 (1-x^2)f(x)dx = 10$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x f(\sin x) dx$.

A. $I = 5\pi$.

B. $I = 10\pi$.

C. $I = 10$.

D. $I = 5$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Tự luận

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \cdot f(\sin x) \cdot \cos x dx.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx \text{ và } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 (1-t^2) f(t) dt = 10.$$

Cách 2: PP chọn hàm đại diện

Giả thiết cho một điều kiện $\int_0^1 (1-x^2)f(x)dx = 10$ nên nghĩ đến chọn $f(x) = a$.

$$\text{Ta có } \int_0^1 (1-x^2)f(x)dx = 10 \Leftrightarrow \int_0^1 (1-x^2)a dx = 10 \Leftrightarrow \frac{2}{3}a = 10 \Leftrightarrow a = \frac{30}{2}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \frac{30}{2}.$$

$$\text{Ta có: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{30}{2} \cos^3 x dx = 10.$$

Câu 23. Cho hàm số liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ và thỏa điều kiện $\int_0^1 (3x+1)f'(x)dx = 2019$ và

$$4f(1) - f(0) = 2020. \text{ Tính } \int_0^{\frac{1}{3}} f(3x) dx.$$

A. $\frac{1}{9}$.

B. 3 .

C. $\frac{1}{3}$.

D. 1 .

Lời giải

Chọn A

Cách 1: PP tự luận

$$\text{Áp dụng tích phân từng phần tính } \int_0^1 (3x+1)f'(x)dx$$

$$\text{Ta có } \int_0^1 (3x+1)f'(x)dx = f(x)(3x+1) \Big|_0^1 - 3 \int_0^1 f(x)dx$$

$$2019 = 4f(1) - f(0) - 3 \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } \int_0^{\frac{1}{3}} f(3x) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Cách 2: PP chọn hàm đại diện

Giả thiết có 2 điều kiện cho trước là $\int_0^1 (3x+1)f'(x)dx = 2019$ và $4f(1) - f(0) = 2020$ ta chọn đặt $f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$.

$$\text{Ta có } \int_0^1 (3x+1)f'(x)dx = 2019 \Leftrightarrow a \int_0^1 (3x+1)dx = 2019 \Leftrightarrow a = \frac{4038}{5}$$

$$\text{Mặt khác } 4f(1) - f(0) = 2020 \Leftrightarrow 4(a+b) - b = 2020 \Leftrightarrow b = \frac{2020-4a}{3}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^{\frac{1}{3}} f(3x)dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (3ax+b)dx = \frac{1}{9}.$$

Câu 24. Cho $\int_0^4 f(x)dx = 16$. Tính $I = \int_0^2 f(2x)dx$

A. $I = 32$.

B. $I = 8$

C. $I = 16$.

D. $I = 4$

Lời giải

Chọn B

Cách 1: PP tự luận

Đặt $t = 2x \Rightarrow \frac{dt}{2} = dx$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 2 \Rightarrow t = 4$

$$\text{Khi đó ta có } I = \int_0^2 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x)dx = 8$$

Cách 2: PP casio

Phương pháp casio nhanh:

$$\text{Nếu có } \int_n^m f(x)dx = M \text{ thì } \int_\alpha^\beta f(ax+b)dx = \frac{M}{a}; n = a\alpha + b, m = a\beta + b$$

Áp dụng

Câu 25. Cho $\int_4^9 f(x)dx = 10$. Tính tích phân $J = \int_0^1 f(5x+4)dx$.

A. $J = 2$.

B. $J = 10$.

C. $J = 50$.

D. $J = 4$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: PP casio

Phương pháp casio nhanh:

$$\text{Nếu có } \int_n^m f(x)dx = M \text{ thì } \int_\alpha^\beta f(ax+b)dx = \frac{M}{a}; n = a.\alpha + b, m = a.\beta + b$$

Áp dụng



10÷5
2

Câu 26. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$ thỏa mãn $\int_0^2 f(x)dx = 6$. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2 \sin x) \cos x dx.$$

A. 3.

B. -3.

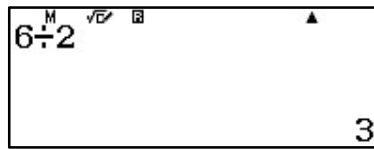
C. 6.

D. -6.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: PP casio



6÷2
3

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = -12$.

