



VẬN DỤNG CAO

ÔN THI THPT QUỐC GIA

MỘT SỐ NHÓM CÂU HỎI TRONG BÀI VIẾT

CHINH PHỤC
CỰC TRỊ MŨ VÀ
LOGARIT

VẬN DỤNG CAO
NGUYÊN HÀM
TÍCH PHÂN

CÁC BÀI TOÁN
NHỊ THỨC NEWTON
ĐẾM - XÁC SUẤT

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN
FANPAGE TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

LỜI GIỚI THIỆU

Các câu hỏi vận dụng cao trong đề thi THPT Quốc Gia đều là những câu hỏi yêu cầu tư duy cao, kỹ năng biến đổi và kiến thức đủ sâu để có thể làm được. Nhằm giúp bạn đọc phần nào giải quyết được một số dạng toán vận dụng cao trong đề, mình đã mạnh dạn viết chuyên đề này phần nào giúp bạn đọc xử lý một số nhóm câu hỏi như: Cực trị mũ – logarit, nguyên hàm tích phân, tổ hợp xác suất, nhị thức newton. Trong mỗi chuyên đề đều có phương pháp và ví dụ minh họa cụ thể để các bạn có thể hiểu và áp dụng được. Để có thể viết nên được chuyên đề này không thể không có sự tham khảo từ các nguồn tài liệu của các các group, các khóa học, tài liệu của các thầy cô mà tiêu biểu là

1. Thầy Lê Duy Tiến – Giáo viên trường THPT Bình Minh
2. Website Toán học Bắc – Trung – Nam: <http://toanhocbactrungnam.vn/>
3. Website Toanmath: <https://toanmath.com/>
4. Thầy Đặng Thành Nam – Giảng viên Vted
5. Thầy Huỳnh Đức Khánh
6. Thầy Nguyễn Hữu Quyết – THPT Bồ Trạch 1 tỉnh Quảng Bình
7. Thầy Lê Hồng Thái – Vĩnh Yên

Trong bài viết mình có sưu tầm từ nhiều nguồn nên có thể sẽ có những câu hỏi chưa hay hoặc chưa phù hợp mong bạn đọc bỏ qua. Trong quá trình biên soạn không thể tránh khỏi những thiếu sót, mong bạn đọc có thể góp ý trực tiếp với mình qua địa chỉ sau:

Nguyễn Minh Tuấn

Sinh viên K14 – Khoa học máy tính – Đại học FPT

Facebook: <https://www.facebook.com/tuankhmt.fpt>

Email: tuangenk@gmail.com

Blog: <https://lovetoan.wordpress.com/>

Bản pdf được phát hành miễn phí trên blog [CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN](#), mọi hoạt động sử dụng tài liệu vì mục đích thương mại đều không được cho phép. Xin chân thành cảm ơn bạn đọc.

I. MỞ ĐẦU

Như ta đã biết trong đề thi môn toán của kì thi THPT Quốc Gia 2018 vừa qua có xuất hiện một câu cực trị logarit tuy không phải là bài toán khó nhưng khá là lạ và đã gây lúng túng cho nhiều học sinh, thực chất mấu chốt của bài toán là việc sử dụng bất đẳng thức AM – GM cơ bản để đánh giá. Trong bài viết này tôi và các bạn sẽ cùng tìm hiểu và phát triển bài toán đó cao hơn và cùng nhau ôn lại những dạng toán cực trị đã xuất hiện nhiều trước đây!

Bài toán mở đầu

Cho 2 số thực $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$. Giá trị của biểu thức $a + 2b$ bằng?

A. 9

B. $\frac{20}{3}$

C. 6

D. $\frac{27}{4}$

Câu 43 mã đề 105 – Đề thi THPT Quốc Gia môn toán 2018

Nhận xét. Với những ai chưa có kiến thức nhiều về bất đẳng thức thì khả năng cao sẽ bỏ hoặc một số khác sẽ sử dụng CASIO tìm mối liên hệ giữa x, y bằng cách cho $Y = 1000$, tuy nhiên chắc chắn rằng phương trình sẽ vô nghiệm. Nếu tinh ý ta có thể nhận thấy đề yêu cầu tìm giá trị của biểu thức $a + 2b$ có nghĩa là a, b đều là một số xác định rồi, do đó ta phải nghĩ ngay tới phương pháp đánh giá! Chú ý thêm là các cơ số đều lớn hơn 1 do giả thiết và theo bất đẳng thức AM – GM ta lại có thêm $16a^2 + b^2 \geq 8ab$. Đến đây bài toán gần như đã coi như được giải quyết!

Lời giải. Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $16a^2 + b^2 \geq 8ab$. Từ đây suy ra:

$$VT \geq \log_{4a+5b+1}(8ab+1) + \log_{8ab+1}(4a+5b+1) \geq 2$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a, b > 0 \\ 16a^2 = b^2 \\ \log_{8ab+1}(4a+5b+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a + 2b = \frac{27}{4}$$

Vậy chọn đáp án D.

Chú ý. Ngoài phép đánh giá đầu ta còn sử dụng thêm đánh giá sau:

$$\log_a b + \log_b a = \log_a b + \frac{1}{\log_a b} \geq 2 \sqrt{\log_a b \cdot \frac{1}{\log_a b}} = 2$$

Ta đã cùng tìm hiểu bài toán trong đề thi THPT Quốc Gia, trong chuyên đề này sẽ chủ yếu nhắc tới dạng toán kiểu như vậy, tuy nhiên trước tiên ta sẽ cùng nhắc lại một số dạng toán và kiến thức lý thuyết cần phải nắm rõ.

II. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Để có thể làm tốt các bài toán ở chuyên đề này chúng ta cần phải nắm chắc được các kiến thức lý thuyết cơ bản về bất đẳng thức, điều kiện có nghiệm và biến đổi logarit sau.

Đây chính là nội dung chính của chuyên đề mà mình muốn nhắc tới, một dạng toán lấy ý tưởng từ đề thi THPT Quốc Gia 2018. Trước tiên để làm tốt ta sẽ cần có một số kiến thức về bất đẳng thức và nhắc lại các kiến thức đã học sau:

Bất đẳng thức AM - GM.

+ Cho 2 số thực dương a, b khi đó $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu "=" khi và chỉ khi $a = b$

+ Cho 3 số thực dương a, b, c khi đó $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu "=" khi và chỉ khi $a = b = c$

+ Tổng quát với các số thực dương $\sum_{i=1}^n x_i \geq n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$. Dấu "=" khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

+ Dạng cộng mẫu số $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n x_i}$. Dấu "=" khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

Khi cho $n = 2, n = 3$ thì ta được 2 bất đẳng thức quen thuộc

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq \frac{4}{x_1 + x_2} \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \geq \frac{9}{x_1 + x_2 + x_3} \end{cases}$$

Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz:

+ Cho 2 bộ số $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ khi đó ta có $\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2$

Dấu "=" khi và chỉ khi các số lập thành các bộ số tỉ lệ.

Chú ý khi cho $n = 2, n = 3$ ta được 2 bất đẳng thức quen thuộc

$$+(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2$$

$$+(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2$$

+ Dạng cộng mẫu Engel tổng quát $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n b_i}$. Trong đó dạng $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$ là

dạng ta hay gặp nhất

Bất đẳng thức trên còn có thể gọi là bất đẳng thức Svachơ.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$. Riêng dạng cộng mẫu thì cần thêm điều kiện là

$$b_1, b_2, \dots, b_n > 0$$

Bất đẳng thức Minkowski.

Tổng quát: Cho số thực $r \geq 1$ và mọi số dương $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ thì ta có:

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^r \right]^{\frac{1}{r}} \leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^r \right]^{\frac{1}{r}} + \left[\sum_{i=1}^n b_i^r \right]^{\frac{1}{r}}$$

Ở đây chỉ xét trường hợp cho 2 bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Khi đó ta có:

$$\sqrt[n]{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n b_i^2} \geq \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Dạng mà ta hay gặp nhất $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$. Bất đẳng thức này còn gọi là bất đẳng thức Vector.

Bất đẳng thức Holder.

Cho các số dương $x_{i,j}$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).

Khi đó với mọi số $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \geq 0$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ ta có: $\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x_{i,j} \right)^{\omega_j} \geq \sum_{j=1}^m \left(\prod_{i=1}^n x_{i,j}^{\omega_j} \right)$

Ở đây ta chỉ xét trường hợp đơn giản nhất cho 3 dãy số gồm $(a, b, c); (m, n, p); (x, y, z)$. Ta có:

$$(a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(m^3 + n^3 + p^3) \geq (axm + byn + czp)^3$$

Dấu "=" xảy ra khi 3 dãy tương ứng tỷ lệ.

Một bất đẳng thức ở dạng này mà ta hay gặp: $(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3$

Bất đẳng thức trị tuyệt đối.

Cho 2 số thực a, b khi đó ta có $|a| + |b| \geq |a + b| \geq |a| - |b|$

Dấu "=" thứ nhất khi a, b cùng dấu, dấu "=" thứ 2 khi a, b trái dấu.

Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Khi đó nếu:

+ $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm, đồng nghĩa vế trái luôn không âm hoặc không dương

+ $\Delta > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt

Ứng dụng của kiến thức này sẽ áp dụng cho những bài tìm điều kiện có nghiệm để suy ra min, max. Ngoài ra phải chú ý tới một số phép biến đổi logarit mà ta đã học.

Tính chất hàm đơn điệu

1. Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và liên tục trên tập xác định của nó thì phương trình $f(x) = a$ có tối đa một nghiệm

2. Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và không liên tục trên tập xác định của nó thì phương trình $f(x) = a$ có tối đa $n+1$ nghiệm

III. CÁC DẠNG TOÁN CỰC TRỊ MŨ - LOGARIT

1. KỸ THUẬT RÚT THỂ - ĐÁNH GIÁ ĐIỀU KIỆN ĐƯA VỀ HÀM 1 BIẾN SỐ.

Đây là một kỹ thuật cơ bản nhất mà khi gặp các bài toán về cực trị mà ta sẽ luôn nghĩ tới, hầu hết chúng sẽ được giải quyết bằng cách thể một biểu thức từ giả thiết xuống yêu cầu từ đó sử dụng các công cụ như đạo hàm, bất đẳng thức để giải quyết. Sau đây ta sẽ cùng đi vào các ví dụ minh họa.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho các số thực x, y thỏa mãn $2^x + 2^y = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (2x^2 + y)(2y^2 + x) + 9xy$

A. $\frac{27}{2}$

B. 18

C. 27

D. 12

THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có $4 = 2^x + 2^y \geq 2^{x+y} \Rightarrow x + y \leq 2 \Rightarrow y \leq 2 - x$
 $\Rightarrow P \leq (2x^2 - x + 2)(2(2 - x)^2 + x) + 9x(2 - x) = f(x) \leq f(1) = 18$

Chọn ý B.

Ví dụ 2: Cho 2 số thực $a, b > 1$ thỏa mãn $\log_2 a + \log_3 b = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b}$ bằng?

A. $\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}$

B. $\sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2}$

C. $\frac{1}{2}(\log_2 3 + \log_3 2)$

D. $\frac{2}{\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}}$

Chuyên KHTN Hà Nội - Lần 1 - 2017 - 2018

Lời giải

Biến đổi yêu cầu của bài toán ta được:

$$P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b} = \sqrt{\frac{\log_2 a}{\log_2 3}} + \sqrt{\frac{\log_3 b}{\log_3 2}} = \sqrt{\frac{\log_2 a}{\log_2 3}} + \sqrt{\frac{1 - \log_2 a}{\log_3 2}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\log_2 3}} + \sqrt{\log_2 3} \sqrt{1 - t} \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{\log_2 3}} - \frac{\sqrt{\log_2 3}}{2\sqrt{1 - t}} \quad (t = \log_2 a)$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - t} = \log_2 3 \sqrt{t} \Leftrightarrow 1 - t = t \cdot \log_2^2 3 \Leftrightarrow t = \frac{1}{1 + \log_2^2 3}$$

$$\Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{1}{1 + \log_2^2 3}\right) = \sqrt{\log_2 3 + \log_3 2} \Rightarrow \min P = \sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}$$

Chọn ý A.

Ví dụ 3: Cho 2 số thực dương a, b thỏa mãn $\frac{1}{2}\log_2 a = \log_2 \frac{2}{b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4a^3 + b^3 - 4\log_2(4a^3 + b^3)$ được viết dưới dạng $x - y\log_2 z$ với x, y, z đều là các số

thực dương lớn hơn 2. Khi đó tổng $x + y + z$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Cris Tuấn

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{2} \log_2 a = \log_2 \frac{2}{b} \Leftrightarrow \log_2 a = \log_2 \frac{4}{b^2} \Leftrightarrow a = \frac{4}{b^2}$.

Đặt $t = 4a^3 + b^3$, theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$t = 4a^3 + b^3 = \frac{256}{b^6} + b^3 = \frac{256}{b^6} + \frac{b^3}{2} + \frac{b^3}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{256}{b^6} \cdot \frac{b^3}{2} \cdot \frac{b^3}{2}} = 12$$

Khi đó $P = 4a^3 + b^3 - 4\log_2(4a^3 + b^3) = f(t) = t - 4\log_2 t$.

Ta có $f'(t) = 1 - \frac{4}{t \ln 2} \geq 1 - \frac{4}{12 \ln 2} > 0 \forall t \geq 12$. Vậy hàm $f(t)$ đồng biến trên $[12; +\infty)$

$$\Rightarrow P = f(t) \geq f(12) = 4 - 4\log_2 3 \Rightarrow x = y = -4, z = 3 \Rightarrow x + y + z = 3$$

Chọn ý C.

Ví dụ 4: Cho 2 số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2(12 - a - b) = \frac{1}{2} \log_2(a + 2)(b + 2) + 1$. Khi

đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^3}{b+2} + \frac{b^3}{a+2} + \frac{45}{a+b}$ được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m, n

là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Hỏi giá trị của $m + n$ bằng bao nhiêu?

A. 62

B. 63

C. 64

D. 65

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có: $\log_2(12 - a - b) = \frac{1}{2} \log_2(a + 2)(b + 2) + 1$

$$\Leftrightarrow \log_2(12 - a - b) = \log_2 2\sqrt{(a + 2)(b + 2)}$$

$$\Leftrightarrow a + b + 2\sqrt{(a + 2)(b + 2)} = 12$$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có $(12 - a - b)^2 = 4(a + 2)(b + 2) \leq (a + b + 4)^2 \Rightarrow a + b \geq 4$.

Biến đổi tiếp biểu thức $P = \frac{a^3(a + 2) + b^3(a + 2)}{(a + 2)(b + 2)} + \frac{45}{a + b} = \frac{a^4 + b^4 + 2(a^3 + b^3)}{(a + 2)(b + 2)} + \frac{45}{a + b}$

Chú ý tới 2 bất đẳng thức quen thuộc $\begin{cases} a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}(a + b)^4 \\ a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}(a + b)^3 \end{cases}$

$$\text{Từ đó suy ra } P \geq \frac{\frac{1}{8}(a + b)^4 + 2 \cdot \frac{1}{4}(a + b)^3}{(a + 2)(b + 2)} + \frac{45}{a + b} = \frac{(a + b)^4 + 4(a + b)^3}{2(12 - a - b)^2} + \frac{45}{a + b} = \frac{t^4 + 4t^3}{2(12 - t)^2} + \frac{45}{t}$$

Xét hàm số

$$f(t) = \frac{t^4 + 4t^3}{2(12-t)^2} + \frac{45}{t} \Rightarrow f'(t) = \frac{(t+4)t^3}{(12-t)^3} + \frac{2(t+3)t^2}{(12-t)^2} - \frac{45}{t^2} \geq \frac{(4+4).4^3}{(12-4)^3} + \frac{2(4+3)4^2}{(12-4)^2} - \frac{45}{4^2} > 0$$

$$\Rightarrow P \geq f(t) \geq f(4) = \frac{61}{4} \Rightarrow \min P = \frac{61}{4} \Rightarrow m+n = 65$$

Chọn ý D.

Ví dụ 5: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log(x+2y) = \log x + \log y$, khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt[4]{e^{\frac{x^2}{1+2y}}} e^{\frac{y^2}{x+1}}$ được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Hỏi giá trị của $m^2 + n^2$ bằng bao nhiêu?

A. 62

B. 78

C. 89

D. 91

Sở giáo dục và đào tạo tỉnh Hải Phòng

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$\log(x+2y) = \log x + \log y \Leftrightarrow \log(x+2y) = \log xy \Leftrightarrow x+2y = xy \Leftrightarrow \frac{x}{2} + y = \frac{x}{2} \cdot y$$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\frac{x}{2} + y = \frac{x}{2} \cdot y \leq \frac{\left(\frac{x}{2} + y\right)^2}{4} \Rightarrow \left(\frac{x}{2} + y\right)^2 - 4\left(\frac{x}{2} + y\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + y \geq 4$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng cộng mẫu số Engel ta có:

$$P = \sqrt[4]{e^{\frac{x^2}{1+2y}}} e^{\frac{y^2}{x+1}} \Rightarrow \ln P = \frac{x^2}{4(1+2y)} + \frac{y^2}{x+1} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2y+1} + \frac{y^2}{1+2 \cdot \frac{x}{2}} \geq \frac{\left(\frac{x}{2} + y\right)^2}{2\left(\frac{x}{2} + y + 1\right)}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{2} + y (t \geq 4) \Rightarrow \ln P = \frac{t^2}{2(t+1)} = f(t) \geq f(4) = \frac{8}{5} \Rightarrow P \geq e^{\frac{8}{5}}$$

Chọn ý C.

Ví dụ 6: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 < x, y \leq 1$ đồng thời $2^{\frac{x}{y}} + 4^{\frac{2x^2+2xy-y^2}{2xy}} = 5 \cdot 2^{\frac{x}{y}}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y) = e^{\frac{x+y}{2}} - 2^{x-y} - x - \frac{y^2}{2}$. Khi đó giá trị của biểu thức $T = M + m$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. $e - \frac{1}{2}$

B. $e - 1$

C. $e - \frac{3}{2}$

D. Không tồn tại

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết ta có } 2^{\frac{x}{y}} + 4^{\frac{2x^2+2xy-y^2}{2xy}} = 5 \cdot 2^{\frac{x}{y}} \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{y}} + 4 \cdot 2^{\frac{2x-y}{y} \cdot \frac{x}{y}} = 5 \cdot 2^{\frac{x}{y}}$$

Đặt $a = 2^{\frac{x}{y}}, b = 2^{\frac{y}{x}} (a, b > 0)$ ta được: $a + \frac{4a^2}{b} = 5b \Leftrightarrow (a - b)(4a + 5b) = 0 \Leftrightarrow a = b \Rightarrow x = y$

Khi đó $f(x, y) = e^{\frac{x+y}{2}} - 2^{x-y} - x - \frac{y^2}{2} = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 = g(x)$

Ta có $g'(x) = e^x - x - 1, g''(x) = e^x - 1 > 0$ vậy khi đó $g(x) > g(0) = 0$, vậy không tồn tại giá trị nhỏ nhất.

Chọn ý D.

Ví dụ 7 : Gọi S là tập hợp các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $x \in [-1; 1]$ đồng thời $\ln(x - y)^x - 2017x = \ln(x - y)^y - 2017y + e^{2018}$. Biết rằng giá trị lớn nhất của biểu thức $P = e^{2018x} (y + 1) - 2018x^2$ với $x, y \in S$ đạt tại $(x_0; y_0)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $x_0 \in (-1; 0)$ B. $x_0 = -1$ C. $x_0 = 1$ D. $x_0 \in [0; 1)$

THPT Chuyên Quốc Học – Huế năm 2017-2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\ln(x - y)^x - 2017x = \ln(x - y)^y - 2017y + e^{2018}$$

$$\Leftrightarrow (x - y) \ln(x - y) - 2017(x - y) = e^{2018} \Leftrightarrow \ln(x - y) - 2017 - \frac{e^{2018}}{x - y} = 0 (*)$$

Xét $f(t) = \ln t - 2017 - \frac{e^{2018}}{t} \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t} + \frac{e^{2018}}{t^2} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Khi đó phương trình $(*) \Leftrightarrow x - y = e^{2018} \Rightarrow y = x - e^{2018}$

$$\Rightarrow P = e^{2018x} (1 + x - e^{2018}) - 2018x^2 = g(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = e^{2018x} (2019 + 2018x - 2018e^{2018}) - 4036x$$

$$\Rightarrow g''(x) = e^{2018x} (2018 \cdot 2020 + 2018^2 x - 2018^2 e^{2018}) - 4036$$

$$\leq e^{2018x} (2018 \cdot 2020 + 2018^2 - 2018^2 e^{2018}) - 4036 < 0, \forall x \in [-1; 1]$$

Nên $g'(x)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$. Mà $g'(1) = e^{-2018} + 2018 > 0, g'(0) = 2019 - 2018e^{2018}$ nên tồn tại $x_0 \in (-1; 0)$ sao cho $g'(x_0) = 0 \Rightarrow \max_{[-1; 1]} g(x) = g(x_0)$

Chọn ý A.

Ví dụ 8: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $3^{x^2+y^2-2} \log_2(x - y) = \frac{1}{2}(1 + \log_2(1 - xy))$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{13}{2}$ B. $\frac{17}{2}$ C. 3 D. 7

Lời giải

Điều kiện $x > y; 1 > xy$. Biến đổi giả thiết ta có

$$3^{x^2+y^2-2} \log_2(x-y)^2 = \log_2(2-2xy)$$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2+y^2-2} \log_2(x^2+y^2-2+2-2xy) = \log_2(2-2xy)$$

- Nếu $x^2+y^2 > 2 \Rightarrow VT > \log_2(2-2xy) = VP$
- Nếu $x^2+y^2 < 2 \Rightarrow VT < \log_2(2-2xy) = VP$

Vậy $x^2+y^2 = 2 \Rightarrow (x+y)^2 = 2-2xy \Rightarrow xy = \frac{2-(x+y)^2}{2}$. Do $xy < 1 \Rightarrow (x+y) \in (-2; 2)$

Khi đó ta có:

$$P = 2(x+y)^3 - 6xy(x+y) - 3xy = 2a^3 - 3a(a^2-2) - \frac{3(a^2-2)}{2} = f(a) (a = x+y) \leq f(1) = \frac{13}{2}$$

Chọn ý A.

Ví dụ 9: Cho các số thực dương a, x, y, z thỏa mãn $4z \geq y^2, a > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \log_a^2(xy) + \log_a(x^3y^3 + x^2z) + \sqrt{4z - y^2}$

A. -4

B. $-\frac{25}{16}$

C. -2

D. $-\frac{21}{16}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $z \geq \frac{y^2}{4} \Rightarrow x^3y^3 + x^2z \geq x^3y^3 + \frac{x^2y^2}{4} \geq 2\sqrt{x^3y^3 \cdot \frac{x^2y^2}{4}} = (xy)^{\frac{5}{2}}$

Khi đó $S \geq \log_a^2(xy) + \log_a(xy)^{\frac{5}{2}} = \left(\log_a xy + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} \geq -\frac{25}{16}$

Chọn ý B.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+1}(2x-4y) = 1$. Tính $P = \frac{x}{y}$ khi biểu thức

$S = 4x + 3y - 5$ đạt giá trị lớn nhất

A. $P = \frac{8}{5}$

B. $P = \frac{9}{5}$

C. $P = -\frac{13}{4}$

D. $P = \frac{17}{44}$

Câu 2: Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $xy \leq 4y - 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = \frac{6y}{x} + \ln\left(\frac{x+2y}{y}\right).$$

A. $24 + \ln 6$

B. $12 + \ln 4$

C. $\frac{3}{2} + \ln 6$

D. $3 + \ln 4$

Câu 3: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2-1} + \log_3(x^2+y^2+1) = 3$. Biết giá trị lớn nhất của

biểu thức $S = |x-y| + |x^3-y^3|$ là $\frac{a\sqrt{b}}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối

giản. Tính $T = a + 2b$

A. 25

B. 34

C. 32

D. 41

Câu 4: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\log x + \log y \geq \log(x^3 + y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2x + y$ là?

A. $2\sqrt{2} - 2$

B. $\frac{3}{8}$

C. $4 + 4\sqrt{2}$

D. $3 + 2\sqrt{2}$

Câu 5: Cho 2 số thực a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 > 1$ và $\log_{a^2+b^2}(a+b) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a + 4b - 3$ là?

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

B. $\sqrt{10}$

C. $2\sqrt{10}$

D. $\frac{1}{\sqrt{10}}$

Câu 6: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $xy = 4, x \geq \frac{1}{2}, y \geq 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_2^2 x + (\log_2 y - 1)^2$. Tính $S = M + 2m$

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

B. $\sqrt{10}$

C. $2\sqrt{10}$

D. $\frac{1}{\sqrt{10}}$

Câu 7: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\log_2 x + \log_2(x + 3y) \leq 2 + 2\log_2 y$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 2y^2}} - \frac{2x+3y}{x+2y}$ là $\sqrt{a} - \frac{b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$

A. 30

B. 15

C. 17

D. 10

Câu 8: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\log_{2x^2+xy+3y^2}(11x+20y-40) = 1$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{y}{x}$. Tính $a + b$?

A. $\sqrt{10}$

B. $2\sqrt{14}$

C. $\frac{11}{6}$

D. $\frac{7}{2}$

Câu 9: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\log(x+3y) + \log(x-3y) = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x - |y|$

A. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{1}{9}$

D. $\frac{1}{8}$

Câu 10: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\log(x+3y) + \log(x-3y) = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x - 2|y| + 1$

- A. $\sqrt{10} + 1$ B. $\frac{5\sqrt{2}-3}{2}$ C. $\frac{3+5\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{3+2\sqrt{5}}{3}$

Câu 11: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(x+y+3) \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 3x + 4y - 6$

- A. $\frac{5\sqrt{6}-9}{2}$ B. $\frac{5\sqrt{6}-3}{2}$ C. $\frac{5\sqrt{3}-5}{2}$ D. $\frac{5\sqrt{6}-5}{2}$

Câu 12: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\log x + \log y \geq \log(x+y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 3y$

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 9 D. $\frac{1}{2}$

Câu 13: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 y = \log_2(x+y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x^2 + y^2$

- A. $2\sqrt[3]{4}$ B. 3 C. 2 D. $\sqrt{2}$

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất một cặp số thực (x, y) thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 = m$

- A. $(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2$ B. $(\sqrt{10}+\sqrt{2})^2$ C. $\sqrt{10}-\sqrt{2}$ D. $\sqrt{10}+\sqrt{2}$

Câu 15: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $4 + 3^{x^2-2y+2} = (4 + 9^{x^2-2y}) \cdot 7^{2y-x^2+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 2y$.

- A. $-\frac{9}{4}$ B. $\frac{7}{4}$ C. $-\frac{33}{8}$ D. $-\frac{1}{4}$

Câu 16: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 2y^2 > 1$ và $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$. Biết giá trị lớn nhất của $P = x + y$ là $\frac{a+b\sqrt{6}}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{c}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$

- A. 17 B. 12 C. 11 D. 16

Câu 17[THTT]: Cho 2 số thực dương thay đổi a, b thỏa mãn điều kiện:

$$\ln a(1 - \ln b) = \ln b\sqrt{4 - \ln^2 a}$$

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\log_b a$. Giá trị của $M + m$ bằng?

- A. $2(\sqrt{2}-1)$ B. $2(\sqrt{2}+1)$ C. $2(1-\sqrt{2})$ D. $-1+\sqrt{2}$

Câu 18: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $y \geq 4x$, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \ln \frac{2x+5y}{y} - \frac{2y+5x}{x}$ có dạng $\ln \frac{m}{2} - n$. Tính tổng $m+n$

- A. 25 B. 24 C. 29 D. 4

Câu 19: Cho 2 số thực dương thay đổi a, b thỏa mãn $\log_2(a+1) + \log_2(b+1) \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + b$

- A. 12 B. 14 C. 8 D. 16

Câu 20: Cho số thực x thỏa mãn $x \in [0; 16]$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(x) = 8 \cdot 3^{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}} + 9^{\sqrt[4]{x} + 1} - 9^{\sqrt{x}}$ đạt được khi $x = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m+n$

- A. 17 B. 18 C. 19 D. 20

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn ý C.

Ta có $2x - y = x^2 + y^2 + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

Khi đó theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$S = 4(x-1) + 3(y+2) - 7 \leq \sqrt{(4^2 + 3^2)((x-1)^2 + (y+2)^2)} - 7 = 3$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} \\ 4x+3y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Câu 2. Chọn ý C.

Theo giả thiết ta có $t = \frac{x}{y} \leq \frac{4y-1}{y^2} = -\left(\frac{1}{y} - 2\right)^2 + 4 \leq 4$

Khi đó $S = \frac{6y}{x} + \ln\left(\frac{x}{y} + 2\right) = \frac{6}{t} + \ln(t+2) = f(t)$

Đến đây xét tính đơn điệu của hàm số ta sẽ chỉ ra $f(t) \geq f(4) = \frac{3}{2} + \ln 6$

Câu 3. Chọn ý B.

Ta sẽ chuyển bài toán về giải phương trình logarit để tìm mối liên hệ giữa x, y .

Xét hàm số $f(t) = 2^{t-1} + \log_3(t+1) - 3$ đây là hàm đồng biến trên $[0; +\infty)$

Do đó $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow |xy| \in [-1; 1]$. Khi đó ta được

$$S^2 = (x-y)^2 \left(1 + (x^2 + xy + y^2)\right)^2 = (2-2xy)(3+xy)^2 \leq \frac{512}{27} \Rightarrow S \leq \frac{16\sqrt{6}}{9}$$

Câu 4. Chọn ý C.

Áp dụng các tính chất của logarit thì từ giả thiết ta suy ra được:

$$xy \geq x^3 + y \Rightarrow y(x-1) \geq x^3 \Rightarrow y \geq \frac{x^3}{x-1}$$

Vì do x,y dương nên từ điều kiện ta suy ra $x > 1$

$$\text{Khi đó ta được } 2x + y \geq 2x + \frac{x^3}{x-1} = f(x) \geq f(\sqrt{2}) = 4 + 4\sqrt{2}$$

Câu 5. Chọn ý B.

$$\text{Theo giả thiết ta có } a^2 + b^2 > 1 \Rightarrow a + b \geq a^2 + b^2 \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$$

Khi đó theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$P = 2\left(a - \frac{1}{2}\right) + 4\left(b - \frac{1}{2}\right) \leq \sqrt{(2^2 + 4^2) \left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2\right]} \leq \sqrt{10}$$

Câu 6. Chọn ý A.

$$\text{Theo giả thiết ta có } y = \frac{4}{x} \geq 1 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \Rightarrow \log_2 x \in [-1; 2]$$

$$\text{Khi đó } P = \log_2^2 x + (1 - \log_2 x)^2 \in \left[\frac{1}{2}; 5\right] \Rightarrow S = 5 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

Câu 7. Chọn ý D.

$$\text{Theo giả thiết ta có } \log_2(x^2 + 3xy) \leq \log_2 4y^2 \Leftrightarrow x^2 + 3xy \leq 4y^2 \Rightarrow 0 < \frac{x}{y} \leq 1$$

Khi đó chia cả tử và mẫu cho y ta chuyển về bài toán xét tính đơn điệu của hàm

$$f(t) = \frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+2}} - \frac{2t+3}{t+2} \Rightarrow f'(t) = \frac{5-3t}{2\sqrt{(t^2-t+2)^3}} - \frac{1}{(t+2)^2} \geq \frac{2}{2\sqrt{2^3}} - \frac{1}{(t+2)^2} > 0$$

$$\Rightarrow f(t) \leq f(1) = \sqrt{2} - \frac{5}{3} \Rightarrow P = 10$$

Câu 8. Chọn ý C.

$$\text{Từ giả thiết ta suy ra } 2x^2 + xy + 3y^2 - 11x - 20y + 40 = 0$$

$$\text{Thế } Sx = y \text{ vào giả thiết trên ta được } (4S^2 + 2)x^2 - (20S + 11)x + 40 = 0$$

Sử dụng điều kiện có nghiệm ta có

$$\Delta_x \geq 0 \Leftrightarrow 240S^2 - 440S + 199 \leq 0 \Rightarrow S \in \left[\frac{55-2\sqrt{10}}{60}; \frac{55+2\sqrt{10}}{60}\right] \Rightarrow a+b = \frac{11}{6}$$

Câu 9. Chọn ý A.

$$\text{Theo giả thiết ta có } \begin{cases} x+3y > 0 \\ x-3y > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0; \log(x^2 - 9y^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 9y^2 = 10$$

$$\text{Khi đó } |y| = x - S \Rightarrow 8x^2 - 18xS + 9S^2 + 10 = 0$$

Phương trình trên phải có nghiệm dương nên ta có $\begin{cases} \Delta_x \geq 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow S \geq \frac{4\sqrt{5}}{3}$

Câu 10. Chọn ý C.

Tương tự như câu trên

Câu 11. Chọn ý D.

Làm tương tự câu 5 ta có

$$x + y + 3 \geq x^2 + y^2 + 2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow S = 3\left(x - \frac{1}{2}\right) + 4\left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2} \leq \sqrt{(3^2 + 4^2) \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right]} - \frac{5}{2} \leq \frac{5\sqrt{6} - 5}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} x = \frac{3\sqrt{6} - 1}{10} \\ y = \frac{4\sqrt{6} - 3}{10} \end{cases}$$

Câu 12. Chọn ý C.

Tương tự câu 4

Câu 13. Chọn ý A.

Từ giả thiết ta có $x + y = xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Rightarrow x + y \geq 4 \Rightarrow S \geq \frac{1}{2}(x+y)^2 \geq 8$

Câu 14. Chọn ý A.

Từ giả thiết thứ nhất ta suy ra $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 2$. Đây là một hình tròn (C_1) có tâm là $I_1(2;2)$ và $R_1 = \sqrt{2}$. Từ giả thiết thứ 2 ta suy ra $(x-1)^2 + (y-1)^2 = m \Rightarrow m \geq 0$, đây là đường tròn (C_2) có tâm là $I_2(1;1)$, $R = \sqrt{m}$.

Do yêu cầu của bài toán nên $(C_1), (C_2)$ phải tiếp xúc ngoài với nhau, suy ra

$$I_1I_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow m = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$$

Câu 15. Chọn ý A.

Ta sẽ đưa về việc giải phương trình từ đó tìm ra mối liên hệ giữa x, y

Từ giả thiết ta có $\frac{4 + 3^{x^2 - 2y + 2}}{7^{x^2 - 2y + 2}} = \frac{4 + 3^{2(x^2 - 2y)}}{7^{2(x^2 - 2y)}} \Leftrightarrow f(x^2 - 2y + 2) = f(2(x^2 - 2y)) \Leftrightarrow x^2 - 2y = 2$

$$\Rightarrow S = x^2 + x - 2 \geq -\frac{9}{4}$$

Chú ý. Ngoài ra ta có thể đặt $t = x^2 - 2y$ sau đó dùng máy tính để giải phương trình mũ!

Câu 16. Chọn ý C.

Tương tự câu 5.

Câu 17. Chọn ý A.

Đặt $x = \ln a, y = \ln b \Rightarrow x(1-y) = y\sqrt{4-x^2} \ (x \in [-2; 2])$

Do $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = x + \sqrt{4-x^2} \in [-2; 2\sqrt{2}]$

Câu 18. Chọn ý B.

Theo giả thiết ta có $t = \frac{y}{x} \geq 4$. Khi đó ta được

$$P = \ln \frac{2x+5y}{y} - \frac{2y+5x}{x} = \ln \left(\frac{2x}{y} + 5 \right) - \frac{2y}{x} - 5 = \ln \left(\frac{2}{t} + 5 \right) - 2t - 5 \leq \ln \frac{11}{2} - 13$$

Câu 19. Chọn ý A.

Theo giả thiết ta có $(a+1)(b+1) \geq 64$. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được

$$64 \leq (a+1)(b+1) \leq \left(\frac{a+b+2}{2} \right)^2 \Rightarrow a+b+2 \geq 14 \Rightarrow a+b \geq 12$$

Câu 20. Chọn ý A.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là 0 đạt được khi $x = \frac{1}{16}$

2. HÀM ĐẶC TRUNG.

Dạng toán này đề bài sẽ cho phương trình hàm đặc trưng từ đó ta sẽ đi tìm mối liên hệ giữa các biến và rút thế vào giả thiết thứ 2 để giải quyết yêu cầu bài toán. Nhìn chung dạng toán này ta chỉ cần nắm chắc được kỹ năng biến đổi làm xuất hiện được hàm đặc trưng kết hợp với kiến thức về đạo hàm là sẽ giải quyết được trọn vẹn!

VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho 2 số thực không âm x, y thỏa mãn $x^2 + 2x - y + 1 = \log_2 \frac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P = e^{2x-1} + 4x^2 - 2y + 1$

- A. $m = -1$ B. $m = -\frac{1}{2}$ C. $m = \frac{1}{e}$ D. $m = e - 3$

Thầy Đặng Thành Nam - Vted.vn

Lời giải

Mấu chốt của bài toán này sẽ phải làm xuất hiện hàm đặc trưng từ đó rút ra mối liên hệ giữa x và y . Biến đổi giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - y + 1 &= \log_2 \frac{\sqrt{2y+1}}{x+1} \Leftrightarrow x^2 + 2x - y + 1 = \frac{1}{2} \log_2 (2y+1) - \log_2 (x+1) \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 + 2 \log_2 (x+1) &= \log_2 (2y+1) + 2y \\ \Leftrightarrow 2(x+1)^2 + \log_2 2(x+1)^2 &= \log_2 (2y+1) + 2y + 1 \Leftrightarrow f(2(x+1)^2) = f(2y+1)(1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên đoạn $(0; +\infty)$ ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0$. Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$. Vậy phương trình (1) $\Leftrightarrow 2y+1 = 2(x+1)^2$

Thế vào biểu thức cần tìm ta được $P = e^{2x-1} + 4x^2 - 2(x+1)^2 + 2 \geq -\frac{1}{2}$.

Chọn ý B.

Chú ý:

- Phần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm 1 biến xin nhường cho bạn đọc!
- Để tìm hàm đặc trưng ta phải luôn dựa vào biểu thức mũ hoặc biểu thức trong hàm logarit
- Với bài thi trắc nghiệm ta có thể lược bỏ bước xét hàm số đơn điệu để suy ra luôn mối liên hệ

Câu 2: Cho 3 số x, y, z thỏa mãn $x \geq y \geq z > 0$ đồng thời $\log_2 \left(\frac{x-y}{y-z} \right) = (x+z)(z-x-2y)$.

Khi đó GTNN của biểu thức $P = \frac{z^2 + 4y^2}{4z^2 + 2xz + 4y^2}$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{3}{7}$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Ý tưởng bài toán không mới, vấn đề là ta phải tìm được mối liên hệ giữa các biến với nhau, và bám sát vào các biểu thức trong dấu logarit để xây dựng hàm đặc trưng. Biến đổi giả thiết ta được:

$$\begin{aligned} \log_2 \left(\frac{x-y}{y-z} \right) &= (x+z)(z-x-2y) \\ \Leftrightarrow \log_2 (x-y) - \log_2 (y-z) &= z^2 - x^2 - 2y(x+z) \\ \Leftrightarrow \log_2 (x-y) + (x-y)^2 &= \log_2 (y-z) + (y-z)^2 \\ \Leftrightarrow x-y &= y-z \Leftrightarrow x+z = 2y \end{aligned}$$

Thế vào giả thiết ta được:

$$P = \frac{z^2 + 4y^2}{4z^2 + 2xz + 4y^2} = \frac{x^2 + 2xz + 2z^2}{x^2 + 4xz + 5z^2} = \frac{t^2 + 2t + 2}{t^2 + 4t + 5} \left(t = \frac{x}{z} \geq 1 \right)$$

Từ đây dễ dàng tìm được $\min P = \frac{1}{2}$.

Chọn ý A.

Câu 3: Cho 2 số $x, y > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 \geq 1$ và đồng thời $x^2 + 2y^2 - 1 = \ln \left(\frac{1-y^2}{x^2 + y^2} \right)$

Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y^2} + \frac{4y}{x^2 + y^2} = m\sqrt{n}$ với m, n là 2 số nguyên dương.

Hỏi có bao nhiêu bộ số (m, n) thỏa mãn?

A. 1

B. 3

C. 0

D. 2

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Nhìn thấy biểu thức logarit viết dưới dạng phân thức là ta nghĩ ngay tới hàm đặc trưng. Biến đổi giả thiết ta được.

$$x^2 + 2y^2 - 1 = \ln\left(\frac{1-y^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-y^2) + 1 - y^2 = \ln(x^2+y^2) + x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 1$$

Tuy nhiên vấn đề khó không nằm ở việc biến đổi mà nằm ở phần sau.

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\bullet \frac{x^4}{x^2 \cdot y^2 \cdot y^2} \geq \frac{x^4}{\frac{(x^2 + y^2 + y^2)^3}{27}} = \frac{x^4}{\frac{1}{27}} \Rightarrow \frac{x^2}{y^4} \geq 27x^4 \Rightarrow \frac{x}{y^2} \geq 3\sqrt{3}x^2$$

$$\bullet \frac{16y^4}{2y^2(x^2+y^2)(x^2+y^2)} \geq \frac{16y^4}{\frac{(2y^2+x^2+x^2+y^2+y^2)^3}{27}} \Rightarrow \frac{16y^2}{(x^2+y^2)^2} \geq 108y^4 \Rightarrow \frac{4y}{x^2+y^2} \geq 3\sqrt{3} \cdot 2y^2$$

$$\text{Cộng vế theo vế ta được } P \geq 3\sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{27}$$

Vậy có 2 bộ số (m,n) thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn ý D.

Câu 4: Cho phương trình $\log_2(2x^2 + 2x + 2) = 2^{y^2} + y^2 - x^2 - x$. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương (x, y) , $(0 < x < 500)$ thỏa mãn phương trình đã cho?

- A. 4 B. 2 C. 3 D. 1

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\log_2(2x^2 + 2x + 2) = 2^{y^2} + y^2 - x^2 - x \Leftrightarrow \log_2(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1 = 2^{y^2} + y^2$$

$$\Leftrightarrow 2^{\log_2(x^2+x+1)} + \log_2(x^2+x+1) = 2^{y^2} + y^2 \Leftrightarrow \log_2(x^2+x+1) = y^2$$

Do $0 < x < 500 \Rightarrow y^2 = \log_2(x^2 + x + 1) \in (0; 18) \Rightarrow 0 < y < 5$. Vậy ta có 4 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu đề bài đồng nghĩa có 4 cặp số (x, y) thỏa mãn phương trình đã cho.

Chọn ý A.

Câu 5: Cho 3 số thực a,b,c thỏa mãn $\log_2 \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2} = a(a-4) + b(b-4) + c(c-4)$. Giá

trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a+2b+3c}{a+b+c}$

- A. $\frac{12+\sqrt{30}}{3}$ B. $\frac{4+\sqrt{30}}{3}$ C. $\frac{8+\sqrt{30}}{3}$ D. $\frac{6+\sqrt{30}}{3}$

Thầy Đặng Thành Nam - Vted.vn

Lời giải

Một bài toán phát biểu đơn giản nhưng khá là khó. Trước tiên biến đổi giả thiết ta được

$$\begin{aligned}\log_2 \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2} &= a(a-4)+b(b-4)+c(c-4) \\ \Leftrightarrow \log_2 4(a+b+c)+4(a+b+c) &= \log_2 (a^2+b^2+c^2+2)+a^2+b^2+c^2+2 \\ \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2-4(a+b+c) &= 0 \Leftrightarrow (a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=10(C)\end{aligned}$$

Đến đây sử dụng đại số thì khá là khó, và ý tưởng sử dụng yếu tố hình học của tác giả bài toán rất hay đó là sử dụng điều kiện tương giao giữa mặt phẳng và mặt cầu trong hình phẳng Oxyz. Quy đồng giả thiết ta được:

$$P = \frac{a+2b+3c}{a+b+c} \Leftrightarrow a(P-1)+b(P-2)+c(P-3)=0(P)$$

Điều kiện tương giao của mặt phẳng (P) và mặt cầu (C) là:

$$d(I;(P)) \leq R(I(2;2;2), R=\sqrt{10}) \Leftrightarrow \frac{|6P-12|}{\sqrt{3P^2-12P+14}} \leq \sqrt{10} \Leftrightarrow P \leq \frac{6+\sqrt{30}}{3}$$

Chọn ý D.

Ví dụ 6: Tìm tất cả các giá trị thực dương của tham số a thỏa mãn bất đẳng thức

$$\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^{2017} \leq \left(2^{2017} + \frac{1}{2^{2017}}\right)^a$$

A. $0 < a < 1$

B. $1 < a < 2017$

C. $a \geq 2017$

D. $0 < a \leq 2017$

THPT Kiến An – Hải Phòng 2017 – 2018

Lời giải

Lấy logarit cơ số 2 cả 2 vế ta được

$$\begin{aligned}\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^{2017} \leq \left(2^{2017} + \frac{1}{2^{2017}}\right)^a &\Rightarrow 2017 \log_2 \left(2^a + \frac{1}{2^a}\right) \leq a \log_2 \left(2^{2017} + \frac{1}{2^{2017}}\right) \\ \Rightarrow \frac{\log_2 \left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)}{a} &\leq \frac{\log_2 \left(2^{2017} + \frac{1}{2^{2017}}\right)}{2017}\end{aligned}$$

Xét hàm số :

$$f(x) = \frac{\log_2 \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)}{x} = \frac{\log_2 (4^x + 1) - x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{4^x \cdot x \cdot \ln 4 - (4^x + 1) \ln(4^x + 1)}{x^2 (4^x + 1)} \right] < 0$$

Suy ra $f(x)$ là hàm giảm trên $(0; +\infty) \Rightarrow f(a) \leq f(2017)$ khi $0 < a \leq 2017$

Chọn ý D.

Qua các ví dụ trên ta phần nào đã hiểu được ý tưởng và phương pháp làm dạng toán này. Sau đây là các bài tập luyện tập cho các bạn.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_3 \frac{2-ab}{a+b} = 3ab + a + b - 7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + 5b$

- A. $\frac{2\sqrt{95}-6}{3}$ B. $\frac{4\sqrt{95}+15}{12}$ C. $\frac{3\sqrt{95}-16}{3}$ D. $\frac{5\sqrt{95}-21}{6}$

Câu 2: Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $2017^{1-x-y} = \frac{x^2+2018}{y^2-2y+2019}$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2+3y)(4y^2+3x) + 25xy$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T = a + b$.

- A. $T = 27$ B. $T = 17$ C. $T = 195$ D. $T = 207$

Câu 3: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + 2b$.

- A. $\frac{2\sqrt{10}-3}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{10}-1}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{10}-5}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{10}-7}{2}$

Câu 4: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $e^{x-4y+\sqrt{1-x^2}} - e^{y^2+\sqrt{1-x^2}} = y + \frac{y^2-x}{4}$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + 2y^2 - 2x^2 + 8y - x + 2$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T = a + b$.

- A. $T = 85$ B. $T = 31$ C. $T = 75$ D. $T = 41$

Câu 5: Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $3^{xy-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2y} = 2 - 2xy - 2x - 4y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x + 3y$

- A. $6\sqrt{2}-7$ B. $\frac{10\sqrt{2}+1}{10}$ C. $15\sqrt{2}-20$ D. $\frac{3\sqrt{2}-4}{2}$

Câu 6: Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $(x+y)^3 + x + y + \log_2 \frac{x+y}{1-xy} = 8(1-xy)^3 - 2xy + 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 3y$.

- A. $\frac{1+\sqrt{15}}{2}$ B. $\frac{3+\sqrt{15}}{2}$ C. $\sqrt{15}-2$ D. $\frac{3+2\sqrt{15}}{6}$

Câu 7: Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 \frac{y}{2\sqrt{x+1}} = -y^2 + 3y + x - 3\sqrt{x+1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - 100y$.

- A. -2499 B. -2501 C. -2500 D. -2490

Câu 8: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+3}{x+y+6}$.

A. $\frac{69+\sqrt{249}}{94}$

B. $\frac{43+3\sqrt{249}}{94}$

C. $\frac{37-\sqrt{249}}{21}$

D. $\frac{69-\sqrt{249}}{94}$

Câu 9: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+3}{x+y+6}$.

A. $\frac{69+\sqrt{249}}{94}$

B. $\frac{43+3\sqrt{249}}{94}$

C. $\frac{37-\sqrt{249}}{21}$

D. $\frac{69-\sqrt{249}}{94}$

Câu 10: Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{2x+y+1}{x+y} = x+2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{y}}$.

A. 6

B. $3+2\sqrt{3}$

C. 4

D. $3+\sqrt{3}$

Câu 11: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\log_2 \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-4) + y(y-4) + xy$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+1}{x+y+2} = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$, với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{c}$ tối giản. Tính $S = a + b + c$.

A. 221

B. 231

C. 195

D. 196

Câu 12: Cho 2 số x, y thỏa mãn $(x-y)(x^2+xy+y^2-2) = 2 \ln \frac{y+\sqrt{y^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{2xy} + xy$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 13: Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $2018^{2xy-4x-2y-2} = \frac{2x+y}{xy-1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 4y$

A. $6+4\sqrt{3}$

B. $1+2\sqrt{3}$

C. $6-4\sqrt{3}$

D. $9+4\sqrt{3}$

Câu 14: Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_2 \frac{y}{2\sqrt{x+1}} = 3(y - \sqrt{x+1}) - y^2 + x$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - y$

A. $-\frac{3}{4}$

B. $-\frac{5}{4}$

C. -2

D. -1

Câu 15: Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{6x-6y+23}{x^2+y^2} = 9x^2+9y^2-6x+6y-21$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x+y)(50-9xy) - 39x^2 - 6y^2$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T = a + b$.

- A. 188 B. 191 C. 202 D. 179

Câu 16: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $x, y \geq 1$ và $\log_3 [(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 - 57(x+y)$ là số thực có dạng $a + b\sqrt{7}$ với a, b là các số nguyên. Tính $T = a + b$.

- A. -28 B. -29 C. -30 D. -31

Câu 17: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2+y^2}{3xy+x^2} + x^2 + 2y^2 + 1 \leq 3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2x^2 - xy + 2y^2}{2xy - y^2}$

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{7}{2}$

Câu 18: Cho 2 số thực a, b thỏa mãn $\log_5 \left(\frac{4a+2b+5}{a+b} \right) = a+3b-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{7}{2}$

Câu 19: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 \left(\frac{x+4y}{x+y} \right) = 2x - 4y + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2x^4 - 2x^2y^2 + 6x^2}{(x+y)^3}$

- A. $\frac{9}{4}$ B. $\frac{16}{9}$ C. 4 D. $\frac{25}{9}$

Câu 20: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $5^{x+2y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{3} + 3^{-x-2y} + y(x-2)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x + 2y$

- A. $6 - 2\sqrt{3}$ B. $4 + 2\sqrt{6}$ C. $4 - 2\sqrt{6}$ D. $6 + 2\sqrt{3}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn ý A

Biến đổi giả thiết ta được

$$\begin{aligned}\log_3(2-ab) - \log_3(a+b) &= 3(ab-2) + (a+b) - 1 \\ \Leftrightarrow \log_3(3(2-ab)) + 3(2-ab) &= \log_3(a+b) + (a+b) \\ \Leftrightarrow 3(2-ab) &= a+b \Leftrightarrow b(3a+1) = 6-a \Rightarrow b = \frac{6-a}{3a+1} \quad (0 < a < 6)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = f(a) \geq f\left(\frac{-1+\sqrt{95}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{95}-6}{3}$$

Câu 2. Chọn ý D

Biến đổi giả thiết ta được

$$\begin{aligned}(x^2 + 2018)2017^x &= ((1-y)^2 + 2018)2017^{1-y} \Leftrightarrow x = 1-y \\ \Rightarrow S &= 16(x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x) + 12 \geq \frac{191}{16}\end{aligned}$$

Câu 3. Chọn ý A

Tương tự câu 1.

Câu 4. Chọn ý A

Biến đổi giả thiết ta được

$$\begin{aligned}4e^{x-4y+\sqrt{x^2+1}} - 4e^{y^2+\sqrt{1-x^2}} &= y^2 - (x-4y) \\ \Leftrightarrow x-4y+\sqrt{1-x^2} + 4e^{x-4y+\sqrt{1-x^2}} &= y^2 + \sqrt{1-x^2} + 4e^{y^2+\sqrt{1-x^2}} \\ \Leftrightarrow x-4y+\sqrt{1-x^2} &= y^2 + \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x = y^2 + 4y\end{aligned}$$

Đến đây thế vào giả thiết còn lại và khảo sát hàm số trên đoạn $[-1;1]$ ta sẽ tìm được giá trị

lớn nhất của $P = \frac{58}{27}$

Câu 5. Chọn ý A

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}\right)^{1-xy} - 2(1-xy) &= \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2y} - 2(x+2y) \Leftrightarrow 1-xy = x+2y \\ \Rightarrow P = f(x) &= 2x + 3\left(\frac{1-x}{x+2}\right) \geq f\left(\frac{3\sqrt{2}-4}{2}\right) = 6\sqrt{2}-7\end{aligned}$$

Câu 6. Chọn ý C

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned}(x+y)^3 + x+y + \log_2(x+y) &= (2(1-xy))^3 + 2(1-xy) + \log_2(2(1-xy)) \\ \Leftrightarrow x+y &= 2(1-xy) \Leftrightarrow y = \frac{2-x}{2x+1} \quad (x \in (0;2)) \Rightarrow P = x + \frac{3(2-x)}{2x+1} \geq -2 + \sqrt{15}\end{aligned}$$

Câu 7. Chọn ý B

Biến đổi giả thiết ta có

$$\log_2 y + y^2 - 3y = \log_2 \sqrt{x+1} + (x+1) - 3\sqrt{x+1} \Rightarrow y = \sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow P = x - 100\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} - 50)^2 - 2501 \geq -2501$$

Câu 8. Chọn ý A

Biến đổi giả thiết ta có

$$\log_{\sqrt{3}}(x+y) - \log_{\sqrt{3}}(x^2 + y^2 + xy + 2) = x^2 + y^2 + xy - 3(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}(3(x+y)) + 3(x+y) = \log_{\sqrt{3}}(x^2 + y^2 + xy + 2) + x^2 + y^2 + xy + 2$$

$$\Leftrightarrow 3(x+y) = x^2 + y^2 + xy + 2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} - 3\left(x + \frac{y}{2}\right) - \frac{3y}{2} + 2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x + \frac{y}{2} - \frac{3}{2}\right)^2}_a + \underbrace{\left(\frac{y\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}_b = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1(1)$$

Khi đó ta được

$$x = a - \frac{b}{\sqrt{3}}, y = \frac{2b}{\sqrt{3}} + 1 \Rightarrow P(x+y+6) = x+2y+3$$

$$\Leftrightarrow P\left(a + \frac{b}{\sqrt{3}} + 8\right) = a + \frac{3b}{\sqrt{3}} + 6 \Leftrightarrow (P-1)a + \frac{1}{\sqrt{3}}(P-3)b + 8P-6 = 0(2)$$

Coi (1) là phương trình đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ và $R=1$ và (2) là phương trình đường thẳng (d). Để (C) và (d) có điểm chung thì ta có điều kiện:

$$d(O;d) \leq R \Leftrightarrow \frac{|8P-6|}{\sqrt{(P-1)^2 + \frac{1}{3}(P-3)^2}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{69-\sqrt{249}}{94} \leq P \leq \frac{69+\sqrt{249}}{94}$$

Câu 9. Chọn ý D

Tương tự câu 8.

Câu 10. Chọn ý A

Biến đổi giả thiết ta có

$$\log_3(2x+y+1) - \log_3(x+y) = x+2y$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x+y+1) + (2x+y+1) = \log_3(3(x+y)) + 3(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x+2y=1 \Rightarrow S=f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{\frac{1-x}{2}}} \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = 6$$

Câu 11. Chọn ý A

Tương tự câu 8.

Câu 12. Chọn ý C

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned}
 (x-y)(x^2+xy+y^2-2) &= 2\ln \frac{y+\sqrt{y^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}} \\
 \Leftrightarrow x^3-y^3-2(x-y) &= 2\ln(y+\sqrt{y^2+1})-2\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \\
 \Leftrightarrow 2\ln(x+\sqrt{x^2+1})+x^3-2x &= 2\ln(y+\sqrt{y^2+1})+y^3-2y \\
 \Leftrightarrow x=y \Rightarrow P &= \frac{1}{x^2}+x^2 \geq 2
 \end{aligned}$$

Câu 13. Chọn ý D

Câu 14. Chọn ý B

Đề thi HKI – Chuyên Amsterdam – Hà Nội – 2017 – 2018

Câu 15. Chọn ý A

Câu 16. Chọn ý B

Nguyễn Đăng Đạo – Bắc Ninh – Lần 2 – 2017 – 2018

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned}
 \log_3((x+1)(y+1))^{y+1} &= 9-(x-1)(y+1) \Leftrightarrow (y+1)\log_3((x+1)(y+1)) = 9-(x-1)(y+1) \\
 \Leftrightarrow \log_3((x+1)(y+1)) &= \frac{9}{y+1}-(x-1) \Leftrightarrow \log_3(x+1)+\log_3(y+1) = \frac{9}{y+1}-(x-1) \\
 \Leftrightarrow \log_3(x+1)+x+1 &= \log_3 \frac{9}{y+1} + \frac{9}{y+1} \Leftrightarrow x+1 = \frac{9}{y+1} \Rightarrow x+y = 8-xy \geq 2 \Rightarrow 1 \leq xy \leq 6
 \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } P = (8-xy)^3 - 3xy(8-xy) - 57(8-xy) = f(xy) \geq f(9-2\sqrt{7}) \Rightarrow \begin{cases} a=83 \\ b=-112 \end{cases}$$

Câu 17. Chọn ý B

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned}
 \log_2 \frac{x^2+y^2}{3xy+x^2} + 2x^2 + 2y^2 + 1 &\leq 3xy + x^2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{2x^2+2y^2}{3xy+x^2} + 2x^2 + 2y^2 \leq 3xy + x^2 \\
 \Leftrightarrow \log_2(2x^2+2y^2) + 2x^2 + 2y^2 &\leq \log_2(3xy+x^2) + 3xy + x^2 \\
 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 \leq 3xy + x^2 &\Leftrightarrow x^2 - 3xy + 2y^2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 2 \\
 \Rightarrow P &= \frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 2}{\frac{2x}{y} - 1} = f\left(\frac{x}{y}\right) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

Câu 18. Chọn ý C

Câu 19. Chọn ý B

Câu 20. Chọn ý B

Biến đổi giả thiết ta được

$$\begin{aligned}
 5^{x+2y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 &= \frac{5^{xy}}{3} + 3^{-x-2y} + y(x-2) \\
 \Leftrightarrow 5^{x+2y} - 3^{-x-2y} + x + 2y &= 5^{xy-1} - 3^{1-xy} + xy - 1 \\
 \Leftrightarrow 1 - xy + x + y = 0 &\Leftrightarrow y(x-2) = x+1 > 0 \Rightarrow y = \frac{x+1}{x-2} (x > 2) \\
 \Rightarrow S = f(x) = x + \frac{2(x+1)}{x-2} &\geq f(2+\sqrt{6}) = 4 + 2\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

3. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI ĐỊNH LÝ VIET.

Phương pháp chung của các bài toán ở dạng này hầu hết sẽ là đưa giả thiết phương trình logarit về dạng một tam thức, sau đó sử dụng định lý Viet và các phép biến đổi logarit để giải quyết bài toán. Để hiểu rõ hơn ta cùng đi vào các ví dụ.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho các số nguyên dương $a, b > 1$ thỏa mãn phương trình:

$$11\log_a x \log_b x - 8\log_a x - 20\log_b x - 11 = 0$$

Biết rằng phương trình trên có tích 2 nghiệm là số tự nhiên nhỏ nhất. Tính $S = 2a + 3b$

A. 28

B. 10

C. 22

D. 15

Đề minh họa học sinh giỏi tỉnh cấp THPT tỉnh Phú Thọ

Lời giải

Ta đưa phương trình về phương trình bậc 2 theo ẩn là $\log_a x$ ta được:

$$11\log_b a (\log_a x)^2 - 4(2 + 5\log_b a)\log_a x - 11 = 0$$

Để phương trình có 2 nghiệm thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow 400(\log_b a)^2 - 164\log_b a + 64 > 0$ luôn đúng

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình thì khi đó theo định lý Viet thì ta có

$$\begin{aligned}
 \log_a x_1 + \log_a x_2 &= \frac{4(2 + 5\log_b a)}{11\log_b a} = \frac{8}{11}\log_a b + \frac{20}{11} \\
 \Leftrightarrow \log_a (x_1 x_2) &= \frac{8}{11}\log_a b + \frac{20}{11} \Leftrightarrow x_1 x_2 = b^{\frac{8}{11}} a^{\frac{20}{11}}
 \end{aligned}$$

Do a, b là các số nguyên dương đồng thời tích 2 nghiệm là số tự nhiên nhỏ nhất nên ta sẽ có

$$1 \text{ đánh giá sau } x_1 x_2 = b^{\frac{8}{11}} a^{\frac{20}{11}} = (a^{20} b^{18})^{\frac{1}{11}} \geq (2^{20} \cdot b^8)^{\frac{1}{11}} = 2(2^9 b^8)^{\frac{1}{11}}$$

Để $x_1 x_2 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2^9 \cdot b^8 = n^{11} \geq 2^9 \cdot 2^8 \Rightarrow n \geq 3$, mặt khác $n^{11} : 2 \Rightarrow n : 2$. Đến đây ta xét các trường hợp sau

- Nếu $n = 4 \Rightarrow b^8 = 8192 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$
- Nếu $n = 6 \Rightarrow b^8 = 708588 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$
- Nếu $n = 8 \Rightarrow b^8 = 708588 \Rightarrow b = 8$

Vậy $a = 2, b = 8$.

Chọn ý A.

Ví dụ 2: Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có 2 nghiệm x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + 3b$ bằng

A. 30

B. 25

C. 3

D. 17

Câu 46 mã đề 104, đề thi THPT Quốc Gia môn toán 2017

Lời giải

Điều kiện để cả hai phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x > 0, b^2 - 20a > 0$ và a, b đồng thời là các số tự nhiên lớn hơn 0.

Xét phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$, đặt $t = \ln x$ phương trình trở thành $at^2 + bt + 5 = 0$, giả sử $t_1 = \ln x_1, t_2 = \ln x_2$ là 2 nghiệm của phương trình thì theo Viet ta có:

$$t_1 + t_2 = \ln x_1 + \ln x_2 = \ln(x_1 x_2) = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x_1 x_2 = e^{-\frac{b}{a}}$$

Tương tự đối với phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ ta có $x_3 x_4 = 10^{-\frac{b}{5}}$

Mặt khác theo giả thiết ta có:

$$x_1 x_2 > x_3 x_4 \Leftrightarrow e^{-\frac{b}{a}} > 10^{-\frac{b}{5}} \Leftrightarrow -\frac{b}{a} > \ln 10^{-\frac{b}{5}} \Leftrightarrow \frac{b}{a} < \frac{b}{5} \ln 10 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{\ln 10}{5} \Leftrightarrow a > \frac{5}{\ln 10} > 2$$

Đồng thời ta lại có a là số nguyên dương nên suy ra $a \geq 3$ và $b^2 - 20a > 0, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow b \geq 8$

Vậy $S = 2a + 3b \geq 2.3 + 3.8 = 30$.

Chọn ý A.

Ví dụ 3: Cho các số thực $a, b > 1$ và phương trình $\log_a(ax) \log_b(bx) = 2018$ có 2 nghiệm phân biệt m, n . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (4a^2 + 9b^2)(36m^2 n^2 + 1)$

A. 14

B. 72

C. 68

D. 216

Lời giải

Ta đưa phương trình về phương trình bậc 2 theo ẩn là $\log_a x$ ta được:

$$\log_a(ax) \log_b(bx) = 2018 \Leftrightarrow (1 + \log_a x)(1 + \log_b x) = 2018$$

$$\Leftrightarrow \log_a x \log_b x + \log_a x + \log_b x + 1 = 2018 \Leftrightarrow \log_b a (\log_a x)^2 + (1 + \log_b a) \log_a x = 2017$$

Theo định lý Viet ta có

$$\log_a m + \log_a n = -\frac{1 + \log_b a}{\log_b a} = -\log_a b - 1 = \log_a \frac{1}{ab} = \log_a (mn) \Leftrightarrow mn = \frac{1}{ab}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$P = (4a^2 + 9b^2) \left(\frac{36}{a^2 b^2} + 1 \right) \geq 2\sqrt{4a^2 \cdot 9b^2} \cdot 2\sqrt{\frac{36}{a^2 b^2}} = 144$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 4a^2 = 9b^2 \\ \frac{36}{a^2 b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3, b = 2$$

Chọn ý A.

Ví dụ 4: Cho 3 số thực a, b, c thay đổi lớn hơn 1, thỏa mãn $a + b + c = 100$. Gọi m, n lần lượt là 2 nghiệm của phương trình $(\log_a x)^2 - (1 + 2\log_a b + 3\log_a c)\log_a x - 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $S = a + 2b + 3c$ khi mn đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{500}{3}$

B. $\frac{700}{3}$

C. 200

D. $\frac{600}{3}$

Lời giải

Với bài toán này giả thiết đã được đưa về một tam thức bậc 2 sẵn rồi nên ta chỉ cần sử dụng tới định lý Viet, ta được

$$\log_a m + \log_a n = 1 + 2\log_a b + 3\log_a c = \log_a (ab^2c^3) \Leftrightarrow mn = ab^2c^3$$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\begin{aligned} mn = ab^2c^3 &= ab^2(100 - a - b)^3 = \frac{4}{27} \left(3a \cdot \frac{3b}{2} \cdot \frac{3b}{2} (100 - a - b)(100 - a - b)(100 - a - b) \right) \\ &\leq \frac{4}{27} \left(\frac{3a + 2 + \frac{3b}{2} + 3(100 - a - b)}{6} \right)^6 = \frac{625 \cdot 10^8}{27} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra tại } 3a = \frac{3b}{2} = 100 - a - b \Leftrightarrow a = \frac{50}{3}, b = \frac{100}{3}, c = \frac{150}{3} \Rightarrow S = \frac{700}{3}$$

Chọn ý B.

Ví dụ 5: Cho 2 phương trình $\ln^2 x - (m - 1)\ln x + n = 0(1), \ln^2 x - (n - 1)\ln x + m = 0(2)$. Biết phương trình (1), (2) có 2 nghiệm phân biệt đồng thời có chung một nghiệm và x_1 là nghiệm của phương trình (1), x_2 là nghiệm của phương trình (2). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x_1^2 + x_2^2$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Đề thử nghiệm môn toán kì thi THPT Quốc Gia 2018 - Bộ GD&ĐT

Lời giải

Điều kiện $m \neq n$

Gọi x_0 là nghiệm chung của 2 phương trình khi đó ta có

$$\begin{cases} \ln^2 x_0 - (m - 1)\ln x_0 + n = 0 \\ \ln^2 x_0 - (n - 1)\ln x_0 + m = 0 \end{cases} \Rightarrow (n - 1)\ln x_0 - (m - 1)\ln x_0 + n - m = 0 \\ \Leftrightarrow (n - m)\ln x_0 = m - n \Rightarrow \ln x_0 = -1 \Rightarrow m + n = 0$$

Áp dụng định lý Viet cho 2 phương trình ta có

$$\bullet \begin{cases} \ln x_0 + \ln x_1 = m - 1 \\ \ln x_0 + \ln x_2 = n - 1 \end{cases} \Rightarrow \ln x_1 - \ln x_2 = m - n$$

$$\bullet \quad \begin{cases} \ln x_1 \cdot \ln x_0 = n \\ \ln x_2 \cdot \ln x_0 = m \end{cases} \Rightarrow \frac{\ln x_1}{\ln x_2} = \frac{n}{m} \Rightarrow m \ln x_1 = n \ln x_2$$

$$\Rightarrow \frac{n}{m} \ln x_2 - \ln x_2 = m - n \Leftrightarrow \ln x_2 \left(\frac{n}{m} - 1 \right) = m - n \Rightarrow \begin{cases} \ln x_2 = -m \\ \ln x_1 = -n \end{cases}$$

Khi đó $S = x_1^2 + x_2^2 = e^{-2m} + e^{2m}$. Theo bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$S = x_1^2 + x_2^2 = e^{-2m} + e^{2m} \geq 2\sqrt{e^{-2m} \cdot e^{2m}} = 2$$

Chọn ý B.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho 2 số thực $a, b > 1$. Biết phương trình $a^x b^{x^2-1} = 1$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \left(\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \right)^2 - 4(x_1 + x_2)$.

- A. 4 B. $3\sqrt[3]{2}$ C. $3\sqrt[3]{4}$ D. $\sqrt[3]{4}$

Câu 2: Cho 2 số nguyên dương $a, b > 1$. Biết phương trình $a^{x+1} = b^x$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $b^{x^2-1} = (9a)^x$ có 2 nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn điều kiện $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) < 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 3a + 2b$

- A. 12 B. 46 C. 44 D. 22

Câu 3: Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \cdot 4^x - b \cdot 2^x + 50 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $9^x - b \cdot 3^x + 50a = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn điều kiện $x_3 + x_4 > x_1 + x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + 3b$

- A. 49 B. 51 C. 78 D. 81

Câu 4: Cho 2 số thực $a, b > 1$ thay đổi thỏa mãn $a + b = 10$. Gọi m, n là 2 nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x) - 2\log_a x - 3 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = mn + 9a$

- A. $\frac{279}{4}$ B. 90 C. $\frac{81}{4}$ D. $\frac{45}{2}$

Câu 5: Cho 2 số thực $a, b > 1$ thay đổi thỏa mãn $a + b = 10$. Gọi m, n là 2 nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x) - 2\log_a x - 3\log_b x - 1 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = mn$

- A. $\frac{16875}{16}$ B. $\frac{4000}{27}$ C. 15625 D. 3456

Câu 6: Biết rằng khi m, n là các số nguyên dương thay đổi và lớn hơn 1 thì phương trình $8\log_m x \log_n x - 7\log_m x - 6\log_n x = 2017$ luôn có 2 nghiệm phân biệt a, b . Tính $S = m + n$ để tích ab là một số nguyên dương nhỏ nhất

- A. 20 B. 12 C. 24 D. 48

Câu 7: Biết rằng khi m, n là các số dương thay đổi khác 1 thỏa mãn $m + n = 2017$ thì phương trình $8\log_m x \log_n x - 7\log_m x - 6\log_n x - 2017 = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt a, b .

Biết rằng giá trị lớn nhất của biểu thức $\ln(ab)$ là $\frac{3}{4}\ln\left(\frac{c}{13}\right) + \frac{7}{18}\ln\left(\frac{d}{13}\right)$ với c, d là các số nguyên dương. Tính $S = 2c + 3d$

- A. 2017 B. 66561 C. 64544 D. 26221

Câu 8: Cho 2 số thực $a, b > 1$. Biết phương trình $a^{x^2} b^{x+1} = 1$ có nghiệm thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a(ab) + \frac{4}{\log_a b}$

- A. 2017 B. 66561 C. 64544 D. 26221

Câu 9: Cho các số nguyên dương $a, b > 1$ thỏa mãn phương trình:

$$13\log_a x \log_b x - 8\log_a x - 20\log_b x - 11 = 0$$

Biết rằng phương trình trên có tích 2 nghiệm là số tự nhiên nhỏ nhất. Tính $S = 3a + 4b$

- A. 52 B. 34 C. 70 D. 56

Câu 10[Minh Tuấn]: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$. Gọi m, n lần lượt là 2 nghiệm của phương trình $\log_b x \cdot \log_b(xabc) = 712$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_4\left(3mn - \frac{10}{mn}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 108\right)$ được viết dưới dạng $i + \log_4 j$ với i, j là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của biểu thức $T = i + j$ bằng?

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn ý C.

Biến đổi giả thiết đồng thời áp dụng định lý Viet ta được

$$x^2 - 1 + x\log_b a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\log_b a \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$S = \left(\frac{1}{\log_b a}\right)^2 + 4\log_b a = \left(\frac{1}{\log_b a}\right)^2 + 2\log_b a + 2\log_b a \geq 3\sqrt[3]{4}$$

Câu 2. Chọn ý B.

Với phương trình đầu ta lấy logarit 2 vế ta được $x^2 - x\log_a b + 1 = 0$

Phương trình này có 2 nghiệm thì $\Delta = (\log_a b)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow b > a^2$

Tương tự với phương trình 2 ta cũng có $x^2 - x\log_b(9a) - 1 \Rightarrow \Delta = (\log_b(9a))^2 + 4 > 0$

Theo Viet ta được $\begin{cases} x_1 + x_2 = \log_a b \\ x_3 + x_4 = \log_b(9a) \end{cases} \Rightarrow \log_a b \cdot \log_b(9a) < 3 \Leftrightarrow \log_a(9a) < 3 \Rightarrow a \geq 4$

Khi đó ta được $b > 16 \Rightarrow b \geq 17 \Rightarrow S \geq 46$

Câu 3. Chọn ý D.

Điều kiện để 2 phương trình đều có 2 nghiệm dương là $\begin{cases} \Delta_1 > 0; S_1 > 0; P_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0; S_2 > 0; P_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow b^2 > 200a$

Theo viet ta có $\begin{cases} 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = \frac{50}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = \log_2 \frac{50}{a} \\ 3^{x_3} \cdot 3^{x_4} = 50a \Rightarrow x_3 + x_4 = \log_3 (50a) \end{cases}$

Theo giả thiết ta có $x_3 + x_4 > x_1 + x_2 \Rightarrow \log_3 (50a) > \log_2 \left(\frac{50}{a} \right) \Rightarrow a \geq 3 \Rightarrow b \geq 25 \Rightarrow S \geq 81$

Câu 4. Chọn ý A.

Biến đổi phương trình đầu ta được phương trình tương đương

$$\log_b a (\log_a x)^2 - 2 \log_a x - 3 = 0$$

Theo viet ta có $\log_a m + \log_a n = \frac{2}{\log_b a} = \log_a b^2 \Rightarrow mn = b^2 \Rightarrow P = b^2 - 9b + 90 \geq \frac{279}{4}$

Câu 5. Chọn ý D.

Biến đổi phương trình đầu ta được phương trình tương đương

$$\log_b a (\log_a x)^2 - (2 + 3 \log_b a) \log_a x - 1 = 0$$

Theo Viet ta có $\log_a m + \log_a n = \frac{2 + 3 \log_b a}{\log_b a} = 2 \log_a b + 3 \Rightarrow mn = a^3 b^2$

$$\Rightarrow S = a^3 (10 - a)^2 = f(a) \leq f(6) = 3456$$

Câu 6. Chọn ý B.

Làm tương tự ví dụ minh họa 1

Câu 7. Chọn ý B.

Biến đổi phương trình tương đương

$$8 \log_n m (\log_m x)^2 - (6 \log_n m + 7) \log_m x - 2017 = 0$$

Theo viet ta có

$$\log_m a + \log_m b = \frac{6 \log_n m + 7}{8 \log_n m} \Rightarrow ab = m^{\frac{6}{7}} \cdot n^{\frac{7}{8}} \Rightarrow \ln(ab) = \frac{3}{4} \ln m + \frac{7}{8} \ln (2017 - m) = f(m)$$

$$\Rightarrow f(m) \leq f\left(\frac{12102}{13}\right) = \frac{3}{4} \ln \frac{12102}{13} + \frac{7}{8} \ln \frac{14119}{13} \Rightarrow S = 66561$$

Câu 8. Chọn ý C.

Ta có $\log_a b > 0$

Lấy logarit 2 vế ta được $x^2 + x \log_a b + \log_a b = 0$

Điều kiện có nghiệm của phương trình trên là $\Delta = (\log_a b)^2 - 4 \log_a b \geq 0 \Leftrightarrow \log_a b \geq 4$

$$\Rightarrow P = \log_a b + \frac{4}{\log_a b} + 1 = f(\log_a b) \geq f(4) = 6$$

Câu 9. Chọn ý C.

Tương tự ví dụ minh họa 1

Câu 10. Chọn ý A.

Biến đổi giả thiết tương đương với

$$\log_b x \cdot \log_b (xabc) = 712 \Leftrightarrow \log_b x (\log_b x + \log_b a + \log_b c + 1) = 712$$

$$\Leftrightarrow (\log_b x)^2 + (1 + \log_b a + \log_b c) \log_b x - 712 = 0$$

Theo định lý viét ta có $\log_b m + \log_b n = \log_b abc \Rightarrow mn = abc$

Khi đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_4 \left(3mn - \frac{10}{mn} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + 108 \right) = \log_4 (3abc - 10(ab + bc + ca) + 108)$$

Theo bất đẳng thức *Schur* bậc 3 ta có

$$3abc \geq \frac{3(a+b+c)(4(ab+bc+ca) - (a+b+c)^2)}{9} = 2(4(ab+bc+ca) - 36)$$

$$\Rightarrow 3abc - 10(ab+bc+ca) \geq -2(ab+bc+ca) - 72$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz* ta có

$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = 12 \Rightarrow -2(ab+bc+ca) - 72 \geq -96$$

$$\Rightarrow P \geq \log_4 (-96 + 108) = \log_4 12 = 1 + \log_4 3$$

4. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI BIỂU THỨC $\log_b a$

Vấn đề được đề cập tới ở đây thực chất chỉ là những bài toán biến đổi giả thiết theo ẩn $\log_b a$ và đưa về khảo sát hàm số 1 biến đơn giản. Sau đây là các ví dụ minh họa.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho a, b là các số thực thay đổi thỏa mãn $1 < a < \sqrt{b}$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (\log_a b)^2 + 6 \left[\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right]^2$ là $m + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p}$ là các số nguyên. Tính giá trị của $T = m + n + p$?

A. -1

B. 0

C. -14

D. 10

Vted.vn

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được

$$P = 4(\log_a b)^2 + 6 \left[\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{a} \cdot \sqrt{a} \right]^2 = 4(\log_a b)^2 + 6 \left[1 + \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{a} \right]^2$$

$$= 4(\log_a b)^2 + 6 \left[1 + \frac{1}{\log_{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{b}}{a}} \right]^2 = 4(\log_a b)^2 + 6 \left(1 + \frac{1}{\log_a b - 2} \right)^2$$

Đặt $t = \log_a b (0 < t < 1) \Rightarrow S = f(t) = 4t^2 + 6\left(\frac{t-1}{t-2}\right)^2 \geq \min_{(0;1)} f(t) = f\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 2(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$

Chọn ý C.

Ví dụ 2: Cho các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc khoảng $\left(0; \frac{1}{4}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức } S = \log_{x_1} \left(x_2 - \frac{1}{4}\right) + \log_{x_2} \left(x_3 - \frac{1}{4}\right) + \dots + \log_{x_n} \left(x_1 - \frac{1}{4}\right)$$

A. $2n$

B. 1

C. n

D. 2

Lời giải

Trước tiên ta sẽ xét tới bất đẳng thức phụ $x_k - \frac{1}{4} \leq x_k^2 \Leftrightarrow \left(x_k - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$

Bất đẳng thức trên luôn đúng, áp dụng vào bài toán ta có:

$$P \geq \log_{x_1} x_2^2 + \log_{x_2} x_3^2 + \dots + \log_{x_n} x_1^2 = 2(\log_{x_1} x_2 + \log_{x_2} x_3 + \dots + \log_{x_n} x_1)$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$2(\log_{x_1} x_2 + \log_{x_2} x_3 + \dots + \log_{x_n} x_1) \geq 2n \log_{x_1} x_2 \cdot \log_{x_2} x_3 \dots \log_{x_n} x_1 = 2n$$

Chọn ý A.

Ví dụ 3: Cho 2 số thực a, b thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{3} < b < a < 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức } P = \log_a \left(\frac{3b-1}{4a^3}\right) + 12 \log_{\frac{b}{a}}^2 a \text{ là } M \text{ đạt được khi } a = b^m. \text{ Tính } M + m ?$$

A. 15

B. 12

C. $\frac{37}{3}$

D. $\frac{28}{3}$

Lời giải

Ta có bất đẳng thức phụ sau $3b-1 \leq 4b^3 \Leftrightarrow (2b-1)^2(b+1) \geq 0 \Rightarrow \frac{3b-1}{4a^3} \leq \frac{b^3}{a^3}$

Mặt khác Khi đó ta được $\frac{1}{3} < b < a < 1$ nên ta được

$$P \geq \log_a \frac{b^3}{a^3} + 12 \left(\frac{1}{\log_a \frac{b}{a}} \right)^2 = 3 \log_a b - 3 + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2}$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$3 \log_a b - 3 + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} = \frac{3}{2}(\log_a b - 1) + \frac{3}{2}(\log_a b - 1) + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} \geq 3.3 = 9$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{3}{2}(\log_a b - 1) = \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} \Leftrightarrow \log_a b = 3 \Rightarrow b = a^3 \Rightarrow a = b^{\frac{1}{3}}$

Chọn ý D.

Ví dụ 4: Cho 2 số thực a, b thỏa mãn 2 điều kiện $3a - 4 > b > 0$ và đồng thời biểu thức

$$P = \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\log_{\frac{3a}{b+4}} a \right)^2 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng } S = 3a + b$$

- A. 8 B. $\frac{13}{2}$ C. $\frac{25}{2}$ D. 14

Đề thi thử trường THPT Kim Sơn A – Ninh Bình lần 2

Lời giải

Ý tưởng của bài toán này không còn như bài toán trước vì dồn về $\log_a b$ là một điều rất khó, thay vào đó nếu tinh ý thì ta sẽ dồn biến về theo ẩn $\log_a \frac{a^3}{4b}$ bằng bất đẳng thức AM – GM.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{aligned} P &= \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\log_{\frac{3a}{b+4}} a \right)^2 = \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\frac{1}{\log_a \frac{3a}{b+4}} \right)^2 \\ &\geq \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\frac{1}{\log_a \frac{a}{\sqrt[3]{4b}}} \right)^2 = \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\frac{3}{\log_a \frac{a^3}{4b}} \right)^2 \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM lần nữa ta được

$$\begin{aligned} \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\frac{3}{\log_a \frac{a^3}{4b}} \right)^2 &= \frac{1}{2} \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{1}{2} \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\frac{3}{\log_a \frac{a^3}{4b}} \right)^2 \\ &\geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{2} \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) \cdot \frac{1}{2} \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) \cdot \frac{3}{16} \left(\frac{3}{\log_a \frac{a^3}{4b}} \right)^2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = 2$

Chọn ý A.

Ví dụ 5: Cho 3 số thực $a, b, c \in (1; 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \log_{bc} (2a^2 + 8a - 8) + \log_{ca} (4b^2 + 16b - 16) + \log_{ab} (c^2 + 4c - 4)$$

- A. $\log_3 \frac{289}{2} + \log_{\frac{9}{4}} 8$ B. $\frac{11}{2}$ C. 4 D. 6

Đề thi thử chuyên Lê Hồng Phong

Lời giải

Xét bất đẳng thức phụ $x^2 + 4x - 4 \geq x^3 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-4) \leq 0$ luôn đúng khi $x \in (1; 2]$.

Áp dụng vào bài toán ta được:

$$P = \log_{bc}(2a^2 + 8a - 8) + \log_{ca}(4b^2 + 16b - 16) + \log_{ab}(c^2 + 4c - 4) \\ \geq \log_{bc} 2a^3 + \log_{ac} 4b^3 + \log_{ab} c^3 = \log_{bc} 2 + \log_{ca} 4 + 3(\log_{bc} a + \log_{ac} b + \log_{ab} c)$$

Mặt khác do $a, b, c \in (1; 2]$ nên ta có

$$\log_{bc} 2 + \log_{ca} 4 = \frac{1}{\log_2 bc} + \frac{1}{\log_4 ca} \geq \frac{1}{\log_2 (2.2)} + \frac{1}{\log_4 (2.2)} = \frac{3}{2}$$

Lại theo bất đẳng thức Nesbit ta có:

$$3(\log_{bc} a + \log_{ac} b + \log_{ab} c) = 3 \cdot \sum_{cyc} \frac{\ln a}{\ln b + \ln c} \geq 3 \cdot \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 6

Chọn ý D.

Chú ý: Cách chứng minh bất đẳng thức Nesbit

Đây là một bất đẳng thức rất nổi tiếng, hiện đã có hơn 20 cách chứng minh cho bất đẳng thức này, sau đây mình xin trình bày một cách xét hiệu nhanh nhất cho mọi người tham khảo.

Xét 3 số thực dương a, b, c thay đổi, khi đó ta có $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Chứng minh: Ta có $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} = \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)} \geq 0$

Bất đẳng thức trên luôn đúng nên ta có điều phải chứng minh!

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho 2 số thực $a > 1, b > 1$. Tính giá trị của biểu thức $S = \log_a \sqrt{ab}$ khi biểu thức $P = \log_a^2 b + 8 \log_b a$ đạt giá trị nhỏ nhất?

- A. $6\sqrt[3]{2}$ **B. $\frac{1+\sqrt[3]{4}}{2}$** C. $\sqrt[3]{4}$ D. $2(1+\sqrt[3]{4})$

Câu 2: Cho 2 số thực $b > a > 1$. Tính giá trị của biểu thức $S = \log_a \sqrt[3]{ab}$ khi biểu thức

$P = \frac{\log_a b}{\log_a^2 \left(\frac{a}{b}\right)} + \log_a \sqrt{ab}$ đạt giá trị nhỏ nhất?

- A. $S = 4$ B. $S = \frac{11}{4}$ **C. $S = \frac{4}{3}$** D. $S = 3$

Câu 3: Cho 2 số thực $a > 1, b > 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{\log_{ab} a} + \frac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}} b}$ là

$\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $P = 2m + 3n$

- A. 30** B. 42 C. 24 D. 35

Câu 4: Cho 2 số thực $a, b \in (1; 2]$ thỏa mãn $a < b$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a(b^2 + 4b - 4) + \log_{\frac{b}{a}} a$ là $m + 3\sqrt[3]{n}$ với m, n là các số nguyên dương. Tính $S = m + n$

- A. 9 B. 18 C. 54 **D. 15**

Câu 5: Cho 2 số thực $a > b > 1$, biết rằng $P = \log_b^2\left(\frac{a^4}{b^4}\right) + \log_b \sqrt{a}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng M khi $b = a^m$. Tính $m + M$?

- A. $\frac{7}{2}$ **B. $\frac{37}{10}$** C. $\frac{17}{2}$ D. $\frac{35}{2}$

Câu 6: Cho 2 số thực $a \geq b > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi có số thực k sao cho $b = a^k$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $0 < k < \frac{1}{2}$ **B. $\frac{1}{2} < k < 1$** C. $-1 < k < -\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2} < k < 0$

Câu 7: Cho 2 số thực $b > a > 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \log_a^3\left(\frac{a^2}{b^2}\right) + \log_{\sqrt[3]{b^2}}\left(\frac{b}{a}\right)$?

- A. $\frac{23 + 16\sqrt{2}}{2}$ **B. $\frac{23 - 16\sqrt{2}}{2}$** C. $\frac{23 + 8\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{23 - 8\sqrt{2}}{2}$

Câu 8: Cho 2 số thực $a \geq b > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \frac{2}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất là M khi có số thực m sao cho $b = a^m$. Tính $M + m$

- A. $\frac{81}{16}$** B. $\frac{23}{8}$ C. $\frac{19}{8}$ D. $\frac{49}{16}$

Câu 9: Cho 2 số thực a, b thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{4} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a\left(b - \frac{1}{4}\right) - \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b}$?

- A. 0,5 B. 1,5 **C. 4,5** D. 3,5

Câu 10: Cho 2 số thực a, b thỏa mãn điều kiện $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$?

- A. 19 B. 13 C. 14 **D. 15**

Câu 11: Cho 2 số thực thay đổi a, b thỏa mãn $\frac{1}{6} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{8}\log_a^3\left(\frac{6b-1}{9}\right) + 4\log_{\frac{b}{a}}^3 a$

- A. 9 **B. 12** C. $\frac{23}{2}$ D. $\frac{25}{2}$

Câu 12: Cho 2 số thực a, b thay đổi thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 3 \log_b \left(\frac{b}{a} \right) ?$$

- A. 5 B. $5 - \sqrt{6}$ **C. $5 - 2\sqrt{6}$** D. $4 - \sqrt{6}$

Câu 13: Cho 2 số thực a, b thay đổi thỏa mãn $a^3 > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\log_{\frac{a^3}{b}}(ab) \cdot \log_b a}{3(\log_a b - 1)^2 + 8} ?$$

- A. $e^{\frac{1}{8}}$ **B. $\frac{1}{8}$** C. $e^{\frac{1}{4}}$ D. $\frac{1}{4}$

Câu 14: Cho 2 số thực a, b lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \log_a \left(\frac{a^2 + 4b^2}{4} \right) + \frac{1}{4 \log_{ab} b}$

- A. $\frac{5}{4}$ **B. $\frac{9}{4}$** C. $\frac{13}{4}$ D. $\frac{7}{4}$

Câu 15: Cho 2 số thực $a > 1 > b > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \log_{a^2}(a^2 b) + \log_{\sqrt{b}} a^3$

- A. $1 - 2\sqrt{3}$** B. $1 - 2\sqrt{2}$ C. $1 + 2\sqrt{3}$ D. $1 + 2\sqrt{2}$

Câu 16: Cho 2 số thực dương a, b nhỏ hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(\frac{4ab}{a + 4b} \right) + \log_b(ab)$$

- A. $\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ **C. $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$** D. $\frac{5 + \sqrt{2}}{2}$

5. SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ BẤT ĐẲNG THỨC

Đây chính là nội dung chính của chuyên đề mà mình muốn nhắc tới, một dạng toán lấy ý tưởng từ đề thi THPT Quốc Gia 2018. Ví dụ minh họa đã được đưa ra ở phần mở đầu của chuyên đề, sau đây sẽ là các bài toán của dạng này mà mình muốn đề cập tới.

CÁC BÀI TOÁN

Câu 1: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $4 \log_2 2x \cdot \log_2 2y = \log_2^2 4xy$. Gọi M, m lần lượt là

giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2^{|\sin x|} + 2^{|\cos y|}$. Biết $M \cdot n = a \cdot 2^{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{b}}}}$ với $a, b > 0$. Tính giá trị của biểu thức $a^3 + b^3$

- A. 31 B. 32 C. 33 D. 35

Câu 2: Cho $x \geq 2, y \geq 1$ thỏa mãn $\log_2 \frac{8}{x} \cdot \log_2 \frac{x}{y} \cdot \log_2^2 2y = 4$. Đặt $P = 2^x + 2^y$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $P < 19$ B. $P > 19$ C. $P = 19$ D. Không tồn tại

Câu 3: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện:

$$1 + \log_2 3y + 6 \log_2 3y - 2 \log_2 3y \log_2 3xy = \frac{9}{2} \log_x 2.$$

Đặt $P = x^2 + xy + y^2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $P \in [11;12]$ B. $P \in [12;13]$ C. $P \in [10;11]$ D. $\min P = 10$

Câu 4: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \geq 2, y \geq \frac{2}{3}$ đồng thời:

$$(\log_2 x^5 + \log_2 3y)(\log_2^2 3y + 12\log_2 x - 4\log_2 x \log_2 3xy) = 80$$

Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá $x + 3y$?

- A. 7 B. 8 C. 5 D. 11

Câu 5: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x, y \geq 1$ đồng thời:

$$\left(\log_2 x + \log_2 y^2 + \log_2 \frac{8}{x^3 y^3} \right) \left(\log_2 x^6 + \log_2 y^3 + \log_2 \frac{4}{x^2 y^2} \right) = 8$$

Hỏi BCNN của a^2b và 4 bằng bao nhiêu?

- A. 4 B. 8 C. 12 D. 16

Câu 6: Cho hai số thực $x, y \geq 1$ thỏa mãn điều kiện:

$$\left| \log_2 2(x+y) \right| + \left| \log_2 \frac{2(x+y)}{x^2 + 4y^2 + 1} \right| = \log_2 (4xy + 1)$$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $f(x, y) = 2xy + \sqrt{x+2y} - x^2 - 4y^2$ bằng?

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{7}$

Câu 7: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\begin{cases} 3 \leq x \leq 27 \\ 2 \leq y \leq 16 \end{cases}$ đồng thời

$$\log_3 \frac{27}{x+y} \log_2 \frac{16}{y-2x+1} = \frac{36}{\log_3 (x+y)^2 + \log_2 (y-2x+1)^3}$$

Đặt $P = \sqrt{x^2 + 1} + 2^y + \log(1 - xy)$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $P > 4$ B. $P = 4$ C. $P < 4$ D. $P = 3$

Câu 8: Cho hai số thực $x \geq \frac{3}{2} \geq y \geq 0$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\log_2 (3x-y)}{4^{2x-3y-1}} \sqrt{4^{2x-3y-1} - 1} + \sqrt{\log_2 \frac{3x-y}{2}} = \log_2 (3x-y)$$

Khi đó biểu thức $P = 4xy$ có bao nhiêu ước số nguyên?

- A. 2 B. 4 C. 5 D. 8

Câu 9: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \neq 2y$ đồng thời

$$2^{\frac{(x-2y)^4 + 1}{(x-2y)^2}} (e^{x+y} - e^2 (x+y-2)) = 4e^2$$

Đặt $P = a + b$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $P > 5$ B. $\min P = 1$ C. $P < 3$ D. $\max P = 4$

Câu 10: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn

$$\frac{2}{2^{x-2y}+1} = 2 - \log_{y^2+y-x^2-x}(x+y+1)$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_{x+y+1}(y-x) \cdot 2^{2x-4y}$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{16}$

Câu 11: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{5}{2} \ln xy = \frac{5}{2}$

Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá $a+b$?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 12: Cho 2 số x, y thỏa mãn $\begin{cases} 0 \leq x^2 - y^2 \leq \frac{\pi}{2} \\ x, y > 0 \end{cases}$ và

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(2^{\sin(x^2-y^2)} + 2^{\tan(x^2-y^2)} \right) = \frac{2 \cdot 2^x + 4^y}{\sqrt{4 \cdot 4^x + 16^y}}$$

Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\sin(x-y) + \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y-1)\right) \right)^{2018}$

- A. 1 B. 0 C. π D. 2

Câu 13: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 2 = 0$

Đặt $P = \sin^{2018}(y+1) + x^{2018}$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $P = 1$ B. $P = 2$ C. $P = 3$ D. $P \in [4; 5]$

Câu 14: Cho hai số thực $x, y \geq 1$ thỏa mãn $\log_2^2 2x = 2 \log_2^2(y^2 + 1)(\log_2^2 x + 1)$

Tính giá trị của biểu thức $P = \log_2(x+y)$

- A. $\log_2 3$ B. $\log_2 5$ C. 1 D. 2

Câu 15: Cho hai số thực dương $x \geq y \geq 1$ thỏa mãn

$$4 \log_2(x+y) + 12 = (2^{x-y} + 1) \left(\log_2(x+y) + 5 + \sqrt{2 \log_2^2(x+y) + 2} \right)$$

Đặt $P = a^3 + b^3$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $P = 2$ B. $P = 3$ C. $P = 1$ D. $P < 1$

Câu 16: Cho 2 số thực x, y dương thỏa mãn điều kiện

$$\log_2^2 2x + \log_2^2 4y + (1 - \log_2 xy)^3 = \frac{11}{2}$$

Đặt $P = x^3 + y^3$. Hỏi P có bao nhiêu ước số nguyên?

- A. 1 B. 2 C. 5 D. 0

Câu 17: Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x \geq y+1 \end{cases}$ đồng thời

$$2^{x-y} + 2^{2y-2x} = 9 \cdot 2^{-2x+y}$$

Đặt $P = x + y$. Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá P ?

- A. 1 B. 2 C. 5 D. 0

Câu 18: Cho 2 số x, y thỏa mãn $\begin{cases} x \geq 1-y \\ y \leq 0 \end{cases}$ thỏa mãn

$$\sqrt{\ln(x+y)} + \sqrt{\ln(1-y)} = 2\sqrt{\ln \frac{x+1}{2}}$$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + xy + y^2$ là?

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{4}$

Câu 19: Cho 2 số $x, y > 0$ thỏa mãn $\sqrt{\log_2 x + \log_4 y^2} + \sqrt{\log_2^2 x + 2} = \sqrt{\log_2 \frac{y^2}{x}}$

Có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá $8xy$?

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

Câu 20: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $(1 + 2^{x+y})(1 + 2^{x+2y})(1 + 2^{x-3y}) = (1 + 2^x)^3$.

Đặt $P = e^{x^2+y^2} + x^2 + \frac{y^2}{4} - (x-2y)^2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $P = e - 1$ B. $P = e$ C. $\max P = e^2$ D. $P = e - 2$

Câu 21: Cho 2 số $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện

$$(2^{x+y-1} + 2^{x+2y-1})(2^{3x+4y-3} + 2^{1-x-y}) = 2^{2x+3y}$$

Biết rằng biểu thức $\frac{x^2 + y^2}{4} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tổng $a + b$ bằng?

- A. 5 B. 6 C. 4 D. 7

Câu 22: Cho 2 số $x, y > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{\sqrt{2^{2x} + 3 \cdot 4^y}} + \frac{1}{\sqrt{4^y + 3 \cdot 2^{2x}}} = \frac{x-y-e^{x-y-3}}{2(2^{x-1} + 2^{y-1})}$

Khi đó $x^3 + y^4$ được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số

tối giản. Hỏi $T = m + n$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. 149 B. 147 C. 160 D. 151

Câu 23: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 < a, b, c < 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \log_a b + \log_b c + \frac{1}{4} \log_c^2 a$

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{7}{4}$ D. $\frac{9}{4}$

Câu 24: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $2^{x+\frac{1}{4x}} + 2^{\frac{y+1}{4y}} = 4$. Đặt $P = x + y$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $P = 1$ B. 2 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

Câu 25: Cho 2 số a, b thỏa mãn $b \geq a > 1$ và $2^{\log_b a} + 16^{\log_a \frac{b}{\sqrt[4]{a^3}}}$ = 4. Giá trị của biểu thức $P = \log_2 \left(\frac{a}{b} \right)$?

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 1

Câu 26: Cho 2 số thực $x, y > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{x} \leq y \leq 2x$ và đồng thời điều kiện $\log_2 \frac{2}{x} \sqrt{\log_2 \frac{2x}{y} \log_2 xy} = \frac{9}{16}$. Đặt $P = 2^x \cdot 2^y$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $P \in [4; 5]$ B. $P \in [1; 2]$ C. $P \in [2; 3]$ D. $P \in [6; 7]$

Câu 27: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ 2 < y < 5 \end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu bộ số (x, y) thỏa mãn phương trình $\log_2 (3 - |\sin xy|) = \cos \left(\pi x - \frac{\pi}{6} \right)$?

- A. 4 B. 2 C. 3 D. 1

Câu 28: Tìm tổng các số $\alpha \in (5; 16)$ để phương trình sau có nghiệm trên đoạn $[1; 2]$

$$1 + \cos^2 \left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8} \right) = \left(\frac{1}{3} \right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|}$$

- A. $\frac{17\pi}{5}$ B. $\frac{34\pi}{5}$ C. $\frac{63\pi}{5}$ D. $\frac{51\pi}{5}$

Câu 29: Tìm tổng các số $\alpha \in (2; 7)$ để phương trình sau có nghiệm trên đoạn $[1; 2]$

$$\log_3 \left(1 + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} x + \frac{5\pi}{2} \right) \right) = |\cos \alpha x| - 1$$

- A. $\frac{17\pi}{7}$ B. $\frac{18\pi}{7}$ C. $\frac{19\pi}{7}$ D. $\frac{20\pi}{7}$

Câu 30: Biết rằng tồn tại duy nhất một a để phương trình $2^{|\sin x|} + |\sin x| = \cos x + \sin^2 x + a$ có nghiệm duy nhất, hỏi a có tất cả bao nhiêu ước số nguyên

- A. 2 số B. 8 số C. Không có D. Vô số

Câu 31: Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện

$$\left[1 + \left(\frac{2^{xy}}{4} + 1 \right)^2 \log_{xy}^2 x \right] \left[\left(\sqrt{2} \right)^{x^2 + y^2 - 4} \log_x y + 1 \right] = \left(\frac{2^{xy}}{4} + 1 \right)^2$$

Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá $a^4 b^4$

- A. 13 B. 14 C. 15 D. 16

Câu 32: Cho 2 số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2)$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $P = a + b$

- A. $P = 8$ B. $P = 141$ C. $P = 148$ D. $P = 151$

Câu 33: Cho x, y là 2 số tự nhiên khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |36^x - 5^y|$

- A. $P = 8$ B. 9 C. 10 D. 11

Câu 34: Cho các số thực dương a, b, c khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b + \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2\log_b \frac{c}{b} - 3$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a b - \log_b c$. Tính $S = 2m + 3M$

- A. $S = \frac{2}{3}$ B. $S = \frac{1}{3}$ C. $S = 3$ D. $S = 2$

Câu 35: Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $3^a = 5^b = 15^{-c}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a + b + c)$ là?

- A. $-3 - \log_5 3$ B. -4 C. $-2 - \sqrt{3}$ D. $-2 - \log_3 5$

Câu 36: Cho a, b là hai số thực thay đổi thỏa mãn $b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{(a-b)^2 + (10^a - \log b)^2}$

- A. $\sqrt{2} \left(\frac{1}{\ln 10} + \log \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right)$ B. $\sqrt{2} \left(\frac{1}{\ln 10} - \log \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right)$
C. $\sqrt{2} \log(\ln 10)$ D. $\sqrt{2} \left(\frac{1}{\ln 10} - \ln \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right)$

Câu 37: Cho các số thực a, b, c lớn hơn 1 thỏa mãn $\log_2 a \geq (1 - \log_2 b \log_2 c) \log_{bc} 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 10\log_2^2 a + 10\log_2^2 b + \log_2^2 c$

- A. $-3 - \log_5 3$ B. -4 C. $-2 - \sqrt{3}$ D. $-2 - \log_3 5$

Câu 38: Với a, b, c lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \log_a bc + \log_b ca + 4\log_c ab$

- A. 6 B. 12 C. 11 D. 10

Câu 39: Với a, b, c lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \log_a bc + 3\log_b ca + 4\log_c ab$

- A. 16 B. $6 + 4\sqrt{3}$ C. $4 + 6\sqrt{3}$ D. $8 + 4\sqrt{3}$

Câu 40: Xét các số thực dương x, y, z thay đổi sao cho tồn tại các số thực a, b, c lớn hơn 1 và thỏa mãn $\sqrt{abc} = a^x = b^y = c^z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + y + 2z^2$

A. $4\sqrt{2}$

B. 4

C. 6

D. 10

Câu 41: Xét các số thực dương x, y, z thay đổi sao cho tồn tại các số thực a, b, c lớn hơn 1 và thỏa mãn $\sqrt{abc} = a^x = b^y = c^z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{16}{x} + \frac{16}{y} - z^2$

A. 20

B. $20 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

C. 24

D. $24 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

Câu 42: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 < a, b, c < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \log_a b + \log_b c + \sqrt{\log_c a}$

A. $2\sqrt{2}$

B. 3

C. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{3}{2}$

Câu 43: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $\log^2 a + 2\log^2 b + 3\log^2 c = 6$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức là $T = \log a \log b + \log b \log c + \log c \log a$ là $\frac{3}{k}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $k = 1$

B. $k^3 + 3k^2 = 3$

C. $k^3 + 3k = 3$

D. $k = \frac{1}{2}$

Câu 44: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $\log a \log b + \log b \log c + 3\log c \log a = 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log^2 a + \log^2 b + \log^2 c$ là $\frac{-m + \sqrt{n}}{p}$ với m, n, p lần lượt là các số nguyên dương và $\frac{m}{p}$ là phân số tối giản. Tính $m + n + p$?

A. 64

B. 16

C. 102

D. 22

Câu 45: Với n là số nguyên dương, biết rằng $-\log_2 \left(\log_2 \left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2018}}}} \right) \right) > 2017$ mà biểu thức trong dấu ngoặc có tất cả n dấu căn. Tìm giá trị nhỏ nhất của n ?

A. 2021

B. 2014

C. 2013

D. 2020

Câu 46: Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $\log_2 \left(\log_{2^a} \left(\log_{2^b} \left(2^{1000} \right) \right) \right) = 0$. Giá trị lớn nhất của ab là?

A. 500

B. 375

C. 125

D. 250

Câu 47: Cho số thực dương $a > 1$, biết khi $a = a_0$ thì bất đẳng thức $x^a \leq a^x$ đúng với mọi số thực x lớn hơn 1. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1 < a_0 < 2$

B. $e < a_0 < e^2$

C. $2 < a_0 < 3$

D. $e^2 < a_0 < e^3$

Câu 48: Cho hàm số $f(x) = e^x (a \sin x + b \cos x)$ với a, b là các số thực thay đổi và phương trình $f'(x) + f''(x) = 10e^x$ có nghiệm. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = a^2 - 2ab + 3b^2$

- A. $10 + 10\sqrt{2}$ B. $20 + 10\sqrt{2}$ C. $10 + 20\sqrt{2}$ D. $20 + \sqrt{2}$

Câu 49: Cho 2 số thực a, b thỏa mãn $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{a+n} < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{b+n}$ với mọi số n nguyên dương.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|a - b|$?

- A. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{3}{2}$ B. 1 C. $\frac{1}{\ln 2} - 1$ D. $\frac{1}{\ln 2} - 3$

Câu 50: Cho các số thực dương x, y, z bất kì thỏa mãn $xyz = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{\log^2 y + 4} + \sqrt{\log^2 z + 4}$

- A. $\sqrt{29}$ B. $\sqrt{23}$ C. $\sqrt{26}$ D. $\sqrt{27}$

Câu 51: Cho 2 số thực x, y sao cho tổng của chúng không âm và đồng thời

$$\left(2^{2x-2y} + 4\right) \left(\frac{1+2^{x+y}}{1+4^x} + \frac{1+2^{x+y}}{1+4^y}\right) = 2^{2x-2y} + 2^{x-y+2} + 4$$

Biết rằng giá trị của biểu thức $P = x^3 + y^4 = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi biểu thức $m^2 + n$ có tất cả bao nhiêu ước số nguyên?

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

Câu 52: Cho các số thực $a, b, c \in [2; 3]$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức

$S = 4^a + 4^b + 4^c - \frac{1}{4}(a+b+c)^3$ là $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $P = m + 2n$

- A. $P = 257$ B. $P = 258$ C. $P = 17$ D. $P = 18$

Câu 53: Có tất cả bao nhiêu bộ số thực $(x; y; z)$ thỏa mãn
$$\begin{cases} 2^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot 4^{\sqrt[3]{y^2}} \cdot 16^{\sqrt[3]{z^2}} = 128 \\ (xy^2 + z^4)^2 = 4 + (xy^2 - z^4)^2 \end{cases}$$

- A. 3 B. 4 C. 1 D. 2

THPT Chuyên Quốc học Huế - Năm học 2017 - 2018

Câu 54: Cho hàm số $f(x) = \log_3 \frac{m^2 x}{1-x}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao $f(a) + f(b) = 3$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $e^{a+b} \leq e(a+b)$. Tính tích các phần tử của tập hợp S

- A. 27 B. $3\sqrt{3}$ C. $-3\sqrt{3}$ D. -27

Câu 55: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 5 \\ \log_m(3x+2y) - \log_3(3x-2y) = 1 \end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn $3x+2y \leq 5$. Tìm giá trị lớn nhất của m ?

- A. -5 B. $\log_3 5$ C. 5 D. $\log_5 3$

THPT Chuyên Lương Văn Tụy – Ninh Bình lần 1 năm 2017 – 2018

Câu 56: Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + m^2}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $f(a) + f(b) = 1$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $e^{a+b} \leq e^2(a+b-1)$. Tính tích các phần tử của S

- A. 81 B. -3 C. 3 D. -9

Câu 57: Cho phương trình $3^x = \sqrt{a \cdot 3^x \cos(\pi x) - 9}$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực?

- A. 1 B. 2018 C. 0 D. 2

Câu 58 : Cho các số thực x, y, z không âm thỏa mãn $0 < (x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 \leq 2$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4^x + 4^y + 4^z + \ln(x^4 + y^4 + z^4) - \frac{3}{4}(x+y+z)^4$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = 2a + 3b$

- A. 13 B. 42 C. 54 D. 71

Câu 59: Cho 2 hàm số $f(x) = (m-1)6^x - \frac{2}{6^x} + 2m + 1, h(x) = (x - 6^{1-x})$. Tìm tham số m để hàm số $g(x) = h(x).f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 0 với mọi $x \in [0; 1]$

- A. $m = 1$ B. $m \leq \frac{1}{2}$ C. $m \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ D. $m \geq 1$

Câu 60 : Số thực a nhỏ nhất để bất đẳng thức $\ln(x+1) \geq x - ax^2$ đúng với mọi số thực x là $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $T = 2m + 3n$

- A. $T = 5$ B. $T = 8$ C. $T = 7$ D. $T = 11$

Câu 61: Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 1$. Tính giá trị biểu thức $S = a + b + c$ khi biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$ đạt giá trị lớn nhất?

- A. 5 B. $3.2^{\frac{1}{35}}$ C. 6 D. 4

THPT Chuyên Thái Bình lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 62: Cho 2 số thực x, y phân biệt thỏa mãn $x, y \in (0; 2018)$.

Đặt $S = \frac{1}{y-x} \left(\ln \frac{y}{2018-y} - \ln \frac{x}{2018-x} \right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S \geq \frac{2}{1009}$ B. $S \leq \frac{2}{1009}$ C. $S \geq \frac{4}{1009}$ D. $S \leq \frac{4}{1009}$

Câu 63: Cho 3 số a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4}{\log_{\sqrt{bc}} a} + \frac{1}{\log_{ac} \sqrt{b}} + \frac{8}{3 \log_{ab} \sqrt[3]{c}}$$

- A. 20 B. 10 C. 18 D. 12

THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018

Câu 64: Cho a, b, c, d là các số thực dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (1 + a^2 + b^2 + a^2 b^2)(1 + c^2 + d^2 + c^2 d^2)$$

- A. 2 B. $4 \ln \frac{17}{16}$ C. $\left(\frac{17}{16} \right)^4$ D. $\ln \frac{17}{16}$

Câu 65: Cho 3 số thực x, y, z không âm thỏa mãn $2^x + 4^y + 8^z = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức } S = \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2}$$

- A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $1 - \log_4 3$

Câu 66: Cho các số thực $a, b, c \geq 1$ thỏa mãn $a + b + c = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_3 a + 2 \log_9 b + 3 \log_{27} c$$

- A. $\log_3 5$ B. 1 C. $\log_3 15$ D. $\log_3 \frac{5}{3}$

Câu 67: Biết a là số thực dương bất kì để bất đẳng thức $a^x \geq 9x + 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a \in (10^3; 10^4]$ B. $a \in (10^2; 10^3]$ C. $a \in (0; 10^2]$ D. $a \in (10^4; +\infty)$

THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 – năm 2017 – 2018

Câu 68: Gọi a là giá trị nhỏ nhất của $f(n) = \frac{\prod_{i=2}^n \log_3 i}{9^n}$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Có bao nhiêu số tự nhiên n để $f(n) = a$?

- A. 2 B. Vô số C. 1 D. 4

Câu 69: Cho 2 số thực x, y không âm thỏa mãn $2^{\frac{x+1}{x}} = \log_2 (14 - (y-2)\sqrt{y+1})$. Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2 - xy + 1$?

A. 3

B. 1

C. 2

D. 4

THPT Quãng Xương – Thanh Hóa lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 70: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $4^x + 9^y + 16^z = 2^x + 3^y + 4^z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2^{x+1} + 3^{y+1} + 4^{z+1}$

A. $\frac{9+\sqrt{87}}{2}$

B. $\frac{7+\sqrt{87}}{2}$

C. $\frac{5+\sqrt{87}}{2}$

D. $\frac{3+\sqrt{87}}{2}$

Câu 71: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{\ln x + 1}{\sqrt{\ln^2 x + 1}} + m \right|$ trên đoạn $[1; e^2]$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{-1+\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$

Câu 72: Biết α là số thực lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \leq e, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\alpha \in (0; 1)$

B. $\alpha \in (1; 2)$

C. $\alpha \in (-1; 0)$

D. $\alpha \in (2; 3)$

Câu 73: Cho 2 số thực a, b không âm thỏa mãn $\log_2 ab \in (0; 1)$ đồng thời

$$(\log_2 ab)^{\log_2 ab} + (1 - \log_2 ab)^{1 - \log_2 ab} = \sqrt{1 + \frac{2^{a-b+1}}{2^{2a-2b} + 1}}$$

Biết rằng $x^4 y^{10}$ được viết dưới dạng $m\sqrt{n}$ với a, b là các số nguyên dương. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ số $(m; n)$ như vậy?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Nguyễn Minh Tuấn

Câu 74: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a; b)$ thỏa mãn $0 < a, b \leq 100$ sao cho đồ thị của 2 hàm số $y = \frac{1}{a^x} + \frac{1}{b}$ và $y = \frac{1}{b^x} + \frac{1}{a}$ cắt nhau tại đúng 2 điểm phân biệt?

A. 9704

B. 9702

C. 9698

D. 9700

Câu 75: Cho 2 số thực x, y không âm thỏa mãn đẳng thức sau:

$$\log_2(\log_3(-x^2 - 9y^2 + 6xy - 2x + 6y + 2)) = \log_3(\log_2(9x^2 + y^2 - 6xy - 6x + 2y + 3))$$

Biết rằng xy^2 được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên không âm và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi $m+n$ có giá trị bằng bao nhiêu

A. 8

B. 9

C. 10

D. 11

Nguyễn Minh Tuấn

Câu 76: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $0 < x - y < \frac{\pi}{2}$ và đồng thời

$$(\tan(x-y))^{\sin(x-y)} + (\cot(x-y))^{\cos(x-y)} = \log_2(4 - x^2 y^2)$$

Tính giá trị của biểu thức $\sin\left(x^2 y^2 + x - y + \frac{\pi}{4}\right)$?

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 0 C. 1 D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Nguyễn Minh Tuấn

Câu 77: Cho các số thực a, b, c có tổng bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$P = \sqrt{4^a + 9^b + 16^c} + \sqrt{9^a + 16^b + 4^c} + \sqrt{16^a + 4^b + 9^c}$$

- A. $2\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $6\sqrt{3}$

Câu 78: Cho các số thực $x, y, z \in [0; 1]$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = (2^x + 2^y + 2^z)(2^{-x} + 2^{-y} + 2^{-z})$ được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên không âm và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi $m+n$ có giá trị bằng bao nhiêu?

- A. 86 B. 87 C. 88 D. 89

Câu 79: Cho các số thực x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$P = \sqrt{3 + 2011^{x+y-2z}} + \sqrt{3 + 2011^{y+z-2x}} + \sqrt{3 + 2011^{z+x-2y}}$$

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

Câu 80: Cho hai các số thực a, b, c, d, e dương thỏa mãn $a + b + c + d + e = 1000$ và

$$\begin{cases} a - b + c - d + e > 0 \\ a + b - c + d - e > 0 \\ -a + b + c - d + e > 0 \\ a - b + c + d - e > 0 \\ -a + b - c + d + e > 0 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = (a + c)^{b+d}$

- A. 499^{499} B. 500^{500} C. 500^{499} D. 499^{500}

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho 2 số $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $4\log_2 2x \cdot \log_2 2y = \log_2^2 4xy$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2^{|\sin x|} + 2^{|\cos y|}$. Biết $M \cdot n = a \cdot 2^{1 + \frac{1}{\sqrt{b}}}$ với a, b là các số nguyên dương và $a, b > 0$. Tính giá trị của biểu thức $a^3 + b^3$

- A. 31 B. 32 C. 33 D. 35

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$4\log_2 2x \cdot \log_2 2y = \log_2^2 4xy \Leftrightarrow 4\log_2 2x \cdot \log_2 2y = (\log_2 2x + \log_2 2y)^2 \\ \Leftrightarrow (\log_2 2x - \log_2 2y)^2 = 0 \Leftrightarrow \log_2 2x = \log_2 2y \Leftrightarrow x = y$$

Thế vào giả thiết ta được $P = h(x) = 2^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|}$ ($t \in [0; 1]$). Đặt $t = |\sin x|$ khi đó ta được

$$f(t) = 2^t + 2^{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} 2^{\sqrt{1-t^2}} \ln 2$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2^t \ln 2 = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} 2^{\sqrt{1-t^2}} \ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (0; 1) \\ \frac{2^t}{t} = \frac{2^{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$$

Xét hàm số $g(a) = \frac{2^a}{a}$ trên khoảng $(0; 1)$ ta có $g'(a) = \frac{2^a(a \ln 2 - 1)}{a^2} < 0 \forall a \in (0; 1)$.

Do đó $g(a)$ nghịch biến trên $(0; 1)$ vì vậy ta được $t = \sqrt{1-t^2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{Mặt khác ta lại có } f(0) = f(1) = 3; y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \begin{cases} \min P = 3 \\ \max P = 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \end{cases}$$

Chọn ý D.

Câu 2: Cho $x \geq 2, y \geq 1$ thỏa mãn $\log_2 \frac{8}{x} \cdot \log_2 \frac{x}{y} \cdot \log_2^2 2y = 4$. Đặt $P = 2^x + 2^y$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P < 19$

B. $P > 19$

C. $P = 19$

D. Không tồn tại

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Nhìn thoáng qua thì nhiều bạn sẽ cho rằng đây là dạng toán rút thế để tìm min, max, tuy nhiên ở bài này ta phải sử dụng đến kiến thức của bất đẳng thức. Biến đổi giả thiết ta có:

$$\log_2 \frac{8}{x} \cdot \log_2 \frac{x}{y} \cdot \log_2^2 2y = 4 \Leftrightarrow (3 - \log_2 x)(\log_2 x - \log_2 y)(\log_2 y + 1)^2 = 4$$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$(3 - \log_2 x)(\log_2 x - \log_2 y)(\log_2 y + 1)^2 = 4(3 - \log_2 x)(\log_2 x - \log_2 y) \frac{\log_2 y + 1}{2} \cdot \frac{\log_2 y + 1}{2} \\ \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} 4 \left(\frac{3 - \log_2 x + \log_2 x - \log_2 y + \frac{\log_2 y + 1}{2} + \frac{\log_2 y + 1}{2}}{4} \right)^4 = 4 = VP$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 3 - \log_2 x = \log_2 x - \log_2 y \\ 3 - \log_2 x = \frac{\log_2 y + 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $P = 18 < 19$

Chọn ý A.

Câu 3: Cho 2 số thực $x, y > 1$ thỏa mãn điều kiện:

$$1 + \log_2 3y + 2\log_2 3y(3 - \log_2 3xy) = \frac{9}{2} \log_x 2.$$

Đặt $P = x^2 + xy + y^2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P \in [11; 12]$

B. $P \in [12; 13]$

C. $P \in [10; 11]$

D. $\min P = 10$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Ý tưởng của mình ở bài này là sẽ kiểm một điều kiện ràng buộc giữa x, y rồi sau đó chỉ ra giả thiết chỉ nhận duy nhất 1 bộ nghiệm. Vậy làm sao để tìm được mối liên hệ này? Dưới đây là cách giải quyết của mình.

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\begin{aligned} 1 + \log_2 3y + 2\log_2 3y(3 - \log_2 3xy) &= \frac{9}{2} \log_x 2 \\ \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 x \log_2 3y + 2\log_2 3y \log_2 x \log_2 \frac{8}{3xy} &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Ta nhận thấy rằng $\log_2 x + \log_2 3y + \log_2 \frac{8}{3xy} = 3$.

$$\text{Để đơn giản ta đặt } \begin{cases} \log_2 x = a \\ \log_2 3y = b \\ \log_2 \frac{8}{3xy} = c \end{cases} \quad \text{Lúc này ta có 2 giả thiết } \begin{cases} a + b + c = 3 \\ a + ab + 2abc = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Thế $b = 3 - a - c$ vào giả thiết dưới ta được:

$$(2c + 1)a^2 + (2c^2 - 5c - 4)a + \frac{9}{2} = 0$$

Coi vế trái là tam thức bậc 2 theo biến a với c là tham số ta có:

$$\Delta = (2c^2 - 5c - 4)^2 - 18(2c + 1) = (2c - 1)^2 (c^2 - 4c - 2)$$

Chú ý với điều kiện $x, y > 1$ ta sẽ có $a, b, c > 0$. Mặt khác $a + b + c = 3 \Rightarrow c < 3$

Suy ra $\Delta \leq 0$, điều này đồng nghĩa VT ≥ 0

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = \frac{3}{2} \\ \log_2 3y = 1 \\ \log_2 \frac{8}{3xy} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Từ đây suy ra $P = \frac{76 + 12\sqrt{2}}{9}$.

Chọn ý C.

Câu 4: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \geq 2, y \geq \frac{2}{3}$ đồng thời:

$$(\log_2 x^5 + \log_2 3y)(\log_2^2 3y + 12\log_2 x - 4\log_2 x \log_2 3xy) = 80$$

Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá $x + 3y$?

A. 7

B. 8

C. 5

D. 11

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Giống với bài trên ý tưởng vẫn sẽ là đi tìm mối liên hệ giữa x, y tuy nhiên nếu không tình ý thì sẽ khá vất vả. Chú ý như với bài trước ta sẽ cần làm xuất hiện một biểu thức có dạng như $\log_2 \frac{a}{b \cdot xy}$.

Dễ thấy ở bên trong biểu thức thứ 2 nếu đặt nhân tử chung ta sẽ tìm được 1 biểu thức như vậy. Lời giải của bài toán như sau.

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\begin{aligned} & (\log_2 x^5 + \log_2 3y)(\log_2^2 3y + 12\log_2 x - 4\log_2 x \log_2 3xy) = 80 \\ & \Leftrightarrow (5\log_2 x + \log_2 3y)(\log_2^2 3y + 4\log_2 x(3 - \log_2 3xy)) = 80 \\ & \Leftrightarrow (5\log_2 x + \log_2 3y) \left(\log_2^2 3y + 4\log_2 x \log_2 \frac{8}{3xy} \right) = 80 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \left(\log_2 x, \log_2 3y, \log_2 \frac{8}{3xy} \right) \rightarrow (a, b, c) \Rightarrow a + b + c = 3.$$

$$\text{Giả thiết lúc này trở thành } (5a + b)(b^2 + 4ac) = 80$$

Với điều kiện $x \geq 2, y \geq \frac{2}{3} \Rightarrow a, b, c \geq 0$ từ đó ta có $5a + b \leq 5\left(a + \frac{b}{2}\right)$ và đồng thời

$$b^2 + 4ac \leq b^2 + 2(ab + bc) + 4ac = 4\left(a + \frac{b}{2}\right)\left(c + \frac{b}{2}\right)$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có } P \leq 10\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 (2c + b) \leq 10\left(\frac{2a + 2b + 2c}{3}\right)^3 = 80$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 3y = 0 \\ \log_2 \frac{8}{3xy} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Do đó $x + 3y = 5$. Vậy có tất cả 5 số nguyên dương không vượt quá $x + 3y$

Chọn ý C.

Câu 5: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x, y \geq 1$ đồng thời:

$$\left(\log_2 x + \log_2 y^2 + \log_2 \frac{8}{x^3 y^3} \right) \left(\log_2 x^6 + \log_2 y^3 + \log_2 \frac{4}{x^2 y^2} \right) = 8$$

Hỏi BCNN của $x^2 y$ và 4 bằng bao nhiêu?

A. 4

B. 8

C. 12

D. 16

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Sau khi đã tìm hiểu ý tưởng ở 2 bài toán trên thì bài toán này chắc hẳn đã đơn giản hơn với các bạn rồi. Biến đổi giả thiết ta được:

$$\begin{aligned} & \left(\log_2 x + \log_2 y^2 + \log_2 \frac{8}{x^3 y^3} \right) \left(\log_2 x^6 + \log_2 y^3 + \log_2 \frac{4}{x^2 y^2} \right) = 8 \\ \Leftrightarrow & \left(\log_2 x + 2\log_2 y + 3\log_2 \frac{2}{xy} \right) \left(6\log_2 x + 3\log_2 y + 2\log_2 \frac{2}{xy} \right) = 8 \end{aligned}$$

Đặt chú ý rằng $\log_2 x + \log_2 y + \log_2 \frac{2}{xy} = 1 \Rightarrow \log_2 \frac{2}{xy} = 1 - \log_2 x - \log_2 y$

Thế vào giả thiết ta được:

$$(3 - 2\log_2 x - \log_2 y)(2 + 4\log_2 x + \log_2 y) = 2(3 - 2\log_2 x - \log_2 y) \left(1 + 2\log_2 x + \frac{\log_2 y}{2} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$2(3 - 2\log_2 x - \log_2 y) \left(1 + 2\log_2 x + \frac{\log_2 y}{2} \right) \leq 2 \left(\frac{4 - \frac{\log_2 y}{2}}{2} \right)^2 \leq 8 (\log_2 y \geq 0)$$

$$\text{Dấu "=" khi và chỉ khi } \begin{cases} \log_2 x = \frac{1}{2} \\ \log_2 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Chọn ý A.

Câu 6: Cho hai số thực $x, y \geq 1$ thỏa mãn điều kiện:

$$\left| \log_2 2(x+y) \right| + \left| \log_2 \frac{2(x+y)}{x^2 + 4y^2 + 1} \right| = \log_2 (4xy + 1)$$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $f(x, y) = 2xy + \sqrt{x+2y} - x^2 - 4y^2$ bằng?

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{3}{7}$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Nhìn hình thức bài toán khá công kênh, thấy rằng bài toán có chứa dấu trị tuyệt đối nên ta sẽ nghĩ ngay tới bất đẳng thức liên quan tới nó.

Áp dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối ta có:

$$\begin{aligned} & \left| \log_2 2(x+y) \right| + \left| \log_2 \frac{2(x+y)}{x^2+4y^2+1} \right| = \left| \log_2(x+y) + 1 \right| + \left| 1 - \log_2 \frac{x^2+4y^2+1}{x+y} \right| \\ & = \left| \log_2(x+y) + 1 \right| + \left| \log_2 \frac{x^2+4y^2+1}{x+y} - 1 \right| \geq \left| \log_2(x^2+4y^2+1) \right| = \log_2(x^2+4y^2+1) \end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM - GM ta lại có $\log_2(x^2+4y^2+1) \geq \log_2(4xy+1) = VP$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \left(1 - \log_2 \frac{x^2+4y^2+1}{x+y}\right)(\log_2(x+y)+1) \\ x = 2y \end{cases}$

Thế vào $f(x, y)$ ta được $f(x, y) = g(x) = \sqrt{2x} - x^2$

Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2x}} = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \max_{[1;+\infty)} g(x) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$

Chọn ý C.

Câu 7: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\begin{cases} 3 \leq x \leq 27 \\ 2 \leq y \leq 16 \end{cases}$ đồng thời

$$\log_3 \frac{27}{x+y} \log_2 \frac{16}{y-2x+1} = \frac{36}{\log_3(x+y)^2 + \log_2(y-2x+1)^3}$$

Đặt $P = \sqrt{x^2+1} + 2^y + \log(1-xy)$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P > 4$

B. $P = 4$

C. $P < 4$

D. $P = 3$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Sau khi đã làm quen với hướng giải thì bài này có lẽ khá là đơn giản với các bạn rồi, chỉ cần sử dụng bất đẳng thức AM - GM để triệt tiêu các biểu thức chứa biến là sẽ ra.

Biến đổi giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} & \log_3 \frac{27}{x+y} \log_2 \frac{16}{y-2x+1} = \frac{36}{\log_3(x+y)^2 + \log_2(y-2x+1)^3} \\ & \Leftrightarrow (3 - \log_3(x+y))(4 - \log_2(y-2x+1))(2\log_3(x+y) + 3\log_2(y-2x+1)) = 36 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\begin{aligned} & (3 - \log_3(x+y))(4 - \log_2(y-2x+1))(2\log_3(x+y) + 3\log_2(y-2x+1)) \\ & = \frac{1}{6}(6 - 2\log_3(x+y))(12 - 3\log_2(y-2x+1))(2\log_3(x+y) + 3\log_2(y-2x+1)) \\ & \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{1}{6} \left(\frac{6 - 2\log_3(x+y) + 12 - 3\log_2(y-2x+1) + 2\log_3(x+y) + 3\log_2(y-2x+1)}{3} \right)^3 = 36 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} \log_3(x+y)=0 \\ \log_2(y-2x+1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ y-2x+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=\frac{5}{3} \end{cases}$$

Từ đó suy ra $P > 4$.

Chọn ý A.

Câu 8: Cho hai số thực $x \geq \frac{3}{2} \geq y \geq 0$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\log_2(3x-y)}{4^{2x-3y-1}} \sqrt{4^{2x-3y-1}-1} + \sqrt{\log_2 \frac{3x-y}{2}} = \log_2(3x-y)$$

Khi đó biểu thức $P = 4xy$ có bao nhiêu ước số nguyên?

A. 2

B. 4

C. 5

D. 8

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\begin{aligned} \frac{\log_2(3x-y)}{4^{2x-3y-1}} \sqrt{4^{2x-3y-1}-1} + \sqrt{\log_2 \frac{3x-y}{2}} &= \log_2(3x-y) \\ \Leftrightarrow \log_2(3x-y) \sqrt{4^{2x-3y-1}-1} + 4^{2x-3y-1} \sqrt{\log_2(3x-y)-1} &= \log_2(3x-y) \cdot 4^{2x-3y-1} \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có:

- $\log_2(3x-y) \sqrt{4^{2x-3y-1}-1} \leq \log_2(3x-y) \cdot \frac{4^{2x-3y-1}-1+1}{2} = \frac{4^{2x-3y-1} \log_2(3x-y)}{2}$
- $4^{2x-3y-1} \sqrt{\log_2(3x-y)-1} \leq 4^{2x-3y-1} \cdot \frac{\log_2(3x-y)-1+1}{2} = \frac{4^{2x-3y-1} \log_2(3x-y)}{2}$

Cộng 2 vế bất đẳng thức ta được $VT \leq VP$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} 4^{2x-3y-1} = 2 \\ \log_2(3x-y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y = \frac{3}{2} \\ 3x-y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $P = 4xy = 3$ có tất cả 4 ước số nguyên là $\pm 1, \pm 3$

Chọn ý B.

Câu 9: Cho hai số $x, y > \frac{1}{2}$ thỏa mãn $x \neq 2y$ đồng thời $2^{\frac{(x-2y)^4+1}{(x-2y)^2}} (e^{x+y} - e^2(x+y-2)) = 4e^2$

Đặt $P = x + y$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P > 5$

B. $\min P = 1$

C. $P < 3$

D. $\max P = 4$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Đây là một câu khá là hay chắc hẳn nhiều bạn sẽ nghĩ tới phương pháp đánh giá đầu tiên, ý tưởng đó là đúng nhưng trước tiên ta cần phải biết tới 1 bất đẳng thức phụ sau.

Bất đẳng thức phụ hay gặp: $e^x \geq x + 1$

Chứng minh: Xét hàm số $f(x) = e^x - x - 1 \Rightarrow f'(x) = e^x - 1, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\Rightarrow \min f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow e^x \geq x + 1 \forall x$$

Biến đổi giả thiết ta được:

$$2^{\frac{(x-2y)^4+1}{(x-2y)^2}} (e^{x+y} - e^2(x+y-2)) = 4e^2 \Leftrightarrow 2^{\frac{(x-2y)^4+1}{(x-2y)^2}} (e^{x+y-2} - (x+y-2)) = 4$$

Áp dụng bất đẳng thức phụ trên ta có: $e^{x+y-2} - (x+y-2) \geq 1$

Mặt khác cũng theo AM - GM ta có $2^{\frac{(x-2y)^4+1}{(x-2y)^2}} = 2^{\frac{(x-2y)^2}{(x-2y)^2} + \frac{1}{(x-2y)^2}} \geq 2^2 = 4$

Vậy VT ≥ 4 . Dấu "=" khi và chỉ khi $\begin{cases} (x-2y)^2 = 1 \\ x+y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

Chọn ý C.

Câu 10: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện

$$\frac{2}{2^{x-2y} + 1} = 2 - \log_{y^2+y-x^2-x} (x+y+1)$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_{x+y+1} (y-x) \cdot 2^{2x-4y}$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{1}{16}$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Đến bài này sẽ không còn dễ như những bài toán trước nữa, ta cần một chút kỹ năng biến đổi để có thể có thêm định hướng giải bài toán này.

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\begin{aligned} \frac{2}{2^{x-2y} + 1} = 2 - \log_{y^2+y-x^2-x} (x+y+1) &\Leftrightarrow \frac{2}{2^{x-2y} + 1} = 2 - \frac{1}{\log_{x+y+1} (x+y+1)(y-x)} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{2^{x-2y} + 1} = 2 - \frac{1}{\log_{x+y+1} (y-x) + 1} \Leftrightarrow \frac{2}{2^{x-2y} + 1} + \frac{1}{\log_{x+y+1} (y-x) + 1} = 2 \end{aligned}$$

Khi đó P viết lại thành $P = \log_{x+y+1} (y-x) \cdot (2^{x-2y})^2$

Để đơn giản ta đặt $\begin{cases} a = \log_{x+y+1} (y-x) \\ b = 2^{x-2y} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{b+1} + \frac{1}{a+1} = 2 \Rightarrow a = \frac{b+1}{2b} - 1$

Thế vào ta được $P = \frac{b^2(1-b)}{2b} = \frac{b(1-b)}{2} \leq \frac{1}{8}$

Chọn ý C.

Câu 11: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{5}{2} \ln xy = \frac{5}{2}$

Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá $x + y$?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Lời giải

Với bài này ta sẽ sử dụng cách dồn biến về đại lượng xy . Có thể thấy là vế trái là đa thức đối xứng nên ta cho $x = y \Rightarrow$

$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{5}{2x^2} = \frac{5}{2xy}$. Vậy bài toán sẽ thêm bớt như sau:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{5}{2} \ln xy &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{5}{2xy} + \frac{5}{2} \ln xy + \frac{5}{2xy} &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{2xy} + \frac{5}{2} \ln xy + \frac{5}{2xy} &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{x^2 y^2} - \frac{(x-y)^2}{2xy(x^2 + y^2)} + \frac{5}{2} \ln xy + \frac{5}{2xy} &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(2x^2 - xy + 2y^2)}{2x^2 y^2(x^2 + y^2)} + \frac{5}{2} \left(\frac{1}{xy} - \ln \left(\frac{1}{xy} \right) \right) &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t - \ln t (t > 0) \Rightarrow f'(t) = \frac{5}{2} \left(1 - \frac{1}{t} \right), f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow f(t) \geq f(1) = \frac{5}{2}$

Vậy VT $\geq$ VP. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$

Chọn ý C.

Câu 12: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện $0 \leq x^2 - y^2 \leq \frac{\pi}{2}, x, y > 0$ và

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(2^{\sin(x^2 - y^2)} + 2^{\tan(x^2 - y^2)} \right) = \frac{2 \cdot 2^x + 4^y}{\sqrt{4 \cdot 4^x + 16^y}}$$

Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\sin(x - y) + \cos \left(\frac{\pi}{2} (x + y - 1) \right) \right)^{2018}$

- A. 1 B. 0 C. π D. 2

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có $2^{\sin(x^2 - y^2)} + 2^{\tan(x^2 - y^2)} \geq 2\sqrt{2^{\sin(x^2 - y^2) + \tan(x^2 - y^2)}}$

Xét hàm số $f(t) = \sin t + \tan t \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow f'(t) = \cos t + \frac{1}{\cos^2 t} \geq 0 \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(0) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{2^{\sin(x^2 - y^2) + \tan(x^2 - y^2)}} \geq 2$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\frac{2 \cdot 2^x + 4^y}{\sqrt{4 \cdot 4^x + 16^y}} = \frac{2 \cdot 2^x + 4^y}{\sqrt{4 \cdot (2^x)^2 + (4^y)^2}} \leq \frac{\sqrt{2 \cdot (4 \cdot (2^x)^2 + (4^y)^2)}}{\sqrt{4 \cdot (2^x)^2 + (4^y)^2}} = \sqrt{2}$$

Từ đó suy ra $VT \geq \sqrt{2} \geq VP$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2 \cdot 2^x = 4^y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + 1 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1 \Rightarrow P = 0$

Chọn ý B.

Câu 13: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 2 = 0$

Đặt $P = \sin^{2018}(y + 1) + x^{2018}$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $P = 1$ B. $P = 2$ C. $P = 3$ D. $P \in [4; 5]$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\begin{aligned} 4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1) + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1) + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + \sin^2(2^x + y - 1) + \cos^2(2^x + y - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2^x - 1 + \sin(2^x + y - 1))^2 + \cos^2(2^x + y - 1) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + \sin(2^x + y - 1) = 1 \\ \cos^2(2^x + y - 1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $\cos^2(2^x + y - 1) = 0 \Rightarrow \sin(2^x + y - 1) = \pm 1$.

- Nếu $\sin(2^x + y - 1) = 1 \Rightarrow 2^x = 0$ - Phương trình vô nghiệm
- Nếu $\sin(2^x + y - 1) = -1 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \sin(y + 1) = -1$

Vậy giá trị của biểu thức $P = 2$.

Chọn ý B.

Câu 14: Cho hai số thực $x, y \geq 1$ thỏa mãn $\log_2^2 2x = 2\log_2^2(y^2 + 1)(\log_2^2 x + 1)$

Tính giá trị của biểu thức $P = \log_2(x + y)$

- A. $\log_2 3$ B. $\log_2 5$ C. 1 D. 2

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Ý tưởng bài này giống với bài 12, nhưng hình thức đã đơn giản hơn rất nhiều.

Biến đổi giả thiết ta có:

$$\log_2^2 2x = 2\log_2^2(y^2 + 1)(\log_2^2 x + 1) \Leftrightarrow \frac{(\log_2(x) + 1)^2}{\log_2^2 x + 1} = 2\log_2^2(y^2 + 1)$$

Xét hàm $f(t) = \frac{(t+1)^2}{t^2+1} (t \geq 0) \Rightarrow f'(t) = \frac{-2t^2+2}{(t^2+1)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow f(t) \leq f(1) = 2$

Từ đó suy ra $\frac{(\log_2(x)+1)^2}{\log_2^2 x + 1} \leq 2$. Mặt khác theo giả thiết ta có:

$$2\log_2(y^2+1) \geq 2\log_2(1+1) = 2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Chọn ý C.

Câu 15: Cho hai số thực dương $x \geq y \geq 1$ thỏa mãn điều kiện:

$$4\log_2(x+y)+12 = (2^{x-y}+1)\left(\log_2(x+y)+5+\sqrt{2\log_2^2(x+y)+2}\right)$$

Đặt $P = a^3 + b^3$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = 2$

B. $P = 3$

C. $P = 1$

D. $P < 1$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Vẫn là ý tưởng của bài toán 12 và 14 tuy nhiên với bài này cần một chút kiến thức về bất đẳng thức thì sẽ giải nhanh hơn rất nhiều thay vì cách đạo hàm truyền thống.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} \log_2(x+y)+3 &= \frac{\log_2(x+y)+5+\log_2(x+y)+1}{2} \leq \frac{\log_2(x+y)+5+\sqrt{2(\log_2^2(x+y)+1)}}{2} \\ &\Rightarrow \frac{4\log_2(x+y)+12}{\log_2(x+y)+5+\sqrt{2(\log_2^2(x+y)+1)}} \leq 2 \end{aligned}$$

Mặt khác theo giả thiết ta lại có $2^{x-y}+1 \geq 2^0+1 = 2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$

Chọn ý A.

Câu 16: Cho 2 số thực x, y dương thỏa mãn điều kiện

$$\log_2^2 2x + \log_2^2 4y + (1 - \log_2 xy)^3 = \frac{11}{2}$$

Đặt $P = x^3 + y^3$. Hỏi P có bao nhiêu ước số nguyên?

A. 1

B. 2

C. 5

D. 0

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Đây là dạng toán quen thuộc mà ta đã có hướng giải ở các bài toán trước.

$$\text{Đặt } \left(\log_2 2x, \log_2 4y, \log_2 \frac{2}{xy} \right) \rightarrow (a, b, c) \Rightarrow a + b + c = 4$$

Giả thiết trở thành $\frac{11}{2}$. Nhận thấy 2 giả thiết đều là đa thức đối xứng theo 2 biến a, b nên dấu “=” sẽ xảy ra tại $a = b = x, c = y$ đến đây ta sẽ tham số hóa để tìm điểm rơi.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{cases} a^2 + x^2 \geq 2ax \\ b^2 + x^2 \geq 2bx \\ c^2 + y^2 \geq 2cy \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 2x(a+b) + 2y^2c - 2x^2 - 2y^2$$

Đến đây ta cần tìm x, y thỏa mãn $\begin{cases} 2x = 3y^2 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$. Vậy P không phải là số nguyên

nên không có ước nguyên dương.

Chọn ý D.

Câu 17: Cho 2 số thực x, y không âm thỏa mãn điều kiện $x \geq y + 1$ đồng thời

$$2^{x-y} + 2^{2y-2x} = 9.2^{-2x+y}$$

Đặt $P = x + y$. Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá P?

A. 1

B. 2

C. 5

D. 0

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Đây là một bài toán với cách phát biểu đơn giản nhưng tuy nhiên một số bạn sẽ rất dễ bị nhầm khi áp dụng bất đẳng thức AM – GM. Sau đây mình sẽ chỉ ra một lỗi có thể một vài bạn mắc phải.

Với ý tưởng của các bài toán cũ thì chúng ta thường sẽ có đánh giá sau:

$$2^{x-y} + 2^{2y-2x} = 2^{x-y} + \frac{1}{(2^{x-y})^2} = \frac{1}{2} \cdot 2^{x-y} + \frac{1}{2} \cdot 2^{x-y} + \frac{1}{(2^{x-y})^2} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

Sau khi có đánh giá trên thì tiếp theo ta sẽ đánh giá vế trái để chỉ ra dấu “=”, nhưng tuy nhiên điều này là không thể do điểm rơi của bài toán không phải như thế. Để giải quyết được ta phải chú ý thêm tới điều kiện mà đề bài đã cho là $x \geq y + 1$ từ đây ta sẽ suy ra

$2^{x-y} \geq 2$. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$2^{x-y} + 2^{2y-2x} = 2^{x-y} + \frac{1}{(2^{x-y})^2} = \frac{2^{x-y}}{8} + \frac{2^{x-y}}{8} + \frac{1}{(2^{x-y})^2} + \frac{3 \cdot 2^{x-y}}{4} \geq \frac{3}{4} + \frac{3 \cdot 2^{x-y}}{4} \geq \frac{9}{4}$$

Mặt khác ta lại có $x \geq y + 1 \Rightarrow 2^{-2x+y} \leq 2^{-2y+y-2} = 2^{-y-2} \leq 2^{-2} = \frac{1}{4}$

Vậy VT $\geq$ VP. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Chọn ý A.

Nhận xét. Ngoài mắc phải lỗi như trên thì một số ít khi lần đầu gặp sẽ bị nhầm rằng đây là dạng toán tìm mối liên hệ x, y , nhưng ta phải tinh ý nhận ra yêu cầu của đề bài là hỏi có bao nhiêu số nguyên dương để nhận ra phải sử dụng tới phương pháp đánh giá!

Câu 18: Cho 2 số x, y thỏa mãn $\begin{cases} x \geq 1-y \\ y \leq 0 \end{cases}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\sqrt{\ln(x+y)} + \sqrt{\ln(1-y)} = 2\sqrt{\ln \frac{x+1}{2}}$$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + xy + y^2$ là?

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{4}$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Thực chất đây là một bài toán khá là đơn giản, để ý tới yêu cầu của bài toán là tìm giá trị nhỏ nhất nên chắc chắn từ giả thiết ta sẽ phải tìm được mối liên hệ giữa x và y .

Đặt $\begin{cases} x+y=a \\ 1-y=b \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{a+b}{2}$. Giả thiết trở thành $\sqrt{\ln a} + \sqrt{\ln b} = 2\sqrt{\ln \frac{a+b}{2}}$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\ln a + \ln b \geq 2\sqrt{\ln a \cdot \ln b} \Rightarrow 2(\ln a + \ln b) \geq (\sqrt{\ln a} + \sqrt{\ln b})^2$$

Mặt khác $\ln \frac{a+b}{2} \geq \ln \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \geq \frac{1}{4}(\sqrt{\ln a} + \sqrt{\ln b})^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{\ln a} + \sqrt{\ln b}) \leq \sqrt{\ln \frac{a+b}{2}}$

Vậy VT $\leq$ VP. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b \Rightarrow x + y = 1 - y \Rightarrow x = 1 - 2y$

Khi đó $P_{\min} = \frac{1}{4}$.

Chọn ý D.

Câu 19: Cho 2 số thực $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{\log_2 x + \log_4^2 y^2} + \sqrt{\log_2^2 x + 2} = \sqrt{\log_2 \frac{y^2}{x}}$$

Có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá $8xy$?

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\log_2 x + \log_4 y^2} + \sqrt{\log_2^2 x + 2} = \sqrt{\log_2 \frac{y^2}{x}} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{\log_2 x + \log_2^2 y} + \sqrt{\log_2^2 x + 2} = \sqrt{2 \log_2 y - \log_2 x} \\ \Leftrightarrow & \log_2 x + \log_2^2 y - 2 \log_2 y + \log_2^2 x + 2 + \log_2 x + 2 \sqrt{\log_2 x + \log_2^2 y} \sqrt{\log_2^2 x + 2} = 0 \\ \Leftrightarrow & (\log_2 x + 1)^2 + (\log_2 y - 1)^2 + 2 \sqrt{\log_2 x + \log_2^2 y} \sqrt{\log_2^2 x + 2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \log_2 x = -1 \\ \log_2 y = 1 \\ \log_2 x + \log_2^2 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó $8xy = 8$, vậy có tất cả 8 số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán

Chọn ý D.

Câu 20: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $(1 + 2^{x+y})(1 + 2^{x+2y})(1 + 2^{x-3y}) = (1 + 2^x)^3$.

Đặt $P = e^{x^2+y^2} + x^2 + \frac{y^2}{4} - (x-2y)^2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = e - 1$

B. $P = e$

C. $\max P = e^2$

D. $P = e - 2$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Thực chất câu này chỉ để giới thiệu cho các bạn một bất đẳng thức quen thuộc, chứ đề thi chắc sẽ không ra dạng kiểu này. Chú ý tới bất đẳng thức Holder mà mình đã giới thiệu ở đầu.

Một bất đẳng thức mà ta hay gặp: $(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3$

Có bổ đề sau: Cho các số thực dương $a, b, c, x, y, z, m, n, p$ khi đó ta luôn có:

$$(a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(m^3 + n^3 + p^3) \geq (axm + byn + czp)^3$$

Chứng minh: Theo AM – GM ta có:

$$\begin{aligned} 1. & \frac{a^3}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{m^3}{m^3 + n^3 + p^3} + \frac{x^3}{x^3 + y^3 + z^3} \geq \frac{3axm}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3 + c^3)(m^3 + n^3 + p^3)(x^3 + y^3 + z^3)}} \\ 2. & \frac{b^3}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{n^3}{m^3 + n^3 + p^3} + \frac{y^3}{x^3 + y^3 + z^3} \geq \frac{3byn}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3 + c^3)(m^3 + n^3 + p^3)(x^3 + y^3 + z^3)}} \\ 3. & \frac{c^3}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{p^3}{m^3 + n^3 + p^3} + \frac{z^3}{x^3 + y^3 + z^3} \geq \frac{3cpz}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3 + c^3)(m^3 + n^3 + p^3)(x^3 + y^3 + z^3)}} \end{aligned}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên có điều phải chứng minh.

Quay lại bài khi đó phương trình trở thành: $(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3$

Theo bất đẳng thức Holder ta có $\prod_{cyc} \left[\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 + (\sqrt[3]{a})^3 \right] \geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3$

Với bài toán này nếu đặt $2^{x+y} = a, 2^{x+2y} = b, 2^{x-3y} = c \Rightarrow \sqrt[3]{abc} = 2^x$, đây chính là dạng trên.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $2^{x+y} = 2^{x+2y} = 2^{x-3y} \Leftrightarrow x = y = 0$

Vậy khi đó $P = e$.

Chọn ý B.

Câu 21: Cho 2 số thực $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện

$$(2^{x+y-1} + 2^{x+2y-1})(2^{3x+4y-3} + 2^{1-x-y}) = 2^{2x+3y}$$

Biết rằng biểu thức $\frac{x^2 + y^2}{4} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tổng $a + b$ bằng?

A. 5

B. 6

C. 4

D. 7

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Nhìn chung bài toán nhìn rất công kênh, ta sẽ tư duy theo hướng mà ta hay nghĩ tới nhất đó là quy đồng. Biến đổi giả thiết ta được:

$$(2^{x+y-1} + 2^{x+2y-1})(2^{3x+4y-3} + 2^{1-x-y}) = 2^{2x+3y}$$

$$\Leftrightarrow 2^{4x+5y-4} + 2^{4x+6y-4} + 2^y + 1 = 2^{2x+3y}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x+2y-4} + 2^{2x+3y-4} + 2^{-2x-2y} + 2^{-2x-3y} = 1$$

Đến đây mọi việc trở nên rất đơn giản phải không nào? Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$2^{2x+2y-4} + 2^{-2x-2y} + 2^{-2x-3y} + 2^{2x+3y-4} \geq 2\sqrt{2^{2x+2y-4} \cdot 2^{-2x-2y}} + 2\sqrt{2^{-2x-3y} \cdot 2^{2x+3y-4}} = 1 = VP$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{4} = \frac{1}{4}$

Chọn ý A.

Câu 22: Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $\frac{1}{\sqrt{2^{2x} + 3 \cdot 4^y}} + \frac{1}{\sqrt{4^y + 3 \cdot 2^{2x}}} = \frac{x+y - e^{x+y-3}}{2(2^{x-1} + 2^{y-1})}$

Khi đó $x^3 + y^4$ được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi $T = m + n$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 149

B. 147

C. 160

D. 151

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Nhìn hình thức rất công kênh, nhưng hãy chú ý tới đại lượng $x + y - e^{x+y-3}$, điều này làm ta liên tưởng tới bất đẳng thức phụ $e^x \geq x + 1$, đến đây hướng đi của bài toán sẽ như sau:

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{2^{2x} + 3 \cdot 4^y}} + \frac{1}{\sqrt{4^y + 3 \cdot 2^{2x}}} = \frac{x+y - e^{x+y-3}}{2(2^{x-1} + 2^{y-1})} \Leftrightarrow \frac{2^x + 2^y}{\sqrt{2^{2x} + 3 \cdot 2^{2y}}} + \frac{2^x + 2^y}{\sqrt{2^{2y} + 3 \cdot 2^{2x}}} = x+y - e^{x+y-3}$$

Đặt $2^x = a, 2^y = b$ thì theo bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a+3b}} \leq \frac{a}{a+b} + \frac{a+b}{a+3b}; \quad \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}} \leq \frac{1}{2} + \frac{2b}{a+3b} \Rightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}} \leq \frac{3}{4} + \frac{a}{2(a+b)}$$

$$\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}} \leq \frac{b}{a+b} + \frac{a+b}{b+3a}; \quad \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b+3a}} \leq \frac{1}{2} + \frac{2a}{b+3a} \Rightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}} \leq \frac{3}{4} + \frac{b}{2(a+b)}$$

Cộng hai bất đẳng thức trên với nhau ta có $\frac{2^x+2^y}{\sqrt{2^{2x}+3.2^{2y}}} + \frac{2^x+2^y}{\sqrt{2^{2y}+3.2^{2x}}} \leq 2$

Mặt khác theo một bất đẳng thức phụ quen thuộc ta có:

$$x+y-e^{x+y-3} = x+y-3-e^{x+y-3}+3 \leq 3-1=2$$

Vậy $VT \geq 2 \geq VP$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2^x = 2^y \\ x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{3}{2}$

Khi đó $x^3+y^4 = \frac{135}{16}$.

Chọn ý D.

Câu 23 Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 < a, b, c < 1$. Khi đó trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a b + \log_b c + \frac{1}{4} \log_c^2 a$ được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$, với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi $T = m^3 + n^3$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 171

B. 89

C. 195

D. 163

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\bullet \quad P = \log_a b + \log_b c + \frac{1}{4} \log_c^2 a \geq 2\sqrt{\log_a b \log_b c} + \frac{1}{4} \log_c^2 a = 2\sqrt{\log_a c} + \frac{1}{4} \log_c^2 a$$

$$\bullet \quad 2\sqrt{\log_a c} + \frac{1}{4} \log_c^2 a = \frac{1}{4} \sqrt{\log_a c} + \frac{1}{4} \sqrt{\log_a c} + \frac{1}{4} \sqrt{\log_a c} + \frac{1}{4} \sqrt{\log_a c} + \frac{1}{4} \log_c^2 a$$

$$\geq 5\sqrt{\frac{1}{4} \sqrt{\log_a c} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\log_a c} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\log_a c} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\log_a c} \cdot \frac{1}{4} \log_c^2 a} = \frac{5}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{5}{4}$, khi đó $T = 189$

Chọn ý B.

Câu 24: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $2^{x+\frac{1}{4x}} + 2^{\frac{y+1}{4y}} = 4$. Đặt $P = x + y$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = 1$

B. 2

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{5}{2}$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$2^{x+\frac{1}{4x}} + 2^{\frac{y}{4}+\frac{1}{y}} \geq 2^2 \sqrt{x \cdot \frac{1}{4x}} + 2^2 \sqrt{\frac{y}{4} \cdot \frac{1}{y}} = 4 = VP$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{5}{2}$.

Chọn ý D.

Câu 25: Cho 2 số a, b thực a, b thỏa mãn $b \geq a > 1$ và $2^{\log_b a} + 16^{\log_a \frac{b}{\sqrt[4]{a^3}}}$ = 4. Giá trị của biểu thức $P = \log_2 \left(\frac{a}{b} \right)$?

A. 0

B. 2

C. 3

D. 1

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$2^{\log_b a} + 16^{\log_a \frac{b}{\sqrt[4]{a^3}}} = 2^{\log_b a} + 2^{4\left(\log_a b - \frac{3}{4}\right)} = f(t) = 2^t + 2^{4\left(\frac{1-t}{4}\right)} \quad (t = \log_b a \in (0; 1])$$

$$\text{Suy ra } f'(t) = 2^t \ln 2 - \frac{4}{t^2} \cdot 2^{4\left(\frac{1-t}{4}\right)} \ln 2 \leq \left(2^t - 4 \cdot 2^{\frac{4-t}{4}} \right) \ln 2 \leq (2 - 4 \cdot 2^{4-3}) \ln 2 < 0$$

$$\Rightarrow f(t) = 2^t + 2^{4\left(\frac{1-t}{4}\right)} \geq f(1) = 4 \Rightarrow VT \geq VP$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b \Rightarrow P = \log_2 \left(\frac{a}{b} \right) = 0$

Chọn ý A.

Câu 26: Cho 2 số thực $x, y > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{x} \leq y \leq 2x$ và $\log_2 \frac{2}{x} \sqrt{\log_2 \frac{2x}{y} \log_2 xy} = \frac{9}{16}$. Đặt

$P = 2^x \cdot 2^y$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P \in [4; 5]$

B. $P \in [1; 2]$

C. $P \in [2; 3]$

D. $P \in [6; 7]$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được

$$\log_2 \frac{2}{x} \sqrt{\log_2 \frac{2x}{y} \log_2 xy} = \frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \log_2 x) \sqrt{(\log_2 x - \log_2 y + 1)(\log_2 x + \log_2 y)} = \frac{9}{16}$$

$$\text{Để đơn giản ta đặt } \begin{cases} a = \log_2 x \\ b = \log_2 y \end{cases} \Rightarrow (1 - a) \sqrt{(a - b + 1)(a + b)} = \frac{9}{16}$$

Nếu $a \geq 1 \Rightarrow VT \leq 0$, vô lý

Để ý thấy $\frac{1}{x} \leq y \leq 2x \Rightarrow \log_2 2x \geq \log_2 \frac{1}{x} \Rightarrow a+1 \geq -a \Rightarrow a \geq -\frac{1}{2}$.

Nếu $-\frac{1}{2} \leq a < 1$ thì ta có:

$$(1-a)\sqrt{(a-b+1)(a+b)} \leq \frac{1}{2}(1-a)(a-b+1+a+b) = (1-a)\left(a+\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{4}\left(1-a+a+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = \frac{1}{4} \\ \log_2 y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2^{\frac{1}{4}} \\ y = 2^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow P \approx 6,07725$$

Chọn ý D.

Câu 27: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $\begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ 2 < y < 5 \end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu bộ số (x, y) thỏa mãn

phương trình $\log_2(3 - |\sin xy|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$?

A. 4

B. 2

C. 3

D. 1

Lời giải

Thực chất đây là một câu khá đơn giản nếu như ta đã làm quen với phương pháp đánh giá rồi, các câu 28, 29 sẽ làm tương tự nên mình sẽ chỉ trình bày mỗi lời giải câu 27.

Ta có $3 - |\sin xy| \geq 2 \Rightarrow \log_2(3 - |\sin xy|) \geq 1$, mặt khác $\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$. Do đó phương trình thỏa mãn khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \\ |\sin xy| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} + 2k \\ xy = \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} \quad (k, n \in \mathbb{Z})$$

Với giả thiết $2 \leq x \leq 3$ nên $k = 1$. Với $k = 1 \Rightarrow x = \frac{13}{6} \Rightarrow y = \frac{6}{13}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$

$$\text{Do } 2 < y < 5 \Rightarrow 2 < \frac{6}{13}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) < 5 \Rightarrow n \in \{1; 2\} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{9\pi}{13} \\ y = \frac{15\pi}{13} \end{cases}$$

Vậy có 2 bộ số thỏa mãn yêu cầu đề bài. Chọn ý B.

Câu 28. $\alpha \in \left\{5\pi; \frac{9\pi}{5}; \frac{17\pi}{5}\right\}$

Câu 29. $\alpha \in \left\{\frac{6\pi}{7}; \frac{12\pi}{7}\right\}$

Câu 30: Biết rằng tồn tại duy nhất một a để phương trình $2^{|\sin x|} + |\sin x| = \cos x + \sin^2 x + a$

có nghiệm duy nhất, hỏi a có tất cả bao nhiêu ước số nguyên

A. 2 số

B. 8 số

C. Không có

D. Vô số

Lời giải

Do $|\sin x| = |\sin(-x)|, (\sin(-x))^2 = (\sin x)^2$ nên nếu phương trình có 1 nghiệm là x thì cũng có nghiệm là $-x$. Nên để phương trình có nghiệm duy nhất thì đồng nghĩa với $x = 0$. Thế ngược lại ta giải ra được $a = 0$.

Chọn ý D.

Câu 31: Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn điều kiện

$$\left[1 + \left(\frac{2^{xy}}{4} + 1 \right)^2 \log_{xy}^2 x \right] \left[\left(\sqrt{2} \right)^{x^2+y^2-4} \log_x y + 1 \right] = \left(\frac{2^{xy}}{4} + 1 \right)^2$$

Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá $a^4 b^4$

A. 13

B. 14

C. 15

D. 16

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\begin{aligned} & \left[1 + \left(\frac{2^{xy}}{4} + 1 \right)^2 \log_{xy}^2 x \right] \left[\left(\sqrt{2} \right)^{x^2+y^2-4} \log_x y + 1 \right] = \left(\frac{2^{xy}}{4} + 1 \right)^2 \\ \Leftrightarrow & \left(1 + \left(2^{xy-2} + 1 \right)^2 \log_{xy}^2 x \right) \left[\left(\sqrt{2} \right)^{x^2+y^2-4} \log_x y + 1 \right] = \left(2^{xy-2} + 1 \right)^2 \\ \Leftrightarrow & \frac{1 + \left(2^{xy-2} + 1 \right)^2 \log_{xy}^2 x}{\left(2^{xy-2} + 1 \right)^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{2} \right)^{x^2+y^2-4} \log_x y + 1} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{\left(2^{xy-2} + 1 \right)^2} + \log_{xy}^2 x = \frac{1}{\left(\sqrt{2} \right)^{x^2+y^2-4} \log_x y + 1} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{\left(2^{xy-2} + 1 \right)^2} + \frac{1}{\left(\log_x y + 1 \right)^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{2} \right)^{x^2+y^2-4} \log_x y + 1} \end{aligned}$$

Đến đây ta có một bổ đề khá quen thuộc cần phải nhớ.

Bổ đề. Với 2 số thực không âm a,b ta luôn có $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{1+ab}$.

Ta có đẳng thức sau đây: $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} - \frac{1}{1+ab} = \frac{ab(a-b)^2 + (1-ab)^2}{(a+1)^2(b+1)^2(1+ab)} \geq 0$. Vậy bất

đẳng thức đã được chứng minh.

Ta cũng có thể dùng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz chứng minh được. Ta có:

$$\begin{cases} (ab+1)\left(\frac{a}{b}+1\right) \geq (a+1)^2 \\ (ab+1)\left(\frac{b}{a}+1\right) \geq (b+1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{(a+1)^2} \geq \frac{b}{(a+b)(ab+1)} \\ \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{a}{(a+b)(ab+1)} \end{cases}$$

Cộng lại có điều cần chứng minh!

Áp dụng vào bài toán ta được $\frac{1}{(2^{xy-2}+1)^2} + \frac{1}{(\log_x y + 1)^2} \geq \frac{1}{2^{xy-2} \log_x y + 1}$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\frac{1}{(\sqrt{2})^{x^2+y^2-4} \log_x y + 1} \leq \frac{1}{(\sqrt{2})^{2xy-4} \log_x y + 1} = \frac{1}{2^{xy-2} \log_x y + 1}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \sqrt{2}$. Khi đó có tất cả 16 số nguyên dương không vượt quá $a^4 b^4$.

Chọn ý D.

Câu 32: Cho 2 số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2)$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $P = a + b$

A. $P = 8$

B. $P = 141$

C. $P = 148$

D. $P = 151$

Lời giải

Đây chính là đề thi THPT Quốc Gia 2016 đã được biến tấu để trở thành 1 câu hỏi trắc nghiệm!

Từ giả thiết ta có $(x+y+1)^2 = 4(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})^2 = 4(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3})$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho 2 số thực không âm ta có:

$$2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \leq x+y+1 \Rightarrow (x+y+1)^2 \leq 8(x+y+1) \Rightarrow -1 \leq x+y \leq 7$$

Mặt khác ta lại có:

$$(x+y+1)^2 = 4(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}) \geq 4(x+y+1) \Rightarrow \begin{cases} x+y \geq 3 \\ x+y \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq x+y \leq 7 \\ x+y = -1 \end{cases}$$

Nếu $x+y = -1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}\sqrt{y+3} = 0 \\ x+y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow S = -\frac{9746}{243}$

Nếu $3 \leq x+y \leq 7$. Đặt $t = x+y$ ($t \in [3;7]$)

Xét hàm số $f(t) = 3^{t-4} + (t+1) \cdot 2^{7-t}$ ($t \in [3;7]$)

$$\Rightarrow f'(t) = 3^{t-4} \ln 3 + 2^{7-t} - (t+1)2^{7-t} \ln 2$$

$$\Rightarrow f''(t) = 3^{t-4} \ln^2 3 - 2^{7-t} \ln 2 - \ln 2 (2^{7-t} - (t+1)2^{7-t} \ln 2)$$

$$= 3^{t-4} \ln^2 3 + ((t+1) \ln^2 2 - 2 \ln 2) 2^{7-t} > 0 \forall t \in [3;7]$$

Vì $f'(3) < 0, f'(7) > 0$ nên tồn tại số $a \in (3; 7)$ sao cho $f'(a) = 0$. Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $(3; a)$ và đồng biến trên $(a; 7)$. Mặt khác $f(3) = \frac{193}{3}; f(7) = 35 \Rightarrow f(t) \leq f(3) = \frac{193}{3} \forall t \in [3; 7]$

Ta sẽ đi chứng minh $x^2 + y^2 \geq 5$ với $x + y \geq 3, x \geq 2$.

Nhận thấy rằng khi:

$$+ x \in [2; 3] \Rightarrow y \geq 3 - x \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2x^2 - 6x + 9 = 2(x - 2)(x - 1) + 5 \geq 5$$

$$+ x > 3 \Rightarrow x^2 + y^2 > 9$$

$$\text{Vậy } x^2 + y^2 \geq 5 \Rightarrow S \leq \frac{148}{3}.$$

Chọn ý D.

Câu 33: Cho x, y là 2 số tự nhiên khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |36^x - 5^y|$

A. $P = 8$

B. 9

C. 10

D. 11

Lời giải

Đây là một câu phát biểu vô cùng đơn giản, nhưng thực chất là một bài toán nếu làm tự luận sẽ rất khó đòi hỏi tới kiến thức số học.

Ta có 36^m tận cùng bằng 6, 5^n tận cùng bằng 5. Nếu $36^m > 5^n$ thì P có tận cùng bằng 1, nếu $36^m < 5^n$ thì P có tận cùng bằng 9

Xét $P = 1$ ta có $36^m - 5^n = 1 \Leftrightarrow 36^m - 1 = 5^n$. Đẳng thức này không thể xảy ra vì vế trái chia hết cho 35 nên chia hết cho 7, còn vế phải không chia hết cho 7

Xét $P = 9$ ta có $5^n - 36^m = 9 \Rightarrow 5^n$ chia hết cho 9, vô lí.

Xét $A = 11$, xảy ra khả năng này chẳng hạn khi $m = 1, n = 2$. Vậy $\min P = 11$.

Chọn ý D.

Câu 34: Cho các số thực dương a, b, c khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b + \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2 \log_b \frac{c}{b} - 3$.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a b - \log_b c$.

Tính $S = 2m + 3M$

$$\text{A. } S = \frac{2}{3}$$

$$\text{B. } S = \frac{1}{3}$$

$$\text{C. } S = 3$$

$$\text{D. } S = 2$$

Thầy Đặng Thành Nam - Vted.vn

Lời giải

Đặt $x = \log_a b, y = \log_b c \Rightarrow P = x - y$, khi đó giả thiết viết lại thành $x^2 + y^2 = xy - x - 2y - 1$

Thế $y = x - P$ vào giả thiết trên ta được $x^2 + y^2 = xy - x - 2y - 1 \Leftrightarrow x^2 + (3 - P)x + (P - 1)^2 = 0$

Phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = (3 - P)^2 - 4(P - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq \frac{5}{3}$

Chọn ý C.

Câu 35: Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $3^a = 5^b = 15^{-c}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a + b + c)$ là?

A. $-3 - \log_5 3$

B. -4

C. $-2 - \sqrt{3}$

D. $-2 - \log_3 5$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $3^a = 5^b = 15^{-c} = t \Leftrightarrow a = \log_3 t, b = \log_5 t, -c = \log_{15} t$

$$\Rightarrow -c = \frac{1}{\log_t 15} = \frac{1}{\log_t 3 + \log_t 5} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow ab + bc + ca = 0$$

Khi đó ta có $P = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) - 4(a + b + c) = (a + b + c)^2 - 4(a + b + c) \geq -4$

Chọn ý B.

Câu 36: Cho a, b là hai số thực thay đổi thỏa mãn $b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{(a - b)^2 + (10^a - \log b)^2}$$

A. $\sqrt{2} \left(\frac{1}{\ln 10} + \log \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right)$

B. $\sqrt{2} \left(\frac{1}{\ln 10} - \log \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right)$

C. $\sqrt{2} \log(\ln 10)$

D. $\sqrt{2} \left(\frac{1}{\ln 10} - \ln \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right)$

Lời giải

Xét 2 điểm $A(a; 10^a), B(b; \log b)$, do đồ thị của 2 hàm số $y = 10^x, y = \log x$ đối xứng qua đường thẳng $y = x$ do đó khoảng cách giữa 2 điểm A và B chính là P và đạt giá trị nhỏ nhất khi A, B đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$, do đó 2 điểm A, B cùng nằm trên đường thẳng $y = -x + m$.

Vì vậy ta có

$$A(a; 10^a), B(a; 10^a) \Rightarrow AB = P = \sqrt{2} |10^a - a| = f(a) \geq f \left(\log \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\ln 10} - \log \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right)$$

Chọn ý B.

Câu 37: Cho các số thực a, b, c lớn hơn 1 thỏa mãn $\log_2 a \geq (1 - \log_2 b \log_2 c) \log_{bc} 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 10 \log_2^2 a + 10 \log_2^2 b + \log_2^2 c$

A. $-3 - \log_5 3$

B. -4

C. $-2 - \sqrt{3}$

D. $-2 - \log_3 5$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được

$$\log_2 a \geq (1 - \log_2 b \log_2 c) \log_{bc} 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a \cdot (\log_2 b + \log_2 c) \geq 1 - \log_2 b \log_2 c$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a \log_2 b + \log_2 a \log_2 c + \log_2 b \log_2 c \geq 1$$

Đặt $(\log_2 a; \log_2 b; \log_2 c) \rightarrow (x, y, z)$ ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $S = 10x^2 + 10y^2 + z^2$

Bây giờ ta cần tìm số k dương sao cho

$$\begin{aligned} 10x^2 + 10y^2 + z^2 &\geq 2k(xy + yz + xz) \\ \Leftrightarrow 10x^2 + 10y^2 + z^2 + k(x^2 + y^2 + z^2) &\geq k(x^2 + y^2 + z^2) + 2k(xy + yz + xz) \\ \Leftrightarrow (k+10)x^2 + (k+10)y^2 + (k+1)z^2 &\geq k(x+y+z)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{k+10}} + \frac{y^2}{\frac{1}{k+10}} + \frac{z^2}{\frac{1}{k+1}} &\geq k(x+y+z)^2 \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz* dạng cộng mẫu Engel ta có

$$\frac{x^2}{\frac{1}{k+10}} + \frac{y^2}{\frac{1}{k+10}} + \frac{z^2}{\frac{1}{k+1}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\frac{1}{k+10} + \frac{1}{k+10} + \frac{1}{k+1}}$$

Đến đây sử dụng được giả thiết ta sẽ chọn k sao cho $\frac{1}{\frac{1}{k+10} + \frac{1}{k+10} + \frac{1}{k+1}} = k \Leftrightarrow k = 2$

Chọn ý B.

Câu 38: Với a, b, c lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \log_a bc + \log_b ca + 4\log_c ab$

A. 6

B. 12

C. 11

D. 10

Lời giải

Đây là một câu sử dụng bất đẳng thức AM - GM khá là cơ bản

Biến đổi giả thiết và áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\begin{aligned} P &= \log_a bc + \log_b ca + 4\log_c ab = \log_a b + \log_b a + \log_a c + 4\log_c a + \log_b c + 4\log_c b \\ &\geq 2\sqrt{\log_a b \cdot \log_b a} + 2\sqrt{4\log_a c \cdot \log_c a} + 2\sqrt{4\log_b c \cdot \log_c b} = 10 \end{aligned}$$

Chọn ý D.

Tương tự với câu 39. **Chọn ý C.**

Câu 40: Xét các số thực dương x, y, z thay đổi sao cho tồn tại các số thực a, b, c lớn hơn 1 và thỏa mãn $\sqrt{abc} = a^x = b^y = c^z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + y + 2z^2$

A. $4\sqrt{2}$

B. 4

C. 6

D. 10

Lê Phúc Lữ

Lời giải

Từ giả thiết ta có $a^x = \sqrt{abc} \Leftrightarrow 2\log_{abc} a = \frac{1}{x}$ tương tự $\frac{1}{y} = 2\log_{abc} b, \frac{1}{z} = 2\log_{abc} c$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2(\log_{abc} a + \log_{abc} b + \log_{abc} c) = 2.$$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có :

$$\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 - \frac{1}{z} \Rightarrow x+y \geq \frac{4z}{2z-1} \Rightarrow T \geq \frac{4z}{2z-1} + 2z^2 = f(z) \geq f(1) = 6$$

Chọn ý C.

Câu 41: Xét các số thực dương x, y, z thay đổi sao cho tồn tại các số thực a, b, c lớn hơn 1 và thỏa mãn $\sqrt{abc} = a^x = b^y = c^z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{16}{x} + \frac{16}{y} - z^2$

A. 20

B. $20 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

C. 24

D. $24 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

Lời giải

Tương tự với câu 40 ta có $\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2(\log_{abc} a + \log_{abc} b + \log_{abc} c) = 2$.

$$\Rightarrow P = 16\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) - z^2 = 16\left(2 - \frac{1}{z}\right) - z^2 = 32 - \frac{16}{z} - z^2 = f(z) \leq f(2) = 20$$

Chọn ý A.

Câu 42: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 < a, b, c < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \log_a b + \log_b c + \sqrt{\log_c a}$

A. $2\sqrt{2}$

B. 3

C. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{3}{2}$

Lời giải

Đây là một câu tương tự câu 23 ta sẽ phải dùng tới bất đẳng thức AM - GM để triệt tiêu các biến. Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\begin{aligned} S &= \log_a b + \log_b c + \sqrt{\log_c a} \geq 2\sqrt{\log_a b \cdot \log_b c} + \sqrt{\log_c a} = 2\sqrt{\log_a c} + \sqrt{\log_c a} \\ &\geq 2\sqrt{2\sqrt{\log_a c} \cdot \sqrt{\log_c a}} = 2\sqrt{2\sqrt{\log_a c \cdot \log_c a}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Chọn ý A.

Câu 43: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $\log^2 a + 2\log^2 b + 3\log^2 c = 6$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức là $T = \log a \log b + \log b \log c + \log c \log a$ là $\frac{3}{k}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $k = 1$

B. $k^3 + 3k^2 = 3$

C. $k^3 + 3k = 3$

D. $k = \frac{1}{2}$

Lời giải

Một câu hoàn toàn tương tự với câu 37, ta sẽ dùng phương pháp tham số hóa kết hợp bất đẳng thức Cauchy - Schwarz. Đặt $(\log a; \log b; \log c) \rightarrow (x, y, z) \Rightarrow x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

Ta có đánh giá $6 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 \geq 2k(xy + yz + xz) \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{k+1}} + \frac{y^2}{\frac{1}{k+2}} + \frac{z^2}{\frac{1}{k+3}} \geq k(x+y+z)^2$

Khi đó cần tìm k sao cho $k = \frac{1}{\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3}} \Leftrightarrow k^3 + 3k^2 = 3$

Chọn ý C.

Câu 44: Cho 3 số thực dương a,b,c thỏa mãn $\log a \log b + \log b \log c + 3 \log c \log a = 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log^2 a + \log^2 b + \log^2 c$ là $\frac{-m + \sqrt{n}}{p}$ với m,n,p lần lượt là các số nguyên dương và $\frac{m}{p}$ là phân số tối giản. Tính $m + n + p$?

A. 64

B. 16

C. 102

D. 22

Lời giải

Với bài toán này nếu đặt $(\log a; \log b; \log c) \rightarrow (x, y, z) \Rightarrow xy + yz + 3xz = 1$ thì ta sẽ không thể áp dụng phương pháp làm của bài trên, khi đó ta sẽ cần phải nghĩ ra cách đặt khác.

Đặt $(\log a; \log b; \log c) \rightarrow (ix, jy, kz) \Rightarrow ijxy + jkyz + 3kixz = 1$

Tìm m,n,p thỏa mãn $ij = kj = 3ki \Rightarrow i = k = \frac{j}{3}$. Chọn $j = 3 \Rightarrow i = k = 1$

Khi đó ta được $3xy + 3yz + 3xz = 1 \Rightarrow xy + yz + xz = \frac{1}{3}$. Bài toán lại quay trở về các bài toán

trên. Với cách làm tương tự các bài toán trên ta tìm được $\min P = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$

Chọn ý D.

Cách 2. Chú ý rằng ở giả thiết và yêu cầu của bài toán vai trò của 2 biến a,c là như nhau nên dấu "=" sẽ xảy ra tại $a = c$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} P = 2x^2 + y^2 \\ 3x^2 + 2xy = 1 \end{cases} \Rightarrow P(3x^2 + 2xy) = 2x^2 + y^2 \Leftrightarrow (3P - 2)x^2 + 2Pyx - y^2 = 0$$

Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2 ta sẽ tìm được đáp án của bài toán.

Câu 45: Với n là số nguyên dương, biết rằng $-\log_2 \left(\log_2 \left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2018}}}} \right) \right) > 2017$ mà biểu thức trong dấu ngoặc có tất cả n dấu căn. Tìm giá trị nhỏ nhất của n?

A. 2021

B. 2014

C. 2013

D. 2020

Lê Phúc Lữ

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2018}}}} = (2018)^{\frac{1}{2^n}} = (2018)^{2^{-n}} \Rightarrow \log_2 \left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2018}}}} \right) = 2^{-n} \log_2 2018$

$$\Rightarrow -\log_2 \left(\log_2 \left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2018}}}} \right) \right) > 2017 \Leftrightarrow -\log_2 2^{-n} - \log_2 (\log_2 2018) > 2017$$

$$\Rightarrow n \log_2 2 > 2020,4 \Rightarrow n > 2020,4 \Rightarrow n \geq 2021$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 2021

Chọn ý A.

Câu 46: Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $\log_2 \left(\log_{2^a} \left(\log_{2^b} \left(2^{1000} \right) \right) \right) = 0$. Giá trị lớn nhất của ab là?

A. 50

B. 375

C. 125

D. 250

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\log_2 \left(\log_{2^a} \left(\log_{2^b} \left(2^{1000} \right) \right) \right) = 0 \Leftrightarrow \log_{2^a} \left(\log_{2^b} \left(2^{1000} \right) \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_{2^b} \left(2^{1000} \right) = 2^a \Leftrightarrow 2^{1000} = 2^{2^a \cdot b} \Leftrightarrow 2^a \cdot b = 1000$$

Do a, b là các số nguyên dương nên ta có $1000 : 2^a$. Mặt khác ta lại có $1000 = 2^3 \cdot 5^3 \Rightarrow a \leq 3$

- Nếu $a = 3 \Rightarrow b = 125 \Rightarrow ab = 375$
- Nếu $a = 2 \Rightarrow b = 250 \Rightarrow ab = 500$
- Nếu $a = 1 \Rightarrow b = 500 \Rightarrow ab = 500$

Vậy giá trị lớn nhất của ab bằng 500

Chọn ý A.

Câu 47: Cho số thực dương $a > 1$, biết khi $a = a_0$ thì bất đẳng thức $x^a \leq a^x$ đúng với mọi số thực x lớn hơn 1. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1 < a_0 < 2$

B. $e < a_0 < e^2$

C. $2 < a_0 < 3$

D. $e^2 < a_0 < e^3$

Lời giải

Lấy logarit tự nhiên 2 vế ta được $\ln(x^a) \leq \ln(a^x) \Leftrightarrow a \ln x \leq x \ln a \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} \geq \frac{\ln x}{x}$

Ta xét $f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e \Rightarrow f(x) \leq f(e) = \frac{\ln e}{e}$

Từ đó ta suy ra $a = e$.

Chọn ý C.

Câu 48: Cho hàm số $f(x) = e^x (a \sin x + b \cos x)$ với a, b là các số thực thay đổi và phương trình $f'(x) + f''(x) = 10e^x$ có nghiệm. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = a^2 - 2ab + 3b^2$

A. $10 + 10\sqrt{2}$

B. $20 + 10\sqrt{2}$

C. $10 + 20\sqrt{2}$

D. $20 + \sqrt{2}$

Lời giải

Do $f(x) = e^x (a \sin x + b \cos x)$ nên phương trình $f'(x) + f''(x) = 10e^x$ tương đương

$$e^x ((a-b) \sin x + (a+b) \cos x - 2b \sin x + 2a \cos x) = 10e^x$$

$$\Leftrightarrow (a-3b) \sin x + (3a+b) \cos x = 10$$

Phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $(a-3b)^2 + (3a+b)^2 \geq 100 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 10$

Khi đó ta có:

$$S = a^2 - 2ab + 3b^2 = \frac{10(a^2 - 2ab + 3b^2)}{10} \leq \frac{10(a^2 - 2ab + 3b^2)}{a^2 + b^2} = \frac{10(t^2 - 2t + 3)}{t^2 + 1} = f(t) \left(t = \frac{a}{b} \right)$$

Khảo sát hàm số $f(t) \Rightarrow f(t) \leq f(1 - \sqrt{2}) = 20 + 10\sqrt{2}$

Chọn ý B.

Câu 49: Cho 2 số thực a, b thỏa mãn $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{a+n} < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{b+n}$ với mọi số n nguyên dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|a - b|$?

A. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{3}{2}$

B. 1

C. $\frac{1}{\ln 2} - 1$

D. $\frac{1}{\ln 2} - 3$

Lời giải

Đây là một câu rất khó không phù hợp với kì thi THPT Quốc Gia nên chúng ta chỉ tham khảo.

Lấy logarit tự nhiên 2 vế ta có $a < \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n < b, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x, x \geq 1$ khi đó ta có $\min|a - b| = \max_{x \geq 1} f(x) - \min_{x \geq 1} f(x)$

Mặt khác $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} - 1 < 0, \forall x \geq 1$, do đó ta được

$$\begin{aligned} \max_{x \geq 1} f(x) - \min_{x \geq 1} f(x) &= f(1) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{\ln 2} - 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x \right) \\ &= \frac{1}{\ln 2} - 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\ln 2} - 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x(x+1)}} \\ &= \frac{1}{\ln 2} - 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}} = \frac{1}{\ln 2} - 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+1) - x^2}{2x+1} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vậy $\min|a - b| = \frac{1}{\ln 2} - \frac{3}{2}$

Chọn ý A.

Chú ý: Ở đây ta dùng tới quy tắc. Trong giải tích, Quy tắc l'Hôpital (phát âm như Lô-pi-tan) (cũng được gọi là quy tắc Bernoulli) là quy tắc sử dụng đạo hàm để tính toán các giới hạn có dạng vô định. Ứng dụng của quy tắc này là đưa dạng vô định trở thành dạng hữu hạn, cho phép tính toán giới hạn một cách dễ dàng.

Dạng đơn giản nhất của quy tắc l'Hôpital được phát biểu như sau:

Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ hoặc $\pm\infty$ và $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ tồn tại thì ta

luôn có $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Việc lấy đạo hàm của tử số và mẫu số thường làm đơn giản thương số, hoặc làm khử dạng vô định.

Câu 50: Cho các số thực dương x, y, z bất kì thỏa mãn $xyz = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{\log^2 y + 4} + \sqrt{\log^2 z + 4}$

A. $\sqrt{29}$

B. $\sqrt{23}$

C. $\sqrt{26}$

D. $\sqrt{27}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Mincowsky ta có

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{\log^2 y + 4} + \sqrt{\log^2 z + 4} \geq \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{(\log y + \log z)^2 + 16} \\ &= \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{(\log yz)^2 + 16} = \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{\left(\log \frac{10}{x}\right)^2 + 16} \\ &= \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{(1 - \log x)^2 + 16} \geq \sqrt{(\log x + 1 - \log x)^2 + (1 + 4)^2} = \sqrt{26} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt[5]{10}, y = z = \sqrt[5]{100}$

Chọn ý C.

Câu 51: Cho 2 số thực x, y sao cho tổng của chúng không âm và đồng thời

$$(2^{2x-2y} + 4) \left(\frac{1+2^{x+y}}{1+4^x} + \frac{1+2^{x+y}}{1+4^y} \right) = 2^{2x-2y} + 2^{x-y+2} + 4$$

Biết rằng giá trị của biểu thức $P = x^3 + y^4 = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi biểu thức $m^2 + n$ có tất cả bao nhiêu ước số nguyên?

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Ta có $T = \frac{a}{b} - \frac{a-m}{b-m} = \frac{m(b-a)}{b(b-m)} \geq 0$ khi $0 < m < a \leq b$. Nên $\frac{a}{b} \geq \frac{a-m}{b-m}$ (1)

Theo giả thiết ta có $x+y \geq 0 \Rightarrow 4^{x+y} \geq 1$. Ta có đánh giá sau:

$$0 < 4^x + 4^y - 2^{x+y+1} < 1 + 4^x + 4^y + 1 \leq 1 + 4^x + 4^y + 4^{x+y}$$

Khi đó sử dụng kết quả (1) ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+4^x} + \frac{1}{1+4^y} &= \frac{1+4^x+4^y+1}{1+4^x+4^y+4^{x+y}} \geq \frac{2+4^x+4^y-(4^x+4^y-2^{x+y+1})}{1+4^x+4^y+4^{x+y}-(4^x+4^y-2^{x+y+1})} \\ &= \frac{2(1+2^{x+y})}{(1+2^{x+y})^2} = \frac{2}{1+2^{x+y}} \Rightarrow (1+2^{x+y}) \left(\frac{1}{1+4^x} + \frac{1}{1+4^y} \right) \geq 2 \end{aligned}$$

Mặt khác $\frac{2^{2x-2y} + 2^{x-y+2} + 4}{2^{2x-2y} + 4} = \frac{(2^{x-y})^2 + 4 \cdot 2^{x-y} + 4}{(2^{x-y})^2 + 4} = 1 + \frac{4 \cdot 2^{x-y}}{(2^{x-y})^2 + 4}$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có $1 + \frac{4 \cdot 2^{x-y}}{(2^{x-y})^2 + 4} \leq 1 + \frac{4 \cdot 2^{x-y}}{2\sqrt{4 \cdot (2^{x-y})^2}} = 2$

Vậy $VT \geq VP$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow P = \frac{3}{16} \Rightarrow m^2 + n = 25$

Chọn ý C.

Câu 52 : Cho các số thực $a, b, c \in [2; 3]$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 4^a + 4^b + 4^c - \frac{1}{4}(a+b+c)^3$ là $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $P = m + 2n$

A. $P = 257$

B. $P = 258$

C. $P = 17$

D. $P = 18$

Lời giải

Với dạng toán này ta sẽ xét tới bất đẳng thức phụ $4^t \leq mt + n, \forall t \in [2; 3]$

Thay $t = 2, t = 3$ ta được hệ phương trình $\begin{cases} 16 = 2m + n \\ 64 = 3m + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 48 \\ n = -80 \end{cases}$

Giờ ta cần chỉ ra bất đẳng thức $4^t \leq 48t - 80$ đúng với mọi $t \in [2; 3]$ là bài toán sẽ được giải quyết. Ta xét $f(t) = 4^t - 48t + 80 \Rightarrow f'(t) = 4^t \ln 4 - 48; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \log_4 \frac{48}{\ln 4}$.

Nhận thấy rằng $f(2) = f(3) = 0; f\left(\log_4 \frac{48}{\ln 4}\right) < 0$ nên bất đẳng thức luôn đúng.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t \in \{2; 3\}$. Khi đó ta được

$$S = 4^a + 4^b + 4^c - \frac{1}{4}(a+b+c)^3 \leq 48 \sum a - \frac{1}{4}(\sum a)^3 - 240 \leq 16$$

Chọn ý D.

Bài tập tương tự

Cho 3 số thực $x, y, z \in [1; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của $S = 3^x + 3^y + 3^z - \frac{3}{5}(x + y + z)^2$

A. 5

B. 15

C. 8

D. 12

Ta xét bất đẳng thức phụ $3^t \leq 6t - 3$

Chọn ý D.

Câu 53: Có tất cả bao nhiêu bộ số thực $(x; y; z)$ thỏa mãn
$$\begin{cases} 2^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot 4^{\sqrt[3]{y^2}} \cdot 16^{\sqrt[3]{z^2}} = 128 \\ (xy^2 + z^4)^2 = 4 + (xy^2 - z^4)^2 \end{cases}$$

A. 3

B. 4

C. 1

D. 2

THPT Chuyên Quốc học Huế - Năm học 2017 – 2018

Lời giải

Từ giả thiết ta có:

- $2^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot 4^{\sqrt[3]{y^2}} \cdot 16^{\sqrt[3]{z^2}} = 128 \Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot 4^{\sqrt[3]{y^2}} \cdot 16^{\sqrt[3]{z^2}} = 2^7 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{y^2} + 4\sqrt[3]{z^2} = 7 \quad (1)$
- $(xy^2 + z^4)^2 = 4 + (xy^2 - z^4)^2 \Leftrightarrow xy^2z^4 = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y^2}\sqrt[3]{z^4} = 1 \quad (2)$

Đặt $(\sqrt[3]{x}; \sqrt[3]{y}; \sqrt[3]{z}) \rightarrow (a, b, c)$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$7 = a^2 + 2b^2 + 4c^2 = a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + c^2 + c^2 \geq 7\sqrt[7]{a^2b^4c^8} = 7$$

Dấu “=” xảy ra khi $a^2 = b^2 = c^2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{z^2} = 1$

Vì $x > 0$ nên có tất cả 4 bộ số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn ý B.

Câu 54: Cho hàm số $f(x) = \log_3 \frac{m^2x}{1-x}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao $f(a) + f(b) = 3$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $e^{a+b} \leq e(a+b)$. Tính tích các phần tử của tập hợp S

A. 27

B. $3\sqrt{3}$

C. $-3\sqrt{3}$

D. -27

Lời giải

Theo giả thiết ta có $e^{a+b-1} \leq a+b \Leftrightarrow e^{a+b-1} \leq 1+a+b-1$

Mặt khác theo một bất đẳng thức phụ mà ta đã chứng minh được ở các bài tập trước thì ta luôn có $e^{a+b-2} \geq 1+(a+b-1)$. Do đó dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a+b=1$

Khi đó ta có

$$f(a) + f(b) = 3 \Leftrightarrow f(a) + f(1-a) = \log_3 \frac{m^2a}{1-a} + \log_3 \frac{m^2(1-a)}{1-(1-a)} = 3 \Leftrightarrow m^4 = 27$$

Do đó tích các phần tử của S bằng $-3\sqrt{3}$

Chọn ý C.

Câu 55: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 5 \\ \log_m(3x+2y) - \log_3(3x-2y) = 1 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $3x+2y \leq 5$. Tìm giá trị lớn nhất của m ?

A. -5

B. $\log_3 5$

C. 5

D. $\log_5 3$

THPT Chuyên Lương Văn Tụy – Ninh Bình lần 1 năm 2017 – 2018

Lời giải

Từ phương trình 1 của hệ ta có $(3x-2y)(3x+2y) = 5 \neq 0 \Rightarrow 3x-2y = \frac{5}{3x+2y}$

Từ phương trình 2 của hệ ta có

$$\begin{aligned} \log_m 3 \log_3(3x+2y) - \log_3 \left(\frac{5}{3x+2y} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \log_3(3x+2y)(\log_m 3 + 1) &= \log_3 5 + 1 \\ \Leftrightarrow \log_3(3x+2y) &= \frac{1 + \log_3 5}{1 + \log_m 3} \leq \log_3 5 \quad (3x+2y \leq 5) \Rightarrow \frac{1 - \log_m 5}{1 + \log_m 3} \leq 0 \end{aligned}$$

Giải bất phương trình trên ta được $m \in \left(\frac{1}{3}; 5 \right] \setminus \{1\}$

Khi đó hệ phương trình đầu có dạng $\begin{cases} (3x+2y)(3x-2y) = 5 \\ 3x+2y = 3^{\frac{1+\log_3 5}{1+\log_m 3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y = \frac{5}{M} \\ 3x+2y = M \end{cases}$ nên luôn có

ng nghiệm. Vậy giá trị lớn nhất của m để hệ có nghiệm là 5

Chọn ý C.

Câu 56: Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + m^2}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $f(a) + f(b) = 1$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $e^{a+b} \leq e^2(a+b-1)$. Tính tích các phần tử của S

A. 81

B. -3

C. 3

D. -9

Lời giải

Theo giả thiết ta có $e^{a+b-2} \leq a+b-1 \Leftrightarrow e^{a+b-2} \leq 1+(a+b-2)$.

Mặt khác theo một bất đẳng thức phụ mà ta đã chứng minh được ở các bài tập trước thì ta luôn có $e^{a+b-2} \geq 1+(a+b-2)$. Do đó dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a+b=2$

Khi đó ta có:

$$f(a) + f(b) = \frac{9^a}{9^a + m^2} + \frac{9^{2-a}}{9^{2-a} + m^2} = \frac{162 + m^2(9^a + 9^{2-a})}{81 + m^2(9^{2-a} + 9^a) + m^4} = 1$$

$$\Leftrightarrow m^4 + 81 = 162 \Leftrightarrow m^4 = 81 \Leftrightarrow m = \pm 3$$

Chọn ý D.

Bài tập tương tự

1. Cho hàm số $f(t) = \frac{4^t}{4^t + m}$ với $m > 0$ là tham số thực. Biết rằng $f(x) + f(y) = 1$ với mọi x, y thỏa mãn $(x+y)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}$. Tìm giá trị của $f(t)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{5}{4}$

Hướng dẫn.

Chú ý từ giả thiết áp dụng bất đẳng thức AM - GM $\Rightarrow (x+y)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2} \Rightarrow x+y=1$

Đến đây bài toán sẽ quay về bài toán ở trên

Chọn ý B.

2. Cho hàm số $f(t) = \frac{16^t}{16^t + m^2}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $f(a) + f(b) = 1$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $e^{a+b} \leq e^2(a+b-1)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 8

B. 20

C. 11

D. 34

Chọn ý B.

Câu 57: Cho phương trình $3^x = \sqrt{a \cdot 3^x \cos(\pi x) - 9}$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực?

A. 1

B. 2018

C. 0

D. 2

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có :

$$3^x = \sqrt{a \cdot 3^x \cos(\pi x) - 9} \Leftrightarrow 9^x = a \cdot 3^x \cos(\pi x) - 9 \left(3^x > 0 \right) \Leftrightarrow 3^x + 3^{2-x} = a \cdot \cos(\pi x) (*)$$

Điều kiện cần: Nếu phương trình (*) có nghiệm duy nhất x_0 thì ta thấy rằng $2 - x_0$ cũng là nghiệm của (*) do đó $x_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Thay vào (*) ta được $a = -6$.

Điều kiện đủ: Ngược lại nếu $a = -6$ thì phương trình (*) trở thành $3^x + 3^{2-x} = -6 \cdot \cos(\pi x)$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có: $3^x + 3^{2-x} \geq 2 \cdot \sqrt{3^x \cdot 3^{2-x}} = 6$ mà $-6 \cdot \cos(\pi x) \leq 6$ do đó

$$3^x + 3^{2-x} = -6 \cdot \cos(\pi x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x + 3^{2-x} = 6 \\ -6 \cos(\pi x) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3^{2-x} \\ \cos(\pi x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Chọn ý A.

Câu 58 : Cho các số thực x, y, z không âm thỏa mãn $0 < (x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 \leq 2$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4^x + 4^y + 4^z + \ln(x^4 + y^4 + z^4) - \frac{3}{4}(x+y+z)^4$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = 2a + 3b$

A. 13

B. 42

C. 54

D. 71

Lời giải

Theo giả thiết $0 < (x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 \leq 2 \Rightarrow 2x^2 \leq 2 \Rightarrow x \leq 1$. Tương tự ta cũng sẽ được $0 \leq x, y, z \leq 1$. Khi đó ta có:

$$2(x^2 + y^2 + z^2) \leq 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + xz) \leq 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

Đồng thời $x^4 + y^4 + z^4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \ln(x^4 + y^4 + z^4) \leq \ln(x^2 + y^2 + z^2) \leq 0$

Xét bất đẳng thức phụ $4^t \leq mt + n$. Khi đó ta cần bất đẳng thức trên đúng với mọi $t \in [0; 1]$ nên thay $t = 0, t = 1$ vào giải hệ ta sẽ tìm được $m = 3, n = 1$. Xét hàm số $f(t) = 4^t - 3t - 1$ trên $[0; 1]$ ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4^t \ln 4 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \log_4 \frac{3}{\ln 4}$. Lập bảng biến thiên ta dễ chỉ ra được

bất đẳng thức trên luôn đúng.

Dấu "=" xảy ra khi $t = 0 \vee t = 1$. Áp dụng vào bài toán ta có

$$P \leq 3(x+y+z) - \frac{3}{4}(x+y+z)^4 + 3 \leq \frac{21}{4}$$

Chọn ý C.

Bài tập tương tự.

Cho các số thực x, y, z không âm thỏa mãn $0 < (x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 \leq 18$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4^{\frac{x}{3}} + 4^{\frac{y}{3}} + 4^{\frac{z}{3}} - \frac{1}{108}(x+y+z)^4$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = 2a + 3b$

A. 13

B. 42

C. 54

D. 71

Ta giả thiết ta cũng tìm điều kiện của 3 biến x, y, z và áp dụng y nguyên cách làm của câu trên để giải quyết bài toán này

Chọn ý C.

Câu 59: Cho 2 hàm số $f(x) = (m-1)6^x - \frac{2}{6^x} + 2m+1$, $h(x) = (x-6^{1-x})$. Tìm tham số m để hàm số $g(x) = h(x).f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 0 với mọi $x \in [0;1]$

- A. $m = 1$ B. $m \leq \frac{1}{2}$ C. $m \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ D. $m \geq 1$

Lời giải

Ta thấy rằng với mọi m , ta luôn có $h(1)f(1) = 0$ nên bài toán trở thành tìm m để cho hàm số $g(x) = h(x).f(x) \geq 0 \forall x \in [0;1]$. Dễ thấy với $x = 1$ thì bất đẳng thức luôn đúng, do đó ta sẽ xét trên $[0;1)$.

Ta dễ thấy $h(x)$ là hàm đồng biến trên $[0;1)$, $h(1) = 0 \Rightarrow h(x) < 0 \forall x \in [0;1)$. Đến đây lại rút gọn bài toán trở thành tìm m để $f(x) \leq 0 \forall x \in [0;1)$. Đặt $t = 6^x$ ($t \in [1;6)$) ta có

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow (m-1)6^x - \frac{2}{6^x} + 2m+1 \leq 0 \Rightarrow (m-1)t^2 + 2mt - 2 + t \leq 0 \Rightarrow m \leq \frac{t^2 - t + 2}{t^2 + 2t}$$

Đến đây bài toán trở thành bài toán rất đơn giản, ta cần $m \leq \min_{[1;6]} \frac{t^2 - t + 2}{t^2 + 2t} = \frac{1}{2}$

Chọn ý B.

Câu 60 : Số thực a nhỏ nhất để bất đẳng thức $\ln(x+1) \geq x - ax^2$ đúng với mọi số thực x là $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $T = 2m + 3n$

- A. $T = 5$ B. $T = 8$ C. $T = 7$ D. $T = 11$

Lời giải

Đây là một câu khá cơ bản trong việc ứng dụng đạo hàm tìm điều kiện có nghiệm.

Biến đổi giả thiết ta có $a \geq \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}, \forall x > 0$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2\ln(x+1) - x - \frac{x}{x+1}}{x^3}$

Xét $h(x) = 2\ln(x+1) - x - \frac{x}{x+1} \Rightarrow h'(x) = -\frac{x^2}{(x+1)^2} < 0, \forall x > 0 \Rightarrow h(x) < h(0) = 0$

Vậy $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) < \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow a \geq \frac{1}{2}$.

Chọn ý B.

Bài tập tương tự.

Số thực a nhỏ nhất để bất đẳng thức $\ln(x+1) \leq x - \frac{x^2}{2} + ax^3$ đúng với mọi số thực x là $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $T = 2m + 3n$

A. 8

B. 20

C. 11

D. 34

Tương tự như câu trên thì đây cũng là một câu khá cơ bản trong việc ứng dụng đạo hàm tìm điều kiện có nghiệm.

Chọn ý C.

Câu 61: Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 1$. Tính giá trị biểu thức $S = a + b + c$ khi biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$ đạt giá trị lớn nhất?

A. 5

B. $3.2^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

C. 6

D. 4

THPT Chuyên Thái Bình lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Ý tưởng vẫn sẽ như bài trước ta phải sử dụng tới bất đẳng thức phụ.

Ta sẽ có đánh giá $t^3 - 3t \log_2 t \leq \log_2^3 t + 1$. Để chứng minh đơn giản ta sẽ đặt $\log_2 t = x$. Khi đó ta cần chứng minh $t^3 - 3tx \leq x^3 + 1$. Xét hàm số

$$f(t) = t - \log_2 t, \forall t \in [1; 2] \Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{1}{t \ln 2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow f(t) \leq 1$$

Khi đó $t - x \leq 1 \Leftrightarrow t - x - 1 \leq 0 \Rightarrow t^3 - 3tx - x^3 - 1 = (t - x - 1)(t^2 + t(x + 1) + x^2 - x + 1) \leq 0$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh luôn đúng.

Áp dụng vào bài toán ta có $P = \sum a^3 - 3(\sum a \log_2 a) \leq \sum \log_2^3 a + 3 \leq 1 + 3 = 4$

Chọn ý D.

Bài tập tương tự.

Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$?

A. 3

B. 6

C. $3\sqrt[3]{4}$

D. 5

Chọn ý D.

Câu 62: Cho 2 số thực x, y phân biệt thỏa mãn $x, y \in (0; 2018)$.

Đặt $S = \frac{1}{y-x} \left(\ln \frac{y}{2018-y} - \ln \frac{x}{2018-x} \right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S \geq \frac{2}{1009}$

B. $S \leq \frac{2}{1009}$

C. $S \geq \frac{4}{1009}$

D. $S \leq \frac{4}{1009}$

Lời giải

Một bài toán chỉ nên tham khảo vì có sử dụng tới kiến thức không trong chương trình phổ thông cơ bản.

Xét hàm số $f(t) = \ln \left(\frac{t}{2018-t} \right)$ và tham số u nằm giữa x và y . Theo định lý Lagrange ta có

$$S = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(u) = \frac{2018}{u(2018 - u)} \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} \frac{2018}{\left(\frac{u + 2018 - u}{2}\right)^2} = \frac{2}{1009}$$

Chọn ý A.

Định lí Lagrange - Lagrange's Mean Value Theorem.

Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và đồng thời có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ thì

$$\text{tồn tại } c \in (a; b) \text{ sao cho } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Chứng minh: Xét hàm số $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$. Ta có $F(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$, có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và $F(a) = F(b)$. Theo định lí Rolle tồn tại $c \in (a; b)$

$$\text{sao cho } F'(c) = 0. \text{ Mà } F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Định lí Rolle là một hệ quả của định lí Lagrange trong trường hợp $f(a) = f(b)$

Câu 63: Cho 3 số a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4}{\log_{\sqrt{bc}} a} + \frac{1}{\log_{ac} \sqrt{b}} + \frac{8}{3 \log_{ab} \sqrt[3]{c}}$$

A. 20

B. 10

C. 18

D. 12

THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{4}{2 \log_{bc} a} + \frac{1}{\frac{1}{2} \log_{ac} b} + \frac{8}{\log_{ab} c} = 2 \log_a bc + 2 \log_b ac + 8 \log_c ab \\ &= 2 \log_a b + 2 \log_a c + 2 \log_b a + 2 \log_b c + 8 \log_c a + 8 \log_c b \\ &= (2 \log_a b + 2 \log_b a) + (2 \log_a c + 8 \log_c a) + (2 \log_b c + 8 \log_c b). \end{aligned}$$

Vì a, b, c là các số thực lớn hơn 1 nên: $\log_a b, \log_b a, \log_a c, \log_c a, \log_b c, \log_c b > 0$.

Do đó áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$P \geq 2\sqrt{2 \log_a b \cdot 2 \log_b a} + 2\sqrt{2 \log_a c \cdot 8 \log_c a} + 2\sqrt{2 \log_b c \cdot 8 \log_c b} = 4 + 8 + 8 = 20.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \log_a b = \log_b a \\ \log_a c = 4 \log_c a \\ \log_b c = 4 \log_c b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = a^2 \Leftrightarrow a = b = \sqrt{c} > 1 \\ c = b^2 \end{cases}$$

Chọn ý A.

Câu 64: Cho a, b, c, d là các số thực dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức } P = (1 + a^2 + b^2 + a^2 b^2)(1 + c^2 + d^2 + c^2 d^2)$$

- A. 2 B. $4\ln\frac{17}{16}$ C. $\left(\frac{17}{16}\right)^4$ D. $\ln\frac{17}{16}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có:

$$P = (1 + a^2 + b^2 + a^2b^2)(1 + c^2 + d^2 + c^2d^2) = \prod (a^2 + 1) \Rightarrow \ln P = \sum \ln(a^2 + 1)$$

Ta có đánh giá sau $\ln(t^2 + 1) \geq mt + n$, để tìm được hai số m, n ta sẽ sử dụng tới bất đẳng thức tiếp tuyến, đây là một phương pháp rất hay để chứng minh các bất đẳng thức đối xứng với các biến độc lập nhau.

Cơ sở của phương pháp

- Nếu đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $A(x_0; y_0)$, A không phải điểm uốn thì khi đó tồn tại một khoảng D chứa x_0 sao cho $f(x) \geq ax + b$ hoặc $f(x) \leq ax + b$. Đẳng thức xảy ra khi $x = x_0$
- Nếu đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $A(x_0; y_0)$ thì ta luôn phân tích được $f(x) - (ax + b) = (x - x_0)^k g(x), k \geq 2$

Sau đây ta áp dụng lý thuyết trên vào bài toán trên. Chú ý ta có $\sum \ln(a^2 + 1)$ là một biểu thức đối xứng theo bốn biến a, b, c, d đồng thời giả thiết cũng là đối xứng nên ta sẽ dự đoán dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$. Quay lại bất đẳng thức phụ mà ta đang đi tìm hệ số

$\ln(t^2 + 1) \geq mt + n$, ta sẽ tìm m, n sao cho hai đồ thị hàm số $y = \ln(t^2 + 1), y = mt + n$ tiếp

xúc nhau tại điểm có hoành độ $t = \frac{1}{4}$ ta được $\begin{cases} m = \frac{8}{17} \\ n = -\frac{2}{17} + \ln\frac{17}{16} \end{cases}$. Vậy ta có bất đẳng thức

phụ là $\ln(t^2 + 1) \geq \frac{8}{17}t - \frac{2}{17} + \ln\frac{17}{16}$, dễ thấy bất đẳng thức này luôn đúng, khi đó áp dụng vào bài toán ta có:

$$\ln P = \sum \ln(a^2 + 1) \geq \frac{8}{17} \sum a + 4 \left(-\frac{2}{17} + \ln\frac{17}{16} \right) = 4\ln\frac{17}{16} \Rightarrow P \geq \left(\frac{17}{16}\right)^4$$

Chọn ý C.

Câu 65: Cho 3 số thực x, y, z không âm thỏa mãn $2^x + 4^y + 8^z = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2}$

- A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $1 - \log_4 3$

Lời giải

Chú ý với điều kiện x, y, z không âm thì ta luôn có $2^x, 4^y, 8^z \geq 1$.

Theo nguyên lý *Dirichlet* ta có

$$\begin{aligned}(2^x - 1)(4^y - 1) &\geq 0 \Rightarrow 2^x \cdot 4^y \geq 2^x + 4^y - 1 \\ \Rightarrow 2^x \cdot 4^y \cdot 8^z &\leq (2^x + 4^y - 1) \cdot 8^z = 2^x \cdot 8^z + 4^y \cdot 8^z - 8^z \\ &\geq 2^x + 8^z - 1 + 4^y + 8^z - 1 - 8^z = 2^x + 4^y + 8^z - 2\end{aligned}$$

Chú ý rằng khi $2^x, 4^y, 8^z \geq 1$ thì $8^z \leq 2$

$$\Rightarrow 2^x \cdot 4^y \cdot 8^z \geq 2^x + 4^y + 8^z - 2 = 2 \Rightarrow x + 2y + 3z \geq 1 \Rightarrow S \geq \frac{1}{6}$$

Chọn ý C.

Nguyên lí Dirichlet

Nguyên lý những cái lồng và các chú thỏ đã được biết đến từ rất lâu. Ngay trong chương trình phổ thông cơ sở chúng ta cũng đã làm quen với phương pháp giải toán này. Thực ra nguyên lý này mang tên nhà bác học người Đức Pête Gutxtap Legien Đirichlê (1805-1859). Nguyên lý phát biểu rất đơn giản: *Nếu chúng ta nhốt thỏ vào các lồng mà số lồng ít hơn số thỏ, thì thế nào cũng có một lồng nhốt ít nhất hai con thỏ.* Nguyên lí Dirichlet có rất nhiều ứng dụng trong Toán Học, điển hình là bất đẳng thức. Chúng thường được áp dụng để giải một số bài toán bất đẳng thức không thuần nhất. Hôm nay tôi sẽ đưa ra một số ví dụ để các bạn hiểu hơn về vấn đề này. Trong 3 số a, b, c luôn có 2 số nằm cùng phía với số m bất kỳ (Hay lớn hơn bằng m hoặc bé hơn bằng m). Đây chính là cơ sở lời giải của bài toán trên.

Câu 66: Cho các số thực $a, b, c \geq 1$ thỏa mãn $a + b + c = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_3 a + 2\log_9 b + 3\log_{27} c$

A. $\log_3 5$

B. 1

C. $\log_3 15$

D. $\log_3 \frac{5}{3}$

Lời giải

Giả thiết tương đương $P = \log_3 a + 2\log_9 b + 3\log_{27} c = \log_3 a + \log_3 b + \log_3 c = \log_3 (abc)$

Theo nguyên lý *Dirichlet* ta có

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1) &\geq 0 \Leftrightarrow ab \geq a+b-1 \Rightarrow abc \geq c(a+b-1) = ac+bc-c \\ &\geq a+c-1+b+c-1-c = a+b+c-2 = 3 \\ \Rightarrow P &= \log_3 (abc) \geq \log_3 3 = 1\end{aligned}$$

Chọn ý B.

Câu 67: Biết a là số thực dương bất kì để bất đẳng thức $a^x \geq 9x + 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a \in (10^3; 10^4]$

B. $a \in (10^2; 10^3]$

C. $a \in (0; 10^2]$

D. $a \in (10^4; +\infty)$

THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 – năm 2017 – 2018

Lời giải

Bất đẳng thức $a^x \geq 9x + 1$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì nó phải đúng với $x = 1 \Rightarrow a > 10$.

Do $a > 1$ nên hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $\mathbb{R}$ có bề lõm quay lên trên.

Hay hàm số là hàm số lõm trên $\mathbb{R}$

Do hai đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = 9x + 1$ luôn đi qua điểm $A(0;1)$ nên bất đẳng thức $a^x \geq 9x + 1$ nghiệm đúng với mọi x khi đường thẳng $y = 9x + 1$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(0;1) \Leftrightarrow y'(0) = 9(y' = a^x \ln a) \Leftrightarrow \ln a = 9 \Leftrightarrow a = e^9$

Chọn ý A.

Câu 68: Gọi a là giá trị nhỏ nhất của $f(n) = \frac{\prod_{i=2}^n \log_3 i}{9^n}$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Có bao nhiêu số tự nhiên n để $f(n) = a$?

A. 2 B. Vô số C. 1 D. 4

Lời giải

Từ giả thiết ta có $f(n+1) = \frac{f(n) \log_3(n+1)}{9}, f(n) = \frac{f(n-1) \log_3 n}{9}$

Để $f(n)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì ta có $\begin{cases} f(n) \leq f(n+1) \\ f(n) \leq f(n-1) \end{cases}$

$$\begin{cases} f(n) \leq \frac{f(n) \log_3(n+1)}{9} \\ \frac{f(n-1) \log_3 n}{9} \leq f(n-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(n+1) \geq 9 \\ \log_3 n \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow 3^9 - 1 \leq n \leq 3^9$$

Vậy có 2 giá trị của n thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn ý A.

Câu 69: Cho 2 số thực x, y không âm thỏa mãn $2^{x+\frac{1}{x}} = \log_2(14 - (y-2)\sqrt{y+1})$. Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2 - xy + 1$?

A. 3 B. 1 C. 2 D. 4

THPT Quảng Xương – Thanh Hóa lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Khi đã làm quen với các dạng toán ở dạng 5 này thì bài toán này trở nên vô cùng bình thường.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có $2^{x+\frac{1}{x}} \geq 2^{2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}} = 4$

Mặt khác ta có $14 - (y-2)\sqrt{y+1} = 14 - (y+1)\sqrt{y+1} + 3\sqrt{y+1}$. Đặt $t = \sqrt{y+1} > 0$.

Xét hàm số $f(t) = -t^3 + 3t + 14, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow f(t) \leq 16 \Rightarrow \log_2(14 - (y-2)\sqrt{y+1}) \leq 4$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow P = 2$

Chọn ý C.

Bài tập tương tự

Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2 - xy + 1$ biết rằng:

$$4^{\frac{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1}{x^2}} = \log_2 \left[14 - (y-2)\sqrt{y+1} \right] \left(x \neq 0, -1 \leq y \leq \frac{13}{2} \right)$$

A. 3

B. 4

C. 1

D. 2

THPT Chuyên Lương Văn Chánh – Phú Yên năm học 2017 – 2018

Chọn ý D.

Câu 70: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $4^x + 9^y + 16^z = 2^x + 3^y + 4^z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2^{x+1} + 3^{y+1} + 4^{z+1}$

A. $\frac{9 + \sqrt{87}}{2}$

B. $\frac{7 + \sqrt{87}}{2}$

C. $\frac{5 + \sqrt{87}}{2}$

D. $\frac{3 + \sqrt{87}}{2}$

Lời giải

Đặt $(2^x, 3^y, 4^z) \rightarrow (a, b, c) \Rightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c \end{cases}$

Khi đó ta có $P = 2a + 3b + 4c = 2\left(a - \frac{1}{2}\right) + 3\left(b - \frac{1}{2}\right) + 4\left(c - \frac{1}{2}\right) + \frac{9}{2}$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$P \leq \sqrt{(2^2 + 3^2 + 4^2) \left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \right]} + \frac{9}{2} = \frac{9 + \sqrt{87}}{2}$$

Chọn ý A.

Câu 71: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{\ln x + 1}{\sqrt{\ln^2 x + 1}} + m \right|$ trên đoạn $[1; e^2]$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{-1 + \sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{1 + \sqrt{2}}{4}$

Lời giải

Ta có $\max_{[1; e^2]} y = \max_{[0; 2]} \left| \frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}} + m \right|$. Xét $f(t) = \frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}} + m, f'(t) = \frac{1-t}{(\sqrt{t^2+1})^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Mặt khác ta có

$$f(0) = m + 1, f(1) = m + \sqrt{2}, f(2) = m + \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow \min_{[1; e^2]} y = \min \left\{ |m+1|; |m+\sqrt{2}| \right\} \geq \frac{1}{2} (|m+1| + |m+\sqrt{2}|) \geq \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$

Chọn ý C.

Câu 72: Biết α là số thực lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \leq e, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\alpha \in (0;1)$ B. $\alpha \in (1;2)$ C. $\alpha \in (-1;0)$ D. $\alpha \in (2;3)$

Lời giải

Gọi $f(n)$ là số thực thỏa mãn đẳng thức

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+f(n)} = e \Leftrightarrow (n+f(n)) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \Leftrightarrow f(n) = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n$$

Trên khoảng $(1; +\infty)$ ta xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x$ ta có $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)\ln^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - 1$

Mặt khác $\ln(t+1) < \frac{t}{\sqrt{t+1}} \forall t > 0$. Thật vậy ta có:

$$g(t) = \ln(t+1) - \frac{t}{\sqrt{t+1}} \Rightarrow g'(t) = \frac{2+t}{2\sqrt{t+1}(t+1)} - \frac{1}{t+1} = \frac{(\sqrt{t+1}-1)^2}{2\sqrt{t+1}(t+1)} > 0$$

Nên suy ra $g(t) > g(0) = 0 \Rightarrow \ln(1+t) < \frac{t}{\sqrt{t+1}}$. Do đó ta được

$$\ln^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \Leftrightarrow x(x+1)\ln^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \forall x > 0$$

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$. Do đó ta suy ra $\alpha \leq f(n) \Rightarrow \alpha = f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$

Chọn ý C.

Câu 73: Cho 2 số thực a, b không âm thỏa mãn $\log_2 ab \in (0;1)$ đồng thời

$$(\log_2 ab)^{\log_2 ab} + (1 - \log_2 ab)^{1 - \log_2 ab} = \sqrt{1 + \frac{2^{a-b+1}}{2^{2a-2b} + 1}}$$

Biết rằng $x^4 y^{10}$ được viết dưới dạng $m\sqrt{n}$ với a, b là các số nguyên dương. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ số $(m; n)$ như vậy?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Một bài toán rất khó nên mình chỉ đưa ra để các bạn tham khảo thôi nhé, trong đề thi sẽ không gặp những bài toán loại này.

Trước tiên ta sẽ đặt $\log_2 ab = x, 1 - \log_2 ab = y \Rightarrow x + y = 1$. Vế trái viết lại là $x^x + y^y$.

Ta có bất đẳng thức $\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ (*) - *Bất đẳng thức Jensen*

Thật vậy ta có thể giả thiết $0 < a < b < 1$ và viết bất đẳng thức dưới dạng

$$\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) \right] - \left[f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right] \leq 0$$

Vế trái của bất đẳng thức này có dạng $f'(\alpha)\frac{y-x}{2} - f'(\beta)\frac{y-x}{2} = f''(\gamma)(\alpha-\beta)\frac{y-x}{2}$

Trong đó $x < \alpha < \frac{x+y}{2} < \beta < y, \alpha < \gamma < \beta$. Vì $\ln f(x) = x \ln x$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x)(1 + \ln x) \Rightarrow f''(x) = f(x) \left((1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right) > 0, \forall x \in (0; 1)$$

Suy ra $f''(\gamma)(\alpha-\beta)\frac{y-x}{2} < 0$. Vậy bất đẳng thức (*) đúng. Khi đó áp dụng ta có

$$x^x + y^y = x^x + (1-x)^{1-x} = f(x) + f(1-x) \geq 2f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có $\sqrt{1 + \frac{2^{a-b+1}}{2^{2a-2b} + 1}} \leq \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 2^{a-b}}{2\sqrt{2^{2a-2b}}}} = \sqrt{2}$.

Vậy VT $\geq$ VP. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = \sqrt[4]{2} \Rightarrow x^4 y^{10} = \sqrt{128} = 2\sqrt{32} = 4\sqrt{8} = 8\sqrt{2}$

Chọn ý D.

Bất đẳng thức Jensen và tính chất của hàm lồi

Ở bài toán trên ta đã sử dụng tới một tính chất có lẽ là ít gặp cũng như một bất đẳng thức khá lạ, ở phần này mình sẽ giới thiệu cho bạn nào có quan tâm tới nó.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và n điểm tùy ý trên $[a; b]$. Ta có

- Nếu $f''(x) > 0$ thì $\sum_{i=1}^n f(x_i) \geq n f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$
- Nếu $f''(x) < 0$ thì $\sum_{i=1}^n f(x_i) \leq n f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$

Ngoài ra cần chú ý thêm

- Nếu hàm số $f(x)$ có $f''(x) > 0, \forall x \in [a; b]$ thì $f(x)$ làm hàm lồi trên $[a; b]$
- Nếu hàm số $f(x)$ có $f''(x) < 0, \forall x \in [a; b]$ thì $f(x)$ làm hàm lõm trên $[a; b]$

Câu 74: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a; b)$ thỏa mãn $0 < a, b \leq 100$ sao cho đồ thị của 2 hàm số $y = \frac{1}{a^x} + \frac{1}{b}$ và $y = \frac{1}{b^x} + \frac{1}{a}$ cắt nhau tại đúng 2 điểm phân biệt?

A. 9704

B. 9702

C. 9698

D. 9700

Lời giải

Ta thấy $a > 1; b > 1$, nếu $a = b$ 2 đường cong trùng nhau nên có vô số điểm chung, loại.

Vì vai trò của a, b như nhau nên ta chỉ cần tìm cặp số nguyên $(a; b)$ với $a > b > 1$ sao cho phương trình $\frac{1}{a^x} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b^x} + \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a^x} - \frac{1}{b^x} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{a^x} - \frac{1}{b^x} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow f'(x) = -\left(\frac{1}{a}\right)^x \ln a + \left(\frac{1}{b}\right)^x \ln b, f(1) = 0$

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \log_{\frac{b}{a}} \left(\frac{\ln b}{\ln a} \right), f'(x) > 0$ khi $x > x_0, f'(x) < 0$ khi $x < x_0$.

Nếu $x_0 = 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{b}{a}} \left(\frac{\ln b}{\ln a} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b} \Leftrightarrow (a; b) = (4; 2)$.

Chú ý xét hàm số $f(t) = \frac{\ln t}{t} \Rightarrow \frac{\ln 3}{3} > \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4} > \frac{\ln 5}{5} > \dots > \frac{\ln 100}{100}$

Khi đó $f(x) \geq f(x_0) = f(1) = 0 \Rightarrow f(x)$ có đúng 1 nghiệm $x_0 = 1$

Nếu $x_0 \neq 1$, khi đó vẽ bảng biến thiên cho hàm số ta thấy phương trình $f(x) = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Với mỗi $b = k \in \{2, 3, \dots, 99\} \Rightarrow a \in \{k+1, \dots, 100\}$ tức có $100 - k$ cách chọn a .

Vậy có $\sum_{k=2}^{99} (100 - k) = 4851$ cặp $(a; b) (a > b > 1)$ và loại đi cặp $(4; 2)$ ta có 4850 cặp.

Xét tương tự với trường hợp $b > a > 1$ ta có tất cả 9700 cách chọn.

Chọn ý D.