B. $I = 8$.

C. $I = 1$.

D. $I = -8$

Lời giải

Chọn D

Cách 1: PP tự luận

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}. \text{ Khi đó } I = (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx$$

$$\text{Suy ra } 10 = 2f(1) - f(0) - \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = -10 + 2 = -8. \text{ Vậy } \int_0^1 f(x)dx = -8.$$

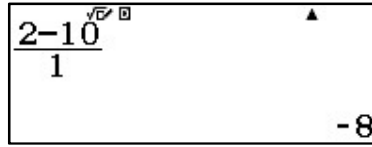
Cách 2: PP casio

Phương pháp casio nhanh:

Nếu hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_{\alpha}^{\beta} (ax+b)f'(x)dx = K$ và

$$(a\beta+b).f(\beta)-(a\alpha+b)f(\alpha)=P \text{ thì } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{P-K}{a}.$$

Áp dụng



Calculator display: $\frac{2-10}{1} = -8$

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và thỏa mãn $\int_0^1 (2x+1)f'(x)dx = 10$, $3f(1)-f(0)=12$.

Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = 1$.

B. $I = -2$.

C. $I = 2$.

D. $I = -1$.

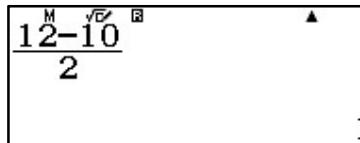
Lời giải

Chọn A

Phương pháp casio nhanh: Nếu hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_{\alpha}^{\beta} (ax+b)f'(x)dx = K$ và

$$(a\beta+b).f(\beta)-(a\alpha+b)f(\alpha)=P \text{ thì } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{P-K}{a}.$$

Áp dụng:



Calculator display: $\frac{12-10}{2} = 1$

Câu 29. Biết rằng $\int_1^2 \frac{8x+5}{6x^2+7x+2}dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a,b,c là các số thực. Tính $P = a^2 + b^2 + 3c$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: PP tự luận

$$\text{Ta có } \int_1^2 \frac{9x+5}{6x^2+7x+2}dx = \int_1^2 \frac{2(3x+2)+(2x+1)}{(2x+1)(3x+2)}dx = \left(\ln|2x+1| + \frac{1}{3} \ln|3x+2| \right) \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 3 + \frac{2}{3} \ln 5$$

Do đó $a = 1; b = -1; c = \frac{2}{3} \Rightarrow P = a^2 + b^2 + 3c = 4$.

Cách 2: PP casio

B1: Tính $\int_1^2 \frac{8x+5}{6x^2+7x+2} dx$ và gán cho biến A



B2: Ta có $A = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5 \Rightarrow A = \ln(2^a \cdot 3^b \cdot 5^c)$

$$\Rightarrow e^A = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \Rightarrow e^{nA} = 2^{na} \cdot 3^{nb} \cdot 5^{nc} \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$$

B3. Tính e^{nA} sao cho e^{nA} là 1 số hữu tỉ (thường $n = 1, 2, 3, 4, \dots$).



Ta có $e^{3A} = \frac{200}{27} = 200 \cdot 27^{-1} = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 3^{-3} \quad (1)$

Mà $e^{3A} = 2^{3a} \cdot 3^{3b} \cdot 5^{3c} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra
$$\begin{cases} 3a = 3 \\ 3b = -3 \\ 3c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow P = a^2 + b^2 + 3c = 4.$$

Câu 30. Biết $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}} dx = \frac{a\sqrt{2}+4}{b}; a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a+b=7$.

B. $a-b=-7$.

C. $a+b=15$.

D. $a-b=9$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: PP tự luận

Tính $I = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}} dx$. Đặt $t = \sqrt{x^2+2} \Rightarrow t^2 = x^2+2 \Rightarrow tdt = xdx$

Đổi cận

x	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$
t	2	$2\sqrt{2}$

$$\text{Suy ra } I = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}} dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \frac{x^2 \cdot x}{\sqrt{x^2+2}} dx = \int_2^{2\sqrt{2}} \frac{t^2-2}{t} dt$$

$$I = \int_2^{2\sqrt{2}} (t^2 - 2) dt = \left(\frac{t^3}{3} - 2t \right) \Big|_2^{2\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}+4}{3}$$

Suy ra: $a = 4, b = 3$. Vậy $a + b = 7$

Cách 2: PP casio

B1: Tính $I = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}} dx$ và gán cho biến A

$$\text{B2: } A = \frac{a\sqrt{2}+4}{b} \Rightarrow b = \frac{a\sqrt{2}+4}{A}$$

Đặt $x = a \Rightarrow b = F(x)$

B3: Mode 7 (dùng Table)

$$\text{Nhập } F(x) = \frac{x\sqrt{2}+4}{A}$$



Star -9

End 9

Step 1

Ta dò được $F(x) = 3$ suy ra $x = 4$

Suy ra: $a = 4, b = 3$

Vậy $a + b = 7$.

Câu 31. [CHUYÊN NGUYỄN TRÃI – HẢI DƯƠNG - CÂU 37 - 2020]

Cho $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính $S = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $S = 5$.