Câu 75: Cho 2 số thực x, y không âm thỏa mãn đẳng thức sau:

$$\log_2 \left(\log_3 (-x^2 - 9y^2 + 6xy - 2x + 6y + 2) \right) = \log_3 \left(\log_2 (9x^2 + y^2 - 6xy - 6x + 2y + 3) \right)$$

Biết rằng xy^2 được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên không âm và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi $m+n$ có giá trị bằng bao nhiêu

A. 8

B. 9

C. 10

D. 11

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\log_2 \left(\log_3 (-x^2 - 9y^2 + 6xy - 2x + 6y + 1) \right) = \log_3 \left(\log_2 (9x^2 + y^2 - 6xy - 6x + 2y + 3) \right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\log_3 (3 - (x - 3y + 1)^2) \right) = \log_3 \left(\log_2 ((3x - y - 1)^2 + 2) \right)$$

Ta thấy rằng $\begin{cases} \log_2 \left(\log_3 (3 - (x - 3y + 1)^2) \right) \leq \log_2 (\log_3 3) = 0 \\ \log_3 \left(\log_2 ((3x - y - 1)^2 + 2) \right) \geq \log_3 (\log_2 2) = 0 \end{cases}$. Do đó VT $\leq$ VP.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow xy^2 = \frac{1}{8}$

Chọn ý A.

Câu 76: Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $0 < x - y < \frac{\pi}{2}$ và đồng thời

$$(\tan(x-y))^{\sin(x-y)} + (\cot(x-y))^{\cos(x-y)} = \log_2(4 - x^2y^2)$$

Tính giá trị của biểu thức $\sin\left(x^2y^2 + x - y + \frac{\pi}{4}\right)$?

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. 0

C. 1

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Nguyễn Minh Tuấn

Lời giải

+ Nếu $0 < x - y \leq \frac{\pi}{4}$, áp dụng tính chất của lượng giác và bất đẳng thức AM - GM ta có

$$(\tan(x-y))^{\sin(x-y)} + (\cot(x-y))^{\cos(x-y)} \geq (\tan(x-y))^{\sin(x-y)} + (\cot(x-y))^{\sin(x-y)} \geq 2$$

+ Nếu $\frac{\pi}{4} \leq x - y < \frac{\pi}{2}$, áp dụng tính chất của lượng giác và bất đẳng thức AM - GM ta có

$$(\tan(x-y))^{\sin(x-y)} + (\cot(x-y))^{\cos(x-y)} \geq (\tan(x-y))^{\cos(x-y)} + (\cot(x-y))^{\cos(x-y)} \geq 2$$

Vậy $(\tan(x-y))^{\sin(x-y)} + (\cot(x-y))^{\cos(x-y)} \geq 2$. Mặt khác $\log_2(4 - x^2y^2) \leq \log_2(4) = 2$.

Nên dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} xy = 0 \\ x - y = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \sin\left(x^2y^2 + x - y + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

Chọn ý C.

Câu 77: Cho các số thực a, b, c có tổng bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$P = \sqrt{4^a + 9^b + 16^c} + \sqrt{9^a + 16^b + 4^c} + \sqrt{16^a + 4^b + 9^c}$$

A. $2\sqrt{3}$

B. $3\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{3}$

D. $6\sqrt{3}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$P \geq 3\sqrt[6]{(4^a + 9^b + 16^c)(9^a + 16^b + 4^c)(16^a + 4^b + 9^c)}$$

Theo bất đẳng thức Holder ta có

$$\begin{aligned} (4^a + 9^b + 16^c)(9^a + 16^b + 4^c)(16^a + 4^b + 9^c) &\geq \left(\sqrt[3]{4^{a+b+c}} + \sqrt[3]{9^{a+b+c}} + \sqrt[3]{16^{a+b+c}}\right)^3 \\ &= (4 + 9 + 16)^3 = 3^9 \Rightarrow P \geq 3\sqrt[6]{3^9} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Chọn ý B.

Câu 78: Cho các số thực $x, y, z \in [0; 1]$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (2^x + 2^y + 2^z)(2^{-x} + 2^{-y} + 2^{-z})$ được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên không âm và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi $m + n$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 86

B. 87

C. 88

D. 89

Lời giải

Đặt $(2^x; 2^y; 2^z) \rightarrow (a, b, c) (1 \leq a, b, c \leq 2)$.

Ta có $1 \leq a \leq 2 \Rightarrow (a-1)(a-2) \leq 0 \Leftrightarrow a + \frac{2}{a} \leq 3$. Chứng minh tương tự $b + \frac{2}{b} \leq 3, c + \frac{2}{c} \leq 3$

Cộng 3 bất đẳng thức trên vế theo vế ta được

$$\begin{aligned} 9 &\geq (a+b+c) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 2\sqrt{2(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \\ &\Rightarrow \frac{81}{8} \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $P_{\max} = \frac{81}{8}$.

Chọn ý D.

Tổng quát cho dạng này

Cho n số $x_1; x_2; \dots; x_n \in [a; b], c > 1$. Khi đó ta luôn có

$$(c^{x_1} + c^{x_2} + \dots + c^{x_n})(c^{-x_1} + c^{-x_2} + \dots + c^{-x_n}) \leq \frac{[n(c^a + c^b)]^2}{4c^{a+b}}$$

Câu 79: Cho các số thực x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$P = \sqrt{3 + 2011^{x+y-2z}} + \sqrt{3 + 2011^{y+z-2x}} + \sqrt{3 + 2011^{z+x-2y}}$$

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Mincowsky và bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\begin{aligned}\sum \sqrt{3+2011^{x+y-2z}} &\geq \sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)^2+\left(2011^{\frac{x+y-2z}{2}}+2011^{\frac{y+z-2x}{2}}+2011^{\frac{z+x-2y}{2}}\right)^2} \\ &\geq \sqrt{27+\left[3\sqrt[3]{2011^{\frac{x+y-2z}{2}+\frac{y+z-2x}{2}+\frac{z+x-2y}{2}}}\right]^2}=6\end{aligned}$$

Chọn ý C.

Câu 80: Cho hai các số thực a, b, c, d, e dương thỏa mãn $a+b+c+d+e=1000$ và

$$\begin{cases} a-b+c-d+e > 0 \\ a+b-c+d-e > 0 \\ -a+b+c-d+e > 0 \\ a-b+c+d-e > 0 \\ -a+b-c+d+e > 0 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=(a+c)^{b+d}$

A. 499^{499}

B. 500^{500}

C. 500^{499}

D. 499^{500}

Lời giải

Một câu chỉ mang tính tham khảo cho những bạn có tìm tòi thôi nhé.

$$\text{Đặt } \begin{cases} a-b+c-d+e=h \\ a+b-c+d-e=k \\ -a+b+c-d+e=l \\ a-b+c+d-e=m \\ -a+b-c+d+e=n \end{cases} \text{ ta thấy rằng } h+k+l+m+n=a+b+c+d+e=1000 \text{ và đồng thời}$$

$2a=h+k, 2b=k+l, 2c=l+m, 2d=m+n, 2e=n+h$. Từ đó suy ra h, k, l, m, n đều là các số chẵn. Bên cạnh đó ta suy ra được $a+c=\frac{1}{2}(h+k+l+m)=\frac{1}{2}(1000-n), b+d=\frac{1}{2}(1000-h)$.

Để $M=(a+c)^{b+d}$ đạt giá trị lớn nhất thì n và h có giá trị nhỏ nhất, mà n, h chia hết cho 2 nên $h=n=2 \Rightarrow \max M=499^{499}$.

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} k=9974-2t \\ l=2, 4, \dots, 2t \\ l+m=2+2t \\ k+l+m=996 \end{cases} \quad (t=\overline{1, 496})$$

Chọn ý A.

6. CÁC BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ.

CÁC BÀI TOÁN

Câu 1: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$4^{x+1} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m \text{ có nghiệm trên } [0;1] ?$$

- A. 2 B. 5 C. 4 D. 3

THPT Lê Hồng Phong – Nam Định lần 1 năm 2017-2018

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị của m để hệ sau có nghiệm $\begin{cases} 3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \leq 2017 \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0 \end{cases}$.

- A. $m \geq -3$ B. $m > -3$ C. $m \geq -2$ D. $m \leq -2$

THPT Chuyên Vĩnh Phúc – lần 2 năm học 2017 – 2018

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên dương a để phương trình sau có nghiệm duy nhất?

$$(3a^2 + 12a + 15)\log_{27}(2x - x^2) + \left(\frac{9}{2}a^2 - 3a + 1\right)\log_{\sqrt{11}}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 2\log_9(2x - x^2) + \log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right)$$

- A. 2 B. 0 C. Vô số D. 1

THPT Cổ Loa – Hà Nội lần 1 năm 2017 – 2018

Câu 4: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $10m \in \mathbb{Z}$ và phương trình $2\log_{mx-5}(2x^2 - 5x + 4) = \log_{\sqrt{mx-5}}(x^2 + 2x - 6)$ có nghiệm duy nhất. Tìm số phần tử của S .

- A. 15. B. 14. C. 13. D. 16.

THPT số 3 – 486 tháng 12 năm 2017

Câu 5: Cho tham số thực a . Biết phương trình $e^x - e^{-x} = 2\cos ax$ có 5 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình $e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt.

- A. 5 B. 6 C. 10 D. 11

THPT Chuyên Thái Bình – Lần 3 năm học 2017 – 2018

Câu 6: Cho bất phương trình $m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot (4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0$, với m là tham số.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0]$.

- A. $m > \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$ B. $m > \frac{2+2\sqrt{3}}{3}$ C. $m \geq \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$ D. $m \geq -\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$

THPT Hậu Lộc 2 – Thanh Hóa năm 2017 – 2018

Câu 7: Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (a; b)$ đặt $T = b^2 - a^2$ thì:

- A. $T = 36$ B. $T = 48$ C. $T = 64$ D. $T = 72$

THPT Trần Nhân Tông – Quảng Ninh lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 8: Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2018 của tham số m để phương trình $\log_6(2018x + m) = \log_4(1009x)$ có nghiệm là?

- A. 2020 B. 2017 C. 2019 D. 2018

Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 9: Cho a, x là các số thực dương, $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a x = \log(a^x)$. Tìm giá trị lớn nhất của a .

- A. 1 B. $\log(2^e - 1)$ C. $e^{\sqrt{\frac{\ln 10}{e}}}$ D. $10^{\sqrt{\frac{\log e}{e}}}$

Phổ thông năng khiếu – Đại học Quốc Gia TP. HCM lần 1 năm 2017 – 2018

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\log_2\left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2}\right) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$ có hai nghiệm thực phân biệt?

- A. 3 B. 4 C. 2 D. 1

Sở Giáo dục và Đào tạo Phú Thọ lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$ trên đoạn $[0; \ln 4]$ bằng 6?

- A. 3 B. 4 C. 2 D. 1

THPT Chuyên Ngoại ngữ - Hà Nội lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-9; 9)$ của tham số m để bất phương trình $3\log x \leq 2\log(m\sqrt{x - x^2} - (1 - x)\sqrt{1 - x})$ có nghiệm thực?

- A. 6 B. 7 C. 10 D. 11

Sở Giáo dục và Đào tạo Quảng Nam năm học 2017 – 2018

Câu 13: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$e^{3m} + e^m = 2\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right)\left(1 + x\sqrt{1 - x^2}\right)$$

- A. $\left(0; \frac{1}{2}\ln 2\right)$ B. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\ln 2\right]$ C. $\left(0; \frac{1}{e}\right)$ D. $\left[\frac{1}{2}\ln 2; +\infty\right)$

Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Ninh lần 2 năm học 2017 – 2018

Câu 14: Cho phương trình $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_{2017}(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(1; 2018)$ của tham số a sao cho phương trình đã cho có nghiệm lớn hơn 3

- A. 20 B. 19 C. 18 D. 17

Câu 15: Giả sử tồn tại số thực a sao cho phương trình $e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4$ có 10 nghiệm thực phân biệt. Số nghiệm phân biệt của phương trình $e^x - e^{-x} = 2\cos ax$ là:

- A. 5 B. 20 C. 10 D. 4

Câu 16: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình sau có nghiệm thực?

$$\ln(m + 2\sin x + \ln(m + 3\sin x)) = \sin x$$

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 6

Câu 17: Cho n là số tự nhiên thỏa mãn phương trình $3^x - 3^{-x} = 2\cos nx$ có 2018 nghiệm. Tìm số nghiệm của phương trình $9^x + 9^{-x} = 4 + 2\cos 2nx$.

- A. 4036 B. 2018 C. 4035 D. 2019

THPT Quảng Xương 1 – Thanh Hóa năm học 2017 – 2018

Câu 18: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m \cdot 3^{x^2-7x+12} + 3^{2x-x^2} = 9 \cdot 3^{10-5x} + m$ có ba nghiệm thực phân biệt. Tìm số phần tử của S .

- A. 3 B. Vô số C. 1 D. 2

THPT Trần Hưng Đạo – TP. HCM năm học 2017 – 2018

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $e^{2x+y+1} - e^{3x+2y} = x + y - 1$, đồng thời thỏa mãn $\log_2^2(2x + y - 1) - (m + 4)\log_2 x + m^2 + 4 = 0$.

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Sở Giáo dục và đào tạo Bà Rịa Vũng Tàu đề 1 năm 2017 – 2018

Câu 20: Biết $(a; b)$ là khoảng chứa tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $(7 - 3\sqrt{5})^{x^2} + m(7 + 3\sqrt{5})^{x^2} = 2^{x^2-1}$ có đúng bốn nghiệm thực phân biệt. Tính $M = a + b$.

- A. $M = \frac{1}{8}$ B. $M = \frac{1}{16}$ C. $M = \frac{-7}{16}$ D. $M = \frac{3}{5}$

THPT Hồng Lĩnh – Hà Tĩnh lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để phương trình $\sqrt{m + \sqrt{m + e^x}} = e^x$ có nghiệm thực?

- A. 9 B. 8 C. 10 D. 7

Sở Giáo dục và đào tạo Bắc Giang năm học 2017 – 2018

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = (a^2 + 1)\ln^{2017}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + bx\sin^{2018}x + 2$ với a, b là các số thực. Biết rằng $f(7^{\log 5}) = 6$. Tính $f(-5^{\log 7})$.

- A. $f(-5^{\log 7}) = 2$ B. $f(-5^{\log 7}) = 4$ C. $f(-5^{\log 7}) = -2$ D. $f(-5^{\log 7}) = 6$

Sở Giáo dục và đào tạo Bắc Giang năm học 2017 – 2018

Câu 23: Cho bất phương trình $m \cdot 3^{x+1} + (3m+2)(4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0)$

- A. $m > \frac{2+2\sqrt{3}}{3}$ B. $m > \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$ C. $m \geq \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$ D. $m \geq -\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$

Chuyên Đồng bằng sông Hồng lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\ln(m + \ln(m+x)) = x$ có nhiều nghiệm nhất.

- A. $m \geq 0$ B. $m > 1$ C. $m < e$ D. $m \geq -1$

THPT Chuyên Vĩnh Phúc lần 4 – năm học 2017 – 2018

Câu 25: Cho phương trình $e^{m \cos x - \sin x} - e^{2(1-\sin x)} = 2 - \sin x - m \cos x$ với m là tham số thực. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm. Khi đó S có dạng $(-\infty; a] \cup [b; +\infty)$. Tính $T = 10a + 20b$.

- A. $T = 10\sqrt{3}$ B. $T = 0$ C. $T = 1$ D. $T = 3\sqrt{10}$

THPT Kim Liên – Hà Nội lần 2 năm học 2017 – 2018

Câu 26: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m$

Có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

- A. 3 B. Vô số C. 2 D. 4

THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai lần 2 năm học 2017 – 2018

Câu 27: Cho phương trình $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_5(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_m(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương khác 1 của m sao cho phương trình đã cho có nghiệm x lớn hơn 2?

- A. Vô số B. 3 C. 2 D. 1

THPT Chuyên Đại học Vinh – Nghệ An lần 2 năm học 2017 – 2018

Câu 28: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0; 2018)$ để ta

luôn có $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} \leq \frac{1}{2187}$?

- A. 2011 B. 2016 C. 2019 D. 2009

THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp lần 5 năm học 2017 – 2018

Câu 29: Cho phương trình $4^x - (m+1)2^{x+1} + 8 = 0$. Biết phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 6$. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là?

- A. Không có m B. $1 < m < 3$ C. $m > 3$ D. $m < 2$

THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Hà Nội lần 2 năm học 2017 – 2018

Câu 30 : Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng ba nghiệm phân biệt.

$$2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$$

- A. $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \right\}$ B. $S = \left\{ \frac{1}{2}; -1; \frac{3}{2} \right\}$ C. $S = \left\{ -\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \right\}$ D. $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1; -\frac{3}{2} \right\}$

THPT Chu Văn Anh – Hà Nội năm học 2017 – 2018

Câu 31 : Có bao nhiêu số nguyên dương m trong đoạn $[-2018; 2018]$ sao cho bất phương

trình sau đúng với mọi $x \in (1; 100)$: $(10x)^{m + \frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10} \log x}$.

- A. 2018 B. 4026 C. 2013 D. 4036

Câu 32 : Gọi S là tập các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = x^2 + \ln(x + m + 2)$ đồng biến trên tập xác định của nó. Biết $S = (-\infty; a + \sqrt{b}]$. Tính tổng $K = a + b$ là

- A. $K = -5$ B. $K = 5$ C. $K = 0$ D. $K = 2$

Câu 33 : Cho hai số thực a, b ($a > 1, b > 1$). Phương trình $a^x + b^x = b + ax$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 34: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$27^x - m \cdot 3^{2x+1} + (m^2 - 1)3^{x+1} - (m^2 - 1) = 0$$

Có 3 nghiệm thực phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tính giá trị của biểu thức $S = a + b$

- A. 2 B. $1 + \sqrt{3}$ C. $2 + \sqrt{2}$ D. $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Câu 35: Có bao nhiêu số nguyên m $\in [-2018; 2018]$ để phương trình $|2^{|x|+1} - 8| = \frac{3}{2}x^2 + m$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?

- A. 2013 B. 2012 C. 4024 D. 2014

Câu 36: Cho bất phương trình $\log_{3a} 11 + \left(\log_{\frac{1}{7}} \left(\sqrt{x^2 + 3ax + 10} + 4 \right) \right) \log_{3a} (x^2 + 3ax + 12) \geq 0$.

Giá trị thực của tham số a để bất phương trình trên có nghiệm duy nhất thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-1; 0)$ B. $(1; 2)$ C. $(0; 1)$ D. $(2; +\infty)$

THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa lần 1 năm học 2017 – 2018

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$4^{x+1} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m \text{ có nghiệm trên } [0;1] ?$$

A. 2

B. 5

C. 4

D. 3

THPT Lê Hồng Phong – Nam Định lần 1 năm 2017-2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$4^{x+1} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m \Leftrightarrow 4(4^x + 4^{-x}) = 4(m+1)(2^x - 2^{-x}) + 16 - 8m$$

Đặt $t = u(x) = 2^x - 2^{-x}$, $x \in [0;1] \Rightarrow u'(x) = 2^x + 2^{-x} > 0 \forall x \in [0;1]$. Suy ra $u(0) \leq t \leq u(1)$ hay

$$t \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow t^2 = 4^x + 4^{-x} - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} \Rightarrow 4^x + 4^{-x} = t^2 + 2. \text{ Phương trình trở thành :}$$

$$4(t^2 + 2) = 4t(m+1) + 16 - 8m$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2 = t(m+1) + 4 - 2m$$

$$\Leftrightarrow t^2 - t(m+1) + 2m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(t-2) = t^2 - t - 2$$

$$\Leftrightarrow m(t-2) = (t-2)(t+1)$$

$$\Leftrightarrow m = t+1 \left(t \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \right)$$

$$\Leftrightarrow t = m-1$$

Để phương trình đã cho có nghiệm trên $[0;1]$ thì phương trình $t = m-1$ phải có nghiệm

$$t \in \left[0; \frac{3}{2}\right]. \text{ Suy ra } m-1 \in \left[0; \frac{3}{2}\right], \text{ hay } m \in \left[1; \frac{5}{2}\right].$$

Chọn ý A.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị của m để hệ sau có nghiệm $\begin{cases} 3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \leq 2017 \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0 \end{cases}$.

A. $m \geq -3$

B. $m > -3$

C. $m \geq -2$

D. $m \leq -2$

THPT Chuyên Vĩnh Phúc – lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện $x \geq -1$.

$$\text{Xét } 3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \leq 2017 \Leftrightarrow 3^{2x} \cdot 3^{\sqrt{x+1}} - 3^2 \cdot 3^{\sqrt{x+1}} \leq 2017 - 2017x$$

$$\Leftrightarrow (9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} \leq 2017(1-x). \text{ Dễ thấy } x=1 \text{ là một nghiệm.}$$

- Nếu $x > 1$ thì VT $= (9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} > 0$, VP $= 2017(1-x) < 0$

Suy ra $(9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} \leq 2017(1-x)$ vô nghiệm.

- Nếu $-1 \leq x < 1$ thì $VT = (9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} < 0$, $VP = 2017(1-x) > 0$

Suy ra $(9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} \leq 2017(1-x)$ có nghiệm với $-1 \leq x < 1$.

Vậy bpt $3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \leq 2017$ có nghiệm với $-1 \leq x \leq 1$.

Cách 1

Xét: $f(x) = x^2 - (m+2)x + 2m+3 \geq 0$. Ta có $\Delta = m^2 - 4m - 8$, để bpt có nghiệm $-1 \leq x \leq 1$ thì:

- TH1: $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{3} + 2 \leq m \leq 2\sqrt{3} + 2$, bpt có nghiệm $-1 \leq x \leq 1$ (1)
- TH2: $\Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2\sqrt{3} + 2 \\ m < -2\sqrt{3} + 2 \end{cases}$, nghiệm của bpt là $(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$.

$$\text{Ta có } (-1; 1) \subset (x_1; x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) < 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m+6 < 0 \\ m+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$$

Do đó BPT có nghiệm $-1 \leq x \leq 1$ khi $m \geq -2$

Kết hợp điều kiện ta được $m > 2\sqrt{3} + 2$ và $-2 \leq m < -2\sqrt{3} + 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hệ đã cho có nghiệm khi $m \geq -2$.

Cách 2. Bài toán trở thành tìm m để bpt $x^2 - (m+2)x + 2m+3 \geq 0$ có nghiệm $-1 \leq x \leq 1$

Bất phương trình tương đương

$$m(x-2) \leq x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2} = f(x) \quad (*) \quad (\text{Do } -1 \leq x \leq 1)$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}. \text{ Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{3} \in [-1; 1]$$

Để bất phương trình (*) có nghiệm thì $m \geq \min_{x \in [-1; 1]} f(x)$. Lập bảng biến thiên của hàm số

$f(x)$ trên $[-1; 1]$ ta có $m \geq f(1) = f(-1) = -2$. Vậy $m \geq -2$.

Chọn ý C.

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên dương a để phương trình sau có nghiệm duy nhất?

$$(3a^2 + 12a + 15) \log_{27} (2x - x^2) + \left(\frac{9}{2}a^2 - 3a + 1 \right) \log_{\sqrt{11}} \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) = 2 \log_9 (2x - x^2) + \log_{11} \left(\frac{2 - x^2}{2} \right)$$

A. 2

B. 0

C. Vô số

D. 1

THPT Cổ Loa – Hà Nội lần 1 năm 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện $0 < x < \sqrt{2}$.

Biến đổi phương trình ban đầu tương đương

$$\begin{aligned} (a^2 + 4a + 5)\log_3(2x - x^2) + (9a^2 - 6a + 2)\log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right) &= \log_3(2x - x^2) + \log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right) \\ \Leftrightarrow (a^2 + 4a + 4)\log_3(2x - x^2) + (9a^2 - 6a + 1)\log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a + 2)^2 \log_3(2x - x^2) + (3a - 1)^2 \log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right) &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3a - 1}{a + 2}\right)^2 = \frac{\log_3(2x - x^2)}{\log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right)} (*) \end{aligned}$$

Mà vế trái của (*) luôn dương với mọi a nguyên dương.

Vì $0 < x < \sqrt{2}$ nên $2 - x^2 < 2 \Rightarrow \frac{2}{2 - x^2} > 1 \Rightarrow \log_{11}\left(\frac{2}{2 - x^2}\right) > 0$

Do đó từ (*) suy ra $\log_3(2x - x^2) > 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < 0 \Rightarrow$ không tồn tại x .

Vậy không có giá trị của tham số a thỏa mãn yêu cầu đề bài

họ ý B.

Câu 4: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $10m \in \mathbb{Z}$ và phương trình $2\log_{mx-5}(2x^2 - 5x + 4) = \log_{\sqrt{mx-5}}(x^2 + 2x - 6)$ có nghiệm duy nhất. Tìm số phần tử của S .

A. 15.

B. 14.

C. 13.

D. 16.

THTT số 3 - 486 tháng 12 năm 2017

Lời giải

Ta có: $2x^2 - 5x + 4 > 0$ với mọi x nên phương trình ban đầu tương đương với

$$\begin{cases} mx - 5 > 0 \\ mx - 5 \neq 1 \\ 2x^2 - 5x + 4 > 0 \\ 2x^2 - 5x + 4 = x^2 + 2x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx > 5 \\ mx \neq 6 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất tương đương với ta nhận nghiệm $x = 2$ và loại $x = 5$ hoặc nhận nghiệm $x = 5$ và loại $x = 2$.

- Trường hợp 1: Nhận nghiệm $x = 2$ và loại $x = 5$.

Điều này tương đương với $\begin{cases} 2m > 5 \\ 2m \neq 6 \\ \begin{cases} 5m \leq 5 \\ 5m = 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{5}{2} \\ m \neq 3 \\ \begin{cases} m \leq 1 \\ m = \frac{6}{5} \end{cases} \end{cases}$ (vô lí).

- Trường hợp 2: Nhận nghiệm $x = 5$ và loại $x = 2$.

$$\text{Điều này tương đương với } \begin{cases} 5m > 5 \\ 5m \neq 6 \\ \begin{cases} 2m \leq 5 \\ 2m = 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq \frac{6}{5} \\ \begin{cases} m \leq \frac{5}{2} \\ m = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ 1 < m \leq \frac{5}{2} \\ m \neq \frac{6}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 10m = 30 \\ 10 < 10m \leq 25. \text{ Vì } 10m \in \mathbb{Z} \text{ nên } 10m \in \{11; 13; 14...; 25\} \cup \{30\}. \\ m \neq 12 \end{cases}$$

Trong tập hợp này có 15 phần tử nên tập hợp S cũng có 15 phần tử.

$$\text{Chú ý: } m \in \left\{ \frac{11}{10}; \frac{13}{10}; \frac{14}{10} \dots; \frac{25}{10} \right\} \cup \left\{ \frac{30}{10} \right\}.$$

Chọn ý A.

Câu 5: Cho tham số thực a. Biết phương trình $e^x - e^{-x} = 2 \cos ax$ có 5 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình $e^x + e^{-x} = 2 \cos ax + 4$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt.

A. 5

B. 6

C. 10

D. 11

THPT Chuyên Thái Bình – Lần 3 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Ta thấy rằng phương trình $e^x - e^{-x} = 2 \cos ax$ có đúng 5 nghiệm

Suy ra phương trình $e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = 2 \cos a \frac{x}{2}$ có đúng 5 nghiệm (*)

$$\begin{aligned} e^x + e^{-x} = 2 \cos ax + 4 &\Leftrightarrow e^x + e^{-x} - 2 = 2(\cos ax + 1) \\ \Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 &= 4 \cos^2 \frac{ax}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = 2 \cos \frac{ax}{2} & (1) \\ e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = -2 \cos \frac{ax}{2} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

- Phương trình (1) và phương trình (2) nếu có nghiệm chung x_0 thì $\cos \frac{ax_0}{2} = 0$ và

$$e^{\frac{x_0}{2}} = e^{-\frac{x_0}{2}} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ \cos 0 = 0 \end{cases} \text{ - vô lý. Vậy (1), (2) có nghiệm khác nhau.}$$

- Phương trình (1) có 5 nghiệm (theo (*)).

Nếu x_0 là 1 nghiệm của (1) thì $x_0 \neq 0$ và $e^{\frac{x_0}{2}} - e^{-\frac{x_0}{2}} = 2 \cos \frac{ax_0}{2} \Rightarrow e^{-\frac{x_0}{2}} - e^{\frac{x_0}{2}} = -2 \cos a \left(-\frac{x_0}{2} \right)$

Khi đó $-x_0$ là 1 nghiệm của (2).

Vậy phương trình (2) có 5 nghiệm phân biệt (và khác 5 nghiệm của phương trình (1)).

Phương trình đã cho có đúng 10 nghiệm.

Chọn ý C.

Câu 6: Cho bất phương trình $m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot (4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0]$.

A. $m > \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$

B. $m > \frac{2+2\sqrt{3}}{3}$

C. $m \geq \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$

D. $m \geq -\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$

THPT Hậu Lộc 2 – Thanh Hóa năm 2017 – 2018

Lời giải

Bất phương trình tương đương:

$$m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot (4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x + (3m+2) \left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x + 3m > 0$$

Đặt $t = \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$, do $x \leq 0$ nên $0 < t \leq 1$

Ta cần tìm tham số m sao cho $t^2 + 3mt + 3m + 2 > 0$, đúng với mọi $0 < t \leq 1$

Ta có $m > \frac{-t^2-2}{3t+3} \Leftrightarrow m > \max_{(0;1]} \frac{-t^2-2}{3t+3}$. Ta tìm GTLN của hàm số $f(t) = -\frac{t^2+2}{3t+2}$ trên $0 < t \leq 1$

Ta có $f'(t) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{t^2+2t-2}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1-\sqrt{3} \\ t = -1+\sqrt{3} \end{cases}$

Lập bảng biến thiên ta được $\max_{(0;1]} \frac{-t^2-2}{3t+3} = f(-1+\sqrt{3}) = \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$

Chọn ý A.

Câu 7: Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3-6x^2+9x+m)2^{x-2} = 2^{x+1}+1$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (a;b)$ đặt $T = b^2 - a^2$ thì:

A. $T = 36$

B. $T = 48$

C. $T = 64$

D. $T = 72$

THPT Trần Nhân Tông – Quảng Ninh lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\begin{aligned} 2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3-6x^2+9x+m)2^{x-2} &= 2^{x+1}+1 \\ \Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x-2)^3 + 8+m-3x &= 2^3+2^{2-x} \\ \Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + m-3x &= 2^{2-x} + (2-x)^3 \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t^3$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 3t^2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ (1) suy ra $m-3x = (2-x)^3 \Leftrightarrow m = 8-9x+6x^2-x^3$

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$ trên $\mathbb{R}$. có $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$.

Lập bảng biến thiên ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi $4 < m < 8$.

Suy ra $a = 4$; $b = 8 \Rightarrow T = b^2 - a^2 = 48$.

Chọn ý B.

Câu 8: Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2018 của tham số m để phương trình $\log_6(2018x + m) = \log_4(1009x)$ có nghiệm là?

A. 2020

B. 2017

C. 2019

D. 2018

Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Đặt $\log_6(2018x + m) = \log_4(1009x) = t \Rightarrow \begin{cases} 2018x + m = 6^t \\ 1009x = 4^t \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 4^t + m = 6^t \Leftrightarrow m = -2 \cdot 4^t + 6^t$.

Đặt $f(t) = -2 \cdot 4^t + 6^t$. Ta có: $f'(t) = 6^t \ln 6 - 2 \cdot 4^t \ln 4$.

Xét $f'(t) = 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{2 \ln 4}{\ln 6} = \log_6 16 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)$.

Lập bảng biến thiên ta thấy rằng phương trình $f(t) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi

$m \geq f\left(\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)\right) \approx -2,01$. Mà $\begin{cases} m < 2018 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên ta có: $\begin{cases} -2 \leq m \leq 2017 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Vậy có 2020 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn ý A.

Câu 9: Cho a, x là các số thực dương, $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a x = \log(a^x)$. Tìm giá trị lớn nhất của a .

A. 1

B. $\log(2^e - 1)$

C. $e^{\sqrt{\frac{\ln 10}{e}}}$

D. $10^{\sqrt{\frac{\log e}{e}}}$

Phổ thông năng khiếu – Đại học Quốc Gia TP. HCM lần 1 năm 2017 – 2018

Lời giải

Ta có: $\log_a x = \log(a^x) \Leftrightarrow \log_a x = x \log a \Leftrightarrow \frac{\log x}{\log a} = x \log a \Leftrightarrow \frac{\log x}{x} = (\log a)^2$

Giá trị của a lớn nhất khi và chỉ khi $\log a$ lớn nhất.

Xét hàm số $f(x) = \frac{\log x}{x}$ với $x > 0$. Ta có $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2 \ln 10}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

Lập bảng biến thiên ta dễ dàng suy ra $(\log a)^2$ lớn nhất là bằng $\frac{\log e}{e}$

Khi đó $(\log a)^2 = \frac{\log e}{e} \Rightarrow \log a = \sqrt{\frac{\log e}{e}} \Rightarrow a = 10^{\sqrt{\frac{\log e}{e}}}$

Chọn ý D.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 3

B. 4

C. 2

D. 1

Sở Giáo dục và Đào tạo Phú Thọ lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ 2x^2 + mx + 1 > 0 \end{cases}$

Phương trình ban đầu tương đương:

$$\log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{2x^2 + mx + 1} + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = \log_2 (x + 2) + x + 2 \Leftrightarrow f(\sqrt{2x^2 + mx + 1}) = f(x + 2) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t \in (0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$

$$\Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty) \text{ nên } (1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$$

$$\text{Từ đó } \begin{cases} x > -2 \\ 2x^2 + mx + 1 = (x + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x^2 + (m - 4)x - 3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để có hai nghiệm thực phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m - 4)^2 + 12 > 0 \\ (x_1 + 2) + (x_2 + 2) > 0 \\ (x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ x_1 + x_2 + 4 > 0 \\ x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ 4 - m + 4 > 0 \\ -3 + 2(4 - m) + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 \\ m < \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{9}{2} \text{ mà } m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\}.$$

Chọn ý B.

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$ trên đoạn $[0; \ln 4]$ bằng 6?

A. 3

B. 4

C. 2

D. 1

THPT Chuyên Ngoại ngữ - Hà Nội lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Xét $x \in [0; \ln 4]$. Đặt $t = e^x \Rightarrow t \in [1; 4]$. Đặt $g(t) = t^2 - 4t + m$ với $t \in [1; 4]$

Đạo hàm: $g'(t) = 2t - 4$. Xét $g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Ta có: $g(1) = m - 3; g(2) = m - 4; g(4) = m$

Giá trị nhỏ nhất của $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$ trên $[0; \ln 4]$ sẽ thuộc $A = \{|m-3|; |m-4|; |m|\}$

- Xét $|m-4|=6 \Leftrightarrow \begin{cases} m=10 \Rightarrow A=\{7;6;10\} \\ m=-2 \Rightarrow A=\{5;6;2\} \end{cases}$

Ta thấy $m=10$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\min f(x)=6$

- Xét $|m-3|=6 \Leftrightarrow \begin{cases} m=9 \Rightarrow A=\{5;6;9\} \\ m=-3 \Rightarrow A=\{7;6;3\} \end{cases}$ (không thỏa mãn)
- Xét $|m|=6 \Leftrightarrow \begin{cases} m=6 \Rightarrow A=\{2;3;6\} \\ m=-6 \Rightarrow A=\{10;9;6\} \end{cases}$

Ta thấy $m=-6$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\min f(x)=6$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn ý D.

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-9;9)$ của tham số m để bất phương trình $3\log x \leq 2\log(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x})$ có nghiệm thực?

A. 6

B. 7

C. 10

D. 11

Sở Giáo dục và Đào tạo Quảng Nam năm học 2017 – 2018

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m\sqrt{x} - (1-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m > \frac{(1-x)}{\sqrt{x}} > 0 \end{cases}$$

Bất phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{aligned} \log x^3 &\leq \log(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x})^2 \Leftrightarrow x^3 \leq (m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x})^2 \\ \Leftrightarrow x\sqrt{x} &\leq (m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow m \geq \frac{x\sqrt{x} + (1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có : $\left(\frac{x}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{1-x}\right) + \left(\frac{1-x}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) \geq 2\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x}$

Vì vậy $m \geq \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$.

Khảo sát hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ trên $(0;1)$ ta được $f(x) \geq \sqrt{2} \approx 1,414$.

Vậy m có thể nhận được các giá trị 2,3,4,5,6,7,8.

Chọn ý B.

Câu 13: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm $e^{3m} + e^m = 2(x + \sqrt{1-x^2})(1 + x\sqrt{1-x^2})$

A. $\left(0; \frac{1}{2} \ln 2\right)$

B. $\left(-\infty; \frac{1}{2} \ln 2\right]$

C. $\left(0; \frac{1}{e}\right)$

D. $\left[\frac{1}{2} \ln 2; +\infty\right)$

Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Ninh lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Đặt $t = x + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq t \leq \sqrt{2} \\ t^2 - 1 = 2x\sqrt{1-x^2} \end{cases}$. Khi đó: $e^{3m} + e^m = t(t^2 + 1) \Leftrightarrow e^{3m} + e^m = t^3 + t$.

Xét hàm $f(u) = u^3 + u \Rightarrow f'(u) = 3u^2 + 1$. Hàm số luôn đồng biến.

$\Rightarrow e^{3m} + e^m = t^3 + t \Leftrightarrow e^m = t$. Phương trình có nghiệm: $e^m \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2} \ln 2$

Chọn ý B.

Câu 14: Cho phương trình $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_{2017}(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(1; 2018)$ của tham số a sao cho phương trình đã cho có nghiệm lớn hơn 3?

A. 20

B. 19

C. 18

D. 17

Lời giải

Nhận thấy với $x > 3$ thì $\sqrt{x^2 - 1} < \sqrt{x^2} = x \Rightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} > 0$ và $x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$

Biến đổi phương trình tương đương:

$$\begin{aligned} \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_{2017}(x - \sqrt{x^2 - 1}) &= \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ \Leftrightarrow \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_{2017}(x + \sqrt{x^2 - 1}) &= \log_a 2 \cdot \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ \Leftrightarrow \log_{2017}(x + \sqrt{x^2 - 1}) &= \log_a 2 \quad (1) \quad (\text{vì } \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) > 0, \forall x > 3) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = \log_{2017}(x + \sqrt{x^2 - 1})$ trên khoảng $(3; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} \cdot \ln 2017} \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x > 3$.

Lập bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có nghiệm lớn hơn 3 $\Leftrightarrow \log_2 a > f(3)$

$\Leftrightarrow \log_2 a > \log_{2017}(3 + 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow \log_2 a < \log_{3+2\sqrt{2}} 2017 (a > 1) \Leftrightarrow a < 2^{\log_{3+2\sqrt{2}} 2017} \approx 19,9$.

Lại do a nguyên thuộc khoảng $(1; 2018)$ nên $a \in \{2; 3; \dots; 19\}$

Vậy có 18 giá trị nguyên của tham số a thỏa mãn yêu cầu đề bài

Chọn ý C.

Câu 15: Giả sử tồn tại số thực a sao cho phương trình $e^x + e^{-x} = 2 \cos ax + 4$ có 10 nghiệm thực phân biệt. Số nghiệm phân biệt của phương trình $e^x - e^{-x} = 2 \cos ax$ là:

A. 5

B. 20

C. 10

D. 4

Lời giải

Đây là một câu tương tự với câu trong đề thi thử Chuyên Thái Bình lần 3.

Phương trình đầu tương đương

$$e^x + e^{-x} = 2 \cos ax + 4 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 = 2 \cos ax + 2$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 = \left(2 \cos \frac{ax}{2} \right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = 2 \cos \frac{ax}{2} & (1) \\ e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = -2 \cos \frac{ax}{2} & (2) \end{cases}$$

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

Nếu $x = x_0$ là nghiệm của (1) thì $x = -x_0$ là nghiệm của (2).

Do đó số nghiệm của (1) và (2) bằng nhau và đồng thời khác nhau đôi một. Suy ra phương trình (1) có đúng 5 nghiệm $x_1; x_2; x_3; x_4; x_5$.

Vậy phương trình $e^x - e^{-x} = 2 \cos ax$ có đúng 5 nghiệm phân biệt là $\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{2}, \frac{x_5}{2}$.

Chọn ý A.

Câu 16: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình sau có nghiệm thực?

$$\ln(m + 2 \sin x + \ln(m + 3 \sin x)) = \sin x$$

A. 5

B. 4

C. 3

D. 6

Lời giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} m + 2 \sin x + \ln(m + 3 \sin x) > 0 \\ m + 3 \sin x > 0 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương:

$$m + 2 \sin x + \ln(m + 3 \sin x) = e^{\sin x}$$

$$\Leftrightarrow m + 3 \sin x + \ln(m + 3 \sin x) = e^{\sin x} + \sin x$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(m + 3 \sin x)} + \ln(m + 3 \sin x) = e^{\sin x} + \sin x, \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + t, t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy (1) $\Leftrightarrow f[\ln(m + 3 \sin x)] = f(\sin x) \Leftrightarrow \ln(m + 3 \sin x) = \sin x$.

Đặt $a = \sin x, a \in [-1; 1]$. Phương trình trở thành: $\ln(m + 3a) = a \Leftrightarrow m = e^a - 3a$.

Xét $g(a) = e^a - 3a, a \in [-1; 1], g'(a) = e^a - 3 < 0, \forall a \in [-1; 1]$.

Vậy để phương trình có nghiệm thực thì $g(1) \leq m \leq g(-1) \Leftrightarrow e - 3 \leq m \leq \frac{1}{e} + 3$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m là: 0; 1; 2; 3.

Chọn ý B.

Câu 17: Cho n là số tự nhiên thỏa mãn phương trình $3^x - 3^{-x} = 2 \cos nx$ có 2018 nghiệm. Tìm số nghiệm của phương trình $9^x + 9^{-x} = 4 + 2 \cos 2nx$.

A. 4036

B. 2018

C. 4035

D. 2019

THPT Quảng Xương 1 – Thanh Hóa năm học 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương:

$$9^x + 9^{-x} = 4 + 2 \cos 2nx \Leftrightarrow 9^x + 9^{-x} - 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} = 2 + 2 \cos 2nx$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 3^{-x})^2 = 4 \cos^2 nx \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 3^{-x} = 2 \cos nx & (1) \\ 3^x - 3^{-x} = -2 \cos nx & (2) \end{cases}$$

Khi đó nếu (1) và (2) có nghiệm chung thì $3^x - 3^{-x} = 3^{-x} - 3^x \Leftrightarrow 3^x = 3^{-x} \Leftrightarrow x = 0$

Thay $x = 0$ vào (1) ta được $3^0 - 3^0 = 2 \cos 0 \Leftrightarrow 0 = 2$, tức là (1) và (2) không có nghiệm chung. Mặt khác ta thấy nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $-x_0$ sẽ là nghiệm của (2). Mà (1) có 2018 nghiệm nên (2) cũng có 2018 nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 4036 nghiệm.

Chọn ý A.

Câu 18: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m \cdot 3^{x^2-7x+12} + 3^{2x-x^2} = 9 \cdot 3^{10-5x} + m$ có ba nghiệm thực phân biệt. Tìm số phần tử của S .

A. 3

B. Vô số

C. 1

D. 2

THPT Trần Hưng Đạo – TP. HCM năm học 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được:

$$m \cdot 3^{x^2-7x+12} + 3^{2x-x^2} = 9 \cdot 3^{10-5x} + m \Leftrightarrow m(3^{x^2-7x+12} - 1) - 3^{2x-x^2}(3^{x^2-7x+12} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3^{x^2-7x+12} - 1)(m - 3^{2x-x^2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2-7x+12} - 1 = 0 \\ m - 3^{2x-x^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \\ 2x - x^2 - \log_3 m = 0 (*) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm thực phân biệt, ta có các trường hợp sau:

- **Trường hợp 1:** (*) có một nghiệm $x = 3$ và nghiệm còn lại khác 3 và 4

Thay $x = 3$ vào (*) ta được $\log_3 m = -3 \Leftrightarrow m = \frac{1}{27}$

Khi đó (*) trở thành $-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$ (Thỏa yêu cầu)

- **Trường hợp 2:** (*) có một nghiệm $x = 4$ và nghiệm còn lại khác 3 và 4

Thay $x = 4$ vào (*) ta được $\log_3 m = -8 \Leftrightarrow m = 3^{-8}$

Khi đó (*) trở thành $-x^2 + 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$ (Thỏa yêu cầu)

- **Trường hợp 3:** (*) có nghiệm kép khác 3 và 4 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - \log_3 m = 0 \\ \log_3 m \neq -3 \\ \log_3 m \neq -8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$

Vậy có 3 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.

Chọn ý A.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số (x; y) thỏa mãn $e^{2x+y+1} - e^{3x+2y} = x + y - 1$, đồng thời thỏa mãn $\log_2^2(2x + y - 1) - (m + 4)\log_2 x + m^2 + 4 = 0$.

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

Sở Giáo dục và đào tạo Bà Rịa Vũng Tàu đề 1 năm 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $e^{2x+y+1} - e^{3x+2y} = x + y - 1 \Leftrightarrow e^{2x+y+1} + (2x + y + 1) = e^{3x+2y} + (3x + 2y)$.

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = e^t + 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình có dạng $f(2x + y + 1) = f(3x + 2y) \Leftrightarrow 2x + y + 1 = 3x + 2y \Leftrightarrow y = 1 - x$.

Thế vào phương trình còn lại ta được $\log_2^2 x - (m + 4)\log_2 x + m^2 + 4 = 0$.

Đặt $t = \log_2 x$, phương trình có dạng $t^2 - (m + 4)t + m^2 + 4 = 0$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 8m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{8}{3}$.

Do đó có 3 số nguyên m thỏa mãn.

Chọn ý A.

Câu 20: Biết (a; b) là khoảng chứa tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $(7 - 3\sqrt{5})^{x^2} + m(7 + 3\sqrt{5})^{x^2} = 2^{x^2-1}$ có đúng bốn nghiệm thực phân biệt. Tính $M = a + b$.

A. $M = \frac{1}{8}$

B. $M = \frac{1}{16}$

C. $M = \frac{-7}{16}$

D. $M = \frac{3}{5}$

THPT Hồng Lĩnh – Hà Tĩnh lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$(7 - 3\sqrt{5})^{x^2} + m(7 + 3\sqrt{5})^{x^2} = 2^{x^2-1} \Leftrightarrow \left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} + m\left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{2}$$

Vì $\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} \cdot \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} = 1$ nên đặt $t = \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}$, $0 < t \leq 1$ phương trình trở thành

$$t + \frac{m}{t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - t + 2m = 0 \Leftrightarrow 2m = -2t^2 + t (*)$$

Xét hàm số $f(t) = -2t^2 + t$, $0 < t \leq 1 \Rightarrow f'(t) = -4t + 1$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$. Vẽ bảng biến thiên ta thấy rằng để phương trình đã cho có đúng bốn nghiệm thực phân biệt thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < t < 1$.

Từ đó ta được $0 < 2m < \frac{1}{8} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{16} \Rightarrow M = 0 + \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$

Chọn ý B.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để phương trình $\sqrt{m + \sqrt{m + e^x}} = e^x$ có nghiệm thực?

A. 9

B. 8

C. 10

D. 7

Sở Giáo dục và đào tạo Bắc Giang năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} m + e^x \geq 0 \\ m + \sqrt{m + e^x} \geq 0 \end{cases}$. Đặt $t = \sqrt{m + e^x}$ ($t \geq 0$) ta suy ra: $\begin{cases} m + t = e^{2x} \\ t^2 = m + e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow e^{2x} - t^2 = t - e^x \Leftrightarrow (e^x - t)(e^x + t + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - t = 0 & (1) \\ e^x + t + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (2) vô nghiệm vì $e^x + t + 1 > 0$

Phương trình (1) tương đương với $e^x = t \Leftrightarrow e^x = \sqrt{m + e^x} \Leftrightarrow m = e^{2x} - e^x$ (3)

Phương trình $\sqrt{m + \sqrt{m + e^x}} = e^x$ (*) có nghiệm thực khi phương trình (3) có nghiệm thực.

Xét hàm số $f(x) = e^{2x} - e^x$ với $x \in \mathbb{R}$, ta có: $f'(x) = 2e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2$. Lập

bảng biến thiên của hàm số $f(x) = e^{2x} - e^x$ ta suy ra phương trình (3) có nghiệm khi

$$m \geq -\frac{1}{4}.$$

Kết hợp với giả thiết m là số nguyên nhỏ hơn 10 ta suy ra $m \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Vậy có 10 giá trị thỏa mãn.

Chọn ý C.

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = (a^2 + 1)\ln^{2017}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + bx \sin^{2018} x + 2$ với a, b là các số thực.

Biết rằng $f(7^{\log 5}) = 6$. Tính $f(-5^{\log 7})$.

A. $f(-5^{\log 7}) = 2$

B. $f(-5^{\log 7}) = 4$

C. $f(-5^{\log 7}) = -2$

D. $f(-5^{\log 7}) = 6$

Sở Giáo dục và đào tạo Bắc Giang năm học 2017 – 2018

Lời giải

Đặt $g(x) = (a^2 + 1)\ln^{2017}(x + \sqrt{1+x^2}) + bx \sin^{2018} x$ có tập xác định $\mathbb{R}$ là tập đối xứng.

Ta có với mọi $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = (a^2 + 1)\ln^{2017}(-x + \sqrt{1+x^2}) - bx \sin^{2018}(-x)$

$$= (a^2 + 1)\ln^{2017}\left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\right) - bx \sin^{2018}(x)$$

$$= -(a^2 + 1)\ln^{2017}(x + \sqrt{1+x^2}) - bx \sin^{2018}(x) = -g(x)$$

Suy ra $g(x)$ là hàm số lẻ, mặt khác $7^{\log 5} = 5^{\log 7}$ nên $g(-5^{\log 7}) = -g(5^{\log 7}) = -g(7^{\log 5})$

Theo giả thiết ta có $f(7^{\log 5}) = g(7^{\log 5}) + 2 \Rightarrow g(7^{\log 5}) = 4$.

Do đó $f(-5^{\log 7}) = g(-5^{\log 7}) + 2 = -g(7^{\log 5}) + 2 = -4 + 2 = -2$

Chọn ý C.

Câu 23: Cho bất phương trình $m \cdot 3^{x+1} + (3m+2)(4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0)$

A. $m > \frac{2+2\sqrt{3}}{3}$

B. $m > \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$

C. $m \geq \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$

D. $m \geq -\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$

Chuyên Đồng bằng sông Hồng lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$m \cdot 3^{x+1} + (3m+2)(4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0 \Leftrightarrow 3m + (3m+2) \cdot \left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x + \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x > 0$$

Đặt $t = \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$. Khi $x < 0$ thì $0 < t < 1$. BPT trở thành:

$$3m + \frac{3m+2}{t} + t > 0, \forall t \in (0;1) \Leftrightarrow 3m > \frac{-t^2-2}{t+1}, \forall t \in (0;1)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{-t^2-2}{t+1}, \forall t \in (0;1) \Rightarrow f'(t) = \frac{-t^2-2t+2}{t+1} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{3}-1$$

Vẽ bảng biến thiên ta thấy rằng để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi

$$x \in (-\infty; 0) \text{ thì } 3m > 2-2\sqrt{3} \Leftrightarrow m > \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$$

Chọn ý B.

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\ln(m + \ln(m + x)) = x$ có nhiều nghiệm nhất.

A. $m \geq 0$

B. $m > 1$

C. $m < e$

D. $m \geq -1$

THPT Chuyên Vĩnh Phúc lần 4 – năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện $x > e^{-m} - m$

Đặt $\ln(m + x) = y$ ta được $e^y - m = x$. Thay vào (1) ta được $\ln(m + y) = x \Leftrightarrow e^x - m = y$

Ta có hệ
$$\begin{cases} e^x - m = y \\ e^y - m = x \end{cases} \Rightarrow e^x - e^y = y - x \Rightarrow e^x + x = e^y + y$$

Do hàm số $f(t) = e^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên suy ra $x = y \Rightarrow x = \ln(x + m) \Leftrightarrow e^x - x = m$

Xét hàm số $g(x) = e^x - x$; $g'(x) = e^x - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vẽ bảng biến thiên cho hàm $g(x)$ ta suy ra phương trình có nhiều nhất là hai nghiệm khi và chỉ khi $m > 1$.

Chọn ý B.

Câu 25: Cho phương trình $e^{m \cos x - \sin x} - e^{2(1 - \sin x)} = 2 - \sin x - m \cos x$ với m là tham số thực. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm. Khi đó S có dạng $(-\infty; a] \cup [b; +\infty)$. Tính $T = 10a + 20b$.

A. $T = 10\sqrt{3}$

B. $T = 0$

C. $T = 1$

D. $T = 3\sqrt{10}$

THPT Kim Liên – Hà Nội lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Biến đổi phương trình đầu tương đương

$$\begin{aligned} e^{m \cos x - \sin x} - e^{2(1 - \sin x)} &= 2 - \sin x - m \cos x \\ \Leftrightarrow e^{m \cos x - \sin x} + m \cos x - \sin x &= e^{2(1 - \sin x)} + 2(1 - \sin x) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ ($t \in \mathbb{R}$), $f'(t) = e^t + 1 > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{m \cos x - \sin x} + m \cos x - \sin x &= e^{2(1 - \sin x)} + 2(1 - \sin x) \\ \Leftrightarrow m \cos x - \sin x &= 2(1 - \sin x) \Leftrightarrow m \cos x + \sin x = 2 \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm khi $m^2 + 1 \geq 4 \Leftrightarrow m^2 \geq 3 \Rightarrow S = (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$

Vậy $T = 10a + 20b = 10\sqrt{3}$

Chọn ý A.

Câu 26: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m$ Có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

A. 3

B. Vô số

C. 2

D. 4

THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện: $3x^2 + 3x + m + 1 > 0$.

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} \right) - 1 &= x^2 - 5x + 1 - m \Leftrightarrow \log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{4x^2 - 2x + 2} = x^2 - 5x + 1 - m \\ \Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) - \log_2 (4x^2 - 2x + 2) &= (4x^2 - 2x + 2) - (3x^2 + 3x + m + 1) \\ \Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) + (3x^2 + 3x + m + 1) &= \log_2 (4x^2 - 2x + 2) + (4x^2 - 2x + 2) \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(t) = t + \log_2 t$ trên $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow f(4x^2 - 2x + 2) = f(3x^2 + 3x + m + 1)$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 2 = 3x^2 + 3x + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x = m - 1 \quad (2)$$

Điều này đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét hàm số: $g(x) = x^2 - 5x$ trên $\mathbb{R}$, ta có $g'(x) = 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

Vẽ bảng biến thiên ta thấy rằng phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi

và chỉ khi $-\frac{25}{4} < m - 1 < -4 \Leftrightarrow -\frac{21}{4} < m < -3$. Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5; -4\}$.

Chọn ý C.

Câu 27: Cho phương trình $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_5(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_m(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương khác 1 của m sao cho phương trình đã cho có nghiệm x lớn hơn 2?

A. Vô số

B. 3

C. 2

D. 1

THPT Chuyên Đại học Vinh – Nghệ An lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện xác định: $x > \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow x \geq 1$

$$\text{Đặt } t = \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \Rightarrow t' = \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{\ln 2(x - \sqrt{x^2 - 1})\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} \ln 2} < 0$$

Mặt khác ta có $x > 2 \Rightarrow t < \log_2(2 - \sqrt{3})$

Phương trình trở thành

$$t \cdot \log_5 2^t = \log_m \frac{1}{2^t} \Leftrightarrow t \cdot \log_5 2 = -\log_m 2 \Leftrightarrow \log_5 m = -\frac{1}{t}$$

Để cho phương trình đã cho có nghiệm x lớn hơn 2 thì ta cần có

$$\log_5 m < -\frac{1}{\log_2(2-\sqrt{3})} \Leftrightarrow m < 5^{\frac{1}{\log_2(2-\sqrt{3})}}$$

Do $m \in \mathbb{N}^*$ và $m \neq 1$ nên $m = 2$

Chọn ý D.

Câu 28: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0; 2018)$ để ta

$$\text{luôn có } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} \leq \frac{1}{2187}?$$

A. 2011

B. 2016

C. 2019

D. 2009

THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp lần 5 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Từ giả thiết ta luôn có $\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}} > 0, \forall n$. Từ đó suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n + 9^a}} = \sqrt{\frac{1}{9^a}} = \frac{1}{3^a}.$$

Theo đề bài ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} \leq \frac{1}{2187} \Leftrightarrow \frac{1}{3^a} \leq \frac{1}{2187} \Leftrightarrow a \geq 7$.

Do a là số nguyên thuộc khoảng $(0; 2018)$ nên có $a \in \{7; 8; 9; \dots; 2017\}$ nên ta có tất cả 2011 giá trị của a .

Chọn ý A.

Câu 29: Cho phương trình $4^x - (m+1)2^{x+1} + 8 = 0$. Biết phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 6$. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là?

A. Không có m

B. $1 < m < 3$

C. $m > 3$

D. $m < 2$

THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Hà Nội lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$) thì phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2(m+1)t + 8 = 0$ (1).

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là phương trình (1) có hai nghiệm dương

$$\text{phân biệt } t_1, t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 7 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 - 2\sqrt{2} \\ m > -1 + 2\sqrt{2} \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1 + 2\sqrt{2}.$$

Khi đó $t_1 = m+1+\sqrt{m^2+2m-7} = 2^{x_1}$, $t_2 = m+1-\sqrt{m^2+2m-7} = 2^{x_2}$

Ta có $t_1 \cdot t_2 = 2^{x_1+x_2} = 8 \Rightarrow x_1+x_2 = 3$, $(x_1+1)(x_2+1) = 6 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 2$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(m+1+\sqrt{m^2+2m-7} \right) \cdot \log_2 \left(m+1-\sqrt{m^2+2m-7} \right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(m+1+\sqrt{m^2+2m-7} \right) \log_2 \frac{8}{m+1+\sqrt{m^2+2m-7}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(m+1+\sqrt{m^2+2m-7} \right) \left[3 - \log_2 \left(m+1+\sqrt{m^2+2m-7} \right) \right] = 2 \quad (2)$$

Đặt $u = \log_2 \left(m+1+\sqrt{m^2+2m-7} \right)$ thì (2) trở thành $3u - u^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = 2 \end{cases}$

- Nếu $u = 1 \Rightarrow m+1+\sqrt{m^2+2m-7} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2+2m-7} = 1-m$ thì phương trình vô nghiệm do $m > -1+2\sqrt{2}$
- Nếu $u = 2 \Rightarrow m+1+\sqrt{m^2+2m-7} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{m^2+2m-7} = 3-m \Leftrightarrow m = 2$ (nhận).

Vậy $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán

Chọn ý B.

Câu 30 : Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng ba nghiệm phân biệt .

$$2^{(x-1)^2} \cdot \log_2 (x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2 (2|x-m| + 2)$$

A. $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \right\}$

B. $S = \left\{ \frac{1}{2}; -1; \frac{3}{2} \right\}$

C. $S = \left\{ -\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \right\}$

D. $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1; -\frac{3}{2} \right\}$

THPT Chu Văn Anh – Hà Nội năm học 2017 – 2018

Lời giải

Xét hàm số $f(t) = 2^t \cdot \log_2 (t+2)$, $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 \cdot \log_2 (t+2) + 2^t \cdot \frac{1}{(t+2)\ln 2} > 0, \forall t \geq 0$.

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Biến đổi giả thiết tương đương

$$2^{(x-1)^2} \cdot \log_2 (x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2 (2|x-m| + 2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2 ((x-1)^2 + 2) = 2^{2|x-m|} \cdot \log_2 (2|x-m| + 2)$$

$$\Leftrightarrow f[(x-1)^2] = f[2|x-m|] \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \quad (1)$$

Khi $x \geq m$, (1) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 + 2m = 0$ (2)

Khi $x < m$, (1) $\Leftrightarrow x^2 = 2m - 1$ (3)

- **Trường hợp 1:** (2) có nghiệm kép x_0 , (3) có hai nghiệm phân biệt khác x_0 .

Khi đó $m = \frac{3}{2}$ thì (2) có nghiệm $x = 2 \geq \frac{3}{2}$, (3) có hai nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

- **Trường hợp 2:** (3) có nghiệm kép x_0 , (2) có hai nghiệm phân biệt khác x_0 .

Khi đó $m = \frac{1}{2}$ thì (3) có nghiệm $x = 0 < \frac{1}{2}$, (2) có hai nghiệm $x = 2 \pm \sqrt{2} \geq \frac{1}{2}$.

- **Trường hợp 3:** (2) và (3) có chung một nghiệm x_0

Khi đó $x_0 = m \Rightarrow m = 1$, thử lại $m = 1$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \right\}$.

Chọn ý B.

Câu 31 : Có bao nhiêu số nguyên dương m trong đoạn $[-2018; 2018]$ sao cho bất phương trình sau đúng với mọi $x \in (1; 100)$: $(10x)^{m + \frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10} \log x}$.

A. 2018

B. 4026

C. 2013

D. 4036

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\left(m + \frac{\log x}{10} \right) (\log x + 1) \geq \frac{11}{10} \log x \Leftrightarrow (\log x + 10m)(\log x + 1) - 11 \log x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 10m(\log x + 1) + \log^2 x - 10 \log x \geq 0.$$

Do $x \in (1; 100) \Rightarrow \log x \in (0; 2)$. Do đó ta có

$$10m(\log x + 1) + \log^2 x - 10 \log x \geq 0 \Leftrightarrow 10m \geq \frac{10 \log x - \log^2 x}{\log x + 1}$$

Đặt $t = \log x$, $t \in (0; 2)$, xét hàm số $f(t) = \frac{10t - t^2}{t + 1}$

Ta có: $f'(t) = \frac{10 - 2t - t^2}{(t + 1)^2} > 0 \forall t \in (0; 2)$. Do đó $f(0) < f(t) < f(2) \Leftrightarrow 0 < f(t) < \frac{16}{3}$

Để $10m \geq \frac{10 \log x - \log^2 x}{\log x + 1}$ đúng với mọi $x \in (1; 100)$ thì $10m \geq \frac{16}{3} \Rightarrow m \geq \frac{8}{15}$

Do đó $m \in \left[\frac{8}{15}; 2018 \right]$ hay có 2018 số thỏa mãn.

Chọn ý A.

Câu 32 : Gọi S là tập các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = x^2 + \ln(x + m + 2)$ đồng biến trên tập xác định của nó. Biết $S = (-\infty; a + \sqrt{b}]$. Tính tổng $K = a + b$ là

A. $K = -5$

B. $K = 5$

C. $K = 0$

D. $K = 2$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x > -m - 2$.

Cách 1. Ta có $y' = 2x + \frac{1}{x + m + 2} = \frac{2x^2 + 2(m + 2)x + 1}{x + m + 2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2(m + 2)x + 1 = 0$

- Trường hợp 1. $\Delta' = m^2 + 4m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{2} \leq m \leq -2 + \sqrt{2}$

Khi đó $y' \geq 0 \forall x \in (-m-2; +\infty)$.

- Trường hợp 2. $\begin{cases} m < -2 - \sqrt{2} \\ m > -2 + \sqrt{2} \end{cases}$, khi đó $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$x_1 = \frac{-(m+2) - \sqrt{m^2 + 4m + 2}}{2}, x_2 = \frac{-(m+2) + \sqrt{m^2 + 4m + 2}}{2}$$

Vẽ bảng biến thiên ta suy ra được:

$$y' \geq 0 \forall x \in (-m-2; +\infty) \Leftrightarrow x_2 \leq -m-2 \Leftrightarrow \frac{-(m+2) + \sqrt{m^2 + 4m + 2}}{2} \leq -m-2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 4m + 2} \leq -m-2 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m + 2 \leq m^2 + 4m + 4 \\ m \leq -2 \\ m^2 + 4m + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \leq -2 - \sqrt{2} \\ m \geq -2 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -2 - \sqrt{2}.$$

Vậy $S = (-\infty; -2 + \sqrt{2}] \Rightarrow a = -2, b = 2$ nên $K = a + b = 0$.

Cách 2. Ta có $y' = 2x + \frac{1}{x+m+2} = \frac{2x^2 + 2(m+2)x + 1}{x+m+2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2(m+2)x + 1 = 0$

- Trường hợp 1. $\Delta' = m^2 + 4m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{2} \leq m \leq -2 + \sqrt{2}$, khi đó $y' \geq 0 \forall x \in (-m-2; +\infty)$.
- Trường hợp 2. $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 - \sqrt{2} \\ m > -2 + \sqrt{2} \end{cases}$, (*). Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m+2) \\ x_1 x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$ khi đó ta

cần có $x_1 < x_2 \leq -(m+2)$. Suy ra: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2(m+2) < 0 \\ (x_1 + m + 2)(x_2 + m + 2) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m < -2 - \sqrt{2}$

Kết hợp (*) và (**) có $m < -2 - \sqrt{2}$. Hợp hai trường hợp có các giá trị cần tìm của m là 100 . Vậy $S = (-\infty; -2 + \sqrt{2}] \Rightarrow a = -2, 100$ nên $K = a + b = 0$.

Chọn ý C.

Câu 33 : Cho hai số thực a, b ($a > 1, b > 1$). Phương trình $a^x + b^x = b + ax$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = a^x + b^x - b - ax$. Ta có $f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b - a$.

Do $f''(x) = a^x \ln^2 a + b^x \ln^2 b > 0$ nên hàm số đã cho có tối đa một cực trị. Do đó phương trình đã cho có tối đa hai nghiệm. Ta sẽ chọn các số để phương trình trên có 2 nghiệm như sau. Chọn $a = b = e$ ta có $f'(x) = 2e^x - e, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln \frac{e}{2}$.

$$f\left(\ln \frac{e}{2}\right) = -e \ln \frac{e}{2} < 0; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Vì vậy phương trình đã cho có tối đa 2 nghiệm.

Chọn ý C.

Câu 34: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$27^x - m \cdot 3^{2x+1} + (m^2 - 1)3^{x+1} - (m^2 - 1) = 0$$

Có 3 nghiệm thực phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tính giá trị của biểu thức $S = a + b$

A. 2

B. $1 + \sqrt{3}$

C. $2 + \sqrt{2}$

D. $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Lời giải

Đặt $t = 3^x (t > 0)$ phương trình trở thành $t^3 - 3mt^2 + 3(m^2 - 1)t - m^2 + 1 = 0$. Ta cần tìm điều kiện để phương trình có 3 nghiệm phân biệt dương.

Xét hàm số $y = t^3 - 3mt^2 + (m^2 - 1)t - m^2 + 1 \Rightarrow y' = 3t^2 - 6mt + 3(m^2 - 1)$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = m - 1 = x_{CD} \\ t = m + 1 = x_{CT} \end{cases}$. Để phương trình có 3 nghiệm dương phân biệt khi

$$\begin{cases} y_{CD} \cdot y_{CT} < 0 \\ x_{CD} > 0, x_{CT} > 0 \\ y(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ m + 1 > 0 \\ (m^2 - 1)(m^2 - 3)(m^2 - 2m - 1) < 0 \\ -(m^2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2} \right.$$

Chọn ý D.

Câu 35: Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình $|2^{|x|+1} - 8| = \frac{3}{2}x^2 + m$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?

A. 2013

B. 2012

C. 4024

D. 2014

Lời giải

Phương trình tương đương với $m = |2^{|x|+1} - 8| - \frac{3}{2}x^2$. Hàm số $f(x) = |2^{|x|+1} - 8| - \frac{3}{2}x^2$ là một hàm số chẵn do đó ta chỉ cần xét trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ để suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên cả tập số thực.

Xét hàm số

$$f(x) = \left| 2^{|x|+1} - 8 \right| - \frac{3}{2}x^2 = \begin{cases} 2^{x+1} - 8 - \frac{3x^2}{2} & (x \geq 2) \\ -2^{x+1} + 8 - \frac{3x^2}{2} & (0 \leq x < 2) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} g(x) = 2^{x+1} \ln 2 - 3x & (x > 2) \\ -2^{x+1} \ln 2 - 3x & (0 < x < 2) \end{cases}$$

Ta có $g'(x) = 2^{x+1} \ln^2 x - 3 > 8 \ln^2 2 - 3 > 0, \forall x > 2, g(2) = 8 \ln 2 - 6 < 0, g(3) = 16 \ln 2 - 9 > 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (2; 3)$.

Vẽ bảng biến thiên cho hàm số $f(x)$ ta suy ra được phương trình có đúng 2 nghiệm thực

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} m > 6 \\ m = f(x_0) = 2^{x_0+1} - 8 - \frac{3x_0^2}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{7, 8, \dots, 2018\}$$

Chọn ý B.

Câu 36: Cho bất phương trình $\log_{3a} 11 + \left(\log_{\frac{1}{7}} \left(\sqrt{x^2 + 3ax + 10} + 4 \right) \right) \log_{3a} (x^2 + 3ax + 12) \geq 0$.

Giá trị thực của tham số a để bất phương trình trên có nghiệm duy nhất thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-1; 0)$ B. $(1; 2)$ C. $(0; 1)$ D. $(2; +\infty)$

THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Điều kiện xác định $0 < a \neq \frac{1}{3}$.

Biến đổi bất phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \log_{3a} 11 + \left(\log_{\frac{1}{7}} \left(\sqrt{x^2 + 3ax + 10} + 4 \right) \right) \log_{3a} (x^2 + 3ax + 12) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \log_{3a} 11 - \log_7 \left(\sqrt{x^2 + 3ax + 10} + 4 \right) \cdot \log_{3a} (x^2 + 3ax + 12) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \log_7 \left(\sqrt{x^2 + 3ax + 10} + 4 \right) \cdot \log_{3a} (x^2 + 3ax + 12) \leq \log_{3a} 11 \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3ax + 10} \geq 0 \Rightarrow x^2 + 3ax + 12 = x^2 + 3ax + 10 + 2 = t^2 + 2$. Khi đó bất phương trình trở thành $\log_7 (t+4) \log_{3a} (t^2 + 2) \leq \frac{1}{\log_{11} 3a} (*)$.

- Nếu $0 < a < \frac{1}{3} \Rightarrow \log_{11} 3a < 0$ bất phương trình $(*)$ trở thành

$$\log_7 (t+4) \log_{11} 3a \log_{3a} (t^2 + 2) \geq 1 \Leftrightarrow \log_7 (t+4) \log_{11} (t^2 + 2) \geq 1$$

Xét hàm số $f(t) = \log_7(t+4)\log_{11}(t^2+2)$ ($t \geq 0$) là hàm đồng biến đồng thời $f(3) = 1$ nên $f(t) \geq f(3) \Leftrightarrow t \geq 3 \Leftrightarrow x^2 + 3ax + 1 \geq 0$. Để phương trình có nghiệm duy nhất thì ta có $a = \frac{2}{3}$, nghiệm này không thỏa mãn.

- Nếu $a > \frac{1}{3} \Rightarrow \log_{11} 3a > 0$. Đến đây xét tương tự trường hợp 1 ta sẽ tìm được $a = \frac{2}{3}$

Chọn ý C.

7. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI DÃY SỐ.

CÁC BÀI TOÁN

Câu 1 : Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2 \log u_{10}} = 2 \log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất để $u_n > 5^{100}$ bằng

- A. 247 B. 248 C. 229 D. 290

Đề tham khảo kỳ thi THPT Quốc Gia 2018 – Bộ Giáo dục và Đào tạo

Câu 2 : Cho biểu thức $A = \log \left(2017 + \log \left(2016 + \log \left(2015 + \log \left(\dots + \log (3 + \log 2) \dots \right) \right) \right) \right)$

Biểu thức A có giá trị thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $(\log 2017; \log 2018)$ B. $(\log 2019; \log 2020)$
C. $(\log 2018; \log 2019)$ D. $(\log 2020; \log 2021)$

Sở Giáo dục và Đào tạo Ninh Bình năm học 2017 – 2018

Câu 3 : Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln^2 u_6 - \ln u_8 = \ln u_4 - 1$ và $u_{n+1} = u_n \cdot e^{\forall n \geq 1}$. Tìm u_1

- A. e B. e^2 C. e^{-3} D. e^{-4}

THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa năm học 2017 – 2018

Câu 4: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $e^{u_{18}} + 5\sqrt{e^{u_{18}} - e^{4u_1}} = e^{4u_1}$ và $u_{n+1} = u_n + 3$ với mọi $n \geq 1$.

Giá trị lớn nhất của n để $\log_3 u_n < \ln 2018$ bằng?

- A. 1419 B. 1418 C. 1420 D. 1417

THPT Kim Liên – Hà Nội lần 2 năm học 2017 – 2018

Câu 5: Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = 1$ và $5^{a_{n+1}-a_n} - 1 = \frac{3}{3n+2}$, với mọi $n \geq 1$. Tìm số nguyên dương $n > 1$ nhỏ nhất để a_n là một số nguyên.

- A. $n = 123$ B. $n = 41$ C. $n = 39$ D. $n = 49$

Câu 6: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} 4e^{2u_9} + 2e^{u_9} - 4e^{u_1+u_9} = e^{u_1} - e^{2u_1} + 3 \\ u_{n+1} = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Giá trị nhỏ nhất của số n để $u_n > 1$?

A. 725

B. 682

C. 681

D. 754

Câu 7: Cho dãy số (u_n) có số hạng đầu tiên $u_1 \neq 1$ thỏa mãn đẳng thức sau :

$\log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) = \log_2^2 5 + \log_2^2 7$ và $u_{n+1} = 7u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 1111111$ bằng

A. 11

B. 8

C. 9

D. 10

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $[0; 2018]$ sao cho ba số $5^{x+1} + 5^{1-x}; \frac{a}{2}; 25^x + 25^{-x}$ theo thứ tự đó, lập thành một cấp số cộng?

A. 2008

B. 2006

C. 2018

D. 2007

Câu 9: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với

mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n > 5^{100}$ bằng

A. 230

B. 231

C. 233

D. 234

Câu 10: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Tìm số nguyên dương lớn nhất n thỏa mãn $\frac{u_n \cdot S_{2n}}{u_{2n} \cdot S_n} < \frac{148}{75}$.

A. 18

B. 17

C. 16

D. 19

Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Ninh lần 2 năm học 2017 – 2018

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\frac{m}{n}}$ ($m, n \in \mathbb{N}$) với $\frac{m}{n}$

là phân số tối giản. Tính $P = m - n^2$.

A. -2018

B. 2018

C. 1

D. -1

Sở Giáo dục và Đào tạo Phú Thọ lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 12: Cho cấp số cộng (u_n) có tất cả các số hạng đều dương thỏa mãn đẳng thức $u_1 + u_2 + \dots + u_{2018} = 4(u_1 + u_2 + \dots + u_{1009})$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \log_3^2 u_2 + \log_3^2 u_5 + \log_3^2 u_{14}$$

A. -2

B. -3

C. 2

D. 3

Câu 13: Cho cấp số cộng (a_n) , cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2 > a_1 \geq 0$ và $b_2 > b_1 \geq 1$; và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Số nguyên dương n nhỏ nhất và lớn hơn 1 sao cho $b_n > 2018a_n$ là

A. 16

B. 15

C. 17

D. 18

THPT Lê Xoay – Vĩnh Phúc lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 14: Cho cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(\log_2(b_2)) + 2 = f(\log_2(b_1))$. Giá trị nhỏ nhất của n để $b_n > 5^{100}$ bằng

- A. 234 B. 229 C. 333 D. 292

THPT Phan Châu Trinh – Đắk Lắk lần 2 năm học 2017 – 2018

Câu 15: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}\left(u_1^2 + u_3 + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{8}\right) = e^{4u_2-7} + e^{6u_1-6} - 3 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}\left(u_n - \frac{n+4}{n^2+3n+2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Giá trị lớn nhất của số n để $u_n > \frac{3+(n+1)2^{2018}}{n+1}$

- A. 3472 B. 3245 C. 3665 D. 3453

Câu 16: Cho $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $u_n = \frac{f(1).f(3)...f(2n-1)}{f(2).f(4)...f(2n)}$.

Tìm số n nguyên dương nhỏ nhất sao cho u_n thỏa mãn điều kiện $\log_2 u_n + u_n < \frac{-10239}{1024}$.

- A. $n = 23$ B. $n = 29$ C. $n = 21$ D. $n = 33$

THPT Chuyên Biên Hòa – Hà Nam lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 17: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + n + 1), \forall n \geq 1$. Tìm số nguyên n lớn nhất sao cho $u_n - [u_n] < \frac{2}{3}$. Biết $[a]$ kí hiệu phần nguyên của số a là số tự nhiên nhỏ nhất không vượt quá a .

- A. 37 B. 36 C. 38 D. 40

THPT Chuyên Biên Hòa – Hà Nam lần 1 năm học 2017 – 2018

Câu 18: Cho dãy số (u_n) có tất cả số hạng đều dương thỏa mãn $u_{n+1} = 2u_n$ và đồng thời

$$\sqrt{u_1^2} + \sqrt{u_2^2} + \dots + \sqrt{u_n^2} + \sqrt{u_{n+1}^2} + u_{n+2} + 1 = \frac{4}{3}, \forall n \geq 1$$
. Số tự nhiên n nhỏ nhất để $u_n > 5^{100}$ là?

- A. 232 B. 233 C. 234 D. 235

Câu 19: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln(u_1^2 + u_2^2 + 10) = \ln(2u_1 + 6u_2)$ và đồng thời $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1} + 1, \forall n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5050$

- A. 100 B. 99 C. 101 D. 102

Câu 20: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} \log\left(u_2 + \frac{391}{40}\right) + \sqrt{\log\left(\frac{1}{4}u_1 + \frac{39}{4}\right)} = 2 \\ u_n = \frac{2(n+1)u_{n+1}}{n} + \frac{2-n}{(n^2+n+1)^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > \frac{5^{100} + n^2 + 1}{5^{100}(n^3 + n)}$.

A. 235

B. 255

C. 233

D. 241

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1 : Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2 \log u_{10}} = 2 \log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất để $u_n > 5^{100}$ bằng

A. 247

B. 248

C. 229

D. 290

Đề tham khảo kỳ thi THPT Quốc Gia 2018 – Bộ Giáo dục và Đào tạo

Lời giải

Vì $u_{n+1} = 2u_n$ nên dễ thấy dãy số (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 2$.

Ta có $u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 2^9 \cdot u_1$. Xét $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2 \log u_{10}} = 2 \log u_{10}$

$$\Leftrightarrow \log u_1 - 2 \log(2^9 \cdot u_1) + \sqrt{2 + \log u_1 - 2 \log(2^9 \cdot u_1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \log u_1 - 18 \log 2 - 2 \log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 18 \log 2 - 2 \log u_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\log u_1 - 18 \log 2 + \sqrt{2 - \log u_1 - 18 \log 2} = 0$$

Đặt $\sqrt{2 - \log u_1 - 18 \log 2} = t (t \geq 0)$. Phương trình trên trở thành

$$t^2 - 2 + t = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2(L) \end{cases}$$

Với $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2 - \log u_1 - 18 \log 2} = 1 \Leftrightarrow 2 - \log u_1 - 18 \log 2 = 1 \Leftrightarrow u_1 = \frac{5}{2^{17}}$

Trong trường hợp này ta có: $u_n = \frac{5}{2^{17}} \cdot 2^{n-1} > 5^{100} \Leftrightarrow 2^{n-18} > 5^{99} \Leftrightarrow n > 99 \log_2 5 + 18$

Mà $n \in \mathbb{N}^*$ nên giá trị nhỏ nhất trong trường hợp này là $n = 248$.

Chọn ý B.

Câu 2 : Cho biểu thức $A = \log\left(2017 + \log\left(2016 + \log\left(2015 + \log\left(\dots + \log(3 + \log 2)\dots\right)\right)\right)\right)$

Biểu thức A có giá trị thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(\log 2017; \log 2018)$

B. $(\log 2019; \log 2020)$

C. $(\log 2018; \log 2019)$

D. $(\log 2020; \log 2021)$

Sở Giáo dục và Đào tạo Ninh Bình năm học 2017 - 2018

Lời giải

Đặt $A_n = \log\left(2017 + \log\left(2016 + \log\left(2015 + \log\left(\dots + \log(3 + \log 2) \dots\right)\right)\right)\right) \Rightarrow A_n = (n + A_{n-1})$

Ta có

$$0 < \log 2 < 1 \Leftrightarrow 0 < A_2 < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \log 3 < A_3 = \log(3 + A_2) < \log 4 < 1$$

...

$$\Rightarrow 0 < \log 9 < A_9 = \log(9 + A_8) < \log 10 = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \log 10 < A_{10} = \log(10 + A_9) < \log 11 < 2$$

$$\Rightarrow 1 < \log 12 < A_{11} = \log(11 + A_{10}) < \log 13 < 2$$

...

$$\Rightarrow 2 < \log 999 < A_{997} = \log(997 + A_{996}) < \log 1000 = 3$$

$$\Rightarrow 3 = \log 1000 < A_{998} = \log(998 + A_{997}) < \log 1001 < 4$$

$$\Rightarrow 3 < \log 1002 < A_{999} = \log(999 + A_{998}) < \log 1003 < 4$$

...

$$\Rightarrow 3 < \log 2020 < A_{2017} = \log(2017 + A_{2016}) < \log 2021 < 4$$

Vậy $A_{2017} \in (\log 2020; \log 2021)$

Chọn ý D.

Câu 3 : Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln^2 u_6 - \ln u_8 = \ln u_4 - 1$ và $u_{n+1} = u_n \cdot e \forall n \geq 1$. Tìm u_1

A. e

B. e^2

C. e^{-3}

D. e^{-4}

THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa năm học 2017 – 2018

Lời giải

Từ giả thiết suy ra dãy số (u_n) là cấp số nhân với công bội e và $u_n > 0 \forall n \geq 1$.

Ta có $u_6 = u_1 \cdot e^5; u_8 = u_1 \cdot e^7; u_4 = u_1 \cdot e^3$. Do đó ta có:

$$\ln^2 u_6 - \ln u_8 = \ln u_4 - 1 \Leftrightarrow \ln^2(u_1 \cdot e^5) - \ln(u_1 \cdot e^7) = \ln(u_1 \cdot e^3) - 1$$

$$\Leftrightarrow (\ln u_1 + 5)^2 - (\ln u_1 + 7) = (\ln u_1 + 3) - 1 \Leftrightarrow (\ln u_1)^2 + 8(\ln u_1) + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln u_1 = -4 \Leftrightarrow u_1 = e^{-4}$$

Chọn ý D.

Câu 4: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $e^{u_{18}} + 5\sqrt{e^{u_{18}} - e^{4u_1}} = e^{4u_1}$ và $u_{n+1} = u_n + 3$ với mọi $n \geq 1$.

Giá trị lớn nhất của n để $\log_3 u_n < \ln 2018$ bằng?

A. 1419

B. 1418

C. 1420

D. 1417

THPT Kim Liên – Hà Nội lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Ta có $u_{n+1} = u_n + 3$ với mọi $n \geq 1$ nên (u_n) là cấp số cộng có công sai d = 3

$$e^{u_{18}} + 5\sqrt{e^{u_{18}} - e^{4u_1}} = e^{4u_1} \Leftrightarrow 5\sqrt{e^{u_{18}} - e^{4u_1}} = e^{4u_1} - e^{u_{18}} \quad (1)$$

Đặt $t = e^{u_{18}} - e^{4u_1}$ ($t \geq 0$) Phương trình (1) trở thành

$$5\sqrt{t} = -t \Leftrightarrow t + 5\sqrt{t} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{t}(\sqrt{t} + 5) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{t} = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Với $t = 0$ ta có $e^{u_{18}} = e^{4u_1} \Leftrightarrow u_{18} = 4u_1 \Leftrightarrow u_1 + 51 = 4u_1 \Leftrightarrow u_1 = 17$

Vậy $u_n = u_1 + (n-1)d = 17 + (n-1)3 = 3n + 14$

Khi đó ta được $\log_3 u_n < \ln 2018 \Leftrightarrow u_n < 3^{\ln 2018} \Leftrightarrow 3n + 14 < 3^{\ln 2018} \Leftrightarrow n < \frac{3^{\ln 2018} - 14}{3} \approx 1419,98$

Vậy giá trị lớn nhất của n là 1419.

Chọn ý A.

Câu 5: Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = 1$ và $5^{a_{n+1}-a_n} - 1 = \frac{3}{3n+2}$, với mọi $n \geq 1$. Tìm số nguyên dương $n > 1$ nhỏ nhất để a_n là một số nguyên.

A. $n = 123$

B. $n = 41$

C. $n = 39$

D. $n = 49$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $5^{a_{n+1}-a_n} - 1 = \frac{3}{3n+2} \Leftrightarrow 5^{a_{n+1}-a_n} = \frac{3n+5}{3n+2} \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + \log_5 \frac{3n+5}{3n+2}$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \log_5 \frac{3n+2}{3n-1} = a_{n-2} + \log_5 \frac{3n-1}{3n-4} + \log_5 \frac{3n+2}{3n-1} \\ &\quad \dots \\ &= a_1 + \log_5 \frac{8}{5} + \log_5 \frac{11}{8} + \dots + \log_5 \frac{3n-1}{3n-4} + \log_5 \frac{3n+2}{3n-1} \\ &= 1 + \log_5 \left(\frac{8}{5} \cdot \frac{11}{8} \cdot \dots \cdot \frac{3n-1}{3n-4} \cdot \frac{3n+2}{3n-1} \right) = 1 + \log_5 \frac{3n+2}{5} = \log_5 (3n+2) \end{aligned}$$

Do đó $a_n = \log_5 (3n+2)$. Vì $n > 1$ nên $a_n = \log_5 (3n+2) > \log_5 5 = 1$, đồng thời dễ thấy

(a_n) là dãy tăng. Lại có $a_n = \log_5 (3n+2) \Leftrightarrow n = \frac{5^{a_n} - 2}{3}$.

Lần lượt thử các giá trị $a_n = 2; 3; 4; \dots$ ta có $a_n = 3$ là giá trị nguyên, lớn hơn 1, nhỏ nhất, cho giá trị tương ứng $n = 41$.

Vậy $n = 41$.

Chọn ý B.

Câu 6: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} 4e^{2u_9} + 2e^{u_9} - 4e^{u_1+u_9} = e^{u_1} - e^{2u_1} + 3 \\ u_{n+1} = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Giá trị nhỏ nhất của số n để $u_n > 1$?

A. 725

B. 682

C. 681

D. 754

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra (u_n) là CSC có công sai $d = 3 \Rightarrow u_9 = u_1 + 24$.

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\begin{aligned} 4e^{2u_9} + 2e^{u_9} - 4e^{u_1+u_9} &= e^{u_1} - e^{2u_1} + 3 \\ \Leftrightarrow 4e^{2u_1+48} + 2e^{u_1+24} - 4e^{2u_1+24} &= e^{u_1} - e^{2u_1} - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow ((2e^{24} - 1)e^{2u_1})^2 + ((2e^{24} - 1)e^{2u_1}) - 3 &= 0 \\ \Rightarrow (2e^{24} - 1)e^{2u_1} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow u_1 &= \ln \left[\frac{-1 + \sqrt{13}}{2(2e^{24} - 1)} \right] \end{aligned}$$

Ta có $u_n = u_1 + 3(n-1) > 2018 \Rightarrow n > 681 \Rightarrow n \geq 682$

Chọn ý B.

Câu 7: Cho dãy số (u_n) có số hạng đầu tiên $u_1 \neq 1$ thỏa mãn đẳng thức sau : $\log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) = \log_2^2 5 + \log_2^2 7$ và $u_{n+1} = 7u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 1111111$ bằng

A. 11

B. 8

C. 9

D. 10

Lời giải

Vì $u_{n+1} = 7u_n$ nên dễ thấy dãy số (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 7$.

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\begin{aligned} \log_2^2(5u_1) + \log_2^2(7u_1) &= \log_2^2 5 + \log_2^2 7 \\ \Leftrightarrow (\log_2 5 + \log_2 u_1)^2 + (\log_2 7 + \log_2 u_1)^2 &= \log_2^2 5 + \log_2^2 7 \\ \Leftrightarrow 2\log_2 5 \cdot \log_2 u_1 + 2\log_2^2 u_1 + 2\log_2 7 \cdot \log_2 u_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 u_1 = 0 \\ 2\log_2 5 + 2\log_2 u_1 + 2\log_2 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \text{ (L)} \\ \log_2 35u_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{35} \end{aligned}$$

Ta có $u_n = u_1 \cdot 7^{n-1} \cdot u_n > 1111111 \Leftrightarrow \frac{1}{35} \cdot 7^{n-1} > 1111111 \Leftrightarrow 7^{n-1} > 35 \cdot 1111111$

$\Leftrightarrow n > \log_7(35 \cdot 1111111) + 1$. Mà $n \in \mathbb{N}^*$ nên giá trị nhỏ nhất trong trường hợp này là $n = 10$.

Chọn ý D.

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $[0; 2018]$ sao cho ba số $5^{x+1} + 5^{1-x}; \frac{a}{2}; 25^x + 25^{-x}$ theo thứ tự đó, lập thành một cấp số cộng?

A. 2008

B. 2006

C. 2018

D. 2007

Lời giải

Ba số $5^{x+1} + 5^{1-x}; \frac{a}{2}; 25^x + 25^{-x}$, theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$a = (5^{x+1} + 5^{1-x}) + (25^x + 25^{-x}) \geq 2\sqrt{5^{x+1} \cdot 5^{1-x}} + 2\sqrt{25^x \cdot 25^{-x}} = 12.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 5^{x+1} = 5^{1-x} \\ 25^x = 25^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$

Như vậy nếu xét $a \in [0; 2018]$ thì ta nhận $a \in [12; 2018]$. Có 2007 số a thỏa đề.

Chọn ý D.

Câu 9: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với

mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n > 5^{100}$ bằng

A. 230

B. 231

C. 233

D. 234

Lời giải

Theo giả thiết ta có $u_{n+1} = 2u_n$ nên (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 2$. Suy ra $u_n = u_1 \cdot 2^{n-1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Ta lại có:

$$2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - 4u_1 + 4\right)} \Leftrightarrow 2 \cdot 4^{u_1} + \frac{8}{4^{u_1}} = \frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - u_3 + 4\right)} \quad (1)$$

$$\text{Mà } 2 \cdot 4^{u_1} + \frac{8}{4^{u_1}} \geq 8 \text{ và } \frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - u_3 + 4\right)} = \frac{8}{\log_3\left[\left(\frac{1}{2}u_3 - 1\right)^2 + 3\right]} \leq 8$$

$$\text{Nên phương trình (1) tương đương } \begin{cases} 2 \cdot 4^{u_1} + \frac{8}{4^{u_1}} = 8 \\ \frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2 - u_3 + 4\right)} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Khi đó } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1-2^n}{1-2} = \frac{2^n - 1}{2}$$

$$\text{Do đó, } S_n > 5^{100} \Leftrightarrow \frac{2^n - 1}{2} > 5^{100} \Leftrightarrow \log_5 \frac{2^n - 1}{2} > 100 \Leftrightarrow n > 233$$

Chọn ý D.

Câu 10: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Tìm số nguyên dương lớn nhất n thỏa mãn $\frac{u_n \cdot S_{2n}}{u_{2n} \cdot S_n} < \frac{148}{75}$.

A. 18

B. 17

C. 16

D. 19

Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Ninh lần 2 năm học 2017 - 2018

Lời giải

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8) \Leftrightarrow \log_3(2u_5 - 63) = \log_2(u_n - 8n + 8)$.

$$\text{Đặt } t = \log_3(2u_5 - 63) \Rightarrow \begin{cases} 2u_5 - 63 = 3^t \\ u_n - 8n + 8 = 2^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_5 - 63 = 3^t \\ u_5 - 32 = 2^t \end{cases} \Rightarrow 1 = 3^t - 2 \cdot 2^t \Rightarrow t = 2$$

$$\Rightarrow u_n = 8n - 4 \Rightarrow S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 4n^2$$

$$\text{Do đó } \frac{u_n \cdot S_{2n}}{u_{2n} \cdot S_n} = \frac{(8n-4) \cdot 16n^2}{(16n-4) \cdot 4n^2} < \frac{148}{75} \Rightarrow n < 19.$$

Chọn ý A.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\frac{m}{n}}$ ($m, n \in \mathbb{N}$) với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $P = m - n^2$.

A. -2018

B. 2018

C. 1

D. -1

Sở Giáo dục và Đào tạo Phú Thọ lần 1 năm học 2017 - 2018

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$f(x) = e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}} = e^{\sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)^2 + \frac{2}{x(x+1)} + 1}} = e^{\sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + 1}} = e^{\sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + 1\right)^2}} = e^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + 1} = e \cdot e^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}.$$

Do đó ta được:

$$f(1) = e \cdot e^{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}}; f(2) = e \cdot e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}; f(3) = e \cdot e^{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}; \dots; f(2016) = e \cdot e^{\frac{1}{2016} - \frac{1}{2017}}; f(2017) = e \cdot e^{\frac{1}{2017} - \frac{1}{2018}}.$$

$$\Rightarrow f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{2017} \cdot e^{\frac{1}{2018}} = e^{\frac{2017}{2018} + 2017} = e^{\frac{2018^2 - 1}{2018}}$$

$$\Rightarrow m = 2018^2 - 1, n = 2018. \text{ Vậy } P = -1.$$

Chọn ý D.

Câu 12: Cho cấp số cộng (u_n) có tất cả các số hạng đều dương thỏa mãn đẳng thức $u_1 + u_2 + \dots + u_{2018} = 4(u_1 + u_2 + \dots + u_{1009})$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \log_3^2 u_2 + \log_3^2 u_5 + \log_3^2 u_{14}$$

A. -2

B. -3

C. 2

D. 3

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{2018} = 4(u_1 + u_2 + \dots + u_{1009}) \Leftrightarrow \frac{2018(2u_1 + 2017d)}{2} = 2 \cdot 1009(2u_1 + 1008d)$$

$$\Leftrightarrow u_1 = \frac{d}{2} \Rightarrow (u_n): \frac{d}{2}; \frac{3d}{2}; \frac{5d}{2}; \dots \Rightarrow \begin{cases} u_2 = \frac{3d}{2} \\ u_5 = \frac{9d}{2} \\ u_{14} = \frac{27d}{2} \end{cases} \Rightarrow P = \log_3^2 \frac{3d}{2} + \log_3^2 \frac{9d}{2} + \log_3^2 \frac{27d}{2} \geq 2$$

Chọn ý C.

Câu 13: Cho cấp số cộng (a_n) , cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2 > a_1 \geq 0$ và $b_2 > b_1 \geq 1$; và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Số nguyên dương n nhỏ nhất và lớn hơn 1 sao cho $b_n > 2018a_n$ là

A. 16

B. 15

C. 17

D. 18

THPT Lê Xoay – Vĩnh Phúc lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$		2	$\searrow$		$+\infty$
				-2			

Theo giả thiết $\begin{cases} f(a_2) + 2 = f(a_1) \\ a_2 > a_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a_2) < f(a_1) \\ a_2 > a_1 \geq 0 \end{cases}$

Từ đó suy ra $\begin{cases} 0 \leq a_1 < a_2 \leq 1 \\ 0 \leq a_1 \leq 1 < a_2 \end{cases}$, hơn nữa $f(x) + 2 \geq 0 \forall x \geq 0$. Ta xét các trường hợp:

- Nếu $0 \leq a_1 < a_2 \leq 1$ thì $\begin{cases} f(a_2) + 2 \geq 0 \\ f(a_1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a_2) = -2 \\ f(a_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases}$.
- Nếu $0 \leq a_1 \leq 1 < a_2$ thì $\begin{cases} f(a_2) + 2 > 0 \\ f(a_1) \leq 0 \end{cases}$ điều này là không thể.

Do đó chỉ xảy ra trường hợp $a_1 = 0; a_2 = 1$.

Từ đó suy ra $a_n = n - 1 (n \geq 1)$. Tương tự vì $b_2 > b_1 \geq 1$ nên $\log_2 b_2 > \log_2 b_1 \geq 0$, suy ra

$$\begin{cases} \log_2 b_2 = 1 \\ \log_2 a_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = 1 \\ b_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow b_n = 2^{n-1} (n \geq 1).$$

Xét hàm số $g(x) = 2^x - 2018x$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\log_2 \frac{2018}{\ln 2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	1	$g\left(\log_2 \frac{2018}{\ln 2}\right)$	$+\infty$

Ta có
$$\begin{cases} g\left(\log_2 \frac{2018}{\ln 2}\right) < 0 \\ \log_2 \frac{2018}{\ln 2} > 11 \\ g(12) = -20120 \\ g(13) = -18042 \\ g(14) = -11868 \\ g(15) = 2498 > 0 \end{cases}$$
 nên số nguyên dương nhỏ nhất n thỏa $g(n-1) > 0$

là $n-1 = 15 \Leftrightarrow n = 16$.

Chọn ý A.

Câu 14: Cho cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(\log_2(b_2)) + 2 = f(\log_2(b_1))$. Giá trị nhỏ nhất của n để $b_n > 5^{100}$ bằng

A. 234

B. 229

C. 333

D. 292

THPT Phan Châu Trinh – Đắk Lắk lần 2 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x$.

Có $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Mặt khác, ta có $b_1 > b_2 \geq 1$. Đặt $a = \log_2 b_2 > \log_2 b_1 = b \geq 0$. Ta có: $a^3 - 3a + 2 = b^3 - 3b$ (1).

- Nếu $b > 1 \Rightarrow a > b > 1 \Rightarrow a^3 - 3a > b^3 - 3b \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.
- Nếu $0 \leq b \leq 1 \Rightarrow -2 < b^3 - 3b \leq 0 \Rightarrow a^3 - 3a + 2 \leq 0 \Rightarrow (a-1)^2(a+2) \leq 0$.

Suy ra $a = 1 \Rightarrow b = 0$. Khi đó $\begin{cases} b_1 = 2^0 = 1 \\ b_2 = 2^1 = 2 \end{cases} \Rightarrow b_n = 2^{n-1} > 5^{100} \Leftrightarrow n-1 > 100 \log_2 5 \Rightarrow n \geq 234$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 234.

Chọn ý A

Câu 15: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}\left(u_1^2 + u_3 + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{8}\right) = e^{4u_2-7} + e^{6u_1-6} - 3 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}\left(u_n - \frac{n+4}{n^2+3n+2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Giá trị lớn nhất của số n để $u_n > \frac{3+(n+1)2^{2018}}{n+1}$

A. 3472

B. 3245

C. 3665

D. 3453

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $u_{n+1} = \frac{3}{2} \left(u_n - \frac{3}{n+1} + \frac{2}{n+2} \right) \Leftrightarrow u_{n+1} - \frac{3}{n+2} = \frac{3}{2} \left(u_n - \frac{3}{n+1} \right)$

Đặt $v_n = u_n - \frac{3}{n+1} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{3}{2} v_n \Rightarrow (v_n)$ là CSN với công bội $q = \frac{3}{2}$.

Khi đó $v_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} v_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(u_1 - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow u_n = \frac{3}{n+1} - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(u_1 - \frac{3}{2}\right)$

Ta có $u_3 = \frac{33}{8} - \frac{9}{4} u_1, u_2 = \frac{13}{4} - \frac{3}{2} u_1$, thay vào giả thiết ta được

$$\log_{\frac{1}{3}}(u_1^2 - 2u_1 + 4) = e^{6-6u_1} + e^{6u_1-6} - 3$$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có $e^{6-6u_1} + e^{6u_1-6} - 3 \geq 2\sqrt{e^{6-6u_1} \cdot e^{6u_1-6}} - 3 = -1$

Mặt khác ta cũng có $\log_{\frac{1}{3}}(u_1^2 - 2u_1 + 4) = \log_{\frac{1}{3}}((u_1 - 1)^2 + 3) \leq -1$

Do đó VT $\leq$ VP, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $u_1 = 1 \Rightarrow u_n = \frac{3}{n+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

Để $u_n > \frac{3+(n+1)2^{2018}}{n+1} \Rightarrow \frac{3}{n+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} > \frac{3+(n+1)2^{2018}}{n+1} \Leftrightarrow n \leq 3453$

Chọn ý D.

Câu 16: Cho $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $u_n = \frac{f(1).f(3)...f(2n-1)}{f(2).f(4)...f(2n)}$.

Tìm số n nguyên dương nhỏ nhất sao cho u_n thỏa mãn điều kiện $\log_2 u_n + u_n < \frac{-10239}{1024}$.

A. n = 23

B. n = 29

C. n = 21

D. n = 33

THPT Chuyên Biên Hòa - Hà Nam lần 1 năm học 2017 - 2018

Lời giải

Từ giả thiết ta có $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1 = (n^2 + 1)[(n+1)^2 + 1]$.

Khi đó ta có $u_n = \frac{(1^2 + 1)(2^2 + 1)(3^2 + 1)(4^2 + 1)...[(2n-1)^2 + 1][4n^2 + 1]}{(2^2 + 1)(3^2 + 1)(4^2 + 1)(5^2 + 1)...[4n^2 + 1][(2n+1)^2 + 1]}$
 $= \frac{2}{(2n+1)^2 + 1} = \frac{1}{2n^2 + 2n + 1}$

Theo đề bài ta có $\log_2 u_n + u_n < \frac{-10239}{1024} \Leftrightarrow -\log_2(2n^2 + 2n + 1) + \frac{1}{2n^2 + 2n + 1} + \frac{10239}{1024} < 0$.

Xét hàm số $g(n) = -\log_2(2n^2 + 2n + 1) + \frac{1}{2n^2 + 2n + 1} + \frac{10239}{1024}$ với $n \geq 1$.

Ta có $g'(n) = -\frac{4n+2}{(2n^2+2n+1)\ln 2} - \frac{4n+2}{(2n^2+2n+1)^2} < 0$ với $n \geq 1 \Rightarrow g(n)$ nghịch biến.

Mà $g\left(\frac{-1+\sqrt{2047}}{2}\right) = 0$ nên $-\log_2(2n^2 + 2n + 1) + \frac{1}{2n^2 + 2n + 1} + \frac{10239}{1024} < 0$

$\Rightarrow n > \frac{-1+\sqrt{2047}}{2}$. Do n nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn nên $n = 23$

Chọn ý A.

Câu 17: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + n + 1), \forall n \geq 1$. Tìm số nguyên n lớn nhất sao cho $u_n - [u_n] < \frac{2}{3}$. Biết $[a]$ kí hiệu phần nguyên của số a là số tự nhiên nhỏ nhất không vượt quá a .

A. 37

B. 36

C. 38

D. 40

THPT Chuyên Biên Hòa – Hà Nam lần 1 năm học 2017 – 2018

Lời giải

Ta có $u_n = \ln \frac{2n^2 + 1}{n^2 + n + 1} \in [0; \ln 2) \Rightarrow [u_n] = 0$

$$\Rightarrow u_n - [u_n] < \frac{2}{3} \Leftrightarrow u_n < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \ln \left(\frac{2n^2 + 1}{n^2 + n + 1} \right) < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2n^2 + 1}{n^2 + n + 1} < \sqrt[3]{e^2} \Rightarrow n < 37.462$$

Chọn ý A.

Câu 18: Cho dãy số (u_n) có tất cả số hạng đều dương thỏa mãn $u_{n+1} = 2u_n$ và đồng thời

$$\sqrt{u_1^2} + \sqrt{u_2^2} + \dots + \sqrt{u_n^2} + \sqrt{u_{n+1}^2} + u_{n+2} + 1 = \frac{4}{3}, \forall n \geq 1. \text{ Số tự nhiên } n \text{ nhỏ nhất để } u_n > 5^{100} \text{ là?}$$

A. 232

B. 233

C. 234

D. 235

Lời giải

Ta có $u_{n+1} = 2u_n \Rightarrow u_n = 2^{n-1}u_1$, đẳng thức đúng với mọi $n \geq 1$ nên đúng với $n = 1$ nên

$$\sqrt{u_1^2} + \sqrt{u_2^2} + u_3 + 1 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \sqrt{u_1^2} + \sqrt{4u_1^2} + 4u_1 + 1 = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{u_1^2 + 2u_1 + 1} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow u_1 + 1 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{3}$$

Do đó $u_n = \frac{2^{n-1}}{3} > 5^{100} \Leftrightarrow 2^{n-1} > 3 \cdot 5^{100} \Leftrightarrow n > \log_2 3 + 100 \log_2 5 > 233$.

Chọn ý C.

Câu 19: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln(u_1^2 + u_2^2 + 10) = \ln(2u_1 + 6u_2)$ và đồng thời

$u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1} + 1, \forall n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5050$

A. 100

B. 99

C. 101

D. 102

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\ln(u_1^2 + u_2^2 + 10) = \ln(2u_1 + 6u_2) \Leftrightarrow (u_1 - 1)^2 + (u_2 - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 3 \end{cases}$$

Mặt khác ta có $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1} + 1 \Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 1$.

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n \Rightarrow v_{n+1} = v_n + 1 \Rightarrow (v_n)$ là CSC có công sai $d = 1$

$$\text{Khi đó } \Rightarrow v_n = n + 1 \Rightarrow u_{n+1} = u_n + n + 1 \Rightarrow \begin{cases} u_2 = u_1 + 2 \\ u_3 = u_2 + 3 \\ \dots\dots\dots \\ u_n = u_{n-1} + n \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 + \sum_{i=2}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Vậy để } u_n > 5050 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} > 5050 \Rightarrow n > 100$$

Chọn ý C.

Câu 20: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} \log\left(u_2 + \frac{391}{40}\right) + \sqrt{\log\left(\frac{1}{4}u_1 + \frac{39}{4}\right)} = 2 \\ u_n = \frac{2(n+1)u_{n+1}}{n} + \frac{2-n}{(n^2+n+1)^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > \frac{5^{100} + n^2 + 1}{5^{100}(n^3 + n)}$.

A. 235

B. 255

C. 233

D. 241

Lời giải

$$\text{Ta có } (n^2 + n + 1)^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 + 2n(n^2 + 1) + n^2 + 1 = (n^2 + 1)((n+1)^2 + 1)$$

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\begin{aligned} nu_n &= 2(n+1)u_{n+1} + \frac{2n-n^2}{(n^2+1)((n+1)^2+1)} = 2(n+1)u_{n+1} + \frac{(n+1)^2 - 2(n^2+1) + 1}{(n^2+1)((n+1)^2+1)} \\ &\Leftrightarrow nu_n = 2(n+1)u_{n+1} + \frac{1}{n^2+1} - \frac{2}{(n+1)^2+1} \Leftrightarrow (n+1)u_{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1} = \frac{1}{2}\left(nu_n - \frac{1}{n^2+1}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } v_n = nu_n - \frac{1}{n^2+1} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \Rightarrow (v_n) \text{ là CSN có công bội } q = \frac{1}{2}$$

$$\text{Từ đó suy ra } v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} v_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(u_1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow u_n = \frac{1}{n^3+n} + \frac{1}{2^{n-1}n} \left(u_1 - \frac{1}{2}\right)$$

Thay $u_2 = -\frac{1}{40} + \frac{1}{4}u_1$ vào giả thiết ta được

$$\log\left(\frac{1}{4}u_1 + \frac{39}{4}\right) + \sqrt{\log\left(\frac{1}{4}u_1 + \frac{39}{4}\right)} = 2 \Rightarrow u_1 = 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{n^3 + n} + \frac{1}{2^n n}$$

$$\text{Để } u_n > \frac{5^{100} + n^2 + 1}{5^{100}(n^3 + n)} \Rightarrow n > 100 \log_2 5 \Rightarrow n \geq 233$$

Chọn ý C.

CÁC BÀI TOÁN NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN VẬN DỤNG - VẬN DỤNG CAO

1. TÍCH PHÂN TRUY HỒI.

Trong bài viết này chủ yếu là các bài toán ở dạng tự luận, mình sẽ giới thiệu qua để có thể không may đề thi thử của các trường có thể ra thì ta có thể xử lý được. Ở phần này ta sẽ cùng tìm hiểu các dạng tích phân truy hồi dạng $I_n = \int_a^b f(x, n) dx$ với các câu hỏi hay gặp là:

1. Thiết lập công thức truy hồi $I_n = g(I_{n+k}) (k = \overline{1; n})$.
2. Chứng minh công thức truy hồi cho trước.
3. Sau khi thiết lập được công thức truy hồi yêu cầu đi tính I_n ứng với một vài giá trị n nào đó hoặc tính giới hạn của hàm số hoặc dãy số có liên quan với I_n .

Ta cùng xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Xét tích phân $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Tìm mối quan hệ giữa I_n, I_{n+2}
2. Tính I_5, I_6 .
3. Tìm công thức tổng quát của I_n .
4. Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_n = (n+1)I_n \cdot I_{n+1}$. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Lời giải

1. Tìm mối quan hệ giữa I_n, I_{n+2}

$$\text{Ta có: } I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x (1 - \cos^2 x) dx = I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot \cos^2 x dx \quad (1)$$

$$\text{Sử dụng công thức nguyên hàm từng phần ta đặt } \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = \int \sin^n x \cdot \cos x dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot \cos^2 x dx = \left. \frac{\cos x \sin^{n+1} x}{n+1} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx = \frac{I_{n+2}}{n+1} \quad (2)$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta được: } I_{n+2} = I_n - \frac{I_{n+2}}{n+1} \Leftrightarrow I_n = \frac{n+2}{n+1} I_{n+2}$$

2. Tính I_5, I_6 .

$$\text{Sử dụng kết quả ở trên ta được: } \begin{cases} I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{8}{15} I_1 = \frac{8}{15} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{8}{15} \\ I_6 = \frac{5}{6} I_4 = \frac{15}{24} I_2 = \frac{15}{24} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{15\pi}{96} \end{cases}$$

3. Tìm công thức tổng quát của I_n .

Ta có: $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}$

Ta đã có kết quả $I_n = \frac{n+2}{n+1} I_{n+2}$, đến đây xét 2 trường hợp:

+ Trường hợp 1: $n = 2k (k \in \mathbb{N}^*)$. Ta có: $I_2 = \frac{4}{3} I_4, I_4 = \frac{6}{5} I_6, \dots, I_{2k-2} = \frac{2k}{2k-1} I_{2k}$.

Nhân theo vế các đẳng thức ta được:

$$I_2 = \frac{4.6 \dots 2k}{3.5 \dots (2k-1)} I_{2k} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{4.6 \dots 2k}{3.5 \dots (2k-1)} I_{2k} \Leftrightarrow I_{2k} = \frac{3.5 \dots (2k-1)}{4.6 \dots 2k} \frac{\pi}{4}$$

+ Trường hợp 2: Với n lẻ hay $n = 2k-1$, ta có: $I_1 = \frac{3}{2} I_3, I_3 = \frac{5}{4} I_5, \dots, I_{2k-3} = \frac{2k-1}{2k-3} I_{2k-1}$.

Nhân theo vế các đẳng thức ta được:

$$I_{2k-1} = \frac{2.4 \dots (2k-2)}{3.5 \dots (2k-1)} I_1 = \frac{2.4 \dots (2k-2)}{3.5 \dots (2k-1)}$$

4. Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_n = (n+1)I_n \cdot I_{n+1}$. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Ta có: $u_n = (n+1)I_n \cdot I_{n+1} = (n+1) \cdot \frac{n+2}{n+1} I_{n+2} I_{n+1} = (n+2)I_{n+1} \cdot I_{n+2} = u_{n+1}$

Vậy $u_{n+1} = u_n = \dots = u_1 = 2I_1 I_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

Ví dụ 2: Xét tích phân $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$

1. Tính I_n

2. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$

Lời giải

1. Tính I_n

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = (1-x^2)^n \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = n(1-x^2)^{n-1}(-2x)dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_n = x(1-x^2)^n \Big|_0^1 + 2n \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{n-1} dx$$

$$= 2n \int_0^1 (1 - (1-x^2)) (1-x^2)^{n-1} dx = 2n \left(\int_0^1 (1-x^2)^{n-1} dx - \int_0^1 (1-x^2)^n dx \right) = 2n(I_{n-1} - I_n)$$

$$\text{Vậy } I_n = 2n(I_{n-1} - I_n) \Leftrightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} (*)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ ta có } I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} I_{n-2} = \frac{4.6.8 \dots 2n}{5.7.9 \dots (2n+1)} I_1$$

$$\text{Mặt khác ta lại có: } I_1 = \int_0^1 (1-x^2) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \Rightarrow I_n = \frac{2.4.6.8 \dots 2n}{3.5.7.9 \dots (2n+1)}.$$

2. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$

Ta có: $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} \Rightarrow I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} I_n \Leftrightarrow \frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{2n+2}{2n+3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+2}{2n+3} = 1$

Ví dụ 3: Xét tích phân $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Chứng minh rằng $I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n$

2. Tính I_5, I_6

Lời giải

1. Ta có:

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((\tan^{n+2} x + \tan^n x) - \tan^n x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x (\tan^2 x + 1) - \tan^n x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x d(\tan x) - I_n = \frac{1}{n+1} - I_n \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh!

2. Ta có:

- $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \frac{1}{2} \ln 2$
- $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = (\tan x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4-\pi}{4}$

Áp dụng công thức truy hồi $I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n$ ta được:

- $I_5 = \frac{1}{4} - I_3 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - I_1 \right) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4}$
- $I_6 = \frac{1}{5} - I_4 = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3} - I_2 \right) = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$

Ví dụ 4:

1. Xét tích phân $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx} dx}{1+e^x}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $I_n = \frac{e^{n-1}-1}{n-1} - I_{n-1}$.

2. Xét tích phân $I_n = \int_0^3 (3-x)^n e^x dx$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $I_n = -3^n + nI_{n-1}$

Lời giải

1. Ta có:

$$I_n + I_{n-1} = \int_0^1 \frac{e^{nx} dx}{1+e^x} + \int_0^1 \frac{e^{x(n-1)} dx}{1+e^x} = \int_0^1 \frac{e^{x(n-1)} (e^x + 1) dx}{1+e^x} = \frac{e^{x(n-1)}}{n-1} \Big|_0^1 = \frac{e^{n-1}-1}{n-1}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh!

2. Xét tích phân $I_n = \int_0^3 (3-x)^n e^x dx$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $I_n = -3^n + nI_{n-1}$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = (3-x)^n \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -n(3-x)^{n-1} dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow I_n = (3-x)^n e^x \Big|_0^3 + n \int_0^3 (3-x)^{n-1} e^x dx = -3^n + nI_{n-1}$$

Từ đây có điều phải chứng minh!

Ví dụ 5: Cho $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Biết (u_n) là dãy cho bởi $u_n = \frac{I_n}{I_{n+1}}$. Tìm $\lim u_n$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Đặt } \begin{cases} u = v^n \\ dv = \sqrt{1-x} dx \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1} dx \\ v = \int \sqrt{1-x} dx = -\frac{2}{3}(\sqrt{1-x})^3 \end{cases} \\ &\Rightarrow I_n = -\frac{2}{3}x^n (\sqrt{1-x})^3 \Big|_0^1 + \frac{2}{3}n \int_0^1 (\sqrt{1-x})^3 \cdot x^{n-1} dx \\ &= \frac{2}{3}n \left(\int_0^1 \sqrt{1-x} \cdot x^{n-1} dx - \int_0^1 \sqrt{1-x} \cdot x^n dx \right) = \frac{2}{3}n(I_{n-1} - I_n) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } I_n = \frac{2}{3}n(I_{n-1} - I_n) \Rightarrow I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1} \Rightarrow I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}I_n \Rightarrow \lim u_n = \lim \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$$

2. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN HÀM PHÂN THỨC HỮU TỶ

Nguyên hàm phân thức hữu tỷ là một bài toán khá cơ bản, nhưng cũng được phát triển ra rất nhiều bài toán khó, trong mục này ta sẽ tìm hiểu cách giải quyết dạng toán này. Tổng quát với hàm hữu tỷ, nếu bậc của tử lớn hơn hoặc bằng bậc của mẫu thì phải chia tách phần đa thức, còn lại hàm hữu tỷ với bậc tử bé hơn bậc mẫu. Nếu bậc của tử bé hơn bậc của mẫu thì phân tích mẫu ra các thừa số bậc nhất $(x+a)$ hay (x^2+px+q) bậc hai vô nghiệm

rồi đồng nhất hệ số theo phân tử đơn giản: $\frac{A}{x+a}; \frac{Bx+C}{x^2+px+q}$. Đồng nhất hệ số ở tử thức thì

tính được các hằng số A, B, C, ... Kết hợp với các biến đổi sai phân, thêm bớt đặc biệt để phân tích nhanh.

CÁC DẠNG TÍCH PHÂN ĐA THỨC HỮU TỶ.

- $\int_a^b |P(x)| dx$: Chia miền xét dấu $P(x)$,
- $\int_a^b x(mx+n)^\alpha dx$: Đặt $u = mx+n$ hoặc phân tích,
- $\int_a^b (mx+n)(px^2+qx+r)^\alpha dx$: Đặt $u = px^2+qx+r$,
- $\int_a^b (x+m)^\alpha \cdot (x+m)^\beta dx$: Nếu $\alpha < \beta$ thì đặt $u = x+n$.

CÁC DẠNG TÍCH PHÂN HÀM PHÂN THỨC

1. Dạng $\int_a^b \frac{1}{px^2 + qx + r} dx$. Lập $\Delta = q^2 - 4pr$.

- Nếu $\Delta = 0 \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{(mx + n)^2}$, dùng công thức của hàm đa thức.
- Nếu $\Delta < 0 \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{x^2 + k^2}$, đặt $x = k \tan t$
- Nếu $\Delta > 0 \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{x^2 - k^2}$, biến đổi $\frac{1}{x^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{x - k} - \frac{1}{x + k} \right)$

2. Dạng $\int_a^b \frac{mx + n}{px^2 + qx + r} dx$. Lập $\Delta = q^2 - 4pr$

- Nếu $\Delta \geq 0 \Rightarrow$ Phân tích và dùng công thức.
- Nếu $\Delta < 0 \Rightarrow \frac{mx + n}{px^2 + qx + r} = \frac{A(px^2 + qx + r)'}{px^2 + qx + r} + \frac{B}{(x + \alpha)^2 + k^2}$

3. Dạng $\int_a^b \frac{dx}{x(1 + x^n)^m} = \int_a^b \frac{x^{n-1} dx}{x^n(1 + x^n)^m}$, đặt $t = 1 + x^n$.

Chú ý: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-a; a]$.

Nếu $f(x)$ lẻ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$. Nếu $f(x)$ chẵn thì $\int_a^a f(x) = 2 \int_0^a f(x) dx$.

CÁC CÔNG THỨC NÊN NHỚ.

- $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)} dx = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right| + C$
- $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
- $\int \frac{1}{(ax+b)^2 + c^2} dx = \frac{\arctan \left(\frac{ax+b}{c} \right)}{ac} + C$

CÔNG THỨC TÁCH NHANH PHÂN THỨC HỮU TỶ

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{P(x)}{(x-b)(x-c)} \Big|_{x=a} \\ B = \frac{P(x)}{(x-a)(x-c)} \Big|_{x=b} \\ C = \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)} \Big|_{x=c} \end{cases}$$

$$\bullet \quad \frac{P(x)}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{P(x)}{ax^2+bx+c} \Big|_{x=m} \\ Bx+C = \frac{P(x)-A(ax^2+bx+c)}{x-m} \Big|_{x=1000} \end{cases}$$

Ví dụ : Tìm các nguyên hàm, tính các tích phân sau:

1. $\int \frac{x^4-2}{x^3-x} dx$

2. $\int \frac{dx}{x(1+x^8)}$

3. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} dx$

4. $K = \int_0^2 \frac{x^4-x+1}{x^2+4} dx$

5. $L = \int_0^1 \frac{x^4+x^2+1}{x^6+1} dx$

6. $N = \int_0^{1/\sqrt[4]{3}} \frac{xdx}{x^8-1}$

7. $Q = \int_1^2 \frac{8x^7+2}{x(1+x^7)} dx$

8. $J = \int \frac{x^4+2}{x^6+1} dx$

9. $\int_4^3 \frac{x^{10}}{x^3+1} dx$

10. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2-1}{x^4+1} dx$

Lời giải

1. Ta có $\frac{x^4-2}{x^3-x} = x + \frac{x^2-2}{x^3-x} = x + \frac{x^2-2}{x(x-1)(x+1)}$.

Đặt $\frac{x^2-2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow x^2-2 = (A+B+C)x^2 + (B-C)x - A$

Đồng nhất hệ số thì được $A=2, B=-\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{2}$, do đó:

$$\int f(x)dx = \int \left(x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$$

2. Ta có $\int \frac{dx}{x(1+x^8)} = \int \frac{x^7 dx}{x^8(1+x^8)} = \frac{1}{8} \int \frac{d(x^8)}{x^8(1+x^8)} = \frac{1}{8} \ln \frac{x^8}{1+x^8} + C$

3. Ta có $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} dx = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \right| + C$

4. Đặt $x = 2 \tan t, x \in [0; 2] \Leftrightarrow t \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right]$.

$$\Rightarrow K = \int_0^{\pi/4} \frac{16 \tan^4 t - 2 \tan t + 1}{4(\tan^2 t + 1)} \cdot \frac{2dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (16 \tan^4 t - 2 \tan t + 1) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (16 \tan^2 t (1 + \tan^2 t) - 16 \tan^2 t - 2 \tan t + 1) dt$$

Từ đó tính được $K = -\frac{16}{3} + \frac{17\pi}{8} - \ln \sqrt{2}$

5. Ta có $L = \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{2x^2}{x^6+1} \right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{d(x^3)}{(x^3)^2+1}$

Lần lượt đặt $x = \tan t, x^3 = \tan u$ thì $L = \frac{5\pi}{12}$

6. Đặt $t = x^2$ thì $x dx = \frac{1}{2} dt$. Khi $x = 0$ thì $t = 0, x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ thì $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{t^4-1} = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \left(\frac{1}{8} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{1}{4} \arctan t \right) \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{8} \ln(2-\sqrt{3}) - \frac{\pi}{24}$$

7. Ta có $Q = \int_1^2 \frac{8x^7+1+1}{x(1+x^7)} dx = \int_1^2 \frac{8x^7+1}{x^8+x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x(1+x^7)} dx$

$$= \ln(x^8+x) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{x^6}{x^7(1+x^7)} dx = \ln 129 + \frac{1}{7} \int_1^2 \frac{d(x^7)}{x^7(1+x^7)}$$

$$= \ln 129 + \frac{1}{7} \ln \frac{x^7}{1+x^7} \Big|_1^2 = \ln 129 + \frac{1}{7} \ln \frac{256}{129}$$

8. Ta có $J = \int \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^4-x^2+1} \right) dx = C + \arctan x + \int \frac{dx}{x^4-x^2+1}$

Như vậy ta chỉ cần tính $K = \int \frac{dx}{x^4-x^2+1}$

Với trường hợp $x = 0$ làm dễ dàng, xét trường hợp $x \neq 0$ ta có

$$K = \int \frac{\frac{dx}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}} = - \int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1}$$

Đặt $t = \frac{1}{x} \Rightarrow K = \int \frac{t^2 dt}{t^4-t^2+1} = \frac{1}{2} \left(\int \left[\frac{1}{t^2+1-\sqrt{3}t} + \frac{1}{t^2+1+\sqrt{3}t} \right] dt - \int \frac{dt}{t^4-t^2+1} \right)$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t^2+1-\sqrt{3}t} + \frac{1}{t^2+1+\sqrt{3}t} \right) dt - \frac{1}{2} K \Rightarrow K = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{t^2+1-\sqrt{3}t} + \frac{1}{t^2+1+\sqrt{3}t} \right) dt$$

Phần còn lại xin nhường lại cho bạn đọc!

9. Biến đổi tích phân cần tính ta được

$$\int_4^3 \frac{x^{10}}{x^3+1} dx = \int_4^3 \left(x^7 - x^4 + x - \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x^3+1} \right) dx$$

$$= \int_4^3 \left[x^7 - x^4 + x - \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{x^3+1} \right] dx$$

Tính $I = \int_4^3 \frac{1}{x^3+1} dx = \int_4^3 \frac{d(x+1)}{(x+1)[x^2-x+1]} = \int_4^3 \frac{d(x+1)}{(x+1)[(x+1)^2-3(x+1)+3]}$

Đặt $t = x+1 \Rightarrow dt = dx \Rightarrow I = \frac{1}{3} \int_5^4 \frac{(t^2-3t+3)-(t^2-3t)}{t(t^2-3t+3)} dt = \frac{1}{3} \int_5^4 \frac{dt}{t} - \frac{1}{3} \int_5^4 \frac{t-3}{t^2-3t+3} dt$

$$= \frac{1}{3} \int_5^4 \frac{dt}{t} - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \int_5^4 \frac{2t-3}{t^2-3t+3} dt - \frac{3}{2} \int_5^4 \frac{dt}{t^2-3t+3} \right]$$

Đến đây xin nhường lại cho bạn đọc!

10. Ta có $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2-1}{x^4+1} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t$ khi đó ta được:

$$I = \int_{\frac{5}{2}}^2 \frac{dt}{t^2-2} = \int_{\frac{5}{2}}^2 \frac{dt}{(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{5}{2}}^2 \left(\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{5}{2}}^2 \frac{d(t-\sqrt{2})}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{5}{2}}^2 \frac{d(t+\sqrt{2})}{t+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right|_{\frac{5}{2}}^2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left(\frac{19-6\sqrt{2}}{17} \right)$$

3. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

Để làm tốt được các bài toán nguyên hàm - tích phân hàm lượng giác ta cần nắm chắc được các biến đổi hạ bậc lượng giác, tích thành tổng, theo góc phụ $t = \tan \frac{x}{2}, \dots$

- $\frac{1}{\sin(x+a) \cdot \sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)} \cdot \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$
- $\frac{1}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{\sin(x+\alpha)}$
- $\frac{1}{a \sin x + b \cos x \pm \sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{1 \pm \cos(x+\alpha)}$
- $\frac{\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma}{a \sin x + b \cos x + c} = \frac{A(a \sin x + b \cos x + c)'}{a \sin x + b \cos x + c} + \frac{B}{a \sin x + b \cos x + c}$

- $\frac{1}{a \sin^2 x + b \sin x \cos x + \cos^2 x} = \frac{1}{a \tan^2 x + b \tan x + c} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\frac{\sin x \cos x}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^\alpha} = \frac{A(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)'}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^\alpha}$

Đặc biệt cận tích phân đối, bù, phụ thì đặt tương ứng $t = -x, t = \pi - x, t = \frac{\pi}{2} - x$. Tích phân liên kết, để tính I thì đặt thêm J mà việc tính tích phân $I + J$ và $I - J$ hoặc $I + kJ$ và $I - mJ$ dễ dàng lợi hơn. Tích phân truy hồi I_n theo I_{n-1} hay I_{n-2} thì $\sin^n x, \cos^n x$ tách lũy thừa 1 và dùng phương pháp tích phân từng phần còn $\tan^n x, \cot^n x$ tách lũy thừa 2 và dùng phương pháp tích phân đổi biến số. Ngoài ra ta cần phải nhớ:

1. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx; \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

2. Các dạng tích phân lượng giác:

- $\int_a^b P(x) \cdot \sin \alpha x dx, \int_a^b P(x) \cdot \cos \alpha x dx$: đặt $u = P(x), v' = \sin$ hoặc $\cos \alpha x$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} R(x, \sin x, \cos x) dx$: đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$
- $\int_0^{\pi} R(x, \sin x, \cos x) dx$: đặt $x = \pi - t$
- $\int_0^{2\pi} R(x, \sin x, \cos x) dx$: đặt $x = 2\pi - t$
- $\int_a^b R(\sin x, \cos x) dx$: đặt $t = \tan \frac{x}{2}$, đặc biệt:

Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \cos x$

Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \sin x$

Nếu $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \tan x, \cot x$.

Để tìm hiểu sâu hơn ta sẽ cùng đi vào các dạng toán cụ thể.

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.

I. DẠNG 1. $I = \int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$

1. PHƯƠNG PHÁP.

Dùng đồng nhất thức:

$$1 = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(a-b)} = \frac{\sin(x+a)\cos(x+b) - \cos(x+a)\sin(x+b)}{\sin(a-b)}$$

Từ đó suy ra:
$$I = \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(x+a)\cos(x+b) - \cos(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)} - \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} \right] dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} [\ln|\sin(x+b)| - \ln|\sin(x+a)|] + C$$

2. CHÚ Ý.

Với cách này, ta có thể tìm được các nguyên hàm:

- $J = \int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$ bằng cách dùng đồng nhất thức $1 = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)}$
- $K = \int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$ bằng cách dùng đồng nhất thức $1 = \frac{\cos(a-b)}{\cos(a-b)}$

3. VÍ DỤ MINH HỌA.

Tính các nguyên hàm, tích phân sau:

- $I = \int \frac{dx}{\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$

Ta có: $1 = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\sin\left[\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - x\right]}{\frac{1}{2}} = 2 \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin x \right]$

Từ đó:
$$I = 2 \int \frac{\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin x \right]}{\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} dx = 2 \int \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} \right] dx$$

$$= 2 \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} - 2 \int \frac{d\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = 2 \ln \left| \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} \right| + C$$

- $I = \int \frac{dx}{\cos 3x \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)}$

Ta có $1 = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\sin\left[\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - 3x\right]}{\frac{1}{2}} = 2 \left[\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \cos 3x - \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \sin 3x \right]$

$$\begin{aligned}\Rightarrow I &= 2 \int \frac{\left[\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \cos 3x - \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \sin 3x \right]}{\cos 3x \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)} dx = 2 \int \frac{\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)} dx - 2 \int \frac{\sin 3x}{\cos 3x} dx \\ &= -\frac{2}{3} \int \frac{d\left(\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)\right)}{\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)} + \frac{2}{3} \int \frac{d(\cos 3x)}{\cos 3x} = \frac{2}{3} \ln \left| \frac{\cos 3x}{\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)} \right| + C\end{aligned}$$

$$\bullet \quad I = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}1 &= \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\cos\left[\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right]}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) \right] \\ \Rightarrow I &= \sqrt{2} \int \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)} dx \\ &= \sqrt{2} \int \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} dx + \sqrt{2} \int \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)} dx \\ &= \sqrt{2} \int \frac{d\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} - \sqrt{2} \int \frac{d\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)} = \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)} \right| + C\end{aligned}$$

II. DẠNG 2. $I = \int \tan(x+a) \tan(x+b) dx$

1. PHƯƠNG PHÁP.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \tan(x+a) \tan(x+b) &= \frac{\sin(x+a) \sin(x+b)}{\cos(x+a) \cos(x+b)} \\ &= \frac{\sin(x+a) \sin(x+b) + \cos(x+a) \cos(x+b)}{\cos(x+a) \cos(x+b)} - 1 = \frac{\cos(a-b)}{\cos(x+a) \cos(x+b)} - 1\end{aligned}$$

$$\text{Từ đó suy ra } I = \cos(a-b) \int \frac{dx}{\cos(x+a) \cos(x+b)} - 1$$

Đến đây ta gặp bài toán tìm nguyên hàm ở **Dạng 1**.

2. CHÚ Ý

Với cách này, ta có thể tính được các nguyên hàm:

- $J = \int \cot(x+a) \cot(x+b) dx$
- $K = \int \tan(x+a) \tan(x+b) dx$

3. VÍ DỤ MINH HỌA

- $I = \int \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx$

$$\text{Ta có } \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} - 1$$

$$= \frac{\cos\left[\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} - 1$$

$$\text{Từ đó } I = \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} dx - \int dx = \frac{\sqrt{3}}{2} I_1 - x + C$$

$$\text{Tính } I_1 = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\text{Ta có } 1 = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\sin\left[\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]}{\frac{1}{2}} = 2 \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$\text{Từ đó } I_1 = 2 \int \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} dx$$

$$= 2 \int \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} dx - 2 \int \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} dx = 2 \ln \left| \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \right| + C$$

$$\text{Suy ra } I = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \ln \left| \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \right| - x + C = \sqrt{3} \ln \left| \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \right| - x + C$$

$$\bullet K = \int \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} + 1 \\ &= \frac{\sin\left[\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} + 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó: } K = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} dx + \int dx = \frac{1}{2} K_1 + x + C$$

Đến đây, bằng cách tính ở Dạng 1, ta tính được:

$$K_1 = \int \frac{dx}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \right| + C \Rightarrow K = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left| \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \right| + x + C$$

III. DẠNG 3. $I = \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$

1. PHƯƠNG PHÁP.

$$\text{Có: } a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right)$$

$$\Rightarrow a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\sin(x + \alpha)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \tan \frac{x + \alpha}{2} \right| + C$$

2. VÍ DỤ MINH HỌA.

$$\begin{aligned} \bullet I &= \int \frac{2dx}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} = \int \frac{dx}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x} = \int \frac{dx}{\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6}} \\ &= \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \ln \left| \tan \frac{x + \frac{\pi}{6}}{2} \right| + C = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \right| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad J &= \int \frac{dx}{\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin \frac{\pi}{6} \cos 2x - \cos \frac{\pi}{6} \sin 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin \left(\frac{\pi}{6} - 2x \right)} = -\frac{1}{4} \int \frac{d \left(\frac{\pi}{6} - 2x \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{6} - 2x \right)} \\
 &= -\frac{1}{4} \ln \left| \tan \frac{\frac{\pi}{6} - 2x}{2} \right| + C = -\frac{1}{4} \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{12} - x \right) \right| + C
 \end{aligned}$$

IV. DẠNG 4. $I = \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$

1. PHƯƠNG PHÁP.

$$\text{Đặt } \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

2. VÍ DỤ MINH HỌA.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad I &= \int \frac{dx}{3 \cos x + 5 \sin x + 3} \\
 \text{Đặt } \tan \frac{x}{2} = t &\Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \text{ . Từ đó ta có} \\
 I &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3} = \int \frac{2dt}{3-3t^2+10t+3+3t^2} = \int \frac{2dt}{10t+6} \\
 &= \frac{1}{5} \int \frac{d(5t+3)}{5t+3} = \frac{1}{5} \ln |5t+3| + C = \frac{1}{5} \ln \left| 5 \tan \frac{x}{2} + 3 \right| + C \\
 \bullet \quad J &= \int \frac{2dx}{2 \sin x - \cos x + 1}
 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } J &= \int \frac{2 \cdot \frac{2dt}{1+t^2}}{2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \int \frac{4dt}{4t-1+t^2+1+t^2} = \int \frac{4dt}{2t^2+4t} = 2 \int \frac{dt}{t(t+2)} \\ &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \ln|t| - \ln|t+2| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \tan \frac{x}{2} + 2 \right| + C \end{aligned}$$

$$\bullet K = \int \frac{dx}{\sin x + \tan x}$$

$$\text{Đặt } \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } K &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{2t}{1-t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{1-t^2}{t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int t dt \\ &= \frac{1}{2} \ln|t| - \frac{1}{4} t^2 + C = \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{4} \tan^2 \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

V. Dạng 5. $I = \int \frac{dx}{a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cos x + c \cdot \cos^2 x}$

1. PHƯƠNG PHÁP.

$$I = \int \frac{dx}{(a \tan^2 x + b \tan x + c) \cdot \cos^2 x}$$

$$\text{Đặt } \tan x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt. \text{ Suy ra } I = \int \frac{dt}{at^2 + bt + c}$$

2. VÍ DỤ MINH HỌA.

$$\bullet I = \int \frac{dx}{3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x} = \int \frac{dx}{(3 \tan^2 x - 2 \tan x - 1) \cos^2 x}$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } \tan x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \Rightarrow I &= \int \frac{dt}{3t^2 - 2t - 1} = \int \frac{dt}{(t-1)(3t+1)} \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{3}{3t+1} \right) dt = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{4} \int \frac{d(3t+1)}{3t+1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{3t+1} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\tan x - 1}{3 \tan x + 1} \right| + C$$

$$\bullet \quad J = \int \frac{dx}{\sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x} = \int \frac{dx}{(\tan^2 x - 2 \tan x - 2) \cos^2 x}$$

Đặt $\tan x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$

$$\Rightarrow J = \int \frac{dt}{t^2 - 2t - 2} = \int \frac{d(t-1)}{(t-1)^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-1-\sqrt{3}}{t-1+\sqrt{3}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\tan x - 1 - \sqrt{3}}{\tan x - 1 + \sqrt{3}} \right| + C$$

VI. DẠNG 6. $I = \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a_2 \sin x + b_2 \cos x} dx$

1. PHƯƠNG PHÁP.

Ta tìm A, B sao cho: $a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a_2 \sin x + b_2 \cos x) + B(a_2 \cos x - b_2 \sin x)$

2. VÍ DỤ MINH HỌA.

$$\bullet \quad I = \int \frac{4 \sin x + 3 \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx$$

Ta tìm A, B sao cho $4 \sin x + 3 \cos x = A(\sin x + 2 \cos x) + B(\cos x - 2 \sin x)$

$$\Rightarrow 4 \sin x + 3 \cos x = (A - 2B) \sin x + (2A + B) \cos x \Rightarrow \begin{cases} A - 2B = 4 \\ 2A + B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$$

Từ đó: $I = \int \frac{2(\sin x + 2 \cos x) - (\cos x - 2 \sin x)}{\sin x + 2 \cos x} dx$
 $= 2 \int dx - \int \frac{d(\sin x + 2 \cos x)}{\sin x + 2 \cos x} = 2x - \ln |\sin x + 2 \cos x| + C$

$$\bullet \quad J = \int \frac{3 \cos x - 2 \sin x}{\cos x - 4 \sin x} dx$$

Ta tìm A, B sao cho $3 \cos x - 2 \sin x = A(\cos x - 4 \sin x) + B(-\sin x - 4 \cos x)$

$$\Rightarrow 3 \cos x - 2 \sin x = (A - 4B) \cos x + (-4A - B) \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A - 4B = 3 \\ 4A + B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{11}{17} \\ B = -\frac{10}{17} \end{cases}$$

Từ đó: $J = \int \frac{\frac{11}{17}(\cos x - 4 \sin x) - \frac{10}{17}(-\sin x - 4 \cos x)}{\cos x - 4 \sin x} dx$
 $= \frac{11}{17} \int dx - \frac{10}{17} \int \frac{d(\cos x - 4 \sin x)}{\cos x - 4 \sin x} = \frac{11}{17} x - \frac{10}{17} \ln |\cos x - 4 \sin x| + C$

3. CHÚ Ý.

1. Nếu gặp $I = \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a_2 \sin x + b_2 \cos x)^2} dx$ ta vẫn tìm A, B sao cho:

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a_2 \sin x + b_2 \cos x) + B(a_2 \cos x - b_2 \sin x)$$

2. Nếu gặp $I = \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} dx$ ta tìm A, B sao cho:

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1 = A(a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2) + B(a_2 \cos x - b_2 \sin x) + C$$

Chẳng hạn:

$$\bullet \quad I = \int \frac{8 \cos x}{(\sqrt{3} \sin x + \cos x)^2} dx. \text{ Ta tìm A, B sao cho:}$$

$$8 \cos x = A(\sqrt{3} \sin x + \cos x) + B(\sqrt{3} \cos x - \sin x)$$

$$\Rightarrow 8 \cos x = (A\sqrt{3} - B) \sin x + (A + B\sqrt{3}) \cos x \Rightarrow \begin{cases} A\sqrt{3} - B = 0 \\ A + B\sqrt{3} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó: } I = \int \frac{2(\sqrt{3} \sin x + \cos x) + 2\sqrt{3}(\sqrt{3} \cos x - \sin x)}{(\sqrt{3} \sin x + \cos x)^2} dx$$

$$= 2 \int \frac{dx}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} + 2\sqrt{3} \int \frac{d(\sqrt{3} \sin x + \cos x)}{(\sqrt{3} \sin x + \cos x)^2} = 2I_1 - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} + C$$

$$\text{Tìm } I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x + \frac{\pi}{6}}{2} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \right| + C$$

$$\text{Vậy } I = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \right| - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} + C$$

$$\bullet \quad J = \int \frac{8 \sin x + \cos x + 5}{2 \sin x - \cos x + 1} dx. \text{ Ta tìm A, B, C sao cho:}$$

$$8 \sin x + \cos x + 5 = A(2 \sin x - \cos x + 1) + B(2 \cos x + \sin x) + C$$

$$\Rightarrow 8 \sin x + \cos x + 5 = (2A + B) \sin x + (-A + 2B) \cos x + A + C \Rightarrow \begin{cases} 2A + B = 8 \\ -A + 2B = 1 \\ A + C = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \\ C = 2 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó: } J = \int \frac{3(2 \sin x - \cos x + 1) + 2(2 \cos x + \sin x) + 2}{2 \sin x - \cos x + 1} dx$$

$$= 3 \int dx + 2 \int \frac{2 \cos x + \sin x}{2 \sin x - \cos x + 1} dx + 2 \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 1}$$

$$= 3x + 2 \ln |2 \sin x - \cos x + 1| + 2J_1$$

$$\bullet \text{ Tìm } J_1 = \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 1}. \text{ Đặt } \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow J_1 = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t} = \int \frac{dt}{t(t+2)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t}{t+2} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2} + 2} \right| + C$$

$$\text{Vậy: } J = 3x + 2 \ln |2 \sin x - \cos x + 1| + \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2} + 2} \right| + C$$

VII. DẠNG 7. BIẾN ĐỔI ĐƯA VỀ NGUYÊN HÀM CƠ BẢN HOẶC 6 DẠNG Ở TRÊN.

$$\begin{aligned} \bullet \quad I &= \int \cos 3x \cos 4x dx = \frac{1}{2} \int (\cos x + \cos 7x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos x dx + \frac{1}{2} \int \cos 7x dx = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{14} \sin 7x + C \\ \bullet \quad I &= \int \cos x \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x (\cos 2x + \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 2x \cos 2x dx + \frac{1}{2} \int \sin 2x \cos 4x dx \\ &= \frac{1}{4} \int \sin 2x d(\sin 2x) + \frac{1}{4} \int (-\sin 2x + \sin 6x) dx \\ &= \frac{1}{8} \sin^2 2x + \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{24} \cos 6x + C \\ \bullet \quad I &= \int \tan x \tan \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \tan \left(\frac{\pi}{3} + x \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \tan x \tan \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \tan \left(\frac{\pi}{3} + x \right) &= \frac{\sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right)}{\cos x \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right)} \\ &= \frac{\sin x \left(\cos 2x - \cos \frac{2\pi}{3} \right)}{\cos x \left(\cos 2x + \cos \frac{2\pi}{3} \right)} = \frac{\sin x \left(1 - 2 \sin^2 x + \frac{1}{2} \right)}{\cos x \left(2 \cos^2 x - 1 - \frac{1}{2} \right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin x (3 - 4 \sin^2 x)}{\cos x (4 \cos^2 x - 3)} = \frac{3 \sin x - 4 \sin^3 x}{4 \cos^3 x - 3 \cos x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$$

$$\text{Từ đó: } I = \int \frac{\sin 3x}{\cos 3x} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{d(\cos 3x)}{\cos 3x} = -\frac{1}{3} \ln |\cos 3x| + C$$

- $I = \int \sin^3 x \sin 3x dx$

$$\text{Ta có: } \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \Rightarrow \sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^3 x \sin 3x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} \cdot \sin 3x$$

$$= \frac{3}{4} \sin x \sin 3x - \frac{1}{4} \sin^2 3x = \frac{3}{8} (\cos 2x - \cos 4x) - \frac{1}{8} (1 - \cos 6x)$$

$$= \frac{3}{8} \cos 2x - \frac{3}{8} \cos 4x + \frac{1}{8} \cos 6x - \frac{1}{8}$$

$$\text{Từ đó: } I = \int \left(\frac{3}{8} \cos 2x - \frac{3}{8} \cos 4x + \frac{1}{8} \cos 6x - \frac{1}{8} \right) dx = \frac{3}{16} \sin 2x - \frac{3}{32} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin 6x - \frac{1}{8} x + C$$

- $I = \int (\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x) dx$

$$\text{Ta có: } \sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}, \cos^3 x = \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4}$$

$$\text{Suy ra } \sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} \cdot \cos 3x + \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4} \cdot \sin 3x$$

$$= \frac{3}{4} \sin x \cos 3x - \frac{1}{4} \sin 3x \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x \sin 3x + \frac{1}{4} \cos 3x \sin 3x$$

$$= \frac{3}{8} [\sin(-2x) + \sin 4x] + \frac{3}{8} [\sin(-2x) - \sin 4x] = -\frac{3}{4} \sin 2x$$

$$\text{Vậy } I = -\frac{3}{4} \int \sin 2x dx = \frac{3}{8} \cos 2x + C$$

- $I = \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \int \frac{dx}{\tan x \cos^4 x} = \int \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{\tan x} (1 + \tan^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x}$

$$\text{Đặt } \tan x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{t^2 + t}{t} dt = \int t dt + \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} t^2 + \ln |t| + C = \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\tan x| + C$$

- $I = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$

$$\text{Đặt } \sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt \Rightarrow I = \int \frac{dt}{t^4 (1 - t^2)} = \int \frac{1 - t^4 + t^4}{t^4 (1 - t^2)} dt = \int \frac{1 + t^2}{t^4} dt + \int \frac{dt}{1 - t^2}$$

$$= \int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = -\frac{1}{3} t^{-3} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

$$= -\frac{1}{3 \sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad I &= \int \frac{\sin 3x \sin 4x}{\tan x + \tan 2x} dx = \int \frac{\sin 3x \sin 4x}{\frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x}} dx = \int \sin 4x \cos 2x \cos x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int (\sin 6x + \sin 2x) \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin 6x \cos x dx + \frac{1}{2} \int \sin 2x \cos x dx \\
 &= \frac{1}{4} \int (\sin 7x + \sin 5x) dx + \frac{1}{4} \int (\sin 3x + \sin x) dx \\
 &= -\frac{1}{28} \cos 7x - \frac{1}{20} \cos 5x - \frac{1}{12} \cos 3x - \frac{1}{4} \cos x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad I &= \int \frac{dx}{\sin^3 x} \cdot \text{Đặt} \begin{cases} u = \frac{1}{\sin x} \\ dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \\ v = -\cot x \end{cases} \\
 \Rightarrow I &= -\frac{\cot x}{\sin x} - \int \frac{\cot x \cdot \cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cot x}{\sin x} - I_1 \\
 \text{Tính } I_1 &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^3 x} - \int \frac{dx}{\sin x} = I - \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C \\
 \Rightarrow I &= -\frac{\cot x}{\sin x} - I_1 = -\frac{\cot x}{\sin x} - I + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C \\
 \Rightarrow 2I &= \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \frac{\cot x}{\sin x} + C \Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \frac{\cot x}{2 \sin x} + C
 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \right) dx$$

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \right) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\tan^2 \frac{x}{2} + 2 \tan \frac{x}{2} + 1 \right) dx
 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_0^1 (t^2 + 1) \ln(t^2 + t + 1) dt.$$

Đến đây sử dụng tính chất $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$ bài toán sẽ được giải quyết

$$\text{Cách 2. Ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos x) dx$$

Sử dụng nguyên hàm từng phần ta được

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin x) dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{1 + \sin x} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos x} dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \ln 2 - \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{1 + \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos x} dx \right)$$

Từ đây ta sẽ đi tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{1 + \sin x} dx$. Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$ ta được

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{1 + \sin x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos x} dx \Rightarrow I = 0$$

$$\bullet \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx$$

Sử dụng tích phân từng phần ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x + \sin x}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x (2 \cos x + 1)}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2 \cos x + 1 \\ dv = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx = -\frac{d(1 + 3 \cos x)}{3\sqrt{1 + 3 \cos x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2 \sin x dx \\ v = -\frac{2}{3} \sqrt{1 + 3 \cos x} \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2}{3} (2 \cos x + 1) \sqrt{1 + 3 \cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{1 + 3 \cos x} dx \\ &= \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3 \cos x} d(1 + 3 \cos x) = \frac{2}{3} + \frac{8}{27} \sqrt{(1 + 3 \cos x)^3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{34}{27} \end{aligned}$$

4. ĐƯA BIỂU THỨC VÀO TRONG DẤU VI PHÂN

Ở nội dung bài viết này ta sẽ nhắc tới một số bài toán sử dụng kỹ thuật đưa một biểu thức vào trong dấu vi phân, để làm được những bài toán này cần chú ý đến kỹ năng biến đổi, đạo hàm. Sau đây sẽ cùng xét các ví dụ sau.

Ví dụ 1: Biết $\int_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + e x^3 2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx = \frac{1}{m} + \frac{1}{e \ln n} \cdot \ln \left(p + \frac{e}{e + \pi} \right)$ với m, n, p là các số nguyên

dương. Tính tổng $P = m + n + p$

A. $P = 5$.

B. $P = 6$.

C. $P = 7$.

D. $P = 8$.

Lời giải

Những bài toán cần đến kỹ thuật này đa phần sẽ được phát biểu một cách khá lằng nhằng sẽ gây khó khăn cho người làm bài. Tuy nhiên hầu hết sẽ được đơn giản hóa bằng cách tách thành 2 tích phân khác, mà để làm được điều này thì trên tử phải tách theo mẫu số.

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + e x^3 2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{2^x}{\pi + e \cdot 2^x} \right) dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 + A = \frac{1}{4} + A$$

$$\text{Tính } A = \int_0^1 \frac{2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx \quad \text{Đặt } t = \pi + e \cdot 2^x \Rightarrow dt = e \cdot \ln 2 \cdot 2^x dx \Rightarrow 2^x dx = \frac{1}{e \ln 2} dt$$

Khi đó $A = \frac{1}{e \cdot \ln 2} \cdot \int_{\pi+e}^{\pi+2e} \frac{dt}{t} = \frac{1}{e \cdot \ln 2} \ln |t| \Big|_{\pi+e}^{\pi+2e} = \frac{1}{e \ln 2} \ln \frac{\pi+2e}{\pi+e} = \frac{1}{e \ln 2} \ln \left(1 + \frac{e}{e+\pi} \right)$

Vậy $I = \frac{1}{4} + \frac{1}{e \ln 2} \ln \left(1 + \frac{e}{e+\pi} \right) \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = 2 \\ p = 1 \end{cases} \Rightarrow P = m + n + p = 7.$

Nhận xét:

- Mấu chốt của bài toán là ta nhận ra được mẫu đạo hàm ra một phần của tử từ đó rút ra phép đặt mẫu để lấy vi phân.
- Ngoài ra nếu trình bày tự luận thì ta cũng không cần phải đặt mẫu làm gì cả, đưa trực tiếp tử vào trong dấu vi phân rồi nhân thêm hằng số bên ngoài.

Chọn ý C.

Ví dụ 2: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + (2x + \cos x) \cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x} dx = a\pi^2 + b - \ln \frac{c}{\pi}$ với a, b, c là các số hữu tỉ.

Tính $P = ac^3 + b$.

A. $P = \frac{5}{4}$

B. $P = \frac{3}{2}$

C. $P = 2$

D. $P = 3$

Lời giải

Vẫn là một bài toán với cách phát biểu không hề dễ chịu, mấu chốt vẫn là đưa biểu thức vào trong dấu vi phân và tách thành 2 tích phân như bài trước !

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x^2 + 2x \cos x + \cos^2 x) + (1 - \sin x)}{x + \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x + \cos x)^2}{x + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(x + \cos x)}{x + \cos x} \\ &= \left(\frac{1}{2} x^2 + \sin x + \ln |x + \cos x| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8} \pi^2 + 1 + \ln \frac{\pi}{2} = \frac{1}{8} \pi^2 + 1 - \ln \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Vậy $\begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow P = ac^3 + b = 2.$

Chọn ý C.

Ví dụ 3: Biết $I = \int_1^e \frac{\ln^2 x + \ln x}{(\ln x + x + 1)^3} dx = \frac{1}{a} - \frac{b}{(e+2)^2}$ với $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Tính $P = b - a$.

A. $P = -8$

B. $P = -6$

C. $P = 6$

D. $P = 10$

Lời giải

Bài toán này không còn đơn giản như 2 bài toán trước nữa. Vẫn bám sát phương pháp làm ta sẽ phải đơn giản và làm xuất hiện biểu thức hợp lí để đưa vào trong dấu vi phân. Vậy biến đổi như thế nào để xuất hiện biểu thức đó?

Ta có $\int_1^e \frac{\ln^2 x + \ln x}{(\ln x + x + 1)^3} dx = \int_1^e \frac{\ln x + 1}{\ln x + x + 1} \cdot \frac{\ln x}{(\ln x + x + 1)^2} dx$

Chú ý rằng $\left(\frac{\ln x + 1}{\ln x + x + 1} \right)' = \frac{\ln x}{(\ln x + x + 1)^2}$. Khi đó tích phân cần tính trở thành:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x + \ln x}{(\ln x + x + 1)^3} dx = \int_1^e \frac{\ln x + 1}{\ln x + x + 1} d\left(\frac{\ln x + 1}{\ln x + x + 1} \right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{e+2}} u du = -\frac{1}{2} u^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{e+2}} = \frac{1}{8} - \frac{2}{(e+2)^2}$$

Chọn ý B.

Ví dụ 4: Biết $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x^2 - 1}{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1} dx = \frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P = b - 36a$.

A. $P = 0$

B. $P = 1$

C. $P = 2$

D. $P = 5$

Lời giải

Sau đây ta sẽ tìm hiểu một số bài toán đưa biểu thức vào trong dấu vi phân với hàm phân thức hữu tỉ. Cách làm không phải là chỉ đưa tử vào trong dấu vi phân mà cần phải biến đổi bằng cách sau.

Chia cả hai vế cho x^2 ta được:

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6} = \int_{-2}^{-1} \frac{d\left(x + \frac{1}{x} - 2\right)}{\left(x + \frac{1}{x} - 2\right)^2} = -\frac{1}{x + \frac{1}{x} - 2} \Big|_{-2}^{-1} = \frac{1}{36}$$

Nhận xét:

- Kỹ thuật chia cả hai vế cho số hạng bậc cao nhất của tử sẽ được áp dụng khá nhiều trong những bài toán đưa biểu thức vào trong dấu vi phân với hàm phân thức hữu tỉ.
- Các bài toán này hầu hết cần phải biến đổi mẫu số để phân tích tử số ra một cách hợp lí từ đó mới có thể đưa vào trong dấu vi phân.

Chọn ý A.

Ví dụ 5: Biết $I = \int_1^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} \left(\frac{4x^3 + 2x}{x^4 + x^2 + 1} + \frac{9(x^2 + 1)}{x^4 + x^2 + 1} \right) dx = \pi\sqrt{a} + \ln(b + 6\sqrt{c})$. Tính $\frac{ab}{c}$.

A. $\frac{22}{13}$

B. $\frac{48}{13}$

C. $\frac{37}{13}$

D. $\frac{28}{13}$

Lời giải

Bài toán này nhìn hình thức khá khủng bố, do yêu cầu của những bài toán này là làm đơn giản tích phân cho nên tránh việc cộng cả hai biểu thức trong dấu tích phân mà cần phải tách chúng ra để tính đơn giản hơn.

$$\text{Ta có } I = \int_1^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} \left(\frac{4x^3 + 2x}{x^4 + x^2 + 1} + \frac{9(x^2 + 1)}{x^4 + x^2 + 1} \right) dx = \int_1^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} \frac{d(x^4 + x^2 + 1)}{x^4 + x^2 + 1} + \int_1^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} \frac{9(x^2 + 1)}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

Tích phân thứ nhất tính rất dễ dàng bằng cách đưa biểu thức vào trong dấu vi phân rồi, còn tích phân thứ 2 ta sẽ xử lý thế nào? Như bài trước ta sẽ chia cả tử và mẫu cho x^2 , ta có:

$$9 \int_1^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx = 9 \int_1^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} dx = 9 \int_1^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + (\sqrt{3})^2} dx = \frac{9}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{3}} \Bigg|_1^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}$$

Đến đây dễ dàng tính được:

$$I = \ln(x^4 + x^2 + 1) \Big|_0^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} + \frac{9}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{3}} \Bigg|_1^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} = \ln(66 + 18\sqrt{13}) + \sqrt{3}\pi$$

Chọn ý A.

Nhận xét: Ở bài toán trên ta đã sử dụng một tính chất của hàm phân thức hữu tỉ.

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$$

5. TÍCH PHÂN LIÊN KẾT

Có rất nhiều bài toán tích phân ta không thể sử dụng cách tính trực tiếp được hoặc tính trực tiếp tương đối khó với những bài toán như vậy ta thường sử dụng tới một kỹ thuật đó là tìm tích phân liên kết. Chủ yếu các bài toán sử dụng phương pháp này là các tích phân lượng giác hoặc có thể là hàm phân thức. Để hiểu rõ hơn ta cùng đi vào phương pháp.

Xét tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$ ta sẽ tìm liên kết với tích phân $K = \int_a^b g(x) dx$ và tìm các mối

liên hệ giữa I, K . Ta đi thiết lập mối liên hệ giữa I, K $\begin{cases} cI + dK = m \\ eI + vK = n \end{cases}$. Giải hệ này ta sẽ tìm

được cả I và K .

Kinh nghiệm. Ta thường gặp các trường hợp sau:

- Hai tích phân $I = K$, tính được $I + K$ từ đó suy ra I .
- K là một tích phân tính đơn giản, khi đó từ $mI + nK = a$ ta sẽ tính được I .

Cách tìm tích phân. K . Việc tìm tích phân này chủ yếu dựa vào kinh nghiệm, riêng đối với tích phân lượng giác thì ta thường hay chú ý đến việc đổi chỗ $\sin x$ cho $\cos x$ để tạo tích phân liên kết!

Ví dụ: Tính các tích phân sau:

$$1. I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x \sin^2 x dx$$

$$2. I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3} dx$$

$$3. I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x \sin x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

$$4. I = \int_0^1 \frac{dx}{e^{2x} + 3}$$

$$5. I = \int_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx$$

Lời giải

1. Ở ngay câu đầu ta đã thấy ngay sự khó khăn rồi phải chứ? Bây giờ sẽ nghĩ tới tích phân liên kết. Chú ý tới đẳng thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ta sẽ thử tạo tích phân liên kết với tích phân $K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x \cos^2 x dx$

$$\text{Ta có: } I + K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Mặt khác ta lại có:

$$K - I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 4x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$\text{Từ đây suy ra được } I = \frac{1}{8} \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$2. \text{Chú ý tích phân liên kết của ta là } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3} dx.$$

$$\text{Ta có: } I + \sqrt{3}K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2} dx = \frac{1}{4} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right)} = \frac{1}{4} \cot \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Giờ cần tìm một mối liên hệ nữa giữa I, K , chú ý đến kiến thức kiến thức phần trước – Đưa biểu thức vào trong dấu vi phân, ở đây ta thấy rằng $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$, do đó nghĩ cách làm sao đó để có thể đưa một biểu thức vào trong dấu vi phân. Ta có:

$$K - I\sqrt{3} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x + \sqrt{3} \cos x)}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3} = \frac{1}{2(\sin x + \sqrt{3} \cos x)} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3} - 3}{6}$$

$$\text{Từ đây suy ra } I = \frac{1 + \sqrt{3}}{6}.$$

3. Chú ý nếu tính được tích phân $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

Ta có: $(\cos^4 x)' = -4\cos^3 x \sin x, (\sin^4 x)' = 4\sin^3 x \cos x \Rightarrow (\cos^4 x + \sin^4 x)' = -\sin 4x$

$$\Rightarrow 4(I - K) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = -\ln(\sin^4 x + \cos^4 x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \Rightarrow I = K$$

$$\text{Để ý rằng } I + K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos 2x)}{1 + \cos^2 2x} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Vậy } I = \frac{\pi}{8}$$

4. Chọn tích phân liên kết $K = \int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{e^{2x} + 3} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(e^{2x})}{e^{2x} + 3} = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 3) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{e^2 + 3}{4}\right)$

$$\text{Ta có } 3I + K = \int_0^1 dx = 1 \Rightarrow I = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \ln\left(\frac{e^2 + 3}{4}\right)$$

5. Ta chú ý tới hằng đẳng thức sau $x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$, ta chọn $K = \int_0^1 \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$

Ta có:

$$\bullet \quad I - K = \int_0^1 \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^6 + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\bullet \quad K = \int_0^1 \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{d(x^3)}{(x^3)^2 + 1} = \frac{1}{3} \arctan x^3 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{Vậy } I = \frac{\pi}{3}$$

LUYỆN TẬP

Tính các tích phân sau:

$$1. I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

$$2. I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{100} x}{\sin^{100} x + \cos^{100} x} dx$$

$$3. I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$$

$$4. I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

$$5. I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx$$

$$6. I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$7. I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot \cos^4 x dx$$

$$8. I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^{n+2} x dx$$

$$9. I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x + 1}{\sin x + \cos x + 1} dx$$

$$10. I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 2x}{\cos 2x} dx$$

$$11. I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^6(1+x^2)} dx$$

$$12. I = \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$$

$$13. I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 5x}{\sin 2x} dx$$

$$14. I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 5x}{\cos x} dx$$

$$15. I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \cot x - 3 \tan x}{\cot x + \tan x} dx$$

6. KỸ THUẬT LƯỢNG GIÁC HÓA

Khi tính tích phân ta sẽ gặp một số bài toán dưới dấu căn thức chứa một số hàm có dạng đặc biệt mà khó tính như bình thường được, khi đó ta sẽ nghĩ tới phương pháp lượng giác hóa. Với những dạng sau thì ta sẽ sử dụng phương pháp lượng giác hóa.

- Nếu bài toán có chứa $\sqrt{a^2 - x^2}$ thì ta đặt $x = a \sin t$ hoặc $x = a \cos t$
- Nếu bài toán có chứa $\sqrt{x^2 - a^2}$ thì ta đặt $x = \frac{a}{\sin t}$ hoặc $x = \frac{a}{\cos t}$
- Nếu bài toán có chứa $x^2 + a^2$ hoặc $\sqrt{x^2 + a^2}$ thì ta đặt $x = a \tan t$
- Nếu bài toán có chứa $\sqrt{\frac{x+a}{a-x}}$ thì ta đặt $x = a \cos 2t$
- Nếu bài toán có chứa $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ thì ta đặt $x = a + (b-a) \sin^2 t$

Ví dụ: Tính các tích phân sau:

$$1. I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$2. I = \int_0^1 \frac{dx}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

$$3. I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$4. I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$5. I = \int_0^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{5+x}{5-x}} dx$$

Lời giải

1. Hãy thử đặt bút làm câu này theo cách bình thường xem vấn đề ở đây là gì nhé!

$$\text{Đặt } x = 2 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$$

$$\Rightarrow I = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

$$2. \text{Đặt } x = 2 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos t dt}{\sqrt{(4-4 \sin^2 t)^3}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{4 \cos^2 t} = \frac{1}{4} \tan t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

3. Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$. Ta được:

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{1}{8} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

4. Đặt $x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \cos t dt$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t \cos t dt}{\sqrt{(1 - \sin^2 t)^3}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t dt}{\cos^4 t} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 t d(\tan t) = \frac{1}{3} \tan^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{9\sqrt{3}}$$

5. Đặt $x = 5 \cos 2t \Rightarrow dx = -10 \sin 2t dt$

$$\Rightarrow I = -10 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{5(1 + \cos 2t)}{5(1 - \cos 2t)}} dt = 20 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = \frac{5}{2} (2 - \sqrt{3})$$

7. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Kỹ thuật từng phần là một kỹ thuật khá cơ bản nhưng rất hiệu quả trong các bài toán tính tích phân, ở trong phần này ta sẽ không nhắc lại các bài toán cơ bản nữa mà chỉ đề cập tới một số bài toán nâng cao trong phần này. Trước tiên ta sẽ đi nhắc lại và chứng minh công thức tính nguyên hàm – tích phân từng phần.

Giả sử $u(x), v(x)$ là các hàm liên tục trên miền D khi đó ta có:

$$d(uv) = u dv + v du \Rightarrow \int d(uv) = \int u dv + \int v du$$

$$\Leftrightarrow uv = \int u dv + \int v du \Leftrightarrow \int u dv = uv - \int v du$$

Công thức trên chính là công thức nguyên hàm từng phần. Như vậy ta đã cùng chứng minh công thức tính nguyên hàm từng phần, sau đây cùng đi vào các bài toán cụ thể.

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^3 x f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = 8$ và $f(3) = \ln 3$. Tính $I = \int_0^3 e^{f(x)} dx$.

A. $I = 1$.

B. $I = 11$.

C. $I = 8 - \ln 3$.

D. $I = 8 + \ln 3$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) e^{f(x)} dx \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^{f(x)} \end{cases} \text{ Khi đó } \int_0^3 x f'(x) e^{f(x)} dx = x \cdot e^{f(x)} \Big|_0^3 - \int_0^3 e^{f(x)} dx \\ &\Rightarrow 8 = 3 \cdot e^{f(3)} - \int_0^3 e^{f(x)} dx \Rightarrow \int_0^3 e^{f(x)} dx = 9 - 8 = 1 \end{aligned}$$

Chọn ý A.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, và đồng thời thỏa mãn hai

điều kiện $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \cos^2 x dx = 10$ và $f(0) = 3$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2x dx$ bằng?

A. $I = -13$.

B. $I = -7$.

C. $I = 7$.

D. $I = 13$.

Lời giải

$$\text{Xét } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \cos^2 x dx = 10, \text{ đặt } \begin{cases} u = \cos^2 x \\ dv = f'(x) \cos^2 x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin 2x dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 10 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \cos^2 x dx = \cos^2 x f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2x dx$$

$$\Leftrightarrow 10 = -f(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2x dx \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2x dx = 10 + f(0) = 13$$

Chọn ý D.

Hai ví dụ mở đầu có vẻ vẫn đang chỉ dừng ở mức dễ áp dụng công thức, từ bài thứ 3 trở đi mọi thứ sẽ nâng cao hơn nhiều yêu cầu phải biến đổi và có tư duy hơn trong việc đặt u , dv !

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết

$$f(0) = 1 \text{ và } f(x)f(2-x) = e^{2x^2-4x} \text{ với mọi } x \in [0;2]. \text{ Tính } I = \int_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)} dx$$

A. $I = -\frac{14}{3}$.

B. $I = -\frac{32}{5}$.

C. $I = -\frac{16}{3}$.

D. $I = -\frac{16}{5}$.

Lời giải

Một bài toán vận dụng cao khá là khó, bất giờ ta sẽ đi tìm biểu thức dv , ta có thể dễ dàng

thấy rằng $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$, từ đây ta sẽ giải quyết bài toán như sau.

Từ giả thiết $f(x)f(2-x) = e^{2x^2-4x} \Rightarrow f(2) = 1$

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)} dx \text{ Đặt } \begin{cases} u = x^3-3x^2 \\ dv = \frac{f'(x)}{f(x)} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (3x^2-6x)dx \\ v = \ln|f(x)| \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = (x^3-3x^2)\ln|f(x)| \Big|_0^2 - \int_0^2 (3x^2-6x)\ln|f(x)| dx = -3 \int_0^2 (x^2-2x)\ln|f(x)| dx = -3J$$

$$\text{Ta có } J = \int_0^2 (x^2-2x)\ln|f(x)| dx \stackrel{x=2-t}{=} \int_2^0 [(2-t)^2-2(2-t)]\ln|f(2-t)| d(2-t)$$

$$= \int_2^0 [(2-x)^2-2(2-x)]\ln|f(2-x)| d(2-x) = \int_0^2 (x^2-2x)\ln|f(2-x)| dx$$

$$\Rightarrow 2J = \int_0^2 (x^2-2x)\ln|f(x)| dx + \int_0^2 (x^2-2x)\ln|f(2-x)| dx = \int_0^2 (x^2-2x)\ln|f(x)f(2-x)| dx$$

$$= \int_0^2 (x^2-2x)\ln e^{2x^2-4x} dx = \int_0^2 (x^2-2x)(2x^2-4x) dx = \frac{32}{15} \Rightarrow J = \frac{16}{15}$$

$$\text{Vậy } I = -3J = -\frac{16}{5}.$$

Chọn ý D.

Ví dụ 4: Cho biểu thức $S = \ln \left(1 + \int_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - \sin 2x) e^{2\cot x} dx \right)$ với số thực $m \neq 0$. Chọn khẳng

định đúng trong các khẳng định sau.

A. $S = 5$.

B. $S = 9$.

C. $S = 2 \cot \left(\frac{\pi}{4+m^2} \right) + 2 \ln \left(\sin \frac{\pi}{4+m^2} \right)$.

D. $S = 2 \tan \left(\frac{\pi}{4+m^2} \right) + 2 \ln \left(\frac{\pi}{4+m^2} \right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - \sin 2x) e^{2\cot x} dx = 2 \int_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\cot x} dx - \int_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x e^{2\cot x} dx \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } \int_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x e^{2\cot x} dx &= \int_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\cot x} d(\sin^2 x) = \sin^2 x \cdot e^{2\cot x} \Big|_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \left(-\frac{2}{\sin^2 x} \right) e^{2\cot x} dx \\ &= \sin^2 x \cdot e^{2\cot x} \Big|_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\cot x} dx \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra } I = \sin^2 x \cdot e^{2\cot x} \Big|_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} = -1 + \sin^2 \frac{\pi}{4+m^2} \cdot e^{2\cot \frac{\pi}{4+m^2}}$$

$$\Rightarrow S = \ln \left(\sin^2 \frac{\pi}{4+m^2} \cdot e^{2\cot \frac{\pi}{4+m^2}} \right) = 2 \cot \left(\frac{\pi}{4+m^2} \right) + 2 \ln \left(\sin \frac{\pi}{4+m^2} \right)$$

Chọn ý C.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $\int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 e^x f'(x) dx = \int_0^1 e^x f''(x) dx \neq 0$. Tính $\frac{ef'(1) - f'(0)}{ef(1) - f(0)}$

A. -2

B. -1

C. 2

D. 1

Lời giải

Ta đặt $\int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 e^x f'(x) dx = \int_0^1 e^x f''(x) dx = a$. Sử dụng tích phân từng phần ta có:

$$\begin{cases} a = \int_0^1 e^x d(f'(x)) = e \cdot f'(1) - f'(0) - \int_0^1 e^x f'(x) dx \Rightarrow e \cdot f'(1) - f'(0) = 2a \\ a = \int_0^1 e^x d(f(x)) = e \cdot f(1) - f(0) - \int_0^1 e^x f(x) dx \Rightarrow e \cdot f(1) - f(0) = 2a \end{cases} \Rightarrow \frac{ef'(1) - f'(0)}{ef(1) - f(0)} = 1$$

Chọn ý D.

8. ĐÁNH GIÁ HÀM SỐ ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN

Trong các bài toán tính tích phân ta sẽ gặp phải một số trường hợp tính tích phân hàm cho bởi 2 công thức phải sử dụng đến đánh giá để so sánh 2 biểu thức từ đó chia tích phân cần tính ra thành 2 phần.

Ta xét bài toán tổng quát. Tính tích phân $I = \int_a^b \min(f(x), g(x)) dx$

- Bước 1: Giải phương trình $f(x) = g(x)$
- Bước 2: Xét dấu cho hàm $h(x) = f(x) - g(x)$ trên $[a; b]$
- Bước 3: Chia tích phân cần tính ra thành các tích phân nhỏ.

Chú ý: Yêu cầu bài toán có thể thay min bằng max.

Ví dụ: Tính các tích phân sau:

1. $I = \int_0^2 \min\{x^2, \sqrt{x}\} dx$
2. $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \min\{\tan x, x\} dx$
3. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\{\sin x, \cos x\} dx$
4. $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \min\{\tan x + 2 \sin x, 3x\} dx$
5. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \max\left\{e^x + \cos x, 2 + x - \frac{x^2}{2}\right\} dx$

Lời giải

1. Xét phương trình $x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases}$

Ta thấy rằng khi $\begin{cases} x \in [0; 1] \Rightarrow x^2 \leq \sqrt{x} \Rightarrow \min\{x^2; \sqrt{x}\} = x^2 \\ x \in [1; 2] \Rightarrow x^2 \geq \sqrt{x} \Rightarrow \min\{x^2; \sqrt{x}\} = \sqrt{x} \end{cases}$

Vậy $I = \int_0^2 \min\{x^2, \sqrt{x}\} dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{x} dx = \frac{4\sqrt{2}-1}{3}$

2. Xét hàm số $f(x) = \tan x - x$. Ta có $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \geq 0$. Vậy $f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác ta lại có $f(0) = 0$ nên $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = 0$.

- Nếu $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow \tan x \geq x$
- Nếu $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right] \Rightarrow f(x) \leq f(0) = 0 \Rightarrow \tan x \leq x$

Vậy $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \min\{\tan x, x\} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \tan x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = \frac{\pi^2}{32} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3. Xét phương trình $\sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

- Nếu $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \sin x \leq \cos x$
- Nếu $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin x \geq \cos x$

$$\text{Vậy } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\{\sin x, \cos x\} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \sqrt{2}$$

4. Xét hàm số: $f(x) = \tan x + 2 \sin x - 3x$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 2 \cos x - 3 = \frac{(\cos x - 1)^2 (2 \cos x + 1)}{\cos^2 x} \geq 0 \forall x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$, từ đó suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

$$\Rightarrow I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \min\{\tan x + 2 \sin x, 3x\} dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 (\tan x + 2 \sin x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3x dx = -1 - \ln 2 + \frac{\pi^2}{6}$$

5. Xét hàm số $f(x) = e^x + \cos x - 2 - x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow f'(x) = x + e^x - \sin x - 1 \Rightarrow f''(x) = 1 + e^x + \cos x$

Ta thấy rằng $f''(x) \geq 0 \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow f'(x) \geq f'(0) = 0 \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Mà $f(0) = 0$ nên $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = 0$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

$$\text{Vậy } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^x + \cos x) dx = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + e^{\frac{\pi}{4}}$$

9. KỸ THUẬT THẾ BIẾN - LẤY TÍCH PHÂN 2 VẾ

Kỹ thuật thế biến - lấy tích phân 2 vế được áp dụng cho những bài toán mà giả thiết có dạng tổng của hai hàm số, khi đó ta sẽ lợi dụng mối liên hệ giữa các hàm theo biến số x để thay thế những biểu thức khác sao cho 2 hàm số đó đổi chỗ cho nhau, để rõ hơn ta sẽ cùng tìm hiểu các ví dụ sau.

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$, thỏa mãn điều kiện sau

$$2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{Giá trị của tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{\pi}{5}$

B. $\frac{\pi}{10}$

C. $\frac{\pi}{15}$

D. $\frac{\pi}{20}$

Lời giải

Một bài toán khá hay có 2 cách giải được đưa ra, ta sẽ cùng tiếp cận 2 cách giải sau đây để thấy được nội dung của phương pháp được áp dụng trong phần này!

Cách 1: Lấy tích phân 2 vế.

Lấy tích phân 2 vế cận tự 0 tới 1 giả thiết ta được:

$$\begin{aligned} 2f(x) + 3f(1-x) &= \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \int_0^1 2f(x) dx - 3 \int_0^1 f(1-x) d(1-x) = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \\ \Leftrightarrow 5 \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{20} \end{aligned}$$

Cách 2: Thế biến.

Chú ý vào hai biểu thức $x, 1-x$ bây giờ nếu ta thế x bởi $1-x$ thì ta sẽ được hệ phương trình theo hai biến $f(x), f(1-x)$.

Thế x bởi $1-x$ ta được:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2} \\ 2f(1-x) + 3f(x) = \sqrt{1-(1-x)^2} \end{cases} &\Rightarrow 4f(x) - 9f(x) = 2\sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{-x^2+2x} \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{2\sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{-x^2+2x}}{-5} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{20} \end{aligned}$$

Chọn ý D.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ và thỏa mãn $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Tính tích

phân $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx$

A. $I = \frac{1}{2}$

B. $I = \frac{3}{2}$

C. $I = \frac{5}{2}$

D. $I = \frac{7}{2}$

Lời giải

Từ giả thiết, thay x bằng $\frac{1}{x}$ ta được $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x}$

$$\text{Do đó ta có hệ } \begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \\ 4f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{x} - x$$

$$\text{Khi đó } I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{2}{x^2} - 1\right) dx = \left(-\frac{2}{x} - x\right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{3}{2}$$

Chọn ý B.

Cách khác. Từ $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \Rightarrow f(x) = 3x - 2f\left(\frac{1}{x}\right)$

Khi đó $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(3 - 2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \right) dx = 3 \int_{\frac{1}{2}}^2 dx - 2 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx$. Xét $J = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx$ Đặt $t = \frac{1}{x}$ suy

$$\text{ra } dt = -\frac{1}{x^2} dx = -t^2 dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \rightarrow t = 2 \\ x = 2 \rightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ Khi đó } J = \int_2^{\frac{1}{2}} t f(t) \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = I$$

$$\text{Vậy } I = 3 \int_{\frac{1}{2}}^2 dx - 2I \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^2 dx = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$

Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = \frac{3}{5}$.

C. $I = \frac{2}{3}$.

D. $I = \frac{4}{3}$.

Lời giải

Từ giả thiết, thay x bằng $1-x$ ta được:

$$\begin{aligned} (1-x)^2 f(1-x) + f(x) &= 2(1-x) - (1-x)^4 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)f(1-x) + f(x) &= 1 + 2x - 6x^2 + 4x^3 - x^4. \end{aligned}$$

Ta có $x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4 \Rightarrow f(1-x) = 2x - x^4 - x^2 f(x)$.

Thay vào (1) ta được: $(x^2 - 2x + 1)[2x - x^4 - x^2 f(x)] + f(x) = 1 + 2x - 6x^2 + 4x^3 - x^4$

$$\Leftrightarrow (1 - x^2 + 2x^3 - x^4)f(x) = x^6 - 2x^5 + 2x^3 - 2x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (1 - x^2 + 2x^3 - x^4)f(x) = (1 - x^2)(1 - x^2 + 2x^3 - x^4) \Rightarrow f(x) = 1 - x^2$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1 - x^2) dx = \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Chọn ý C.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2}$

Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$.

A. $I = -\frac{\pi}{10}$.

B. $I = -\frac{\pi}{20}$.

C. $I = \frac{\pi}{20}$.

D. $I = \frac{\pi}{10}$.

Lời giải

Từ giả thiết, thay x bằng $-x$ ta được $2f(-x) + 3f(x) = \frac{1}{4+x^2}$

Do đó ta có hệ
$$\begin{cases} 2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2} \\ 2f(-x) + 3f(x) = \frac{1}{4+x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) + 6f(-x) = \frac{2}{4+x^2} \\ 9f(x) + 6f(-x) = \frac{3}{4+x^2} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{5(4+x^2)}$$

Khi đó $I = \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{5} \int_{-2}^2 \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{\pi}{20}$

Chọn ý C.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn $2f(x) + f(-x) = \cos x$

Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

A. $I = -2$.

B. $I = \frac{2}{3}$.

C. $I = \frac{3}{2}$.

D. $I = 2$.

Lời giải

Từ giả thiết, thay x bằng $-x$ ta được $2f(-x) + f(x) = \cos x$.

Do đó ta có hệ
$$\begin{cases} 2f(x) + f(-x) = \cos x \\ 2f(-x) + f(x) = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) + 2f(-x) = 2\cos x \\ f(x) + 2f(-x) = \cos x \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}\cos x.$$

Khi đó $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{1}{3} \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$

Chọn ý B.

10. TÍCH PHÂN HÀM CHO BỞI 2 CÔNG THỨC

Ta hiểu nôm na tích phân hàm phân nhánh tức là các phép tính tích phân những hàm cho bởi hai công thức, đây là một vấn đề dễ không có gì khó khăn cả nếu đã từng gặp và biết phương pháp làm.

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{khi } x \geq 0 \\ e^{2x} & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$

A. $I = \frac{3e^2 - 1}{2e^2}$.

B. $I = \frac{7e^2 + 1}{2e^2}$.

C. $I = \frac{9e^2 - 1}{2e^2}$.

D. $I = \frac{11e^2 - 11}{2e^2}$.

Lời giải

Chú ý là đây là hàm cho bởi 2 công thức nên ta sẽ tách tích phân cần tính ra thành 2 tích phân khác

Ta có $I = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 e^{2x} dx + \int_0^2 (x+1) dx = \frac{9e^2 - 1}{2e^2}$

Chọn ý C.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, thỏa $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$.

Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

- A. $\ln 15$ B. $2 + \ln 15$ C. $3 + \ln 15$ D. $4 + \ln 15$

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{2}{2x-1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{2}{2x-1} dx = \ln|2x-1| + C = \begin{cases} \ln(1-2x) + C_1 & ; x < \frac{1}{2} \\ \ln(2x-1) + C_2 & ; x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tới đây ta xét 2 trường hợp:

- Nếu $f(0) = 1 \Rightarrow \ln(1-2 \cdot 0) + C_1 = 1 \rightarrow C_1 = 1$.
- Nếu $f(1) = 2 \Rightarrow \ln(2 \cdot 1 - 1) + C_2 = 2 \rightarrow C_2 = 2$.

$$\text{Do đó } f(x) = \begin{cases} \ln(1-2x) + 1 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \\ \ln(2x-1) + 2 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(-1) = \ln 3 + 1 \\ f(3) = \ln 5 + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(-1) + f(3) = 3 + \ln 5 + \ln 3 = 3 + \ln 15$$

Chọn ý C.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$,

$f(-3) - f(3) = 0$ và $f(0) = \frac{1}{3}$ Giá trị biểu thức $f(-4) + f(-1) - f(4)$ bằng

- A. $\frac{1}{3} \ln 20 + \frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$ C. $\ln 80 + 1$ D. $\frac{1}{3} \ln \frac{8}{5} + 1$

Lời giải

Tương tự như những bài trên, đây là bài toán cũng yêu cầu tính tích phân hàm cho bởi 2 công thức, chỉ có điều bài toán này có tới 3 hàm thì ta vẫn xử lý tương tự như bài trước thôi!

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx = \begin{cases} \frac{1}{3} (\ln(1-x) - \ln(-x-2)) + C_1 & ; x < -2 \\ \frac{1}{3} (\ln(1-x) - \ln(x+2)) + C_2 & ; -2 < x < 1 \\ \frac{1}{3} (\ln(x-1) - \ln(x+2)) + C_3 & ; x > 1 \end{cases}$$

Xét 2 trường hợp:

- Nếu $f(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} (\ln(1-0) - \ln(0+2)) + C_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$.

- Nếu $f(-3) - f(3) = 0 \Rightarrow C_1 - C_3 = \frac{1}{3} \ln \frac{1}{10}$.

Ta có $f(-4) + f(-1) - f(4) = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2} + \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} + C_2 + C_1 - C_3 = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$

Chọn ý B.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(0; +\infty) \setminus \{e\}$, thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$,

$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6$ và $f(e^2) = 3$ Giá trị biểu thức $f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3)$ bằng?

A. $3(\ln 2 + 1)$

B. $2 \ln 2$

C. $3 \ln 2 + 1$

D. $\ln 2 + 3$

Lời giải

Theo giả thiết ta có $f'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$ từ đây suy ra

$$\Rightarrow f(x) = \int \frac{1}{x(\ln x - 1)} dx = \int \frac{d(\ln x - 1)}{(\ln x - 1)} = \ln |\ln x - 1| + C = \begin{cases} \ln(1 - \ln x) + C_1 & \text{khi } x \in (0; e) \\ \ln(\ln x - 1) + C_2 & \text{khi } x \in (e; +\infty) \end{cases}$$

Ta xét 2 trường hợp:

- $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6 \Rightarrow \ln\left(1 - \ln \frac{1}{e^2}\right) + C_1 = \ln 6 \Rightarrow C_1 = \ln 2$
- $f(e^2) = 3 \Rightarrow \ln(\ln e^2 - 1) + C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = 3$

Do đó $f(x) = \begin{cases} \ln(1 - \ln x) + \ln 2 & \text{khi } x \in (0; e) \\ \ln(\ln x - 1) + 3 & \text{khi } x \in (e; +\infty) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{e}\right) = \ln 2 + \ln 2 \\ f(e^3) = \ln 2 + 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3) = 3(\ln 2 + 1)$$

Chọn ý C.

Ví dụ 5: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{1 + \sin 2x}$ với điều kiện:

$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Biết $F(0) = 1$, $F(\pi) = 0$, tính $P = F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

A. $P = 0$

B. $P = 2 - \sqrt{3}$

C. $P = 1$

D. Không $\exists$

Lời giải

Với $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ ta có:

$$F(x) = \int \frac{dx}{1 + \sin 2x} = \int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \int \frac{dx}{2 \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2} \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

Ta xét 2 trường hợp sau:

- Ta có $0; -\frac{\pi}{12} \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ nên:

$$F(0) - F\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{-\frac{\pi}{12}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{F(0)=1} F\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Ta có $\pi; \frac{11\pi}{12} \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right)$ nên:

$$F(\pi) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{F(\pi)=0} F\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $P = F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 1$

Chọn ý C.

11. TÍCH PHÂN HÀM ẨN

Những bài toán tích phân trong phần này không khó, tất cả được che giấu dưới một lớp các ẩn số, việc làm của chúng ta là phát hiện ra được cách đặt ẩn để đưa tất cả về dạng chuẩn thì bài toán sẽ được giải quyết hoàn toàn.

Ví dụ 1: Cho $\int_0^{2017} f(x) dx = 2$. Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{e^{2017}-1}} \frac{x}{x^2+1} \cdot f[\ln(x^2+1)] dx$.

A. $I = 1$

B. $I = 2$

C. $I = 4$

D. $I = 5$

Lời giải

Thoạt nhìn thì có lẽ tương đối khủng, nhưng tuy nhiên bằng cách đặt ẩn phụ thì bài toán này trở nên vô cùng đơn giản.

Đặt $t = \ln(x^2 + 1)$, suy ra $dt = \frac{2x dx}{x^2 + 1} \Rightarrow \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{dt}{2}$

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \sqrt{e^{2017} - 1} \rightarrow t = 2017 \end{cases}$

Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_0^{2017} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2017} f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

Chọn ý A.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2$. Tính

tích phân $I = \int_0^3 f(x) dx$.

A. $I = 2$.

B. $I = 6$.

C. $I = 4$.

D. $I = 10$.

Lời giải

Ở đây có 2 giả thiết cần biến đổi để đưa về tích phân liên quan tới hàm $f(x)$.

- Xét $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$. Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t dt = dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x=1 \rightarrow t=1 \\ x=9 \rightarrow t=3 \end{cases}$ Suy ra $\Rightarrow 4 = \int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^3 f(t) 2dt \Rightarrow \int_1^3 f(t) dt = 2$.

- Xét $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2$ Đặt $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \rightarrow u=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow u=1 \end{cases}$. Suy ra $2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = \int_0^1 f(t) dt$

Vậy $I = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 4$.

Chọn ý C.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4, \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = 6$.

B. $I = 2$.

C. $I = 3$.

D. $I = 1$.

Lời giải

Xét tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$. Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (\tan^2 x + 1) dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{4} \rightarrow t=1 \end{cases} \Rightarrow 4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = \int_0^1 \frac{f(t)}{t^2 + 1} dt = \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx$

Từ đó suy ra $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx + \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 4 + 2 = 6$

Chọn ý A.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 1, \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$.

A. $I = 1$.

B. $I = 2$.

C. $I = 3$.

D. $I = 4$.

Lời giải

- Xét $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 1$.

$$\text{Đặt } t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -2 \sin x \cdot \cos x dx = -2 \cos^2 x \cdot \tan x dx = -2t \cdot \tan x dx \Rightarrow \tan x dx = -\frac{dt}{2t}$$

$$\text{Khi đó } 1 = A = -\frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx = 2$$

- Xét $B = \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 1$

$$\text{Đặt } u = \ln^2 x \Rightarrow du = \frac{2 \ln x}{x} dx = \frac{2 \ln^2 x}{x \ln x} dx = \frac{2u}{x \ln x} dx \Rightarrow \frac{dx}{x \ln x} = \frac{du}{2u}$$

$$\text{Khi đó } 1 = B = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{f(u)}{u} du = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx = 2$$

- Xét tích phân cần tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$

$$\text{Đặt } v = 2x \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(v)}{v} dv = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx + \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx = 2 + 2 = 4.$$

Chọn ý D.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x^5 + 4x + 3) = 2x + 1 \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_{-2}^8 f(x) dx$.

A. $\frac{32}{3}$

B. 10

C. 72

D. 2

Lời giải

Vấn đề ở câu này nằm ở giả thiết, vậy làm sao để sử dụng giả thiết để tính được tích phân mà đề bài yêu cầu đây? Ý tưởng rất đơn giản đó là đặt $x = t^5 + 4t + 3$.

Đặt $x = t^5 + 4t + 3 \Rightarrow dx = (5t^4 + 4)dt$ khi đó ta được:

$$\int_{-2}^8 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(t^5 + 4t + 3)(5t^4 + 4) dt = \int_{-1}^1 (2t + 1)(5t^4 + 4) dt = 10$$

Chọn ý B.

12. TÍCH PHÂN ĐỔI CẬN - ĐỔI BIẾN

Các bài toán tích phân đổi biến đổi cận là các bài toán tương đối hay, xuất hiện thường xuyên trong các đề thi thử và đề thi THPT Quốc Gia. Để làm tốt dạng này ta cần phải nhớ những kiến thức sau:

Tính chất 1. Cho tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$.

- Đặt $x = a + b - t \Rightarrow dx = -dt \Rightarrow I = \int_a^b f(a + b - x) dx = \int_a^b f(x) dx$

- Với 2 số m, n ta luôn có $I = \frac{1}{m+n} \int_a^b (m \cdot f(x) + n \cdot f(a + b - x)) dx$

Tính chất 2. Nếu $f(x)$ là hàm chẵn thì ta có:

- $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$
- $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx = 2\int_{-a}^0 f(x)dx$
- $I = \int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^x + 1} dx = \int_{-a}^a \frac{f(-x)}{b^{-x} + 1} dx = \int_{-a}^a \frac{b^x \cdot f(x)}{b^x + 1} dx \Rightarrow 2I = \int_{-a}^a f(x)dx$

Chứng minh

Ở đây sẽ chứng minh một tính chất tiêu biểu, các tính chất còn lại sẽ chứng minh tương tự.

Ta chứng minh: $I = \int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^x + 1} dx = \int_{-a}^a \frac{f(-x)}{b^{-x} + 1} dx = \int_{-a}^a \frac{b^x \cdot f(x)}{b^x + 1} dx \Rightarrow 2I = \int_{-a}^a f(x)dx$

Do $f(x)$ là hàm chẵn nên ta luôn có $f(x) = f(-x)$

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt \Rightarrow I = -\int_a^{-a} \frac{f(-t)}{b^{-t} + 1} d(t) = \int_{-a}^a \frac{b^t \cdot f(t)}{b^t + 1} dt = I = \int_{-a}^a \frac{b^x \cdot f(x)}{b^x + 1} dx$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh!

Tính chất 3. Nếu $f(x)$ là hàm lẻ thì ta có:

- $\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$
- $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Tính chất này chứng minh tương tự như với hàm chẵn!

Tính chất 4. Nếu $f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kì T , $f(x+T) = f(x)$ thì ta có:

- $\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx$
- $\int_0^{nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx$

Tính chất 5. Kỹ thuật xử lý một số bài toán sử dụng tính chất $\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Cách làm chung cho những bài thuộc dạng này đó là:

Viết 2 lần giả thiết $\begin{cases} I = \int_a^b f(x)dx \\ I = \int_a^b f(a+b-x)dx \end{cases} \Rightarrow 2I = \int_a^b (f(x) + f(a+b-x))dx$

Với cách làm này ta sẽ có cách giải quyết tổng quát rất nhanh những bài toán có dạng mà

giả thiết cho $f(x)f(a+b-x) = c > 0$. Khi đó ta có tính chất sau: $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{c+f(x)}} dx = \frac{b-a}{2\sqrt{c}}$

Chứng minh

Ta viết lại 2 lần giả thiết như sau:

$$\begin{cases} I = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{c} + f(x)} dx \\ I = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{c} + f(a+b-x)} dx \end{cases} \Rightarrow 2I = \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{c} + f(x)} + \frac{1}{\sqrt{c} + f(a+b-x)} \right) dx$$

Ta có:

$$g(x) = \frac{2\sqrt{c} + f(x) + f(a+b-x)}{c + \sqrt{c}(f(x) + f(a+b-x)) + f(x)f(a+b-x)} = \frac{2\sqrt{c} + f(x) + f(a+b-x)}{c + \sqrt{c}(f(x) + f(a+b-x)) + c} = \frac{1}{\sqrt{c}}$$

$$\Rightarrow 2I = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{c}} dx \Rightarrow I = \frac{b-a}{2\sqrt{c}} - \text{điều phải chứng minh}$$

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}$ với mọi

$x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$

A. $I = -6$

B. $I = 0$

C. $I = -2$

D. $I = 6$

Lời giải

Giả thiết có tổng nên gợi ý ngay đến sử dụng tính chất 1. Ta có:

$$I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{1+1} \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (f(x) + f(-x)) dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos 2x} dx = 6$$

Chọn ý D.

Ví dụ 2: Có bao nhiêu số thực $a \in [-2017; 2017]$ thỏa mãn $\int_{-a}^a \frac{\cos x}{2018^x + 1} dx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A. 1284

B. 1285

C. 1286

D. 1287

Lời giải

Bài này chính là tính chất 2! Áp dụng tính chất 2 ta có:

$$\int_{-a}^a \frac{\cos x}{2018^x + 1} dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \int_{-a}^a \cos x dx = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin a = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ a = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{R})$$

- Nếu $a = \frac{\pi}{3} + k2\pi \Rightarrow -321 \leq k \leq 320$
- Nếu $a = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Rightarrow -321 \leq k \leq 320$

Vậy có 1284 số a thỏa mãn yêu cầu.

Chọn ý A.

Ví dụ 3: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = f(x+4) \forall x \in \mathbb{R}, \int_0^4 f(x) dx = 1$ và

$$\int_1^2 f(3x+5) dx = 12. \text{ Tính } \int_0^7 f(x) dx.$$

A. 35

B. 36

C. 37

D. 38

Lời giải

Nhìn qua ta nhận thấy ngay dấu hiệu của hàm tuần hoàn, tuy nhiên phải xử lý giả thiết thứ 2 đã!

$$\text{Ta có: } \int_1^2 f(3x+5) dx = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_1^2 f(3x+5) d(3x+5) = 12 \Leftrightarrow \int_8^{11} f(x) dx = 36$$

Áp dụng tính chất thứ 3 của hàm tuần hoàn $\int_a^b f(x) dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x) dx$ ta có:

$$\int_0^7 f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx + \int_4^7 f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx + \int_{4+4}^{7+4} f(x) dx = 37$$

Chọn ý C.

Ví dụ 4: Cho $a+b=2018$ và $I = \int_a^b \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{2018-x}} dx = 10$. Tính $J = \int_a^b \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) dx$.

A. $-\frac{9}{2\pi}$

B. $-\frac{9}{3\pi}$

C. $-\frac{9}{\pi}$

D. $-\frac{8}{\pi}$

Lời giải

Đây là bài toán có giả thiết $a+b=2018$ và tích phân các cận từ a tới b nên ta sẽ chú ý đến tính chất thứ 5.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{2018-x}} \Rightarrow f(2018-x) = \frac{\sqrt{2018-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{2018-x}}$$

Theo cách làm của tính chất 5 ta có:

$$2I = \int_a^b (f(x) + f(2018-x)) dx = 2 \int_a^b dx = 10 \Leftrightarrow a-b = -20$$

$$\text{Kết hợp với giả thiết ta giải ra được } \begin{cases} a=999 \\ b=1019 \end{cases} \Rightarrow J = \int_a^b \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) dx = \int_{999}^{1019} \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) dx = -\frac{9}{2\pi}$$

Chọn ý A.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ thỏa mãn $f(x) = f(2-x), \int_0^2 f(x) dx = 10$.

$$\text{Tính } \int_0^2 (x^3 - 3x^2) f(x) dx$$

A. -40

B. 20

C. 40

D. -20

Lời giải

Vẫn là ý tưởng cũ dạng toán cũ sử dụng đến tính chất 5.

Ta có:

$$\begin{cases} I = \int_0^2 (x^3 - 3x^2) f(x) dx \\ I = \int_0^2 ((2-x)^3 - 3(2-x)^2) f(2-x) dx \end{cases} \Rightarrow 2I = -4 \int_0^2 f(x) dx = -40 \Rightarrow I = -20$$

Chọn ý D.

13. TÍCH PHÂN CÓ CẬN THAY ĐỔI

Nếu như bình thường ta hay xét với những bài tích phân có cận là các hằng số cố định thì trong phần này ta sẽ cùng tìm hiểu các bài toán có cận là các hàm theo biến x . Trước tiên để làm được những bài toán này ta cần nhớ kiến thức sau:

Định lý: Nếu $f(x)$ là hàm khả tích trên $[a; b]$, liên tục tại mọi $x \in [a; b]$ thì hàm số $F(x)$ xác định bởi $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ khả vi tại x và $F'(x) = f(x)$.

Tổng quát ta có $F'(x) = \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt \right)' = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$

Phương pháp chung: Để giải những bài toán ở phần này tất cả đều theo 2 bước chính:

- Bước 1: Đạo hàm giả thiết
- Bước 2: Biến đổi kết quả của đạo hàm để suy ra yêu cầu của bài toán.

Sau đây là những ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3x^5 + 96 = \int_a^x f(t)dt$. Tìm a ?

A. -96

B. -2

C. 4

D. 15

Lời giải

Những ai lần đầu gặp bài này ắt hẳn sẽ rất khó khăn, tuy nhiên ta đã có phương pháp rồi do đó sẽ bám sát nó!

Lấy đạo hàm hai vế ta được $15x^4 = f(x)$

Từ đây suy ra $3x^5 + 96 = \int_a^x 15x^4 dt = 3t^5 \Big|_a^x = 3(x^5 - a^5) \Rightarrow a = -2$

Chọn ý B.

Ví dụ 2: Cho $[f(x)]^3 = \int_0^x ([f(t)]^3 - [f'(t)]^3 + 3f(t)[f'(t)]^2) dt + 2018$. Tính $f(1)$.

A. 2018e

B. -2018e

C. $\sqrt[3]{2018e}$

D. $-\sqrt[3]{2018e}$

Lời giải

Lấy đạo hàm 2 vế ta được

$$\begin{aligned} [f(x)]^3 &= [f(x)]^3 - [f'(x)]^3 + 3f(x)[f'(x)]^2 \\ \Leftrightarrow (f(x) - f'(x))^3 &= 0 \Leftrightarrow f(x) = f'(x) \Rightarrow f(x) = ce^x \end{aligned}$$

Thay vào giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} (ce^x)^3 &= \int_0^x ((ce^t)^3 - (ce^t)^3 + 3ce^t (ce^t)^2) dt + 2018 \\ \Leftrightarrow (ce^x)^3 &= \int_0^x (3c^3 e^{3t}) dt + 2018 = 3c^3 \cdot \frac{e^{3t}}{3} \Big|_0^x + 2018 \\ \Rightarrow c &= \sqrt[3]{2018} \Rightarrow f(1) = e\sqrt[3]{2018} \end{aligned}$$

Chú ý:

- Ở lời giải trên có chỗ $f(x) = f'(x) \Rightarrow f(x) = ce^x$ vấn đề này ta sẽ được tìm hiểu ở phần sau!
- Bước tìm hằng số c ở đoạn sau chú ý là ta đang coi x cố định để tính tích phân cho ra một hàm theo biến x .

Chọn ý C.

Ví dụ 3: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^{2018} + 1}} dt > 0$

A. $(-\infty; +\infty)$

B. $(-\infty; 0)$

C. $(-\infty; +\infty) \setminus \{0\}$

D. $(0; +\infty)$

Lời giải

$$\text{Đặt } f(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^{2018} + 1}} dt \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^{2018} + 1}}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta suy ra được $x \in (-\infty; +\infty) \setminus \{0\}$.

Chọn ý C.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x) > 0$ xác định và có đạo hàm trên đoạn $[0; 1]$, thỏa mãn đồng

$$\text{thời điều kiện } \begin{cases} g(x) = 1 + 2018 \int_0^x f(t) dt \\ g(x) = f^2(x) \end{cases}. \text{ Tính } I = \int_0^1 \sqrt{g(x)} dx$$

A. $I = \frac{1009}{2}$.

B. $I = 505$.

C. $I = \frac{1011}{2}$.

D. $I = \frac{2019}{2}$.

Lời giải

Theo cách làm chung thì ta vẫn đi lấy đạo hàm hai vế!

$$\text{Từ giả thiết, ta có } \begin{cases} g'(x) = 2018f(x) \\ g'(x) = 2f'(x).f(x) \end{cases} \Rightarrow 2018f(x) = 2f'(x).f(x)$$

$$\Leftrightarrow 2f(x)[1009 - f'(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \text{ (L)} \\ f'(x) = 1009 \Rightarrow f(x) = 1009x + C \end{cases}$$

Thay ngược lại, ta được $1 + 2018 \int_0^x (1009t + C) dt = (1009x + C)^2$

$$\Leftrightarrow 1 + 2018 \left(\frac{1009}{2} t^2 + Ct \right) \Big|_0^x = (1009x + C)^2 \Leftrightarrow C^2 = 1.$$

Suy ra $f(x) = 1009x + 1$ hoặc $f(x) = 1009x - 1$ (loại vì $f(x) = 1009x - 1$).

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 \sqrt{g(x)} dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1009x + 1) dx = \frac{1011}{2}$$

Chọn ý C.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn

$f^2(x) \leq 1 + 3 \int_0^x f(t) dt = g(x)$ với mọi $x \in [0;1]$, tích phân $\int_0^1 \sqrt{g(x)} dx$ có giá trị lớn nhất là?

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{7}{4}$.

C. $\frac{9}{5}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết $g(x) = 1 + 3 \int_0^x f(t) dt$ ta có $\begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(x) = 3f(x) \end{cases}$ và $g(x) > 0, \forall x \in [0;1]$.

Theo giả thiết $g(x) \geq f^2(x) \Rightarrow g(x) \geq \frac{[g'(x)]^2}{9} \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} \leq \frac{3}{2}$.

Lấy tích phân cận từ $0 \rightarrow t$ ta được:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} dx &\leq \int_0^t \frac{3}{2} dx \Leftrightarrow \sqrt{g(x)} \Big|_0^t \leq \frac{3}{2} x \Big|_0^t \\ \Leftrightarrow \sqrt{g(t)} - \sqrt{g(0)} &\leq \frac{3}{2} t \Leftrightarrow \sqrt{g(t)} \leq \frac{3}{2} t + 1. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 \sqrt{g(x)} dx \leq \int_0^1 \left(\frac{3}{2} x + 1 \right) dx = \frac{7}{4}$$

Chọn ý B.

14. BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI $F'(x)$ VÀ $F(x)$

Trong phần này ta sẽ cùng nhau tìm hiểu về một lớp bài toán liên quan tới quan hệ của hai hàm $f'(x), f(x)$, đây là một dạng đã xuất hiện trong đề thi THPT Quốc Gia 2018 của Bộ

GD&ĐT và trong rất nhiều đề thi thử của các trường chuyên, ta sẽ cùng bắt đầu tìm hiểu vấn đề này ngay sau đây.

1. BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI TÍCH.

Ta sẽ bắt gặp các bài toán có dạng $f'(x) = g(x) \cdot h(f(x))$, với $g(x)$ là hàm theo biến x thì khi gặp những bài toán này cách làm chung của ta sẽ là lấy nguyên hàm 2 vế, cụ thể:

$$f'(x) = g(x) \cdot h(f(x)) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{h(f(x))} = g(x) \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{h(f(x))} dx = \int g(x) dx$$

Hoặc có thể lấy tích phân 2 vế, đến đây thì tùy thuộc vào yêu cầu và giả thiết của bài toán thì ta có thể suy ra kết quả cần tính.

Để cùng hiểu rõ hơn ta sẽ bắt đầu với những ví dụ sau:

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3 (f(x))^2 \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng?

A. $-\frac{41}{100}$

B. $-\frac{1}{10}$

C. $-\frac{391}{400}$

D. $-\frac{1}{40}$

Đề thi THPT Quốc Gia 2018

Lời giải

Phân tích: Nếu ban đầu gặp dạng này thì có lẽ ta sẽ không biết cách xử lý thế nào, tuy nhiên bám sát vào bài toán tổng quát ta sẽ có hướng làm như sau:

Giả thiết tương đương với: $f'(x) = 4x^3 (f(x))^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{(f(x))^2} = 4x^3$.

Đến đây ta sẽ lấy nguyên hàm hay tích phân? Chú ý là với những bài toán bất tính giá trị của hàm số tại một điểm nào đó mà giả thiết đã cho giá trị của hàm tại một điểm nào đó có giá trị xác định thì ta sẽ lấy tích phân hai vế. Lấy tích phân cận từ 1 đến 2 cả 2 vế ta được:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{(f(x))^2} = 4x^3 &\Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{(f(x))^2} dx = \int_1^2 4x^3 dx = 15 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_1^2 &= 15 \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = 15 \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{10} \end{aligned}$$

Chọn ý B.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 2$ và $[f(x)]^4 [f'(x)]^2 (x^2 + 1) = 1 + [f(x)]^3 \forall x \in [0;1]$. Biết rằng $f'(x) \geq 0, f(x) > 0 \forall x \in [0;1]$. Mệnh

đề nào dưới đây đúng?

A. $2 < f(1) < 3$

B. $3 < f(1) < 4$

C. $4 < f(1) < 5$

D. $5 < f(1) < 6$

Đề thi thử chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi

Lời giải

Vẫn là ý tưởng đó nhưng có vẻ đã được tác giả chôn giấu kỹ hơn!

Ta bám sát bài toán tổng quát, chú ý với bài toán tổng quát thì $f'(x)$ chỉ ở bậc 1 vậy làm sao để đưa về bậc 1 bây giờ? Rất đơn giản thôi ta sẽ lấy căn hai vế!

Ta có:

$$\begin{aligned} f'(x)f^2(x)\sqrt{x^2+1} &= \sqrt{1+f^3(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)f^2(x)}{\sqrt{1+f^3(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ \Rightarrow \int_0^1 \frac{f'(x)f^2(x)}{\sqrt{1+f^3(x)}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{d(1+f^3(x))}{\sqrt{1+f^3(x)}} dx &= \ln(1+\sqrt{2}) \Leftrightarrow \frac{2}{3} \sqrt{1+f^3(x)} \Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} (\sqrt{1+f^3(1)} - \sqrt{1+2^3}) &= \ln(1+\sqrt{2}) \Rightarrow f(1) = 2.6051... \end{aligned}$$

Chọn ý A.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên $[1; +\infty)$, thỏa $f(1) = 0$, $e^{2f(x)} \cdot [f'(x)]^2 = 4x^2 - 4x + 1$ với mọi $x \in [1; +\infty)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $-1 < f'(4) < 0$.

B. $0 < f'(4) < 1$.

C. $1 < f'(4) < 2$.

D. $2 < f'(4) < 3$.

Lời giải

Câu này thoát nhìn có vẻ thấy khá khó khăn nhưng vẫn ý tưởng giống bài của chuyên Lê Khiết thôi ta sẽ lấy căn hai vế!

Lấy căn hai vế ta được $e^{f(x)} f'(x) = 2x - 1$ do $f'(x)$ không âm trên $[1; +\infty)$

$$\Rightarrow \int e^{f(x)} f'(x) dx = \int (2x - 1) dx \Leftrightarrow e^{f(x)} = x^2 - x + C.$$

Thay $x = 1$ vào hai vế, ta được $e^{f(1)} = 1^2 - 1 + C \Rightarrow C = 1$.

$$\text{Suy ra } e^{f(x)} = x^2 - x + 1 \Rightarrow f(x) = \ln(x^2 - x + 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} \Rightarrow f'(4) = \frac{7}{13}.$$

Chọn ý B.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên $[0; 1]$, thỏa mãn $f'(0) = -1$ và

$$\begin{cases} [f'(x)]^2 = f''(x) \\ f'(x) \neq 0 \end{cases} \text{ với mọi } x \in [0; 1]. \text{ Đặt } P = f(1) - f(0), \text{ khẳng định nào sau đây đúng?}$$

A. $-2 \leq P \leq -1$.

B. $-1 \leq P \leq 0$.

C. $0 \leq P \leq 1$.

D. $1 \leq P \leq 2$.

Lời giải

Ta đã nhìn thấy chút bóng dáng của $P = \int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0)$ nên ta cần tìm $f'(x)$.

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 \Rightarrow \int \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} dx = x \Leftrightarrow -\frac{1}{f'(x)} = x + C \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x+C}$$

Mà $f'(0) = -1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x+1}$. Vậy $P = \int_0^1 f'(x)dx = -\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = -\ln 2 \approx -0,69$.

Chọn ý B.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(3-x) \cdot f(x) = 1 \\ f(x) \neq -1 \end{cases}$ với mọi

$x \in [0;3]$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Tính tích phân $I = \int_0^3 \frac{xf'(x)}{[1+f(3-x)]^2 \cdot f^2(x)} dx$

A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{3}{2}$.

D. $I = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết $\begin{cases} f(3-x) \cdot f(x) = 1 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(3) = 2$.

Do $f(3-x)f(x) = 1 \Rightarrow [1+f(3-x)]^2 \cdot f^2(x) = [1+f(x)]^2$.

Khi đó ta được:

$$I = \int_0^3 \frac{xf'(x)}{[1+f(x)]^2} dx = -\int_0^3 x d\left(\frac{1}{1+f(x)}\right) = -\frac{x}{1+f(x)} \Big|_0^3 + \int_0^3 \frac{1}{1+f(x)} dx = -1 + J.$$

Tính $J = \int_0^3 \frac{1}{1+f(x)} dx \stackrel{t=3-x}{=} -\int_3^0 \frac{1}{1+f(3-t)} dt = \int_0^3 \frac{1}{1+f(3-t)} dt = \int_0^3 \frac{1}{1+f(3-x)} dx$.

Suy ra $2J = \int_0^3 \frac{1}{1+f(x)} dx + \int_0^3 \frac{1}{1+f(3-x)} dx \stackrel{f(3-x) \cdot f(x)=1}{=} \int_0^3 1 dx = 3 \Rightarrow J = \frac{3}{2}$. Vậy $I = \frac{1}{2}$.

Chọn ý A.

Tóm lại: Qua 5 ví dụ vừa rồi ta đã làm quen được với dạng toán có $f'(x), f(x)$ và đã tìm hiểu qua cách giải của các bài toán này, những thứ ta cần phải chú ý đó là:

- Chuyển $f'(x)$ và hàm theo biến $f(x)$ sang một bên, chú ý $f'(x)$ phải luôn bậc nhất
- Lấy nguyên hàm hoặc tích phân tùy thuộc vào đề bài

- Ngoài ra có thể nhớ nhanh kết quả sau: $f'(x) = kf(x) \Rightarrow f(x) = Ce^{kx}$

2. BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI TỔNG.

Xét bài toán tổng quát sau: $f'(x) + k(x)f(x) = g(x)$. Gọi $G(x) = \int g(x)dx$ với $G(x)$ là một họ nguyên hàm của $g(x)$. Nhân cả hai vế với $e^{G(x)}$ ta được:

$$\begin{aligned} e^{G(x)}f'(x) + g(x).e^{G(x)}f(x) &= k(x)e^{G(x)}f(x) \\ \Leftrightarrow (e^{G(x)}f(x))' &= k(x)e^{G(x)} \Rightarrow f(x) = e^{-G(x)} \int k(x)e^{G(x)}dx \end{aligned}$$

Ngoài ra còn một số dạng nữa ta sẽ tìm hiểu trong các ví dụ.

Ta sẽ cùng giải quyết dạng toán này thông qua các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$, thỏa mãn $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ và $f(1) = -2\ln 2$. Biết $f(2) = a + b\ln 3$ với $a, b \in \mathbb{Q}$, tính $P = a^2 + b^2$.

A. $P = \frac{1}{2}$.

B. $P = \frac{3}{4}$.

C. $P = \frac{13}{4}$.

D. $P = \frac{9}{2}$.

Lời giải

Theo như bài toán tổng quát thì $f'(x)$ đang độc lập thế nên ở bài toán này ta cũng cần phải độc lập $f'(x)$. Biến đổi giả thiết ta được

$$x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow f'(x) + \frac{1}{x(x+1)}f(x) = 1$$

Ta có: $\int \frac{1}{x(x+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)dx = \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) \Rightarrow e^{\ln \left(\frac{x}{x+1} \right)} = \frac{x}{x+1}$

Nhân cả hai vế với $\frac{x}{x+1}$ ta thấy rằng: $\frac{x}{x+1}f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2}f(x) = \left[f(x) \cdot \frac{x}{x+1} \right]'$. Do đó giả

thiết tương đương với :

$$\left[f(x) \cdot \frac{x}{x+1} \right]' = \frac{x}{x+1} \Rightarrow f(x) \cdot \frac{x}{x+1} = \int \frac{x}{x+1}dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right)dx = x - \ln|x+1| + C.$$

Mà $f(1) = -2\ln 2 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow f(x) \cdot \frac{x}{x+1} = x - \ln|x+1| - 1$.

Cho $x = 2$ ta được $f(2) \cdot \frac{2}{3} = 2 - \ln 3 - 1 \Rightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow P = \frac{9}{2}$.

Chọn ý D.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và

$f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. 8.

D. 10.

Chuyên Đại học Vinh

Lời giải

Đây là một câu nhìn qua tương đối lạ, tuy nhiên ý tưởng của bài toán vẫn như bài trên đó là vẫn biến đổi một vế là đạo hàm của vế kia chỉ có điều cách thực hiện không tương tự. Hướng giải của bài toán như sau:

Nhận thấy được $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = [f(x) \cdot f'(x)]'$.

Do đó giả thiết tương đương với $[f(x) \cdot f'(x)]' = 15x^4 + 12x$.

$$f(x) \cdot f'(x) = \int (15x^4 + 12x) dx = 3x^5 + 6x^2 + C \xrightarrow{f(0)=f'(0)=1} C = 1 \Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \int f(x) \cdot f'(x) dx = \int (3x^5 + 6x^2 + 1) dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^6}{2} + 2x^3 + x + C'$$

Thay $x = 0$ vào hai vế ta được $\frac{f^2(0)}{2} = C' \Rightarrow C' = \frac{1}{2}$.

Vậy $f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + 1 \Rightarrow f^2(1) = 8$.

Chọn ý C.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 đồng thời liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f(0) = f'(0) = 1$ và $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = x^3 + 2x^2 \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{107}{12} - \frac{21}{e}$

B. $\frac{107}{21} - \frac{12}{e}$

C. $\frac{107}{12} + \frac{21}{e}$

D. $\frac{107}{21} + \frac{12}{e}$

Lời giải

Đây lại là một dạng nhìn rất lạ phải không, nhưng thực chất chính là bài toán tổng quát ban đầu, tuy nhiên phải có chút tính ý nhận ra điều sau:

$$\begin{aligned} f(x) + f'(x) + (f'(x) + f''(x)) &= x^3 + 2x^2 \\ \Leftrightarrow f(x) + f'(x) + (f(x) + f'(x))' &= x^3 + 2x^2 \\ \Leftrightarrow e^x (f(x) + f'(x)) + e^x (f(x) + f'(x))' &= e^x (x^3 + 2x^2) \\ \Leftrightarrow (e^x (f(x) + f'(x)))' &= e^x (x^3 + 2x^2) \\ \Rightarrow e^x (f(x) + f'(x)) &= e^x (x^3 - x^2 + 2x - 2) + C \end{aligned}$$

Mặt khác $f(0) = f'(0) = 1$ nên $C = 4$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^x (f(x) + f'(x)) &= e^x (x^3 - x^2 + 2x - 2) + 4 \\ \Leftrightarrow (e^x f(x))' &= e^x (x^3 - x^2 + 2x - 2) + 4 \\ \Rightarrow e^x f(x) &= \int (e^x (x^3 - x^2 + 2x - 2) + 4) dx = e^x (x^3 - 4x^2 + 10x - 12) + 4x + C \end{aligned}$$

Ta lại có:

$$f(0) = 1 \Rightarrow C = 13 \Rightarrow f(x) = x^3 - 4x^2 + 10x - 12 + (4x + 13)e^{-x} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{107}{12} - \frac{21}{e}$$

Chọn ý A.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 đồng thời liên tục trên đoạn $[0; 2]$ $f(0) = 1, f(2) = e^4$ và $f(x) > 0, (f(x))^2 - f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = 0 \forall x \in [0; 2]$. Tính $f(1)$.

A. e

B. $e^{\frac{3}{2}}$

C. e^2

D. $e^{\frac{3}{2}}$

Lời giải

Bài này nhìn qua thì thấy giống bài trước, có lẽ bạn đọc đến đây sẽ tập chung đưa về như bài trước nhưng điều này gần như không thể bởi vì sự xuất hiện “vô duyên” của dấu “-”. Vậy làm sao để xử lý được dấu “-”? Ý tưởng thì vẫn là thế tuy nhiên để ý rằng đạo hàm của hàm nào ra dấu “-”? Rất đơn giản đó là hàm phân thức! Đến đây ta biến đổi bài toán:

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} = 1 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + C \Rightarrow \ln f(x) = \int (x + C) dx = \frac{x^2}{2} + Cx + D$$

Mặt khác:

$$f(0) = 1, f(2) = e^6 \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ 4 = 2 + 2C + D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 1 \\ D = 0 \end{cases} \Rightarrow \ln f(x) = \frac{x^2}{2} + x \Rightarrow f(x) = e^{\frac{x^2}{2} + x}$$

Do đó $f(1) = e^{\frac{3}{2}}$.

Chọn ý D.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(0) = -1, f(1) = -\frac{2}{3}$

và $f''(x)f(x) - 2[f'(x)]^2 = x[f(x)]^3, \forall x \in [0; 1]$. Tích phân $\int_0^1 (3x^2 + 2)f(x) dx$ bằng?

A. $-\ln \frac{3}{2}$

B. $-3 \ln \frac{3}{2}$

C. $-2 \ln \frac{3}{2}$

D. $-6 \ln \frac{3}{2}$

Chọn ý D.

2. Cho hàm số $f(x) > 0, \forall x \geq 0$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ thỏa mãn

$f''(x)f(x) - 2[f'(x)]^2 + xf^3(x) = 0, f'(0) = 0, f(0) = 1$. Tính $f(1)$?

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{6}{7}$

D. $\frac{7}{6}$

Chọn ý D.

Ví dụ 5: Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1; 2]$, thỏa mãn $f(1) = g(1) = 0$ và

$$\begin{cases} \frac{x}{(x+1)^2} g(x) + 2017x = (x+1)f'(x) \\ \frac{x^3}{x+1} g'(x) + f(x) = 2018x^2 \end{cases}, \forall x \in [1; 2]. \text{ Tính } I = \int_1^2 \left[\frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) \right] dx.$$

A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{3}{2}$.

D. $I = 2$.

Lời giải

Bài này có vẻ tương đối khó khăn rồi do đây là 2 hàm độc lập, tuy nhiên ta chú ý vẫn bám sát ý tưởng của các bài toán trong mục này!

Từ giả thiết ta có
$$\begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2}g(x) - \frac{(x+1)}{x}f'(x) = -2017 \\ \frac{x}{x+1}g'(x) + \frac{1}{x^2}f(x) = 2018 \end{cases}$$
. Cộng lại vế theo vế ta được:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{(x+1)^2}g(x) + \frac{x}{x+1}g'(x) \right] - \left[\frac{(x+1)}{x}f'(x) - \frac{1}{x^2}f(x) \right] = 1 \\ \Leftrightarrow & \left[\frac{x}{x+1}g(x) \right]' - \left[\frac{(x+1)}{x}f(x) \right]' = 1 \Rightarrow \frac{x}{x+1}g(x) - \frac{(x+1)}{x}f(x) = x + C. \end{aligned}$$

Mà ta lại có $f(1) = g(1) = 0 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow I = \int_1^2 \left[\frac{x}{x+1}g(x) - \frac{x+1}{x}f(x) \right] dx = \int_1^2 (x-1) dx = \frac{1}{2}$.

Chọn ý A.

LUYỆN TẬP

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $2f(x) + x.f'(x) \geq 673x^{2017}$.

Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{3.2017}$

C. $\frac{1}{3.2018}$

D. $\frac{1}{3.2019}$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{(x+1)f(x)}}$ và $f(0) = 1, f(1) = \sqrt[3]{a+b\sqrt{2}}$ với a, b là các số nguyên.

Tính $P = ab$.

A. $P = -3$

B. $P = -66$

C. $P = 6$

D. $P = -36$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2f(x)$ và $f(0) = \sqrt{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $2\sqrt{3}(e^2 - 1)$

B. $\sqrt{3}(2e - 1)$

C. $\frac{\sqrt{3}(e^2 - 1)}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}(2e - 1)}{2}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2$ và $f(0) = -1$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $-\frac{1}{6}$

B. $-\ln 2$

C. $-\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$

D. $-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f'(0) = -1$ và $f''(x) = [f'(x)]^2$. Giá trị của biểu thức $f(1) - f(0)$ bằng

- A. $\ln 2$ B. $-\ln 2$ C. $\frac{1}{2}\ln 2$ D. $-\frac{1}{2}\ln 2$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = -e^x f^2(x) \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Tính $f(\ln 2)$

- A. $\ln 2 + \frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\ln^2 2 + \frac{1}{2}$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên $[0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1, f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

- A. $1 < f(5) < 2$ B. $4 < f(5) < 5$ C. $3 < f(5) < 4$ D. $2 < f(5) < 3$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên $[0;+\infty)$ thỏa mãn $f(3) = \frac{2}{3}$ và $f'(x) = \sqrt{(x+1)f(x)}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $2613 < f^2(8) < 2614$ B. $2614 < f^2(8) < 2615$
C. $2618 < f^2(8) < 2619$ D. $2616 < f^2(8) < 2617$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)f'(x) = 3x^5 + 6x^2$. Biết rằng $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.