B. $S = 3$.

C. $S = 4$.

D. $S = 6$.

Lời giải

Chọn D

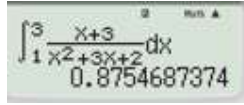
Cách 1: PP tự luận

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx &= \int_1^3 \frac{x+3}{(x+1)(x+2)} dx = \int_1^3 \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \left(2 \ln|x+1| - \ln|x+2| \right) \Big|_1^3 \\ &= 2 \ln 4 - \ln 5 - 2 \ln 2 + \ln 3 = 2 \ln 2 + \ln 3 - \ln 5 \end{aligned}$$

Suy ra $a = 2; b = 1; c = -1 \Rightarrow S = 6$.

Cách 2: PP casio

Bước 1: Tính tích phân $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx$ sau đó gán thành biến A .



Nhấn SHIFT STO (-) để được



Bước 2: Tính phép toán lũy thừa e^{kA} với $k = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ là các số nguyên mục tiêu là ta được kết quả trên máy là một số hữu tỷ.



Bước 3: Ta dễ dàng phân tích được $\frac{12}{5} = \frac{2^2 \cdot 3}{5} = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^{-1}$ do vậy

$$A = \ln \frac{12}{5} = \ln(2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^{-1}) = 2 \ln 2 + \ln 3 - \ln 5 \text{ suy ra } a = 2, b = 1, c = -1 \text{ từ đây } a^2 + b^2 + c^2 = 6.$$

Chú ý: Quá trình bấm máy có thể nhanh hơn so với tốc độ ghi tự luận nhiều.

Câu 32. Cho $I = \int_1^e x \ln x dx = \frac{a \cdot e^2 + b}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a + b + c$.

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

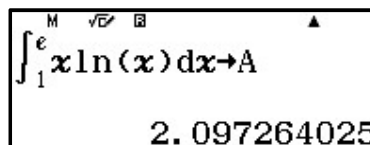
Cách 1: PP tự luận

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

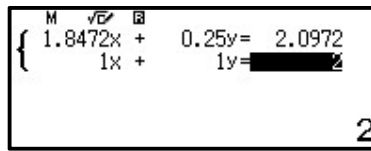
$$I = \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2 + 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases}.$$

Vậy $T = a + b + c = 6$.

Cách 2: PP casio



+ Thử C=1,2,3,4,5,6. giải hệ tìm a,b nguyên.



Câu 33. Biết $\int_0^2 2x \ln(x+1) dx = a \cdot \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $6a + 7b$.

A. 33.

B. 25.

C. 42.

D. 39.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1: PP tự luận

Xét $I = \int_0^2 2x \ln(x+1) dx = 6$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = 2x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = x^2 - 1 \end{cases}.$$

Ta có: $I = (x^2 - 1) \ln(x+1) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2 - 1}{x+1} dx$

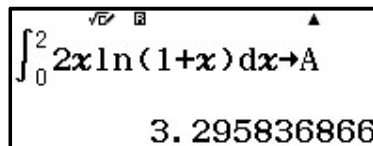
$$= 3 \ln 3 - \int_0^2 (x-1) dx = 3 \ln 3 - \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^2 = 3 \ln 3.$$

Vậy $a = 3, b = 3 \Rightarrow 6a + 7b = 39$.

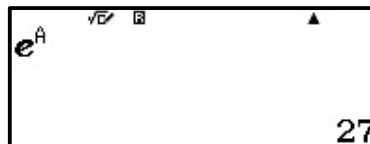
Cách 2: PP casio

Ta có $a \cdot \ln b = \ln b^a$

Bước 1.



Bước 2. $A = \ln b^a \Leftrightarrow b^a = e^A$



Bước 3. Bấm Shift + FACT

$$27 = 3^3$$

Vậy $a = 3, b = 3 \Rightarrow 6a + 7b = 39$.

Câu 34. Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2 + 3x + 2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào đúng?

A. $a + 2b = 0$.

B. $a - 2b = 0$.

C. $a + b = -2$.

D. $a + b = 2$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: PP casio

Câu 35. Cho biết $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x + 3}}{x} dx = \frac{a}{3} + b\sqrt{3}$, với a, b là các số nguyên. Giá trị của biểu

thức $\frac{1}{2^b} + \log_2 a$ bằng

A. -1.

B. $\frac{7}{2}$.

C. 8.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: PP casio

♦. $A = \frac{a}{3} + b\sqrt{3} \Rightarrow b = \frac{A - a/3}{\sqrt{3}}$

♦. Solve nghiệm nguyên: $\frac{1}{2^{\frac{A-x/3}{\sqrt{3}}}} + \log_2 x$

$\frac{1}{2^{\frac{A-x+3}{\sqrt{3}}}} + \log_2(x) - 8$	$\frac{A-x+3}{2^{\frac{1}{\sqrt{3}}}}$
$x =$	20
$L-R =$	0

♦. Thử từ đáp án. Thấy ngay A thỏa mãn vì phương trình có nghiệm nguyên.