- A. 144 B. 100 C. 64 D. 81

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị âm và có đạo hàm liên tục trên $[1;4]$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)f^2(x)$ và $f(1) = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $\sum_{i=1}^{2018} f(i)$ bằng

- A. $-\frac{2010}{2019}$ B. $-\frac{2017}{2018}$ C. $-\frac{2016}{2017}$ D. $-\frac{2018}{2019}$

Câu 11: Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;4]$ thỏa mãn $f(1) + g(1) = 9e$ và $f(x) = -x^2 g'(x); g(x) = -x^2 f'(x)$. Tích phân $\int_1^4 \frac{f(x) + g(x)}{x^2} dx$ bằng

- A. $\frac{9}{e}(e - \sqrt[4]{e})$ B. $9(e - \sqrt[4]{e})$ C. $\frac{e}{9}(e - \sqrt[4]{e})$ D. $\frac{e - \sqrt[4]{e}}{9}$

Câu 12: Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;4]$ thỏa mãn $f(1) + g(1) = 4$ và $f(x) = -x^2 g'(x); g(x) = -x^2 f'(x)$. Tích phân $\int_1^4 (f(x) + g(x)) dx$ bằng

- A. $8\ln 2$ B. $3\ln 2$ C. $6\ln 2$ D. $4\ln 2$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ và có đạo hàm liên tục trên $[0;+\infty)$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) + f'(x) = e^{-x}\sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $e^4 f(4) - f(0) = \frac{26}{3}$

B. $e^4 f(4) - f(0) = -\frac{26}{3}$

C. $e^4 f(4) - f(0) = \frac{4}{3}$

D. $e^4 f(4) - f(0) = -\frac{4}{3}$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=0$ và $2xf(x)+f'(x)=x(x^2-1)$. Tích phân $\int_0^1 xf(x)dx$ bằng

A. $\frac{e-4}{8e}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{7}{6}$

D. $\frac{e-4}{4e}$

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;\pi]$ thỏa mãn $f(0)=\sqrt{3}$ và $f'(x)f(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}$. Tích phân $\int_0^\pi f^2(x)dx$ bằng

A. $8+\frac{11\pi}{2}$

B. $8+\frac{7\pi}{2}$

C. $\frac{7\pi}{2}-8$

D. $\frac{11\pi}{2}-8$

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $f(x)=(f'(x))^2$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{5}{4}$

B. $\frac{19}{12}$

C. $\frac{5}{2}$

D. $\frac{19}{3}$

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $2018f(x)+x.f'(x)\geq x^{2019}, \forall x\in[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1}{4037}$

B. $\frac{1}{2018.4037}$

C. $\frac{1}{2019.4037}$

D. $\frac{1}{2020.4037}$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\cos xf(x)+\sin xf'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}, \forall x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ và đồng thời $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$. Tích phân $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$ bằng

A. $\ln\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

B. $2\ln\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

C. $\ln\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)$

D. $\frac{1}{2020.4037}$

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=0, f(x)>-1$ và đồng thời $f'(x)=\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $f(\sqrt{3})$?

A. 12

B. 3

C. 7

D. 9

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên đoạn $[1;4]$, $f(1)=0$ và đồng thời thỏa mãn $x+2x.f(x)=[f'(x)]^2, \forall x\in[1;4]$. Đặt $I=\int_1^4 f(x)dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1<I<4$

B. $4<I<8$

C. $8<I<12$

D. $12<I<16$

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2+f(x)f''(x)=2x^2-x+1, \forall x\in\mathbb{R}$, và đồng thời $f(0)=f'(0)=3$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng?

A. 28

B. 22

C. $\frac{19}{2}$

D. 10

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và $f'(x) + 2xf(x) = 2x \cdot e^{-x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của tích phân $\int_0^1 xf(x)dx$?

A. $1 - \frac{3}{2e}$

B. $-\frac{1}{2e}$

C. $1 - \frac{e}{2}$

D. $\frac{e}{2}$

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = \frac{9}{e}$ và $f'(x) + 3x^2f(x) = (15x^4 + 12x)e^{-x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $3 + \frac{4}{e}$

B. $2e - 1$

C. $3 - \frac{4}{e}$

D. $2e + 1$

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f^2(x)f''(x) + 2f(x)(f'(x))^2 = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1, f'(0) = 9$. Tích phân $\int_0^1 f^3(x)dx$ bằng?

A. $\frac{199}{14}$

B. $\frac{227}{42}$

C. $\frac{227}{14}$

D. $\frac{199}{42}$

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$, có $f(1) = 0$ và đồng thời $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^3, \forall x \in [1;4]$. Tích phân $\int_1^4 (2f(x) + 1)^2 dx$ bằng?

A. 1

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{4}$

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$, có $f(1) = 4$ và đồng thời $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2, \forall x \in [1;2]$. Tính giá trị của $f(2)$?

A. 5

B. 20

C. 15

D. 10

Câu 27: Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x + 3)f^2(x)$ và $f(0) = \frac{-1}{2}$. Biết

rằng $\sum_{i=1}^{2018} f(i) = \frac{a}{b} (a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b} < -1$

B. $\frac{a}{b} > 1$

C. $a + b = 1010$

D. $b - a = 3029$

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và đồng thời điều kiện $f'(x) = f(x) + e^x + 1, \forall x \in [0;1]$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$

A. $2e - 1$

B. $2(e - 1)$

C. $1 - e$

D. $1 - 2e$

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn $[1;3]$, $f(1) = f'(1) = 1$ và $f(x) > 0, f(x)f''(x) = (f'(x))^2 - (xf(x))^2, \forall x \in [1;3]$. Tính $\ln f(3)$

A. -4

B. -3

C. 4

D. 3

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời $f(2) = \ln \frac{3}{4}, f'(x)e^{f(x)} = \frac{2}{x^3}, \forall x \in [2; 2018]$. Biết

rằng $\sum_{i=2}^{2018} f(i) = \ln a - \ln b + \ln c - \ln d$ với a, b, c, d là các số nguyên dương và a, c, d là số nguyên tố đồng thời $a < b < c < d$. Giá trị của biểu thức $a + b + c + d$ bằng?

- A. 1968 B. 1698 C. 1689 D. 1986

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 3]$, $f(3) = 4$ và đồng thời $[f'(x)]^2 = 8x^2 - 20 - 4f(x), \forall x \in [0; 3]$. Tích phân $\int_0^3 f(x) dx$ bằng?

- A. 9 B. -6 C. 21 D. 12

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn $[0; 2]$, biết rằng $f(0) = 1, f(2) = e^6$ và $[f(x)]^2 - f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0, \forall x \in [0; 2]$. Tính $f(1)$

- A. 9 B. -6 C. 21 D. 12

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và đồng thời $[f'(x)]^2 + 4(6x^2 - 1)f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4, \forall x \in [0; 1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng?

- A. $\frac{23}{15}$ B. $-\frac{17}{15}$ C. $\frac{13}{15}$ D. $-\frac{7}{15}$

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{2}$ và đồng thời điều kiện $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$. Giá trị của $f(2)$ bằng?

- A. $\frac{e}{3}$ B. $\frac{e}{6}$ C. $\frac{e^2}{3}$ D. $\frac{e^2}{6}$

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1)f'(x) + f(x) = x^2 + x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. Biết $f(2) = a + b\ln 3 (a, b \in \mathbb{Q})$. Giá trị của biểu thức $a^2 + b^2$ bằng?

- A. $\frac{25}{4}$ B. $\frac{9}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{13}{4}$

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $[f(x)]^2 = 2 + 3 \int_0^x f(t) dt, \forall x \in [0; 1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng?

- A. $\frac{3}{4} + \sqrt{2}$ B. $\frac{11}{4}$ C. $\frac{3}{4} + \sqrt{3}$ D. $\frac{15}{4}$

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \sin x dx = -4$ và $f(x) = x(\sin x + f'(x)) + \cos x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $11 < f(\pi) < 12$ B. $5 < f(\pi) < 6$ C. $6 < f(\pi) < 7$ D. $12 < f(\pi) < 13$

Câu 38: Cho hàm số $f(x)$ có đạo đến cấp 2 liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $[f'(x)]^2 + f(x)f''(x) \geq 1, \forall x \in [0;1]$ và $f^2(0) + f(0)f'(0) = \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f^2(x) dx$?

- A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{11}{6}$ D. $\frac{7}{2}$

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và đồng thời điều kiện $f'(x)[f(x)]^{2018} = xe^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Số nghiệm của phương trình $f(x) = -\frac{1}{e}$ là?

- A. 0 B. 2 C. 1 D. 3

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(1) = -2$ và đồng thời $x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tính $\int_1^2 f(x) dx$?

- A. $-\frac{\ln 2}{2} - 1$ B. $-\ln 2 - \frac{1}{2}$ C. $-\ln 2 - \frac{3}{2}$ D. $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}$

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $\frac{2f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{f(x)(x+2)}{x^3}, \forall x > 0$ và $f(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Tích phân $\int_1^2 \frac{1}{[f(x)]^2} dx$?

- A. $\frac{11}{2} + \ln 2$ B. $-\frac{1}{2} + \ln 2$ C. $\frac{3}{2} + \ln 2$ D. $\frac{7}{2} + \ln 2$

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = e$ và đồng thời điều kiện $(x+2)f(x) = xf'(x) - x^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(2)$?

- A. $4e^2 - 4e + 4$ B. $4e^2 - 2e + 1$ C. $2e^3 - 2e + 2$ D. $4e^2 - 4e + 1$

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương thỏa mãn $f'(x) = \frac{f(x)}{x} + 3x^2, \forall x \in (0; +\infty)$ và

$\int_1^2 \frac{3x^3}{f^2(x)} dx = \frac{1}{9}$. Giá trị của biểu thức $f(1) + f(2)$ bằng?

- A. $\frac{27}{2}$ B. $\frac{43}{2}$ C. $\frac{45}{2}$ D. $\frac{49}{2}$

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và $[f'(x)]^2 = e^x f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$?

- A. $e - 2$ B. $e^2 - 2$ C. $e^2 - 1$ D. $e - 1$

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ thỏa

mãn $f'(x) = \tan x f(x), \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], f(0) = 1$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x f(x) dx$?

A. $\frac{1+\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\ln \frac{\pi+1}{4}$

D. 0

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = e^{-f(x)}(2x+3)$, $f(0) = \ln 2$.

Tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng?

A. $6\ln 2 + 2$

B. $6\ln 2 - 2$

C. $6\ln 2 - 3$

D. $6\ln 2 + 3$

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và đồng thời $xf'(x) - f(x) = x^2, \forall x \in [0;1]$. Tính tích phân $\int_0^1 xf(x)dx$?

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = -1$ và đồng thời điều kiện $f'(x) = f(x) + x^2e^x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(3)$?

A. $6e^3 + 3$

B. $6e^2 + 2$

C. $3e^2 - 1$

D. $9e^3 - 1$

Câu 49: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và đồng thời $f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x$ và $f(1) = 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là?

A. $y = 16x + 20$

B. $y = -16x + 20$

C. $y = -16x - 20$

D. $y = 16x - 20$

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\frac{[f(x)]^2 [f'(x)]^2}{e^{2x}} = 1 + [f(x)]^2, \forall x \in [0;1]$. Biết $f(0) = 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(1) \in \left(\frac{5}{2}; 3\right)$

B. $f(1) \in \left(3; \frac{7}{2}\right)$

C. $f(1) \in \left(2; \frac{5}{2}\right)$

D. $f(1) \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$

ĐÁP ÁN

Câu 1: Chọn ý C.

Theo giả thiết ta có $(x^2 f(x))' \geq 673x^{2018}$, lấy tích phân 2 vế cận từ 0 tới x ta được

$$\begin{aligned} \int_0^x (x^2 f(x))' dx &\geq \int_0^x 673x^{2018} dx \Leftrightarrow x^2 f(x) \geq \frac{673x^{2019}}{2019} \\ \Rightarrow f(x) &\geq \frac{x^{2017}}{3} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \frac{x^{2017}}{3} dx = \frac{1}{3 \cdot 2018} \end{aligned}$$

Câu 2: Chọn ý A.

Câu 3: Chọn ý C.

Câu 4: Chọn ý D.

Câu 5: Chọn ý B.

Câu 6: Chọn ý B.

Câu 7: Chọn ý C.

Câu 8: Chọn ý C.

Câu 9: Chọn ý B.

Câu 10: Chọn ý D.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x + 1 &\Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + x + C \xrightarrow{f(1)=-\frac{1}{2}} f(x) = -\frac{1}{x^2 + x} = -\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{2018} f(i) = -\sum_{i=1}^{2018} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2019}\right) = -\frac{2018}{2019} \end{aligned}$$

Câu 11: Chọn ý B.

Đặt $h(x) = f(x) + g(x)$, $h(1) = g(1) + f(1) = 9e$. Ta có

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= -x^2 [f'(x) + g'(x)] \Rightarrow h(x) + x^2 h'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{h'(x)}{h(x)} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \ln|h(x)| = \frac{1}{x} + C \xrightarrow{h(1)=9e} h(x) = 9e^{\frac{1}{x}} \\ &\Rightarrow \int_1^4 \frac{f(x) + g(x)}{x^2} dx = \int_1^4 \frac{9}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = 9(e - \sqrt[4]{e}) \end{aligned}$$

Câu 12: Chọn ý A.

Tương tự câu 11

Câu 13: Chọn ý A.

Câu 14: Chọn ý A.

Câu 15: Chọn ý B.

Câu 16: Chọn ý B.

Câu 17: Chọn ý D.

Tương tự câu 1.

Câu 18: Chọn ý B.

Câu 19: Chọn ý B.

Câu 20: Chọn ý D.

Câu 21: Chọn ý A.

Câu 22: Chọn ý A.

Câu 23: Chọn ý C.

Câu 24: Chọn ý C.

Câu 25: Chọn ý B.

Câu 26: Chọn ý D.

Câu 27: Chọn ý D.

Câu 28: Chọn ý B.

Câu 29: Chọn ý A.

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' &= \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} = -x^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x^3}{3} + C \\ \xrightarrow{f(1)=f'(1)=1} C &= \frac{4}{3} \Rightarrow \ln f(x) = \int \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{4}{3} \right) dx = -\frac{x^4}{12} + \frac{4x}{3} + C_1 \\ \xrightarrow{f(1)=1} D &= -\frac{5}{4} \Rightarrow \ln f(x) = -\frac{x^4}{12} + \frac{4x}{3} - \frac{5}{4} \Rightarrow \ln f(3) = -4 \end{aligned}$$

Câu 30: Chọn ý C.

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \int f'(x)e^{f(x)} dx &= \int \frac{2}{x^3} dx \Leftrightarrow e^{f(x)} = -\frac{1}{x^2 + C} \xrightarrow{f(2)=\ln \frac{3}{4}} C = 1 \\ \Rightarrow f(x) &= \ln \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \Rightarrow \sum_{i=2}^{2018} f(i) = \ln \left[\prod_{i=2}^{2018} \left(1 - \frac{1}{i^2} \right) \right] \\ &= \ln \left[\frac{(2^2 - 1)(3^2 - 1) \dots (2018^2 - 1)}{(2.3 \dots 2018)^2} \right] = \frac{1.3.2.4.3.5 \dots 2017.2019}{(2.3 \dots 2018)^2} \\ &= \frac{2017! \cdot \frac{2019!}{1.2}}{(2018!)^2} = \frac{2019}{1.2.2018} = \frac{3.673}{2^2.1009} \Rightarrow \sum_{i=2}^{2018} f(i) = \ln 3 - \ln 4 + \ln 673 - \ln 1009 \end{aligned}$$

Câu 31: Chọn ý B.

Từ giả thiết ta có $\int_0^3 [f'(x)]^2 dx = \int_0^3 (8x^2 - 20 - 4f(x)) dx = 12 - 4 \int_0^3 f(x) dx$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx &= xf(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 xf'(x) dx = 12 - \int_0^3 xf'(x) dx \\ \Rightarrow \int_0^3 [f'(x)]^2 dx &= 12 - 4 \left(12 - \int_0^3 xf'(x) dx \right) \\ \Leftrightarrow \int_0^3 (f'(x) - 2x)^2 dx &= 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2 + C \\ \xrightarrow{f(3)=4} C &= -5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 5 \Rightarrow \int_0^3 f(x) dx = -6 \end{aligned}$$

Câu 32: Chọn ý D.

Ta có $f(x) \geq f(0) = 1, \forall x \in [0; 2]$ do vậy

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = \frac{f(x)f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = 1 \Rightarrow \ln f(x) = \frac{x^2}{2} + Cx + D$$

Mặt khác do $f(0) = 1, f(2) = e^6 \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ 6 = 2 + 2C + D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 2 \\ D = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = e^{\frac{x^2}{2} + 2x} \Rightarrow f(1) = e^{\frac{5}{2}}$

Câu 33: Chọn ý C.

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[0; 1]$ ta được

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 4 \int_0^1 (6x^2 - 1)f(x) dx = \int_0^1 (40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4) dx = \frac{376}{105}$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta được:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (6x^2 - 1)f(x)dx &= \int_0^1 f(x)d(2x^3 - x) \\ &= (2x^3 - x)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (2x^3 - x)f'(x)dx = 1 - \int_0^1 (2x^3 - x)f'(x)dx\end{aligned}$$

Thay lại đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned}\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 4\left(1 - \int_0^1 (2x^3 - x)f'(x)dx\right) &= \frac{376}{105} \\ \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 4\int_0^1 (2x^3 - x)f'(x)dx + \frac{44}{105} &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) - 2(2x^3 - x))^2 dx = 0 &\Leftrightarrow f'(x) = 2(2x^3 - x) \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + C \\ \xrightarrow{f(1)=1} C = 1 &\Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{13}{15}\end{aligned}$$

Câu 34: Chọn ý D.

Câu 35: Chọn ý B.

Câu 36: Chọn ý A.

Xem lại phần tích phân có cận thay đổi

Câu 37: Chọn ý B.

Câu 38: Chọn ý C.

Biến đổi giả thiết tương đương $[f(x)f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x) \geq 1, \forall x \in [0;1]$

Lấy tích phân cận từ 0 đến x ta được

$$\begin{aligned}\int_0^x f(x)f'(x)dx &\geq \int_0^x [f'(0)f(0) + x]dx \\ \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} - \frac{f^2(0)}{2} &\geq f(0)f'(0)x + \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow f^2(x) \geq x^2 + f^2(0) + 2f(0)f'(0)x \\ \Rightarrow \int_0^1 f^2(x)dx &\geq \int_0^1 [x^2 + f^2(0) + 2f(0)f'(0)x]dx = \frac{1}{3} + f^2(0) + f(0)f'(0) = \frac{11}{6}\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn tại $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

Câu 39: Chọn ý B.

Ta có $\int f'(x)[f(x)]^{2018}dx = \int xe^x dx = (x-1)e^x + C$

$$\Rightarrow \frac{[f(x)]^{2019}}{2019} = (x-1)e^x + C; f(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2019} = C \Rightarrow f(x) = \sqrt[2019]{1 + 2019(x-1)e^x}$$

$$\text{Vậy } f(x) = -\frac{1}{e} \Leftrightarrow 1 + 2019(x-1)e^x = -\frac{1}{e^{2019}} \Leftrightarrow 2019(x-1)e^{x+2019} + e^{2019} + 1 = 0$$

Xét hàm số

$$g(x) = 2019(x-1)e^{x+2019} + e^{2019} + 1 \Rightarrow g'(x) = 2019[e^{x+2019} + (x-1)e^{x+2019}] = 2019xe^{x+2019}$$

Do $g'(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm nên $g(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm

Câu 40: Chọn ý B.

Từ giả thiết ta có $x^2 f^2(x) + 2xf(x) + 1 = xf'(x) + f(x) \Leftrightarrow (xf(x) + 1)^2 = (xf(x) + 1)$

$$\text{Suy ra } \int \frac{(xf(x) + 1)'}{(xf(x) + 1)^2} dx = \int dx = x + C \Leftrightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x + C}$$

$$\text{Mặt khác } f(1) = -2 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$\text{Suy ra } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx = -\ln 2 - \frac{1}{2}$$

Câu 41: Chọn ý C.

Câu 42: Chọn ý A.

Câu 43: Chọn ý C.

Câu 44: Chọn ý D.

Câu 45: Chọn ý B.

Câu 46: Chọn ý B.

Câu 47: Chọn ý B.

Câu 48: Chọn ý D.

Câu 49: Chọn ý D.

Câu 50: Chọn ý A.

Tương tự với câu trong đề thi thử Chuyên Lê Khiết, xem lại phần trước

15. BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

Các bài toán bất đẳng thức tích phân được giới thiệu trong phần này nhất là phần sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* đa phần chỉ mang tính tham khảo, không nên quá đi sâu do đây là chương trình liên quan tới toán cao cấp của bậc đại học, chỉ nên học phần 1 và phần 2!

1. PHÂN TÍCH BÌNH PHƯƠNG

Với dạng toán này ta cần chú ý tới những kiến thức sau đây:

Với $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên $[a; b]$ ($a < b$) ta có:

- $\int_a^b (f(x))^2 dx \geq 0$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow f(x) \equiv 0 \forall x \in [a; b]$
- $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b] \\ f(x) \leq 0 \forall x \in [a; b] \end{cases}$
- Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn *parabol* và một đường thẳng:

$$I^2 = \left(\int_{x_1}^{x_2} |ax^2 + bx + c| dx \right)^2 = \frac{\Delta^3}{36a^4}$$

Với x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

Ví dụ 1: Cho 2 số thực a, b thỏa mãn $a < b, a + b = ab + 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích

$$\text{phân } I = \int_a^b |x^2 - (a + b) + ab| dx$$

A. $4\sqrt{3}$

B. 12

C. $2\sqrt{3}$

D. 48

Lời giải

Đây chỉ là bài tập mở đầu áp dụng công thức thôi do a,b đã là nghiệm của phương trình bậc 2 trong dấu trị tuyệt đối rồi!

Ta có:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_a^b |x^2 - (a+b)x + ab| dx \right)^2 = \frac{\Delta^3}{36} \\ &= \frac{((a+b)^2 - 4ab)^3}{36} = \frac{((ab+4)^2 - 4ab)^3}{36} = \frac{((ab+2)^2 + 12)^2}{36} \geq 48 \end{aligned}$$

Chọn ý D.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$ và

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx = -7 \int_0^1 x^3 f'(x) dx - \frac{7}{4}. \text{ Tính tích phân } \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $\frac{7}{5}$

B. $\frac{7}{4}$

C. $\frac{7}{8}$

D. $\frac{7}{10}$

Lời giải

Thoạt nhìn thì bài toán này có vẻ khá là rắc rối, nhưng hãy chú ý nếu coi $f'(x)$ là ẩn thì ta thấy bóng dáng của tam thức bậc 2, đến đây ta sẽ giải quyết bài toán như sau:

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f'(x))^2 dx &= -7 \int_0^1 x^3 f'(x) dx - \frac{7}{4} \\ \Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'(x) + \frac{7}{2} x^3 \right)^2 dx - \int_0^1 \left(\frac{7x^3}{2} \right)^2 dx &= -\frac{7}{4} \\ \Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'(x) + \frac{7}{2} x^3 \right)^2 dx = 0 &\Leftrightarrow f'(x) = -\frac{7x^3}{2} \forall x \in [0;1] \Rightarrow f(x) = \frac{-7x^4}{8} + C \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác ta lại có } f(1) = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{8} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{10}.$$

Chọn ý D.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(1) - f(0) \geq 1$ và

$$\int_0^1 f'(x) [3f^2(x) + 2] dx \geq \int_0^1 2\sqrt{6f'(x)} f(x) dx. \text{ Tích phân } \int_0^1 f^3(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{2\sqrt{21}}{9}$

B. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{21}}{9} - 1$

D. $\frac{2\sqrt{7}}{3} - 1$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(1) - f(0) = 1$ thỏa

$$\text{mãn } 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx \geq \int_0^1 f'(x) (f^2(x) + 1) dx. \text{ Tích phân } \int_0^1 [f(x)]^3 dx \text{ bằng?}$$

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{5\sqrt{33}}{18}$

C. $\frac{5\sqrt{33}+54}{18}$

D. $\frac{5\sqrt{33}-27}{18}$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $4f(1)=f(0)$

và $\int_0^1 f^2(x)dx - 3\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 \sqrt{(3x+1)f'(x)}f(x)dx$. Tính $f(0)$?

A. $-\frac{9}{\ln 4}$

B. $-\frac{15}{\ln 4}$

C. $-\frac{3}{\ln 4}$

D. $-\frac{5}{\ln 4}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn

$6\int_0^2 \sqrt{f'(x)}f(x)dx \geq 2\int_0^2 f'(x)f^2(x)dx + 9$. Tích phân $\int_0^2 f^3(x)dx$ bằng

A. $\frac{29}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. 2

D. 29

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện

$\int_0^1 \left[f^2(x) + 2\ln^2 \frac{2}{e} \right] dx = 2\int_0^1 f(x)\ln(x+1)dx$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\ln \frac{e}{4}$

B. $\ln \frac{4}{e}$

C. $\ln \frac{e}{2}$

D. $\ln \frac{2}{e}$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và

$3\int_0^1 \left(f'(x)f^2(x) + \frac{1}{9} \right) dx \leq 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)dx$. Tính tích phân $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{5}{4}$

C. $\frac{5}{6}$

D. $\frac{7}{6}$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) + 2\sqrt{2}f(x)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx = -\frac{\pi+2}{2}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. 0

C. 2

D. $\sqrt{2}$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn điều kiện

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx = \frac{2-\pi}{2}$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

A. 1

B. 0

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{2}$

Chú ý xem lời giải ví dụ 1 để vận dụng!

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$

đồng thời thỏa mãn $f(1)=e.f(0)=e$ và $\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx \leq 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^2$

B. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$

C. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}$

D. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2e}$

Lời giải

Đây là một bài toán tương đối khó có dạng hơi hơi giống với các bài toán ở phần 5! Ta hãy để ý rằng $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| \Big|_0^1 = \ln \frac{f(1)}{f(0)} = \ln e = 1$. Đến đây ta có định hướng giải bài toán này bằng phương pháp hệ số bất định như sau.

Giả sử tồn tại một số a thỏa mãn:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - a \right)^2 dx &= 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[\left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 - 2a \frac{f'(x)}{f(x)} + a^2 \right] dx = 0 \\ \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx &= \int_0^1 \left[2a \frac{f'(x)}{f(x)} - a^2 \right] dx = 2a - a^2 \end{aligned}$$

Mà theo giả thiết ta có $\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx \leq 1 \Rightarrow 2a - a^2 \leq 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a = 1$

Vậy khi đó giả thiết bài toán sẽ được biến đổi tương đương:

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx \leq 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - 1 \right)^2 dx \leq 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow f(x) = ke^x$$

Ta có $f(1) = e.f(0) = e$ nên $k = 1 \Rightarrow f(x) = e^x \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$.

Chọn ý B.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 4$ và

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 1. \text{ Giá trị của tích phân } \int_0^1 [f(x)]^3 dx \text{ bằng?}$$

A. 1.

B. 8.

C. 10.

D. 80.

Lời giải

Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là $[f(x)]^2$, $xf(x)$, $f(x)$ nên ta sẽ nảy ra ý tưởng liên kết với bình phương $[f(x) + \alpha x + \beta]^2$.

Với mỗi số thực α, β ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(x) + \alpha x + \beta]^2 dx &= \int_0^1 [f(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 (\alpha x + \beta) f(x) dx + \int_0^1 (\alpha x + \beta)^2 dx \\ &= 4 + 2(\alpha + \beta) + \frac{\alpha^2}{3} + \alpha\beta + \beta^2. \end{aligned}$$

Ta cần tìm α, β sao cho $\int_0^1 [f(x) + \alpha x + \beta]^2 dx = 0$ hay $4 + 2(\alpha + \beta) + \frac{\alpha^2}{3} + \alpha\beta + \beta^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + (3\beta + 6)\alpha + 3\beta^2 + 6\beta + 12 = 0. \text{ Để tồn tại } \alpha \text{ thì } \Delta = (3\beta + 6)^2 - 4(3\beta^2 + 6\beta + 12) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3\beta^2 + 12\beta - 12 \geq 0 \Leftrightarrow -3(\beta - 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \beta = 2 \Rightarrow \alpha = -6.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 [f(x) - 6x + 2]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = 6x - 2, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow \int_0^1 [f(x)]^3 dx = 10.$$

Chọn ý C.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$, thỏa mãn $f(1) = 0$ đồng thời

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7 \text{ và } \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng?}$$

A. 1.

B. $\frac{7}{5}$

C. $\frac{7}{4}$

D. 4

Đề minh họa THPT Quốc Gia 2018

Lời giải

Đây là một câu từng xuất hiện trong đề minh họa THPT Quốc Gia 2018 của bộ và sau đó đã trở thành một trào lưu trong các đề thi thử và thậm chí đến đề khảo thí chất lượng của bộ cũng đã từng xuất hiện bài toán này, tuy nhiên các cách giải trên mạng đa phần là sử dụng đến bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz* tuy nhiên đây có lẽ không phải ý tưởng ra đề của Bộ bởi đây là kiến thức bậc Đại học. Dưới đây là sẽ tiếp cận bài toán bằng kiến thức của bậc THPT.

Ý tưởng của bài toán vẫn là đưa về bình phương tuy nhiên hàm dưới dấu tích phân là $[f'(x)]^2, x^2 f(x)$ không có mối liên hệ với nhau. Vậy làm sao để làm xuất hiện bình phương đây? Có $f'(x)$ đang ở dạng bình phương thì ta sẽ nghĩ ngay đến việc sử dụng tích

$$\text{phân từng phần cho } \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \text{ ta được: } \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{x^3}{3} f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx.$$

$$\text{Kết hợp với giả thiết } f(1) = 0, \text{ ta suy ra } \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1.$$

$$\text{Bây giờ giả thiết được đưa về } \begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7 \\ \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1 \end{cases}. \text{ Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là}$$

$$[f'(x)]^2, x^3 f'(x) \text{ nên ta sẽ liên kết với bình phương } [f'(x) + \alpha x^3]^2.$$

Với mỗi số thực α ta có :

$$\int_0^1 [f'(x) + \alpha x^3]^2 dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2\alpha \int_0^1 x^3 f'(x) dx + \alpha^2 \int_0^1 x^6 dx = 7 - 2\alpha + \frac{\alpha^2}{7} = \frac{1}{7}(\alpha - 7)^2.$$

Ta cần tìm α sao cho $\int_0^1 [f'(x) + \alpha x^3]^2 dx = 0$ hay $\frac{1}{7}(\alpha - 7)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 7$.

Vậy $\int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3, \forall x \in [0;1] \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$

$$\Rightarrow C = \frac{7}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{5}.$$

Chọn ý B.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn đồng thời

$f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2$ và $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng?

A. $\frac{1 - \ln 2}{2}$.

B. $\frac{1 - 2\ln 2}{2}$.

C. $\frac{3 - 2\ln 2}{2}$.

D. $\frac{3 - 4\ln 2}{2}$.

Lời giải

Thoạt nhìn thì ta sẽ thấy bài này tương tự bài trước vẫn phải làm xuất hiện $f'(x), (f'(x))^2$, cùng biến đổi để xem có như bài trước không nhé!

Như các bài trước, ta biến đổi $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$ để làm xuất hiện $f'(x)$ bằng cách

tích phân từng phần. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = -\frac{1}{x+1} \end{cases}$.

Khi đó ta được:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = -\frac{f(x)}{x+1} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1} dx = -\frac{f(1)}{2} + \frac{f(0)}{1} + \int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1} dx$$

Tới đây ta bị vướng $f(0)$ vì giả thiết không cho. Do đó ta sẽ thêm bớt hằng số như sau:

$$\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = -\frac{1}{x+1} + k \end{cases} \text{ với } k \text{ là hằng số.}$$

Khi đó kết hợp với $f(1) = 0$ ta được:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx &= \left(-\frac{1}{x+1} + k \right) f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1} + k \right) f'(x) dx \\ &= -(-1+k)f(0) - \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1} + k \right) f'(x) dx \end{aligned}$$

Ta chọn k sao cho $-1+k=0 \Leftrightarrow k=1$

$$\text{Khi đó: } 2\ln 2 - \frac{3}{2} = \int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = -\int_0^1 \frac{x}{x+1} f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{x+1} f'(x) dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2.$$

Hàm dưới dấu tích phân là $[f'(x)]^2, \frac{x}{x+1}f'(x)$ nên ta cần có $\left[f'(x) + \alpha \frac{x}{x+1}\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha = -1 \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{x}{x+1} dx = x - \ln|x+1| + C$

$$\Rightarrow C = \ln 2 - 1 \Rightarrow f(x) = x - \ln(x+1) + \ln 2 - 1. \text{ Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1 - 2\ln 2}{2}$$

Chọn ý B.

2. CÂN BẰNG HỆ SỐ VÀ BẤT ĐẲNG THỨC AM - GM

Trong phần này ta sẽ tiếp cận một số bài toán khó hơn phải sử dụng đến bất đẳng thức AM - GM và các kỹ thuật cân bằng hệ số trong bất đẳng thức. Đầu tiên nhắc lại bất đẳng thức AM - GM. Cho 2 số thực dương a, b thì ta luôn có $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1) = ef(0)$ và $\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \leq 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(1) = \sqrt{\frac{2e}{e-1}}$ B. $f(1) = \frac{2(e-2)}{e-1}$ C. $f(1) = \sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}$ D. $f(1) = \sqrt{\frac{2(e-2)}{e-1}}$

Lời giải

Lướt nhìn qua bài toán này thì khá là "hãi" nhưng tuy nhiên hai tích phân đang ở cùng cận nên ta sẽ đưa nó vào cùng một tích phân và sử dụng bất đẳng thức AM - GM như sau:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx &= \int_0^1 \left[\frac{1}{f^2(x)} + [f'(x)]^2 \right] dx \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} 2 \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx \\ &= 2 \ln|f(x)| \Big|_0^1 = 2 \ln|f(1)| - 2 \ln|f(0)| = 2 \ln \left| \frac{f(1)}{f(0)} \right| = 2 \ln e = 2. \end{aligned}$$

Mặt khác theo giả thiết ta lại có:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \leq 2 &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)f'(x) = 1 \\ \Rightarrow \int f(x)f'(x) dx &= \int x dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = x + C \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x + 2C}. \end{aligned}$$

Ta có: $f(1) = ef(0)$ nên ta có $\sqrt{2+2C} = e\sqrt{2C} \Leftrightarrow 2+2C = e^2 2C \Leftrightarrow C = \frac{1}{e^2-1}$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{2x + \frac{2}{e^2-1}} \Rightarrow f(1) = \sqrt{2 + \frac{2}{e^2-1}} = \sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}.$$

Chọn ý C.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x) > 0$ và có đạo hàm $f'(x) > 0$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn

$f(0) = 1$ và $\int_0^1 [f^3(x) + 4[f'(x)]^3] dx \leq 3 \int_0^1 f'(x)f^2(x) dx$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$

- A. $I = 2(\sqrt{e} - 1)$. B. $I = 2(e^2 - 1)$. C. $I = \frac{\sqrt{e} - 1}{2}$. D. $I = \frac{e^2 - 1}{2}$.

Lời giải

Bài toán này là một bài toán khó nhưng tuy nhiên nếu biết về bất đẳng thức AM – GM thì nó trở lên khá là đơn giản

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số dương ta có

$$\begin{aligned} f^3(x) + 4[f'(x)]^3 &= 4[f'(x)]^3 + \frac{f^3(x)}{2} + \frac{f^3(x)}{2} \\ &\geq 3\sqrt[3]{4[f'(x)]^3 \cdot \frac{f^3(x)}{2} \cdot \frac{f^3(x)}{2}} = 3f'(x)f^2(x) \\ \Rightarrow \int_0^1 [f^3(x) + 4[f'(x)]^3] dx &\geq 3 \int_0^1 f'(x)f^2(x) dx. \end{aligned}$$

Mặt khác theo giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f^3(x) + 4[f'(x)]^3] dx &\leq 3 \int_0^1 f'(x)f^2(x) dx \Rightarrow 4[f'(x)]^3 = \frac{f^3(x)}{2} = \frac{f^3(x)}{2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}f(x) \\ \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{2} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{2} \int dx \Rightarrow \ln|f(x)| = \frac{1}{2}x + C \Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}x+C}. \end{aligned}$$

Ta có: $f(0) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 2(\sqrt{e} - 1)$.

Nhận xét. Đây là hướng tiếp cận theo bất đẳng thức AM – GM tuy nhiên ta còn một cách khác có thể sẽ nhanh hơn tạo. Để ý nếu ta coi a, b lần lượt là $f(x), f'(x)$ thì ta sẽ có được đa thức thuần nhất bậc 3. Cụ thể ta có:

$$f(a, b) = a^3 + 4b^3 - 3a^2b = (a + b)(a - 2b)^2 \geq 0$$

Khi đó giả thiết tương đương:

$$\int_0^1 [f^3(x) + 4[f'(x)]^3] dx \leq 3 \int_0^1 f'(x)f^2(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) + f'(x))(f(x) - 2f'(x))^2 dx \leq 0$$

Mặt khác $f(x) > 0, f'(x) > 0$ nên dấu “=” xảy ra khi $f(x) = 2f'(x)$.

Đến đây bài toán lại trở nên bình thường!

Chọn ý A.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0; 1]$, có đạo hàm dương và tục trên

$[0; 1]$, thỏa mãn $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} dx \geq 1$ và $f(0) = 1, f(1) = e^2$. Tính giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

- A. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. B. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$. C. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$. D. $f\left(\frac{1}{2}\right) = e$.

Lời giải

Cách làm chung của các bài toán thế này là từ giả nếu bài toán cho là lớn hơn hoặc bằng thì ta phải chỉ ra dấu nhỏ hơn hoặc bằng và ngược lại. Bài toán này cũng như thế, ta cần

chỉ ra được $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} dx \leq 1$ bằng các đánh giá cơ bản.

Hàm dưới dấu tích phân là: $\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}}, \forall x \in [0;1]$.

Điều này khiến ta nảy ra ý tưởng đánh giá:

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}} \leq ax + \frac{b \cdot f'(x)}{f(x)},$$

Muốn vậy ta phải đánh giá theo AM – GM như sau:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + mx \geq 2\sqrt{m} \cdot \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} \text{ với } m \geq 0 \text{ và } x \in [0;1].$$

Do đó ta cần tìm tham số $m \geq 0$ sao cho: $\int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{f(x)} + mx \right] dx \geq 2\sqrt{m} \cdot \int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} dx$ hay:

$$\ln|f(x)| \Big|_0^1 + m \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \geq 2\sqrt{m} \cdot 1 \Leftrightarrow \ln|f(1)| - \ln|f(0)| + \frac{m}{2} \geq 2\sqrt{m} \Leftrightarrow 2 - 0 + \frac{m}{2} \geq 2\sqrt{m}$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $2 - 0 + \frac{m}{2} = 2\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 4$.

Với $m = 4$ thì ta có:

$$\int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{f(x)} + 4x \right] dx = 4 \geq 4 \cdot \int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} dx \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} dx \leq 1$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{f'(x)}{f(x)} = 4x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 4x dx \Leftrightarrow \ln|f(x)| = 2x^2 + C \Rightarrow f(x) = e^{2x^2+C}$.

Theo giả thiết $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = e^2 \end{cases} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = e^{2x^2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$.

Cách 2. Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$1^2 \leq \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} dx \right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}} dx \right)^2 \leq \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{f(1)}{f(0)} = 1.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = kx$, thay vào $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} dx = 1$ ta được $k = 4$.

Suy ra $\frac{f'(x)}{f(x)} = 4x$. Đến đây lời giải giống như trên.

P/s: Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta sẽ tìm hiểu ở phần sau!

Chọn ý C.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 [f(x)f'(x)]^2 dx \leq 1$

và $f(0)=1, f(1)=\sqrt{3}$. Tính giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$

A. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$.

B. $f\left(\frac{1}{2}\right)=3$.

C. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$.

D. $f\left(\frac{1}{2}\right)=e$.

Lời giải

Nhận thấy bài này dấu " $\leq$ " nên cần phải đánh giá theo chiều ngược lại, chú ý tới bài toán liên quan tới $f'(x), f(x)$, nếu ta đánh giá được $[f(x)f'(x)]^2$ về $f(x)f'(x)$ thì bài toán coi như được giải quyết. Muốn vậy ta phải đánh giá theo AM - GM như sau:

$$[f(x)f'(x)]^2 + m \geq 2\sqrt{m} \cdot f(x)f'(x) \text{ với } m \geq 0.$$

Do đó ta cần tìm tham số $m \geq 0$ sao cho:

$$\int_0^1 ([f(x)f'(x)]^2 + m) dx \geq 2\sqrt{m} \int_0^1 f(x)f'(x) dx$$

$$\text{Hay } 1 + m \geq 2\sqrt{m} \cdot \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^1 \Leftrightarrow 1 + m \geq 2\sqrt{m}$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $1 + m = 2\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 1$.

Khi đó ta được:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(x)f'(x)]^2 dx + 1 &= \int_0^1 [f(x)f'(x)]^2 dx + \int_0^1 1 dx \\ &= \int_0^1 ([f(x)f'(x)]^2 + 1) dx \geq 2 \int_0^1 f(x)f'(x) dx = 2 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $[f(x)f'(x)]^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)f'(x) = 1 \\ f(x)f'(x) = -1 \end{cases}$.

- Nếu $f(x)f'(x) = -1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)f'(x) dx = -\int_0^1 dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^1 = -x \Big|_0^1 \Leftrightarrow 1 = -1$ (vô lý)
- Nếu $f(x)f'(x) = 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)f'(x) dx = \int_0^1 dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = x + C \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x + 2C}$.

Theo giả thiết $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x+1} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$.

Cách 2. Ta có $\int_0^1 f(x)f'(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} [f^2(1) - f^2(0)] = 1$.

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$1^2 = \left(\int_0^1 1 \cdot f(x) f'(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 1^2 dx \cdot \int_0^1 [f(x) f'(x)]^2 dx \leq 1 \cdot 1 = 1.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $f'(x)f(x) = k$, thay vào $\int_0^1 f(x)f'(x)dx = 1$ ta được

$k = 1$. Suy ra $f'(x)f(x) = 1$. Đến đây làm tiếp như trên!

P/s: Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta sẽ tìm hiểu ở phần sau!

Chọn ý A.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;2]$, thỏa mãn $\int_1^2 \frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} dx \leq 24$ và $f(1) = 1, f(2) = 16$. Tính giá trị của $f(\sqrt{2})$.

- A. $f(\sqrt{2}) = 1$. B. $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. C. $f(\sqrt{2}) = 2$. D. $f(\sqrt{2}) = 4$.

Lời giải

Chắc rằng qua 4 ví dụ ở trên ta đã phần nào hình dung và nắm được ý tưởng và phương pháp làm dạng này rồi, bài cuối cùng sẽ không đi phân tích mà đi luôn vào lời giải!

Hàm dưới dấu tích phân là $\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{[f'(x)]^2}{f(x)}$. Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$, muốn vậy ta phải đánh giá theo AM - GM như sau:

$$\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} + mx \geq 2\sqrt{m} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \text{ với } m \geq 0 \text{ và } x \in [1;2].$$

Do đó ta cần tìm tham số $m \geq 0$ sao cho $\int_1^2 \left(\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} + mx \right) dx \geq 2\sqrt{m} \int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx$ hay:

$$24 + \frac{2m}{3} \geq 4\sqrt{m} \sqrt{f(x)} \Big|_1^2 \Leftrightarrow 24 + \frac{2m}{3} \geq 4\sqrt{m} [\sqrt{f(2)} - \sqrt{f(1)}] \Leftrightarrow 24 + \frac{2m}{3} \geq 12\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 16.$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $24 + \frac{2m}{3} = 12\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 16$.

Với $m = 16$ thì đẳng thức xảy ra nên $\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} = 16x \Rightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 2x$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \int 2x dx \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} = x^2 + C \Rightarrow f(x) = (x^2 + C)^2$$

Theo giả thiết $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 16 \end{cases} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 \Rightarrow f(\sqrt{2}) = 4$.

Cách 2. Ta có $\int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2 \cdot \int_1^2 \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = 2 \cdot \sqrt{f(x)} \Big|_1^2 = 2[\sqrt{f(2)} - \sqrt{f(1)}] = 6.$

Theo bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz* ta có

$$6^2 = \left(\int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx \right)^2 = \left(\int_1^2 \sqrt{x} \cdot \frac{f'(x)}{\sqrt{xf(x)}} dx \right)^2 \leq \int_1^2 x dx \cdot \int_1^2 \frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} dx \leq \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 \cdot 24 = 36$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $\frac{f'(x)}{\sqrt{xf(x)}} = k\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = kx$ thay vào $\int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 6$

ta được $k = 4$. Suy ra $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 4x$. Đến đây làm tiếp như trên!

Chọn ý D.

3. BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY - SCHWARZ CHO TÍCH PHÂN

Nhìn chung thì các bài toán này chưa gặp thì sẽ thấy nó lạ và rất khó, tuy nhiên nếu đã gặp và làm quen rồi thì bài toán này trở nên tương đối dễ, có thể dễ hơn 2 dạng toán trên !

- Bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz* cho tích phân

Cho $f(x), g(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả tích trên đoạn $[a; b]$ khi đó ta luôn có :

$$\int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx \geq \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = kg(x)$ với số thực $k \neq 0$.

Chứng minh

Với mọi $t \in \mathbb{R}$ xét bình phương ta luôn có $\int_a^b (t \cdot f(x) + g(x))^2 dx \geq 0$

Điều này tương đương với :

$$h(t) = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) t^2 + 2 \left(\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right) t + \int_a^b g^2(x) dx \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$$

+ Trường hợp 1 : $\int_a^b f^2(x) dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ bất đẳng thức đã cho là đẳng thức.

+ Trường hợp 2 : $\int_a^b f^2(x) dx > 0$, đây là tam thức bậc 2 hệ số a dương và luôn không âm, tức biệt số Δ luôn không dương. Tương đương :

$$\begin{aligned} \Delta' &= \left(\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right)^2 - \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx \end{aligned}$$

Đến đây ta có điều phải chứng minh !

- Bất đẳng thức *Holder* cho tích phân

Cho $f(x), g(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm khả tích trên đoạn $[a; b]$ khi đó ta luôn có :

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

Trong đó p, q là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=0$ đồng thời

$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng?

- A. 1. B. $\frac{7}{5}$ C. $\frac{7}{4}$ D. 4

Đề minh họa THPT Quốc Gia 2018

Lời giải

Bài toán này ta đã được gặp ở phần phân tích bình phương rồi, giờ ta sẽ tìm hiểu một cách tiếp cận khác bằng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz. Chú ý là bất đẳng thức Cauchy - Schwarz cho tích phân thì luôn phải có một lượng bình phương cho nên ta không được biến đổi giả thiết $(f'(x))^2$, tuy duy vẫn như phần trước, ta phải làm xuất hiện $f'(x)$ ở giả thiết thứ 2.

Tích phân từng phần cho $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$ ta được:

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{x^3}{3} f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có :

$$\left(\int_0^1 x^3 f'(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 x^6 dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 1 \Rightarrow -1 \leq \int_0^1 x^3 f'(x) dx \leq 1$$

Vậy dấu "=" xảy ra khi $f'(x) = kx^3$. Thế ngược lại ta tìm được $k = -7$

Vậy $f'(x) = -7x^3, \forall x \in [0;1] \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$

$$\Rightarrow C = \frac{7}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{5}.$$

Chọn ý B.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ thỏa mãn $f(-1)=0, \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx = \frac{16}{3}$ và

$\int_{-1}^1 (f'(x))^2 dx = 112$, tính tích phân $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$.

- A. $\frac{168}{5}$ B. $\frac{35}{2}$ C. $\frac{35}{4}$ D. $\frac{84}{5}$

Câu 2: Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện

$\int_0^1 (f'(x))^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{e-1}{2}$ B. $\frac{e^2}{4}$ C. $e-2$ D. $\frac{e}{2}$

Câu 3: Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=0, f(1)=1$ và

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 \sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{1+\ln 2}. \text{ Tính phân } \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{1}{2} \ln^2(1+\sqrt{2})$ B. $\frac{-1+\sqrt{2}}{2} \ln^2(1+\sqrt{2})$
C. $\frac{1}{2} \ln(1+\sqrt{2})$ D. $(-1+\sqrt{2}) \ln(1+\sqrt{2})$

Câu 4: Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và đồng thời

$$\int_0^1 x.f(x)dx = \frac{4}{15} \text{ và } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{49}{45}. \text{ Tính } \int_0^1 [f(x)]^2 dx$$

A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{4}{63}$ D. 1

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1, \int_0^1 (f'(x))^2 dx = \frac{9}{5}$ và

$$\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \frac{2}{5}. \text{ Tính phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{5}$

Câu 6: Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 (f'(x))^2 dx = \int_0^1 e^x f(x) dx = \frac{e^2-1}{4}$ và

$$ef(1)=f(0). \text{ Tính tích phân } \int_0^1 f^2(x) dx.$$

A. $e-2$ B. $e-1$ C. $2e-3$ D. $2e-1$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết rằng

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2}, \int_0^1 f'(x) \cos \pi x dx = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{3\pi}{2}$ B. $\frac{2}{\pi}$ C. π D. $\frac{1}{\pi}$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$. Biết $\int_0^1 f^2(x) dx = 3$ và

$$\int_0^1 f'(x) \sin \pi x dx = \pi. \text{ Tính phân } \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{3\pi}{2}$ B. $\frac{2}{\pi}$ C. $-\frac{6}{\pi}$ D. $\frac{1}{\pi}$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi^2}{8},$

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).f(x) dx = \frac{1}{2}. \text{ Tính phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{\pi}{2}$

B. π

C. $\frac{1}{\pi}$

D. $\frac{2}{\pi}$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, và thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$ và $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{7}{4}$

D. $\frac{6}{5}$

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi}{4}$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{4}$. Tính $f(2018\pi)$

A. -1

B. 0

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(2)=0$ $\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{3}$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$. Tích phân $\int_1^2 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{7}{5}$

B. $\frac{-7}{5}$

C. $\frac{-7}{20}$

D. $\frac{7}{20}$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x \cdot f^2(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx - \frac{1}{16}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng?

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{5}$

Chú ý xem lời giải ví dụ 1 để vận dụng!

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;\pi]$, thỏa mãn $\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} \cos x f(x) dx = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^{\pi} f^2(x) dx$ bằng?

A. $\frac{2}{\pi}$.

B. $\frac{3}{\pi}$.

C. $\frac{4}{\pi}$.

D. $\frac{3}{2\pi}$.

Lời giải

Nhìn cách phát biểu của bài toán tương đối giống với bài trên, nếu áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có :

$$1 = \left(\int_0^{\pi} \cos x \cdot f(x) dx \right)^2 \leq \int_0^{\pi} \cos^2 x dx \cdot \int_0^{\pi} f^2(x) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi} f^2(x) dx.$$

Suy ra $\int_0^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{2}{\pi}$ đến đây sẽ có nhiều bạn khoanh A.

Chú ý rằng dấu "=" xảy ra khi $f(x) = k \cos x$ thay vào $\int_0^{\pi} f(x) dx = 1$ ta được:

$$1 = \int_0^{\pi} f(x) dx = k \int_0^{\pi} \cos x dx = k \cdot \sin x \Big|_0^{\pi} = 0$$

Điều này là vô lý! Vậy lời giải đúng của ta sẽ cần phải sử dụng tới phương pháp biến thiên

hằng số. Ta có $\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} \cos x f(x) dx = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \int_0^{\pi} a \cos x f(x) dx \\ b = \int_0^{\pi} b f(x) dx \end{cases}$ với $\begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases}$

Theo *Cauchy – Schwarz* ta có :

$$(a+b)^2 = \left(\int_0^{\pi} (a \cos x + b) f(x) dx \right)^2 \leq \int_0^{\pi} (a \cos x + b)^2 dx \int_0^{\pi} f^2(x) dx$$

Lại có $\int_0^{\pi} (a \cos x + b)^2 dx = \frac{1}{2} \pi (a^2 + 2b^2)$. Suy ra $\int_0^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{2(a+b)^2}{\pi(a^2 + 2b^2)}$ với $\begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases}$

Do đó $\int_0^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{2}{\pi} \cdot \max \left\{ \frac{(a+b)^2}{a^2 + 2b^2} \right\} = \frac{3}{\pi}$

Chọn ý B.

Nhận xét:

- Ta nhân thêm a, b vào giả thiết được gọi là phương pháp biến thiên hằng số.

- Cách tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{(a+b)^2}{a^2 + 2b^2}$ ta làm như sau:

+ Nếu $b = 0 \Rightarrow P = 1$ (chính là đáp án sai mà mình đã làm ở trên)

+ Nếu $b \neq 0 \Rightarrow P = \frac{(a+b)^2}{a^2 + 2b^2} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2\frac{a}{b} + 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2} = \frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 + 2} \left(t = \frac{a}{b} \right)$

Tới đây ta đạo hàm hoặc dùng MODE 7 dò tìm. Kết quả thu được GTLN của P bằng $\frac{3}{2}$

khi $t = 2 \Rightarrow \frac{a}{b} = 2 \Leftrightarrow a = 2b$.

Vậy dấu "=" để bài toán xảy ra khi $\begin{cases} a = 2b \\ f(x) = b(2 \cos x + 1) \end{cases}$

Thay ngược lại điều kiện, ta được: $\int_0^{\pi} b(2 \cos x + 1) dx = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{\pi} \Rightarrow f(x) = \frac{2 \cos x + 1}{\pi}$

Lúc này $\int_0^{\pi} f^2(x) dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{2 \cos x + 1}{\pi} \right) dx = \frac{3}{\pi}$

Cách khác. Đưa về bình phương

Hàm dưới dấu tích phân là $f^2(x), f(x), \cos x \cdot f(x)$ nên ta liên kết với $(f(x) + \alpha \cos x + \beta)^2$

Với mỗi số thực α, β ta có:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} (f(x) + \alpha \cos x + \beta)^2 dx &= \int_0^{\pi} f^2(x) dx + 2 \int_0^{\pi} (\alpha \cos x + \beta) f(x) dx + \int_0^{\pi} (\alpha \cos x + \beta)^2 dx \\ &= \int_0^{\pi} f^2(x) dx + 2(\alpha + \beta) + \frac{\pi}{2} \alpha^2 + \pi \beta^2\end{aligned}$$

Ta cần tìm α, β sao cho $2(\alpha + \beta) + \frac{\pi}{2} \alpha^2 + \pi \beta^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có:

$$2(\alpha + \beta) + \frac{\pi}{2} \alpha^2 + \pi \beta^2 = \frac{\pi}{2} \left(\alpha + \frac{2}{\pi} \right)^2 + \pi \left(\beta + \frac{1}{\pi} \right)^2 - \frac{3}{\pi} \geq -\frac{3}{\pi}$$

Vậy với $\alpha = -\frac{2}{\pi}; \beta = -\frac{1}{\pi}$ thì ta có: $\int_0^{\pi} \left[f(x) - \frac{2}{\pi} \cos x - \frac{1}{\pi} \right]^2 dx = \int_0^{\pi} f^2(x) dx - \frac{3}{\pi}$

Suy ra $\int_0^{\pi} f^2(x) dx = \int_0^{\pi} \left[f(x) - \frac{2}{\pi} \cos x - \frac{1}{\pi} \right]^2 dx + \frac{3}{\pi} \geq \frac{3}{\pi}$. Dấu "=" xảy ra khi $f(x) = \frac{2 \cos x + 1}{\pi}$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x.f(x) dx = 1$ và $\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 4$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 (f(x))^3 dx$ là

- A. 10 B. 1 C. 80 D. 8

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^x f(x) dx = 1$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 (f(x))^2 dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $0 < m < 1$ B. $1 < m < 2$ C. $2 < m < 3$ D. $3 < m < 4$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;\pi]$ thỏa mãn $\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} \sin x f(x) dx = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^{\pi} f^2(x) dx$ bằng?

- A. $\frac{3}{\pi}$ B. $\frac{3\pi-8}{\pi^2-8}$ C. $\frac{3\pi-4}{\pi^2-2}$ D. $\frac{3}{2\pi}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f^2(x) dx$ bằng?

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 3 D. $\frac{8}{3}$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;e]$ thỏa mãn $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \ln x.f(x) dx = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_1^e f^2(x) dx$ bằng?

- A. $\frac{2e-5}{e^2-3e+1}$ B. $\frac{2e-3}{e-2}$ C. $\frac{2e-3}{e^2-3e+1}$ D. $\frac{2e-5}{e-2}$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x f(x) dx = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx$ bằng?

- A. $\frac{4\ln(2e)}{\pi^2 - 4\pi + 4\ln^2 2}$ B. $\frac{4\ln(2) - 4}{\pi^2 - 4\pi + 4\ln^2 2}$ C. $\frac{16\ln(2e)}{\pi^2 - 4\pi + 4\ln^2 2}$ D. $\frac{16\ln(2) - 16}{\pi^2 - 4\pi + 4\ln^2 2}$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^{2018} \cdot f(x) dx = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 [f(x)]^2 dx$ là?

- A. 4036 B. 4038 C. 4034 D. 4032

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x \cdot f(x) dx = \int_0^1 f(x) \sqrt{x} dx = 1$ và $\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 5$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{5}{7}$ C. $\frac{1}{18}$ D. $\frac{1}{21}$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; \pi]$ thỏa mãn $\int_0^{\pi} f'(x) \sin x dx = -1$ và $\int_0^{\pi} (f(x))^2 dx = \frac{2}{\pi}$. Tính tích phân $\int_0^{\pi} x \cdot f(x) dx$

- A. $-\frac{4}{\pi}$ B. $-\pi$ C. $-\frac{2}{\pi}$ D. $-\frac{\pi}{2}$

Chú ý xem lời giải ví dụ minh họa để vận dụng!

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$, thỏa $\int_1^2 x^3 f(x) dx = 31$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_1^2 f^4(x) dx$ bằng?

A. 961. B. 3875. C. 148955. D. 923521.

Lời giải

Vẫn là bất đẳng thức Cauchy – Schwarz nhưng yêu cầu của bài toán $f(x)$ bậc 4 và giả thiết chỉ có 1, vì thế ý tưởng của ta là đánh giá trực tiếp yêu cầu $\int_1^2 f^4(x) dx$ qua $\int_1^2 x^3 f(x) dx = 31$.

Thế sử dụng Cauchy – Schwarz như thế nào? Rất đơn giản đó là sử dụng liên tiếp bất đẳng thức Cauchy – Schwarz!

Ta có áp dụng hai lần liên tiếp bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta được:

$$31^4 = \left(\int_1^2 x^3 f(x) dx \right)^4 = \left[\left(\int_1^2 x^2 \cdot x f(x) dx \right)^2 \right]^2 \leq \left(\int_1^2 x^4 dx \right)^2 \left(\int_1^2 x^2 f^2(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_1^2 x^4 dx \right)^3 \int_1^2 f^4(x) dx$$

$$\text{Suy ra } \int_1^2 f^4(x) dx \geq \frac{31^4}{\left(\int_1^2 x^4 dx \right)^3} = 3875.$$

Dấu "=" xảy ra khi $f(x) = kx$ nên $k \int_1^2 x^4 dx = 31 \Leftrightarrow k = 5 \Rightarrow f(x) = 5x^2$

Chọn ý B.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$, thỏa mãn $f(2)=1$,
 $\int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{8}{15}$ và $\int_0^2 [f'(x)]^4 dx = \frac{32}{5}$ Giá trị của tích phân $\int_0^2 f(x) dx$ bằng?
 A. $-\frac{3}{2}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. $-\frac{7}{3}$. D. $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Vẫn như bài trên ta phải làm xuất hiện $(f'(x))^4$. Tích phân từng phần $\int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{8}{15}$ kết

hợp với $f(2) = 1$, ta được $\int_0^2 x^3 f'(x) dx = \frac{32}{5}$.

Áp dụng *Cauchy – Schwarz* 2 lần ta được

$$\begin{aligned} \left(\frac{32}{5}\right)^4 &= \left(\int_0^2 x^3 f'(x) dx\right)^4 = \left(\int_0^2 x^2 \cdot x f'(x) dx\right)^4 \leq \left(\int_0^2 x^4 dx\right)^2 \left(\int_0^2 x^2 [f'(x)]^2 dx\right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^2 x^4 dx\right)^2 \left(\int_0^2 x^2 [f'(x)]^2 dx\right)^2 \leq \left(\int_0^2 x^4 dx\right)^2 \times \left(\int_0^2 x^4 dx \cdot \int_0^2 [f'(x)]^4 dx\right) \\ &= \left(\int_0^2 x^4 dx\right)^3 \times \int_0^2 [f'(x)]^4 dx = \frac{1048576}{625} = \left(\frac{32}{5}\right)^4. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $xf'(x) = kx^2 \Rightarrow f'(x) = kx$ thay vào $\int_0^2 [f'(x)]^4 dx = \frac{32}{5}$ ta tìm được $k = 1$

$$\Rightarrow f'(x) = x \Rightarrow f(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C \xrightarrow{f(2)=1} C = -1.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{x^2}{2} - 1 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = -\frac{2}{3}.$$

Chọn ý B.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức *AM - GM* ta có:

$$[f'(x)]^4 + x^4 + x^4 + x^4 \geq 4x^3 f'(x)$$

Do vậy $\int_0^2 [f'(x)]^4 dx + 3 \int_0^2 x^4 dx \geq 4 \int_0^2 x^3 f'(x) dx$. Mà giá trị của hai vế bằng nhau, có nghĩa là dấu "=" xảy ra nên $f'(x) = x$. Đến đây là tiếp như trên!

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(1) = \frac{3}{2}$; $\int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{6}$ và $\int_0^1 (x-1) \sqrt{1 + \frac{x}{x-2}} (f'(x))^2 dx = -\frac{1}{3}$. Tính $\int_0^1 f^2(x) dx$?

A. $\frac{7}{3}$

B. $\frac{8}{15}$

C. $\frac{53}{60}$

D. $\frac{203}{60}$

Lời giải

Một bài toán khá khó, ta thấy rằng có một lượng bình phương trong căn nhưng tuy nhiên nếu để nguyên thì không thể nào áp dụng Cauchy – Schwarz được, do đó sẽ nảy ra ý tưởng sử dụng bất đẳng thức AM – GM để phá căn. Nhưng ta không thể áp dụng luôn được do $x-1 < 0$ bởi bất đẳng thức AM – GM áp dụng cho 2 số dương, do đó phải đổi chiều lại mới sử dụng được. Trước tiên phải biến đổi giả thiết đầu tiên trước đã.

$$\text{Sử dụng tích phân từng phần ta có: } \int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{6} = f(1) - \int_0^1 x.f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 x.f'(x) dx = \frac{2}{3}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$2(1-x)\sqrt{1+\frac{x}{x-2}(f'(x))^2} \leq (1-x)^2 + 1 + \frac{x}{x-2}(f'(x))^2$$

Tích phân hai vế trên đoạn $[0;1]$ ta có:

$$\frac{2}{3} \leq \frac{4}{3} + \int_0^1 \frac{x}{x-2}(f'(x))^2 dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{2-x}(f'(x))^2 dx \leq \frac{2}{3}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 x.f'(x) dx \right)^2 &= \frac{4}{9} = \left(\int_0^1 \sqrt{x(2-x)} \sqrt{\frac{x}{2-x}} f'(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 x(2-x) dx \cdot \int_0^1 \frac{x}{2-x} (f'(x))^2 dx \\ &\Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{2-x} (f'(x))^2 dx \geq \frac{2}{3} \Rightarrow f'(x) = 2-x \Rightarrow f(x) = 2x - \frac{x^2}{2} \Rightarrow \int_0^1 f^2(x) dx = \frac{53}{60}. \end{aligned}$$

Chọn ý C.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 xf(x) dx = 0$ và $\max_{[0;1]} |f(x)| = 6$.

Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 x^2 f(x) dx$ là?

A. 2

B. $2 - \sqrt{2}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $-1 + \sqrt{2}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 x^2 f(x) dx \right| &= \left| \int_0^1 x^2 f(x) dx - \int_0^1 ax f(x) dx \right| = \left| \int_0^1 (x^2 - ax) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |x^2 - ax| |f(x)| dx \leq \int_0^1 |x^2 - ax| \max_{[0;1]} |f(x)| dx = 6 \int_0^1 |x^2 - ax| dx \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \left| \int_0^1 x^2 f(x) dx \right| \leq 6 \min_{a \in \mathbb{R}} \int_0^1 |x^2 - ax| dx \leq 6 \min_{[0;1]} \int_0^1 |x^2 - ax| dx = 2 - \sqrt{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra tại } a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Chọn ý B.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)dx = 0$ và $\max_{[0;1]} |f(x)| = 6$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 x^3 f(x)dx$ là?

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{4}$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x^2 f(x)dx = 0$ và $\max_{[0;1]} |f(x)| = 6$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 x^3 f(x)dx$ là?

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{3(2-\sqrt[3]{4})}{4}$ C. $\frac{2-\sqrt[3]{4}}{16}$ D. $\frac{1}{24}$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)dx = 0$ và $\max_{[0;1]} |f(x)| = 6$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 x^4 f(x)dx$ là?

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{3(4-\sqrt{2})}{10}$ C. $\frac{4-\sqrt{2}}{20}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{24}$

Tóm lại:

- Đây là một vấn đề có thể gọi là khó, nhưng tuy nhiên nếu tìm hiểu kỹ thì ta có thể thấy nó cũng khá đơn giản, mấu chốt vẫn luôn là các đại lượng bình phương, các đại lượng khác đều phải biến đổi để đưa về đại lượng này.
- Kinh nghiệm giải nhanh: Các bài toán ở đây dấu "=" đều xảy ra tại $f(x) = k.g(x)$, ví dụ như bài toán ví dụ 1, $f'(x) = kx^3$, vậy trong khi thi trắc nghiệm nếu biến đổi theo đúng mẫu của bất đẳng thức này rồi thì ta có thể dự đoán được mối liên hệ và thế ngược lại tìm hằng số k, không phải mất công sử dụng bất đẳng thức để chứng minh nó nữa, sẽ tiết kiệm được thời gian làm bài!

LUYỆN TẬP

Câu 1: Với các số thực $a \in [0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \int_0^1 |x^2 - ax|dx$

- A. $m = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$ B. $m = \frac{-1+\sqrt{2}}{3}$ C. $m = \frac{-1+\sqrt{2}}{6}$ D. $m = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$

Chọn ý A.

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta dễ dàng tìm được $S \geq \frac{2-\sqrt{2}}{6}$.

Câu 2: Kí hiệu A là tập các hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$.

Tìm $I = \max_{f(x) \in A} \left\{ \int_0^1 x^{2013} f(x)dx - \int_0^1 x.f^2(x)dx \right\}$

A. $\frac{1}{2014}$

B. $\frac{503}{2014}$

C. $\frac{2012}{2013}$

D. $\frac{1}{16104}$

: Chọn ý A.

$$\text{Ta có } \int_0^1 x^{2013} f(x) dx - \int_0^1 x \cdot f^2(x) dx = - \int_0^1 \left(\sqrt{x} f(x) - \frac{x^{2012} \sqrt{x}}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^1 x^{4025} dx \leq \frac{1}{4 \cdot 4026}$$

Câu 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của tích phân $I = \int_a^b |x^2 + (2-m)x - 2| dx$ ($a < b$) trong đó a, b là nghiệm của phương trình $x^2 + (2-m)x - 2 = 0$

A. $\frac{128}{9}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

D. 8

Chọn ý C.

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta dễ dàng tìm được $I \geq \frac{8\sqrt{2}}{3}$

Câu 4: Với các số thực $a \in [0; 1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích phân $I = \int_0^1 |x^3 - ax| dx$.

A. $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{2-\sqrt{2}}{8}$

Chọn ý B.

Phá trị tuyệt đối ta có

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 |x^3 - ax| dx = \int_0^{\sqrt{a}} |x^3 - ax| dx + \int_{\sqrt{a}}^1 |x^3 - ax| dx \\ &= \int_0^{\sqrt{a}} (ax - x^3) dx + \int_{\sqrt{a}}^1 (x^3 - ax) dx = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Câu 5: Cho m là tham số thực $m \in [1; 3]$. Gọi a, b lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của tích phân $S = \int_m^{2m} |x^3 - 4mx^2 + 5m^2x - 2m^3| dx$. Tính $P = a + b$

A. $P = \frac{41}{6}$

B. $P = 1$

C. $P = \frac{21}{4}$

D. $P = 2$

Chọn ý A.

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned} S &= \int_m^{2m} |x^3 - 4mx^2 + 5m^2x - 2m^3| dx = \int_m^{2m} |(x-m)^2(x-2m)| dx \\ &= - \int_m^{2m} ((x-m)^2(x-2m)) dx = - \int_m^{2m} (x-m)^3 d(x-m) + m \int_m^{2m} (x-m)^2 d(x-m) \\ &= \left(-\frac{1}{4}(x-m)^4 + \frac{m}{3}(x-3)^3 \right) \Big|_m^{2m} = \frac{1}{12} m^4 \in \left[\frac{1}{12}; \frac{81}{12} \right] \end{aligned}$$

Câu 6: Kí hiệu A là tập các hàm số liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0; 1]$. Xác định số thực c nhỏ nhất sao cho $\int_0^1 f(\sqrt[2018]{x}) dx \leq c \int_0^1 f(x) dx \forall f(x) \in A$.

A. 2018

B. 1

C. $\frac{1}{2018}$

D. $\sqrt{2018}$

Chọn ý A.

$$\text{Đặt } t^{2018} = x \Rightarrow dx = 2018t^{2017} \Rightarrow \int_0^1 f\left(\sqrt[2018]{x}\right) dx = 2018 \int_0^1 t^{2017} f(t) dt \leq 2018 \int_0^1 f(t) dt$$

Do c nhỏ nhất nên $c \leq 2018$. Ta sẽ chứng minh $c = 2018$ là số cần tìm. Ta xét hàm số

$$f(x) = x^p \text{ thay vào bất đẳng thức đề bài ta có } \int_0^1 x^{\frac{p}{2018}} dx \leq c \int_0^1 x^p dx \Rightarrow c \geq \frac{2018(p+1)}{p+2018}$$

Cho $p \rightarrow +\infty$ ta suy ra $c \geq 2018$. Vậy $c = 2018$ là số cần tìm

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$

$$\text{thỏa mãn } f(1) = 2018f(0). \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của } M = \int_0^1 \left[\frac{1}{(f(x))^2} + (f'(x))^2 \right] dx$$

- A. $\ln 2018$ B. $2 \ln 2018$ C. $2e$ D. $2018e$

Chọn ý B.

Sử dụng cách phân tích bình phương ta có

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 \left[\frac{1}{(f(x))^2} + (f'(x))^2 \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{f(x)} - f'(x) \right]^2 dx + 2 \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx \\ &\geq 2 \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = 2 \ln 2018 \end{aligned}$$

Câu 8: Cho 2 số thực a, b thỏa mãn $a < b$ và $a + b = ab + 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức tích phân $M = \int_a^b \left| (x-a)^2 (x-b) \right| dx$.

- A. 12 B. 0 C. $\frac{64}{3}$ D. $\frac{49}{3}$

Chọn ý A.

Thực hiện tương tự các câu trên.

Câu 9: Kí hiệu A là tập các hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$.

$$\text{Tìm } I = \min_{f(x) \in A} \left\{ -\int_0^1 x^{2013} f(x) dx + \int_0^1 x \cdot f^2(x) dx \right\}$$

- A. $-\frac{1}{2019}$ B. $-\frac{1}{16144}$ C. $-\frac{2017}{2018}$ D. $-\frac{1}{16140}$

Chọn ý B.

Câu 10: Với $m \in [1;3]$, gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$I = \int_m^{2m} (x-m)^2 (x-2m)^2 dx. \text{ Tính } a + b = ?$$

- A. 31 B. 36 C. $\frac{122}{15}$ D. $\frac{121}{4}$

Chọn ý C.

Câu 11: Biết giá trị nhỏ nhất của $I = \int_{2m}^{2m^2+2} |x^2 - 2(m^2 + m + 1)x + 4(m^3 + m)| dx = \frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + b = ?$

- A. 7 B. 337 C. 25 D. 91

Chọn ý C.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $a.f(b) + b.f(a) \leq \frac{2018}{\pi}$ với mọi a, b thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$

- A. $\frac{1009}{\pi}$ B. $\frac{2018}{\pi}$ C. $\frac{1009}{2}$ D. 1009

Chọn ý C.

Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt \Rightarrow M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) \cos t dt$

Tương tự đặt $x = \cos t \Rightarrow M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) \sin t dt$

Do đó $M = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(\cos t) \sin t + f(\sin t) \cos t) dt \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2018}{\pi} dt \leq \frac{1009}{2}$

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn tại $f(x) = \frac{2018}{\pi(x^2 + 1)}$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x) + f\left((1-\sqrt{x})^2\right) \leq 1$ với mọi x thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của tích phân $I = \int_0^1 (1-\sqrt{x}) f(x) dx$.

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{\pi}{12}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{\pi}{16}$

Chọn ý C.

Đặt $x = \sin^4 t \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) f(\sin^4 t) 4 \sin^3 t \cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^4 t) 4 \sin^3 t \cos^3 t dt$

Đặt $x = \cos^4 t \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) f(\cos^4 t) 4 \cos^3 t \sin t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^4 t) 4 \sin^3 t \cos^3 t dt$

Do đó $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(\sin^4 t) + f(\cos^4 t)) \sin^3 t \cos^3 t dt \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t dt = \frac{1}{6}$

Câu 14: Cho a, b là hai số thực thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq 1$. Đặt $f(a, b) = \int_a^b (2 - x - 3x^2) dx (a < b)$.

Biết rằng $\max f(a, b) = \frac{m}{n}$ với m, n là các số thực dương vào $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính

$T = m + n$.

- A. 49 B. 71 C. 67 D. 179

Chọn ý A.

Ta đặt $g(a) = \int_a^b (2-x-3x^2)dx = 2(b-a) + \frac{a^2-b^2}{2} + a^3-b^3$

Ta có $g'(a) = 0 \Leftrightarrow a = -1; a = \frac{2}{3} \Rightarrow \max_{[0;1]} g(a) = \max \left\{ g(0); g(1); g\left(\frac{2}{3}\right) \right\}$
 $= \max \left\{ \frac{1}{2}(-2b^3 - b^2 + 4b); \frac{1}{2}(-2b^3 - b^2 + 4b) - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(-2b^3 - b^2 + 4b) - \frac{22}{27} \right\}$
 $= g(b) = \frac{1}{2}(-2b^3 - b^2 + 4b) \leq \frac{22}{27}$

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) \leq 1 \forall x$ và $f(1) = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của $f(1)$

- A. $e-1$ B. $\frac{e-1}{e}$ C. $\frac{e}{e-1}$ D. e

Chọn ý B.

Câu 16: Cho $f(x)$ liên tục trên $[1;8]$ thỏa mãn $\int_1^2 \left((f(x^3))^2 + 2f(x^3) \right) dx = \frac{2}{3} \int_1^8 f(x) dx - \frac{38}{15}$. Giá trị của tích phân $\int_1^8 f(x) dx$ bằng?

- A. $\frac{2(\sqrt[3]{2}-4)}{5}$ B. $\frac{58}{5}$ C. $\frac{490}{3}$ D. $\frac{128}{5}$

Chọn ý B.

Đặt $x^3 = t \Rightarrow 3x^2 dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{3\sqrt[3]{t^2}} \Rightarrow \int_1^2 \left((f(x^3))^2 + 2f(x^3) \right) dx = \int_1^8 \frac{(f(x))^2 + 2f(x)}{3\sqrt[3]{x^2}} dx$

Đến đây ta lại sử dụng kỹ thuật đưa về bình phương để giải quyết bài toán!

Câu 17: Cho số thực dương a , giá trị lớn nhất của tích phân $I = \int_{-2a}^a \left| \frac{2x^2 + 2ax - 4a^2}{1+a^4} \right| dx$ bằng?

- A. $\frac{27}{4}$ B. $\sqrt[4]{3}$ C. $\frac{27}{\sqrt[4]{4}}$ D. $\frac{27}{4\sqrt[4]{3}}$

Chọn ý D.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f'(x) \geq f(x) > 0$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx$.

- A. $\frac{1}{f(0)}$ B. $\frac{1}{f(1)}$ C. $\frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(1)}$ D. $\frac{1}{2f(0)} + \frac{1}{2f(1)}$

Chọn ý C.

Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \leq \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \int_0^1 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(1)}$

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và $\int_0^1 (f^3(x) + 4(f'(x))^3) dx \leq 3 \int_0^1 f'(x)f^2(x) dx$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $2(\sqrt{e} - 1)$ B. $2(e^2 - 1)$ C. $\frac{-1 + \sqrt{e}}{2}$ D. $\frac{e^2 - 1}{2}$

Chọn ý A.

Nhận thấy $f'(x) > 0, \forall x \in [0;1] \Rightarrow 1 = f(0) \leq f(x) \leq f(1)$

Khi đó ta có $f^3(x) + 4[f'(x)]^3 - 3f'(x)f^2(x) = [f(x) - 2f'(x)]^2 (f(x) + f'(x)) \geq 0$

Đến đây ta có thể dễ dàng giải quyết bài toán!

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f'(x) \geq 2f(x) > 0$, với mọi

$x \in [0;1]$ và $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx = \frac{1}{\sqrt{f(0)}} - \frac{1}{\sqrt{f(1)}}$. Giá trị của biểu thức $\frac{f(1)}{f(0)}$ bằng

- A. $\sqrt{2e}$ B. e^2 C. $2e$ D. $\frac{e}{2}$

Chọn ý C.

Ta có $f'(x) \geq 2f(x) > 0 \Rightarrow 2 \leq \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx \leq \int_0^1 \frac{f'(x)}{2\sqrt{f^3(x)}} dx = \frac{1}{\sqrt{f(0)}} - \frac{1}{\sqrt{f(1)}}$

Dấu "=" xảy ra khi $f'(x) = 2f(x) \Rightarrow f(x) = ke^{2x} (k > 0) \Rightarrow \frac{f(1)}{f(0)} = \frac{ke^2}{ke^0} = e^2$

16. CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP.

Câu 1: Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn bất phương trình

$$\int_1^2 e^{kx} dx < \frac{2018 \cdot e^k - 2018}{k}. \text{ Số phần tử của tập hợp } S \text{ bằng.}$$

- A. 7 B. 8 C. Vô số. D. 6

Lời giải

Ta có: $\int_1^2 e^{kx} dx = \left(\frac{1}{k} e^{kx} \right) \Big|_1^2 = \frac{e^{2k} - e^k}{k}$

$$\int_1^2 e^{kx} dx < \frac{2018 \cdot e^k - 2018}{k} \Leftrightarrow \frac{e^{2k} - e^k}{k} < \frac{2018 \cdot e^k - 2018}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^k (e^k - 1) < 2018(e^k - 1) (k > 0)$$

$$\Leftrightarrow (e^k - 1)(e^k - 2018) < 0 \Leftrightarrow 1 < e^k < 2018 \Leftrightarrow 0 < k < \ln 2018 \approx 7.6$$

Do k nguyên dương nên ta chọn được $k \in S$ (với $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$).

Suy ra số phần tử của S là 7.

Chọn ý A.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $[1; +\infty)$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $f'(x) \geq 3x^2 + 2x - 5$ trên $[1; +\infty)$. Tìm số nguyên dương lớn nhất m sao cho $\min_{x \in [3; 10]} f(x) \geq m$ với mọi hàm số $y = f(x)$ thỏa điều kiện đề bài.

A. $m = 15$

B. $m = 20$

C. $m = 25$

D. $m = 30$

Lời giải

Ta có: $f'(x) \geq 3x^2 + 2x - 5$ trên $[1; +\infty)$

Do $3x^2 + 2x - 5 \geq 0, \forall x \in [1; +\infty)$ nên $f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; +\infty)$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$. Suy ra $\min_{x \in [3; 10]} f(x) = f(3)$.

Ta lại có: $\int_1^3 f'(x) dx \geq \int_1^3 (3x^2 + 2x - 5) dx$

$$\Leftrightarrow f(x) \Big|_1^3 \geq (x^3 + x^2 - 5x) \Big|_1^3 \Leftrightarrow f(3) - f(1) \geq 24 \Leftrightarrow f(3) \geq 25$$

Vậy $\min_{x \in [3; 10]} f(x) \geq 25$. Hay $m = 25$.

Chọn ý C.

Câu 3: Biết $\int_1^2 \left(\sqrt[3]{x - \frac{1}{x^2}} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8} - \frac{1}{x^{11}}} \right) dx = \frac{a}{b} \sqrt[3]{c}$, với a, b, c nguyên dương, $\frac{a}{b}$ tối giản và $c < a$. Tính $S = a + b + c$?

A. $S = 51$

B. $S = 67$

C. $S = 39$

D. $S = 75$

Lời giải

Ta có $\int_1^2 \left(\sqrt[3]{x - \frac{1}{x^2}} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8} - \frac{1}{x^{11}}} \right) dx = \int_1^2 \sqrt[3]{x - \frac{1}{x^2}} \left(1 + \frac{2}{x^3} \right) dx$.

Đặt $t = \sqrt[3]{x - \frac{1}{x^2}} \Rightarrow t^3 = x - \frac{1}{x^2} \Rightarrow 3t^2 dt = \left(1 + \frac{2}{x^3} \right) dx$.

Khi đó $\int_1^2 \left(\sqrt[3]{x - \frac{1}{x^2}} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8} - \frac{1}{x^{11}}} \right) dx = \int_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}} 3t^3 dt = \frac{3}{4} t^4 \Big|_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}} = \frac{21}{32} \sqrt[3]{14}$.

Chọn ý B.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x \in (0; +\infty)$ đồng thời thỏa mãn

các điều kiện $f(x) = x(\sin x + f'(x)) + \cos x$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \sin x dx = -4$. Khi đó giá trị của $f(\pi)$

nằm trong khoảng nào?

A. $(6; 7)$

B. $(5; 6)$

C. $(12; 13)$

D. $(11; 12)$

Lời giải

Ta có:

$$f(x) = x(\sin x + f'(x)) + \cos x \Rightarrow \frac{f(x) - xf'(x)}{x^2} = \frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \left(\frac{1}{x} \cos x \right)' \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} \cos x + c \Rightarrow f(x) = \cos x + cx$$

Khi đó: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \sin x dx = -4 \Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos x + cx) \sin x dx = -4$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \sin x dx + c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x \sin x dx = -4 \Leftrightarrow 0 + c(-2) = -4 \Leftrightarrow c = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos x + 2x \Rightarrow f(\pi) = 2\pi - 1 \in (5; 6).$$

Chọn ý B.

Câu 5: Cho $\int_0^1 x \left[\ln(x+2) + \frac{1}{x+2} \right] dx = \frac{a^2 \ln 2 - bc \ln 3 + c}{4}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}$. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 13$

B. $T = 15$

C. $T = 17$

D. $T = 11$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+2) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+2} \\ v = \frac{x^2 - 4}{2} \end{cases}$.

Khi đó tích phân ban đầu trở thành

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \left[\ln(x+2) + \frac{1}{x+2} \right] dx &= \frac{x^2 - 4}{2} \ln(x+2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x-2}{2} dx + \int_0^1 \frac{x}{x+2} dx \\ &= \frac{-3}{2} \ln 3 + 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_0^1 + (x - 2 \ln(x+2)) \Big|_0^1 \\ &= \frac{-3}{2} \ln 3 + 2 \ln 2 + \frac{3}{4} + 1 - 2(\ln 3 - \ln 2) = \frac{-14 \ln 3 + 16 \ln 2 + 7}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra: $\begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \\ c = 7 \end{cases}$. Vậy $T = a + b + c = 13$.

Chọn ý A.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot [f(x)]^{2018} = x \cdot e^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 1$. Hỏi phương trình $f(x) = -\frac{1}{e}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0

B. 1

C. 3

D. 2

Lời giải

Ta có: $\int f'(x) \cdot [f(x)]^{2018} dx = \int x \cdot e^x dx \Leftrightarrow \int [f(x)]^{2018} df(x) = (x-1) \cdot e^x + C$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2019} \cdot [f(x)]^{2019} = (x-1) \cdot e^x + C \Leftrightarrow [f(x)]^{2019} = 2019(x-1) \cdot e^x + 2019C.$

Do $f(1) = 1$ nên $2019C = 1$ hay $[f(x)]^{2019} = 2019(x-1) \cdot e^x + 1.$

Ta có: $f(x) = -\frac{1}{e} \Leftrightarrow [f(x)]^{2019} = -\frac{1}{e^{2019}} \Leftrightarrow 2019(x-1) \cdot e^x + 1 + \frac{1}{e^{2019}} = 0.$

Xét hàm số $g(x) = 2019(x-1) \cdot e^x + 1 + \frac{1}{e^{2019}}$ trên $\mathbb{R}.$

Ta có $\begin{cases} g'(x) = 2019x \cdot e^x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; g(0) = -2019 + 1 + \frac{1}{e^{2019}} < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1 + \frac{1}{e^{2019}} > 0 \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$1 + e^{-2019}$				

Do đó phương trình $f(x) = -\frac{1}{e}$ có đúng 2 nghiệm.

Chọn ý D.

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị của tham số m nằm trong khoảng $(0; 6\pi)$ thỏa mãn phương

trình $\int_0^m \frac{\sin x}{5+4 \cos x} dx = \frac{1}{2}?$

A. 6

B. 12

C. 8

D. 4

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \int_0^m \frac{\sin x}{5+4 \cos x} dx = -\int_0^m \frac{1}{5+4 \cos x} d(\cos x) \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^m \frac{1}{5+4 \cos x} d(5+4 \cos x) = -\frac{1}{4} \ln |5+4 \cos x| \Big|_0^m \end{aligned}$$

Mà $5+4 \cos x \geq 5-4 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \ln(5+4 \cos x) \Big|_0^m = -\frac{1}{4} \ln \frac{5+4 \cos m}{9}$

$$\Rightarrow \ln \frac{5+4 \cos m}{9} = -2 \Leftrightarrow \frac{5+4 \cos m}{9} = e^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \cos m = \frac{9e^{-2} - 5}{4} \Leftrightarrow m = \pm \arccos \frac{9e^{-2} - 5}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Theo đề bài } m \in (0; 6\pi) \Rightarrow \begin{cases} \arccos \frac{9e^{-2} - 5}{4} + k2\pi \in (0; 6\pi) \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \\ k = 2 \end{cases} \\ -\arccos \frac{9e^{-2} - 5}{4} + k2\pi \in (0; 6\pi) \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 2 \\ k = 3 \end{cases} \end{cases}$$

Với mỗi giá trị k trong hai trường hợp trên ta được một giá trị m thỏa mãn.

Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Chọn ý A.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int \frac{f(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{x+5} + C$.

Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là:

A. $\frac{x+3}{2(x^2+4)} + C$ B. $\frac{x+3}{x^2+4} + C$ C. $\frac{2x+3}{4(x^2+1)} + C$ D. $\frac{2x+3}{8(x^2+1)} + C$

Lời giải

Theo giả thiết ta có :

$$\int \frac{f(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{x+5} + C \Leftrightarrow 2 \int f(\sqrt{x+1}) d(\sqrt{x+1}) = \frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{(\sqrt{x+1})^2 + 4} + C.$$

$$\text{Hay } 2 \int f(t) dt = \frac{2(t+3)}{t^2+4} + C \Rightarrow \int f(t) dt = \frac{t+3}{t^2+4} + \frac{C}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \int f(2x) dx = \frac{1}{2} \int f(2x) d(2x) = \frac{1}{2} \left(\frac{2x+3}{(2x)^2+4} + \frac{C}{2} \right) = \frac{2x+3}{8x^2+8} + \frac{C}{4}$$

Chọn ý D.

Câu 9: Cho số hữu tỷ dương m thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2m}} x \cdot \cos mx dx = \frac{\pi-2}{2}$. Hỏi số m thuộc khoảng

nào trong các khoảng dưới đây?

A. $\left(\frac{7}{4}; 2\right)$ B. $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ C. $\left(1; \frac{6}{5}\right)$ D. $\left(\frac{5}{6}; \frac{8}{7}\right)$

Lời giải

Áp dụng công thức tích phân từng phần, đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos mx dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{m} \sin mx \end{cases}$

Tích phân ban đầu trở thành:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2m}} x \cdot \cos mx dx = \frac{x}{m} \sin mx \Big|_0^{\frac{\pi}{2m}} - \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \sin mx dx = \frac{\pi}{2m^2} + \frac{1}{m^2} \cdot \cos mx \Big|_0^{\frac{\pi}{2m}} = \left(\frac{\pi-2}{2} \right) \cdot \frac{1}{m^2}$$

Theo giả thiết ta có $\left(\frac{\pi-2}{2}\right) \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{\pi-2}{2} \Leftrightarrow m = \pm 1$

Vì m là số hữu tỷ dương nên $m = 1 \in \left(\frac{5}{6}; \frac{8}{7}\right)$.

Chọn ý D.

Câu 10: Cho $I_n = \int \tan^n x dx$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó $I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + \dots + I_8) + I_9 + I_{10}$ bằng?

- A. $\sum_{r=1}^9 \frac{(\tan x)^r}{r} + C$ B. $\sum_{r=1}^9 \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$ C. $\sum_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^r}{r} + C$ D. $\sum_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$

Lời giải

Biến đổi tích phân ban đầu ta có

$$\begin{aligned} I_n &= \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} + C \\ &= \int \tan^{n-2} x \cdot (\tan x)' dx - I_{n-2} \Rightarrow I_n + I_{n-2} = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} + C. \end{aligned}$$

Khi đó $I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + \dots + I_8) + I_9 + I_{10} = (I_{10} + I_8) + (I_9 + I_7) + \dots + (I_3 + I_1) + (I_2 + I_0)$

$$= \frac{\tan^9 x}{9} + \frac{\tan^8 x}{8} + \dots + \frac{\tan^2 x}{2} + \tan x + C = \sum_{r=1}^9 \frac{\tan^r x}{r} + C.$$

Chọn ý A.

Câu 11: Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1) = 1$ và

$f(2) = 4$. Tính $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2} \right) dx$.

- A. $J = 1 + \ln 4$ B. $J = 4 - \ln 2$ C. $J = \ln 2 - \frac{1}{2}$ D. $J = \frac{1}{2} + \ln 4$

Lời giải

Cách 1: Ta có $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \frac{f'(x)}{x} dx - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x^2} dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

Khi đó tích phân ban đầu trở thành

$$\begin{aligned} J &= \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{x} \cdot f(x) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} f(2) - f(1) + \left(2 \ln x + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 4. \end{aligned}$$

Cách 2: Ta có

$$J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\frac{f(x)}{x} + 2\ln|x| + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 4.$$

Chọn ý D.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = \sqrt{e^x + e^{-x} - 2}$, $f(0) = 5$ và $f\left(\ln \frac{1}{4}\right) = 0$. Giá trị của biểu thức $S = f(-\ln 16) + f(\ln 4)$ bằng?

A. $S = \frac{31}{2}$

B. $S = \frac{9}{2}$

C. $S = \frac{5}{2}$

D. $f(0).f(2) = 1$

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = \sqrt{e^x + e^{-x} - 2} = \frac{|e^x - 1|}{\sqrt{e^x}} = \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} & \text{khi } x \geq 0 \\ e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}} & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } f(x) = \begin{cases} 2e^{\frac{x}{2}} + 2e^{-\frac{x}{2}} + C_1 & \text{khi } x \geq 0 \\ -2e^{-\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Theo giả thiết ta có:

$$f(0) = 5 \text{ nên } 2e^0 + 2e^0 + C_1 = 5 \Leftrightarrow C_1 = 1 \Rightarrow f(\ln 4) = 2e^{\frac{\ln 4}{2}} + 2e^{-\frac{\ln 4}{2}} + 1 = 6$$

$$\text{Tương tự ta có } f\left(\ln \frac{1}{4}\right) = 0 \text{ nên } -2e^{-\frac{\ln(\frac{1}{4})}{2}} - 2e^{\frac{\ln(\frac{1}{4})}{2}} + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = 5$$

$$\Rightarrow f(-\ln 16) = -2e^{-\frac{(-\ln 16)}{2}} - 2e^{\frac{(-\ln 16)}{2}} + 5 = -\frac{7}{2}$$

$$\text{Vậy } S = f(-\ln 16) + f(\ln 4) = \frac{5}{2}.$$

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x) - 8x^3 f(x^4) + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = 0. \text{ Tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx \text{ có kết quả dạng } \frac{a-b\sqrt{2}}{c}, a, b, c \in \mathbb{Z},$$

$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$.

A. 6

B. -4

C. 4

D. -10

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$f(x) - 8x^3 f(x^4) + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Rightarrow f(x) = 8x^3 f(x^4) - \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 8x^3 f(x^4) dx - \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (1)$$

- Xét tích phân $\int_0^1 8x^3 f(x^4) dx = \int_0^1 2f(x^4) d(x^4) = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2I$

- Xét tích phân $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow tdt = xdx$. Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=1, x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}$.

$$\text{Nên } \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)tdt}{t} = \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Do đó } (1) \Rightarrow I = 2I - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{3} \right) \Rightarrow I = \frac{2-\sqrt{2}}{3}. \text{ Nên } a=2, b=1, c=3.$$

Vậy $a+b+c=6$.

Chọn ý A.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị dương của tham số m sao cho $\int_0^m xe^{\sqrt{x^2+1}} dx = 2^{500} \cdot e^{\sqrt{m^2+1}}$.

A. $m = 2^{250} \sqrt{2^{500}-2}$ B. $m = \sqrt{2^{1000}+1}$ C. $m = 2^{250} \sqrt{2^{500}+2}$ D. $m = \sqrt{2^{1000}-1}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^m xe^{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_1^{\sqrt{m^2+1}} te^t dt = (te^t - e^t) \Big|_1^{\sqrt{m^2+1}} = (\sqrt{m^2+1} - 1)e^{\sqrt{m^2+1}}$$

Theo giả thiết ta có

$$\int_0^m xe^{\sqrt{x^2+1}} dx = 2^{500} \cdot e^{\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow 2^{500} \cdot e^{\sqrt{m^2+1}} = (\sqrt{m^2+1} - 1)e^{\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow 2^{500} = \sqrt{m^2+1} - 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 1 = (2^{500} + 1)^2 \Leftrightarrow m^2 = 2^{1000} + 2^{501} = 2^{500}(2^{500} + 2) \Rightarrow m = 2^{250} \sqrt{2^{500} + 2}.$$

Chọn ý C.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$.

Tính tích phân $\int_0^1 f(x) dx$.

A. 2 B. 4 C. -1 D. 6

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 6x^2 f(x^3) dx - \int_0^1 \frac{6}{\sqrt{3x+1}} dx$$

Đặt $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$, đổi cận $x=0 \Rightarrow t=0, x=1 \Rightarrow t=1$.

$$\text{Ta có: } \int_0^1 6x^2 f(x^3) dx = \int_0^1 2f(t) dt = \int_0^1 2f(x) dx, \int_0^1 \frac{6}{\sqrt{3x+1}} dx = 4.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 2f(x) dx - 4 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 4$$

Chọn ý B.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$f'(0).f'(2) \neq 0$ và $g(x)f'(x) = x(x-2)e^x$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_0^2 f(x).g'(x)dx$?

A. -4

B. $e-2$

C. 4

D. $2-e$

Lời giải

Ta có $g(x)f'(x) = x(x-2)e^x \Rightarrow g(0) = g(2) = 0$ (vì $f'(0).f'(2) \neq 0$)

Khi đó tích phân cần tính trở thành:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 f(x).g'(x)dx = \int_0^2 f(x)dg(x) \\ &= (f(x).g(x))\Big|_0^2 - \int_0^2 g(x).f'(x)dx = -\int_0^2 (x^2 - 2x)e^x dx = 4. \end{aligned}$$

Chọn ý C.

Câu 17: Cho $\int_0^1 \frac{(x^2+x)e^x}{x+e^{-x}} dx = a.e + b.\ln(e+c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + 2b - c$?

A. $P = 1$

B. $P = -1$

C. $P = 0$

D. $P = -2$

Lời giải

Ta có $I = \int_0^1 \frac{(x^2+x)e^x}{x+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{(x+1)e^x x e^x}{x e^x + 1} dx.$

Đặt $t = x e^x + 1 \Rightarrow dt = (1+x)e^x dx.$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=e+1.$

Khi đó: $I = \int_1^{e+1} \frac{t-1}{t} dt = \int_1^{e+1} \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = (t - \ln|t|)\Big|_1^{e+1} = e - \ln(e+1).$

Suy ra: $a=1, b=-1, c=1$. Vậy $P = a + 2b - c = -2$.

Chọn ý D.

Câu 18: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số

$y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(0; 2018\pi)$?

A. $P = 1$

B. $P = -1$

C. $P = 0$

D. $P = -2$

Lời giải

Ta có $F'(x) = f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \Rightarrow F'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cos x - \sin x = 0, (x \neq 0) \quad (1)$

Ta thấy $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên $(1) \Leftrightarrow x = \tan x \quad (2)$

Xét $g(x) = x - \tan x$ trên $(0; 2018\pi) \setminus \left\{k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}^+\right\}$. Ta có:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = -\tan^2 x \leq 0, \forall x \in (0; 2018\pi) \setminus \left\{k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}^+\right\}.$$

- Xét $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có $g(x)$ nghịch biến nên $g(x) < g(0) = 0$ nên phương trình $x = \tan x$ vô nghiệm.

Vì hàm số $\tan x$ có chu kỳ tuần hoàn là π nên ta xét $g(x) = x - \tan x$, với $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Do đó $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ và $g(\pi) \cdot g\left(\frac{23}{16}\pi\right) < 0$ nên phương trình $x = \tan x$ có duy nhất một nghiệm x_0 .

Do đó, $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{4035}{2}\pi\right)$ có 2017 khoảng rời nhau có độ dài bằng π . Suy ra phương trình

$x = \tan x$ có 2017 nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{4035}{2}\pi\right)$.

- Xét $x \in \left(\frac{4035\pi}{2}; 2018\pi\right)$, ta có $g(x)$ nghịch biến nên $g(x) > g(2018\pi) = 2018\pi$ nên phương trình $x = \tan x$ vô nghiệm.

Vậy phương trình $F'(x) = 0$ có 2017 nghiệm trên $(0; 2018\pi)$. Do đó đồ thị hàm số $y = F(x)$ có 2017 điểm cực trị trong khoảng $(0; 2018\pi)$.

Chọn ý C.

Câu 19: Biết tích phân $\int_0^1 \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{x+2} dx = \frac{1}{a} + b \ln \frac{3}{2}$ ($a, b > 0$) tìm các giá trị thực của tham

số k để $\int_8^{ab} dx < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k^2 + 1)x + 2017}{x + 2018}$.

A. $k < 0$

B. $k \neq 0$

C. $k > 0$

D. $k \in \mathbb{R}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$\int_0^1 \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{x+2} dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{3}{x+2}\right) dx = \frac{1}{3}x^3 + 3 \ln|x+2| \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 3 \ln \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \int_8^{ab} dx = \int_8^9 dx = 1$$

$$\text{Mặt khác ta lại có } \int_8^{ab} dx < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k^2 + 1)x + 2017}{x + 2018} \Rightarrow 1 < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k^2 + 1)x + 2017}{x + 2018}$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k^2 + 1)x + 2017}{x + 2018} = k^2 + 1.$$

$$\text{Vậy để } \int_8^{ab} dx < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k^2 + 1)x + 2017}{x + 2018} \text{ thì } 1 < k^2 + 1 \Rightarrow k^2 > 0 \Rightarrow k \neq 0.$$

Chọn ý B.

Câu 20: Giả sử a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\int_0^4 \frac{2x^2 + 4x + 1}{\sqrt{2x+1}} dx = \frac{1}{2} \int_1^3 (au^4 + bu^2 + c) du$, trong đó $u = \sqrt{2x+1}$. Tính giá trị $S = a + b + c$

A. $S = 3$

B. $S = 0$

C. $S = 1$

D. $S = 2$

Lời giải

$$\text{Đặt } u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow u^2 = 2x+1 \Rightarrow \begin{cases} udu = dx \\ x = \frac{u^2 - 1}{2} \end{cases}$$

Khi đó tích phân cần tính trở thành

$$\int_0^4 \frac{2x^2 + 4x + 1}{\sqrt{2x+1}} dx = \int_1^3 \frac{2\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{u^2-1}{2}\right) + 1}{u} u \cdot du = \frac{1}{2} \int_1^3 (u^4 + 2u^2 - 1) \cdot du$$

Vậy $S = a + b + c = 1 + 2 - 1 = 2$.

Chọn ý D.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 4]$, thỏa mãn

$f(x) + f'(x) = e^{-x} \sqrt{2x+1}$ với mọi $x \in [0; 4]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $e^4 f(4) - f(0) = \frac{26}{3}$.

B. $e^4 f(4) - f(0) = 3e$.

C. $e^4 f(4) - f(0) = e^4 - 1$.

D. $e^4 f(4) - f(0) = 3$.

Lời giải

Nhân hai vế cho e^x để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$e^x f(x) + e^x f'(x) = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow [e^x f(x)]' = \sqrt{2x+1}.$$

$$\text{Suy ra } e^x f(x) = \int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{3} (2x+1) \sqrt{2x+1} + C.$$

$$\text{Vậy } e^4 f(4) - f(0) = \frac{26}{3}.$$

Chọn ý A.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018x^{2017} e^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1) = 2018e^{-2018}$.

B. $f(1) = 2017e^{2018}$.

C. $f(1) = 2018e^{2018}$.

D. $f(1) = 2019e^{2018}$.

Lời giải

Nhân hai vế cho e^{-2018x} để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{-2018x} - 2018f(x)e^{-2018x} = 2018x^{2017} \Leftrightarrow [f(x)e^{-2018x}]' = 2018x^{2017}$$

Suy ra $f(x)e^{-2018x} = \int 2018x^{2017} dx = x^{2018} + C$.

Thay $x = 0$ vào hai vế ta được $C = 2018 \Rightarrow f(x) = (x^{2018} + 2018)e^{2018x}$

Vậy $f(1) = 2019e^{2018}$.

Chọn ý D.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) + xf(x) = 2xe^{-x^2}$ và $f(0) = -2$. Tính $f(1)$.

- A. $f(1) = e$. B. $f(1) = \frac{1}{e}$. C. $f(1) = \frac{2}{e}$. D. $f(1) = -\frac{2}{e}$.

Lời giải

Nhân hai vế cho $e^{\frac{x^2}{2}}$ để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + f(x)xe^{\frac{x^2}{2}} = 2xe^{-\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow \left[e^{\frac{x^2}{2}} f(x) \right]' = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

Suy ra $e^{\frac{x^2}{2}} f(x) = \int 2xe^{-\frac{x^2}{2}} dx = -2e^{-\frac{x^2}{2}} + C$.

Thay $x = 0$ vào hai vế ta được $C = 0 \Rightarrow f(x) = -2e^{-x^2}$

Vậy $f(1) = -2e^{-1} = -\frac{2}{e}$.

Chọn ý D.

Câu 24: Biết luôn có hai số a và b để $F(x) = \frac{ax+b}{x+4}$ ($4a-b \neq 0$) là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn điều kiện $2f^2(x) = [F(x)-1]f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

- A. $a = 1, b = 4$ B. $a = 1, b = -1$ C. $a = 1, b \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ D. $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

Lời giải

Ta có $F(x) = \frac{ax+b}{x+4}$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $f(x) = F'(x) = \frac{4a-b}{(x+4)^2}$ và $f'(x) = \frac{2b-8a}{(x+4)^3}$.

Do đó $2f^2(x) = (F(x)-1)f'(x) \Leftrightarrow \frac{2(4a-b)^2}{(x+4)^4} = \left(\frac{ax+b}{x+4} - 1 \right) \frac{2b-8a}{(x+4)^3}$

$$\Leftrightarrow 4a-b = -(ax+b-x-4) \Leftrightarrow (x+4)(1-a) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ (do } x+4 \neq 0)$$

Với $a = 1$ mà $4a-b \neq 0$ nên $b \neq 4$.

Vậy $a = 1, b \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Chọn ý C.

Câu 25: Cho $I = \int_0^m (2x-1)e^{2x} dx$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $I < m$ là khoảng $(a; b)$. Tính $P = a - 3b$.

A. $P = -3$

B. $P = -2$

C. $P = 1$

D. $P = 0$

Lời giải

Áp dụng phương pháp tích phân từng phần đặt $\begin{cases} u = 2x-1 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$

Khi đó tích phân cần tính trở thành:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^m (2x-1)e^{2x} dx = \left. \frac{(2x-1)e^{2x}}{2} \right|_0^m - \int_0^m e^{2x} dx \\ &= \frac{(2m-1)e^{2m}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^m = me^m - e^{2m} + 1 \end{aligned}$$

Theo giả thiết ta có $I < m \Leftrightarrow me^{2m} - e^{2m} + 1 < m \Leftrightarrow (m-1)(e^{2m} - 1) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Suy ra $a = 0, b = 1 \Rightarrow a - 3b = -3$.

Chọn ý A.

Câu 26: Giá trị $I = \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}} x^2 \sin(\pi x^3) e^{\cos(\pi x^3)} dx$ gần bằng số nào nhất trong các số sau đây?

A. 0,046

B. 0,036

C. 0,037

D. 0,038

Lời giải

Đặt $u = \cos(\pi x^3) \Rightarrow du = -3\pi x^2 \sin(\pi x^3) dx \Rightarrow x^2 \sin(\pi x^3) dx = -\frac{1}{3\pi} du$.

• Khi $x = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$ thì $u = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

• Khi $x = \frac{9}{\sqrt[3]{4}}$ thì $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó $I = -\frac{1}{3\pi} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^u du = \frac{1}{3\pi} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} e^u du = \frac{1}{3\pi} e^u \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3\pi} \left(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \approx 0,037$.

Chọn ý C.

Câu 27: Biết $\int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1} dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3} = a + b \ln 2 + c \ln \frac{5}{3}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính $T = 2a + b + c$.

A. $T = 4$

B. $T = 2$

C. $T = 1$

D. $T = 3$

Lời giải

Biến đổi tích phân cần tính ta được:

$$I = \int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3} = \int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}dx}{(\sqrt{2x+1}+1)(\sqrt{2x+1}+2)}$$

$$= \int_0^4 \frac{2(\sqrt{2x+1}+1) - (\sqrt{2x+1}+2)dx}{(\sqrt{2x+1}+1)(\sqrt{2x+1}+2)} = \int_0^4 \frac{2dx}{(\sqrt{2x+1}+2)} - \int_0^4 \frac{dx}{(\sqrt{2x+1}+1)}$$

Đặt $u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow udu = dx$. Với $x=0 \Rightarrow u=1$, với $x=4 \Rightarrow u=3$.

$$\text{Suy ra } I = \int_1^3 \frac{2udu}{u+2} - \int_1^3 \frac{udu}{u+1} = \int_1^3 \left(2 - \frac{4}{u+2}\right) du - \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du$$

$$= \left(u - 4\ln|u+2| + \ln|u+1|\right) \Big|_1^3 = 2 - 4\ln\frac{5}{3} + \ln 2$$

$$\Rightarrow a=2, b=1, c=1 \Rightarrow T=2.1+1-4=1.$$

Chọn ý C.

Câu 28: Cho tích phân $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$ với $n \in \mathbb{N}$.

Đặt $u_n = 1.(I_1 + I_2) + 2.(I_2 + I_3) + 3.(I_3 + I_4) + \dots + n.(I_n + I_{n+1}) - n$. Biết $\lim u_n = L$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $L \in (-1;0)$ B. $L \in (-2;-1)$ C. $L \in (0;1)$ D. $L \in (1;2)$

Lời giải

Với $n \in \mathbb{N}$, biến đổi giả thiết ta có

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx} \cdot e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-nx} dx - \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-nx} dx - I_n$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \int_0^1 e^{-nx} dx - I_n \Rightarrow I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n}(1 - e^{-n})$$

$$\text{Do đó } u_n = (1 - e^{-1}) + (1 - e^{-2}) + (1 - e^{-3}) + \dots + (1 - e^{-n}) - n \Rightarrow u_n = -e^{-1} - e^{-2} - e^{-3} - \dots - e^{-n}$$

Ta thấy u_n là tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = -e^{-1}$ và $q = \frac{1}{e}$,

$$\text{nên } \lim u_n = \frac{-e^{-1}}{1 - \frac{1}{e}} \Rightarrow L = \frac{-1}{e-1} \Rightarrow L \in (-1;0).$$

Chọn ý A.

Câu 29: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương n thỏa mãn tích phân

$$\int_0^2 (1 - n^2 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}) dx = -2$$

- A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$\int_0^2 (1 - n^2 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}) dx = -2 \Leftrightarrow (x - n^2x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n) \Big|_0^2 = -2$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2n^2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = -2 \Leftrightarrow 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = n^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2^n - 1 = n^2 + 1 \Leftrightarrow 2^n - n^2 - 2 = 0.$$

Thử với các giá trị $n \in \{1; 2; 3; 4\}$ đều không thỏa mãn.

Với $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 5$ ta chứng minh $2^n > n^2 + 2$ (1). Dễ thấy $n = 5$ thì (1) đúng.

Giả sử (1) đúng với $n = k$ với $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 5$. Khi đó $2^k > k^2 + 2$.

Khi đó: $2^{k+1} > 2(k^2 + 2) = k^2 + k^2 + 2 + 2 > k^2 + 2k + 1 + 2 = (k+1)^2 + 2$.

Do đó (1) đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp thì (1) đúng.

Vậy không tồn tại số nguyên n .

Chọn ý C.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời 2 tích phân $\int_0^1 f(2x) dx = 2$

và $\int_0^2 f(6x) dx = 14$. Tính tích phân $\int_{-2}^2 f(5|x| + 2) dx$.

A. 30

B. 32

C. 34

D. 36

Lời giải

- Xét tích phân thứ nhất $\int_0^1 f(2x) dx = 2$.

Đặt $u = 2x \Rightarrow du = 2dx$; $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = 2$.

$$\text{Nên } 2 = \int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(u) du \Rightarrow \int_0^2 f(u) du = 4.$$

- Xét tích phân thứ 2 $\int_0^2 f(6x) dx = 14$.

Đặt $v = 6x \Rightarrow dv = 6dx$; $x = 0 \Rightarrow v = 0$; $x = 2 \Rightarrow v = 12$.

$$\text{Nên } 14 = \int_0^2 f(6x) dx = \frac{1}{6} \int_0^{12} f(v) dv \Rightarrow \int_0^{12} f(v) dv = 84.$$

- Xét tích phân cần tính $\int_{-2}^2 f(5|x| + 2) dx = \int_{-2}^0 f(5|x| + 2) dx + \int_0^2 f(5|x| + 2) dx$.

1. Ta sẽ đi tính tích phân $I_1 = \int_{-2}^0 f(5|x| + 2) dx$.

Đặt $t = 5|x| + 2$.

Khi $-2 < x < 0$, $t = -5x + 2 \Rightarrow dt = -5dx$; $x = -2 \Rightarrow t = 12$; $x = 0 \Rightarrow t = 2$.

$$\Rightarrow I_1 = \frac{-1}{5} \int_{12}^2 f(t) dt = \frac{1}{5} \left[\int_0^{12} f(t) dt - \int_0^2 f(t) dt \right] = \frac{1}{5} (84 - 4) = 16.$$

2. Tính tích phân $I_1 = \int_0^2 f(5|x|+2)dx$.

Đặt $t = 5|x| + 2$.

Khi $0 < x < 2$, $t = 5x + 2 \Rightarrow dt = 5dx$; $x = 2 \Rightarrow t = 12$; $x = 0 \Rightarrow t = 2$.

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{5} \int_2^{12} f(t)dt = \frac{1}{5} \left[\int_0^{12} f(t)dt - \int_0^2 f(t)dt \right] = \frac{1}{5}(84 - 4) = 16.$$

Vậy $\int_{-2}^2 f(5|x|+2)dx = 32$.

Chọn ý B.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm cấp hai thỏa mãn $x.f''(x) \geq e^x + x$ và $f'(2) = 2e$, $f(0) = e^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $f(2) \leq 4e - 1$. B. $f(2) \leq 2e + e^2$. C. $f(2) \leq e^2 - 2e$. D. $f(2) > 12$.

Lời giải

Từ giả thiết $x.f''(x) \geq e^x + x$ lấy tích phân cận từ 0 đến 2 ta có

$$\int_0^2 x.f''(x)dx \geq \int_0^2 (e^x + x)dx \quad (1)$$

Áp dụng tích phân từng phần ta đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f''(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f'(x) \end{cases}$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow x.f'(x)|_0^2 - \int_0^2 f'(x)dx \geq \left(e^x + \frac{x^2}{2} \right)|_0^2$

$$\Leftrightarrow x.f'(x)|_0^2 - f(x)|_0^2 \geq \left(e^x + \frac{x^2}{2} \right)|_0^2 \Leftrightarrow [2.f'(2) - 0.f'(0)] - [f(2) - f(0)] \geq e^2 + 2 - 1$$

Mặt khác do $f'(2) = 2e$, $f(0) = e^2 \Rightarrow f(2) \leq 4e - 1$

Chọn ý A.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$, đồng biến trên $[1;2]$, thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 2$ và $\int_1^2 f(x).f'(x)dx = 1$. Tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng?

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Hàm dưới dấu tích phân là $[f'(x)]^2, f(x).f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương

$[f'(x) + \alpha f(x)]^2$. Nhưng khi khai triển thì vướng $\int_1^2 [f(x)]^2 dx$ nên hướng này không khả

thi. Ta có $1 = \int_1^2 f(x).f'(x)dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big|_1^2 = \frac{f^2(2) - f^2(1)}{2} = \frac{f^2(2) - 0}{2} \Rightarrow f(2) = \sqrt{2}$

Do đồng biến trên $[1;2]$ nên $f(2) \geq f(1) = 0$

Từ $f(1) = 0$ và $f(2) = \sqrt{2}$ ta nghĩ đến $\int_1^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_1^2 = f(2) - f(1) = \sqrt{2} - 0 = \sqrt{2}$

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $[f'(x)]^2, f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với $[f'(x) + \alpha]^2$

Ta tìm được $\alpha = -\sqrt{2} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{2}x + C \xrightarrow{f(1)=0} C = -\sqrt{2}$

Vậy $f(x) = \sqrt{2}x - \sqrt{2} \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Chọn ý A.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1) = 1$,

$\int_0^1 x^5 f(x) dx = \frac{11}{78}$ và $\int_0^1 f'(x) d(f(x)) = \frac{4}{13}$. Tính $f(2)$.

- A. $f(2) = 2$. B. $f(2) = \frac{251}{7}$. C. $f(2) = \frac{256}{7}$. D. $f(2) = \frac{261}{7}$.

Lời giải

Viết lại giả thiết ban đầu $\int_0^1 f'(x) d(f(x)) = \frac{4}{13} \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{13}$

Dùng tích phân từng phần ta có $\int_0^1 x^5 f(x) dx = \frac{x^6}{6} f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{6} \int_0^1 x^6 f'(x) dx$

Kết hợp với giả thiết $f(1) = 1$, ta suy ra $\int_0^1 x^6 f'(x) dx = \frac{2}{13}$

Bây giờ giả thiết được đưa về $\begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{13} \\ \int_0^1 x^6 f'(x) dx = \frac{2}{13} \end{cases}$. Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là

$[f'(x)]^2, x^6 f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $[f'(x) + \alpha x^6]^2$. Tương tự như bài trên

ta tìm được $\alpha = -2 \Rightarrow f'(x) = 2x^6 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{7} x^7 + C \xrightarrow{f(1)=1} C = \frac{5}{7}$

Vậy $f(x) = \frac{2}{7} x^7 + \frac{5}{7} \Rightarrow f(2) = \frac{261}{7}$

Chọn ý D.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn hệ thức

$f(x) + \tan x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\pi\sqrt{3} + b \ln 3$ trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

A. $P = -\frac{4}{9}$.

B. $P = -\frac{2}{9}$.

C. $P = \frac{7}{9}$.

D. $P = \frac{14}{9}$.

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\cos x f(x) + \sin x f'(x) = \frac{x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow [\sin x f(x)]' = \frac{x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \sin x f(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C$$

• Với $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2 \Rightarrow \sqrt{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} - 2\ln 2 + 2C$.

• Với $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{18} + \frac{1}{2} \ln 3 - \ln 2 + C \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \ln 3 - 2\ln 2 + 2C$

$$\Rightarrow \sqrt{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi\sqrt{3}}{9} - \ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{9} \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow P = a + b = -\frac{4}{9}$$

Chọn ý A.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $af(b) + bf(a) = 1$ với mọi $a, b \in [0;1]$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = \frac{1}{4}$.

C. $I = \frac{\pi}{2}$.

D. $I = \frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Đặt $a = \sin x, b = \cos x$ với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin x.f(\cos x) + \cos x.f(\sin x) = 1$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(\cos x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

Ta có $\begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f(\cos x) dx = -\int_1^0 f(t) dt (t = \cos x) = \int_0^1 f(x) dx \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f(\sin x) dx = \int_0^1 f(t) dt (t = \sin x) = \int_0^1 f(x) dx \end{cases}$

Do đó $(1) \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}$.

Chọn ý D.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(3-x).f(x) = 1 \\ f(x) \neq -1 \end{cases}$ với mọi

$x \in [0;3]$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Tính tích phân $I = \int_0^3 \frac{xf'(x)}{[1+f(3-x)]^2 \cdot f^2(x)} dx$.

A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{3}{2}$.

D. $I = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết $\begin{cases} f(3-x).f(x) = 1 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(3) = 2$

Ta có $[1+f(3-x)]^2 \cdot f^2(x) = [1+f(x)]^2 (f(3-x).f(x) = 1)$

• Tính $I = \int_0^3 \frac{xf'(x)}{[1+f(x)]^2} dx = -\int_0^3 x d\left(\frac{1}{1+f(x)}\right) = -\frac{x}{1+f(x)} \Big|_0^3 + \int_0^3 \frac{1}{1+f(x)} dx = -1 + J$

• Tính $J = \int_0^3 \frac{1}{1+f(x)} dx \stackrel{t=3-x}{=} -\int_3^0 \frac{1}{1+f(3-t)} dt = \int_0^3 \frac{1}{1+f(3-t)} dt = \int_0^3 \frac{1}{1+f(3-x)} dx$
 $\Rightarrow 2J = \int_0^3 \frac{1}{1+f(x)} dx + \int_0^3 \frac{1}{1+f(3-x)} dx = \int_0^3 dx (f(3-x).f(x) = 1) = 3 \Rightarrow J = \frac{3}{2}$

Vậy $I = \int_0^3 \frac{xf'(x)}{[1+f(3-x)]^2 \cdot f^2(x)} dx = \frac{1}{2}$

Chọn ý A.

Câu 37: Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(1)+g(1) = 4 \\ g(x) = -xf'(x) \\ f(x) = -xg'(x) \end{cases}$ với

mọi $x \in [1;4]$. Tính tích phân $I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx$.

A. $I = 3 \ln 2$.

B. $I = 4 \ln 2$.

C. $I = 6 \ln 2$.

D. $I = 8 \ln 2$.

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$f(x) + g(x) = -x.f'(x) - x.g'(x) \Leftrightarrow (f(x) + x.f'(x)) + (g(x) + x.g'(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x.f(x))' + (x.g(x))' = 0 \Rightarrow x.f(x) + x.g(x) = C \Rightarrow f(x) + g(x) = \frac{C}{x}$$

Mà $f(1) + g(1) = 4 \Rightarrow C = 4 \Rightarrow I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx = \int_1^4 \frac{4}{x} dx = 8 \ln 2$

Chọn ý D.

Câu 38: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$, thỏa mãn

$f'(0).f'(2) \neq 0$ và $g(x).f'(x) = x(x-2)e^x$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(x).g'(x)dx$.

A. $I = -4$.

B. $I = 4$.

C. $I = e - 2$.

D. $I = 2 - e$.

Lời giải

Từ giả thiết $f'(0).f'(2) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(0) \neq 0 \\ f'(2) \neq 0 \end{cases}$

Do đó từ $g(x).f'(x) = x(x-2)e^x \Rightarrow \begin{cases} g(2) = \frac{2(2-2)e^x}{f'(2)} = 0 \\ g(0) = \frac{0(0-2)e^x}{f'(0)} = 0 \end{cases}$

Tích phân từng phần ta được $I = [f(x).g(x)]_0^2 - \int_0^2 g(x).f'(x)dx$

$$= f(2).g(2) - f(0).g(0) - \int_0^2 x(x-2)e^x dx = - \int_0^2 x(x-2)e^x dx = 4.$$

Chọn ý B.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f'(0) = -1$ và

$\begin{cases} [f'(x)]^2 = f''(x) \\ f'(x) \neq 0 \end{cases}$ với mọi $x \in [0;1]$. Đặt $P = f(1) - f(0)$, khẳng định nào sau đây đúng

A. $-2 \leq P \leq -1$.

B. $-1 \leq P \leq 0$.

C. $0 \leq P \leq 1$.

D. $1 \leq P \leq 2$.

Lời giải

Nhận thấy $P = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)dx$ nên ta cần tìm $f'(x)$.

Biến đổi giả thiết ta có

$$\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 \Rightarrow \int \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} dx = \int dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f'(x)} = x + C \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x+C}$$

$$\text{Mà } f'(0) = -1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x+1}$$

$$\text{Vậy } P = \int_0^1 f'(x)dx = - \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = -\ln 2 \approx -0,69$$

Chọn ý B.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x) + f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Tính $I = \int_0^2 f(x) dx$.

A. $I = -\frac{4}{5}$.

B. $I = \frac{4}{5}$.

C. $I = -\frac{5}{4}$.

D. $I = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Đặt $u = f(x)$, ta thu được $u^3 + u = x$. Suy ra $(3u^2 + 1)du = dx$.

Từ $u^3 + u = x$, ta đổi cận $\begin{cases} x=0 \rightarrow u=0 \\ x=2 \rightarrow u=1 \end{cases}$. Khi đó $I = \int_0^1 u(3u^2 + 1)du = \frac{5}{4}$.

Cách 2. Nếu bài toán cho $f(x)$ có đạo hàm liên tục thì ta làm như sau:

Từ giả thiết $f^3(x) + f(x) = x \Rightarrow \begin{cases} f^3(0) + f(0) = 0 \\ f^3(2) + f(2) = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(2) = 1 \end{cases}$

Cũng từ giả thiết $f^3(x) + f(x) = x$, ta có $f'(x).f^3(x) + f'(x).f(x) = x.f'(x)$.

Lấy tích phân hai vế $\int_0^2 [f'(x).f^3(x) + f'(x).f(x)] dx = \int_0^2 x.f'(x) dx$

$$\Rightarrow \left(\frac{[f(x)]^4}{4} + \frac{[f(x)]^2}{2} \right) \Big|_0^2 = x f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x) dx \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = \frac{5}{4}$$

Chọn ý D.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f'(x) = f'(1-x)$ với

mọi $x \in [0;1]$. Biết rằng $f(0) = 1$, $f(1) = 41$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = \sqrt{41}$.

B. $I = 21$.

C. $I = 41$.

D. $I = 42$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = f'(1-x) \Rightarrow f(x) = -f(1-x) + C \Rightarrow f(0) = -f(1) + C \Rightarrow C = 42$

$$\Rightarrow f(x) = -f(1-x) + 42 \Rightarrow f(x) + f(1-x) = 42 \Rightarrow \int_0^1 [f(x) + f(1-x)] dx = \int_0^1 42 dx = 42 \quad (1)$$

$$\text{Vì } f'(x) = f'(1-x) \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(1-x) dx. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(1-x) dx = 21.$$

Chọn ý B.

Câu 42: Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa $m.f(x) + n.f(1-x) = g(x)$ với m, n là số thực khác 0 và $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = 1$. Tính $m+n$.

- A. $m+n=0$. B. $m+n=\frac{1}{2}$. C. $m+n=1$. D. $m+n=2$.

Lời giải

Từ giả thiết $m.f(x) + n.f(1-x) = g(x)$, lấy tích phân hai vế ta được :

$$\text{Do } \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 [m.f(x) + n.f(1-x)]dx = \int_0^1 g(x)dx \Rightarrow m+n \int_0^1 f(1-x)dx = 1 \quad (1)$$

Xét tích phân $\int_0^1 f(1-x)dx$. Đặt $t = 1-x$, suy ra $dt = -dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{cases}$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 f(1-x)dx = -\int_1^0 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(x)dx = 1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $m+n=1$.

Chọn ý C.

Câu 43: Biết tích phân $\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}-e^x} dx = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a} + a\sqrt{a}-\sqrt{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$

- A. $P = -1$. B. $P = 1$. C. $P = 3$. D. $P = 5$.

Lời giải

Biến đổi tích phân ban đầu ta được

$$I = \int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}-e^x} dx = \int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} \left(\sqrt{e^{2x}+1} + e^x \right) dx = \int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} \sqrt{e^{2x}+1} dx + \int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} e^x dx$$

- Xét tích phân $\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} e^x dx = e^x \Big|_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$
- Xét tích phân $\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} \sqrt{e^{2x}+1} dx$. Đặt $t = \sqrt{e^{2x}+1} \Leftrightarrow t^2 = e^{2x}+1$

$$\Rightarrow 2t dt = 2e^{2x} dx \Leftrightarrow dx = \frac{t dt}{e^{2x}} = \frac{t dt}{t^2-1}. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x = \ln\sqrt{3} \Rightarrow t=2 \\ x = \ln\sqrt{8} \Rightarrow t=3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} \sqrt{e^{2x}+1} dx = \int_2^3 \frac{t^2 dt}{t^2-1} = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \Big|_2^3 = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } I = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow P = a + b = 5$$

Chọn ý D.

Câu 44: Biết $\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x} + \frac{\sqrt{x} + e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}} dx = a + e^b - e^c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + b + c$.

- A. $P = -5$. B. $P = -4$. C. $P = -3$. D. $P = 3$.

Lời giải

Biến đổi tích phân ban đầu ta có:

$$\begin{aligned} \int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x} + \frac{\sqrt{x} + e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}} dx &= \int_1^4 \sqrt{\frac{e^{2x} + 4x + 4e^x \sqrt{x}}{4xe^{2x}}} dx = \int_1^4 \sqrt{\frac{(e^x + 2\sqrt{x})^2}{(2e^x \sqrt{x})^2}} dx \\ &= \int_1^4 \frac{e^x + 2\sqrt{x}}{2e^x \sqrt{x}} dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{e^x} \right) dx = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{e^x} \right) \Big|_1^4 = 1 - \frac{1}{e^4} + \frac{1}{e} = 1 + e^{-1} - e^{-4} \end{aligned}$$

Vậy ta được $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -4 \end{cases} \Rightarrow P = a + b + c = -4$.

Chọn ý B.

Câu 45: Biết $\int_0^2 \sqrt{\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}} dx = a\pi + b\sqrt{2} + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + b + c$.

- A. $P = -1$. B. $P = 2$. C. $P = 3$. D. $P = 4$.

Lời giải

Đặt $\sqrt{x} = 2 \cos u$ với $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Suy ra $x = 4 \cos^2 u \Rightarrow dx = -4 \sin 2u du$.

Khi đó tích phân ban đầu trở thành:

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2+2\cos u}{2-2\cos u}} \sin 2u du = 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \cdot \sin u \cdot \cos u du \\ &= 16 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \frac{u}{2} \cdot \cos u du = 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos u) \cdot \cos u du = 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u du + 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2u) du \\ &= 8 \sin u \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + (4x + 2 \cdot \sin 2u) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 4\sqrt{2} + 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 6 \end{cases} \Rightarrow P = 3 \end{aligned}$$

Chọn ý C.

Câu 46: Biết $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2} + x} dx = a + \frac{\pi^2}{b} + \frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của

biểu thức $P = a - b + c$.

- A. $P = -37$. B. $P = -35$. C. $P = 35$. D. $P = 41$.

Lời giải

Ta có $I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2} + x} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x \cos x (\sqrt{1+x^2} - x) dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x (\sqrt{1+x^2} - x) \cos x dx.$

Mặt khác $I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2} + x} dx \stackrel{x=-t}{=} \int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{(-t) \cos(-t)}{\sqrt{1+(-t)^2} - t} d(-t) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{t \cos t}{\sqrt{1+t^2} - t} dt$

$$= - \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} t (\sqrt{1+t^2} + t) \cos t dt = - \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x (\sqrt{1+x^2} + x) \cos x dx.$$

$$\Rightarrow 2I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x (\sqrt{1+x^2} - x) \cos x dx - \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x (\sqrt{1+x^2} + x) \cos x dx$$

$$= -2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x^2 \cos x dx \Rightarrow I = - \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x^2 \cos x dx$$

Tích phân từng phần hai lần ta được $I = 2 + \frac{\pi^2}{-36} + \frac{\sqrt{3}\pi}{-3} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -36 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow P = a - b + c = 35$

Chọn ý C.

Câu 47 : Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$, thỏa mãn điều kiện

$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$. Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx$.

A. $I = \frac{3}{2}$.

B. $I = 2$.

C. $I = \frac{5}{2}$.

D. $I = 3$.

Lời giải

Đặt $x = \frac{1}{t}$, suy ra $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. Khi đó $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2} + 1} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2 + 1} dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 + 1} dx$

$$\Rightarrow 2I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 + 1} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 + 1} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2}{x^2 + 1} dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x^2 + 1}{x^2} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left(x - \frac{1}{x}\right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = 3 \Rightarrow I = \frac{3}{2}$$

Chọn ý A.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \geq 0, f'(0) = 0; f(0) = 1$ và đồng thời điều kiện $f''(x)f(x) - 2[f'(x)]^2 + xf^3(x) = 0$. Tính giá trị của $f(1)$?

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{6}{7}$ D. $\frac{7}{6}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\frac{f'(x)d(f'(x)) - f'(x)d(f^2(x))}{f^4(x)} = -x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{-x^2}{2} + C \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{x^3}{6} + K \Rightarrow K = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{6}{x^3 + 6} \Rightarrow f(1) = \frac{6}{7}$$

Chọn ý C.

Câu 49: Có bao nhiêu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện

$$\int_0^1 (f(x))^{2018} dx = \int_0^1 (f(x))^{2019} dx = \int_0^1 (f(x))^{2020} dx$$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Lời giải

Từ điều kiện ta suy ra $\int_0^1 (f(x))^{2018} (f(x) - 1)^2 dx = 0 \Rightarrow (f(x))^{2018} (f(x) - 1)^2 = 0$

Mà $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên $\begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = 0 \end{cases}$. Vậy có 2 hàm thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn ý C.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ có $f(1) = 1; f(4) = 3\ln\frac{5}{2} + 1$ và thỏa mãn

đồng thời $\int_1^4 \frac{f'(x)}{x+1} dx = \frac{9}{10}; \int_1^4 x(f'(x))^2 dx = 9\ln\frac{5}{2} - \frac{27}{10}$. Tính tích phân $\int_1^4 f(x) dx$

- A. $5\ln\frac{5}{2} - 6$ B. $5\ln\frac{5}{2} + 6$ C. $15\ln\frac{5}{2} - 6$ D. $15\ln\frac{5}{2} + 6$

Lời giải

Ta viết lại $\int_1^4 (\sqrt{x}f'(x))^2 dx = 9\ln\frac{5}{2} - \frac{27}{10} = A$

Từ giả thiết ta suy ra $\int_1^4 f'(x) dx = f(4) - f(1) = 3\ln\frac{5}{2} \Rightarrow \int_1^4 f'(x) dx - \int_1^4 \frac{f'(x)}{x+1} dx = 3\ln\frac{5}{2} - \frac{9}{10}$

Hay $\int_1^4 \frac{xf'(x)}{x+1} dx = 3\ln\frac{5}{2} - \frac{9}{10} \Rightarrow \int_1^4 \left(\sqrt{x}f'(x) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+1} \right) dx = 3\ln\frac{5}{2} - \frac{9}{10} = B$

Ta dễ dàng tính được $\int_1^4 \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} \right)^2 dx = \ln\frac{5}{2} - \frac{3}{10} = C$

Ta xây dựng tích phân $\int_1^4 \left(\sqrt{x}f'(x) + \frac{m\sqrt{x}}{x+1} \right) dx = 0 \Leftrightarrow A + 2Bm + Cm^2 = 0 \Leftrightarrow m = -3$

Từ đó tìm được $f'(x) = \frac{3}{x+1} \Rightarrow \int_1^4 f(x) dx = 15 \ln \frac{5}{2} - 6$

Chọn ý C.

Câu 51: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left[\frac{(2018 + \cos x)^{1+\cos x}}{2018 + \sin x} \right] dx = a \ln a - b \ln b - 1$ với a, b là các số

nguyên dương. Giá trị của $a + b$ bằng?

A. 2015

B. 4030

C. 4037

D. 2025

Lời giải

Sử dụng tính chất $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$, ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left[\frac{(2018 + \cos x)^{1+\cos x}}{2018 + \sin x} \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left[\frac{(2018 + \sin x)^{1+\sin x}}{2018 + \cos x} \right] dx \\ &\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left[(2018 + \cos x)^{\cos x} (2018 + \sin x)^{\sin x} \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln (2018 + \cos x) dx \\ &= \int_0^1 \ln (2018 + x) dx = 2019 \ln 2019 - 2018 \ln 2018 - 1 \end{aligned}$$

Chọn ý C.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$

2. Cho 2 số thực $a, b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $a + b = \frac{\pi}{4}$; $\int_a^b \ln(1 + \tan x) dx = \frac{\pi \ln 2}{24}$. Tính tích phân $\int_a^b x \sin(12x) dx$

Câu 52: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in [0; 8]$ và $\int_0^8 f(x) dx = 10$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ trên $(0; 8]$ là?

A. $\frac{4}{5}$

B. 10

C. $\frac{5}{4}$

D. 8

Lời giải

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{\left(\int_0^x f(t) dt \right)' \cdot x - \int_0^x f(t) dt}{x^2} = \frac{xf(x) - \int_0^x f(t) dt}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$$

$$\Rightarrow h'(x) = f(x) + xf'(x) - f(x) = xf'(x) > 0, \forall x \in [0; 8] \Rightarrow h(x) > h(0) = 0$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{h(x)}{x^2} > 0, \forall x \in (0; 8] \Rightarrow \max_{(0; 8]} g(x) = g(8) = \frac{5}{4}$$

Chọn ý C.

Câu 53: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$ đồng

thời $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos x} dx = 1$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin x \cdot \tan x \cdot f(x)] dx = 2$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot f'(x) dx$ bằng?

- A. 4 B. $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$ D. 6

Lời giải

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần ta đặt $\begin{cases} u = \sin x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

Khi đó tích phân cần tính trở thành $I = \sin x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot f(x) dx = \frac{3\sqrt{2}}{2} - I_1$.

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned} 2 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin x \cdot \tan x \cdot f(x)] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin^2 x \cdot \frac{f(x)}{\cos x} \right] dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(1 - \cos^2 x) \cdot \frac{f(x)}{\cos x} \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{f(x)}{\cos x} \right] dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot f(x) dx = 1 - I_1. \\ \Rightarrow I_1 &= -1 \Rightarrow I = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{3\sqrt{2} + 2}{2}. \end{aligned}$$

Chọn ý B.

Câu 54: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn $f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$.

Tính tích phân $I = \int_3^4 f(x) dx$.

- A. $I = 3 + 2\ln^2 2$ B. $I = 2\ln^2 2$ C. $I = \ln^2 2$ D. $I = 2\ln 2$

Lời giải

Ta có $\int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left[\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x} \right] dx = \int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx + \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx$.

Xét tích phân $K = \int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx$.

Đặt $2\sqrt{x}-1 = t \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{t+1}{2} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = dt \Rightarrow K = \int_1^3 f(t) dt = \int_1^3 f(x) dx$.

$$\text{Xét tích phân } M = \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^4 \ln x d(\ln x) = \left. \frac{\ln^2 x}{2} \right|_1^4 = 2 \ln^2 2.$$

$$\text{Do đó } \int_1^4 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + 2 \ln^2 2 \Rightarrow \int_3^4 f(x) dx = 2 \ln^2 2.$$

Chọn ý B.

Câu 55: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0;3]$ và thỏa mãn điều kiện

$$I = \int_0^3 f(x) dx = 4. \text{ Khi đó giá trị của tích phân } K = \int_0^3 (e^{1+\ln(f(x))} + 4) dx \text{ là?}$$

A. $4 + 12e$

B. $12 + 4e$

C. $3e + 14$

D. $14 + 3e$

Lời giải

Biến đổi tích phân cần tính ta có

$$K = \int_0^3 (e^{1+\ln(f(x))} + 4) dx = \int_0^3 e \cdot e^{\ln(f(x))} dx + \int_0^3 4 dx = e \cdot \int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 4 dx = 4e + 4x \Big|_0^3 = 4e + 12.$$

Vậy $K = 4e + 12$.

Chọn ý B.

Câu 56: Cho a là số thực dương. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$f(x) = e^x \left(\ln(ax) + \frac{1}{x} \right)$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ và $F(2018) = e^{2018}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a \in \left(\frac{1}{2018}; 1\right)$

B. $a \in \left[0; \frac{1}{2018}\right]$

C. $a \in [1; 2018)$

D. $a \in [2018; +\infty)$

Lời giải

$$\text{Xét nguyên hàm } I = \int e^x \left(\ln(ax) + \frac{1}{x} \right) dx = \int e^x \ln(ax) dx + \int \frac{e^x}{x} dx \quad (1)$$

- Tính tích phân $\int e^x \ln(ax) dx$:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(ax) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int e^x \ln(ax) dx = e^x \ln(ax) - \int \frac{e^x}{x} dx$$

Thay vào (1), ta được: $F(x) = e^x \ln(ax) + C$.

$$\text{Với } \begin{cases} F\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \\ F(2018) = e^{2018} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{1}{a}} \cdot \ln 1 + C = 0 \\ e^{2018} \ln(a \cdot 2018) + C = e^{2018} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ \ln(a \cdot 2018) = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{e}{2018}.$$

$$\text{Vậy } a \in \left(\frac{1}{2018}; 1\right).$$

Chọn ý A.

Câu 57: Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = \frac{2017x}{(x^2 + 1)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.

- A. $m = -\frac{1}{2}$ B. $m = \frac{1 - 2^{2017}}{2^{2018}}$ C. $m = \frac{1 + 2^{2017}}{2^{2018}}$ D. $m = \frac{1}{2}$

Lời giải

Xét nguyên hàm sau:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{2017x}{(x^2 + 1)^{2018}} dx = \frac{2017}{2} \int (x^2 + 1)^{-2018} d(x^2 + 1) \\ &= \frac{2017}{2} \cdot \frac{(x^2 + 1)^{-2017}}{-2017} + C = -\frac{1}{2(x^2 + 1)^{2017}} + C = F(x) \end{aligned}$$

Theo giả thiết ta có $F(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2 \cdot 2^{2017}} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2^{2018}}$

Do đó $F(x) = -\frac{1}{2(x^2 + 1)^{2017}} + \frac{1}{2^{2018}}$ suy ra

$F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{1}{2(x^2 + 1)^{2017}}$ lớn nhất $\Leftrightarrow (x^2 + 1)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = 0$

Vậy $m = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2018}} = \frac{1 - 2^{2017}}{2^{2018}}$.

Chọn ý B.

Câu 58: Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $I_n = \int_0^1 x^2 (1 - x^2)^n dx$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 5

Lời giải

Xét tích phân $I_n = \int_0^1 x^2 (1 - x^2)^n dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = x(1 - x^2)^n dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{-(1 - x^2)^{n+1}}{2(n+1)} \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } I_n = \left. \frac{-x(1 - x^2)^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 + \frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 (1 - x^2)^{n+1} dx = \frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 (1 - x^2)^{n+1} dx$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2(n+2)} \int_0^1 (1 - x^2)(1 - x^2)^{n+1} dx$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2(n+2)} \left[\int_0^1 (1 - x^2)^{n+1} dx - \int_0^1 x^2 (1 - x^2)^{n+1} dx \right]$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2(n+2)} [2(n+1)I_n - I_{n+1}] \Rightarrow \frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{2n+1}{2n+5} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.$$

Chọn ý A.

Câu 59: Tìm tất cả các giá trị dương của m để $\int_0^3 x(3-x)^m dx = -f''\left(\frac{10}{9}\right)$, với $f(x) = \ln x^{15}$.

A. $m = 20$

B. $m = 4$

C. $m = 5$

D. $m = 3$

Lời giải

Theo giả thiết ta có $f(x) = \ln x^{15} \Rightarrow f'(x) = \frac{15x^{14}}{x^{15}} = \frac{15}{x} \Rightarrow f''(x) = \frac{-15}{x^2} \Rightarrow f''\left(\frac{10}{9}\right) = \frac{-243}{20}$.

Tính tích phân $I = \int_0^3 x(3-x)^m dx$.

• Đặt $t = 3-x \Rightarrow x = 3-t, dx = -dt$, đổi cận $\begin{array}{c|c} x & 0 & 3 \\ \hline t & 3 & 0 \end{array}$

• Do đó $I = \int_3^0 (3-t)t^m (-dt) = \int_0^3 (3t^m - t^{m+1}) dt = \left. \frac{3t^{m+1}}{m+1} - \frac{t^{m+2}}{m+2} \right|_0^3 = \frac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)}$

Ta có $\int_0^3 x(3-x)^m dx = -f''\left(\frac{10}{9}\right) \Leftrightarrow \frac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)} = \frac{243}{20} \Leftrightarrow \frac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)} = \frac{3^5}{4 \cdot 5}$

Thay lần lượt các giá trị m ở 4 đáp án, nhận giá trị $m = 3$.

Chọn ý D.

Câu 60: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(0) = \sqrt{3}$ và

$f(x) \cdot f'(x) = \cos x \cdot \sqrt{1+f^2(x)}, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m = \frac{\sqrt{21}}{2}, M = 2\sqrt{2}$.

B. $m = \frac{5}{2}, M = 3$

C. $m = \frac{\sqrt{5}}{2}, M = \sqrt{3}$.

D. $m = \sqrt{3}, M = 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$f(x) \cdot f'(x) = \cos x \cdot \sqrt{1+f^2(x)} \Rightarrow \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} = \cos x \Rightarrow \int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} dx = \sin x + C$$

Đặt $t = \sqrt{1+f^2(x)} \Rightarrow t^2 = 1+f^2(x) \Rightarrow t dt = f(x) f'(x) dx$.

Thay vào ta được $\int dt = \sin x + C \Rightarrow t = \sin x + C \Rightarrow \sqrt{1+f^2(x)} = \sin x + C$.

Do $f(0) = \sqrt{3} \Rightarrow C = 2$.

Vậy $\sqrt{1+f^2(x)} = \sin x + 2 \Rightarrow f^2(x) = \sin^2 x + 4 \sin x + 3$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{\sin^2 x + 4 \sin x + 3}$, vì hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$, xét hàm số $g(t) = t^2 + 4t + 3$ có hoành độ đỉnh $t = -2$ loại.

Suy ra $\max_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} g(t) = g(1) = 8$, $\min_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} g(t) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{4}$.

Suy ra $\max_{\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}$, $\min_{\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Chọn ý A.

Câu 61: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời $\int_0^1 f(x) dx = 4$,

$\int_0^3 f(x) dx = 6$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 f(|2x+1|) dx$

A. $I = 3$

B. $I = 5$

C. $I = 6$

D. $I = 4$

Lời giải

Đặt $u = 2x + 1 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$. Khi $x = -1$ thì $u = -1$. Khi $x = 1$ thì $u = 3$.

Nên $I = \frac{1}{2} \int_{-1}^3 f(|u|) du = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 f(|u|) du + \int_0^3 f(|u|) du \right) = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 f(-u) du + \int_0^3 f(u) du \right)$.

Xét tích phân $\int_0^1 f(x) dx = 4$. Đặt $x = -u \Rightarrow dx = -du$.

Khi $x = 0$ thì $u = 0$. Khi $x = 1$ thì $u = -1$. Nên $4 = \int_0^1 f(x) dx = -\int_0^{-1} f(-u) du = \int_{-1}^0 f(-u) du$.

Ta có $\int_0^3 f(x) dx = 6 \Rightarrow \int_0^3 f(u) du = 6$. Nên $I = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 f(-u) du + \int_0^3 f(u) du \right) = \frac{1}{2} (4 + 6) = 5$.

Chọn ý B.

Câu 62: Biết $\int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \frac{\pi^a}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính

$P = 2a + b$.

A. $P = 8$

B. $P = 10$

C. $P = 6$

D. $P = 12$

Lời giải

Xét tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx$.

- Đặt $x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt$.
- Khi $x = 0$ thì $t = \pi$.
- Khi $x = \pi$ thì $t = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= -\int_{\pi}^0 \frac{(\pi-t)\sin^{2018}(\pi-t)}{\sin^{2018}(\pi-t)+\cos^{2018}(\pi-t)} dt = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x} dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x} dx - \int_0^{\pi} \frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x} dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x} dx - I. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x} dx.$$

$$\text{Xét tích phân } J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x} dx.$$

- Đặt $x = \frac{\pi}{2} - u \Rightarrow dx = -du$.
- Khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $u = 0$.
- Khi $x = \pi$ thì $u = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Nên } J = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\sin^{2018}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\cos^{2018}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)} du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x} dx.$$

Vì hàm số $f(x) = \frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}$ là hàm số chẵn nên:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x} dx$$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x} dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x} dx \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x} dx \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

Như vậy $a = 2$, $b = 4$. Do đó $P = 2a + b = 2 \cdot 2 + 4 = 8$.

Ngoài cách làm này các bạn có thể sử dụng các tính chất của phân tích tích phân bằng phương pháp đổi cận đổi biến.

Chọn ý A.

Câu 63: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x) \cdot e^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ và

$f(0) = 1$. Tích phân $\int_0^{\sqrt{7}} x \cdot f(x) dx$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$

B. $\frac{15}{4}$

C. $\frac{45}{8}$

D. $\frac{5\sqrt{7}}{4}$

Lời giải

Ta có $3f'(x) \cdot e^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow 3f^2(x) \cdot f'(x) \cdot e^{f^3(x)} = 2x \cdot e^{x^2+1}$

Suy ra $e^{f^3(x)} = e^{x^2+1} + C$. Mặt khác, vì $f(0) = 1$ nên $C = 0$.

Do đó $e^{f^3(x)} = e^{x^2+1} \Leftrightarrow f^3(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

Vậy $\int_0^{\sqrt{7}} x \cdot f(x) dx = \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{7}} \sqrt[3]{x^2 + 1} d(x^2 + 1) = \frac{3}{8} \left[(x^2 + 1) \sqrt[3]{x^2 + 1} \right]_0^{\sqrt{7}} = \frac{45}{8}$.

Chọn ý C.

Câu 64: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời điều kiện

$3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$ ta được kết quả là?

A. $I = e + 4$

B. $I = 8$

C. $I = 2$

D. $I = e + 2$

Lời giải

Theo giả thuyết ta có $\int_0^2 [3f(x) + f(2-x)] dx = \int_0^2 [2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4] dx$ (*).

Ta tính $\int_0^2 f(2-x) dx = -\int_0^2 f(2-x) d(2-x) = \int_0^2 f(x) dx$.

Vì vậy $\int_0^2 [3f(x) + f(2-x)] dx = 4 \int_0^2 f(x) dx$.

Hơn nữa $\int_0^2 2(x-1)e^{x^2-2x+1} dx = \int_0^2 e^{x^2-2x+1} d(x^2-2x+1) = e^{x^2-2x+1} \Big|_0^2 = 0$ và $\int_0^2 4 dx = 8$.

Chọn ý C.

Câu 65: Tính tổng $T = \frac{C_{2018}^0}{3} - \frac{C_{2018}^1}{4} + \frac{C_{2018}^2}{5} - \frac{C_{2018}^3}{6} + \dots - \frac{C_{2018}^{2017}}{2020} + \frac{C_{2018}^{2018}}{2021}$.

A. $\frac{1}{4121202989}$

B. $\frac{1}{4121202990}$

C. $\frac{1}{4121202992}$

D. $\frac{1}{4121202991}$

Lời giải

Xét khai triển $(1-x)^{2018} = C_{2018}^0 - C_{2018}^1 x + C_{2018}^2 x^2 - \dots + C_{2018}^{2018} x^{2018}$

$\Rightarrow x^2 (1-x)^{2018} = C_{2018}^0 x^2 - C_{2018}^1 x^3 + C_{2018}^2 x^4 - \dots + C_{2018}^{2018} x^{2020} \quad (1)$

Ta tính $I = \int_0^1 x^2 (1-x)^{2018} dx$, đặt $t = 1-x$, $dt = -dx$, đổi cận $x=0 \Rightarrow t=1$, $x=1 \Rightarrow t=0$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } I &= \int_0^1 (1-t)^2 t^{2018} dt = \int_0^1 (t^{2018} - 2t^{2019} + t^{2020}) dt = \left(\frac{t^{2019}}{2019} - 2 \frac{t^{2020}}{2020} + \frac{t^{2021}}{2021} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2019} - \frac{1}{1010} + \frac{1}{2021} = \frac{1}{4121202990}. \end{aligned}$$

Lấy tích phân hai vế của (1) ta được:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 (1-x)^{2018} dx &= \int_0^1 (C_{2018}^0 x^2 - C_{2018}^1 x^3 + C_{2018}^2 x^4 + \dots + C_{2018}^{2018} x^{2020}) dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4121202990} &= \left(C_{2018}^0 \frac{x^3}{3} - C_{2018}^1 \frac{x^4}{4} + C_{2018}^2 \frac{x^5}{5} + \dots + C_{2018}^{2018} \frac{x^{2021}}{2021} \right) \Big|_0^1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4121202990} &= C_{2018}^0 \frac{1}{3} - C_{2018}^1 \frac{1}{4} + C_{2018}^2 \frac{1}{5} + \dots + C_{2018}^{2018} \frac{1}{2021}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } T = \frac{C_{2018}^0}{3} - \frac{C_{2018}^1}{4} + \frac{C_{2018}^2}{5} - \frac{C_{2018}^3}{6} + \dots - \frac{C_{2018}^{2017}}{2020} + \frac{C_{2018}^{2018}}{2021} = \frac{1}{4121202990}.$$

Chọn ý B.

Câu 66: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $f(x) \neq 0, \forall x \in (0;1)$.

Biết rằng $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\frac{1}{2}\right) = a, f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b$ và $x + xf'(x) = 2f(x) - 4, \forall x \in (0;1)$. Tính

tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cdot \cos x + 2 \sin 2x}{f^2(\sin x)} dx$ theo a và b .

A. $I = \frac{3a+b}{4ab}$

B. $I = \frac{3b+a}{4ab}$

C. $I = \frac{3b-a}{4ab}$

D. $I = \frac{3a-b}{4ab}$

Lời giải

Theo giả thiết ta có:

$$x + xf'(x) = 2f(x) - 4 \Leftrightarrow x + 4 = 2f(x) - xf'(x)$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x = 2xf(x) - x^2 f'(x) \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x}{f^2(x)} = \frac{2xf(x) - x^2 f'(x)}{f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x}{f^2(x)} = \left(\frac{x^2}{f(x)} \right)'$$

$$\text{Tính tích phân } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cdot \cos x + 2 \sin 2x}{f^2(\sin x)} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cdot \cos x + 4 \sin x \cdot \cos x}{f^2(\sin x)} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx, \text{ đổi cận } x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}, x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta có } I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2 + 4t}{f^2(t)} dt = \frac{t^2}{f(t)} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{4b} - \frac{1}{4a} = \frac{3a-b}{4ab}.$$

Chọn ý D.

Câu 67: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) dx$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $-\frac{1}{4}$

Lời giải

Theo giả thiết, $f(0) = 0$ và $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$ nên $f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

$$\text{Ta có: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d[f(x)] = [x f(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \Rightarrow I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

Mặt khác, ta có:

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{4}.$$

Câu 68: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) > 0$, $\forall x \in [1; 2]$ và $\int_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4} dx = \frac{7}{375}$. Biết

$f(1) = 1$, $f(2) = \frac{22}{15}$, tính $I = \int_1^2 f(x) dx$.

A. $P = \frac{71}{60}$

B. $P = \frac{6}{5}$

C. $P = \frac{73}{60}$

D. $P = \frac{37}{30}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{[f'(x)]^3}{x^4} + \frac{x^2}{125} + \frac{x^2}{125} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{[f'(x)]^3}{x^4} \cdot \frac{x^2}{125} \cdot \frac{x^2}{125}} = \frac{3f'(x)}{25}$$

$$\text{Lấy tích phân hai vế BĐT trên ta có: } \int_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4} dx + 2 \int_1^2 \frac{x^2}{125} dx \geq \int_1^2 \frac{3f'(x)}{25} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4} dx + 2 \cdot \frac{7}{375} \geq \frac{3}{25} [f(2) - f(1)] \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4} dx \geq \frac{7}{375}.$$

Kết hợp với giả thiết ta có dấu “=” của BĐT trên xảy ra

$$\frac{[f'(x)]^3}{x^4} = \frac{x^2}{125} \Leftrightarrow [f'(x)]^3 = \frac{x^6}{125} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x^2}{5} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{15} + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{15} + C \Rightarrow C = \frac{14}{15} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3 + 14}{15}$$

$$\text{Ta có } I = \int_1^2 \frac{x^3 + 14}{15} dx = \frac{71}{60}.$$

Chọn ý A.

Câu 69: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos 2x + 3 \sin 2x) \ln(\cos x + 2 \sin x) dx = c \ln 2 - \frac{a}{b}$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$

là phân số tối giản. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 9$

B. $T = -11$

C. $T = 5$

D. $T = 7$

Lời giải

$$\text{Biến đổi giả thiết ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos 2x + 3 \sin 2x) \ln(\cos x + 2 \sin x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos x + 2 \sin x)(2 \cos x - \sin x) \ln(\cos x + 2 \sin x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = \cos x + 2 \sin x \Rightarrow dt = (-\sin x + 2 \cos x) dx.$$

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 2$.

$$\text{Suy ra } I = \int_1^2 2t \ln t dt = \int_1^2 \ln t d(t^2) = (t^2 \cdot \ln t) \Big|_1^2 - \int_1^2 t dt = 4 \ln 2 - \frac{t^2}{2} \Big|_1^2 = 4 \ln 2 - \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow T = a + b + c = 9.$$

Chọn ý A.

Câu 70: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn

$$f'(0) = 9 \text{ và } 9f''(x) + [f'(x) - x]^2 = 9. \text{ Tính } T = f(1) - f(0).$$

A. $T = 2 + 9 \ln 2$

B. $T = 9$

C. $T = \frac{1}{2} + 9 \ln 2$

D. $T = 2 - 9 \ln 2$

Lời giải

$$\text{Ta có } 9f''(x) + [f'(x) - x]^2 = 9 \Rightarrow 9(f''(x) - 1) = -[f'(x) - x]^2 \Rightarrow -\frac{f''(x) - 1}{[f'(x) - x]^2} = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Lấy nguyên hàm hai vế } -\int \frac{f''(x) - 1}{[f'(x) - x]^2} dx = \int \frac{1}{9} dx \Rightarrow \frac{1}{f'(x) - x} = \frac{x}{9} + C.$$

$$\text{Do } f'(0) = 9 \text{ nên } C = \frac{1}{9} \text{ suy ra } f'(x) - x = \frac{9}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{x+1} + x$$

$$\text{Vậy } T = f(1) - f(0) = \int_0^1 \left(\frac{9}{x+1} + x \right) dx = \left(9 \ln|x+1| + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 9 \ln 2 + \frac{1}{2}.$$

Câu 71: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện:

$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 1 \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) - 1, \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Tính tích phân $\int_0^1 f(x-1) dx$.

A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{7}{4}$

Lời giải

Lấy đạo hàm 2 vế theo hàm số y ta được $f'(x+y) = f'(y) + 3x^2 + 6xy, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Cho } y = 0 \Rightarrow f'(x) = f'(0) + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 + 3x^2$$

$$\text{Vậy } f(x) = \int f'(x) dx = x^3 + x + C \text{ mà } f(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \text{ suy ra } f(x) = x^3 + x + 1.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x-1) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x^3 + x + 1) dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4}.$$

Chọn ý C.

Câu 72: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các

$$\text{điều kiện } \begin{cases} f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ f(0) = f'(0) = 1, \\ x[f(x)]^2 + [f'(x)]^2 = f(x)f''(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \text{ . Mệnh đề nào sau đây đúng?}$$

A. $\frac{1}{2} < \ln f(1) < 1$

B. $0 < \ln f(1) < \frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{2} < \ln f(1) < 2$

D. $1 < \ln f(1) < \frac{3}{2}$

Lời giải

Ta có

$$x[f(x)]^2 + [f'(x)]^2 = f(x)f''(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = x \Leftrightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]' = x \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2}{2} + C.$$

$$\text{Lại có } f(0) = f'(0) = 1 \Rightarrow C = 1.$$

Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2}{2} + 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) dx \Leftrightarrow \ln(f(x)) \Big|_0^1 = \frac{7}{6} \Leftrightarrow \ln f(1) = \frac{7}{6}$.

$\Rightarrow 1 < \ln(f(1)) < \frac{3}{2}$.

Chọn ý D.

Câu 73: Cho các số $a, b > 2$ thỏa mãn $2 \int_1^a \frac{e^{x^2}}{x} dx = \int_1^b \frac{e^x}{x} dx$. Khi đó, quan hệ giữa a, b là?

A. $a = 2b$

B. $b = 2a$

C. $a = b^2$

D. $b = a^2$

Lời giải

Ta có $2 \int_1^a \frac{e^{x^2}}{x} dx = \int_1^a \frac{e^{x^2}}{x^2} 2x dx = \int_1^a \frac{e^{x^2}}{x^2} d(x^2) = \int_1^{a^2} \frac{e^x}{x} dx$ nên $b = a^2$

Chọn ý D.

Câu 74: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ và $f^2(-x) = (x^2 + 2x + 4)f(x+2)$ Biết rằng $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ tính tích phân $I = \int_0^2 xf''(x) dx$.

A. $I = -4$

B. $I = 4$

C. $I = 0$

D. $I = 8$

Lời giải

Theo giả thiết ta có

$$I = \int_0^2 xf''(x) dx = f'(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f'(x) dx = f'(x) \Big|_0^2 - f(x) \Big|_0^2 = f'(2) - f'(0) - f(2) + f(0)$$

Trong giả thiết ta thay $x=0; x=2$ ta có:

$$\begin{cases} f^2(0) = 4f(2) \\ f^2(2) = 4f(0) \end{cases} \Rightarrow f^4(0) = 16f^2(2) = 64f(0) \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 4 \\ f(2) = 4 \end{cases}$$

Đạo hàm hai vế ta có $-2f'(-x).f(-x) = (2x+2)f(x+2) + (x^2+2x+4)f'(x+2)$

Lại thay $x=0$ và $x=-2$, ta có $\begin{cases} -2f'(0) = 2 + f'(2) \\ -2f'(2) = -2 + f'(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = -2 \\ f'(2) = 2 \end{cases}$

Kết hợp lại ta được $I = 2 - (-2) - 4 + 4 = 4$.

Câu 75: Trong giải tích, $I = \int x^m (ax^n + b)^p dx$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $m, n, p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ được gọi là tích được (có thể biểu diễn bởi các hàm như đa thức, hữu tỷ, lượng giác, logarit, ...) khi một trong các số $p, \frac{m+1}{n}, p + \frac{m+1}{n}$ là số nguyên. Xét nguyên hàm $I = \int \frac{x^a dx}{(\sqrt{x^5+1})^6}$, hỏi có bao nhiêu số $a \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ để I có thể tính được?

A. 5

B. 9

C. 4

D. 6

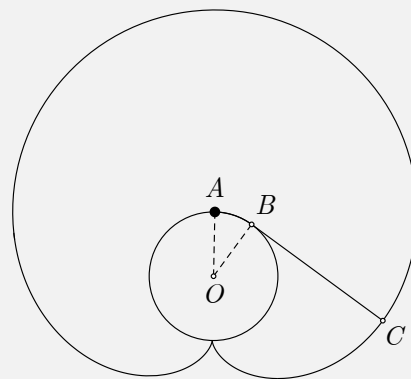
Lời giải

Ta viết lại nguyên hàm đã cho thành $I = \int x^a (x^5 + 1)^{-\frac{6}{a}} dx$ nên $m = a, n = 5, p = -\frac{6}{a}$.

Theo đề bài ta chỉ cần có $-\frac{6}{a} \in \mathbb{Z}, \frac{a+1}{5} \in \mathbb{Z}, -\frac{6}{a} + \frac{a+1}{5} \in \mathbb{Z}$, suy ra $a \in \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$

Chú ý. Đây là một bài toán về biến đổi lũy thừa, yếu tố nguyên hàm chỉ là phụ. Công thức trên có tên là định lý Chebyshev.

Câu 76 : Một con dê được buộc vào điểm A trên hàng rào về phía ngoài của khu vườn hình tròn tâm O bán kính 6m. Sợi dây buộc con dê có độ dài bằng nửa chu vi khu vườn. Hình bên mô tả phần cỏ bên ngoài vườn mà con dê có thể ăn được. Biết rằng với hàm số $f: [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ và điểm B thuộc (O) sao cho $AOB = \alpha > 0$ thì đoạn BC là tiếp tuyến (O) có độ dài $f(\alpha)$ sẽ quét qua một phần mặt phẳng mà diện tích được xác định bởi $\int_0^\pi f^2(\alpha) d\alpha$ khi α thay đổi từ $0 \rightarrow \pi$ (ở đây tính cả bên trái lẫn bên phải)



Từ công thức trên hay xác định diện tích S phần cỏ mà con dê có thể ăn được.

A. $S = 32\pi^3$

B. $S = 18\pi^3$

C. $S = 30\pi^3$

D. $S = 28\pi^3$

Lời giải

Ta thấy khi dê có thể di chuyển tự do về phía khu vườn (O), nhưng khi di chuyển về phía dưới thì chỉ có một phần của dây sẽ trải trên (O), phần dây còn lại nếu muốn đi xa nhất thì sẽ tạo thành tiếp tuyến với (O), tức là nằm trên biên của đường cong trong hình. Phần cỏ dê ăn được là sẽ phần bên trong đường biên và bên ngoài (O). Tiếp tuyến tại A của (O) chia phần cỏ của dê thành trên và dưới với diện tích là S_1, S_2 .

Phần trên là nửa hình tròn bán kính bằng độ dài sợi dây là 6π nên $S_1 = \frac{\pi}{2} \cdot (6\pi)^2 = 18\pi^3$

Để tính S_2 ta dùng công thức đã cho.

Độ dài cung AB là 6α nên $BC = 6\pi - 6\alpha (0 \leq \alpha \leq \pi)$. Suy ra

$$S_2 = \int_0^\pi (6\pi - 6\alpha)^2 d\alpha = 12\pi^3 \Rightarrow S = S_1 + S_2 = 30\pi^3$$

Bài toán trên có tên gọi là **"grazing goat problem"**, một bài toán rất thú vị của toán cao cấp. Công thức trên xuất phát từ tích phân 2 lớp, tọa độ cực nằm ngoài chương trình THPT nên đề bài đã cho sẵn dạng sơ cấp của nó để dễ áp dụng.

Câu 77: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện

$\int_0^1 xf(x)(x^2 + f^2(x))dx \geq \frac{2}{5}$ Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{2}f^2(x)\right)dx$ bằng?

A. $\frac{3}{10}$

B. $\frac{16}{45}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{7}{20}$

Lời giải

Để đơn giản ta coi $a = f(x)$ khi đó với $\begin{cases} A = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3}f^2(x)\right)^2 dx \\ B = \int_0^1 xf(x)(x^2 + f^2(x))dx \end{cases}$ ta có:

$$A = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3}a^2\right)^2 dx; B = \int_0^1 xa(x^2 + a^2)dx \geq \frac{2}{5} \text{ và từ đánh giá cùng bậc có}$$

$$(a^2 + 3x^2)^2 - 4ax(a^2 + x^2) - 8x^4 = (a - x)^4 \geq 0$$

$$\Rightarrow 9A = \int_0^1 (a^2 + 3x^2)^2 dx \geq 4 \int_0^1 ax(x^2 + a^2)dx + 8 \int_0^1 x^4 dx = 4B + \frac{8}{5} \geq \frac{16}{5}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = f(x), \forall x \in [0;1]$.

Chọn ý B.

Câu 78: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1;3]$ và $f(1) = 0, \max_{[1;3]} |f(x)| = \sqrt{10}$. Giá trị nhỏ

nhất của tích phân $\int_1^3 [f'(x)]^2 dx$ bằng?

A. 1.

B. 5.

C. 10.

D. 20.

Lời giải

Nhận thấy rằng $\max_{[1;3]} |f(x)| = \sqrt{10} \Rightarrow \exists x_0 \in [1;3]$ sao cho $|f(x_0)| = \sqrt{10}$

Ta có $f(1) = 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (1;3]$ sao cho $|f(x_0)| = \sqrt{10}$.

Theo bất đẳng thức Holder ta có:

$$\left(\int_1^{x_0} f'(x)dx\right)^2 \leq \int_1^{x_0} 1^2 dx \cdot \int_1^{x_0} [f'(x)]^2 dx = (x_0 - 1) \cdot \int_1^{x_0} [f'(x)]^2 dx$$

Mặt khác ta lại có $\left(\int_1^{x_0} f'(x)dx\right)^2 = \left(f(x)\Big|_1^{x_0}\right)^2 = (f(x_0) - f(1))^2 = 10$

$$\Rightarrow \int_1^{x_0} [f'(x)]^2 dx \geq \frac{10}{x_0 - 1} \Rightarrow \int_1^3 [f'(x)]^2 dx \geq \int_1^{x_0} [f'(x)]^2 dx \geq \frac{10}{x_0 - 1} \geq \frac{10}{3 - 1}$$

Chọn ý B.

Câu 79: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa $f'(x) \geq f(x) > 0, \forall x \in [0;1]$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức $f(0) \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx$ bằng?

- A. 1. B. $\frac{e-1}{e}$. C. $\frac{e+1}{e}$. D. $e-1$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $f'(x) \geq f(x) > 0, \forall x \in [0;1] \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} \geq 1, \forall x \in [0;1]$.

Lấy tích phân 2 vế cận từ 0 đến t ta được

$$\int_0^t \frac{f'(x)}{f(x)} dx \geq \int_0^t 1 dx \Leftrightarrow \ln f(x) \Big|_0^t \geq x \Big|_0^t \Leftrightarrow \ln f(t) - \ln f(0) \geq t \Leftrightarrow f(t) \geq f(0)e^t$$

$$\text{Do đó } f(0) \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{e^x} dx = \frac{e-1}{e}.$$

Chọn ý B.

Câu 80: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$. Đặt hàm số

$g(x) = 1 + \int_0^{x^2} f(t) dt$. Biết rằng $g(x) \geq 2xf(x^2)$ với mọi $x \in [0;1]$, tích phân $\int_0^1 g(x) dx$ có giá trị lớn nhất bằng?

- A. 1. B. $e-1$. C. 2. D. $e+1$.

Lời giải

Lấy đạo hàm 2 vế của giả thiết ta có $\begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(x) = 2xf(x^2) \end{cases}$ và $g(x) > 0, \forall x \in [0;1]$.

Theo giả thiết $g(x) \geq 2xf(x^2) \Rightarrow g(x) \geq g'(x) \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} \leq 1$

Lấy tích phân 2 vế cận từ 0 tới t ta được

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{g'(x)}{g(x)} dx &\leq \int_0^t 1 dx \Leftrightarrow \ln g(x) \Big|_0^t \leq x \Big|_0^t \\ &\Leftrightarrow \ln g(t) - \ln g(0) \leq t \Leftrightarrow \ln g(t) \leq t \Leftrightarrow g(t) \leq e^t \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 g(x) dx \leq \int_0^1 e^x dx = e-1$$

Chọn ý B.

Câu 81: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn điều kiện $f(x) \leq 2018 + 2 \int_0^x f(t)dt$ với mọi $x \in [0;1]$. Biết giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ có dạng $ae^2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $a + b$.

A. 0.

B. 1009.

C. 2018.

D. 2020.

Lời giải

Đặt $g(x) = 2018 + 2 \int_0^x f(t)dt$, lấy đạo hàm 2 vế ta có $\begin{cases} g(0) = 2018 \\ g'(x) = 2f(x) \end{cases}$ và $g(x) > 0, \forall x \in [0;1]$

Theo giả thiết $g(x) \geq f(x) \Rightarrow g(x) \geq \frac{g'(x)}{2} \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} \leq 2$

Lấy tích phân 2 vế cận từ 0 đến t ta được

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{g'(x)}{g(x)} dx &\leq \int_0^t 2dx, \forall t \in [0;1] \Leftrightarrow \ln|g(x)| \Big|_0^t \leq 2x \Big|_0^t \\ &\Leftrightarrow \ln g(t) - \ln g(0) \leq 2t \Leftrightarrow \ln g(t) \leq 2t + \ln 2018 \Leftrightarrow g(t) \leq 2018 \cdot e^{2t} \end{aligned}$$

Do đó $\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx \leq 2018 \int_0^1 e^{2x} dx = 1009e^{2x} \Big|_0^1 = 1009e^2 - 1009$.

Chọn ý A.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên $[0;1]$. Đặt hàm số $g(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x) \leq \sqrt{f(x)}$ với mọi $x \in [0;1]$, tích phân $\int_0^1 \frac{1}{g(x)} dx$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. 1.

2. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn điều kiện $f^2(x) \leq 1 + 3 \int_0^x f(t)dt = g(x)$ với mọi $x \in [0;1]$, tích phân $\int_0^1 \sqrt{g(x)} dx$ có giá trị lớn nhất bằng?

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{7}{4}$.

C. $\frac{9}{5}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Chọn ý B.

Câu 82: Cho hàm số $f(x)$ dương và liên tục trên $[1;3]$, thỏa $\max_{[1;3]} f(x) = 2$, $\min_{[1;3]} f(x) = \frac{1}{2}$

và biểu thức $S = \int_1^3 f(x) dx \cdot \int_1^3 \frac{1}{f(x)} dx$ đạt giá trị lớn nhất, khi đó hãy tính $I = \int_1^3 f(x) dx$.

A. $\frac{3}{5}$.

B. $\frac{7}{5}$.

C. $\frac{7}{2}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 2$, suy ra $f(x) + \frac{1}{f(x)} \leq \frac{5}{2}$.

$$\Rightarrow \int_1^3 \left[f(x) + \frac{1}{f(x)} \right] dx \leq \int_1^3 \frac{5}{2} dx \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 \frac{1}{f(x)} dx \leq 5 \Leftrightarrow \int_1^3 \frac{1}{f(x)} dx \leq 5 - \int_1^3 f(x) dx$$

$$\text{Khi đó } S = \int_1^3 f(x) dx \cdot \int_1^3 \frac{1}{f(x)} dx \leq \int_1^3 f(x) dx \cdot \left(5 - \int_1^3 f(x) dx \right) = - \left(\int_1^3 f(x) dx - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{25}{4} \leq \frac{25}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\int_1^3 f(x) dx = \frac{5}{2}$.

Chọn ý D.

Câu 83: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn với mọi x, y, α, β và $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ ta có $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y) \geq (\alpha + \beta) f\left(\frac{\alpha x + \beta y}{\alpha + \beta}\right)$. Biết $f(0) = 0$, $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. 8

B. 4

C. $2\sqrt{2}$

D. 2

Lời giải

Áp dụng tính chất của tích phân ta có:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(1-x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (f(x) + f(1-x)) dx \geq \frac{1}{2} \int_0^1 (1+1) f\left(\frac{1 \cdot x + 1(1-x)}{1+1}\right) dx = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Mặt khác ta lại có:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \left[f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) \right] dx = 2 \int_0^1 \left[(1-x)f(0) + xf\left(\frac{1}{2}\right) \right] dx \\ &\geq 2 \int_0^1 (1-x+x) f\left(\frac{(1-x) \cdot 0 + x \cdot \frac{1}{2}}{1-x+x}\right) dx = 2 \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 8 \end{aligned}$$

Vậy $\int_0^1 f(x) dx \geq 8$, dấu "=" xảy ra chẳng hạn tại $f(x) = 16x$.

Chọn ý A.

Câu 84: Cho hàm số $f(x)$ dương liên tục $[0; +\infty)$ thỏa mãn đồng thời điều kiện $f(x) \leq 2018 + 2 \int_0^x f(t) dt, \forall x \geq 0; \int_0^1 f(x) dx = 1009(e^2 - 1)$. Tính tích phân $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx$?

A. $2018(e-1)$ B. $1009(e+1)$ C. $2018(e-2)$ D. $1009(e-1)$

Lời giải

Ta có $f(x) \leq 2018 + 2 \int_0^x f(t) dt \Leftrightarrow f(x) - 2018 - 2 \int_0^x f(t) dt \leq 0$ (1)

Đặt $g(x) = e^{ax} \left(\int_0^x f(t) dt + b \right); g'(x) = e^{ax} \left(a \int_0^x f(t) dt + f(x) + ab \right)$

Từ (1) ta thực hiện phép đồng nhất ta được $\begin{cases} a = -2 \\ ab = -2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1009 \end{cases}$

Suy ra $g'(x) \leq 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $[0; +\infty)$.

$$\Rightarrow e^{-2x} \left(\int_0^x f(t) dt + 1009 \right) = g(x) \leq g(0) \Rightarrow 2 \int_0^x f(t) dt + 2018 \leq 2018e^{2x}$$

Vậy $f(x) \leq 2018e^{2x} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \leq 1009e^2 - 1009$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = 2018e^{2x} \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = 2018(e-1)$

Chọn ý A.

Câu 85: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm khác 0 và liên tục đến cấp hai trên đoạn $[1; 2]$. Biết

$\ln 2f'(1) = f(1) = 1, f'(x) = \sqrt[3]{\frac{f'(x) - xf''(x)}{2^{f(x)-1} \ln^2 2}}, \forall x \in [1; 2]$. Tính tích phân $I = \int_1^2 xf(x) dx$?

A. $\log_2 5 + \frac{1}{2 \ln 2} + 1$

B. $3 \log_2 5 - \frac{3}{4 \ln 2} - 2$

C. $\log_2 5 - \frac{3}{\ln 2} + 2$

D. $2 \log_2 5 - \frac{3}{2 \ln 2} - 1$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$f'(x) = \sqrt[3]{\frac{f'(x) - xf''(x)}{2^{f(x)-1} \ln^2 2}} \Leftrightarrow f'(x) \cdot 2^{f(x)} \ln^2 2 = \frac{2f'(x) - 2xf''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$\Leftrightarrow (2^{f(x)} \ln 2)' = \left(\frac{2x}{f'(x)} \right)' \Leftrightarrow 2^{f(x)} \ln 2 = \frac{2x}{f'(x)} + C_1$$

Vì $\ln 2f'(1) = f(1) = 1 \Rightarrow C_1 = 0$. Khi đó ta được

$$f'(x) 2^{f(x)} \ln 2 = 2x \Leftrightarrow (2^{f(x)})' = 2x \Leftrightarrow 2^{f(x)} = \int 2x dx = x^2 + C_2 \Leftrightarrow f(x) = \log_2 (x^2 + C_2)$$

Vì $f(1) = 1 \Rightarrow C_2 = 1 \Rightarrow f(x) = \log_2 (x^2 + 1)$. Sử dụng tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^2 x \log_2(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} x^2 \log_2(x^2 + 1) \Big|_1^2 - \frac{1}{\ln 2} \int_1^2 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx \\
 &= 2 \log_2 5 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = 2 \log_2 5 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_0^1 \\
 &= 2 \log_2 5 - \frac{3}{\ln 2} - 1
 \end{aligned}$$

Chọn ý D.

Câu 86: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ thỏa mãn $f(1) = -1, f(4) = -8$ và đồng thời $[f'(x)]^2 \sqrt{x^3} - f(x) = 9\sqrt{x^3} - \sqrt{x} - 3x, \forall x \in [1; 4]$. Tích phân $\int_1^4 f(x) dx$ bằng

- A. -7 B. $-\frac{89}{6}$ C. $-\frac{79}{6}$ D. -8

Lời giải

Giả thiết đã cho tương đương $[f'(x)]^2 - \frac{f(x)}{\sqrt{x^3}} = 9 - \frac{1}{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1; 4]$ ta được:

$$\int_1^4 [f'(x)]^2 dx - \int_1^4 \frac{f(x)}{\sqrt{x^3}} dx = \int_1^4 \left(9 - \frac{1}{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx = 21 - 2 \ln 2$$

Sử dụng tích phân từng phần ta được:

$$\begin{aligned}
 \int_1^4 \frac{f(x)}{\sqrt{x^3}} dx &= \int_1^4 f(x) d \left(-\frac{2}{\sqrt{x}} + a \right), a \text{ sẽ được xác định sau} \\
 &= \left(a - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) f(x) \Big|_1^4 - \int_1^4 \left(a - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) f'(x) dx = 7a - 6 + 2 \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{a}{2} \right) f'(x) dx
 \end{aligned}$$

Từ đây ta có đẳng thức:

$$\begin{aligned}
 \int_1^4 (f'(x))^2 dx + 7a - 6 - 2 \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{a}{2} \right) f'(x) dx &= 21 - 2 \ln 2 \\
 \Leftrightarrow \int_1^4 \left(f'(x) - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{a}{2} \right)^2 dx - 2 \ln 2 + 9a - \frac{3a^2}{4} - 6 &= 21 - 2 \ln 2
 \end{aligned}$$

Ta dễ tìm được $a = 3$ để $-2 \ln 2 + 9a - \frac{3a^2}{4} - 6 = 21 - 2 \ln 2$, khi đó

$$f'(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{x}} - 3, \forall x \in [1; 4] \Rightarrow f(x) = 2\sqrt{x} - 3x$$

Vậy $\int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 (2\sqrt{x} - 3x) dx = -\frac{79}{6}$

Chọn ý C.

Câu 87: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện $2[f(2)]^2 - [f(1)]^2 = 63; 2[f(x)]^2 + x^2[f'(x)]^2 = 27x^2, \forall x \in [1;2]$. Tính giá trị của tích phân $\int_1^2 [f(x)]^2 dx$

A. 15

B. 18

C. 21

D. 25

Lời giải

Theo giả thiết ta có

$$\int_1^2 [f(x)]^2 dx + \int_1^2 [f(x)]^2 dx + \int_1^2 x^2 [f'(x)]^2 dx = \int_1^2 27x^2 dx = 63 \quad (1)$$

Xét tích phân $I = \int_1^2 [f(x)]^2 dx$, đặt $\begin{cases} u = [f(x)]^2 \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2f'(x)f(x) \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = x[f(x)]^2 \Big|_1^2 - 2 \int_1^2 xf'(x)f(x) dx = 63 - 2 \int_1^2 xf'(x)f(x) dx$$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \int_1^2 [f(x)]^2 dx - 2 \int_1^2 xf'(x)f(x) dx + \int_1^2 x^2 [f'(x)]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^2 [f(x) - xf'(x)]^2 dx = 0$$

Do đó $f(x) - xf'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}f(x)\right)' = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv Cx$

$$\text{Vậy } 2(Cx)^2 + x^2 C^2 = 3C^2 x^2 = 27x^2 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow \int_1^2 [f(x)]^2 dx = 21$$

Chọn ý C.

Trong bài toán này ta đã sử dụng tính chất sau của tích phân:

Nếu $\int_a^b [f(x)]^2 dx = 0$ thì ta suy ra $f(x) = 0$

Câu 88: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện

$$\int_1^3 \frac{[f'(x)]^3}{f(x)} dx = \frac{27}{4}; f(1) = 2\sqrt{2}, f(3) = 4. \text{ Tích phân } \int_1^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+2}} dx \text{ bằng}$$

A. $\sqrt{6} - \sqrt{5}$

B. $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

D. $\sqrt{5} - 2$

Lời giải

Vì $f'(x) > 0, \forall x \in [1;3] \Rightarrow f(x) \geq f(1) = 2\sqrt{2} > 0, \forall x \in [1;3]$

$$\text{Ta có } \int_1^3 \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{f(x)}} dx = \frac{3}{2} \sqrt[3]{[f(x)]^2} \Big|_1^3 = \frac{3}{2} (\sqrt[3]{f^2(3)} - \sqrt[3]{f^2(1)}) = 3$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho 3 số thực dương ta có:

$$\frac{[f'(x)]^3}{f(x)} + \frac{27}{8} + \frac{27}{8} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{[f'(x)]^3}{f(x)} \cdot \frac{27}{8} \cdot \frac{27}{8}} = \frac{27}{4} \cdot \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{f(x)}}$$

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1;3]$ ta được:

$$\int_1^3 \left(\frac{[f'(x)]^3}{f(x)} + \frac{27}{8} + \frac{27}{8} \right) dx \geq \int_1^3 \left(\frac{27}{4} \cdot \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{f(x)}} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 \frac{[f'(x)]^3}{f(x)} dx + \frac{27}{2} \geq \frac{81}{4} \Leftrightarrow \int_1^3 \frac{[f'(x)]^3}{f(x)} dx \geq \frac{27}{4}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{[f'(x)]^3}{f(x)} = \frac{27}{8} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{f(x)}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} \sqrt[3]{[f(x)]^2} = \frac{3}{2}x + C \Rightarrow f(x) = \sqrt{\left(x + \frac{2C}{3}\right)^3}$

Mặt khác $f(1) = 2\sqrt{2} \Rightarrow C = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{(x+1)^3} \Rightarrow \int_1^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+2}} dx = \sqrt{6} - \sqrt{5}$

Chọn ý A.

Câu 89: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $e \cdot f(1) = 4f(0) = 4$ và đồng thời $\int_0^1 e^{2x} ([f'(x)]^2 - [f(x)]^2) dx + 4 \int_0^1 e^x \cdot f(x) dx = \frac{8}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x) dx$?

- A. $\frac{4(e-1)}{e}$ B. $\frac{3(e-1)}{e}$ C. $\frac{2(e+2)}{e}$ D. $\frac{5(e-2)}{e}$

Lời giải

Xét tích phân $K = \int_0^1 e^{2x} ([f'(x)]^2 - [f(x)]^2) dx + 4 \int_0^1 e^x f(x) dx = \frac{8}{3}$

Đặt $u(x) = e^x f(x) \Rightarrow u' = e^x f(x) + e^x f'(x) \Rightarrow e^x f'(x) = u' - u$, khi đó ta được

$$K = \int_0^1 [(u' - u)^2 - u^2 + 4u] dx = \int_0^1 [(u')^2 - 2u \cdot u' + 4u] dx \quad (u(1) = 4, u(0) = 1)$$

Ta có $\int_0^1 u \cdot u' dx = \frac{u^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{15}{2}$, $\int_0^1 u dx = xu \Big|_0^1 - \int_0^1 xu' dx = 4 - \int_0^1 xu' dx$.

Suy ra $K = \int_0^1 [(u')^2 - 4xu'] dx = \frac{8}{3}$. Đến đây ta chọn $m \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\int_0^1 [u' - 2x - m]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 [(u')^2 - 4xu'] dx - 2m \int_0^1 u' dx + \int_0^1 (2x + m)^2 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{3} - 6m + m^2 + 2m + \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy ta được $\int_0^1 [u' - 2x - 2]^2 dx = 0 \Leftrightarrow e^x f(x) + e^x f'(x) = 2x + 2$

$$\Leftrightarrow (e^x f(x))' = 2x + 2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2 + 2x + C}{e^x} \xrightarrow{f(0)=1} f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{e^x} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{5(e-2)}{e}$$

Chọn ý D.

Câu 90: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(0) = \frac{1}{16}$; $\int_0^1 (x+1)^3 f'(x) dx = -\frac{1}{8}$; $\int_0^1 \frac{[f(x)]^3}{[f'(x)]^2} dx = \frac{1}{64}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x) dx$?

- A. $\frac{1}{24}$ B. $\frac{1}{32}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{4}$

Lời giải

Áp dụng nguyên hàm từng phần ta có:

$$\int_0^1 (x+1)^3 f'(x) dx = (x+1)^3 f(x) \Big|_0^1 - 3 \int_0^1 (x+1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{8} \Rightarrow \int_0^1 (x+1)^2 f(x) dx = \frac{1}{16}$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} &= \int_0^1 \left| \frac{f(x)}{[f'(x)]^{\frac{2}{3}}} (x+1)^2 [f'(x)]^{\frac{2}{3}} \right| dx \leq \left[\int_0^1 \left[\frac{f(x)}{[f'(x)]^{\frac{2}{3}}} \right]^3 dx \right]^{\frac{1}{3}} \left[\int_0^1 \left[(x+1)^2 [f'(x)]^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} dx \right]^{\frac{2}{3}} \\ &= \left[\int_0^1 \frac{[f(x)]^3}{[f'(x)]^2} dx \right]^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^1 (x+1)^3 f'(x) dx \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{64} \right)^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{8} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \left[\frac{f(x)}{[f'(x)]^{\frac{2}{3}}} \right]^3 = k \left[(x+1)^2 [f'(x)]^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^3}{[f(x)]^3} = \frac{1}{k(x+1)^3} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \int_0^1 \frac{[f(x)]^3}{[f'(x)]^2} dx = \int_0^1 \left[\frac{f(x)}{f'(x)} \right]^3 f'(x) dx = \int_0^1 k(x+1)^3 f'(x) dx = \frac{1}{64} \Rightarrow k = \frac{-1}{8}$$

Khi đó ta được

$$(1) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{2}{x+1} \Rightarrow \ln f(x) = -2 \ln|x+1| + C \xrightarrow{f(0)=\frac{1}{16}} f(x) = \frac{1}{16(x+1)^2} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{32}$$

Chọn ý B.

Câu 91: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$ thỏa $f(0)=0, |f(x)-f(y)|=|\sin x - \sin y|$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((f(x))^2 - f(x) \right) dx$ bằng

- A. $\frac{\pi}{4} + 1$ B. $\frac{\pi}{8}$ C. $\frac{3\pi}{8}$ D. $1 - \frac{\pi}{4}$

Lời giải

Theo giả thiết ta có $|f(x)| = |f(x) - f(0)| = |f(x) - f(0)| \leq |\sin x - \sin 0| = |\sin x|$

$$\Rightarrow [f(x)]^2 - f(x) \leq \sin^2 x + \sin x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left([f(x)]^2 - f(x) \right) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \sin x) dx = 1 + \frac{\pi}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $f(x) = -\sin x$.

Chọn ý A.

Câu 92: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $[0; +\infty)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(0) = 1; f'(0) = 0; f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geq 0, \forall x \in [0; +\infty); \int_0^{\ln 2} f(x) dx = \frac{-1}{6}$. Tính giá trị của tích phân $\int_0^{\ln 2} f^2(x) dx$.

A. $\frac{15}{4}$

B. $\frac{35}{17}$

C. $\frac{27}{20}$

D. $\frac{24}{7}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f''(x) - 2f'(x) - 3[f'(x) - 2f(x)] \geq 0$

Đặt $g(x) = f'(x) - 2f(x) \Rightarrow g'(x) - 3g(x) \geq 0$

Xét hàm số $h(x) = e^{-3x}g(x) \Rightarrow h'(x) = -3e^{-3x}g(x) + e^{-3x}g'(x) = e^{-3x}(g'(x) - 3g(x)) \geq 0$

Suy ra $h(x)$ đồng biến trên $[0; +\infty) \Rightarrow h(x) \geq h(0) = g(0) = f'(0) - 2f(0) = -2$

$$\Rightarrow e^{-3x}g(x) \geq -2 \Leftrightarrow e^{-2x}(f'(x) - 2f(x)) + 2e^x \geq 0$$

Xét hàm số $k(x) = e^{-2x}f(x) + 2e^x \Rightarrow k'(x) = e^{-2x}(f'(x) - 2f(x)) + 2e^x \geq 0$

Suy ra $k(x)$ đồng biến trên $[0; +\infty) \Rightarrow k(x) \geq k(0) = f(0) + 2 = 3$

$$\Rightarrow e^{-2x}f(x) + 2e^x \geq 3 \Leftrightarrow f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x} \Rightarrow \int_0^{\ln 2} f(x) dx \geq -\frac{1}{6}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = 3e^{2x} - 2e^{3x} \Rightarrow \int_0^{\ln 2} [f(x)]^2 dx = \frac{27}{20}$

Chọn ý C.

Câu 93: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp 2 trên $[0; 2]$ thỏa mãn điều kiện $f(0) - 2f(1) + f(2) = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^2 [f''(x)]^2 dx$ bằng

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\int_0^1 [f''(x)]^2 dx = 3 \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^1 [f''(x)]^2 dx \geq 3 \left(\int_0^1 x f''(x) dx \right)^2$$

Ta đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f''(x) dx \end{cases} \Rightarrow 3 \left(\int_0^1 x f''(x) dx \right)^2 = 3 [f'(1) + f(0) - f(1)]^2$

Sử dụng bất đẳng thức Holder một lần nữa ta được

$$\int_1^2 [f''(x)]^2 dx = 3 \int_1^2 (x-2)^2 dx \cdot \int_1^2 [f''(x)]^2 dx \geq 3 \left(\int_1^2 (x-2) f''(x) dx \right)^2$$

Ta đặt $\begin{cases} u = x-2 \\ dv = f''(x) dx \end{cases} \Rightarrow 3 \left(\int_1^2 (x-2) f''(x) dx \right)^2 = 3 [-f'(1) + f(2) - f(1)]^2$

Suy ra $2 \int_0^2 [f''(x)]^2 dx \geq 3 [f'(1) + f(0) - f(1)]^2 + 3 [-f'(1) + f(2) - f(1)]^2$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$3[f'(1)+f(0)-f(1)]^2+3[-f'(1)+f(2)-f(1)]^2\geq 3.\frac{[f(0)-2f(1)+f(2)]^2}{2}=\frac{3}{2}.$$

Chọn ý B.

Câu 94: Cho tích phân $I = \int_{-7}^{11} (\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}) dx$, gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của I. Tính $S = M + m$?

- A. $54\sqrt{2} + 108$ B. $36\sqrt{2} + 108$ C. $6\sqrt{3} + 54$ D. $6\sqrt{3} + 36$

Lời giải

Đặt $y = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}$ với $x \in [-7; 11]$. Ta có $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+7}} - \frac{1}{2\sqrt{11-x}} = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Nhận thấy y' không xác định tại $-7; 11$, vẽ bảng biến thiên ta có $\sqrt{18} \leq y \leq 6$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-7}^{11} \sqrt{18} dx &\leq \int_{-7}^{11} (\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}) dx \leq \int_{-7}^{11} 6 dx \\ &\Leftrightarrow 54\sqrt{2} \leq \int_{-7}^{11} (\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}) dx \leq 108 \end{aligned}$$

Chọn ý A.

Câu 95: Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}$, biết rằng tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của I được viết dưới dạng $a\pi\left(\frac{1}{b} + \frac{\sqrt{c}}{d}\right)$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{c}{d}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c + d$?

- A. 14 B. 15 C. 16 D. 17

Lời giải

Ta có $x \in [0; 1] \Rightarrow 0 \leq x^3 \leq x^2 \Rightarrow -x^2 \leq -x^3 \leq 0 \Rightarrow 4 - 2x^2 \leq 4 - x^2 - x^3 \leq 4 - x^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4-2x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \geq \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx}_I \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}} dx \leq \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-2x^2}} dx}_J$$

$$\text{Đặt } x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos t}{\sqrt{4-(2 \sin t)^2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Đặt } x = \sqrt{2} \sin t \Rightarrow dx = \sqrt{2} \cos t dt \Rightarrow J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos t}{\sqrt{4-2(\sqrt{2} \sin t)^2}} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

$$\text{Vậy } \frac{\pi}{6} \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}} dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

Chọn ý D.

Câu 96: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, biết rằng tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của I được viết dưới dạng $\frac{a\pi}{b} + \frac{c}{d}$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c + d$?

A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

Lời giải

$$\text{Ta có } x^{2n} \geq 0 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx \geq \frac{1}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$

$$\text{Ta thấy } n \in \mathbb{N}^*, x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow x^{2n} \leq x^2 \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\text{Đặt } x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$

Chọn ý B.

Câu 97: Cho tích phân $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \sin x}{x^2 + 1} dx$, biết rằng giá trị lớn nhất của I được viết dưới dạng $\frac{a\pi}{be}$, với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính tổng $S = a + b$

A. 13 B. 14 C. 14 D. 15

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có với mọi } x \in [1; \sqrt{3}] &\Rightarrow -x \leq -1 \Rightarrow e^{-x} \leq \frac{1}{e} \\ &\Rightarrow \frac{e^{-x} \sin x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{e(x^2 + 1)} \Rightarrow \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \sin x}{x^2 + 1} dx \leq \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{e(x^2 + 1)} dx \end{aligned}$$

Xét tích phân $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{e(x^2 + 1)} dx$. Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = (\tan^2 t + 1) dt$ ta được

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{e(x^2 + 1)} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\tan^2 t + 1) dt}{e(\tan^2 t + 1)} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{e} = \frac{\pi}{12e}$$

$$\text{Vậy } I \leq \frac{\pi}{12e}.$$

Chọn ý A.

Câu 98: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1, f(x)>0$ và đồng thời $f(x)\ln f(x)=xf'(x)[f(x)-1], \forall x \in [0;1]$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\frac{e-1}{3}$

B. $\frac{e-6}{6}$

C. 4

D. 1

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\Leftrightarrow f(x)\ln f(x)+xf'(x)=xf'(x)f(x) \Leftrightarrow \ln f(x)+x\frac{f'(x)}{f(x)}=xf'(x)$$

$$\Leftrightarrow (x\ln f(x))'=xf'(x) \Leftrightarrow x\ln f(x)\Big|_0^1=\int_0^1 xf'(x)dx=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)dx$$

Vậy ta được $\int_0^1 f(x)dx=f(1)=1$

Chọn ý D.

Câu 99: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $f(2018x+2017)=2018f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_0^1 [f(x)]^2 dx$?

A. $\frac{4}{3}[f(-1)]^2$

B. $\frac{5}{3}[f(-1)]^2$

C. $\frac{7}{3}[f(-1)]^2$

D. $\frac{8}{3}[f(-1)]^2$

Lời giải

Xét biểu thức $f(2018x+2017)=2018f(x)$. Lấy đạo hàm 2 vế ta được

$$2018f'(2018x+2017)=2018f'(x)$$

$$\text{Thay } x \text{ bởi } 2018x+2017, \text{ ta được } f'(x)=f'\left(\frac{\frac{x-2017}{2018}-2018+1}{2018}\right)=f'\left(\frac{x-2018^2+1}{2018^2}\right)$$

Thay đến n lần và bằng quy nạp ta chứng minh được

$$f'(x)=f'\left(\frac{x-2018^n+1}{2018^n}\right)=f'\left(\frac{x}{2018^n}-1+\frac{1}{2018^n}\right)$$

$$\text{Khi } n \rightarrow +\infty \Rightarrow f'(x)=f'(-1)=f(x)=f'(-1)x+C(*)$$

$$\text{Thay } x=-1 \Rightarrow f(-1)=2018f(-1) \Rightarrow f(-1)=0$$

$$\text{Thay } x=-1 \Rightarrow (*): f(-1)=-f'(-1)+C=0 \Leftrightarrow f'(-1)=C$$

$$\text{Vậy } f(x)=f'(-1)(x+1) \Rightarrow \int_0^1 [f(x)]^2 dx = \frac{7}{3}[f(-1)]^2$$

Chọn ý C.

Câu 100: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $f(1) = \frac{7}{3}$ và

đồng thời $\frac{3x^3 f(x)}{[f'(x)]^2 + xf'(x) + x^2} = f'(x) - x, \forall x \in [1;2]$. Tính giá trị của $f(2)$?

A. $\frac{7\sqrt{7}-1}{3}$

B. $\frac{7\sqrt{7}+1}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{7}-1}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{7}+1}{3}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$3x^3 f(x) = (f'(x) - x) \left([f'(x)]^2 + xf'(x) + x^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3 \Leftrightarrow x^3 (3f(x) + 1) = [f'(x)]^3 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{3f(x)+1}} = x$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{3f(x)+1}} dx = \int_1^2 x dx = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_1^2 [3f(x)+1]^{\frac{1}{3}} d(3f(x)+1) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} [3f(x)+1]^{\frac{2}{3}} \Big|_1^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow [3f(2)+1]^{\frac{2}{3}} - [3f(1)+1]^{\frac{2}{3}} = 3 \Rightarrow f(2) = \frac{7\sqrt{7}-1}{3}$$

Chọn ý A.

Câu 101: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, hàm số $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(1) - f(0) = 2$. Biết rằng $0 \leq f'(x) \leq 2\sqrt{2x}, \forall x \in [0;1]$. Khi đó, giá trị của tích phân

$\int_0^1 (f'(x))^2 dx$ thuộc khoảng nào sau đây.

A. $(2;4)$

B. $\left(\frac{13}{3}; \frac{14}{3}\right)$

C. $\left(\frac{10}{3}; \frac{13}{3}\right)$

D. $(1;3)$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $0 \leq f'(x) \leq 2\sqrt{2x}, \forall x \in [0;1]$

$$\Rightarrow 0 \leq [f'(x)]^2 \leq 8x, \forall x \in [0;1] \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \leq \int_0^1 8x dx = 4(1)$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz* ta có $\left(\int_0^1 f'(x) dx\right)^2 \leq \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$

$$\text{Mặt khác } \left(\int_0^1 f'(x) dx\right)^2 = \left(f(x)\Big|_0^1\right)^2 = (f(1) - f(0))^2 = 4 \Rightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 4(2)$$

$$\text{Từ (1);(2)} \Rightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 4.$$

Chọn ý A.

Câu 102: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$f^3(x) \cdot [4(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x)] = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$, biết $f(0) = 0$. Khi đó $\int_0^{5\ln 2} f^5(x) dx$ bằng?

A. $5 \left(31 - \frac{25\ln^2 2}{2} - 5\ln 2 \right)$

B. $\frac{1}{5} \left(31 - \frac{355\ln 2}{2} \right)$

C. $\frac{1}{5} \left(31 - \frac{25\ln^2 2}{2} - 5\ln 2 \right)$

D. $5 \left(31 - \frac{355\ln 2}{2} \right)$

Lời giải

Giả thiết tương đương $(f^4(x) \cdot f'(x))' = e^x \Rightarrow f^4(x) f'(x) = e^x + C$ mà $f(0) = 0 \Rightarrow C = -1$

$$\Rightarrow f^4(x) f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow \int f^4(x) f'(x) dx = e^x - x + D \Rightarrow f^5(x) = 5(e^x - x + D)$$

Mặt khác $f(0) = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow f^5(x) = 5(e^x - x - 1)$

$$\Rightarrow \int_0^{5\ln 2} f^5(x) dx = 5 \int_0^{5\ln 2} (e^x - x - 1) dx = 5 \left(31 - \frac{25\ln^2 2}{2} - 5\ln 2 \right)$$

Chọn ý A.

Câu 103: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^2 f(x) dx = 1$. Tính giới hạn của dãy số:

$$u_n = \frac{1}{n} \left[f(1) + \sqrt{\frac{n}{n+3}} f\left(\sqrt{\frac{n+3}{n}}\right) + \sqrt{\frac{n}{n+6}} f\left(\sqrt{\frac{n+6}{n}}\right) + \dots + \sqrt{\frac{n}{4n-3}} f\left(\sqrt{\frac{4n-3}{n}}\right) \right]$$

A. 2

B. $\frac{2}{3}$

C. 1

D. $\frac{4}{3}$

Lời giải

Chú ý đây là một câu sử dụng định nghĩa tích phân bằng tổng Riemann không nằm trong phạm vi kiến thức THPT nên chỉ mang tính tham khảo, không đi sâu!

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \Rightarrow S = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3}{n} \frac{f\left(\sqrt{1 + \frac{3i}{n}}\right)}{\sqrt{1 + \frac{3i}{n}}} = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3}{n} g\left(1 + \frac{3i}{n}\right)$$

Ta chia đoạn $[1; 4]$ thành n phần bằng nhau bằng các điểm chia

$$x_i = 1 + i \cdot \frac{4-1}{n} \quad (i = \overline{0, n}) \quad (x_0 = 1, \dots, x_n = 4)$$

Mỗi đoạn con có độ dài là $x_{i+1} - x_i = \frac{4-1}{n} \Rightarrow S = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i) (x_{i+1} - x_i)$

$$\Rightarrow \lim S = \frac{1}{3} \int_1^4 g(x) dx = \frac{1}{3} \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{3} \int_1^4 2f(\sqrt{x}) d(\sqrt{x}) = \frac{2}{3}$$

Chọn ý B.

Câu 104: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn $f'(1) = g(1) = 1; f(2).g(2) = f(1)$ và đồng thời $1 - f'(x)g'(x) = g(x)\left[f''(x) + \frac{1}{x}f'(x)\right], \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x)g'(x)dx$?

- A. $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$ B. $-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$ C. $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ D. $-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\begin{aligned} x - xf'(x)g'(x) &= xg(x)f''(x) + g(x)f'(x) \\ \Leftrightarrow x &= x[g'(x)f'(x) + g(x)f''(x)] + g(x)f'(x) \\ \Leftrightarrow x &= (xf'(x)g(x))' \Rightarrow xf'(x)g(x) = \frac{x^2}{2} + C \\ \Leftrightarrow f'(x)g(x) &= \frac{x}{2} + \frac{C}{x} \xrightarrow{f'(1)=g(1)=1} f'(x)g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \\ \Leftrightarrow \int_1^2 f'(x)g(x)dx &= \int_1^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)dx = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \end{aligned}$$

Sử dụng tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 f'(x)g(x)dx = g(x)f(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 f(x)g'(x)dx = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \\ \Rightarrow \int_1^2 f(x)g'(x)dx &= -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \end{aligned}$$

Chọn ý D.

Câu 105: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = f(1) = 0$ và đồng thời điều kiện $\int_0^1 |f'(x)|dx = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|f(x)|$ trên $[0;1]$?

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. 1

Lời giải

Ta có:

- Với $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow |f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)dt\right| \leq \int_0^x |f'(t)|dt \leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(t)|dt$
- Với $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Rightarrow |f(x)| = \left|\int_x^1 f'(t)dt\right| \leq \int_x^1 |f'(t)|dt \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(t)|dt$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(t)|dt \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(t)|dt = \frac{1}{2}$$

Chọn ý A.

NHỊ THỨC NEWTON VẬN DỤNG CAO

GIỚI THIỆU VỀ NHỊ THỨC NEWTON

Để ghi nhớ công lao của Isaac Newton (1642 – 1727) trong việc tìm ra công thức khai triển nhị thức sau, được gọi là *nhị thức Newton*.

$$(x+1)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots 3.2.1}{m!}x^m \quad (1)$$

Trên bia mộ của Newton tại tu viện Westminster (là nơi an nghỉ của Hoàng gia và những người nổi tiếng của nước Anh) người ta còn khắc họa hình Newton cùng với cả nhị thức Newton. Vậy có phải chẳng loài người đã không hề biết gì về công thức khai triển nhị thức trước khi có phát minh của nhà bác học vĩ đại này? Theo các văn bản còn lưu giữ được từ rất lâu trước Newton, ngay từ 200 năm trước Công nguyên các nhà toán học Ấn Độ đã quen biết với một bảng tam giác số học. Trong tác phẩm của nhà toán học Trung Quốc Chu Sinh viết từ năm 1303 người ta tìm thấy bảng số sau:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{array}$$

Rõ ràng đó là các hệ số của công thức khai triển nhị thức Newton từ cấp 0 đến cấp 8, dù nhà toán học này đã không nói gì cho các hệ số tiếp theo cùng công thức tổng quát của chúng, nhưng theo cách thức lập bảng của ông, ta có thể dễ dàng tìm ra quy luật cho phép viết được các hàng mới.

Vào nửa đầu thế kỉ XV trong tác phẩm chìa khóa số học viết bằng tiếng Ả rập của nhà toán học, thiên văn học Xamacan có tên là Giêm Xit-Giaxedin Casi người ta lại gặp *tam giác số học* mà tác giả đã gọi tên rõ hơn là *các hệ số nhị thức* cùng với những chỉ dẫn cách thành lập các hàng kế tiếp của nhị thức. Với lối chỉ dẫn (không chứng minh) đó Casi đã cho ta khả năng khai triển nhị thức ở một cấp bất kì. Có thể coi đó là sự phát biểu bằng văn đầu tiên trong lịch sử của định lí về nhị thức Newton. Ở châu Âu, *tam giác số học* được tìm thấy đầu tiên trong công trình của nhà toán học người Đức Stiffel M. Công bố vào năm 1544. Trong công trình



Isaac Newton

này cũng đã chỉ dẫn ra các hệ số của nhị thức cho đến cấp 17.

Gần một trăm năm sau, hoàn toàn độc lập với nhau, Các nhà toán học người Anh Bô-rit-gôn (1624), nhà toán học Pháp Fermat (1636) rồi nhà toán học Pháp Pascal (1654) đã đưa ra công thức hoàn hảo về hệ số của nhị thức Newton. Đặc biệt trong công trình mang tên *Luận văn về tam giác số học* công bố vào năm 1665, Pascal đã trình bày khá chi tiết về tính chất của các hệ số trong tam giác số học và từ đó tam giác số học được sử dụng một cách rộng rãi và tên tam giác Pascal ra đời thay cho tam giác số học.

Rõ ràng mà nói về mặt lịch sử thì tam giác số học đã được các nhà toán học Á đông xét đến trước Pascal rất nhiều. Vậy vai trò của Newton ở đâu trong quá trình hình thành công thức nhị thức Newton ? Năm 1676 trong bức thư thứ nhất gửi Ô-đen Hiaro – Chủ tịch Viện Hàn Lâm hoàng gia Anh, Newton đã đưa công thức (1) mà không dẫn giải cách chứng minh. Sau đó ít lâu trong bức thư thứ hai gửi đến Viện Hàn Lâm, Newton đã trình bày rõ ràng bằng cách nào ông đi đến công thức đó. Thì ra bằng cách này Newton đã tìm ra công thức Newton từ năm 1665 khi mà ông chỉ mới 22 tuổi. Nhưng dù vậy thì việc đưa trình công thức của mình Newton cũng không nói được điều gì mới cho các nhà toán học đương thời.

Vậy tại sao công thức không mới đó lại mang tên Newton ? Vấn đề là ở chỗ ý tưởng của Newton không dừng lại ở việc áp dụng công thức này cho trường hợp các số mũ là số nguyên dương mà cho số mũ bất kì: số dương, số âm, số nguyên và phân số. (ở trung học chỉ học số mũ nguyên dương)

Chính ý tưởng mới đó cho một ý nghĩa lớn lao đối với việc phát triển của toán học. Các nhà toán học đương thời thấy ngay tầm quan trọng của công thức và công thức được áp dụng rộng rãi trong nhiều công trình nghiên cứu toán học, đặc biệt trong đại số và giải tích. Nhân đây cũng phải nói thêm rằng công thức nhị thức Newton không phải là sự đóng góp lớn nhất của Newton cho toán học. Newton đã đóng góp rất nhiều cho việc mở đầu những hướng toán học cao cấp, đó là các phép tính đối với các đại lượng vô cùng bé. Và do vậy đôi lúc Newton được coi là người sáng lập ra ngành Giải tích toán học

I. CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON.

Khai triển $(a + b)^n$ được cho bởi công thức sau:

Với a, b là các số thực và n là số nguyên dương, ta có

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n. (1)$$

Quy ước $a^0 = b^0 = 1$

Công thức trên được gọi là công thức nhị thức Newton (viết tắt là Nhị thức Newton).

Trong biểu thức ở VP của công thức (1)

- a) Số các hạng tử là $n + 1$.
- b) Số các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đến 0 , số mũ của b tăng dần từ 0 đến n , nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n .
- c) Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.

HỆ QUẢ

- Với $a = b = 1$, thì ta có $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$.
- Với $a = 1; b = -1$, ta có $0 = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n$

CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN LIÊN QUAN TỚI KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON

- $(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \dots + C_n^k x^{n-k} + \dots + C_n^{n-1} x + C_n^n$
- $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$
- $(x-1)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \dots + (-1)^k C_n^k x^k + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} x^{n-1} + (-1)^n C_n^n x^n$
- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}, (n \geq 1)$
- $k \cdot C_n^k = \frac{k \cdot n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = n C_{n-1}^{k-1}$
- $\frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{k \cdot n!}{(k+1)(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)!}{(n+1)(n-k)!(k+1)!} = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1}$

Một số công thức thường dùng trong các bài tập dạng này như sau:

- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}, (n > 1)$
- $k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1} (*)$
- $\frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1}$
- $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$
- $2^{n-1} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \dots + C_n^{2\left[\frac{n}{2}\right]}$
- $2^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \dots + C_n^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}$

Ngoài ra từ công thức $(*)$ ta mở rộng được công thức

- $C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2} = C_{n+2}^{k+2}$
- $C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}$

- C_n^i đạt max khi $i = \frac{n-1}{2}$ hay $i = \frac{n+1}{2}$ với n lẻ, $i = \frac{n}{2}$ với n chẵn.

III. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN TỚI NHỊ THỨC NEWTON.

1. BÀI TOÁN KHAI TRIỂN NÂNG CAO.

BÀI TOÁN KHAI TRIỂN TAM THỨC

Một thuật toán khai triển nhanh tam thức Newton $(a+b+c)^n$

Lời giải tổng quát

- **Bước 1:** Viết tam giác Pascal đến dòng thứ n , để có được hệ số của nhị thức Newton $(b+c)^n$.
- **Bước 2:** Ở các đầu dòng ta viết các đơn thức là khai triển nhị thức Newton $(a+1)^n$.
- **Bước 3:** Nhân lần lượt các đơn thức ở đầu dòng mỗi cột với các đơn thức còn lại trên mỗi dòng đó rồi cộng các kết quả lại, ta thu được kết quả khai triển.

Cụ thể ta có ở dưới đây

$$\begin{array}{ccccccc}
 1.a^n & & & & & & 1 \\
 C_n^1.a^{n-1} & & & & 1b & & 1c \\
 C_n^2.a^{n-2} & & & 1b^2 & & 2bc & & 1c^2 \\
 C_n^3.a^{n-3} & & 1b^2 & & 3b^2c & & 3bc^2 & & 1c^2 \\
 & & & & \dots & & & & \\
 1.a^0 & 1.b^n & C_n^1.b^{n-1}.c & \dots & C_n^{n-1}.b.c^{n-1} & & 1.c^n
 \end{array}$$

Sau khi cộng lại ta được:

$$(a+b+c)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p.a^{n-p} \cdot \left(\sum_{q=0}^p C_p^q.b^{n-q}.c^q \right) = \sum_{0 \leq q \leq p \leq n} C_n^p.C_p^q.b^{n-q}.c^q.a^{n-p}$$

Sau khi khai triển $(a+b+c)^n$ với $0 \leq q \leq p \leq n$ số hạng thứ $p+1$ trong khai triển là

$$T_p = C_n^p.C_p^q.b^{n-q}.c^q.a^{n-p}.$$

Ví dụ 1: Hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $P(x) = (3x^2 + x + 1)^{10}$ là?

Lời giải

Với $0 \leq q \leq p \leq 10$ thì số hạng tổng quát của khai triển $P(x) = (3x^2 + x + 1)^{10}$ là:

$$T_p = C_{10}^p.C_p^q.(3x^2)^{10-p}.x^{p-q}.1^q = C_{10}^p.C_p^q.3^{10-p}.x^{p-q+20-2p}$$

Theo đề bài thì $p-q+20-2p=4 \Leftrightarrow p+q=16$

Do $0 \leq q \leq p \leq 10$ nên $(p;q) \in \{(8;8);(9;7);(10;6)\}$.

Vậy hệ số của x^4 trong khai triển $P(x) = (3x^2 + x + 1)^{10}$ là:

$$C_{10}^8 \cdot C_8^8 \cdot 3^{10-8} + C_{10}^9 \cdot C_9^7 \cdot 3^{10-9} + C_{10}^{10} \cdot C_{10}^6 \cdot 3^{10-10} = 1695.$$

Chú ý khi ra nhiều trường hợp của $(p; q)$ thì ta cộng hệ số các trường hợp với nhau để có kết quả.

Ví dụ 2: Tìm số hạng chứa x^{13} trong khai triển thành các đa thức của $(x + x^2 + x^3)^{10}$?

Lời giải

Với $0 \leq q \leq p \leq 10$ thì số hạng tổng quát của khai triển $(x + x^2 + x^3)^{10}$ là:

$$T_p = C_{10}^p \cdot C_p^q \cdot x^{10-p} \cdot (x^2)^{p-q} \cdot (x^3)^q = C_{10}^p \cdot C_p^q \cdot 3^{10-p} \cdot x^{10+p+q}$$

Theo đề bài thì $10 + p + q = 13 \Leftrightarrow p + q = 3$

Do $0 \leq q \leq p \leq 10$ nên $(p; q) \in \{(2; 1); (3; 0)\}$.

Vậy hệ số của x^{13} trong khai triển là: $C_{10}^2 \cdot C_2^1 + C_{10}^3 \cdot C_3^0 = 210$.

Ví dụ 3: Tìm hệ số của x^8 trong khai triển đa thức của: $[1 + x^2(1 - x)^8]$

Lời giải

Cách 1. Ta có: $f(x) = \sum_{k=0}^8 C_8^k [x^2(1-x)]^k = \sum_{k=0}^8 C_8^k x^{2k} \left[\sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i x^i \right]^k$.

Vậy ta có hệ số của x^8 là: $(-1)^i C_8^k C_k^i$ thỏa $\begin{cases} 0 \leq i \leq k \leq 8 \\ 2k + i = 8 \\ i, k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 0 \\ k = 4 \\ i = 2 \\ k = 3 \end{cases}$

Hệ số trong khai triển của x^8 là $(-1)^0 C_8^4 C_4^0 + (-1)^2 C_8^3 C_3^2 = 238$

Cách 2. Ta có: $f(x) = C_8^0 + \dots + C_8^3 [x^2(1-x)]^3 + C_8^4 [x^2(1-x)]^4 + \dots + C_8^8 [x^2(1-x)]^8$

Nhận thấy: x^8 chỉ có trong các số hạng:

- Số hạng thứ 4: $C_8^3 [x^2(1-x)]^3$
- Số hạng thứ 5: $C_8^4 [x^2(1-x)]^4$

Với hệ số tương đương với: $A_8 = C_8^3 C_3^2 + C_8^4 C_4^0 = 238$

Ví dụ 4: Với n là số nguyên dương và $x \neq 0$, xét biểu thức $\left(x^8 + x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^7}\right)^n$. Hỏi có bao nhiêu số $n \leq 2018$ sao cho khai triển của biểu thức trên có số hạng tự do là 0 ?

Lời giải

Ta có $\left(x^8 + x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^7}\right)^n = (1 + x^5)^n \left(x^3 + \frac{1}{x^7}\right)^n$ nên số hạng tổng quát của khai triển trên là $T = C_n^k x^{5k} \cdot C_n^h x^{3n-10h} = C_n^k C_n^h x^{3n+5k-10h}$. Số hạng này là số hạng tự do khi

$$3n + 5k - 10h = 0 \Leftrightarrow 3n = 5(2h - k)$$

Nếu n không chia hết cho 5 thì khai triển sẽ không chứa số hạng tự do, tức là số hạng tự do là 0. Còn khi n chia hết cho 5 thì khi $h = \frac{2n}{5}, k = \frac{n}{5}$, số hạng tự do sẽ là $C_n^k C_n^h \neq 0$ không thỏa mãn.

Ví dụ 5: Cho khai triển $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$, với $n \geq 2$ và $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ là các hệ số. Biết rằng $\frac{a_3}{14} = \frac{a_4}{41}$, khi đó tính tổng $S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$?

Lời giải

$$\text{Ta có } (1+x+x^2)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (x+x^2)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k \sum_{l=0}^k C_k^l x^{k-l} \cdot x^{2l}.$$

$$\text{Hệ số của } x^3 \text{ là } x^{k+l} = x^3 \Rightarrow k+l=3 \Rightarrow \begin{cases} l=0; k=3 \\ l=1; k=2 \end{cases} \Rightarrow a_3 = C_n^3 C_3^0 + C_n^2 C_2^1.$$

$$\text{Tương tự hệ số của } x^4 \text{ là } x^{k+l} = x^4 \Rightarrow k+l=4 \Rightarrow \begin{cases} l=0; k=4 \\ l=1; k=3 \\ l=2; k=2 \end{cases} \Rightarrow a_4 = C_n^4 C_4^0 + C_n^3 C_3^1 + C_n^2 C_2^2.$$

$$\text{Theo giả thiết } 14a_4 = 41a_3 \Leftrightarrow 14(C_n^4 C_4^0 + C_n^3 C_3^1 + C_n^2 C_2^2) = 41(C_n^3 C_3^0 + C_n^2 C_2^1)$$

$$\Leftrightarrow 14 \left(\frac{n!}{4!(n-4)!} + \frac{3 \cdot n!}{3!(n-3)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} \right) = 41 \left(\frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{2 \cdot n!}{2!(n-2)!} \right)$$

$$\Leftrightarrow 14 \left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \right) = 41 \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + n(n-1) \right)$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) \left(\frac{14}{24}n^2 - \frac{11}{4}n - \frac{185}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n=1 \\ n=10 \end{cases} (n \in \mathbb{N}^*)$$

Do $n \geq 2$ nên $n = 10$.

Mặt khác thay $x = 1$ vào hai vế của khai triển $(1+x+x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x^{20}$ ta được $S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = 3^{10}$.

Ví dụ 6: Giả sử $(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{10})^{11} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{110}x^{110}$ với $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{110}$ là các hệ số. Tính tổng $T = C_{11}^0 a_{11} - C_{11}^1 a_{10} + C_{11}^2 a_9 - C_{11}^3 a_8 + \dots + C_{11}^{10} a_1 - C_{11}^{11} a_0$?

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = (1+x+x^2+x^3+\dots+x^{10})^{11} \Leftrightarrow (1-x)^{11} A = (1-x^{11})^{11}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{11} C_{11}^k (-x)^k}_{P} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{110} a_i x^i}_{Q} = \sum_{m=0}^{11} C_{11}^m (-x^{11})^m.$$

$$\text{Hệ số của } x^{11} \text{ trong } P \text{ là } C_{11}^0 a_{11} - C_{11}^1 a_{10} + C_{11}^2 a_9 - C_{11}^3 a_8 + \dots + C_{11}^{10} a_1 - C_{11}^{11} a_0 = T$$

Hệ số của x^{11} trong Q là $-C_{11}^1$

Vậy $T = -C_{11}^1 = -11$.

Ví dụ 7: Biết tổng các hệ số của ba số hạng đầu trong khai triển Newton

$$\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k (x^2)^{n-k} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k$$

Bằng 49. Khi đó tính hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển đó?

Lời giải

$$\text{Ta có } \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k (x^2)^{n-k} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \cdot 2^k \cdot x^{2n-3k}.$$

Tổng các hệ số của ba số hạng đầu trong khai triển bằng 49 nên $C_n^0 - 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 = 49(*)$.

Điều kiện $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow 1 - 2n + 2^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 49 \Leftrightarrow 2n^2 - 4n - 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -4(L) \\ n = 6(N) \end{cases}$$

Với $n = 6$ ta có nhị thức $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^6$.

Số hạng tổng quát của khai triển là: $C_6^k (-1)^k \cdot 2^k \cdot x^{12-3k}$ ($k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 6$).

Số hạng chứa x^3 ứng với k thỏa mãn $12 - 3k = 3 \Leftrightarrow k = 3$ (nhận).

Vậy hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển là $C_6^3 (-1)^3 \cdot 2^3 = -160$.

Ví dụ 8: Cho khai triển $T = (1 + x - x^{2017})^{2018} + (1 - x + x^{2018})^{2017}$. Hệ số của số hạng chứa x trong khai triển bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Cách 1. Ta có } T = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k (x - x^{2017})^k + \sum_{k'=0}^{2017} C_{2017}^{k'} (x^{2018} - x)^{k'}.$$

Hệ số của số hạng chứa x ứng với $k = k' = 1$.

Do đó hệ số cần tìm là $C_{2018}^1 - C_{2017}^1 = 1$.

$$\text{Cách 2. Ta có } T = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2017 \cdot 2018} x^{2017 \cdot 2018} = f(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + 2017 \cdot 2018 a_{2017 \cdot 2018} x^{2017 \cdot 2018 - 1} \Rightarrow f'(0) = a_1.$$

$$\text{Mà } f'(x) = 2018(1 + x - x^{2017})^{2017} (1 - 2017x^{2016}) + 2017(1 - x + x^{2018})^{2016} (-1 + 2018x^{2017})$$

$$\Rightarrow f'(0) = 2018 - 2017 = 1 \Rightarrow a_1 = 1. \text{ Do đó hệ số cần tìm là } 1.$$

Ví dụ 9: Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $(2x + 1)^6 \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)^4$ thành đa thức?

Lời giải

Xét khai triển $(2x+1)^6 = (1+2x)^6 = \sum_{k=0}^n C_6^k 1^{6-k} (2x)^k = \sum_{k=0}^n C_6^k 2^k x^k$

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)^4 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2} + x\right)^8 = \sum_{j=0}^8 C_8^j \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j} x^j$$

Vậy $(2x+1)^6 \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)^4 = \sum_{k=0}^n C_6^k 2^k x^k \cdot \sum_{j=0}^8 C_8^j \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j} x^j = \sum_{k=0}^n C_6^k 2^k \cdot \sum_{j=0}^8 C_8^j \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j} x^{j+k}$

Số hạng của khai triển chứa x^6 khi $j+k=6$.