Câu 36. Biết $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của $T = a + b + c$.

A. $T = 2$.

B. $T = 3$.

C. $T = -1$.

D. $T = 5$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: PP casio

♦. Ta có: $e^{\int_3^4 \frac{dx}{x^2+x}} = e^{a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$.

$e^{\int_3^4 \frac{1}{x^2+x} dx}$	$\frac{16}{15}$
-----------------------------------	-----------------

♦. Nhập $\frac{16}{15} = 2^a \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-1} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \Rightarrow a = 4; b = -1; c = -1$.

Câu 37. Biết $\int_0^2 2x \ln(1+x) dx = a \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $3a + 4b$.

A. 42.

B. 21.

C. 12.

D. 32.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: PP casio

♦. Ta có: $e^{\int_0^2 2x \ln(1+x) dx} = b^a$

$e^{\int_0^2 2x \ln(1+x) dx}$	27
-------------------------------	------

Shift FACT

27	3^3
------	-------

♦. Vậy $a = 3, b = 3 \Rightarrow 3a + 4b = 21$.

Câu 38. Cho $\int_1^3 \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx = \frac{a}{b} \cdot \ln 3 - c \cdot \ln 2$ với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 8.

B. 7.

C. 6.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: PP casio

$\int_1^3 \frac{\ln(x)}{(x+1)^2} dx \rightarrow A$ 0.1308120359	$f(x) = \frac{A+x \ln(2)}{\ln(3)}$	<table border="1"><thead><tr><th>M</th><th>√</th><th>□</th><th>f(x)</th></tr></thead><tbody><tr><td>1</td><td>0</td><td>0.119</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>0.75</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>1.3809</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>2.0118</td></tr></tbody></table> 3 4	M	√	□	f(x)	1	0	0.119	2	1	0.75	3	2	1.3809	4	3	2.0118
M	√	□	f(x)															
1	0	0.119																
2	1	0.75																
3	2	1.3809																
4	3	2.0118																

♦. **Chú ý:** $c=x$, $\frac{a}{b} = f(x)$, bài toán có điều kiện $a, b, c \in \mathbb{N}^*$

♦. Do đó $a+b+c=8$.

Câu 39. Biết $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}} dx = a+b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $T = a+b+c$.

A. $T = -1$.

B. $T = 0$.

C. $T = 2$.

D. $T = 1$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: PP casio

♦. $A-a = b \ln 2 + c \ln 3 \Leftrightarrow e^{A-a} = 2^b \cdot 3^c$

$\int_0^{\ln(6)} \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}} dx \rightarrow A$ 1.424635855	$f(x) = e^{A-x}$
--	------------------

Phạm vi bảng Đầu :-10 Kthúc:20 Bước :1	<table border="1"><thead><tr><th>M</th><th>√</th><th>□</th><th>f(x)</th></tr></thead><tbody><tr><td>10</td><td>-1</td><td>11.298</td></tr><tr><td>11</td><td>0</td><td>4.1563</td></tr><tr><td>12</td><td>1</td><td>1.529</td></tr><tr><td>13</td><td>2</td><td>0.5525</td></tr></tbody></table> 9 16	M	√	□	f(x)	10	-1	11.298	11	0	4.1563	12	1	1.529	13	2	0.5525
M	√	□	f(x)														
10	-1	11.298															
11	0	4.1563															
12	1	1.529															
13	2	0.5525															

♦. Suy ra $a=2, b=-4, c=2$ nên $T = a+b+c = 0$.

Câu 40. Cho biết $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{a\sqrt{2}-1}{b}$ với a, b là các số tự nhiên. Giá trị của $a^2 - b^2$ bằng

A. -5 .

B. 5 .

C. 2 .

D. 7 .

Lời giải

Chọn A

Cách 1: PP casio

$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx \rightarrow A$ 0.6094757082	$f(x) = \frac{Ax+1}{\sqrt{2}}$	<table border="1"><thead><tr><th>M</th><th>√</th><th>□</th><th>f(x)</th></tr></thead><tbody><tr><td>3</td><td>2</td><td>1.569</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>2.4309</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>2.8619</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td></td></tr></tbody></table> 2	M	√	□	f(x)	3	2	1.569	4	3	2.4309	5	4	2.8619	6	5	
M	√	□	f(x)															
3	2	1.569																
4	3	2.4309																
5	4	2.8619																
6	5																	

♦. Với $b=x; a=f(x) \Rightarrow a=2, b=3$.

♦. Vậy $a^2 - b^2 = -5$.