Xét bảng:

k	0	1	2	3
j	6	5	4	3
$C_6^k 2^k \cdot C_8^j \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j}$	$C_6^0 2^0 \cdot C_8^6 \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$C_6^1 2^1 \cdot C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3$	$C_6^2 2^2 \cdot C_8^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4$	$C_6^3 2^3 \cdot C_8^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5$
k	4	5	6	
j	2	1	0	
$C_6^k 2^k \cdot C_8^j \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j}$	$C_6^4 2^4 \cdot C_8^2 \left(\frac{1}{2}\right)^6$	$C_6^5 2^5 \cdot C_8^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5$	$C_6^6 2^6 \cdot C_8^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2$	

Vậy hệ số x^6 trong khai triển $(2x+1)^6 \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)^4$ thành đa thức là $\frac{3003}{4} = \frac{1}{4} C_{14}^6$.

Ví dụ 10: Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, $n \geq 1$. Tìm số giá trị nguyên của n với $n \leq 2018$ sao cho tồn tại k ($0 \leq k \leq n-1$) thỏa mãn $a_k = a_{k+1}$.

Lời giải

Ta có $(1+2x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k x^k$, suy ra $a_k = C_n^k 2^k$ với $k=0,1,2,3,\dots,n$.

$$\text{Do đó } a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow C_n^k 2^k = C_n^{k+1} 2^{k+1} \Leftrightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} = 2 \cdot \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n-k)} = \frac{2}{(k+1)} \Leftrightarrow 2n-2k = k+1 \Leftrightarrow k = \frac{2n-1}{3}.$$

Vì $0 \leq k \leq n-1$ nên suy ra $n \geq 2$.

$$\text{Nếu } n = 3m, m \in \mathbb{N}, \text{ thì } k = \frac{2 \cdot 3m - 1}{3} = 2m - \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}.$$

$$\text{Nếu } n = 3m+1, m \in \mathbb{N}, \text{ thì } k = \frac{2 \cdot (3m+1) - 1}{3} = 2m + \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}.$$

2. BÀI TOÁN HỆ SỐ LỚN NHẤT.

Với các bài toán yêu cầu tìm hệ số lớn nhất a_k khi khai triển nhị thức $(ax+b)^n$ thành đa thức ta sẽ làm theo phương pháp sau.

- Bước 1: Lập hệ bất phương trình $\begin{cases} a_k \geq a_{k-1} \\ a_k \geq a_{k+1} \end{cases}$
- Bước 2: Giải hệ bất phương trình trên để tìm các số nguyên k thỏa mãn.
- Bước 3: Thay các giá trị k vừa tìm được để tìm hệ số lớn nhất.

Ví dụ 1: Khai triển đa thức $P(x) = (1 + 2x)^{12} = a_0 + a_1x + \dots + a_{12}x^{12}$.

Tìm $\max(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{12})$?

Lời giải

Gọi a_k là hệ số lớn nhất của khai triển suy ra: $a_k > a_{k-1}$

$$\text{Từ đây ta có hệ phương trình } \begin{cases} 2^k C_{12}^k \geq 2^{k-1} C_{12}^{k-1} \\ 2^k C_{12}^k \geq 2^{k+1} C_{12}^{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{k} \geq \frac{1}{12-k+1} \\ \frac{1}{12-k} \geq \frac{2}{k+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{12}) = a_8 = C_{12}^8 2^8 = 126720$$

Ví dụ 2: Cho khai triển nhị thức $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = a_0 + a_1x + \dots + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$.

Hãy tìm số hạng a_k lớn nhất.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = \frac{1}{3^{10}}(1 + 2x)^{10} = \frac{1}{3^{10}} \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2x)^k \Rightarrow a_k = \frac{1}{3^{10}} C_{10}^k 2^k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{10}^k 2^k \geq C_{10}^{k+1} 2^{k+1} \\ C_{10}^k 2^k \geq C_{10}^{k-1} 2^{k-1} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } a_k \text{ đạt được max} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2^k 10!}{k!(10-k)!} \geq \frac{2^{k+1} 10!}{(k+1)!(9-k)!} \\ \frac{2^k 10!}{k!(10-k)!} \geq \frac{2^{k-1} 10!}{(k-1)!(11-k)!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{10-k} \geq \frac{2}{k+1} \\ \frac{2}{k} \geq \frac{2}{11-k} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{19}{3} \leq k \leq \frac{22}{3}$$

$$\Rightarrow k = 7 (k \in \mathbb{N}, k \in [0, 10])$$

$$\text{Vậy } \max a_k = a_7 = \frac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$$

Ví dụ 3: Trong khai triển biểu thức $F = (\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^9$ số hạng nguyên có giá trị lớn nhất là?

Lời giải

$$\text{Ta có số hạng tổng quát } T_{k+1} = C_9^k (\sqrt{3})^{9-k} (\sqrt[3]{2})^k$$

Ta thấy bậc hai của căn thức là 2 và 3 là hai số nguyên tố, do đó để T_{k+1} là một số nguyên

$$\text{thì } \begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq 9 \\ (9-k):2 \\ k:3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=3 \Rightarrow T_4 = C_9^3 (\sqrt{3})^6 (\sqrt[3]{2})^3 = 4536 \\ k=9 \Rightarrow T_{10} = C_9^9 (\sqrt{3})^0 (\sqrt[3]{2})^9 = 8 \end{cases}$$

Vậy trong khai triển có hai số hạng nguyên là $T_4 = 4536$ và $T_{10} = 8$.

Ví dụ 4: Hệ số có giá trị lớn nhất khi khai triển $P(x) = (1+2x^2)^{12}$ thành đa thức là?

Lời giải

Khai triển $P(x) = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 2^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{12} a_k x^{2k}$ với $a_k = C_{12}^k 2^k$.

$$\bullet a_{k+1} > a_k \Leftrightarrow C_{12}^{k+1} 2^{k+1} > C_{12}^k 2^k \Leftrightarrow \frac{2}{k+1} > \frac{1}{12-k} \Leftrightarrow k < \frac{23}{3} \Leftrightarrow k \leq 7.$$

Như vậy $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_8$.

$$\bullet a_{k+1} < a_k \Leftrightarrow C_{12}^{k+1} 2^{k+1} < C_{12}^k 2^k \Leftrightarrow \frac{2}{k+1} < \frac{1}{12-k} \Leftrightarrow k > \frac{23}{3} \Leftrightarrow k \geq 8.$$

Như vậy $a_8 > a_9 > a_{10} > \dots > a_{12}$.

Vậy hệ số có giá trị lớn nhất là $a_8 = C_{12}^8 2^8 = 126720$.

Ví dụ 5: Cho biểu thức $P(x) = (x+2)^n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Biết $a_{n-9} > a_{n-8}$ và $a_{n-9} > a_{n-10}$. Tìm giá trị của n ?

Lời giải

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$P(x) = (x+2)^n = C_n^0 x^n 2^0 + C_n^1 x^{n-1} 2^1 + \dots + C_n^{n-k} x^k 2^{n-k} + \dots + C_n^{n-1} x^1 2^{n-1} + C_n^n x^0 2^n, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Mà } P(x) = (x+2)^n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Ta có: } a_k = 2^{n-k} C_n^{n-k} = 2^{n-k} C_n^k, 0 \leq k \leq n \Rightarrow a_{n-8} = 2^8 C_n^8 = 2^8 C_n^8, a_{n-9} = 2^9 C_n^9, a_{n-10} = 2^{10} C_n^{10}$$

Theo đề bài với $n \geq 10$, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} a_{n-9} > a_{n-8} \\ a_{n-9} > a_{n-10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^9 \frac{n!}{9!(n-9)!} > 2^8 \frac{n!}{8!(n-8)!} \\ 2^9 \frac{n!}{9!(n-9)!} > 2^{10} \frac{n!}{10!(n-10)!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{9} > \frac{1}{n-8} \\ \frac{1}{n-9} > \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > \frac{25}{2} \\ n < 14 \end{cases} \Leftrightarrow n = 13.$$

Ví dụ 6: Cho $(1+2x)^n = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Biết $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$. Số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ có giá trị bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có:

$$(1+2x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot 2^k \cdot x^k = C_n^0 \cdot 2^0 x^0 + C_n^1 \cdot 2^1 x^1 + C_n^2 \cdot 2^2 x^2 + \dots + C_n^n \cdot 2^n x^n = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n.$$

$$\text{Ta có } a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096 \Rightarrow C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 4096 \Leftrightarrow 2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12.$$

$$\text{Ta có } a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow C_{12}^k \cdot 2^k < C_{12}^{k+1} \cdot 2^{k+1} \Leftrightarrow C_{12}^k < 2C_{12}^{k+1}. \text{ Suy ra: } a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_8.$$

$$\text{Mặt khác } a_k > a_{k+1} \Leftrightarrow C_{12}^k \cdot 2^k > C_{12}^{k+1} \cdot 2^{k+1} \Leftrightarrow C_{12}^k > 2C_{12}^{k+1}. \text{ Suy ra: } a_8 > a_9 > a_{10} > \dots > a_{12}.$$

$$\text{Vậy số lớn nhất trong các số } a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \text{ là } a_8 = C_{12}^8 \cdot 2^8 = 126720.$$

Ví dụ 7: Cho khai triển $(x+3)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực. Gọi S là tập hợp chứa các số tự nhiên n để a_{10} là số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Ta có khai triển } (x+3)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 3^{n-k} x^k.$$

$$\text{Số hạng tổng quát của khai triển là } T_k = C_n^k 3^{n-k} x^k. \text{ Suy ra hệ số của } T_k \text{ là } a_k = C_n^k 3^{n-k}.$$

Để a_{10} là số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ thì:

$$\begin{cases} a_{10} \geq a_9 \\ a_{10} \geq a_{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_n^{10} \cdot 3^{n-10} \geq C_n^9 \cdot 3^{n-9} \\ C_n^{10} \cdot 3^{n-10} \geq C_n^{11} \cdot 3^{n-11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_n^{10} \geq 3C_n^9 \\ 3C_n^{10} \geq C_n^{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 39 \\ n \leq 43 \end{cases} \Leftrightarrow 39 \leq n \leq 43.$$

$$\text{Vậy } S = \{39; 40; 41; 42; 43\}.$$

$$\text{Tổng các phần tử của } S \text{ là } T = 39 + 40 + 41 + 42 + 43 = 205.$$

3. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM TRONG CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC TỔ HỢP.

ĐẠO HÀM CẤP 1.

Dấu hiệu sử dụng

Khi hệ số đứng trước tổ hợp tăng dần hoặc giảm dần từ $1, 2, 3, \dots, n$ hay $n, \dots, 3, 2, 1$ tức là số hạng đó có dạng kC_n^k hoặc $kC_n^k a^{n-k} b^{k-1}$ thì ta có thể dùng đạo hàm cấp 1 để tính. Cụ thể:

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n + 2C_n^1 a^{n-1} x + \dots + nC_n^n a x^n$$

Lấy đạo hàm hai vế theo x ta được:

$$n(a+x)^{n-1} = C_n^1 a^{n-1} + 2C_n^2 a^{n-2} x + \dots + nC_n^n a x^{n-1} (1)$$

Đến đây thay x, a bằng hằng số thích hợp ta được tổng cần tìm.

Trên đây là dấu hiệu nhận biết và phương pháp làm dạng này. Sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu kỹ hơn qua các bài toán của dạng này!

Ví dụ 1: Tính tổng $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + \dots + (-1)^{n-1} nC_n^n$

Lời giải

Ta thấy tổng cần tính có dạng như VP(1). Việc còn lại chỉ cần chọn $a = 1, x = -1$ ta tính được tổng bằng 0.

Cách khác. Sử dụng đẳng thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ ta tính được tổng bằng:

$$nC_{n-1}^0 - nC_{n-1}^1 + nC_{n-1}^2 - \dots + (-1)^{n-1} nC_{n-1}^{n-1} = n(1-1)^{n-1} = 0$$

Ví dụ 2: Tính tổng $2008C_{2007}^0 + 2007C_{2007}^1 + \dots + C_{2007}^{2007}$

Lời giải

Hệ số trước tổ hợp giảm dần từ 2008, 2007, ..., 1 nên dùng đạo hàm là điều dễ hiểu:

$$(x+1)^{2007} = C_{2007}^0 x^{2007} + C_{2007}^1 x^{2006} + \dots + C_{2007}^{2007} x^0$$

Bây giờ nếu đạo lấy đạo hàm thì chỉ được $2007C_{2007}^0 x^{2006}$ trong khi đó đề đến 2008 do đó ta phải nhân thêm với x vào đẳng thức trên rồi mới dùng đạo hàm:

$$\begin{aligned} x(x+1)^{2007} &= C_{2007}^0 x^{2008} + C_{2007}^1 x^{2007} + \dots + C_{2007}^{2007} x \\ \Leftrightarrow (x+1)^{2006} (2008x+1) &= 2008C_{2007}^0 x^{2007} + 2007C_{2007}^1 x^{2006} + \dots + C_{2007}^{2007} \end{aligned}$$

Thay $x = 1$ vào ta tìm được tổng là $2009 \cdot 2^{2006}$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng $(x+2)^n = 1 \cdot 2^{n-1} C_n^2 + 2 \cdot 2^{n-2} C_n^3 + \dots + n C_n^n = n 3^{n-1}, \forall n \leq 1 \in \mathbb{Z}$

Lời giải

Ta có $(x+2)^n = C_n^0 2^n + C_n^1 2^{n-1} x + C_n^2 2^{n-2} x^2 + \dots + C_n^n x^n$

Đạo hàm 2 vế theo biến x ta được $n(x+2)^{n-1} = \sum_{k=1}^n C_n^k k x^{k-1}$

Cho $x = 1 \Rightarrow n \cdot 3^{n-1} = \sum_{k=1}^n C_n^k k$, điều phải chứng minh!

Ví dụ 4: Tính tổng $S = n2^{n-1} C_n^0 + (n-1)2^{n-2} \cdot 3 \cdot C_n^1 + (n-2)2^{n-3} \cdot 3^2 \cdot C_n^2 + \dots + 3^{n-1} C_n^{n-1}$

Lời giải

Nhận thấy hệ số đứng trước tổ hợp giảm dần $n, n-1, \dots, 3, 2, 1$ nên phải hoán đổi vị trí a và x . Xét khai triển $(x+a)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} a^k$

Đạo hàm theo biến x ta được $n(x+a)^{n-1} = \sum_{k=1}^n (n-k) C_n^k x^{n-k-1} a^k$

Thay $x = 2, a = 3$ ta được $S = n \cdot 5^{n-1}$.

Cách 2. Ta sẽ sử dụng tới 2 đẳng thức $C_n^{n-k} = C_n^k, kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ ta có

$$\begin{aligned} S &= n2^{n-1}C_n^n + (n-1)2^{n-2}.3.C_n^{n-1} + (n-2)2^{n-3}3^2C_n^{n-2} + \dots + 3^{n-1}C_n^1 \\ &= n2^{n-1}C_{n-1}^{n-1} + n.2^{n-2}.3.C_{n-1}^{n-2} + n2^{n-3}3^2C_{n-1}^{n-3} + \dots + n.3^{n-1}C_{n-1}^0 \\ &= n(2^{n-1}C_{n-1}^{n-1} + 2^{n-2}.3.C_{n-1}^{n-2} + 2^{n-3}3^2C_{n-1}^{n-3} + \dots + 3^{n-1}C_{n-1}^0) = n(2+3)^{n-1} = n.5^{n-1} \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (p+1)C_n^p + \dots + (n+1)C_n^n = (n+2)2^{n-1}$

Lời giải

Ta nhận thấy rằng nếu xét khai triển tổng quát thì các hệ số bị lệch đi 1 đơn vị, do đó để xử lý được ta sẽ nhân thêm vào 2 vế đại lượng x , xét khai triển $x(x+1)^n$ ta được

$$x(x+1)^n = x \cdot \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \Rightarrow (x+1)^n + nx(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k x^k + \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$$

Cho $x = 1$ ta có điều phải chứng minh !

Ví dụ 6: Tính tổng $S = 3C_n^0 + 4C_n^1 + 5C_n^2 + \dots + (n+3)C_n^n$?

Lời giải

Nhận thấy rằng với $x = 1$ thì ta có

$$\begin{cases} 3C_n^0 = (C_n^0 x^3)' \\ 4C_n^1 = (C_n^1 x^4)' \\ \dots\dots\dots \\ (n+3)C_n^n = (C_n^n x^{n+3})' \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_n^0 x^3 + C_n^1 x^4 + C_n^2 x^5 + \dots + (n+3)C_n^n x^{n+3} = x^3 (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n) = x^3 (x+1)^n (*)$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 (x+1)^n \Rightarrow f'(x) = 3x^2 (x+1)^n + nx^3 (x+1)^{n-1}$

Kết hợp với (*) ta có $\Rightarrow f'(x) = 3x^2 C_n^0 + 4x^3 C_n^1 + C_n^2 5x^4 + \dots + (n+3)x^{n+2} C_n^n$

Chọn $x = 1$ thì $S = 3C_n^0 + 4C_n^1 + 5C_n^2 + \dots + (n+3)C_n^n = 3.2^n + n2^{n-1} = 2^{n-1}(n+6)$

Ví dụ 7: Cho số nguyên dương n thỏa mãn đẳng thức tổ hợp $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 512$.

Tính tổng $S = 2^2 C_n^2 - 3^2 C_n^3 + \dots + (-1)^n . n^2 . C_n^n$.

Lời giải

Ta có $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 . x + C_{2n}^2 . x^2 + C_{2n}^3 . x^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} . x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} . x^{2n} \quad (1)$.

Thay $x = 1$ vào (1) ta có: $2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \quad (2)$.

Thay $x = -1$ vào (1) ta có: $0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \dots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \quad (3)$.

Trừ từng vế của (2) và (3) ta có:

$$2^{2n} = 2.(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1}) \Leftrightarrow C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}.$$

Nên $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 512 \Leftrightarrow 2^{2n-1} = 2^9 \Leftrightarrow 2n-1 = 9 \Leftrightarrow n = 5$.

Bởi vậy $S = 2^2 C_5^2 - 3^2 C_5^3 + 4^2 C_5^4 - 5^2 . C_5^5$.

Từ $(1+x)^5 = C_5^0 + C_5^1 . x + C_5^2 . x^2 + C_5^3 . x^3 + C_5^4 . x^4 + C_5^5 . x^5$, lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$5(1+x)^4 = C_5^1 + 2C_5^2 \cdot x + 3C_5^3 \cdot x^2 + 4C_5^4 \cdot x^3 + 5C_5^5 \cdot x^4$$

$$\Rightarrow 5x(1+x)^4 = C_5^1 x + 2C_5^2 \cdot x^2 + 3C_5^3 \cdot x^3 + 4C_5^4 \cdot x^4 + 5C_5^5 \cdot x^5 \quad (4).$$

Lại lấy đạo hàm hai vế (4), ta có:

$$5(1+x)^4 + 20x(1+x)^3 = C_5^1 + 2^2 C_5^2 \cdot x + 3^2 C_5^3 \cdot x^2 + 4^2 C_5^4 \cdot x^3 + 5^2 C_5^5 \cdot x^4 \quad (5).$$

Thay $x = -1$ vào (5) ta được:

$$0 = C_5^1 - 2C_5^2 + 3^2 C_5^3 - 4^2 C_5^4 + 5^2 C_5^5 \Leftrightarrow 2C_5^2 - 3^2 C_5^3 + 4^2 C_5^4 - 5^2 C_5^5 = C_5^1$$

Hay $S = 2^2 C_5^2 - 3^2 C_5^3 + 4^2 C_5^4 - 5^2 C_5^5 = 5$.

Ví dụ 8: Tính tổng $S = 2 \cdot 2^{2017} C_{2018}^1 + 3 \cdot 2^{2016} C_{2018}^2 + 4 \cdot 2^{2015} C_{2018}^3 + \dots + 2019 C_{2018}^{2018}$.

Lời giải

Áp dụng khai triển nhị thức Newton ta có

$$(2+x)^{2018} = C_{2018}^0 \cdot 2^{2018} + C_{2018}^1 \cdot 2^{2017} \cdot x + C_{2018}^2 \cdot 2^{2016} \cdot x^2 + \dots + C_{2018}^{2018} \cdot x^{2018}$$

$$\Leftrightarrow x(2+x)^{2018} = C_{2018}^0 \cdot 2^{2018} \cdot x + C_{2018}^1 \cdot 2^{2017} \cdot x^2 + C_{2018}^2 \cdot 2^{2016} \cdot x^3 + \dots + C_{2018}^{2018} \cdot x^{2019}$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế ta được:

$$(2+x)^{2018} + x \cdot 2018 \cdot (2+x)^{2017} = C_{2018}^0 \cdot 2^{2018} + 2 \cdot C_{2018}^1 \cdot 2^{2017} \cdot x + 3 \cdot C_{2018}^2 \cdot 2^{2016} \cdot x^2 + \dots + 2019 \cdot C_{2018}^{2018} \cdot x^{2018}$$

Cho $x = 1$ ta được $3^{2018} + 2018 \cdot 3^{2017} = C_{2018}^0 \cdot 2^{2018} + 2 \cdot C_{2018}^1 \cdot 2^{2017} + 3 \cdot C_{2018}^2 \cdot 2^{2016} + \dots + 2019 \cdot C_{2018}^{2018}$

$$\Rightarrow S = 3^{2018} + 2018 \cdot 3^{2017} - C_{2018}^0 \cdot 2^{2018} = 2021 \cdot 3^{2017} - 2^{2018}.$$

Ví dụ 9: Tính tổng $S = \frac{1}{2017} (2 \cdot 3 C_{2017}^2 + 3 \cdot 3^2 C_{2017}^3 + 4 \cdot 3^3 C_{2017}^4 + \dots + 2017 \cdot 3^{2016} C_{2017}^{2017})$.

Lời giải

Xét khai triển: $P(x) = (1+x)^{2017} = C_{2017}^0 + C_{2017}^1 x + C_{2017}^2 x^2 + C_{2017}^3 x^3 + C_{2017}^4 x^4 + \dots + C_{2017}^{2017} x^{2017}$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$2017(1+x)^{2016} = C_{2017}^1 + 2C_{2017}^2 x + 3C_{2017}^3 x^2 + 4C_{2017}^4 x^3 + \dots + 2017 C_{2017}^{2017} x^{2016}.$$

Cho $x = 3$ ta được $2017 \cdot 4^{2016} = C_{2017}^1 + 2 \cdot 3 C_{2017}^2 + 3 \cdot 3^2 C_{2017}^3 + 4 \cdot 3^3 C_{2017}^4 + \dots + 2017 \cdot 3^{2016} C_{2017}^{2017}$.

$$\Leftrightarrow 2017 \cdot 4^{2016} - C_{2017}^1 = 2 \cdot 3 C_{2017}^2 + 3 \cdot 3^2 C_{2017}^3 + 4 \cdot 3^3 C_{2017}^4 + \dots + 2017 \cdot 3^{2016} C_{2017}^{2017}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2017} (2017 \cdot 4^{2016} - 2017) = \frac{1}{2017} (2 \cdot 3 C_{2017}^2 + 3 \cdot 3^2 C_{2017}^3 + 4 \cdot 3^3 C_{2017}^4 + \dots + 2017 \cdot 3^{2016} C_{2017}^{2017}).$$

$$\Leftrightarrow 4^{2016} - 1 = S.$$

Ví dụ 10: Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n = 2621439$. Số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $x(1+x)^n = C_n^0 x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + \dots + C_n^n x^{n+1}$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$(x+1)^n + nx(x+1)^{n-1} = C_n^0 + 2C_n^1x + 3C_n^2x^2 + \dots + (n+1)C_n^n x^n.$$

Cho $x=1$, ta có $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n = 2^n + n2^{n-1} = 2^{n-1}(2+n)$.

$$\Rightarrow 2^{n-1}(2+n) - 1 = 2621439 \Leftrightarrow 2^{n-1}(2+n) = 2621440 \Leftrightarrow 2^n = \frac{2621440}{2+n} \cdot 2. (*)$$

Xét $f(n) = 2^n$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $g(n) = 2 \cdot \frac{2621440}{2+n}$ là hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$. Ta có $f(18) = g(18) \Rightarrow n=18$ là nghiệm duy nhất của (*).

Khi đó số hạng tổng quát của khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{18}$ là $C_{18}^k x^{36-3k}$ với $k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 18$.

Vậy số hạng không chứa x là $C_{18}^{12} = 18564$.

ĐẠO HÀM CẤP 2.

Dấu hiệu sử dụng.

Khi hệ số đứng trước tổ hợp có dạng $1.2, 2.3, \dots, (n-1)n$ hay $(n-1)n, \dots, 3.2, 2.1$ hay $1^2, 2^2, \dots, n^2$ tức có dạng $k(k-1)C_n^k a^{n-k}$ hay tổng quát hơn $k(k-1)C_n^k a^{n-k} b^k$ thì ta có thể dùng đạo hàm đến cấp 2 để tính. Xét đa thức

$$(a+bx)^n = C_n^0 + C_n^1 a^{n-1}bx + \dots + C_n^n b^n x^n$$

Khi đó đạo hàm hai vế theo x ta được:

$$bn(a+bx)^{n-1} = C_n^1 a^{n-1}b + 2C_n^2 a^{n-2}b^2x + \dots + nC_n^n b^n x^{n-1}$$

Đạo hàm lần nữa:

$$b^2n(n-1)(a+bx^{n-2}) = 2.1C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + n(n-1)C_n^n b^n x^{n-1} (2)$$

Đến đây ta gần như giải quyết xong ví dụ toán chỉ việc thay a, b, x bởi các hằng số thích hợp nữa thôi.

Sau đây ta sẽ cùng đi vào các ví dụ minh họa để hiểu rõ hơn phương pháp!

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = (1+x)^n, (2 \leq n \leq \mathbb{Z})$

a) Tính $f''(1)$

b) Chứng minh rằng $2.1C_n^2 + 3.2C_n^3 + \dots + (n-1)nC_n^n = n(n-1)2^{n-2}$

Lời giải

a) Ta có $f'(x) = n(1+x)^{n-1} \Rightarrow f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} \Rightarrow f''(1) = n(n-1)2^{n-2}$

b) Ta có khai triển

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^n = \sum_{k=1}^n C_n^k x^k = C_n^0 + C_n^1 x + \sum_{k=2}^n C_n^k x^k \Rightarrow f'(x) = C_n^1 + \sum_{k=2}^n k C_n^k x^{k-1} \\ \Rightarrow f''(x) &= \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k x^{k-2} \Rightarrow f''(1) = \sum_{k=1}^n k(k-1) C_n^k = 2^{n-2} \\ \Rightarrow 2.1C_n^1 + 3.2C_n^2 + \dots + (p+1)C_n^p + \dots + (n+1)nC_n^n &= n(n+1)2^{n-1} \end{aligned}$$

Từ câu b) thay $n-1 = n+1$ thì ta có một bài toán khác:

Chứng minh rằng. $2.1C_n^1 + 3.2C_n^2 + \dots + (n+1)pC_n^p + \dots + (n+1)nC_n^n = n(n+1)2^{n-2}$

Với bài toán này ta giải như sau:

Xét nhị thức $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n$

Nhân 2 vế của đẳng thức với $x \neq 0$ đồng thời lấy đạo hàm cấp 2 hai vế theo biến x ta được

$$2n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = 2C_n^1 x + 3.2C_n^2 x + \dots + (n+1)nC_n^n x^{n-1}$$

Cho $x = 2$ ta được điều phải chứng minh!

Ví dụ 2: Rút gọn tổng sau $S = 1^2 C_{2009}^1 2^{2008} + 2^2 C_{2009}^2 2^{2007} + 3^2 C_{2009}^3 2^{2006} + \dots + 2009^2 C_{2009}^{2009}$

Lời giải

Với ý tưởng như bài trên ta xét đa thức

$$(x+2)^{2009} = C_{2009}^0 2^{2009} + C_{2009}^1 2^{2008} x + C_{2009}^2 2^{2007} x^2 + \dots + C_{2009}^{2009} x^{2009}$$

Lấy đạo hàm 2 vế ta được $2.2009(x+2)^{2008} = 1C_{2009}^1 2^{2008} + 2C_{2009}^2 2^{2007} x + \dots + 2009C_{2009}^{2009} x^{2008}$

Nếu ta tiếp tục đạo hàm lần nữa thì chỉ thu được $1.2, 2.3, \dots$ do đó để thu được $2^2, 3^2, \dots$ ta phải nhân thêm hai vế với x rồi mới lấy đạo hàm, ta có

$$2009x(x+2)^{2008} = 1C_{2009}^1 2^{2008} x + 2C_{2009}^2 2^{2007} x^2 + \dots + 2009C_{2009}^{2009} x^{2009}$$

$$\Rightarrow 2009(x+2)^{2008} + 2009.2008x(x+2)^{2007} = 1^2 C_{2009}^1 2^{2008} + 2^2 C_{2009}^2 2^{2007} x + \dots + 2009^2 C_{2009}^{2009} x^{2008}$$

Thay $x = 1$ rút gọn tổng trên ta được $2011.2009.3^{2007}$.

Tương tự khi tính tổng $2.1C_n^1 + 3.2C_n^2 + 4.3C_n^3 + \dots + (n+1)nC_n^n$ ta cần chú ý là trước tổ hợp có một hệ số lớn hơn k trong C_n^k nên ta phải nhân với x trước khi đạo hàm 2 lần.

4. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC TỔ HỢP.

Dấu hiệu sử dụng.

Ý tưởng của phương pháp này là dựa vào hệ thức $\int_a^b x^k dx = \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} \right) \Big|_a^b = \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{k+1}$

Từ đây dễ dàng tìm được dấu hiệu để sử dụng phương pháp này là số hạng của tổng có dạng $\frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{k+1} C_n^k$. Cụ thể xét tích phân $I = \int_a^b (c+dx)^n dx$ ta có thể tính bằng 2 cách.

- Tính trực tiếp $I = \frac{1}{d} \int_a^b (c+dx)^n d(c+dx) = \frac{1}{d} \frac{(c+dx)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Tính gián tiếp } I &= \int_a^b \left(\sum_{k=0}^n C_n^k c^{n-k} d^k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^n \left(C_n^k c^{n-k} d^k \int_a^b x^k dx \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(C_n^k c^{n-k} d^k \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} \right) \Big|_a^b \right) = \sum_{k=0}^n \left(C_n^k c^{n-k} d^k \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{k+1} \right) \end{aligned}$$

Hai cách trên là như nhau nên từ đó ta có được

$$\sum_{k=0}^n \left(C_n^k c^{n-k} d^k \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{k+1} \right) = \frac{1}{d} \frac{(c+dx)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b$$

Tùy từng bài toán ta chọn các hệ số a, b, c, d thích hợp!

Để dễ dàng nhận biết hơn thì ta có thể chú ý như sau:

Nếu trong tổng dãy tổ hợp, các số hạng chứa các phân số $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{n}$ và mẫu số được xếp theo thứ tự tăng hoặc giảm đều theo một quy luật nào đó, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân. Khi đó, ta thực hiện theo các bước sau:

- Bước 1: Tìm hàm để tính tích phân với các cận thích hợp.
- Bước 2: Tính tích phân trong cả hai vế: vế chưa khai triển nhị thức Newton và vế đã khai triển.
- Bước 3: Cho hai kết quả bằng nhau và kết luận.

Trước khi vào các bài toán cụ thể ta cần nhớ các đẳng thức tích phân sau:

$$1. \int_a^b (x+1)^n dx = \int_a^b (C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + \dots + C_n^n x^n) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \left(xC_n^0 + C_n^1 \frac{x^2}{2} + \dots + C_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_a^b$$

$$2. \int_a^b (1-x)^n dx = \int_a^b (C_n^0 - xC_n^1 + x^2C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n x^n) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \left(xC_n^0 - C_n^1 \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n C_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_a^b$$

$$3. \int_a^b (x+1)^n dx = \int_a^b (C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \dots + C_n^n) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \left(C_n^0 \frac{x^{n+1}}{n+1} + C_n^1 \frac{x^n}{n} + C_n^2 \frac{x^{n-1}}{n-1} + \dots + C_n^n x \right) \Big|_a^b$$

$$4. \int_a^b (x-1)^n dx = \int_a^b (C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n C_n^n) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \left(C_n^0 \frac{x^{n+1}}{n+1} - C_n^1 \frac{x^n}{n} + C_n^2 \frac{x^{n-1}}{n-1} - \dots + (-1)^n C_n^n x \right) \Big|_a^b$$

Ví dụ 1: Tính tổng $S = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2} C_n^1 + \frac{2^3-1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1} C_n^n$ ($n \geq 1$)

Lời giải

Vế trái có chứa các phân số, mẫu số được xếp theo thứ tự tăng đều một đơn vị, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân. Bây giờ, ta suy nghĩ hàm lấy tích phân, các cận và số được thay vào cho biến. Vì số hạng cuối cùng có hệ số $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ nên ta biết cận từ 1 đến 2 và tổng

không đan dấu nên ta sử dụng $\int_1^2 (1+x)^n dx$.

Ta có $(x+1)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + \dots + C_n^n x^n$

$$\Rightarrow \int_1^2 (x+1)^n dx = \int_1^2 (C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + \dots + C_n^n x^n) dx$$

$$\Leftrightarrow \left. \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \right|_1^2 = \left(xC_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 x^2 + \frac{1}{3}C_n^2 x^3 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n x^{n+1} \right) \Big|_1^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1} = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n = S$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Lời giải

Vế trái có chứa các phân số, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân. Tổng không đan dấu, ta sử dụng $\int_0^1 (x+1)^n dx$

Xét khai triển $(x+1)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + \dots + x^nC_n^n$

Ta có:

$$\bullet \int_0^1 (x+1)^n dx = \left. \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

$$\bullet \int_0^1 (C_n^0 + xC_n^1 + \dots + x^nC_n^n) dx = \left(xC_n^0 + \frac{1}{2}x^2C_n^1 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n x^{n+1} \right) \Big|_0^1$$

$$= C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$$

Từ 2 đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh!

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Chứng minh rằng $2C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 2^2 + \frac{1}{3}C_n^2 2^3 - \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1}C_n^n 2^{n+1} = \frac{1}{n+1}(1+(-1)^n)$

Hướng dẫn. Vế trái có chứa các phân số, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân. Vì số hạng cuối cùng có hệ số $\frac{2^{n+1}}{n+1}$ nên ta biết cận từ 0 đến 2 và tổng đan dấu nên ta sử dụng

$$\int_0^2 (1-x)^n dx.$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng $\frac{1}{2}C_n^1 + \frac{2}{3}C_n^2 + \frac{3}{4}C_n^3 + \dots + \frac{n}{n+1}C_n^n = \frac{(n-1)2^n + 1}{n+1}$

Lời giải

Vế trái có chứa các phân số, ta nghĩ đến việc sử dụng tích phân. Vì số hạng cuối cùng có hệ số $\frac{n}{n+1}$ nên ta không thể nghĩ ra ngay một hàm số nào đó để tính tích phân. Bằng cách

phân tích số hạng tổng quát $\frac{k}{k+1}C_n^k = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)C_n^k$, cho ta tổng sau:

$$(C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n) - \left(\frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n\right)$$

Từ đó sử dụng $2^n - \int_0^1 (x+1)^n dx$

Cách 1. Xét số hạng tổng quát trong vế trái $\frac{k}{k+1}C_n^k = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)C_n^k$ ($k = \overline{0, n}$)

Do đó ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{2}{3}C_n^2 + \frac{3}{4}C_n^3 + \dots + \frac{n}{n+1}C_n^n &= (C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n) - \left(\frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n\right) \\ &= 2^n - \int_0^1 (x+1)^n dx = 2^n - \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \frac{(n-1)2^n + 1}{n+1} \end{aligned}$$

Cách 2. Xét khai triển $(x+1)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + \dots + x^nC_n^n$.

Lấy đạo hàm 2 vế ta được $n(x+1)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + 3C_n^3x^2 + \dots + nC_n^nx^{n-1}$

Ta có:

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^1 nx(x+1)^{n-1} dx &= \int_0^1 (n(1+x-1)(x+1)^{n-1}) dx = n \int_0^1 ((x+1)^n - (x+1)^{n-1}) dx \\ &= n \left[\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(x+1)^n}{n} \right]_0^1 = \frac{n}{n+1} (2^{n+1} - 1) - (2^n - 1) = \frac{(n-1)2^n + 1}{n+1} \\ \bullet \int_0^1 (C_n^1 + 2C_n^2x + 3C_n^3x^2 + \dots + nC_n^nx^{n-1}) dx &= \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{2}{3}C_n^2 + \dots + \frac{n}{n+1}C_n^n \end{aligned}$$

Từ 2 điều trên ta có điều phải chứng minh!

Ví dụ 4: Chứng minh rằng $\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + \dots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n} - 1}{2n+1}$

Lời giải

Xét các khai triển $\begin{cases} (x+1)^{2n} = C_{2n}^0 + xC_{2n}^1 + x^2C_{2n}^2 + \dots + x^{2n}C_{2n}^{2n} \\ (1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - xC_{2n}^1 + x^2C_{2n}^2 - \dots + x^{2n}C_{2n}^{2n} \end{cases}$

Trừ 2 vế đẳng thức trên ta được:

$$\begin{aligned}
 (x+1)^{2n} - (1-x)^{2n} &= 2(xC_{2n}^1 + x^3C_{2n}^3 + \dots + x^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}) \\
 \Rightarrow \int_0^1 \frac{(x+1)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2} dx &= \int_0^1 (xC_{2n}^1 + x^3C_{2n}^3 + \dots + x^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}) dx \\
 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^{2n+1} + (1-x)^{2n+1}}{2(2n+1)} \Big|_0^1 &= \left(\frac{1}{2}C_{2n}^1x^2 + \frac{1}{4}C_{2n}^3x^4 + \dots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}x^{2n} \right) \Big|_0^1 \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + \dots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} &= \frac{2^{2n}-1}{2n+1}
 \end{aligned}$$

Nhận xét. Nếu phải tính tổng $C_{2n}^0 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \frac{1}{5}C_{2n}^4 + \dots + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}$ thì ta xét

$$P(x) = \frac{(x+1)^{2n} + (1-x)^{2n}}{2} = C_{2n}^0 + x^2C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n}x^{2n}$$

Sau đó tính tích phân $\int_0^1 P(x) dx$.

Còn nếu phải tính tổng $\frac{1}{2}C_{2n}^0 + \frac{1}{4}C_{2n}^2 + \frac{1}{6}C_{2n}^4 + \dots + \frac{1}{2n+2}C_{2n}^{2n}$ thì ta xét

$$G(x) = xP(x) = C_{2n}^0x + C_{2n}^2x^3 + \dots + C_{2n}^{2n}x^{2n+1}$$

Sau đó tính tích phân $\int_0^1 G(x) dx$.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng $2C_{2n}^0 + \frac{2}{3}C_{2n}^2 + \frac{2}{5}C_{2n}^4 + \dots + \frac{2}{2n+1}C_{2n}^{2n} = \frac{2^{2n+1}}{2n+1} (n \geq 1)$

Lời giải

Xét khai triển $(x+1)^{2n} = C_{2n}^0 + xC_{2n}^1 + \dots + x^{2n}C_{2n}^{2n}$

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \bullet \int_{-1}^1 (x+1)^{2n} dx &= \frac{(x+1)^{2n+1}}{2n+1} \Big|_{-1}^1 = \frac{2^{2n+1}}{n+1} \\
 \bullet \int_{-1}^1 (C_{2n}^0 + xC_{2n}^1 + \dots + x^{2n}C_{2n}^{2n}) dx &= \left(C_{2n}^0x + \frac{1}{2}C_{2n}^1x^2 + \dots + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}x^{2n+1} \right) \Big|_{-1}^1 \\
 &= 2C_{2n}^0 + \frac{2}{3}C_{2n}^2 + \dots + \frac{2}{2n+1}C_{2n}^{2n}
 \end{aligned}$$

Từ 2 đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh!

Ví dụ 6: Cho tích phân $\int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)} (n \geq 2)$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + \dots + \frac{1}{3(n+1)}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$$

Lời giải

Xét $I = \int_0^1 x^2(C_n^0 + x^3C_n^1 + C_n^2x^6 + \dots + C_n^nx^{3n}) dx$

$$= \int_0^1 (C_n^0 x^2 + C_n^1 x^5 + \dots + C_n^n x^{3n+2}) dx$$

$$= \frac{1}{3} C_n^0 + \frac{1}{6} C_n^1 + \frac{1}{9} C_n^2 + \dots + \frac{1}{3(n+1)} C_n^n$$

Mặt khác $\int_0^1 x^2 (1+x^3)^n dx = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)} (n \geq 2)$ vậy ta có điều phải chứng minh!

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Chứng minh rằng $\frac{1}{2} C_n^0 - \frac{1}{4} C_n^1 + \frac{1}{6} C_n^2 - \frac{1}{8} C_n^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{2(n+1)} C_n^n = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx$

Gợi ý. Ta có $\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \frac{1}{2(n+1)}$

2. Chứng minh rằng $1 - \frac{1}{3} C_n^1 + \frac{1}{5} C_n^2 - \frac{1}{7} C_n^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} C_n^n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$

Gợi ý. Ta có $\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{\prod_{i=1}^n 2i}{\prod_{i=1}^n (2i+1)}$

Chú ý. Khi bài toán cho mà số hạng tổng quát không phải là $\frac{1}{k+1} C_n^k$ mà là $\frac{1}{k+2} C_n^k$ thì ta cần phải nhân thêm x vào hàm đa thức cơ bản trước khi tính tích phân, còn nếu là $\frac{1}{k+3} C_n^k$ thì ta phải nhân thêm x^2 vào hàm đa thức cơ bản trước khi tính tích phân,...

Sau đây ta sẽ cùng hiểu rõ hơn qua ví dụ sau.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng $\frac{1}{2} C_n^0 + \frac{1}{3} C_n^1 + \frac{1}{4} C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+2} C_n^n = \frac{n(2^{n+1}+1)}{(n+1)(n+2)} (n \geq 1)$

Lời giải

Vế trái có chứa các phân số, ta nghĩ đến việc sử dụng tích phân. Vì số hạng cuối cùng có hệ số $\frac{1}{k+2} C_n^k$ thì ta phải nhân thêm x vào hàm số cơ bản trước khi tính tích phân. Khi đó, ta sử dụng $\int_0^1 x(x+1)^n dx$.

Ta có

- $\int_0^1 x(x+1)^n dx = \int_0^1 (x+1)^{n+1} dx - \int_0^1 (x+1)^n dx = \left(\frac{(x+1)^{n+2}}{n+2} - \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{n2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$
- $\int_0^1 x(x+1)^n dx = \int_0^1 x(C_n^0 + xC_n^1 + \dots + x^n C_n^n) dx = \frac{1}{2} C_n^0 + \frac{1}{3} C_n^1 + \dots + \frac{1}{n+2} C_n^n$

Từ 2 đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh!

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Chúng minh rằng $\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 - \dots + \frac{(-1)^n C_n^n}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

Ví dụ 8: Giả sử số tự nhiên $n \geq 2$ thỏa mãn đẳng thức dưới đây hãy tìm n ?

$$C_{2n}^0 + \frac{C_{2n}^2}{3} + \frac{C_{2n}^4}{5} + \frac{C_{2n}^6}{7} + \dots + \frac{C_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \frac{C_{2n}^{2n}}{2n+1} = \frac{4096}{13}$$

Lời giải

Giả sử số tự nhiên $n \geq 2$ thỏa mãn $C_{2n}^0 + \frac{C_{2n}^2}{3} + \frac{C_{2n}^4}{5} + \frac{C_{2n}^6}{7} + \dots + \frac{C_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \frac{C_{2n}^{2n}}{2n+1} = \frac{8192}{15}$.

Ta có: $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}$.

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (1+x)^{2n} dx = \left(C_{2n}^0 x + \frac{1}{2} C_{2n}^1 x^2 + \frac{1}{3} C_{2n}^2 x^3 + \dots + \frac{1}{2n+1} C_{2n}^{2n} x^{2n+1} \right) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \left(C_{2n}^0 x + \frac{1}{2} C_{2n}^1 x^2 + \frac{1}{3} C_{2n}^2 x^3 + \dots + \frac{1}{2n+1} C_{2n}^{2n} x^{2n+1} \right) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(2^{2n+1}-1)}{2n+1} = 2C_{2n}^0 + \frac{2}{2} C_{2n}^1 + \frac{2}{3} C_{2n}^2 + \dots + \frac{2}{2n+1} C_{2n}^{2n} \quad (1)$$

Mặt khác $\int_0^{-1} (1+x)^{2n} dx = \left(C_{2n}^0 x + \frac{1}{2} C_{2n}^1 x^2 + \frac{1}{3} C_{2n}^2 x^3 + \dots + \frac{1}{2n+1} C_{2n}^{2n} x^{2n+1} \right) \Big|_0^{-1}$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{2n+1} = -2C_{2n}^0 + \frac{2}{2} C_{2n}^1 - \frac{2}{3} C_{2n}^2 + \dots + \frac{2}{2n+1} C_{2n}^{2n} \quad (2)$$

Lấy (1) trừ (2), ta được:

$$\frac{2^{2n+1}}{2n+1} = 2 \left(C_{2n}^0 + \frac{C_{2n}^1}{3} + \frac{C_{2n}^4}{5} + \frac{C_{2n}^6}{7} + \dots + \frac{C_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \frac{C_{2n}^{2n}}{2n+1} \right) \Leftrightarrow \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = 2 \cdot \frac{4096}{13} \Leftrightarrow n = 6.$$

Ví dụ 9: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\frac{C_n^0}{1.2} + \frac{C_n^1}{2.3} + \frac{C_n^2}{3.4} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{100} - n - 3}{(n+1)(n+2)}$.

Lời giải

Cách 1. Ta có:

$$\frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)} = \frac{n!}{k!(n-k)!(k+1)(k+2)} = \frac{(n+2)!}{(n-k)!(k+2)!(n+1)(n+2)} = \frac{C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Suy ra $\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^n \frac{C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}$

$$\Leftrightarrow \frac{C_n^0}{1.2} + \frac{C_n^1}{2.3} + \frac{C_n^2}{3.4} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 + C_{n+2}^4 + \dots + C_{n+2}^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \quad (*)$$

Ta xét khai triển sau: $(1+x)^{n+2} = C_{n+2}^0 + x.C_{n+2}^1 + x^2.C_{n+2}^2 + x^3.C_{n+2}^3 + \dots + x^{n+2}.C_{n+2}^{n+2}$.

Chọn $x=1 \Rightarrow 2^{n+2} = C_{n+2}^0 + C_{n+2}^1 + C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 + \dots + C_{n+2}^{n+2}$.

$$\text{Do đó: } (*) \Leftrightarrow \frac{2^{100} - n - 3}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{n+2} - C_{n+2}^0 - C_{n+2}^1}{(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow 2^{100} = 2^{n+2} \Leftrightarrow n = 98.$$

Cách 2. Ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{C_n^0}{1.2} + \frac{C_n^1}{2.3} + \frac{C_n^2}{3.4} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right)C_n^0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)C_n^1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)C_n^2 + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)C_n^n \\ &= \left(\frac{1}{1}C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n\right) - \left(\frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+2}C_n^n\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Lại có } \int_0^1 (1+x)^n dx - \int_0^1 x(1+x)^n dx &= \int_0^1 2(1+x)^n dx - \int_0^1 (1+x)^{n+1} dx \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1}C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n\right) - \left(\frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+2}C_n^n\right) \\ &= \frac{2}{n+1}(1+x)^{n+1} \Big|_0^1 - \frac{1}{n+2}(1+x)^{n+2} \Big|_0^1 \Rightarrow S = \frac{2.2^{n+1} - 2}{n+1} - \frac{2^{n+2} - 1}{n+2} = \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Ví dụ 10: Tính tổng $S = \frac{-C_n^1}{2.3} + \frac{2C_n^2}{3.4} - \frac{3C_n^3}{4.5} + \dots + \frac{(-1)^n .nC_n^n}{(n+1)(n+2)}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Số hạng tổng quát } a_k &= \frac{(-1)^k k C_n^k}{(k+1)(k+2)} = (-1)^k C_n^k \left(\frac{2}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) = (-1)^k \frac{2C_n^k}{k+2} + (-1)^{k+1} \frac{C_n^k}{k+1} \\ \Rightarrow S &= \sum_{k=1}^n \left((-1)^k \frac{2C_n^k}{k+2} + (-1)^{k+1} \frac{C_n^k}{k+1} \right) = 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{C_n^k}{k+2} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{C_n^k}{k+1} \end{aligned}$$

$$\text{Xét khai triển } (x+1)^n = C_n^0 + xC_n^1 + \dots + x^n C_n^n$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^0 (x+1)^n dx = \int_{-1}^0 (C_n^0 + xC_n^1 + \dots + x^n C_n^n) dx$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \Big|_{-1}^0 = \left(\frac{xC_n^0}{1} + \frac{x^2 C_n^1}{2} + \dots + \frac{x^{n+1} C_n^n}{n+1} \right) \Big|_{-1}^0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{C_n^k}{k+1}$$

$$\text{Tương tự ta có } x(x+1)^n = xC_n^0 + x^2 C_n^1 + \dots + x^{n+1} C_n^n$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^0 x(x+1)^n dx = \int_{-1}^0 (xC_n^0 + x^2 C_n^1 + \dots + x^{n+1} C_n^n) dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{C_n^k}{k+2}$$

$$\text{Vậy } S = 2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) - \frac{1}{n+1} = -\frac{n}{(n+1)(n+2)}$$

5. ỨNG DỤNG SỐ PHỨC CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC TỔ HỢP.

Các tính chất của số phức được sử dụng trong phần này

- Hai số phức $z = x + iy, w = x' + iy'$ bằng nhau khi và chỉ khi $x = x', y = y'$
- Công thức Moivre $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$
- Giải phương trình $x^3 - 1 = 0$. Ta được nghiệm là $x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}; x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

Các nghiệm đó chính là các căn bậc ba của 1.

Đặt $a = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a^2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ và a có các tính chất sau:

- $a + a^2 = -1$
- $a^3 = 1$
- $a^{3k} = 1$
- $a^{3k+1} = a$
- $a^{3k+2} = a^2$

Ý tưởng của phương pháp này dựa trên các tính chất của số ảo i .

$$i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i, k \in \mathbb{N}$$

Từ đó, ta xét đa thức $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

$$\text{Đặt } S_0 = \sum_{i=4k} a_i, S_1 = \sum_{i=4k+1} a_i, S_2 = \sum_{i=4k+2} a_i, S_3 = \sum_{i=4k+3} a_i$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = (S_0 + S_2) + (S_1 + S_3) \\ f(-1) = (S_0 + S_2) - (S_1 + S_3) \\ f(i) = (S_0 - S_2) + (S_1 - S_3)i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_0 = \frac{f(1) + f(-1) + 2\operatorname{Re}(f(i))}{4} \\ S_1 = \frac{f(1) - f(-1) + 2\operatorname{Im}(f(i))}{4} \\ S_2 = \frac{f(1) + f(-1) - 2\operatorname{Re}(f(i))}{4} \\ S_3 = \frac{f(1) - f(-1) - 2\operatorname{Im}(f(i))}{4} \end{cases}$$

Với $\operatorname{Re}(f(i)), \operatorname{Im}(f(i))$ lần lượt là phần thực và phần ảo của $f(i)$

Dấu hiệu

Đây là vấn đề lớn nhất cần chú ý. Ta dùng số phức để tính tổng của các C_n^k khi tổng này có hai đặc điểm:

- Các dấu trong tổng xen kẽ đều nhau.
- k luôn lẻ, hoặc luôn chẵn hoặc khi chia k cho một số ta luôn được cùng một số dư (trong chương trình phổ thông ta chỉ làm với $k = 3n, k = 3n + 1, k = 3n + 2$)

Sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu phương pháp này qua các ví dụ sau.

Dạng 1: Khai triển $(x+1)^n$, cho x nhận giá trị là những số phức thích hợp hoặc khai triển trực tiếp các số phức

Ví dụ 1: Tính tổng

$$A = C_{2009}^0 - C_{2009}^2 + C_{2009}^4 - \dots + C_{2009}^{2008}$$

$$B = -C_{2009}^1 + C_{2009}^3 - C_{2009}^5 + \dots - C_{2009}^{2009}$$

Lời giải

Xét khai triển $(x+1)^{2009} = C_{2009}^0 + xC_{2009}^1 + x^2C_{2009}^2 + \dots + x^{2009}C_{2009}^{2009}$

Cho $x = -i$ ta có:

$$\begin{aligned}(1-i)^{2009} &= C_{2009}^0 + iC_{2009}^1 + i^2C_{2009}^2 + \dots + i^{2009}C_{2009}^{2009} \\ &= (C_{2009}^0 - C_{2009}^2 + C_{2009}^4 - \dots + C_{2009}^{2008}) + (-C_{2009}^1 + C_{2009}^3 - C_{2009}^5 + \dots - C_{2009}^{2009})i\end{aligned}$$

Mặt khác $(1-i)^{2009} = (\sqrt{2})^{2009} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)^{2009} = (\sqrt{2})^{2009} \left(\cos\frac{2009\pi}{4} - i\sin\frac{2009\pi}{4} \right)$

$$= (\sqrt{2})^{2009} \left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} \right) = 2^{1004} - i2^{1004}$$

So sánh phần thực và phần ảo của $(1-i)^{2009}$ trong hai cách tính trên ta được:

- $A = C_{2009}^0 - C_{2009}^2 + C_{2009}^4 - \dots + C_{2009}^{2008} = 2^{1004}$
- $B = -C_{2009}^1 + C_{2009}^3 - C_{2009}^5 + \dots - C_{2009}^{2009} = -2^{1004}$

Ví dụ 2: Tính tổng $S = \frac{1}{2^{50}} (C_{50}^0 - 3C_{50}^2 + 3^2C_{50}^4 - \dots + 3^{24}C_{50}^{48} - 3^{25}C_{50}^{50})$

Lời giải

Xét khai triển $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{50} = \frac{1}{2^{50}} (C_{50}^0 - (i\sqrt{3})C_{50}^1 + (i\sqrt{3})^2C_{50}^2 + \dots - (i\sqrt{3})^{49}C_{50}^{49} + (i\sqrt{3})^{50}C_{50}^{50})$

$$= \frac{1}{2^{50}} (C_{50}^0 - (\sqrt{3})^2C_{50}^2 + \dots - (\sqrt{3})^{50}C_{50}^{50}) + \frac{1}{2^{50}} (-\sqrt{3}C_{50}^1 + (\sqrt{3})^3C_{50}^3 - \dots - (\sqrt{3})^{49}C_{50}^{49})i$$

Mặt khác $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{50} = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{50} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

So sánh phần thực của $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{50}$ trong hai cách tính trên ta được:

$$S = \frac{1}{2^{50}} (C_{50}^0 - 3C_{50}^2 + 3^2C_{50}^4 - \dots + 3^{24}C_{50}^{48} - 3^{25}C_{50}^{50}) = -\frac{1}{2}$$

Ví dụ 3: Tính tổng $S = 3^{10}C_{20}^0 - 3^9C_{20}^2 + 3^8C_{20}^4 - 3^7C_{20}^6 + \dots - 3C_{20}^{18} + C_{20}^{20}$

Lời giải

Xét khai triển $(i+\sqrt{3})^{20} = (\sqrt{3})^{20}C_{20}^0 + i(\sqrt{3})^{19}C_{20}^1 - \dots - i\sqrt{3}C_{20}^{19} + C_{20}^{20}$

$$= (3^{10}C_{20}^0 - 3^9C_{20}^2 + \dots - 3C_{20}^{18} + C_{20}^{20}) + \left((i\sqrt{3})^{19}C_{20}^1 - (i\sqrt{3})^{17}C_{20}^3 + \dots - \sqrt{3}C_{20}^{19} \right)i$$

Mặt khác $(i+\sqrt{3})^{20} = -2^{19} - i2^{19}\sqrt{3}$

So sánh phần thực của $(i+\sqrt{3})^{20}$ trong hai cách tính trên ta có:

$$S = 3^{10}C_{20}^0 - 3^9C_{20}^2 + 3^8C_{20}^4 - 3^7C_{20}^6 + \dots - 3C_{20}^{18} + C_{20}^{20} = -2^{19}$$

Dạng 2: Khai triển $(x+1)^n$, đạo hàm hai vế theo x sau đó cho x nhận giá trị là những số phức thích hợp

Ví dụ 1: Tính tổng

$$S = C_{30}^1 - 3C_{30}^3 + 5C_{30}^5 - \dots - 27C_{30}^{27} + 29C_{30}^{29}$$

$$S_1 = 2C_{30}^2 - 4C_{30}^4 + 6C_{30}^6 - \dots - 28C_{30}^{28} + 30C_{30}^{30}$$

Lời giải

$$\text{Xét } (x+1)^{30} = C_{30}^0 + xC_{30}^1 + x^2C_{30}^2 + \dots + x^{30}C_{30}^{30}$$

$$\text{Đạo hàm hai vế ta có } 30(x+1)^{29} = C_{30}^1 + 2xC_{30}^2 + 3x^2C_{30}^3 + \dots + 30x^{29}C_{30}^{30}$$

$$\text{Cho } x=i \text{ ta có } 30(i+1)^{29} = (C_{30}^1 - 3C_{30}^3 + \dots + 29C_{30}^{29}) + (2C_{30}^2 - 4C_{30}^4 + \dots - 28C_{30}^{28} + 30C_{30}^{30})i$$

$$\text{Mặt khác } 30(i+1)^{29} = -15.2^{15} - i.15.2^{15}$$

So sánh phần thực và ảo của $30(1+i)^{29}$ trong hai cách tính trên ta có:

$$S = C_{30}^1 - 3C_{30}^3 + 5C_{30}^5 - \dots - 27C_{30}^{27} + 29C_{30}^{29} = -15.2^{15}$$

$$S_1 = 2C_{30}^2 - 4C_{30}^4 + 6C_{30}^6 - \dots - 28C_{30}^{28} + 30C_{30}^{30} = -15.2^{15}$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Tính tổng $S = 2.3C_{20}^2 - 4.3^2C_{20}^4 + 6.3^3C_{20}^6 - \dots + 18.3^9C_{20}^{18} - 20.3^{10}C_{20}^{20}$

Gợi ý. Xét khai triển $(1+\sqrt{3}x)^{20}$

2. Tính tổng $S = 1C_{8n}^1 - 3C_{8n}^3 + \dots - (8n-1)C_{8n}^{8n-1}$.

Gợi ý. Xét khai triển $(1+x)^{8n}$

Ví dụ 2: Tính tổng

$$M = C_{15}^0 - 3C_{15}^2 + 5C_{15}^4 - 7C_{15}^6 + \dots + 13C_{15}^{12} - 15C_{15}^{14}$$

$$N = 2C_{15}^1 - 4C_{15}^3 + 6C_{15}^5 - 8C_{15}^7 + \dots + 14C_{15}^{13} - 16C_{15}^{15}$$

Lời giải

$$\text{Xét khai triển } (x+1)^{15} = C_{15}^0 + xC_{15}^1 + x^2C_{15}^2 + \dots + x^{14}C_{15}^{14} + x^{15}C_{15}^{15}$$

$$\text{Nhân hai vế với } x \text{ ta có } x(x+1)^{15} = xC_{15}^0 + x^2C_{15}^1 + x^3C_{15}^2 + \dots + x^{15}C_{15}^{14} + x^{16}C_{15}^{15}$$

$$\text{Đạo hàm hai vế ta có } (x+1)^{15} + 15x(x+1)^{14} = C_{15}^0 + 2xC_{15}^1 + 3x^2C_{15}^2 + \dots + 16x^{15}C_{15}^{15}$$

Với $x=i$ ta có

$$(1+i)^{15} + 15i(i+1)^{14} = (C_{15}^0 - 3C_{15}^2 + \dots + 13C_{15}^{12} - 15C_{15}^{14}) + (2C_{15}^1 - 4C_{15}^3 + \dots + 14C_{15}^{13} - 16C_{15}^{15})i$$

$$\text{Mặt khác } (1+i)^{15} = 7.2^8 - 2^7i$$

So sánh phần thực và ảo của $(1+i)^{15} + 15i(i+1)^{14}$ trong hai cách tính trên ta có:

$$M = C_{15}^0 - 3C_{15}^2 + 5C_{15}^4 - 7C_{15}^6 + \dots + 13C_{15}^{12} - 15C_{15}^{14} = 7.2^8$$

$$N = 2C_{15}^1 - 4C_{15}^3 + 6C_{15}^5 - 8C_{15}^7 + \dots + 14C_{15}^{13} - 16C_{15}^{15} = -2^7$$

Dạng 3: Khai triển $(x+1)^n$, cho x nhận giá trị là các căn bậc ba của đơn vị

Các bài toán ở đây sử dụng tính chất số 3 mà mình đã đề cập ở đầu! Chú ý $a = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

Ví dụ 1: Tính tổng $S = C_{20}^0 + C_{20}^3 + C_{20}^6 + \dots + C_{20}^{3k} + \dots + C_{20}^{15} + C_{20}^{18}$

Lời giải

Xét khai triển $(x+1)^{20} = C_{20}^0 + xC_{20}^1 + x^2C_{20}^2 + \dots + x^{19}C_{20}^{19} + x^{20}C_{20}^{20}$

Cho $x=1$ ta có $2^{20} = C_{20}^0 + C_{20}^1 + C_{20}^2 + \dots + C_{20}^{19} + C_{20}^{20}$ (1)

Cho $x=a$ ta có $(1+a)^{20} = C_{20}^0 + aC_{20}^1 + a^2C_{20}^2 + \dots + a^{19}C_{20}^{19} + a^{20}C_{20}^{20}$ (2)

Cho $x=a^2$ ta có $(1+a^2)^{20} = C_{20}^0 + a^2C_{20}^1 + a^4C_{20}^2 + C_{20}^3 + \dots + a^{18}C_{20}^{19} + a^{20}C_{20}^{20}$ (3)

Cộng vế theo vế (1),(2),(3) ta được $2^{20} + (1+a)^{20} + (1+a^2)^{20} = 3S$

Mặt khác $(1+a)^2 = (-a^2)^{20} = a^{40} = a$; $(1+a^2)^{20} = (-a)^{20} = a^2$

Do vậy $3S = 2^{20} - 1 \Rightarrow S = \frac{2^{20} - 1}{3}$

Ví dụ 2: Tính tổng $S = C_{20}^1 + C_{20}^4 + C_{20}^7 + \dots + C_{20}^{3k+1} + \dots + C_{20}^{16} + C_{20}^{19}$

Lời giải

Xét khai triển $(x+1)^{20} = C_{20}^0 + xC_{20}^1 + x^2C_{20}^2 + \dots + x^{19}C_{20}^{19} + x^{20}C_{20}^{20}$

Nhân hai vế với x^2 ta có $x^2(x+1)^{20} = x^2C_{20}^0 + x^3C_{20}^1 + x^4C_{20}^2 + \dots + x^{21}C_{20}^{19} + x^{22}C_{20}^{20}$

Cho $x=1$ ta có $2^{20} = C_{20}^2 + C_{20}^1 + C_{20}^2 + \dots + C_{20}^{19} + C_{20}^{20}$ (1)

Cho $x=a$ ta có $a^2(1+a)^2 = a^2C_{20}^0 + C_{20}^1 + aC_{20}^2 + a^2C_{20}^3 + C_{20}^4 + \dots + a^{18}C_{20}^{19} + C_{20}^{20} + aC_{20}^{20}$ (2)

Cho $x=a^2$ ta có $a(1+a^2)^{20} = aC_{20}^0 + C_{20}^1 + a^2C_{20}^2 + aC_{20}^3 + \dots + a^{18}C_{20}^{19} + C_{20}^{20} + a^2C_{20}^{20}$ (3)

Cộng vế theo vế (1),(2),(3) ta có $2^{20} + a^2(1+a)^{20} + a(1+a^2)^{20} = 3S$

Mặt khác $a^2(1+a)^2 = a^{42} = 1$; $a(1+a^2)^{20} = a^{21} = 1 \Rightarrow S = \frac{2^{20} + 2}{3}$

Ví dụ 3: Tính tổng $S = C_{20}^0 + 3C_{20}^3 + 6C_{20}^6 + \dots + 3kC_{20}^{3k} + \dots + 15C_{20}^{15} + 18C_{20}^{18}$

Lời giải

Xét khai triển $(x+1)^{20} = C_{20}^0 + xC_{20}^1 + x^2C_{20}^2 + \dots + x^{19}C_{20}^{19} + x^{20}C_{20}^{20}$

Đạo hàm hai vế ta có $20(x+1)^{19} = C_{20}^1 + 2xC_{20}^2 + 3x^2C_{20}^3 + \dots + 19x^{18}C_{20}^{19} + 20x^{19}C_{20}^{20}$ (*)

Nhân hai vế (*) với x ta có $20x(x+1)^{19} = xC_{20}^1 + 2x^2C_{20}^2 + 3x^3C_{20}^3 + \dots + 19x^{19}C_{20}^{19} + 20x^{20}C_{20}^{20}$

Cho $x=1$ ta được $20.2^{19} = C_{20}^1 + 2C_{20}^2 + 3C_{20}^3 + \dots + 19C_{20}^{19} + 20C_{20}^{20}$ (1)

Cho $x=a$ ta có $20a(1+a)^{19} = aC_{20}^1 + 2a^2C_{20}^2 + 3a^3C_{20}^3 + \dots + 19a^{19}C_{20}^{19} + 20a^{20}C_{20}^{20}$ (2)

Cho $x=a^2$ ta có $20a^2(1+a^2)^{19} = a^2C_{20}^1 + 2a^4C_{20}^2 + 3a^6C_{20}^3 + 4a^8C_{20}^4 + \dots + 19a^{18}C_{20}^{19} + 20a^{20}C_{20}^{20}$ (3)

Cộng vế theo vế (1),(2),(3) ta có $20\left[2^{19} + a(1+a)^{19} + a^2(1+a^2)^{19}\right] = 3S - C_{20}^0$

Mặt khác $\begin{cases} a(1+a)^{19} = a(-a^2)^{19} = -a^{39} = -1 \\ a^2(1+a^2)^{19} = a^2(-a)^{19} = -a^{21} = -1 \end{cases} \Rightarrow S = \frac{10.2^{20}}{3} - 13$

6. ĐỒNG NHẤT HỆ SỐ 2 VẾ.

Phương pháp làm dạng toán này là ta sẽ thực hiện khai triển theo hai cách, sau đó so sánh hệ số của lũy thừa x^k ở hai vế ta sẽ có điều phải chứng minh!

Ví dụ 1: Cho các số nguyên dương $m, n; 0 \leq p \leq \min\{m; n\}$. Chứng minh rằng

$$C_m^p + C_m^{p-1}C_n^1 + C_m^{p-2}C_n^2 + \dots + C_m^{p-q}C_n^q + \dots + C_m^0C_n^p = C_{m+n}^p$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} (x+1)^m = C_m^0 + xC_m^1 + x^2C_m^2 + \dots + x^pC_m^p + \dots + x^mC_m^m \\ (x+1)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + \dots + x^pC_n^p + \dots + x^nC_n^n \end{cases}$$

Nhân theo vế ta có $(x+1)^{m+n} = g(x) + (C_m^pC_n^0 + C_m^{p-1}C_n^1 + \dots + C_m^{p-q}C_n^q + \dots + C_m^0C_n^p)x^p$

Trong đó $g(x)$ là biểu thức không chứa x^p . Mặt khác hệ số của x^p trong khai triển $(x+1)^{m+n}$ là C_{m+n}^p , đến đây so sánh hệ số của x^p ta có

$$C_{m+n}^p = C_m^pC_n^0 + C_m^{p-1}C_n^1 + \dots + C_m^{p-q}C_n^q + \dots + C_m^0C_n^p$$

Đến đây bài toán đã được giải quyết hoàn toàn!

Chú ý $m = n = p \Rightarrow (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Cho $\begin{cases} 0 \leq k, n \\ k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$ chứng minh rằng $C_n^0C_n^k + C_n^1C_n^{k+1} + \dots + C_n^{n-k}C_n^n = \frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!}$

Gợi ý. Viết lại đẳng thức cần chứng minh $C_n^0C_n^{n-k} + C_n^1C_n^{n-k-1} + \dots + C_n^{n-k}C_n^0 = \frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!}$

Điều này làm ta gợi tới đến vế trái là hệ số của x^{n-k} . Ta xét $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, sau đó so sánh hệ số x^{n-k} ở 2 vế ta sẽ có điều phải chứng minh!

Ví dụ 2: Cho 2 số n, k thỏa mãn $\begin{cases} 0 \leq k, n \\ k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Chứng minh rằng

$$C_k^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+2}^2 + \dots + C_{k+n}^n = C_{n+k+1}^n$$

Lời giải

Viết lại đẳng thức cần chứng minh: $C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \dots + C_{k+n}^k = C_{n+k+1}^{k+1}$

Điều này làm ta gợi đến vế trái là tổng các hệ số chứa x^k . Xét đa thức

$$P(x) = (1+x)^k + (1+x)^{k+1} + (1+x)^{k+2} + \dots + (1+x)^{k+n} = \frac{(1+x)^{n+k+1} - (1+x)^k}{x}$$

So sánh hệ số của số hạng chứa x^k ở 2 vế ta suy ra đpcm.

Ví dụ 3: Tính tổng $S = \left(\frac{C_n^0}{1}\right)^2 + \left(\frac{C_n^1}{2}\right)^2 + \left(\frac{C_n^2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{C_n^n}{n+1}\right)^2$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)(k+1)!(n-k)!} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$$

$$\text{Khi đó } S = \sum_{k=0}^n \left(\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} \right)^2 = \frac{1}{(n+1)^2} \left((C_{n+1}^1)^2 + (C_{n+1}^2)^2 + \dots + (C_{n+1}^{n+1})^2 \right) = \frac{1}{(n+1)^2} (C_{2(n+1)}^{n+1} - 1)$$

Ví dụ 4 : Với các số nguyên dương n , tính tổng $S = (C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + \dots + n(C_n^n)^2$

Lời giải

$$\text{Xét } S = (C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + \dots + n(C_n^n)^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = n(x+1)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2C_n^3 + \dots + nx^{n-1}C_n^n$$

$$\Rightarrow xf'(x) = nx(x+1)^{n-1} = xC_n^1 + 2x^2C_n^2 + 3x^3C_n^3 + \dots + nx^nC_n^n \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } (x+1)^n = x^nC_n^0 + x^{n-1}C_n^1 + x^{n-2}C_n^2 + \dots + C_n^n \quad (2)$$

Nhân theo vế của 2 đẳng thức (1), (2) và so sánh hệ số của x^n ở cả 2 vế ta được

$$S = (C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + \dots + n(C_n^n)^2 = nC_{2n-1}^{n-1} = nC_{2n-1}^n$$

Ví dụ 5 : Tính tổng $S = \frac{1}{2}C_{2n}^1 - \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \dots + \frac{(-1)^k C_{2n}^{k-1}}{k} + \dots + (-1)^{2n+1} \frac{1}{2n+1} C_{2n}^{2n}$

Lời giải

$$\text{Với } k = \overline{2, 2n+1} \text{ ta có } \frac{1}{k} C_{2n}^{k-1} = \frac{(2n)!}{k(k-1)!(2n-k+1)!} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} = \frac{1}{2n+1} C_{2n+1}^k$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} C_{2n}^{k-1} = \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2n+1} C_{2n+1}^k = \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{k=2}^{2n+1} (-1)^k C_{2n+1}^k \right) \\ &= \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{k=2}^{2n+1} (-1)^k C_{2n+1}^k - C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 \right) = \frac{1}{2n+1} \left((1-1)^{2n+1} - 1 + 2n+1 \right) = \frac{2n}{2n+1} \end{aligned}$$

IV. CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP.

ĐỀ BÀI

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $(C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots)^2 = 2^n$

Ví dụ 2: Cho khai triển $(x-1)^{2n} + x(x+1)^{2n-1} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$ với n là số tự nhiên và $n \geq 3$. Biết $\sum_{k=0}^n a_{2k} = 768$, tính a_5 .

Ví dụ 3: Gọi S là tổng các hệ số của các lũy thừa bậc nguyên dương của x trong khai triển nhị thức $P(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2018}$. Tính $S + \frac{1}{2}C_{2018}^{1009}$.

Ví dụ 4: Cho khai triển $a_n(x-1)^n + a_{n-1}(x-1)^{n-1} + \dots + a_1(x-1) + a_0 = x^n$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 5$. Tìm n , biết $a_2 + a_3 + a_4 = 83n$.

Ví dụ 5: Sau khi khai triển và rút gọn thì biểu thức $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10}$, có tất cả bao nhiêu số hạng?

Ví dụ 6: Có bao nhiêu số thực x để khi khai triển nhị thức $\left(2^x + 2^{\frac{1}{2-x}}\right)^n$ có tổng số hạng thứ 3 và thứ 5 bằng 135, còn tổng của ba số hạng cuối bằng 22?

Ví dụ 7: Trong khai triển của biểu thức $(x^3 - x - 2)^{2017}$. Tính tổng S của các hệ số của x^{2k+1} với k nguyên dương?

Ví dụ 8: Kí hiệu a_{3n-3} là hệ số của số hạng chứa x^{3n-3} trong khai triển $(x^2 + 1)^n(x + 2)^n$. Tìm n sao cho $a_{3n-3} = 26n$.

Ví dụ 9: Cho khai triển $x(x+1)^n + 2(x+1)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n+1}x^{n+1}$ với n là số tự nhiên và $n \geq 2$. Tìm n , biết rằng $a_2 - 7n$; na_n ; a_{n-2} theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Ví dụ 10: Xác định n biết rằng hệ số của x^n trong khai triển $(1 + x + 2x^2 + \dots + nx^n)^2$ bằng $6n$.

Ví dụ 11: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{n+1}^{n-1} + C_{n+1}^n = 171$. Tìm hệ số lớn nhất của biểu thức $P(x) = (1+x)(1+2x)^n$ sau khi khai triển và rút gọn.

Ví dụ 12: Khai triển $(1 + x + x^2 + \dots + x^{10})^{11}$ được viết thành $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{110}x^{110}$. Tính tổng $S = C_{11}^0a_0 - C_{11}^1a_1 + C_{11}^2a_2 - C_{11}^3a_3 + \dots + C_{11}^{10}a_{10} - C_{11}^{11}a_{11}$.

Ví dụ 13: Tính tổng

$$C_{2017}^1 - 2^2 C_{2017}^2 + 3 \cdot 2^2 C_{2017}^3 - 4 \cdot 2^3 C_{2017}^4 + \dots - 2016 \cdot 2^{2015} C_{2017}^{2016} + 2017 \cdot 2^{2016} C_{2017}^{2017}$$

Ví dụ 14: Tính tổng $T = C_{2017}^1 + C_{2017}^3 + C_{2017}^5 + \dots + C_{2017}^{2017}$

Ví dụ 15: Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ và thỏa mãn $\frac{1}{C_2^2} + \frac{1}{C_3^2} + \frac{1}{C_4^2} + \dots + \frac{1}{C_n^2} = \frac{9}{5}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{C_n^5 + C_{n+2}^3}{(n-4)!}$.

Ví dụ 16: Tính tổng $S = C_{2018}^{1009} + C_{2018}^{1010} + C_{2018}^{1011} + \dots + C_{2018}^{2018}$ (trong tổng đó, các số hạng có dạng C_{2018}^k với k nguyên dương nhận giá trị liên tục từ 1009 đến 2018)

Ví dụ 17: Biết rằng trong khai triển nhị thức Niu-ton của đa thức $P(x) = (2+x+2x^2+x^3)^n$ thì hệ số của x^5 là 1001. Tổng các hệ số trong khai triển của $P(x)$ bằng bao nhiêu?

Ví dụ 18: Cho khai triển $P(x) = (1+x)(2+x)\dots(1+2017x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2017}x^{2017}$. Kí hiệu $P'(x)$ và $P''(x)$ lần lượt là đạo hàm cấp 1 và đạo hàm cấp 2 của đa thức $P(x)$. Tìm hệ số a_2 ?

Ví dụ 19: Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển

$$(1 - 2x + 2015x^{2016} - 2016x^{2017} + 2017x^{2018})^{60}.$$

Ví dụ 20: Biểu thức $\frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^9}{9!} \cdot \frac{(1-x)}{1!} + \frac{x^8}{8!} \cdot \frac{(1-x)^2}{2!} + \dots + \frac{(1-x)^{10}}{10!}$ bằng bao nhiêu?

Ví dụ 21: Giá trị của $A = \frac{1}{1!2018!} + \frac{1}{2!2017!} + \frac{1}{3!2016!} + \dots + \frac{1}{1008!1011!} + \frac{1}{1009!1010!}$ bằng?

Ví dụ 22: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.

Ví dụ 23: Có bao nhiêu số dương n sao cho

$$S = 2 + (C_1^0 + C_2^0 + \dots + C_n^0) + (C_1^1 + C_2^1 + \dots + C_n^1) + \dots + (C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1}) + C_n^n$$

là một số có 1000 chữ số?

Ví dụ 24: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 + \dots + C_{2n+1}^{2n} = 1024$.

Ví dụ 25: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + \dots + (3n+2)C_n^n = 1600$.

Ví dụ 26: Với $x \neq -1$ ta có khai triển sau:

$$\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \right)^{2018} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2018}x^{2018} + \frac{b_1}{x+1} + \frac{b_2}{(x+1)^2} + \frac{b_3}{(x+1)^3} + \dots + \frac{b_{2018}}{(x+1)^{2018}}$$

Tính tổng $S = \sum_{k=1}^{2018} b_k$?

Ví dụ 27: Với n là số tự nhiên lớn hơn 2, đặt $S_n = \frac{1}{C_3^3} + \frac{1}{C_4^3} + \frac{1}{C_5^3} + \dots + \frac{1}{C_n^3}$. Tính $\lim S_n$

Ví dụ 28: Tính tổng $S = \frac{1}{2018}(C_{2018}^1)^2 + \frac{2}{2017}(C_{2018}^2)^2 + \dots + \frac{2017}{2}(C_{2018}^{2017})^2 + \frac{2018}{1}(C_{2018}^{2018})^2$

Ví dụ 29: Cho số nguyên dương n , tính tổng $S = \frac{-C_n^1}{2.3} + \frac{2C_n^2}{3.4} - \frac{3C_n^3}{4.5} + \dots + \frac{(-1)^n nC_n^n}{(n+1)(n+2)}$.

Ví dụ 30: Tính tổng $P = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$ theo n .

Ví dụ 31: Cho n và k nguyên dương thỏa mãn $k \leq n$. Chứng minh rằng

$$\frac{n+1}{n+2} \left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \right) = \frac{1}{C_n^k}$$

Ví dụ 32: Chứng minh rằng $1 + C_n^3 + C_n^6 + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right)$

Ví dụ 33: Với số tự nhiên $n \geq 1$. Chứng minh rằng

$$C_n^0 \cos \alpha + C_n^1 \cos 2\alpha + C_n^2 \cos 3\alpha + \dots + C_n^n \cos (n+1)\alpha = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n+2}{2} \alpha$$

Ví dụ 34: Với số tự nhiên $n \geq 1$. Tính tổng sau

$$A = C_n^1 (\cos x - \sin x) + 0C_n^2 + C_n^3 3 \sin x \cos x (\sin x - \cos x) + \dots + C_n^n n \sin x \cos x (\sin^{n-2} x - \cos^{n-2} x)$$

Ví dụ 35: Với số tự nhiên m nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1991} C_{1991}^0 - \frac{1}{1991} C_{1991}^1 + \frac{1}{1991} C_{1991}^2 - \dots + \frac{(-1)^m}{1991-m} C_{1991-m}^m = \frac{1}{1991}$$

LỜI GIẢI

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $(C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots)^2 = 2^n$

Lời giải

Xét số phức $z = (i+1)^n = C_n^0 + iC_n^1 + i^2 C_n^2 + \dots + i^n C_n^n = (C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots)$

Mặt khác ta lại có $z = (1+i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$

So sánh $|z|^2$ ở cả hai vế ta có điều phải chứng minh!

Ví dụ 2: Cho khai triển $(x-1)^{2n} + x(x+1)^{2n-1} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$ với n là số tự nhiên và $n \geq 3$. Biết $\sum_{k=0}^n a_{2k} = 768$, tính a_5 .

Lời giải

Ta có $\begin{cases} f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} \\ f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{2n} \end{cases} \Rightarrow f(1) + f(-1) = 2 \cdot \sum_{k=0}^n a_{2k} = 1536$

hay $2^{2n-1} + 2^{2n} = 1536 \Rightarrow n = 5 \Rightarrow$ hệ số $a_5 = C_{10}^5 (-1)^5 + C_9^4 = -126$.

Ví dụ 3: Gọi S là tổng các hệ số của các lũy thừa bậc nguyên dương của x trong khai triển nhị thức $P(x) = \left(x + \frac{1}{x} \right)^{2018}$. Tính $S + \frac{1}{2} C_{2018}^{1009}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k \cdot x^{2018-2k}.$$

Để lũy thừa với số mũ nguyên dương thì $2018 - 2k > 0 \Leftrightarrow k < 1009$.

$$\text{Suy ra } S = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + \dots + C_{2018}^{1008}.$$

$$\text{Suy ra } S + \frac{1}{2} C_{2018}^{1009} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + \dots + C_{2018}^{1008} + \frac{1}{2} C_{2018}^{1009}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{C_n^k = C_n^{n-k}} 2 \left(S + \frac{1}{2} C_{2018}^{1009} \right) &= C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + \dots + C_{2018}^{1008} + \frac{1}{2} C_{2018}^{1009} + C_{2018}^{2018} + C_{2018}^{2017} + \dots + C_{2018}^{1010} + \frac{1}{2} C_{2018}^{1009} \\ &= C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + \dots + C_{2018}^{2017} + C_{2018}^{2018} = 2^{2018}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S + \frac{1}{2} C_{2018}^{1009} = 2^{2017}.$$

Ví dụ 4: Cho khai triển $a_n(x-1)^n + a_{n-1}(x-1)^{n-1} + \dots + a_1(x-1) + a_0 = x^n$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 5$. Tìm n , biết $a_2 + a_3 + a_4 = 83n$.

Lời giải

$$\text{Ta có } x^n = [(x-1)+1]^n = C_n^0(x-1)^n + C_n^1(x-1)^{n-1} + C_n^2(x-1)^{n-2} + \dots + C_n^{n-1}(x-1) + C_n^n.$$

$$\text{Vì } a_2 + a_3 + a_4 = 83n \Rightarrow C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 = 83n$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)}{2!} + \frac{(n-1)(n-2)}{3!} + \frac{(n-1)(n-2)(n-4)}{4!} = 83 \Rightarrow n = 13.$$

Ví dụ 5: Sau khi khai triển và rút gọn thì biểu thức $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10}$, có tất cả bao nhiêu số hạng?

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10} &= \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^{20-k} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k + \sum_{m=0}^{10} C_{10}^m x^{3(10-m)} \left(-\frac{1}{x}\right)^m \\ &= \sum_{k=0}^{20} (-1)^k C_{20}^k x^{20-3k} + \sum_{m=0}^{10} (-1)^m C_{10}^m x^{30-4m}. \end{aligned}$$

Ta tìm các số hạng có cùng lũy thừa của x :

$$\begin{cases} 0 \leq m \leq 10, 0 \leq k \leq 20 \\ 20 - 3k = 30 - 4m \Leftrightarrow 4m - 3k = 10 \end{cases} \Leftrightarrow (k; m) = (2; 4), (6; 7), (10; 10).$$

Vậy trong khai triển đã cho có tất cả $21 + 11 - 3 = 29$ số hạng.

Ví dụ 6: Có bao nhiêu số thực x để khi khai triển nhị thức $\left(2^x + 2^{\frac{1}{2-x}}\right)^n$ có tổng số hạng thứ 3 và thứ 5 bằng 135, còn tổng của ba số hạng cuối bằng 22?

Lời giải

Số hạng thứ $(k+1)$ trong khai triển là $T_k = C_n^k (2^x)^{n-k} \left(2^{\frac{1}{2}-x}\right)^k$.

Từ đó suy ra:

- Tổng hai số hạng thứ 3 và thứ 5 bằng 135

$$\Rightarrow T_2 + T_4 = C_n^2 (2^x)^{n-2} \left(2^{\frac{1}{2}-x}\right)^2 + C_n^4 (2^x)^{n-4} \left(2^{\frac{1}{2}-x}\right)^4 = 135 \quad (1)$$

- Tổng ba hệ số của ba số cuối bằng 22

$$\Rightarrow C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 22 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} + n + 1 = 22 \Leftrightarrow n = 6.$$

Thay $n = 6$ vào (1), ta được $C_6^2 \cdot 2^{4x} \cdot 2^{1-2x} + C_6^4 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{2-4x} = 135 \Leftrightarrow 2^{2x+1} + 2^{2-2x} = 9$.

$$\text{Đặt } 0 < u = 2^{2x}, \text{ ta được } 2u + \frac{4}{u} = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \Rightarrow x = 1 \\ u = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{1; -\frac{1}{2}\right\}.$$

Ví dụ 7: Trong khai triển của biểu thức $(x^3 - x - 2)^{2017}$. Tính tổng S của các hệ số của x^{2k+1} với k nguyên dương?

Lời giải

$$\text{Ta có } (x^3 - x - 2)^{2017} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{6051}x^{6051} \quad (1)$$

$$\text{Ta cần tính } S = a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{6051}.$$

$$\text{Thay } x = 1 \text{ vào (1), ta được } a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{6051} = -2^{2017} \quad (2)$$

$$\text{Thay } x = -1 \text{ vào (1), ta được } a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{6051} = -2^{2017} \quad (3)$$

$$\text{Trừ vế theo vế (2) và (3), ta được } 2(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{6051}) = 0 \Leftrightarrow 2S + 2a_1 = 0 \Leftrightarrow S = -a_1$$

$$\text{Theo khai triển nhị thức Niuton, ta có } (x^3 - x - 2)^{2017} = \sum_{k=0}^{2017} C_{2017}^k (x^3 - x)^k (-2)^{2017-k}$$

$$\Rightarrow \text{Số hạng } a_1x \text{ chỉ xuất hiện trong } C_{2017}^1 (x^3 - x)^1 (-2)^{2017-1}.$$

$$\text{Mà } C_{2017}^1 (x^3 - x)^1 (-2)^{2017-1} = 2017 \cdot 2^{2016} \cdot (x^3 - x) \Rightarrow a_1 = -2017 \cdot 2^{2016} \Rightarrow S = 2017 \cdot 2^{2016}.$$

Ví dụ 8: Kí hiệu a_{3n-3} là hệ số của số hạng chứa x^{3n-3} trong khai triển $(x^2 + 1)^n (x + 2)^n$.
Tìm n sao cho $a_{3n-3} = 26n$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (x^2 + 1)^n (x + 2)^n = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k (x^2)^{n-k} \right) \left(\sum_{i=0}^n C_n^i x^{n-i} 2^i \right) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n C_n^k C_n^i 2^i x^{3n-2k-i}.$$

$$\text{Chọn } 3n - 2k - i = 3n - 3 \Leftrightarrow 2k + i = 3 \longrightarrow (k; i) \in \{(0; 3), (1; 1)\}.$$

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^{3n-3} là $C_n^0 C_n^3 2^3 + C_n^1 C_n^1 2$.

Theo giả thiết $C_n^0 C_n^3 2^3 + C_n^1 C_n^1 2 = 26n \Rightarrow n = 5$.

Ví dụ 9: Cho khai triển $x(x+1)^n + 2(x+1)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n+1} x^{n+1}$ với n là số tự nhiên và $n \geq 2$. Tìm n , biết rằng $a_2 - 7n$; a_n ; a_{n-2} theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Lời giải

Ta có $x(x+1)^n + 2(x+1)^n = (x+1)^n (x+2) = (x+1)^n [(x+1)+1] = (x+1)^{n+1} + (x+1)^n$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a_2 = C_{n+1}^2 + C_n^2 = \frac{(n+1)n}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 \\ a_n = C_{n+1}^n + C_n^n = (n+1) + 1 = n+2 \\ a_{n-2} = C_{n+1}^{n-2} + C_n^{n-2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n+4)}{6} \end{cases}$$

Theo giả thiết bài toán, ta có:

$$n(n+2) - (n^2 - 7n) = \frac{n(n-1)(n+4)}{6} - n(n+2) \Leftrightarrow \begin{cases} n=0 & (L) \\ n=-7 & (L) \\ n=10 & (N) \end{cases}$$

Vậy $n = 10$.

Ví dụ 10: Xác định n biết rằng hệ số của x^n trong khai triển $(1+x+2x^2+\dots+nx^n)^2$ bằng $6n$.

Lời giải

Ta có $(1+x+2x^2+\dots+nx^n)^2 = (1+x+2x^2+\dots+nx^n) \cdot (1+x+2x^2+\dots+nx^n)$

Hệ số của x^n là: $1 \cdot n + 1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + \dots + (n-1) \cdot 1 + n \cdot 1$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot n + 1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + \dots + (n-1) \cdot [n - (n-1)] + n \cdot 1 \\ &= 2n + n[1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] - [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2] \\ &= 2n + n \left[\frac{1+(n-1)}{2} \cdot (n-1) \right] - \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2 \right] = \frac{n^3 + 11n}{6}. \end{aligned}$$

Theo giả thiết, ta có $\frac{n^3 + 11n}{6} = 6n \Rightarrow n = 5$

Ví dụ 11: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{n+1}^{n-1} + C_{n+1}^n = 171$. Tìm hệ số lớn nhất của biểu thức $P(x) = (1+x)(1+2x)^n$ sau khi khai triển và rút gọn.

Lời giải

$$\text{Ta có } C_{n+1}^{n-1} + C_{n+1}^n = 171 \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{2! \cdot (n-1)!} + \frac{(n+1)!}{n!} = 171$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = 171 \Leftrightarrow n^2 + 3n - 340 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 17 \\ n = -20(L) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } P(x) = (1+x)(1+2x)^{17} = (1+x) \sum_{k=0}^{17} C_{17}^k 2^k x^k = \sum_{k=0}^{17} C_{17}^k 2^k x^k + \sum_{k=0}^{17} C_{17}^k 2^k x^{k+1}.$$

Suy ra hệ số của x^k trong khai triển là $C_{17}^k 2^k + C_{17}^{k-1} 2^{k-1}$.

$$\text{Hệ số của } x^k \text{ là lớn nhất khi } \begin{cases} C_{17}^k 2^k + C_{17}^{k-1} 2^{k-1} \geq C_{17}^{k+1} 2^{k+1} + C_{17}^k 2^k \\ C_{17}^k 2^k + C_{17}^{k-1} 2^{k-1} \geq C_{17}^{k-1} 2^{k-1} + C_{17}^{k-2} 2^{k-2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_{17}^{k-1} 2^{k-1} \geq C_{17}^{k+1} 2^{k+1} \\ C_{17}^k 2^k \geq C_{17}^{k-2} 2^{k-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!(18-k)!} \geq \frac{2^2}{(k+1)!(16-k)!} \\ \frac{2^2}{k!(17-k)!} \geq \frac{1}{(k-2)!(19-k)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{(18-k)(17-k)} \geq \frac{4}{k(k+1)} \\ \frac{4}{(k-1)k} \geq \frac{1}{(18-k)(19-k)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k^2 - 141k + 1224 \leq 0 \\ 3k^2 - 147k + 1368 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow k = 12$$

Vậy hệ số lớn nhất cần tìm là $C_{17}^{12} 2^{12} + C_{17}^{11} 2^{11} = 50692096$.

Ví dụ 12: Khai triển $(1+x+x^2+\dots+x^{10})^{11}$ được viết thành $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{110}x^{110}$.

Tính tổng $S = C_{11}^0 a_0 - C_{11}^1 a_1 + C_{11}^2 a_2 - C_{11}^3 a_3 + \dots + C_{11}^{10} a_{10} - C_{11}^{11} a_{11}$.

Lời giải

Xét $x \neq 1$, từ khai triển nhân hai vế cho $(x-1)^{11}$, ta được

$$(x^{11} - 1)^{11} = (x-1)^{11} \cdot [a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{110}x^{110}].$$

$$\bullet \text{ Vế trái } = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k (-1)^{11-k} x^{11k} \Rightarrow \text{Hệ số của } x^{11} \text{ bằng } C_{11}^1 = 11.$$

$$\bullet \text{ Vế phải } = \left(\sum_{k=0}^{11} C_{11}^k x^{11-k} (-1)^k \right) \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{110}x^{110})$$

$$\Rightarrow \text{Hệ số của } x^{11} \text{ bằng } C_{11}^0 a_0 - C_{11}^1 a_1 + C_{11}^2 a_2 - C_{11}^3 a_3 + \dots + C_{11}^{10} a_{10} - C_{11}^{11} a_{11}.$$

$$\text{Vậy } S = C_{11}^0 a_0 - C_{11}^1 a_1 + C_{11}^2 a_2 - C_{11}^3 a_3 + \dots + C_{11}^{10} a_{10} - C_{11}^{11} a_{11} = 11.$$

Ví dụ 13: Tính tổng

$$C_{2017}^1 - 2^2 C_{2017}^2 + 3 \cdot 2^2 C_{2017}^3 - 4 \cdot 2^3 C_{2017}^4 + \dots - 2016 \cdot 2^{2015} C_{2017}^{2016} + 2017 \cdot 2^{2016} C_{2017}^{2017}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } (1-x)^{2017} = \sum_{k=0}^{2017} C_{2017}^k (-1)^k \cdot x^k \Rightarrow [(1-x)^{2017}]' = \sum_{k=0}^{2017} [C_{2017}^k \cdot (-1)^k \cdot x^k]'$$

$$\Leftrightarrow 2017 \cdot (1-x)^{2016} = C_{2017}^1 - 2xC_{2017}^2 + 3x^2C_{2017}^3 - 4 \cdot 2^3 C_{2017}^4 + \dots - 2016 \cdot 2^{2015} C_{2017}^{2016} + 2017 \cdot 2^{2016} C_{2017}^{2017}$$

Cho $x = 2$ ta được:

$$C_{2017}^1 - 2^2 C_{2017}^2 + 3 \cdot 2^2 C_{2017}^3 - 4 \cdot 2^3 C_{2017}^4 + \dots - 2016 \cdot 2^{2015} C_{2017}^{2016} + 2017 \cdot 2^{2016} C_{2017}^{2017} = 2017.$$

Ví dụ 14: Tính tổng $T = C_{2017}^1 + C_{2017}^3 + C_{2017}^5 + \dots + C_{2017}^{2017}$

Lời giải

Xét hai khai triển:

$$\bullet \quad 2^{2017} = (1+1)^{2017} = C_{2017}^0 + C_{2017}^1 + C_{2017}^2 + C_{2017}^3 + \dots + C_{2017}^{2017} \quad (1)$$

$$\bullet \quad 0 = (1-1)^{2017} = C_{2017}^0 - C_{2017}^1 + C_{2017}^2 - C_{2017}^3 + \dots - C_{2017}^{2017} \quad (2)$$

Lấy (1) - (2) theo vế ta được: $2^{2017} = 2(C_{2017}^1 + C_{2017}^3 + C_{2017}^5 + \dots + C_{2017}^{2017}) \Rightarrow T = 2^{2016}.$

Ví dụ 15: Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ và thỏa mãn $\frac{1}{C_2^2} + \frac{1}{C_3^2} + \frac{1}{C_4^2} + \dots + \frac{1}{C_n^2} = \frac{9}{5}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{C_n^5 + C_{n+2}^3}{(n-4)!}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{1}{C_2^2} + \frac{1}{C_3^2} + \frac{1}{C_4^2} + \dots + \frac{1}{C_n^2} = \frac{9}{5} \Leftrightarrow \frac{0!2!}{2!} + \frac{1!2!}{3!} + \frac{2!2!}{4!} + \dots + \frac{(n-2)!2!}{n!} = \frac{9}{5}$$

$$\Leftrightarrow 2! \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right) = \frac{9}{5} \Leftrightarrow 2! \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{9}{5}$$

$$\Leftrightarrow 2! \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{9}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow n = 10 \Rightarrow P = \frac{C_n^5 + C_{n+2}^3}{(n-4)!} = \frac{C_{10}^5 + C_{12}^3}{6!} = \frac{59}{90}$$

Ví dụ 16: Tính tổng $S = C_{2018}^{1009} + C_{2018}^{1010} + C_{2018}^{1011} + \dots + C_{2018}^{2018}$ (trong tổng đó, các số hạng có dạng C_{2018}^k với k nguyên dương nhận giá trị liên tục từ 1009 đến 2018)

Lời giải

Áp dụng tính chất $C_n^k = C_n^{n-k}$ ta có

$$C_{2018}^0 = C_{2018}^{2018}$$

$$C_{2018}^1 = C_{2018}^{2017}$$

$$C_{2018}^2 = C_{2018}^{2016}$$

.....

$$C_{2018}^{1008} = C_{2018}^{1010}$$

$$C_{2018}^{1009} = C_{2018}^{1009}$$

$$\Rightarrow C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + C_{2018}^2 + \dots + C_{2018}^{1009} = C_{2018}^{1009} + C_{2018}^{2010} + \dots + C_{2018}^{2018}.$$

$$\Rightarrow 2S = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + C_{2018}^2 + \dots + C_{2018}^{2018} + C_{2018}^{1009}.$$

$$\text{Mặt khác } C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + C_{2018}^2 + \dots + C_{2018}^{2018} = (1+1)^{2018} = 2^{2018}.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{2^{2018} + C_{2018}^{1009}}{2} = 2^{2017} + \frac{C_{2018}^{1009}}{2}.$$

Ví dụ 17: Biết rằng trong khai triển nhị thức Niu-ton của đa thức $P(x) = (2 + x + 2x^2 + x^3)^n$ thì hệ số của x^5 là 1001. Tổng các hệ số trong khai triển của $P(x)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P(x) &= (2 + x + 2x^2 + x^3)^n = (2 + x)^n (1 + x^2)^n \\ &= \left(\sum_{k=0}^n C_n^k 2^{n-k} x^k \right) \left(\sum_{l=0}^n C_n^l x^{2l} \right) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n (C_n^k C_n^l 2^{n-k}) x^{k+2l}. \end{aligned}$$

Hệ số của x^5 ứng với $k + 2l$ thỏa mãn $k + 2l = 5 \Rightarrow (k; l) = \{(5; 0), (3; 1), (1; 2)\}$

- Trường hợp 1. Với $n \geq 5$ khi đó $(k; l) = \{(5; 0), (3; 1), (1; 2)\}$.

$$\Rightarrow \text{Hệ số của } x^5 \text{ là } C_n^5 C_n^0 2^{n-5} + C_n^3 C_n^1 2^{n-3} + C_n^1 C_n^2 2^{n-1} = 1001.$$

Vì vế trái lẻ mà vế phải luôn chẵn nếu $n > 5$ do đó chỉ có thể chọn $n = 5$.

Thử lại vào phương trình ta thấy $n = 5$ thỏa mãn điều kiện.

- Trường hợp 2. Với $3 \leq n < 5$ khi đó $(k; l) = \{(3; 1), (1; 2)\}$.

$$\Rightarrow \text{Hệ số của } x^5 \text{ là } C_n^3 C_n^1 2^{n-3} + C_n^1 C_n^2 2^{n-1} = 1001.$$

Vì vế trái lẻ mà vế phải luôn chẵn nếu $n > 3$ do đó chỉ có thể chọn $n = 3$.

Thử lại vào phương trình ta thấy $n = 3$ không thỏa mãn điều kiện.

- Trường hợp 3. Với $n = 2$ khi đó $(k; l) = (1; 2)$.

$$\Rightarrow \text{Hệ số của } x^5 \text{ là } C_1^2 C_2^2 2 = 1001 : \text{ vô lý.}$$

Do đó chỉ có $n = 5$ thỏa mãn $\Rightarrow$ tổng các hệ số trong khai triển là $\xrightarrow{\text{cho } x=1} 6^5 = 7776$.

Ví dụ 18: Cho khai triển $P(x) = (1 + x)(2 + x) \dots (1 + 2017x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2017}x^{2017}$.
Kí hiệu $P'(x)$ và $P''(x)$ lần lượt là đạo hàm cấp 1 và đạo hàm cấp 2 của đa thức $P(x)$.
Tìm hệ số a_2 ?

Lời giải

$$\text{Ta có } P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + 2017a_{2017}x^{2016}.$$

$$\text{Tiếp tục đạo hàm lần nữa, ta có } P''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \dots + 2017 \cdot 2016a_{2017}x^{2015}.$$

$$\text{Cho } x = 0, \text{ ta được } P''(0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{P''(0)}{2}$$

$$\text{Chú ý } P'(x) = P(x) \cdot \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x} + \dots + \frac{2017}{1+2017x} \right)$$

$$P'' = P(x) \cdot \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x} + \dots + \frac{2017}{1+2017x} \right)^2 + P(x) \left(-\frac{1^2}{(1+x)^2} - \frac{2^2}{(2+x)^2} - \dots - \frac{2017^2}{(1+2017x)^2} \right).$$

Ví dụ 19: Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển

$$(1 - 2x + 2015x^{2016} - 2016x^{2017} + 2017x^{2018})^{60}.$$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} f(x) = (1 - 2x + 2015x^{2016} - 2016x^{2017} + 2017x^{2018})^{60} \\ g(x) = 2015x^{2016} - 2016x^{2017} + 2017x^{2018} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } f(x) &= [1 + (-2x + g(x))]^{60} = \sum_{k=0}^{60} C_{60}^k [-2x + g(x)]^k \\ &= \sum_{k=0}^{60} C_{60}^k \sum_{i=0}^k C_k^i (-2x)^i [g(x)]^{k-i} \quad (0 \leq i \leq k \leq 60). \end{aligned}$$

Vì bậc của đa thức $g(x)$ là 2018 $\Rightarrow$ số hạng chứa x^3 ứng với $\begin{cases} k-i=0 \\ i=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ i=3 \end{cases}$.

Vậy hệ số cần tìm là $C_{60}^3 \cdot C_3^3 \cdot (-2)^3 = -8 \cdot C_{60}^3$.

Ví dụ 20: Biểu thức $\frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^9}{9!} \cdot \frac{(1-x)}{1!} + \frac{x^8}{8!} \cdot \frac{(1-x)^2}{2!} + \dots + \frac{(1-x)^{10}}{10!}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{(1-x)^{10-k}}{(10-k)!} &= \frac{1}{10!} \cdot \frac{10!}{k!(10-k)!} \cdot x^k \cdot (1-x)^{10-k} = \frac{1}{10!} \cdot C_{10}^k \cdot x^k \cdot (1-x)^{10-k} \quad (0 \leq k \leq 10). \\ \Rightarrow \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^9}{9!} \cdot \frac{(1-x)}{1!} + \frac{x^8}{8!} \cdot \frac{(1-x)^2}{2!} + \dots + \frac{(1-x)^{10}}{10!} \\ &= \frac{1}{10!} \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot x^k \cdot (1-x)^{10-k} = \frac{1}{10!} (x+1-x)^{10} = \frac{1}{10!}. \end{aligned}$$

Ví dụ 21: Giá trị của $A = \frac{1}{1!2018!} + \frac{1}{2!2017!} + \frac{1}{3!2016!} + \dots + \frac{1}{1008!1011!} + \frac{1}{1009!1010!}$ bằng?

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1}{k!(n-k)!} &= \frac{C_n^k}{n!}. \text{ Do đó} \\ A &= \frac{C_{2019}^1}{2019!} + \frac{C_{2019}^2}{2019!} + \frac{C_{2019}^3}{2019!} + \dots + \frac{C_{2019}^{1009}}{2019!} = \frac{C_{2019}^1 + C_{2019}^2 + \dots + C_{2019}^{1009}}{2019!} \\ &= \frac{C_{2019}^0 + C_{2019}^1 + C_{2019}^2 + \dots + C_{2019}^{1009} - 1}{2019!} = \frac{2^{2018} - 1}{2019!}. \end{aligned}$$

Ví dụ 22: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2^{2n+1} &= (1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} \\ 0 &= (1-1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 - C_{2n+1}^1 + \dots - C_{2n+1}^{2n+1} \\ \text{Suy ra } 2(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}) &= 2^{2n+1} \Rightarrow C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n} \\ \text{Do đó } 2^{2n} &= 1024 \Leftrightarrow 2^{2n} = 2^{10} \Leftrightarrow n = 5. \end{aligned}$$

Ví dụ 23: Có bao nhiêu số dương n sao cho

$$S = 2 + (C_1^0 + C_2^0 + \dots + C_n^0) + (C_1^1 + C_2^1 + \dots + C_n^1) + \dots + (C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1}) + C_n^n$$

là một số có 1000 chữ số?

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} S &= 2 + (C_1^0 + C_2^0 + \dots + C_n^0) + (C_1^1 + C_2^1 + \dots + C_n^1) + \dots + (C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1}) + C_n^n \\ &= 2 + (C_1^0 + C_1^1) + (C_2^0 + C_2^1 + C_2^2) + \dots + (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1}) + (C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n) \\ &= 2 + 2 + (1+1)^2 + \dots + (1+1)^{n-1} + (1+1)^n \\ &= 2 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2 + 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \Rightarrow S = 2^{n+1}. \end{aligned}$$

$$S \text{ là một số có 1000 chữ số} \Rightarrow 10^{999} \leq S < 10^{1000} \Leftrightarrow 10^{999} \leq 2^{n+1} < 10^{1000}$$

$$\Leftrightarrow 999 \log_2 10 - 1 \leq n < 1000 \log_2 10 - 1$$

Do $n \in \mathbb{N}$ nên $n \in \{3318; 3319; 3320\}$.

Vậy có 3 số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 24: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 + \dots + C_{2n+1}^{2n} = 1024$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (x+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 \cdot x^{2n+1} + C_{2n+1}^1 \cdot x^{2n} + \dots + C_{2n+1}^{2n} \cdot x + C_{2n+1}^{2n+1} \quad (1)$$

$$\text{Thay } x=1 \text{ vào (1): } 2^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1} \quad (2)$$

$$\text{Thay } x=-1 \text{ vào (1): } 0 = -C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 - \dots - C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1} \quad (3)$$

$$\text{Phương trình (2) trừ (3) theo vế: } 2^{2n+1} = 2(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n})$$

$$\text{Theo đề bài ta có } 2^{2n+1} = 2 \cdot 1024 \Leftrightarrow n = 5$$

$$\text{Số hạng tổng quát của khai triển } (2-3x)^{10} \text{ là } T_{k+1} = C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot (-3x)^k = C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot (-3)^k \cdot x^k$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } k = 5. \text{ Vậy hệ số cần tìm là } C_{10}^5 \cdot 2^5 \cdot (-3)^5 = -1959552.$$

Ví dụ 25: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + \dots + (3n+2)C_n^n = 1600$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + \dots + (3n+2)C_n^n = 3(C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n) + 2(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n).$$

$$\text{Mặt khác } C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

$$\text{Cách 1: Ta có } kC_n^k = k \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = nC_{n-1}^{k-1}.$$

$$\text{Khi đó } C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n = nC_{n-1}^0 + nC_{n-1}^1 + \dots + nC_{n-1}^{n-1} = n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1}) = n2^{n-1}.$$

Cách 2: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + \dots + C_n^nx^n$ (1).

Đạo hàm hai vế của (1) ta được $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2C_n^3 + \dots + nx^{n-1}C_n^n$

Khi đó với $x=1$, ta có $n2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$

Do đó $2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + \dots + (3n+2)C_n^n = 3n.2^{n-1} + 2.2^n = (3n+4).2^{n-1}$.

Theo giả thiết ta có $(3n+4).2^{n-1} = 1600 \Leftrightarrow n=7$.

Ví dụ 26: Với $x \neq -1$ ta có khai triển sau:

$$\left(\frac{x^2+2x+2}{x+1}\right)^{2018} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2018}x^{2018} + \frac{b_1}{x+1} + \frac{b_2}{(x+1)^2} + \frac{b_3}{(x+1)^3} + \dots + \frac{b_{2018}}{(x+1)^{2018}}$$

Tính tổng $S = \sum_{k=1}^{2018} b_k$?

Lời giải

Đặt $f(x) = \left(\frac{x^2+2x+2}{x+1}\right)^{2018}$, ta có $f(0) = a_0 + b_1 + \dots + b_{2018} = 2^{2018}$.

Suy ra $a_0 + S = 2^{2018}$ (1)

$$\begin{aligned} \text{Lại có } f(x) &= \left(x+1 + \frac{1}{x+1}\right)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k (x+1)^{2k-2018} \\ &= \sum_{k=0}^{1008} \frac{C_{2018}^k}{(x+1)^{2018-2k}} + \sum_{k=1009}^{2018} C_{2018}^k (x+1)^{2k-2018}. \end{aligned}$$

Suy ra

- $b_1 = b_3 = \dots = b_{2017} = 0 \Rightarrow S = b_2 + b_4 + \dots + b_{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + \dots + C_{2018}^{1007} + C_{2018}^{1008}$
- $a_0 = C_{2018}^{1009} + C_{2018}^{1010} + \dots + C_{2018}^{2017} + C_{2018}^{2018} = C_{2018}^{1009} + S$ (vì $C_n^k = C_n^{n-k}$). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $S = 2^{2017} - \frac{1}{2}C_{2018}^{1009}$.

Ví dụ 27: Với n là số tự nhiên lớn hơn 2, đặt $S_n = \frac{1}{C_3^3} + \frac{1}{C_4^3} + \frac{1}{C_5^3} + \dots + \frac{1}{C_n^3}$. Tính $\lim S_n$

Lời giải

$$\text{Ta có } C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{(n-3)!(n-2)(n-1)n}{(n-3)! \times 6} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \Rightarrow \frac{1}{C_n^3} = \frac{6}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\text{Vậy ta có } S_n = \frac{6}{1.2.3} + \frac{6}{2.3.4} + \frac{6}{3.4.5} + \dots + \frac{6}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\text{Nhận xét } \frac{2}{1.2.3} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}; \frac{2}{2.3.4} = \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}; \dots; \frac{2}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{(n-2)(n-1)} - \frac{1}{(n-1)n}$$

$$\Rightarrow S_n = 3 \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) = 3 \left(\frac{n-2}{2n} \right) = \frac{3n-6}{2n}$$

$$\text{Vậy } \lim S_n = \lim \left(\frac{3n-6}{2n} \right) = \lim \left(\frac{3-\frac{6}{n}}{2} \right) = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Kết hợp giả thiết có } \frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{100}-n-3}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow n = 98.$$

Ví dụ 28: Tính tổng $S = \frac{1}{2018} (C_{2018}^1)^2 + \frac{2}{2017} (C_{2018}^2)^2 + \dots + \frac{2017}{2} (C_{2018}^{2017})^2 + \frac{2018}{1} (C_{2018}^{2018})^2$

Lời giải

$$\text{Tính tổng } S = \frac{1}{2018} (C_{2018}^1)^2 + \frac{2}{2017} (C_{2018}^2)^2 + \dots + \frac{2017}{2} (C_{2018}^{2017})^2 + \frac{2018}{1} (C_{2018}^{2018})^2$$

$$\text{Ta có } C_n^k = \frac{n-k+1}{k} \cdot C_n^{k-1} \text{ với } \forall k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq k \text{ nên:}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2018} C_{2018}^1 \cdot \frac{2018}{1} C_{2018}^0 + \frac{2}{2017} C_{2018}^2 \cdot \frac{2017}{2} C_{2018}^1 + \dots + \frac{2018}{1} C_{2018}^{2018} \cdot \frac{1}{2018} C_{2018}^{2017} \\ &= C_{2018}^1 \cdot C_{2018}^0 + C_{2018}^2 \cdot C_{2018}^1 + \dots + C_{2018}^{2017} \cdot C_{2018}^{2016} + C_{2018}^{2018} \cdot C_{2018}^{2017}. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } C_{2018}^k = C_{2018}^{2018-k} \text{ suy ra } S = C_{2018}^1 \cdot C_{2018}^{2018} + C_{2018}^2 \cdot C_{2018}^{2017} + \dots + C_{2018}^{2017} \cdot C_{2018}^2 + C_{2018}^{2018} \cdot C_{2018}^1.$$

$$\text{Mặt khác ta có } (1+x)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k x^k \Rightarrow (1+x)^{2018} \cdot (1+x)^{2018}$$

$$= \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k x^k \cdot \sum_{l=0}^{2018} C_{2018}^l x^l = \sum_{k,l=0}^{2018} C_{2018}^k \cdot C_{2018}^l \cdot x^{k+l} \quad (1).$$

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^{2019} trong khai triển của (1) là

$$S = C_{2018}^1 \cdot C_{2018}^{2018} + C_{2018}^2 \cdot C_{2018}^{2017} + \dots + C_{2018}^{2017} \cdot C_{2018}^2 + C_{2018}^{2018} \cdot C_{2018}^1.$$

$$\text{Lại do } (1+x)^{2018} \cdot (1+x)^{2018} = (1+x)^{4036}; (1+x)^{4036} = \sum_{n=0}^{4036} C_{4036}^n x^n \quad (2)$$

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^{2019} trong khai triển của (2) là C_{4036}^{2019} .

$$\text{Vậy } S = C_{2018}^1 \cdot C_{2018}^{2018} + C_{2018}^2 \cdot C_{2018}^{2017} + \dots + C_{2018}^{2017} \cdot C_{2018}^2 + C_{2018}^{2018} \cdot C_{2018}^1 = C_{4036}^{2019}$$

$$= \frac{4036!}{2019! \cdot (4036-2019)!} = \frac{4036-2018}{2019} \cdot \frac{4036!}{2018! \cdot (4036-2018)!} = \frac{2018}{2019} C_{4036}^{2018}.$$

Ví dụ 29: Cho số nguyên dương n , tính tổng $S = \frac{-C_n^1}{2.3} + \frac{2C_n^2}{3.4} - \frac{3C_n^3}{4.5} + \dots + \frac{(-1)^n n C_n^n}{(n+1)(n+2)}.$

Lời giải

Với $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n, n > 0$ ta có:

$$\frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{n!}{(k+1)k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1}.$$

Áp dụng ta có:

$$\frac{k \cdot C_n^k}{(k+1)(k+2)} = \frac{C_n^k}{k+1} \left(1 - \frac{2}{k+2}\right) = \frac{C_n^k}{k+1} - 2 \frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} - 2 \frac{C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\text{Suy ra } S = \frac{-C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 - C_{n+1}^4 + \dots + (-1)^n C_{n+1}^{n+1}}{n+1} - \frac{2[-C_{n+2}^3 + C_{n+2}^4 + \dots + (-1)^n C_{n+2}^{n+2}]}{(n+1)(n+2)}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \bullet \quad & -C_{n+1}^2 + \dots + (-1)^n C_{n+1}^{n+1} = (-C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 - C_{n+1}^2 + \dots + (-1)^n C_{n+1}^{n+1}) + C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1 \\ & = -(1-1)^{n+1} + 1 - (n+1) = -n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad & -C_{n+2}^3 + C_{n+2}^4 + \dots + (-1)^n C_{n+2}^{n+2} \\ & = (C_{n+2}^0 - C_{n+2}^1 + C_{n+2}^2 - C_{n+2}^3 + C_{n+2}^4 + \dots + (-1)^n C_{n+2}^{n+2}) - (C_{n+2}^0 - C_{n+2}^1 + C_{n+2}^2) \\ & = (1-1)^{n+1} - \left(1 - (n+2) + \frac{(n+1)(n+2)}{2}\right) = -\frac{n^2+n}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{n+1}(-n) + \frac{2}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n^2+n}{2} = \frac{-n}{(n+1)(n+2)}.$$

Ví dụ 30: Tính tổng $P = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$ theo n .

Lời giải

$$\text{Ta có } (1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n} \quad (1).$$

$$(1+x)^n (1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^n C_n^l x^l\right) \text{ và } (1+x)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i x^i.$$

$$\text{Xét hệ số của } x^n \text{ trong khai triển vế trái của (1) là } \sum_{k+l=n} C_n^k \cdot C_n^l = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2.$$

$$\text{Hệ số của } x^n \text{ trong khai triển vế phải của (1) là } C_{2n}^n.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

Ví dụ 31: Cho n và k nguyên dương thỏa mãn $k \leq n$. Chứng minh rằng

$$\frac{n+1}{n+2} \left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \right) = \frac{1}{C_n^k}$$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \right) &= \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{k!(n+1-k)!}{(n+1)!} + \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+1)!} \right) \\ &= \frac{n+1}{n+2} \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} (n+1-k+k+1) = \frac{n+1}{n+2} \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} (n+2) = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{C_n^k} \end{aligned}$$

Tổng quát. $\frac{1}{C_{n+1}^1} + \frac{1}{C_{n+1}^2} + \dots + \frac{1}{C_{n+1}^{n+1}} = \frac{n+2}{2(n+1)} \left(\frac{1}{C_n^0} + \frac{1}{C_n^1} + \dots + \frac{1}{C_n^n} \right)$

Ví dụ 32: Chứng minh rằng $1 + C_n^3 + C_n^6 + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right)$

Lời giải

Ta có $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n (1)$. Xét số phức $\alpha = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ ta có

$$\alpha^3 = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^3 = 1 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

Mặt khác

- $(1 + \alpha)^n = C_n^0 + \alpha C_n^1 + \alpha^2 C_n^2 + \dots + \alpha^n C_n^n = C_n^0 + \alpha C_n^1 + \alpha^2 C_n^2 + C_n^3 + \alpha C_n^4 + \alpha^2 C_n^5 (2)$
- $(1 + \alpha^2)^n = C_n^0 + \alpha^2 C_n^1 + \alpha^4 C_n^2 + \dots + \alpha^{2n} C_n^n = C_n^0 + \alpha^2 C_n^1 + \alpha C_n^2 + C_n^3 + \alpha^2 C_n^4 + \dots (3)$

Cộng 2 vế của (1), (2), (3) ta có

$$\begin{aligned} 2^n + (1 + \alpha)^n + (1 + \alpha^2)^n &= 3(C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots) + (1 + \alpha + \alpha^2)(C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots) \\ &= 3(C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots) \end{aligned}$$

Mà $1 + \alpha = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$; $1 + \alpha^2 = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$ nên ta có điều phải chứng minh!

Ví dụ 33: Với số tự nhiên $n \geq 1$. Chứng minh rằng

$$C_n^0 \cos \alpha + C_n^1 \cos 2\alpha + C_n^2 \cos 3\alpha + \dots + C_n^n \cos(n+1)\alpha = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n+2}{2} \alpha$$

Lời giải

Xét khai triển $(x+1)^n = C_n^0 + x C_n^1 + x^2 C_n^2 + \dots + x^n C_n^n \Rightarrow x(x+1)^n = \sum_{k=0}^n x^{k+1} C_n^k$

Thay $x = \cos \alpha + i \sin \alpha$ và sử dụng công thức Moivre ta có

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n &= C_n^0 \cos \alpha + C_n^1 \cos 2\alpha + \dots + C_n^n \cos(n+1)\alpha \\ &\quad + i(C_n^0 \sin \alpha + C_n^1 \sin 2\alpha + \dots + C_n^n \sin(n+1)\alpha) \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác $(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \left(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right)^n = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)^n$

Theo công thức Moivre ta có

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha) \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)^n &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \left(\cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2} \right) \\ &= \cos \frac{n+2}{2} \alpha + i \sin \frac{n+2}{2} \alpha \end{aligned}$$

Do đó $(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n+2}{2} \alpha + i 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \sin \frac{n+2}{2} \alpha \quad (2)$

Từ (1), (2) ta có điều phải chứng minh!

Ví dụ 34: Với số tự nhiên $n \geq 1$. Tính tổng sau

$$A = C_n^1 (\cos x - \sin x) + 0C_n^2 + C_n^3 3 \sin x \cos x (\sin x - \cos x) + \dots + C_n^n n \sin x \cos x (\sin^{n-2} x - \cos^{n-2} x)$$

Lời giải

Xét hàm số $y = (1 + \cos x)^n + (1 + \sin x)^n$ thì:

$$y = (C_n^0 + C_n^1 \cos x + C_n^2 \cos^2 x + \dots + C_n^n \cos^n x) + (C_n^0 + C_n^1 \sin x + \dots + C_n^n \sin^n x)$$

$$= 2C_n^0 + C_n^1 (\sin x + \cos x) + C_n^2 (\sin^2 x + \cos^2 x) + \dots + C_n^n (\sin^n x + \cos^n x)$$

$$\Rightarrow y' = C_n^1 (\cos x - \sin x) + 0C_n^2 + C_n^3 3 \sin x \cos x (\sin x - \cos x)$$

$$+ \dots + C_n^n n \sin x \cos x (\sin^{n-2} x - \cos^{n-2} x)$$

$$\text{Do đó } A = y' = ((1 + \cos x)^n + (1 + \sin x)^n)' = n(1 + \cos x)^{n-1} \cdot (-\sin x) + n(1 + \sin x)^{n-1} \cos x$$

$$= n(\cos x(1 + \sin x)^{n-1} - \sin x(1 + \cos x)^{n-1})$$

Ví dụ 35: Với số tự nhiên m nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1991} C_{1991}^0 - \frac{1}{1991} C_{1991}^1 + \frac{1}{1991} C_{1991}^2 - \dots + \frac{(-1)^m}{1991-m} C_{1991-m}^m = \frac{1}{1991}$$

Lời giải

Với $n = 1, 2, \dots$, ta đặt $S(n) = \sum_m (-1)^m C_{n-m}^m$ trong đó tổng được lấy từ $m = 0$ cho đến hết

những số hạng khác 0. Ta có $\sum_{k=m}^n C_m^k = C_{n-1-m}^{m+1} = 1 - S(n)$

Ta có

- $S(n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-2} S(k)$, suy ra $S(n+1) = S(n) - S(n-1)$ (1)

- $S(0) = S(1) = 1$, từ đó $S(2) = 0, S(3) = -1, S(4) = -1, S(5) = 0, S(6) = 1, S(7) = 1$

Từ (1) ta có $S(m) = S(n)$ nếu $m = n \pmod{6}$. Do $\frac{n}{n-m} C_{n-m}^m = C_{n-m}^m + C_{n-m-1}^{m-1}$ nên ta được:

$$1991 \cdot \left[\frac{1}{1991} C_{1991}^0 - \frac{1}{1991} C_{1991}^1 + \frac{1}{1991} C_{1991}^2 - \dots + \frac{(-1)^m}{1991-m} C_{1991-m}^m + \dots - \frac{1}{996} C_{996}^{995} \right] = 1$$

Suy ra điều phải chứng minh.

CÁC BÀI TOÁN ĐẾM - XÁC SUẤT HAY VÀ KHÓ

Tiếp nối thành công của số trước, trong số này chúng ta sẽ cùng đi tìm hiểu các bài toán đếm – xác suất hay và khó. Bên cạnh các phương pháp tính xác suất cơ bản như trong sách giáo khoa, trong bài viết này mình sẽ giới thiệu cho các bạn một vài công cụ mạnh nữa để giải quyết các bài toán xác suất.

I. HAI BÀI TOÁN TÍNH XÁC SUẤT CÓ NHIỀU ỨNG DỤNG

1. BÀI TOÁN CHIA KẸO EULER

Bài toán chia kẹo của Euler là bài toán nổi tiếng trong Lý thuyết tổ hợp. Với những học sinh chuyên Toán cấp 3 thì đây là bài toán quen thuộc và có nhiều ứng dụng. Dưới đây là một cách tiếp cận bài toán chia kẹo của Euler cho học sinh lớp 6 & 7 để thấy rằng các bài toán đếm nói riêng và các bài toán tổ hợp nói chung luôn là những bài toán mà lời giải của nó chứa đựng sự hồn nhiên và ngây thơ. Trước hết, xin phát biểu lại bài toán chia kẹo của Euler

Bài toán chia kẹo của Euler:

Có n cái kẹo (giống nhau) chia cho k em bé, hỏi có bao nhiêu cách chia sao cho em nào cũng có kẹo.

Một cách hợp lý, ta hãy xét bài toán trong trường hợp cụ thể, đơn giản hơn để từ đó định hướng đưa ra lời giải cho bài toán tổng quát.

Bài toán 1. Có 20 cái kẹo (giống nhau) chia cho 3 em bé, hỏi có bao nhiêu cách chia sao cho

- Mỗi em có ít nhất 1 cái kẹo.
- Mỗi em có ít nhất 2 cái kẹo.
- Em thứ nhất có ít nhất 1 cái kẹo, em thứ hai có ít nhất 2 cái kẹo và em thứ ba có nhiều nhất 3 cái kẹo.

Lời giải.

a) Nhận thấy rằng, vì mỗi em có ít nhất một cái kẹo nên số kẹo của em thứ nhất nhận được ít nhất là 1 và nhiều nhất là 18 Xét các trường hợp

Trường hợp 1. Em thứ nhất nhận được 1 cái kẹo, thì số kẹo của em thứ hai có thể là $1, 2, 3, \dots, 18$ em thứ ba nhận số kẹo còn lại sau khi chia cho em thứ nhất và em thứ hai xong, nghĩa là trong trường hợp này có 18 cách chia kẹo.

Trường hợp 2. Em thứ nhất nhận được 2 cái kẹo, khi đó số kẹo của em thứ hai có thể là $1, 2, 3, \dots, 17$ em thứ ba nhận số kẹo còn lại, nghĩa là trong trường hợp này có 17 cách chia kẹo

...

Hoàn toàn tương tự cho các trường hợp còn lại, ta nhận thấy số cách chia 20 cái kẹo cho 3 em bé sao cho em nào cũng có kẹo là $18 + 17 + \dots + 2 + 1 = 171$

Phát biểu tổng quát.

Nếu $k = 1$ thì chỉ có 1 cách chia kẹo

Nếu $k \geq 2$ ta trải n chiếc kẹo thành hàng ngang, tiếp theo ta dùng $(k - 1)$ chiếc thước đặt vào $(n - 1)$ khe giữa các viên kẹo để nó chia thành k phần. Như vậy có tất cả C_{n-1}^{k-1} cách.

Cả 2 trường hợp ta đều có C_{n-1}^{k-1} cách chia kẹo.

Trên đây là lời giải của bài toán chia kẹo Euler – bài toán đếm nổi tiếng với nhiều ứng dụng trong các bài toán đếm khác. Bài này tác giả sẽ trình bày bài toán gốc cơ bản và một số bài toán đếm dạng ứng dụng mà nếu đếm theo cách thông thường sẽ rất khó khăn, nhưng khi hiểu theo các đếm của bài toán Euler thì bài toán lại trở thành đơn giản.

Sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu một ứng dụng rất lớn trong việc đếm số nghiệm nguyên của phương trình.

Bài toán 1. Phương trình $\sum_{i=1}^k x_i = n (n \geq k)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

Coi x_i là phần kẹo của em nhỏ thứ i trong bài toán chia kẹo thì số nghiệm của phương trình chính là số cách chia n chiếc kẹo cho k em nhỏ. Vậy phương trình có C_{n-1}^{k-1} nghiệm nguyên dương.

Bài toán 2. Phương trình $\sum_{i=1}^k x_i = n (n \geq k)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Ta có $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \Leftrightarrow (x_1 + 1) + (x_2 + 1) + \dots + (x_k + 1) = n + k$

Đặt $x_i' = x_i + 1$ thì x_i' là các số nguyên dương.

Áp dụng bài toán gốc ta có tất cả C_{n+k-1}^{k-1} nghiệm nguyên không âm của phương trình

Bài toán 3. Bất phương trình $\sum_{i=1}^k x_i < n (n \geq k + 1)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

Ta luôn có $\sum_{i=1}^k x_i < n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k x_i + x' = n (x' \geq 1)$. Vậy có tất cả C_{n-1}^k nghiệm nguyên dương của phương trình.

Bài toán 4. Bất phương trình $\sum_{i=1}^k x_i \leq n (n \geq k)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

Ta có $\sum_{i=1}^k x_i \leq n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k x_i + x' = n (x' \geq 0) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k x_i + x'' = n + 1 (x'' = x' + 1)$

Áp dụng bài toán Euler ta có C_n^k nghiệm

Bài toán 5. Phương trình $\sum_{i=1}^k x_i = n$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn đồng thời 2

điều kiện $x_i \geq d_i (d_i \geq 0), n \geq \sum_{i=1}^k d_i (k \geq 1)$?

$$\text{Đặt } x_i' = x_i - d_i + 1 \Rightarrow \begin{cases} x_i' \geq 1 \\ \sum_{i=1}^k x_i' = n + k - \sum_{i=1}^k d_i \end{cases}$$

Đặt $D = \sum_{i=1}^k d_i$ thì theo bài toán chia kẹo, phương trình có $C_{n+k-D-1}^{k-1}$ nghiệm.

2. BÀI TOÁN ĐẾM HÌNH HỌC.

Bài toán 1. Cho đa giác có n đỉnh. Xét tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác

- Có đúng 1 cạnh chung với đa giác $n(n-4)$
- Có đúng 2 cạnh chung với đa giác n
- Không có cạnh chung với đa giác $C_n^3 - n - n(n-4)$

Bài toán 2. Cho đa giác đều có $2n$ đỉnh.

Số tam giác vuông có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác là $n(2n-2)$

Bài toán 3. Cho đa giác đều có n đỉnh. Số tam giác tù được tạo thành từ 3 trong n đỉnh

$$\text{của đa giác là } \begin{cases} n = 2k \rightarrow n \cdot C_{\frac{n-2}{2}}^2 \\ n = 2k + 1 \rightarrow n \cdot C_{\frac{n-1}{2}}^2 \end{cases}$$

Bài toán 4. Cho đa giác đều có n đỉnh. Số tam giác nhọn được tạo thành từ 3 trong n đỉnh của đa giác $= C_n^3 - (\text{số tam giác tù} + \text{số tam giác vuông})$.

Bài toán 5. Cho đa giác đều có n đỉnh. Công thức tổng quát tính số tam giác tù:

- Nếu n chẵn $\rightarrow n \cdot C_{\frac{n-2}{2}}^2$
- Nếu n lẻ $\rightarrow n \cdot C_{\frac{n-1}{2}}^2$

Bài toán 6. Cho đa giác có n đỉnh. Xét tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của đa giác

- Có đúng 1 cạnh chung với đa giác $n \times [C_{n-4}^2 - (n-5)] = A$
- Có đúng 2 cạnh chung với đa giác $n(n-5) + \frac{n(n-5)}{2} = B$
- Có đúng 3 cạnh chung với đa giác $n = C$
- Không có cạnh chung với đa giác $C_n^4 - (A + B + C)$

Và ta có thể chứng minh được $C_n^4 - (A + B + C) = \frac{n}{4} C_{n-5}^3$

Bài toán 7. Cho đa giác đều có $2n$ đỉnh.

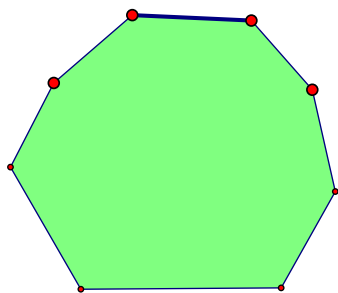
Số tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của đa giác và tạo thành HÌNH CHỮ NHẬT là C_n^2 .

Bài toán 8. Cho đa giác đều có $4n$ đỉnh.

Số tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của đa giác và tạo thành HÌNH VUÔNG là n

Chứng minh.

Tứ giác có đúng 1 cạnh chung với đa giác



Chọn 1 cạnh trong n cạnh của đa giác nên có n cách.

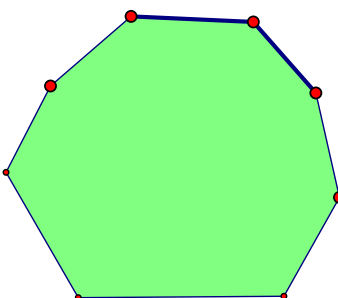
Chọn 2 đỉnh còn lại trong $n-4$ đỉnh (tham khảo hình vẽ trên) nên có C_{n-4}^2 nhưng 2 đỉnh này không được liên tiếp nên trừ cho $n-5$ (vì 2 đỉnh liên tiếp sẽ tạo nên 1 cạnh mà có $n-4$ đỉnh còn lại nên có $n-5$ cạnh).

Vậy trong trường hợp này có $n \times [C_{n-4}^2 - (n-5)]$ tứ giác.

Tứ giác có đúng 2 cạnh chung với đa giác

Trường hợp 1: Tứ giác có hai cạnh kề trùng với cạnh của đa giác

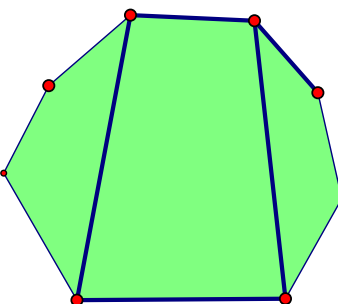
Vì hai cạnh kề cắt nhau tại 1 đỉnh, mà đa giác có n đỉnh nên có n cách chọn hai cạnh kề trùng với cạnh của đa giác.



Chọn 1 đỉnh còn lại trong $n-5$ đỉnh (bỏ 3 đỉnh tạo nên hai cạnh kề và 2 đỉnh hai bên, tham khảo hình vẽ). Do đó trường hợp này có $n(n-5)$ tứ giác.

Trường hợp 2: Tứ giác có hai cạnh đối thuộc cạnh của đa giác

Chọn 1 cạnh trong n cạnh của đa giác nên có n cách.



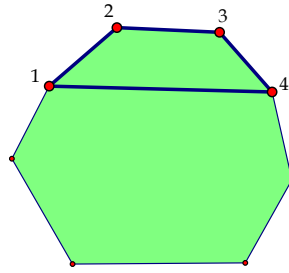
Trong $n-4$ đỉnh còn lại (bỏ 2 đỉnh tạo nên cạnh đã chọn ở trên và 2 đỉnh liên kề cạnh đã chọn, tham khảo hình vẽ) sẽ tạo nên $n-5$ cạnh. Chọn 1 cạnh trong $n-5$ cạnh đó nên có $n-5$ cách. Tuy nhiên trong trường hợp này số tứ giác mình đếm đến 2 lần.

Do đó trường hợp này có $\frac{n(n-5)}{2}$ tứ giác. Vậy có $n(n-5) + \frac{n(n-5)}{2}$ tứ giác thỏa mãn.

Tứ giác có đúng 3 cạnh chung với đa giác

Đánh số thứ tự các đỉnh của đa giác, ta có n bộ 4 số:

$(1;2;3;4), (2;3;4;5), \dots, (n-3;n-2;n-1;n), (n-2;n-1;n;1), (n-1;n;1;2), (n;1;2;3).$



Vậy trường hợp này có n tứ giác thỏa mãn.

II. CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP.

Câu 1: Cho tập $A = \{1;2;3;\dots;2018\}$ và các số $a, b, c \in A$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có dạng abc sao cho $a < b < c$ và $a + b + c = 2016$.

Lời giải

Xét phương trình $a + b + c = 2016$.

Ta biết phương trình trên có C_{2015}^2 nghiệm nguyên dương.

- TH1: Xét các cặp nghiệm 3 số trùng nhau: $a = b = c = 672$.
- TH2: Xét các cặp nghiệm có $a = b, c \neq a \Rightarrow 2a + c = 2016$. Suy ra c là số chẵn thỏa $0 < c < 2016$ nên có 1007 giá trị c . Do đó có 1007 cặp, mà có cặp trừ cặp $(672, 672, 672)$ (loại). Do đó có 1006 cặp.
- Tương tự ta suy ra có 1006.3 cặp nghiệm có 2 trong 3 số trùng nhau.

Do số tập hợp gồm ba phần tử có tổng bằng 2016 là $\frac{C_{2015}^2 - 3 \cdot 1006 - 1}{3!} = 337681$.

(Chia cho $3!$ là do $a < b < c$ nên không tính hoán vị của bộ ba (a, b, c))

Câu 2: Cho tập $A = \{1;2;3;\dots;100\}$. Chọn ngẫu nhiên 3 số từ tập A . Tính xác suất để 3 số được chọn ra không có 2 số nào là 2 số nguyên liên tiếp.

Lời giải

Số cách chọn ngẫu nhiên 3 số là C_{10}^3

Ta tìm số cách chọn bộ 3 số $(a; b; c)$ thỏa mãn, theo giả thiết ta có $1 \leq a < b-1 < c-2 \leq 8$

Đặt $b' = b-1; c' = c-2 \Rightarrow 1 \leq a < b' < c' \leq 8$.

Mỗi cách chọn ra bộ 3 $(a; b'; c')$ từ tập $\{1;2;\dots;8\}$ tương ứng với một bộ ba số $(a; b; c)$ thỏa

mãn. Vậy có tất cả C_8^3 cách chọn thỏa mãn. Xác suất cần tìm là $\frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$

Câu 3: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm 3 chữ số được lập thành từ tập $X = \{1;2;\dots;8\}$. Rút ngẫu nhiên từ tập X một số tự nhiên. Tính xác suất để số rút được số mà trong số đó

chữ số đứng sau luôn lớn hơn hoặc bằng chữ số đứng trước?

Lời giải

Số các số thuộc tập S là $8.9.9 = 648$

Số rút ra có dạng $\overline{abc}$ với $1 \leq a \leq b \leq c \leq 8$. Đặt $a' = a - 1; c' = c + 1 \Rightarrow 0 \leq a' < b < c' \leq 9$.

Mỗi cách chọn ra bộ 3 $(a; b; c')$ từ tập $\{0; 1; 2; \dots; 9\}$ tương ứng với một bộ ba số $(a; b; c)$ thỏa mãn. Vậy có tất cả C_{10}^3 cách chọn thỏa mãn.

Vậy xác suất cần tính là $\frac{5}{27}$

Câu 4: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số. Tính xác suất để số rút được số mà trong số đó chữ số đứng sau luôn lớn hơn hoặc bằng chữ số đứng trước và ba chữ số đứng giữa đôi một khác nhau?

Lời giải

Số các số thuộc tập S là 9.10^4

Số chọn ra có dạng $\overline{abcde}$ với $1 \leq a < b < c < d \leq e \leq 9$

Đặt $a' = a - 1; e' = e + 1 \Rightarrow 0 \leq a' < b < c < d < e' \leq 10$

Đến đây thực hiện tương tự câu trên ta tìm được C_{11}^5 số.

Vậy xác suất cần tính là $\frac{77}{1500}$.

Câu 5: Từ 12 học sinh gồm 5 học sinh giỏi, 4 học sinh khá, 3 học sinh trung bình, giáo viên muốn thành lập 4 nhóm làm 4 bài tập lớn khác nhau, mỗi nhóm 3 học sinh. Tính xác suất để nhóm nào cũng có học sinh giỏi và học sinh khá.

Lời giải

Ta có số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3$.

Đánh số 4 nhóm là A, B, C, D

- Bước 1: xếp vào mỗi nhóm một học sinh khá có 4! cách.
- Bước 2: xếp 5 học sinh giỏi vào 4 nhóm thì có 1 nhóm có 2 học sinh giỏi. Chọn nhóm có 2 học sinh giỏi có 4 cách, chọn 2 học sinh giỏi có C_5^2 cách, xếp 3 học sinh giỏi còn lại có 3! cách.
- Bước 3: Xếp 3 học sinh trung bình có 3! cách.

Đáp số: $\frac{4! \cdot 4 \cdot C_5^2 \cdot 3! \cdot 3!}{C_{12}^3 C_9^3 C_6^3 C_3^3} = \frac{36}{385}$.

Câu 6: Trò chơi quay bánh xe số trong chương trình truyền hình “Hãy chọn giá đúng” của kênh VTV3 Đài truyền hình Việt Nam, bánh xe số có 20 nấc điểm: 5, 10, 15, ..., 100 với vạch chia đều nhau và giả sử rằng khả năng chuyển từ nấc điểm đã có tới các nấc

điểm còn lại là như nhau. Trong mỗi lượt chơi có 2 người tham gia, mỗi người được quyền chọn quay 1 hoặc 2 lần, và điểm số của người chơi được tính như sau:

- Nếu người chơi chọn quay 1 lần thì điểm của người chơi là điểm quay được.
- Nếu người chơi chọn quay 2 lần và tổng điểm quay được không lớn hơn 100 thì điểm của người chơi là tổng điểm quay được.
- Nếu người chơi chọn quay 2 lần và tổng điểm quay được lớn hơn 100 thì điểm của người chơi là tổng điểm quay được trừ đi 100.

Luật chơi quy định, trong mỗi lượt chơi người nào có điểm số cao hơn sẽ thắng cuộc, hòa nhau sẽ chơi lại lượt khác. An và Bình cùng tham gia một lượt chơi, An chơi trước và có điểm số là 75. Tính xác suất để Bình thắng cuộc ngay ở lượt chơi này.

Lời giải

Cách 1: Ta có $n(\Omega) = \frac{100-5}{5} + 1 = 20$.

Để Bình thắng ta có ba trường hợp.

- Trường hợp 1. Bình quay một lần ra điểm số lớn hơn 75, ta có 5 khả năng thuộc tập hợp $\{80; 85; 90; 95; 100\}$. Do đó xác suất là $P_1 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.
- Trường hợp 2. Bình quay lần đầu ra điểm số là $a \leq 75$, ta có 15 khả năng.

Do đó xác suất là $P_2 = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

Khi đó để thắng Bình cần phải có tổng hai lần quay lớn hơn 75, ta có 5 khả năng thuộc tập hợp $\{80-a; 85-a; 90-a; 95-a; 100-a\}$. Do đó xác suất là $P_3 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

Vậy xác suất để Bình thắng ngay trong lượt là $P = P_1 + P_2 \cdot P_3 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$.

Cách 2:

- TH1: Bình quay một lần và thắng luôn.

Vì An quay ở vị trí 75 nên Bình chỉ có thể quay vào 5 trong số 20 vị trí để có thể thắng.

Do đó $P(A_1) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

- TH2: Bình quay hai lần mới thắng.

Nghĩa là lần một Bình quay được kết quả nhỏ hơn hoặc bằng 75 và quay tiếp để tổng hai lần quay lớn hơn 75 đồng thời nhỏ hơn hoặc bằng 100.

Giả sử lần 1 Bình quay được a điểm, lần 2 quay được b điểm.

Cần có: $\begin{cases} a \leq 75 \\ a+b \in \{80, 85, 90, 95, 100\} \end{cases}$

Khi đó: Chọn a có 15 cách, chọn b có 5 cách.

Suy ra chọn cặp $\{a, b\}$ có $15 \cdot 5 = 75$ cách.

Không gian mẫu cho TH2 có 20.20 cách. Do đó $P(A_2) = \frac{75}{20.20} = \frac{3}{16}$.

Kết luận: $P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$.

Câu 7: Một số tự nhiên được gọi là số thú vị nếu số này có 8 chữ số đôi một khác nhau được lập thành tự tập $\{1;2;\dots;8\}$ và số đó chia hết cho 1111. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên thú vị như thế?

Lời giải

Số cần tìm có dạng $i = \overline{a_1a_2a_3a_4b_1b_2b_3b_4}$. Ta có tổng các chữ số của số cần tìm là tổng các chữ số từ 1 đến 8 bằng 36 chia hết cho 9 nên số cần tìm chia hết cho 9. Do 9 và 1111 có ước chung lớn nhất là 1 nên theo giả thiết thì i chia hết cho 9999.

Đặt $x = \overline{a_1a_2a_3a_4}$, $y = \overline{b_1b_2b_3b_4}$. Ta có $i = x.10^4 + y = 9999x + x + y$ chia hết cho 9999 từ đó suy ra $(x+y)$ chia hết cho 9999.

Mặt khác $0 < x+y < 2.9999 \Rightarrow x+y = 9999$. Do đó $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = a_4 + b_4 = 9$

Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6,7,8 có 4 cặp $(1;8), (2;7), (3;6), (4;5)$ nên có 8 cách chọn a_1 ; 6 cách chọn a_2 ; 4 cách chọn a_3 và 2 cách chọn a_4 tức chọn a_k có luôn b_k .

Vậy số các số thú vị là $8.6.4.2 = 384$ số

Câu 8: Cho tập $A = \{1;2;3;\dots;18\}$. Chọn ngẫu nhiên 5 số từ tập A. Có bao nhiêu cách chọn ra 5 số trong tập A sao cho hiệu của 2 số bất kì trong 5 số đó có trị tuyệt đối không nhỏ hơn 2?

Lời giải

Các số chọn ra luôn sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Giả sử dãy 5 số được chọn ra thỏa mãn là $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Theo giả thiết ta có:

$$1 \leq a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 2 < a_4 - 3 < a_5 - 4 \leq 14$$

Đặt $a_2' = a_2 - 1, a_3' = a_3 - 2, a_4' = a_4 - 3, a_5' = a_5 - 4$

Đến đây thực hiện tương tự câu 2, ta có số cách chọn là C_{14}^5 cách chọn.

Câu 9: Có 8 bạn cùng ngồi xung quanh một cái bàn tròn, mỗi bạn cầm một đồng xu như nhau. Tất cả 8 bạn cùng tung đồng xu của mình, bạn có đồng xu ngửa thì đứng, bạn có đồng xu sấp thì ngồi. Xác suất để không có hai bạn liên kề cùng đứng là

Lời giải

Gọi A là biến cố không có hai người liên kề cùng đứng.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 2^8 = 256$.

Rõ ràng nếu nhiều hơn 4 đồng xu ngửa thì biến cố A không xảy ra.

Để biến cố A xảy ra có các trường hợp sau:

- TH1: Có nhiều nhất 1 đồng xu ngửa. Kết quả của trường hợp này là $1 + 8 = 9$.

- TH2: Có 2 đồng xu ngựa.

Hai đồng xu ngựa kề nhau: có 8 khả năng.

Suy ra số kết quả của trường hợp này là $C_8^2 - 8 = 20$.

- TH3: Có 3 đồng xu ngựa.

Cả 3 đồng xu ngựa kề nhau: có 8 kết quả.

Trong 3 đồng xu ngựa, có đúng một cặp kề nhau: có $8 \cdot 4 = 32$ kết quả.

Suy ra số kết quả của trường hợp này là $C_8^3 - 8 - 32 = 16$.

- TH4: Có 4 đồng xu ngựa.

Trường hợp này có 2 kết quả thỏa mãn biến cố A xảy ra.

Như vậy $n(A) = 9 + 20 + 16 + 2 = 47$.

Xác suất để không có hai bạn liên kề cùng đứng là $P = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{47}{256}$.

Câu 10: Cho đa giác đều 20 cạnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu hình chữ nhật những không phải là đỉnh của hình vuông có các đỉnh là đỉnh của đa giác đã cho?

Lời giải

Số hình vuông có các đỉnh của đa giác đều là $\frac{20}{4} = 5$

Đa giác đều này có tất cả 10 đường chéo qua tâm, một hình chữ nhật tạo bởi hai đường chéo qua tâm nên có tất cả C_{10}^2 hình chữ nhật

Vậy số hình chữ nhật không phải là hình vuông có các đỉnh là đỉnh của đa giác đều đã cho là $45 - 5 = 40$

Chú ý: Số đa giác đều có m cạnh có đỉnh là các đỉnh của đa giác đều n cạnh có thể có là $\frac{n}{m}$

Câu 11: Từ các chữ số thuộc tập hợp $S = \{1; 2; 3; \dots; 8; 9\}$ có bao nhiêu số có chín chữ số khác nhau sao cho chữ số 1 đứng trước chữ số 2, chữ số 3 đứng trước chữ số 4 và chữ số 5 đứng trước chữ số 6?

Lời giải

Chọn 2 vị trí để xếp 2 chữ số 1, 2 (số 1 đứng trước 2): có C_9^2 cách.

Chọn 2 vị trí để xếp 2 chữ số 3, 4 (số 3 đứng trước 4): có C_7^2 cách.

Chọn 2 vị trí để xếp 2 chữ số 5, 6 (số 5 đứng trước 6): có C_5^2 cách.

3 chữ số còn lại có $3!$ cách.

Vậy có $3! \cdot C_9^2 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2 = 45360$ số.

Câu: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D', tại đỉnh A có một con sâu, mỗi lần di chuyển nó bò theo cạnh của hình hộp chữ nhật và đi đến đỉnh kề với đỉnh nó đang đứng. Tính xác suất sao cho 9 lần di chuyển nó dừng tại đỉnh C'

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử tọa độ đỉnh $A(0;0;0)$ và $C'(1;1;1)$.

Ta thấy: mỗi lần sâu di chuyển là cộng thêm 1 tại 1 trong 3 vị trí hoành độ, tung độ và cao độ từ vị trí sâu đang đứng. Do đó số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 3^9 = 19683$. Sau 9 lần di chuyển sau đứng tại vị trí $(1;1;1)$ khi và chỉ khi sâu di chuyển số lần tại các tọa độ thành phần hoành độ ; tung độ, cao độ là : $(3;3;3)$; các hoán vị của bộ $(1;3;5)$; các hoán vị của bộ $(7;1;1)$.

Do đó số trường hợp thuận lợi của biến cố A : sâu ở C' sau 9 bước di chuyển là

$$n(A) = C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 + 6 \cdot C_9^5 \cdot C_4^3 \cdot C_1^1 + 3 \cdot C_9^7 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = 4920$$

Câu 12: Cho đa giác có 12 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đó. Xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có số tam giác được tạo từ 3 đỉnh trong 12 đỉnh: C_{12}^3 .

- Số tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác và 2 cạnh là cạnh của đa giác: cứ 3 đỉnh liên tiếp cho 1 tam giác thỏa mãn đề bài, nên có 12 tam giác. (hoặc hiểu theo cách khác: tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh liên tiếp của đa giác tức là có 2 cạnh là 2 cạnh liên tiếp của đa giác, 2 cạnh này cắt nhau tại 1 đỉnh, mà đa giác này có 12 đỉnh nên có 12 tam giác thỏa trường hợp này)
- Số tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của đa giác và 1 cạnh là cạnh của đa giác: Trước tiên ta chọn 1 cạnh trong 12 cạnh của đa giác nên có 12 cách chọn; tiếp theo chọn 1 đỉnh còn lại trong 8 đỉnh (trừ 2 đỉnh tạo nên cạnh đã chọn và 2 đỉnh liên kề với cạnh đã chọn). Do đó trong trường hợp này có $8 \cdot 12$ tam giác.

$$\text{Ta có } \begin{cases} n(\Omega) = C_{12}^3 \\ n(A) = C_{12}^3 - 12 - 8 \cdot 12 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{C_{12}^3 - 12 - 8 \cdot 12}{C_{12}^3}$$

Câu 13: Cho đa giác (H) có n đỉnh ($n \in \mathbb{N}, n > 4$). Biết số các tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của (H) và không có cạnh nào là cạnh của (H) gấp 5 lần số các tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của (H) và có đúng 1 cạnh là cạnh của (H). Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $n \in [4;12]$. B. $n \in [13;21]$. C. $n \in [22;30]$. D. $n \in [31;38]$.

Lời giải

Số tam giác tạo thành có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác là C_n^3

Số tam giác tạo thành có đúng 2 cạnh là cạnh của đa giác là n

Số tam giác tạo thành có đúng 1 cạnh là cạnh của đa giác là $n(n-4)$ (điều kiện $n \in \mathbb{N}$ và $n > 4$)

Suy ra số tam giác tạo thành không có cạnh nào là cạnh của đa giác là $C_n^3 - n - n(n-4)$.

Theo giả thiết, ta có $C_n^3 - n - n(n-4) = 5.n(n-4) \Leftrightarrow \begin{cases} n = 35(t/m) \\ n = 4(L) \end{cases}$

Chọn ý D.

Câu 14: Cho đa giác đều gồm 100 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên ra 3 đỉnh, xác suất để 3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác tù là bao nhiêu?

Lời giải

Đánh số các đỉnh là $A_1, A_2, \dots, A_{100}$.

Xét đường chéo A_1A_{51} của đa giác là đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều chia đường tròn ra làm hai phần, mỗi phần có 49 điểm: từ A_2 đến A_{50} và A_{52} đến A_{100} .

Khi đó, mỗi tam giác có dạng $A_1A_iA_j$ là tam giác tù nếu A_i và A_j cùng nằm trong nửa đường tròn

- Chọn nửa đường tròn: có 2 cách chọn.
- Chọn hai điểm A_i, A_j là hai điểm tùy ý được lấy từ 49 điểm $A_2, A_3, \dots, A_{50}$ có $C_{49}^2 = 1176$ cách chọn.

Giả sử A_i nằm giữa A_1 và A_j thì tam giác $A_1A_iA_j$ tù tại đỉnh A_i . Mà $\Delta A_jA_iA_1 \equiv \Delta A_1A_iA_j$ nên kết quả bị lặp hai lần. Có 100 cách chọn đỉnh.

Vậy số tam giác tù là $\frac{2.1176.100}{2} = 117600$.

Chú ý: Cho đa giác đều có n đỉnh. Công thức tổng quát tính số tam giác tù:

- Nếu n chẵn thì số tam giác tù là $n.C_{\frac{n-2}{2}}^2$
- Nếu n lẻ thì số tam giác tù $n.C_{\frac{n-1}{2}}^2$

Áp dụng công thức nhanh ta có $n.C_{\frac{n-2}{2}}^2 = 100.C_{49}^2 = 117600$.

Câu 15: Cho đa giác lồi (H) có 22 cạnh. Gọi X là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của (H). Chọn ngẫu nhiên 2 tam giác trong X , xác suất để chọn được 1 tam giác có đúng 1 cạnh là cạnh của đa giác (H) và 1 tam giác không có cạnh nào là cạnh của (H) bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} |X| = C_{22}^3 = 1540 \\ n(\Omega) = C_{1540}^2 = 1185030 \\ n(A) = C_{22 \times 18}^1 \times C_{1540 - (22 \times 18 + 22)}^1 = 444312 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{748}{1995}$$

Câu 16: Cho một đa giác đều gồm $2n$ đỉnh ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$). Chọn ngẫu nhiên ba đỉnh

trong số $2n$ đỉnh của đa giác, xác suất ba đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông là $\frac{1}{5}$. Tìm n .

Lời giải

Ta có không gian mẫu $n(\Omega) = C_{2n}^3$.

Để ba đỉnh được chọn tạo thành tam giác vuông khi và chỉ khi có hai đỉnh trong ba đỉnh là hai đầu mút của một đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác và đỉnh còn lại là một trong số $(2n - 2)$ đỉnh còn lại của đa giác. Đa giác có $2n$ đỉnh nên có $\frac{2n}{2} = n$ đường kính.

- Số cách chọn 1 đường kính là $C_n^1 = n$.
- Số cách chọn 1 đỉnh còn lại trong $(2n - 2)$ đỉnh là $C_{2n-2}^1 = 2n - 2$.

Suy ra $n(A) = n(2n - 2)$.

Theo đề bài ta có phương trình $\frac{n(2n-2)}{C_{2n}^3} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow n = 8$.

Câu 17: Cho đa giác đều có 15 đỉnh. Gọi M là tập tất cả các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đã cho. Chọn ngẫu nhiên một tam giác thuộc tập M , xác suất để tam giác được chọn là một tam giác cân nhưng không phải là tam giác đều là bao nhiêu?

Lời giải

- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đều. Xét một đỉnh A bất kỳ của đa giác: Có 7 cặp đỉnh của đa giác đối xứng với nhau qua đường thẳng OA , hay có 7 tam giác cân tại đỉnh A . Như vậy, với mỗi một đỉnh của đa giác có 7 tam giác nhận nó làm đỉnh tam giác cân.
- Số tam giác đều có 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác là $\frac{15}{3} = 5$ tam giác.
- Tuy nhiên, trong các tam giác cân đã xác định ở trên có cả tam giác đều, do mọi tam giác đều thì đều cân tại 3 đỉnh nên tam giác đều được đếm 3 lần.

Suy ra $n(A) = 7 \cdot 15 - 3 \cdot 5 = 90$.

Ta có $\begin{cases} n(\Omega) = C_{15}^3 = 455 \\ n(A) = 7 \cdot 15 - 3 \cdot 5 = 90 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{90}{455} = \frac{18}{91}$

Câu 18: Cho đa giác đều có 20 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đều, xác suất để 3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác vuông không cân là bao nhiêu?

Lời giải

- Số tam giác vuông là 10.18.
- Số tam giác vuông cân: Cứ mỗi cách chọn 1 đường kính là có 2 tam giác cân (2 điểm tạo nên tam giác cân là giao điểm của đường thẳng qua tâm vuông góc với đường kính đã chọn với đường tròn). Do đó có 10.2 tam giác vuông cân.

Câu 19: Lấy ngẫu nhiên một số tự nhiên có 5 chữ số. Xác suất để chọn được số tự nhiên có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ mà $a_1 \leq a_2 + 1 \leq a_3 - 3 < a_4 \leq a_5 + 2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Vì } a_2 + 1 \leq a_3 - 3 \Rightarrow \begin{cases} a_2 \leq 5 \\ a_3 \geq 4 \end{cases}.$$

Số có dạng $\overline{1042a_5}$ có 10 cách chọn a_5 .

Số có dạng $\overline{1043a_5}$ có 9 cách chọn a_5 .

.....

Số có dạng $\overline{1049a_5}$ có 3 cách chọn a_5 .

- Vậy những số có dạng $\overline{104a_4a_5}$ có $3 + 4 + \dots + 10 = 52$ số.

Số có dạng $\overline{1053a_5}$ có 9 cách chọn a_5 .

Số có dạng $\overline{1054a_5}$ có 8 cách chọn a_5 .

.....

Số có dạng $\overline{1059a_5}$ có 3 cách chọn a_5 .

- Vậy những số có dạng $\overline{105a_4a_5}$ có $52 - 10 = 42$ số.
- Vậy những số có dạng $\overline{106a_4a_5}$ có $42 - 9 = 33$ số.
- Vậy những số có dạng $\overline{107a_4a_5}$ có $33 - 8 = 25$ số.
- Vậy những số có dạng $\overline{108a_4a_5}$ có $25 - 7 = 18$ số.
- Vậy những số có dạng $\overline{109a_4a_5}$ có $18 - 6 = 12$ số.

Kết luận: Những số có dạng $\overline{10a_3a_4a_5}$ có $12 + 18 + 25 + 33 + 42 + 52 = 182$ số.

Những số có dạng $\overline{11a_3a_4a_5}$ ($a_3 \geq 5$) có $12 + 18 + 25 + 33 + 42 = 130$ số.

Những số có dạng $\overline{12a_3a_4a_5}$ ($a_3 \geq 6$) có $12 + 18 + 25 + 33 = 88$ số.

Những số có dạng $\overline{13a_3a_4a_5}$ ($a_3 \geq 7$) có $12 + 18 + 25 = 55$ số.

Những số có dạng $\overline{14a_3a_4a_5}$ ($a_3 \geq 8$) có $12 + 18 = 30$ số.

Những số có dạng $\overline{15a_3a_4a_5}$ ($a_3 \geq 9$) có 12 số.

Kết luận: Những số có dạng $\overline{1a_2a_3a_4a_5}$ có $12 + 30 + 55 + 88 + 130 + 182 = 497$ số.

Từ đó ta lập luận như sau:

Những số có dạng $\overline{2a_2a_3a_4a_5}$ ($a_2 \geq 1$) có $12 + 30 + 55 + 88 + 130 = 315$ số.

Những số có dạng $\overline{3a_2a_3a_4a_5}$ ($a_2 \geq 2$) có $12 + 30 + 55 + 88 = 185$ số.

Những số có dạng $\overline{4a_2a_3a_4a_5}$ ($a_2 \geq 3$) có $12 + 30 + 55 = 97$ số.

Những số có dạng $\overline{5a_2a_3a_4a_5}$ ($a_2 \geq 4$) có $12 + 30 = 42$ số.

Những số có dạng $\overline{6a_2a_3a_4a_5}$ ($a_2 \geq 5$) có 12 số.

Vậy những số thỏa yêu cầu bài toán là $12 + 42 + 97 + 185 + 315 + 497 = 1148$.

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{1148}{90000}$.

Câu 20: Cho một đa giác đều n đỉnh (n lẻ, $n \geq 3$). Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đều đó. Gọi P là xác suất sao cho 3 đỉnh đó tạo thành một tam giác tù. Biết $P = \frac{45}{62}$. Số các ước nguyên dương của n là bao nhiêu?

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên ra 3 đỉnh có $n(\Omega) = C_n^3$ cách.

Giả sử chọn được một tam giác tù ABC với góc A nhọn, B tù và C nhọn.

Chọn một đỉnh bất kì lấy làm đỉnh A có n cách. Kẻ đường kính qua đỉnh vừa chọn, chia đường tròn thành hai phần (trái và phải chẳng hạn).

Để tạo thành tam giác tù thì hai đỉnh còn lại được chọn sẽ hoặc cùng nằm bên trái hoặc cùng nằm bên phải.

- Hai đỉnh còn lại cùng nằm bên trái có $C_{\frac{n-1}{2}}^2$ cách.
- Hai đỉnh còn lại cùng nằm bên phải có $C_{\frac{n-1}{2}}^2$ cách.

Vậy có thể có tất cả $n \left(C_{\frac{n-1}{2}}^2 + C_{\frac{n-1}{2}}^2 \right)$ tam giác tù, tuy nhiên ứng với mỗi tam giác vai trò góc nhọn của A và C như nhau nên số tam giác được tính lặp 2 lần. Do đó số tam giác tù tạo

thành là $\frac{n \left(C_{\frac{n-1}{2}}^2 + C_{\frac{n-1}{2}}^2 \right)}{2} = n C_{\frac{n-1}{2}}^2$.

Mà xác suất $P = \frac{n C_{\frac{n-1}{2}}^2}{C_n^3} = \frac{45}{62}$ (1). Do n lẻ nên đặt $n = 2k + 1$ ($k \geq 1$) $\Rightarrow k = \frac{n-1}{2}$.

$$\Leftrightarrow 62(2k+1)C_k^2 = 45C_{2k+1}^3$$

$$\Leftrightarrow 62(2k+1) \frac{k!}{2!(k-2)!} = 45 \frac{(2k+1)!}{3!(2k-2)!}$$

$$\Leftrightarrow 31(k-1) = 15(2k-1) \Leftrightarrow k = 16$$

Vậy $n = 2k + 1 = 33$. Do đó số các ước nguyên dương của n là 4.

Câu 21: Biển số xe máy tỉnh K gồm hai dòng

- Dòng thứ nhất là $68XY$, trong đó X là một trong 24 chữ cái, Y là một trong 10 chữ số.
- Dòng thứ hai là $abc.de$, trong đó a, b, c, d, e là các chữ số.

Biển số xe được cho là “đẹp” khi dòng thứ hai có tổng các số là số có chữ số tận cùng bằng 8 và có đúng 4 chữ số giống nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 2 biển số trong các biển số “đẹp” để đem bán đấu giá?

Lời giải

Chọn X từ 24 chữ cái và chọn Y từ 10 chữ số, ta có $24 \cdot 10 = 240$ (cách chọn).

Chọn 4 chữ số giống nhau từ các chữ số ta có 10 cách chọn;

Mỗi bộ gồm 4 chữ số giống nhau, ta có một cách chọn duy nhất 4 chữ số còn lại để tổng các số là số có chữ số tận cùng bằng 8, chẳng hạn: 4 chữ số 0, chữ số còn lại sẽ là 8; 4 chữ số 1, chữ số còn lại sẽ là 4;...; 4 chữ số 9, chữ số còn lại sẽ là 2).

Sắp xếp 5 chữ số vừa chọn có 5 cách xếp.

Do đó, có tất cả $10 \cdot 5 = 50$ (cách chọn số ở dòng thứ hai).

Suy ra có tất cả $240 \cdot 50 = 12000$ (biển số đẹp).

Chọn 2 biển số trong các biển số "đẹp" ta có $C_{12000}^2 = 71994000$ (cách).

Câu 22: Có 8 bì thư được đánh số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 và 8 tem thư cũng được đánh số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Dán 8 tem thư lên 8 bì thư (mỗi bì thư chỉ dán 1 tem thư). Hỏi có thể có bao nhiêu cách dán tem thư lên bì thư sao cho có ít nhất một bì thư được dán tem thư có số trùng với số của bì thư đó.

Lời giải

Ta xét bài toán tổng quát n tem thư được dán vào n bì thư sao cho có ít nhất một bì thư được dán vào tem thư có số trùng với số của bì thư đó.

Đánh số các tem thư là $T_1, T_2, \dots, T_n$ và các bì thư là $B_1, B_2, \dots, B_n$. Bài toán được giải quyết bằng nguyên lý phần bù: Lấy hoán vị n phần tử trừ đi trường hợp xếp mà không có tem thư nào được dán cùng số với bì thư.

Để giải quyết bài toán không có tem thư nào được dán cùng số với bì thư. Ta xây dựng dãy số $f(n)$ như sau:

Công việc dán n tem thư vào n bì thư sao cho không có bì thư nào được dán vào tem thư có số trùng với số của bì thư đó. Công việc này gồm có hai bước sau:

- Bước 1: Dán tem T_1 lên một bì thư B_j khác B_1 , có $n-1$ cách.
- Bước 2: Dán tem thư T_j vào bì thư nào đó, có hai trường hợp xảy ra như sau:

+ TH1: tem thư T_j được dán vào bì thư B_1 . Khi đó còn lại $n-2$ tem (khác T_1 và T_j) là $T_2, \dots, T_{j-1}, T_{j+1}, \dots, T_n$ phải dán vào $n-2$ bì thư (khác B_1 và B_j). Quy trình được lập lại giống như trên. Nên TH này có số cách dán bằng $f(n-2)$.

+ TH2: tem thư T_j không được dán vào bì thư B_1 .

Khi đó các tem là $T_2, \dots, T_{j-1}, T_j, T_{j+1}, \dots, T_n$ sẽ được đem dán vào các bì $B_1, B_2, \dots, B_{j-1}, B_{j+1}, \dots, B_n$ (mà tem thư T_j không được dán vào bì thư B_1). Thì T_j lúc này bản chất giống T_1 , ta đánh số lại $T_j \equiv T_1$. Nghĩa là $n-1$ tem $T_2, \dots, T_{j-1}, T_1, T_{j+1}, \dots, T_n$ sẽ được đem dán vào $n-1$ bì $B_1, B_2, \dots, B_{j-1}, B_{j+1}, \dots, B_n$ với việc đánh số giống nhau. Công việc này lại được lập lại như từ ban đầu.

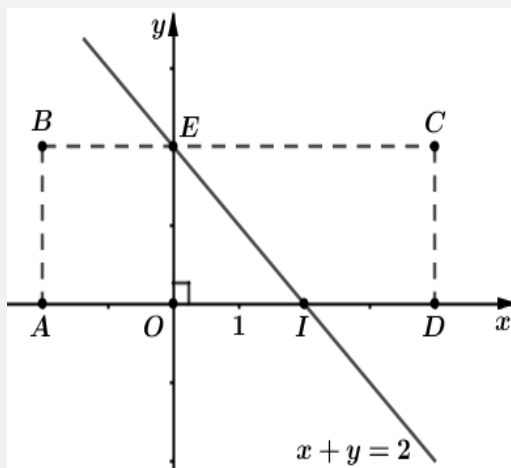
Nên TH này có số cách dán bằng $f(n-1)$.

Ta xét dãy $u_n = f(n)$ như sau:
$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 1 \\ u_n = (n-1)(u_{n-1} + u_{n-2}) \end{cases}$$

Như vậy kết quả của bài toán: n tem thư được dán vào n bì thư sao cho có ít nhất một bì thư được dán vào tem thư có số trùng với số của bì thư đó sẽ là $P_n - u_n$.

Áp dụng với $n = 8$, ta được kết quả là $8! - 14833 = 25487$.

Câu 23: Trên mặt phẳng Oxy, ta xét một hình chữ nhật ABCD với các điểm $A(-2;0)$, $B(-2;2)$, $C(4;2)$, $D(4;0)$ (hình vẽ). Một con châu chấu nhảy trong hình chữ nhật đó tính cả trên cạnh hình chữ nhật sao cho chân nó luôn đáp xuống mặt phẳng tại các điểm có tọa độ nguyên (tức là điểm có cả hoành độ và tung độ đều nguyên). Tính xác suất để nó đáp xuống các điểm $M(x;y)$ mà $x+y < 2$.



Lời giải

Số các điểm có tọa độ nguyên thuộc hình chữ nhật là $7 \cdot 3 = 21$ điểm vì

$$\begin{cases} x \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \\ y \in \{0; 1; 2\} \end{cases}$$

Để con châu chấu đáp xuống các điểm $M(x,y)$ có $x+y < 2$ thì con châu chấu sẽ nhảy trong khu vực hình thang BEIA. Để $M(x,y)$ có tọa độ nguyên thì $\begin{cases} x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\} \\ y \in \{0; 1; 2\} \end{cases}$.

- Nếu $x \in \{-2; -1\}$ thì $y \in \{0; 1; 2\} \Rightarrow$ có $2 \cdot 3 = 6$ điểm.

- Nếu $x = 0$ thì $y \in \{0; 1\} \Rightarrow$ có 2 điểm.
- Nếu $x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ có 1 điểm.

Suy ra có tất cả $6 + 2 + 1 = 9$ điểm thỏa mãn.

Vậy xác suất cần tính $P = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$.

Câu 24: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, chọn ngẫu nhiên một điểm mà tọa độ là số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn hay bằng 4. Nếu các điểm đều có cùng xác suất được chọn như nhau, vậy thì xác suất để chọn được một điểm mà khoảng cách đến gốc tọa độ nhỏ hơn hoặc bằng 2 là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi tọa độ điểm $M(x; y)$ thỏa $x, y \in \mathbb{Z}$ và $\begin{cases} |x| \leq 4 \\ |y| \leq 4 \end{cases}$ nên $\begin{cases} x \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \\ y \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \end{cases}$.

Suy ra $n(\Omega) = 9 \cdot 9 = 81$.

Gọi điểm $M(x; y)$ thỏa $x, y \in \mathbb{Z}$ và theo giả thiết ta có:

$$OM \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{Z} \\ x = 0; \pm 1; \pm 2 \\ y^2 \leq 4 - x^2 \end{cases}$$

- Nếu $x = 0 \longrightarrow y = 0; \pm 1; \pm 2$. Do đó có $1 \times 5 = 5$ cách chọn.
- Nếu $x = \pm 1 \longrightarrow y = 0; \pm 1$. Do đó có $2 \times 3 = 6$ cách chọn
- Nếu $x = \pm 2 \longrightarrow y = 0$. Do đó có $2 \times 1 = 2$ cách chọn.

Suy ra $n(A) = 5 + 6 + 2 = 13$. Vậy xác suất cần tính $P = \frac{13}{81}$.

Câu 25: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ở góc phần tư thứ nhất ta lấy 2 điểm phân biệt; cứ thế ở các góc phần tư thứ hai, thứ ba, thứ tư ta lần lượt lấy 3, 4, 5 điểm phân biệt (các điểm không nằm trên các trục tọa độ). Trong 14 điểm đó ta lấy 2 điểm bất kỳ. Tính xác suất để đoạn thẳng nối hai điểm đó cắt hai trục tọa độ.

Lời giải

Không gian mẫu là số cách chọn 2 điểm bất kỳ trong 14 điểm đã cho.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{14}^2 = 91$.

Gọi A là biến cố "Đoạn thẳng nối 2 điểm được chọn cắt hai trục tọa độ". Để xảy ra biến cố A thì hai đầu đoạn thẳng đó phải ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba hoặc phần tư thứ hai và thứ tư.

- Hai đầu đoạn thẳng ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba, có $C_2^1 C_4^1$ cách.

- Hai đầu đoạn thẳng ở góc phần tư thứ hai và thứ tư, có $C_3^1 C_5^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_2^1 C_4^1 + C_3^1 C_5^1 = 23$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{23}{91}$.

Câu 26: Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2 . Trên d_1 có 6 điểm phân biệt, trên d_2 có n điểm phân biệt ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}$). Tìm n , biết rằng có 96 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho.

Lời giải

Cứ 3 điểm không thẳng hàng là tạo thành 1 tam giác.

Do đó số tam giác được tạo thành từ $n+6$ điểm gồm: 6 điểm (thẳng hàng) thuộc d_1 và n điểm (thẳng hàng) thuộc d_2 là $C_{n+6}^3 - C_6^3 - C_n^3$.

Theo giả thiết, ta có $C_{n+6}^3 - C_6^3 - C_n^3 = 96 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4(N) \\ n = -8(L) \end{cases}$

Bài tập tương tự. Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy 1, 2, 3 và n điểm phân biệt ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}$) khác A, B, C, D. Tìm n , biết số tam giác lấy từ $n+6$ điểm đã cho là 439. Đáp số $n = 10$.

Hướng dẫn. Theo giả thiết, ta có $C_{n+6}^3 - C_3^3 - C_n^3 = 439$.

Câu 27: Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số dạng $\overline{abc}$ thỏa a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác cân (kể cả tam giác đều)?

Lời giải

Gọi độ dài cạnh bên và cạnh đáy của tam giác cân là $x, y \Rightarrow \begin{cases} 0 < y < 2x \\ 0 < y \leq 9 \\ 0 < x \leq 9 \end{cases}$

- TH1: $\begin{cases} 0 < y \leq 9 \\ 5 \leq x \leq 9 \end{cases}$ suy ra có $9 \cdot 5 = 45$ cặp số.
- TH2: $\begin{cases} x = i \\ 1 \leq y \leq 2i - 1 \end{cases}$ với $1 \leq x \leq 4$. Với mỗi giá trị của i , có $2i - 1$ số.

Do đó, trường hợp này có: $(2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + (2 \cdot 4 - 1) = 16$ cặp số

Suy ra có 61 cặp số $(x; y)$. Với mỗi cặp $(x; y)$ ta viết số có 3 chữ số trong đó có 2 chữ số x , một chữ số y .

Trong 61 cặp có:

+ 9 cặp $x = y$, viết được 9 số.

+ 52 cặp $x = y$, mỗi cặp viết được 3 số nên có $3 \cdot 52 = 156$ số.

Vậy tất cả có 165 số.

Câu 28: Gọi A là tập các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc A . Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 45.

Lời giải

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abcdefgh}$ ta có a có 9 cách chọn

Các chữ số còn lại có A_9^7

Nên số phần tử của không gian mẫu: $9 \cdot A_9^7 = 1632960$

Gọi $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Ta có: $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 : 9$

Ta có các bộ số mà tổng chia hết cho 9: $B \setminus \{0, 9\}, B \setminus \{1, 8\}, B \setminus \{2, 7\}, B \setminus \{3, 6\}, B \setminus \{4, 5\}$.

Xét $B \setminus \{0, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abcdefgh}$

Chọn h có một cách.

Chọn 7 chữ số còn lại xếp vào 7 vị trí có: $7!$.

Nên trường hợp này có $7!$ cách.

Xét $B \setminus \{1, 8\} = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

- Tận cùng là chữ số 0: có $7!$ cách
- Tận cùng là chữ số 5: a có 6 cách; các chữ số còn lại có: $6!$ cách

Suy ra: $7! + 6 \cdot 6! = 9360$

Các trường hợp $B \setminus \{2, 7\}, B \setminus \{3, 6\}$ tương tự như $B \setminus \{1, 8\}$.

Xét $B \setminus \{4, 5\} = \{0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abcdefgh}$

Chọn h có một cách.

Chọn 7 chữ số còn lại xếp vào 7 vị trí có: $7!$.

Nên trường hợp này có $7!$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là: $7! \cdot 2 + 9360 \cdot 3 = 38160$.

Vậy xác suất của biến cố A là: $\frac{38160}{1632960} = \frac{53}{2268}$

Câu 29: Cho tập $X = \{6; 7; 8; 9\}$, gọi E là tập các số tự nhiên khác nhau có 2018 chữ số lập từ các số của tập X . Chọn ngẫu nhiên một số trong tập E , tính xác suất để chọn được số chia hết cho 3.

Lời giải

Gọi A_n, B_n lần lượt là tập các số chia hết, không chia hết cho 3.

Với mỗi số thuộc A_n có hai cách thêm vào cuối một chữ số 6 hoặc một chữ số 9 để được A_{n+1} và hai cách thêm một chữ số 7 hoặc một chữ số 8 để được B_{n+1} .

Với mỗi số thuộc B_n có một cách thêm vào cuối một chữ số 7 hoặc một chữ số 8 để được A_{n+1} và có ba cách thêm một chữ số để được B_{n+1} .

$$\text{Như vậy } \begin{cases} |A_{n+1}| = 2|A_n| + |B_n| \\ |B_{n+1}| = 2|A_n| + 3|B_n| \end{cases} \Rightarrow |B_{n+1}| = 3|A_{n+1}| - 4|B_n| \Rightarrow |A_{n+1}| = 5|A_n| - 4|A_{n-1}|.$$

$$\text{Hay } |A_n| = 5|A_{n-1}| - 4|A_{n-2}|.$$

Xét dãy số $a_n = |A_n|$, ta có $a_1 = 2, a_2 = 6, a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2}; n \geq 3$.

$$\text{Nên } a_n = \alpha + \beta \cdot 4^n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 4^n.$$

Suy ra có $\frac{4^{2018} + 2}{3}$ số chia hết cho 3.

$$\text{Mà } |E| = 4^{2018}.$$

$$\text{Vậy } P = \frac{4^{2018} + 2}{3 \cdot 4^{2018}} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{4035}}\right).$$

Câu 30: Chọn ngẫu nhiên 2 số từ tập $S = \{1; 2; 3; \dots; 20\}$. Xác suất để chọn được 2 số mà tích của chúng là một số chính phương bằng bao nhiêu?

Lời giải

Số cách chọn ra ngẫu nhiên 2 số là C_{20}^2

Ta cần tìm số cách chọn ra cặp số $(a; b)$ thỏa mãn $1 \leq a < b \leq 20, ab = c^2, 2 \leq c \leq 19$

Có tất cả 11 cặp số như thế. Xác suất cần tính là $\frac{11}{C_{20}^2} = \frac{11}{190}$

Câu 31: Cho tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 2018\}$, hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 số từ tập A mà các số đó lập thành một cấp số nhân tăng và công bội là một số nguyên dương?

Lời giải

5 số được chọn ra xếp được duy nhất dãy tăng, giả sử $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$

Theo giả thiết các số đó là $x_1, qx_1, q^2x_1, q^3x_1, q^4x_1, q \in \mathbb{N}, q \geq 2$

$$\text{Ta có } q^4x_1 \leq 2018 \Rightarrow q \leq \sqrt[4]{\frac{2018}{x_1}} \leq \sqrt[4]{2018} \Rightarrow q \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$$

Mặt khác $1 \leq x_1 \leq \frac{2018}{q^4} \Rightarrow 1 \leq x_1 \leq \left\lfloor \frac{2018}{q^4} \right\rfloor$. Với mỗi số nguyên $q \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$ ta có tất cả

$\left\lfloor \frac{2018}{q^4} \right\rfloor$ cách chọn x_1 và các số còn lại có tương ứng duy nhất một cách chọn.

Vậy theo quy tắc cộng và quy tắc nhân ta có tất cả:

$$\sum_{k=2}^6 \left\lfloor \frac{2018}{k^4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2018}{2^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2018}{3^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2018}{4^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2018}{5^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2018}{6^4} \right\rfloor = 161$$

Bài tập tương tự

Chọn ngẫu nhiên 3 số từ tập $A = \{1; 2; \dots; 100\}$. Tính xác suất để chọn được 3 số mà các số đó lập thành một cấp số nhân tăng có công bội là một số nguyên dương?

Câu 32: Cho tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 30\}$. Chọn ngẫu nhiên 3 phần tử của A , tính xác suất để 3 phần tử được chọn lập thành một cấp số cộng ?

Lời giải

Số cách chọn ngẫu nhiên 3 phần tử là C_{30}^3

Ta tìm số các bộ số $(a; b; c)$ thỏa mãn $a, b, c \in A; 1 \leq a \leq b \leq c \leq 30; a + c = 2b$

Ta có a, c sẽ cùng tính chẵn lẻ.

- Nếu a, c cùng chẵn có C_{15}^2 cách chọn a, c và b có duy nhất một cách chọn
- Nếu a, c cùng lẻ có C_{15}^2 cách chọn a, c và b có duy nhất một cách chọn

Vậy có tất cả $2C_{15}^2$ cách chọn.

Câu 33: Cho tập $S = \{2^1, 2^2, \dots, 2^{10}\}$. Chọn ngẫu nhiên 2 phần tử a, b của S , tính xác suất để $\log_a b$ là một số nguyên bằng ?

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu C_{10}^2

Ta thấy rằng nếu $\log_a b$ là một số nguyên dương thì đó phải là số nguyên dương lớn hơn 1.

Thật vậy vì $a, b > 1 \Rightarrow \log_a b > 0$ mặt khác 2 số này khác nhau nên $\log_a b$ phải là một số nguyên lớn hơn 1. Vậy $\log_a b = k \in \mathbb{Z}, k \geq 2 \Rightarrow b = a^k$

- Nếu $a = 2^1 \Rightarrow b \in \{2^2; 2^3; \dots; 2^{10}\}$, có 9 cách chọn
- Nếu $a = 2^2 \Rightarrow b \in \{2^4; 2^6; 2^8; 2^{10}\}$, có 4 cách chọn
- Nếu $a = 2^3 \Rightarrow b \in \{2^6; 2^9\}$, có 2 cách chọn
- Nếu $a = 2^4 \Rightarrow b \in \{2^8\}$, có 1 cách chọn
- Nếu $a = 2^5 \Rightarrow b \in \{2^{10}\}$, có 1 cách chọn

Vậy có tất cả 17 cách chọn. Xác suất cần tính là $\frac{17}{45}$

Câu 34: Chọn ngẫu nhiên 3 số phân biệt a, b, c từ tập $S = \{1; 2; 3; \dots; 30\}$. Tính xác suất để $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 3 ?

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu C_{30}^3

Ta có nhận xét:

- $n = 3k \Rightarrow n^2 = 9k^2 \equiv 0 \pmod{3}$
- $n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1 \equiv 1 \pmod{3}$
- $n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4 \equiv 1 \pmod{3}$

Vậy để $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 3 thì a, b, c cùng chia hết cho 3 hoặc a, b, c cùng không chia hết cho 3. Tập S có 10 phần tử chia hết cho 3, 20 phần tử không chia hết cho 3.

Vậy số cách chọn là $C_{10}^3 + C_{20}^3$. Xác suất cần tính là $\frac{9}{29}$

Câu 35: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 2018 chữ số và tổng các chữ số chia hết cho 3 ?

Lời giải

Vì tổng các chữ số bằng 3 nên chữ số lớn nhất trong dãy này có thể bằng 3, ta xét các trường hợp sau:

- Số tạo thành từ 1 số 3 và 2017 số 0, có duy nhất 1 số thỏa mãn
- Số tạo thành từ 1 số 1 và 1 số 2 có $2 \cdot C_{2017}^1 = 4034$ số thỏa mãn
- Số tạo thành từ 3 số 1 có $1 \cdot C_{2017}^2$ số thỏa mãn

Vậy có tất cả 2037171 số.

Bài tập tương tự

Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 10^{2018} và tổng các chữ số bằng 3?

Đáp số: $C_{2018}^1 + A_{2018}^2 + C_{2018}^3$

Câu 36: Một chuồng có 3 con thỏ trắng và 4 con thỏ nâu. Người ta bắt ngẫu nhiên lần lượt từng con ra khỏi chuồng cho đến khi nào bắt được cả 3 con thỏ trắng mới thôi. Xác suất để cần phải bắt đến ít nhất 5 con thỏ là?

Lời giải

Cách 1.

Xét biến cố đối $\bar{A}$: "bắt được 3 thỏ trắng trong 3 hoặc 4 lần".

- TH1: Bắt được 3 con thỏ trắng trong 3 lần đầu:

Ta có $n(\Omega) = 7 \cdot 6 \cdot 5$ và $n(\bar{A}_1) = 3!$. Suy ra $P(\bar{A}_1) = \frac{3!}{7 \cdot 6 \cdot 5}$.

- TH2: Bắt được 3 con thỏ trắng trong 4 lần đầu:

Suy ra lần 4 bắt được con trắng; lần 1, 2 và 3 bắt được 2 con trắng và 1 con nâu.



Ta có $n(\Omega) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ và $n(\bar{A}_2) = C_4^1 \cdot C_3^2 \cdot 3!$. Suy ra $P(\bar{A}_2) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2 \cdot 3!}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}$.

Suy ra $P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1) + P(\bar{A}_2) = \frac{4}{35} \Rightarrow P(A) = \frac{31}{35}$

Cách 2. Ta mô tả không gian của biến cố $\bar{A}$ như sau

$$\{TTT; TNNN; NTNN; NNTN\}$$

$$\text{Suy ra } P(\overline{A}) = \frac{4}{35} \Rightarrow P(A) = \frac{31}{35}$$

Câu 37: Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số được lập từ các chữ số thuộc tập A . Chọn ngẫu nhiên một số từ S , xác suất để số được chọn chia hết cho 6 bằng bao nhiêu?

Lời giải

Tập S có 9^4 phần tử.

Gọi số thỏa mãn biến cố là $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$. Do $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} : 6 \longrightarrow \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} : 2$.

Suy ra $a_4 \in \{2, 4, 6, 8\}$: có 4 cách; và a_1, a_2 có 9^2 cách chọn.

- Nếu $a_1 + a_2 + a_4 = 3k \Rightarrow a_3 \in \{3; 6; 9\}$ nên a_3 có 3 cách chọn.
- Nếu $a_1 + a_2 + a_4 = 3k + 1 \Rightarrow a_3 \in \{2; 5; 8\}$ nên a_3 có 3 cách chọn.
- Nếu $a_1 + a_2 + a_4 = 3k + 2 \Rightarrow a_3 \in \{1; 4; 7\}$ nên a_3 có 3 cách chọn.

Vậy a_3 luôn luôn có 3 cách chọn nên $n(A) = 4 \cdot 9^2 \cdot 3 = 972$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} n(\Omega) = 9^4 \\ n(A) = 4 \cdot 9^2 \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{4}{27}$$

Câu 38: Trong buổi sinh hoạt nhóm của lớp, tổ một có 12 học sinh gồm 4 học sinh nữ trong đó có Hoa và 8 học sinh nam trong đó có Vinh. Chia tổ thành 3 nhóm, mỗi nhóm gồm 4 học sinh và phải có ít nhất 1 học sinh nữ. Xác suất để Hoa và Vinh cùng một nhóm là bao nhiêu?

Lời giải

Không gian mẫu là số cách chia 12 học sinh thành 3 nhóm và phải đảm bảo mỗi nhóm có ít nhất 1 học sinh nữ. Giả sử

- Nhóm thứ nhất có 2 nữ và 2 nam, có $C_4^2 \cdot C_8^2$ cách.
- Nhóm thứ hai có 1 nữ và 3 nam, có $C_2^1 \cdot C_6^3$.
- Sau khi chia nhóm thứ nhất và thứ hai xong thì còn lại 1 nữ và 3 nam nên nhóm thứ ba có duy nhất 1 cách.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_4^2 \cdot C_8^2 \cdot C_2^1 \cdot C_6^3 = 6720$.

Gọi A là biến cố "Hoa và Vinh cùng một nhóm". Ta mô tả các khả năng thuận lợi cho biến cố A như sau:

- Trường hợp 1. Hoa và Vinh cùng với 1 bạn nam và 1 bạn nữ thành một nhóm nên có $C_7^1 \cdot C_3^1$ cách. Nhóm thứ hai có 3 bạn nam và 1 bạn nữ nên có $C_6^3 \cdot C_2^1$. Cuối cùng còn lại 3 bạn nam và 1 bạn nữ nên có 1 cách duy nhất cho nhóm thứ ba. Do đó trong trường hợp này có $C_7^1 \cdot C_3^1 \cdot C_6^3 \cdot C_2^1 = 840$ cách.

- Trường hợp 2. Hoa và Vinh cùng với 2 bạn nam thành một nhóm nên có C_7^2 cách. Nhóm thứ hai có 2 bạn nam và 2 bạn nữ nên có $C_5^2.C_3^2$. Cuối cùng còn lại 3 bạn nam và 1 bạn nữ nên có 1 cách duy nhất cho nhóm thứ ba. Do đó trong trường hợp này có $C_7^2.C_5^2.C_3^2 = 630$ cách.
- Trường hợp 3. Hoa và Vinh cùng với 2 bạn nam thành một nhóm. Nhóm thứ hai có 3 bạn nam và 1 bạn nữ. Suy ra nhóm thứ ba có 2 bạn nam và 2 bạn nữ. Trường hợp này trùng với trường hợp thứ hai nên ta không tính.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $n(A) = 840 + 630 = 1470$.

Vậy xác suất cần tính $P = \frac{1470}{6720} = \frac{7}{32}$.

Câu 39: An và Bình cùng tham gia kì thi THPTQG năm 2018, ngoài thi ba môn Toán, Văn, Tiếng Anh bắt buộc thì An và Bình đều đăng kí thi thêm đúng hai môn tự chọn khác trong ba môn Vật lí, Hóa học và Sinh học dưới hình thức thi trắc nghiệm để xét tuyển Đại học. Mỗi môn tự chọn trắc nghiệm có 8 mã đề thi khác nhau, mã đề thi của các môn khác nhau là khác nhau. Tính xác suất để An và Bình có chung đúng một môn thi tự chọn và chung một mã đề.

Lời giải

Gọi A là biến cố: “An và Bình có chung đúng một môn thi tự chọn và chung một mã đề”.

Số khả năng An chọn 2 môn thi tự chọn và mã đề của 2 môn thi là $C_3^2.8^2$.

Số khả năng Bình chọn 2 môn thi tự chọn và mã đề của 2 môn thi là $C_3^2.8^2$.

Do đó, số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_3^2.8^2.C_3^2.8^2$.

Bây giờ ta đếm số khả năng để An và Bình có chung đúng một môn thi tự chọn và chung một mã đề:

Số khả năng An chọn 2 môn thi tự chọn và mã đề của 2 môn thi là $C_3^2.8^2$.

Sau khi An chọn thì Bình có 2 cách chọn 2 môn thi tự chọn để có đúng một môn thi tự chọn với An, để chung mã đề với An thì số cách chọn mã đề 2 môn thi của Bình là $1.8 = 8$ cách. Như vậy, số cách chọn môn thi và mã đề thi của Bình là 2.8.

Do đó: $n(A) = C_3^2.8^2.2.8$.

Bởi vậy: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_3^2.8^2.2.8}{C_3^2.8^2.C_3^2.8^2} = \frac{1}{12}$.

Câu 40: Trong không gian cho $2n$ điểm phân biệt ($n > 4$, $n \in \mathbb{N}$), trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và trong $2n$ điểm đó có đúng n điểm cùng nằm trên một mặt phẳng và không có 4 điểm nào ngoài 4 điểm trong n điểm này đồng phẳng. Tìm n sao cho từ $2n$ điểm đã cho tạo ra đúng 201 mặt phẳng phân biệt

Lời giải

Cách 1.

Số cách chọn 3 điểm trong $2n$ điểm phân biệt đã cho là C_{2n}^3 .

Số cách chọn 3 điểm trong n điểm cùng nằm trên một mặt phẳng là C_n^3 .

Số mặt phẳng được tạo ra từ $2n$ điểm đã cho là $C_{2n}^3 - C_n^3 + 1$.

$$\text{Như vậy: } C_{2n}^3 - C_n^3 + 1 = 201 \Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 200$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 200$$

$$\Leftrightarrow 7n^3 - 9n^2 + 2n - 1200 = 0 \Leftrightarrow (n-6)(7n^2 + 33n + 200) = 0 \Leftrightarrow n = 6$$

Vậy $n = 6$.

Cách 2.

Có các trường hợp sau :

- TH1 : n điểm đồng phẳng tạo ra 1 mặt phẳng.
- TH2 : n điểm không đồng phẳng tạo ra C_n^3 mặt phẳng.
- TH3 : 2 điểm trong n điểm đồng phẳng kết hợp với 1 điểm trong n điểm không đồng phẳng tạo ra $C_n^2 C_n^1 = n.C_n^2$ mặt phẳng.
- TH4 : 1 điểm trong n điểm đồng phẳng kết hợp với 2 điểm trong n điểm không đồng phẳng tạo ra $C_n^1 C_n^2 = n.C_n^2$ mặt phẳng.

$$\text{Vậy có } 1 + C_n^3 + 2nC_n^2 = 201 \Leftrightarrow n = 6.$$

Câu 41: Tung một đồng xu không đồng chất 2020 lần. Biết rằng xác suất xuất hiện mặt sấp là $0,6$. Tính xác suất để mặt sấp xuất hiện đúng 1010 lần.

Lời giải

Ta có C_{2020}^{1010} cách chọn 1010 vị trí trong 2020 lần tung đồng xu để mặt sấp xuất hiện, các lần tung còn lại không xuất hiện mặt sấp. Ứng với mỗi cách chọn cố định 1010 vị trí xuất hiện mặt sấp ta có xác suất của trường hợp đó tính như sau:

- Tại những lần mặt sấp xuất hiện thì xác suất xảy ra là $0,6$.
- Tại những lần mặt ngửa xuất hiện thì xác suất xảy ra là $1 - 0,6$.

Do có 1010 lần xuất hiện mặt sấp và 1010 xuất hiện mặt ngửa nên ứng với mỗi cách chọn cố định 1010 vị trí xuất hiện mặt sấp thì có xác suất là $0,6^{1010} (1 - 0,6)^{1010} = (0,24)^{1010}$.

$$\text{Vậy xác suất cần tính là } C_{2020}^{1010} \cdot (0,24)^{1010}.$$

Câu 42 : Cho 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 6. Lập các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ 5 chữ số đã cho. Tính tổng của các số lập được.

Lời giải

Mỗi số số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 6 là một chỉnh hợp chập 3 của các chữ số này. Do đó, ta lập được $A_5^3 = 60$ số.

Do vai trò các số 1, 2, 3, 4, 6 như nhau, nên số lần xuất hiện của mỗi chữ số trong các chữ số này ở mỗi hàng (hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm) là như nhau và bằng $60 : 5 = 12$ lần.

Vậy, tổng các số lập được là $S = 12.(1 + 2 + 3 + 4 + 6)(100 + 10 + 1) = 21312$.

Câu 43: Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; \dots; 100\}$. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các tập con của A , mỗi tập con này gồm 3 phần tử của A và có tổng bằng 91. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của S . Xác suất chọn được phần tử có 3 số lập thành cấp số nhân bằng?

Lời giải

Giả sử tập con bất kì $\{a, b, c\} \in S \Rightarrow 1 \leq a, b, c \leq 100$; a, b, c phân biệt và $a + b + c = 91$.

Đây là bài toán chia kẹo Euler nên số bộ a, b, c là C_{91-1}^{3-1}

Tuy nhiên trong các bộ trên vẫn chứa các bộ có 2 chữ số giống nhau, số bộ có 2 chữ số giống nhau là $3.45 = 135$ (bộ). Vậy $n(\Omega) = (C_{90}^2 - 3.45) : 3! = 645$.

Gọi A là biến cố: " a, b, c lập thành cấp số nhân "

Gọi q là công bội của cấp số nhân theo bài ra ta có $q > 0$

$$a + aq + aq^2 = 91 \Leftrightarrow a(1 + q + q^2) = 1.91 = 13.7$$

- Trường hợp 1: $\begin{cases} a = 1 \\ 1 + q + q^2 = 91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ q = 9 \end{cases}$
- Trường hợp 2: $\begin{cases} a = 91 \\ 1 + q + q^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 91 \\ q = 0 \end{cases}$ (loại)
- Trường hợp 3: $\begin{cases} a = 13 \\ 1 + q + q^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 \\ q = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn)
- Trường hợp 3: $\begin{cases} a = 7 \\ 1 + q + q^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ q = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy $n(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{645}$.

Câu 44: Một tòa nhà có n tầng, các tầng được đánh số từ 1 đến n theo thứ tự từ dưới lên. Có 4 thang máy đang ở tầng 1. Biết rằng mỗi thang máy có thể dừng ở đúng 3 tầng (không kể tầng 1) và 3 tầng này không là 3 số nguyên liên tiếp và với hai tầng bất kỳ (khác tầng 1) của tòa nhà luôn có một thang máy dừng được ở cả hai tầng này. Hỏi giá trị lớn nhất của n là bao nhiêu?

Lời giải

Giả sử 4 thang máy đó là A, B, C, D .

Do khi bốc hai tầng bất kỳ luôn có một thang máy dừng được nên:

- Khi bốc hai tầng 2, 3 có một thang dừng được giả sử đó là thang A , nên tầng 4 không phải thang A dừng.

- Khi bốc hai tầng 3,4 có một thang dừng được giả sử đó là thang B, nên tầng 5 không phải thang B dừng.
- Khi bốc hai tầng 4,5 có một thang dừng được giả sử đó là thang C, nên tầng 6 không phải thang C dừng.
- Khi bốc hai tầng 5,6 có một thang dừng được giả sử đó là thang D.
- Khi bốc hai tầng 6,7 có một thang dừng được khi đó không thể là thang A,B,C vì sẽ dừng 4 (mâu thuẫn), thang D không thể ở tầng 7 do không thể ở ba tầng liên tiếp.

Vậy khách sạn có tối đa sáu tầng.

Câu 45: Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 4 chữ số. Tính xác suất để số được chọn có dạng $\overline{abcd}$, trong đó $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 9$.

Lời giải

Cách 1: Số tự nhiên có bốn chữ số có dạng $\overline{abcd}$

Ta có $a \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ suy ra có 9 cách chọn, $\overline{bcd}$ có 10^3 cách chọn

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9 \cdot 10^3 = 9000$.

Gọi A là biến cố "số được chọn có dạng $\overline{abcd}$, trong đó $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 9$ "

- Số dạng $\overline{aaaa}$ có 9 số.
- Số dạng $\overline{abcd}$ ($a < b < c < d$) có C_9^4 số.
- Số dạng $\overline{aaab}$ có C_9^2 số.
- Số dạng $\overline{aabb}$ có C_9^2 số.
- Số dạng $\overline{abbc}$ có C_9^3 số.
- Số dạng $\overline{abbc}$ có C_9^3 số.
- Số dạng $\overline{abcc}$ có C_9^3 số.

$$\Rightarrow n(A) = 9 + C_9^4 + 3 \cdot C_9^2 + 3 \cdot C_9^3 = 495.$$

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{495}{9000} = 0.55.$$

Cách 2: Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9 \cdot 10^3 = 9000$.

Từ giả thiết $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 9 \Rightarrow 1 \leq a < b+1 < c+1 < d+1 \leq 9+3 = 12$.

Số cách chọn a, b, c, d và sắp xếp chúng theo một thứ tự duy nhất là $C_{12}^4 = 495$.

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{495}{9000} = 0.55.$$

Câu 46: Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 7 chữ số và chia hết cho 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S, tính xác suất để các chữ số của số đó đôi một khác nhau.

Lời giải

Số chia hết cho 9 có dạng: $9m$, với $m \in \mathbb{Z}$.

Ta có $1000000 \leq 9m \leq 10000000 \Leftrightarrow 111111 < m \leq 1111111$. Do đó có 1000000 số có 7 chữ số và chia hết cho 9. Từ các chữ số $0; 1; 2; \dots; 9$ ta có các bộ gồm 7 số có tổng chia hết cho 9 là

$(0; 2; 3; 4; 5; 6; 7); (0; 1; 3; 4; 5; 6; 8); (0; 1; 2; 4; 5; 7; 8); (0; 1; 2; 3; 6; 7; 8); (0; 3; 4; 5; 7; 8; 9);$
 $(0; 2; 4; 6; 7; 8; 9); (0; 1; 5; 6; 7; 8; 9); (0; 1; 2; 3; 4; 8; 9); (0; 1; 2; 3; 5; 7; 9); (2; 3; 4; 5; 6; 7; 9);$
 $(1; 3; 4; 5; 6; 8; 9); (1; 2; 4; 5; 7; 8; 9); (1; 2; 3; 6; 7; 8; 9).$

- Có 9 bộ số gồm 7 số có tổng chia hết cho 9 trong đó có số 0 nên từ các bộ số này lập được: $9 \times 6 \times 6! = 38880$ số có 7 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 9.
- Có 4 bộ số gồm 7 số có tổng chia hết cho 9 tương tự như bộ số $(2; 3; 4; 5; 6; 7; 9)$, nên từ các bộ số này lập được $4 \times 7! = 20160$ số có 7 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 9.

Vậy, xác suất chọn một số từ tập S để được một số có các chữ số của số đó đôi một khác nhau là $P = \frac{38880 + 20160}{1000000} = \frac{369}{6250}$.

Câu 47: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật OMNP với $M(0;10)$, $N(100;10)$, $P(100;0)$ Gọi S là tập hợp tất cả các điểm $A(x;y)$ với $x, y \in \mathbb{Z}$ nằm bên trong kể cả trên cạnh của hình chữ nhật OMNP. Lấy ngẫu nhiên 1 điểm $A(x;y) \in S$. Tính xác suất để $x + y \leq 90$.

Lời giải

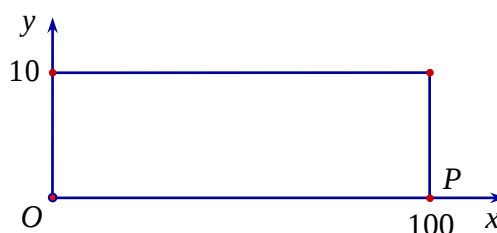
Cách 1: Tập hợp S gồm có $11 \cdot 101 = 1111$ điểm.

Ta xét $S' = \{(x;y) : x + y > 90\}$ với $0 \leq x \leq 100$ và $0 \leq y \leq 10$

- Khi $y = 0 \Rightarrow x > 90 \Rightarrow x = \overline{91; 100} \Rightarrow$ Có 10 giá trị của x
- Khi $y = 1 \Rightarrow x > 89 \Rightarrow x = \overline{90; 100} \Rightarrow$ Có 11 giá trị của x
-
- Khi $y = 10 \Rightarrow x > 90 \Rightarrow x = \overline{91; 100} \Rightarrow$ có 20 giá trị của x

Như vậy S' có 165 phần tử. Vậy xác suất cần tìm là $\frac{1111 - 165}{1111} = \frac{86}{101}$.

Cách 2:

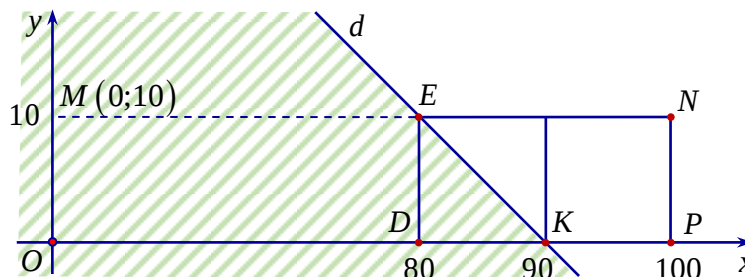


Nhận thấy các điểm cần tìm nằm trên các đường thẳng $y = m$, $m = \overline{0; 10}$.

Để thấy trên các đường thẳng $y = 0, y = 1, y = 2, \dots, y = 10$ có lần lượt 91, 90, 89..., 81 điểm.

Vậy xác suất cần tìm là $p(A) = \frac{91+90+\dots+81}{11.101} = \frac{86}{101}$.

Cách 3:



Ta có $n(\Omega) = 11.101 = 1111$. Ta thấy $x + y \leq 90$ có miền nghiệm là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d chứa điểm O .

Số điểm thuộc hình chữ nhật ENPD là $21.11 = 231$.

Số điểm thuộc $\triangle EDK$ tính cả cạnh EK là $55 + 11 = 66$.

Suy ra $x + y > 90$ có $231 - 66 = 165$ điểm và $x + y \leq 90$ có $1111 - 165 = 946$

$P(A) = \frac{946}{1111} = \frac{86}{101}$.

Câu 48: Hai thí sinh A và B tham gia một buổi thi vấn đáp. Cán bộ hỏi thi đưa cho mỗi thí sinh một bộ câu hỏi thi gồm 10 câu hỏi khác nhau, được đựng trong 10 phong bì dán kín, có hình thức giống hệt nhau, mỗi phong bì đựng 1 câu hỏi; thí sinh chọn 3 phong bì trong đó để xác định câu hỏi thi của mình. Biết rằng bộ 10 câu hỏi thi dành cho các thí sinh là như nhau, xác suất để 3 câu hỏi A chọn và 3 câu hỏi B chọn có ít nhất 1 câu hỏi giống nhau là bao nhiêu?

Lời giải

Không gian mẫu là tập hợp gồm các cặp hai bộ 3 câu hỏi, mà ở vị trí thứ nhất của cặp là bộ 3 câu hỏi thí sinh A chọn và ở vị trí thứ hai của cặp là bộ 3 câu hỏi thí sinh B chọn.

- Thí sinh A có C_{10}^3 cách chọn 3 câu hỏi từ bộ gồm 10 câu hỏi.
- Thí sinh B có C_{10}^3 cách chọn 3 câu hỏi từ bộ gồm 10 câu hỏi.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{10}^3 \cdot C_{10}^3$.

Gọi X là biến cố "3 câu hỏi A chọn và 3 câu hỏi B chọn có ít nhất 1 câu hỏi giống nhau".

Để tìm số phần tử của X , ta đi tìm số phần tử của $\bar{X}$ như sau

- Giả sử A chọn trước nên có C_{10}^3 cách chọn 3 câu hỏi từ bộ gồm 10 câu hỏi.
- Để B chọn khác A thì B phải chọn 3 trong 7 câu hỏi còn lại từ bộ 10 câu hỏi nên có C_7^3 cách chọn.

Suy ra số phần tử của biến cố $\bar{X}$ là $|\Omega_{\bar{X}}| = C_{10}^3 \cdot C_7^3$.

$$\text{Vậy xác suất cần tính } P(X) = \frac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |\Omega_{\bar{X}}|}{|\Omega|} = \frac{C_{10}^3 \cdot C_{10}^3 - C_{10}^3 \cdot C_{10}^7}{C_{10}^3 \cdot C_{10}^3} = \frac{17}{24}.$$

Câu 49: Trong kỳ thi THPT Quốc Gia, thí sinh A dự thi hai môn thi trắc nghiệm Vật lý và Hóa học. Đề thi của mỗi môn gồm 50 câu hỏi; mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn; trong đó có 1 phương án đúng, làm đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Mỗi môn thi thí sinh A đều làm hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu, 5 câu còn lại thí sinh A chọn ngẫu nhiên. Xác suất để tổng điểm 2 môn thi của thí sinh A không dưới 19 điểm là bao nhiêu?

Lời giải

Cách 1.

Thí sinh A không dưới 19 điểm khi và chỉ khi trong 10 câu trả lời ngẫu nhiên ở cả hai môn Vật lý và Hóa học thì phải đúng ít nhất 5 câu.

Không gian mẫu là số phương án trả lời 10 câu hỏi mà thí sinh A chọn ngẫu nhiên. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 4^{10}$.

Gọi X là biến cố "Thí sinh A làm được ít nhất 5 câu trong 10 được cho là chọn ngẫu nhiên" nên ta có các trường hợp sau đây thuận lợi cho biến cố X.

Mỗi câu đúng có 1 phương án trả lời, mỗi câu sai có 3 phương án trả lời.

- 5 câu đúng – 5 câu sai: có $C_{10}^5 \cdot (3)^5$ khả năng thuận lợi.
- 6 câu đúng – 4 câu sai: có $C_{10}^6 \cdot (3)^4$ khả năng thuận lợi.
- 7 câu đúng – 3 câu sai: có $C_{10}^7 \cdot (3)^3$ khả năng thuận lợi.
- 8 câu đúng – 2 câu sai: có $C_{10}^8 \cdot (3)^2$ khả năng thuận lợi.
- 9 câu đúng – 1 câu sai: có $C_{10}^9 \cdot 3$ khả năng thuận lợi.
- 10 câu đúng: có C_{10}^{10} khả năng thuận lợi.

$$\text{Suy ra } n(X) = C_{10}^5 \cdot (3)^5 + C_{10}^6 \cdot (3)^4 + C_{10}^7 \cdot (3)^3 + C_{10}^8 \cdot (3)^2 + C_{10}^9 \cdot 3 + C_{10}^{10} = 81922.$$

$$\text{Vậy xác suất cần tính } P = \frac{81922}{4^{10}}.$$

Cách 2. Xác suất trả lời đúng 1 câu hỏi là $\frac{1}{4}$, trả lời sai là $\frac{3}{4}$. Ta có các trường hợp:

- Xác suất thí sinh A trả lời đúng 5 trên 10 câu là $C_{10}^5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$
- Xác suất thí sinh A trả lời đúng 6 trên 10 câu là $C_{10}^6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$
- Xác suất thí sinh A trả lời đúng 7 trên 10 câu là $C_{10}^7 \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$

- Xác suất thí sinh A trả lời đúng 8 trên 10 câu là $C_{10}^8 \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$
- Xác suất thí sinh A trả lời đúng 9 trên 10 câu là $C_{10}^9 \left(\frac{1}{4}\right)^9 \cdot \frac{3}{4}$
- Xác suất thí sinh A trả lời đúng 10 trên 10 câu là $C_{10}^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$.

Cộng các xác suất trên ta được xác suất cần tính.

Câu 50: Trong kỳ thi THPT Quốc Gia, thí sinh An dự thi môn thi trắc nghiệm Toán. Đề thi gồm 50 câu hỏi; mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn; trong đó có 1 phương án đúng, làm đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Bạn An làm chắc chắn đúng 42 câu, trong 8 câu còn lại chỉ có 3 câu bạn loại trừ được mỗi câu một đáp án chắc chắn sai. Do không còn đủ thời gian nên An bắt buộc phải khoanh bừa các câu còn lại. Xác suất bạn An được 9,4 điểm là bao nhiêu?

Lời giải

Ta chỉ quan tâm 8 câu còn lại. Trong 8 câu còn lại mình chia làm 2 loại:

- Loại 1: gồm 3 câu có 3 đáp án A, B, C
Suy ra xác suất chọn đáp án đúng là $\frac{1}{3}$, xác suất chọn đáp án đúng là $\frac{2}{3}$.
- Loại 2: gồm 5 câu có 4 đáp án A, B, C, D
Suy ra xác suất chọn đáp án đúng là $\frac{1}{4}$, xác suất chọn đáp án đúng là $\frac{3}{4}$.

Để bạn An đạt được 9,4 điểm (tức cần đúng thêm 5 câu trong 8 câu còn lại) thì xảy ra một trong các khả năng sau

- Đúng 0 câu loại 1 & Đúng 5 câu loại 3 suy ra xác suất $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times C_5^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5$.
- Đúng 1 câu loại 1 & Đúng 4 câu loại 3 suy ra xác suất $C_3^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4}$.
- Đúng 2 câu loại 1 & Đúng 3 câu loại 3 suy ra xác suất $C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \times C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$.
- Đúng 3 câu loại 1 & Đúng 2 câu loại 3 suy ra xác suất $C_3^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$.

Cộng các xác suất lại ta được xác suất cần tính $P = \frac{499}{13824}$.

Câu 51: Có 12 người xếp thành một hàng dọc (vị trí của mỗi người trong hàng là cố định), Chọn ngẫu nhiên 3 người trong hàng. Tính xác suất để 3 người được chọn không có 2 người đứng nào cạnh nhau.

Lời giải

- Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{12}^3 = 220$.
- Giả sử chọn ba người có số thứ tự trong hàng lần lượt là m, n, p .

$$\text{Theo giả thiết ta có: } \begin{cases} m < n < p \\ n - m > 1 \\ p - n > 1 \\ m, n, p \in \{1; 2; \dots; 12\} \end{cases} \quad . \text{ Đặt } \begin{cases} a = m \\ b = n - 1 \\ c = p - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < b < c \\ b - a \geq 1 \\ c - b \geq 1 \\ 1 \leq a < b < c = p - 2 \leq 10 \end{cases}$$

$\Rightarrow a, b, c$ là ba số bất kì trong tập $\{1; 2; 3; \dots; 10\} \Rightarrow$ Có C_{10}^3 cách chọn hay $n(A) = C_{10}^3 = 120$

$$\text{Vậy xác suất là } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{120}{220} = \frac{6}{11}.$$

Câu 52: Có hai học sinh lớp A, ba học sinh lớp B và bốn học sinh lớp C xếp thành một hàng ngang sao cho giữa hai học sinh lớp A không có học sinh nào lớp B. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng như vậy?

Lời giải

Xét các trường hợp sau:

- TH1: Hai học sinh lớp A đứng cạnh nhau có $2! \cdot 8!$ cách.
- TH2: Giữa hai học sinh lớp A có một học sinh lớp C có $2! \cdot A_4^1 \cdot 7!$ cách.
- TH3: Giữa hai học sinh lớp A có hai học sinh lớp C có $2! \cdot A_4^2 \cdot 6!$ cách.
- TH4: Giữa hai học sinh lớp A có ba học sinh lớp C có $2! \cdot A_4^3 \cdot 5!$ cách.
- TH5: Giữa hai học sinh lớp A có bốn học sinh lớp C có $2! \cdot A_4^4 \cdot 4!$ cách.

Vậy theo quy tắc cộng có $2!(8! + A_4^1 7! + A_4^2 6! + A_4^3 5! + A_4^4 4!) = 145152$ cách.

Câu 53: Từ các số $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ viết ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$. Tính xác suất để viết được số thoả mãn điều kiện $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6$.

Lời giải

Ta dễ có số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6 \cdot A_6^5 = 4320$.

Gọi A là biến cố “chọn được số thoả mãn yêu cầu bài toán”. Khi đó ta có 3 phương án để chọn số $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$ như sau:

- Phương án 1: $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = 5$. Khi đó $\{(a_1, a_2); (a_3, a_4); (a_5, a_6)\} \subset \{(0, 5); (1, 4); (2, 3)\}$.

+ Phương án 1.1: $(a_1, a_2) = (0, 5) \Rightarrow$ có $2 \cdot (2!)^2$ cách chọn.

+ Phương án 1.2: $(a_1, a_2) \neq (0, 5) \Rightarrow$ có $4 \cdot (2!)^3$ cách chọn.

Vậy có $2 \cdot (2!)^2 + 4 \cdot (2!)^3 = 40$ cách chọn.

- Phương án 2: $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = 6$. Khi đó

$$\{(a_1, a_2); (a_3, a_4); (a_5, a_6)\} \subset \{(0, 6); (1, 5); (2, 4)\}.$$

Phương án này hoàn toàn tương tự phương án 1 do đó có $2 \cdot (2!)^2 + 4 \cdot (2!)^3 = 40$ cách chọn.

Phương án 3 : $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = 7$. Khi đó

$$\{(a_1, a_2); (a_3, a_4); (a_5, a_6)\} \subset \{(1, 6); (2, 5); (3, 4)\}$$

Suy ra có $3! \cdot (2!)^3 = 48$ cách chọn.

Vậy số phần tử của A : $|A| = 40 \cdot 2 + 48 = 128$. Suy ra $p = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{128}{4320} = \frac{4}{135}$.

Câu 54: Có 3 bi xanh, 3 bi đỏ, 3 bi trắng và 3 bi vàng (các viên bi cùng màu giống nhau). Hỏi có bao nhiêu cách xếp 12 viên bi thành một hàng ngang sao cho các bi cùng màu không cạnh nhau?

Lời giải

- Xếp 3 bi xanh trước: có 1 cách (tạo ra 4 khoảng trống kể cả hai đầu). Tiếp theo xếp 3 bi đỏ vào 4 khoảng trống: có C_4^3 cách. Bây giờ có tất cả 6 viên bi (gồm 3 bi xanh và 3 bi đỏ) tạo nên 7 khoảng trống, tiếp tục xếp 3 bi trắng vào 7 khoảng trống: có C_7^3 cách. Thời điểm này có tất cả 9 viên bi (gồm 3 bi xanh, 3 bi đỏ và 3 bi trắng), tiếp tục xếp 3 bi vàng vào 10 khoảng trống: có C_{10}^3 cách. Vậy có $1 \cdot C_4^3 \cdot C_7^3 \cdot C_{10}^3$ cách.
- Tuy nhiên khi xếp 3 bi xanh xong, kế tiếp xếp 3 bi đỏ vào 4 khoảng trống như đã trình bày ở trên thì có 2 trường hợp mà 2 bi xanh cạnh nhau

Đ	X		X	Đ	X	Đ
---	---	--	---	---	---	---

Đ	X	Đ	X		X	Đ
---	---	---	---	--	---	---

Ứng với mỗi trường hợp này sẽ kéo theo việc xếp bi trắng không thỏa mãn là C_6^3 và việc xếp bi vàng không thỏa mãn là C_{10}^3 . Vậy số trường hợp không thỏa mãn (cần phải trừ ra) là $2 \cdot C_6^3 \cdot C_9^3$ cách.

$$\text{Ta có } \begin{cases} n(\Omega) = \frac{12!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!} \\ n(A) = 1 \cdot C_4^3 \cdot C_7^3 \cdot C_{10}^3 - 2 \cdot C_6^3 \cdot C_9^3 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{2}{55}$$

Câu 55: Có 6 viên bi gồm 2 bi xanh, 2 bi đỏ, 2 bi vàng (các viên bi bán kính khác nhau). Tính xác suất để khi xếp 6 bi trên thành một hàng ngang thì không có hai viên bi cùng màu nào đứng cạnh nhau.

Lời giải

Trường hợp 1. Có 3 cặp cạnh nhau: có $3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! = 48$ cách.

Trường hợp 2. Có 2 cặp cạnh nhau

- Khả năng thứ nhất: Cặp xanh cạnh cặp đỏ

Ta xem cặp xanh như 1 vị trí, cặp đỏ như 1 vị trí cùng với 2 viên bi vàng nên có $4!$ cách xếp. Hai viên bi trong cặp bi xanh đổi vị trí nên có $2!$ cách, hai viên bi trong cặp bi đỏ đổi vị trí nên có $2!$ cách. Nhưng ta đếm thế này là thừa trường hợp 3 cặp bi cạnh nhau.

Do đó khả năng thứ nhất có $4!.2!.2! - 48 = 48$ cách.

- Khả năng thứ hai: Cặp xanh cạnh cặp vàng có 48 cách.
- Khả năng thứ ba: Cặp đỏ cạnh cặp vàng có 48 cách.

Vậy trường hợp 2 có $48 + 48 + 48 = 144$ cách.

Trường hợp 3. Có 1 cặp cạnh nhau

- Khả năng thứ nhất: Chỉ có 2 viên bi xanh cạnh nhau

Ta xem cặp xanh như 1 vị trí, cùng với 2 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng nên có $5!$ cách xếp. Hai viên bi trong cặp bi xanh đổi vị trí nên có $2!$ cách. Nhưng ta đếm thế này là thừa trường hợp 2 cặp bi cạnh nhau (cặp xanh cạnh cặp đỏ & cặp xanh cạnh cặp vàng) và trường hợp 3 cặp bi cạnh nhau.

Do đó khả năng thứ nhất có $5!.2! - (2.48) - 48 = 96$ cách.

- Khả năng thứ hai: Chỉ có 2 viên bi đỏ cạnh nhau có 96 cách.
- Khả năng thứ ba: Chỉ có 2 viên bi vàng cạnh nhau có 96 cách.

Vậy trường hợp 3 có $96 + 96 + 96 = 288$ cách.

Suy ra số cách xếp 6 bi thỏa mãn bài toán là $6! - 48 - 144 - 288 = 240$ cách.

Nhận xét. Bài này ta không thể làm như bài trước được vì các viên bi khác nhau.

$$\text{Ta có } \begin{cases} n(\Omega) = 6! \\ n(A) = 240 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{1}{3}$$

Câu 56: Có 2 học sinh lớp A, 3 học sinh lớp B và 4 học sinh lớp C xếp thành một hàng ngang sao cho giữa hai học sinh lớp A không có học sinh lớp B. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng như vậy ?

Lời giải

Gọi k là số học sinh lớp C ở giữa hai học sinh lớp A với $k = 0; 1; 2; 3; 4$.

Trước tiên ta đếm cách tạo thành cụm $A \underbrace{CC \dots C}_k A$.

- Chọn 2 học sinh lớp A xếp 2 đầu có $2!$ cách. Chọn k học sinh lớp C xếp vào giữa hai học sinh lớp A có A_4^k cách. Do đó có $2!.A_4^k$ cách tạo ra cụm $A \underbrace{CC \dots C}_k A$.
- Coi cụm $A \underbrace{CC \dots C}_k A$ là một vị trí cùng với $9 - (k + 2)$ học sinh còn lại thành $8 - k$ vị trí. Xếp hàng cho các vị trí này có $(8 - k)!$ cách.

Vậy với mỗi k như trên có $2!.A_4^k.(8 - k)!$ cách xếp hàng.

Suy ra số cách xếp hàng thỏa mãn đề bài là: $\sum_{k=0}^4 2!.A_4^k.(8 - k)! = 145152$ cách.

Câu 57: Cho một đa giác lồi (H) có 30 đỉnh. Gọi ngẫu nhiên 4 đỉnh của đa giác đó. Gọi P là xác suất sao cho 4 đỉnh được chọn tạo thành một tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của (H). Tìm P.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{30}^4$.

Gọi A: “4 đỉnh được chọn tạo thành một tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của (H)”.

Để chọn ra một tứ giác thỏa mãn đề bài ta làm như sau:

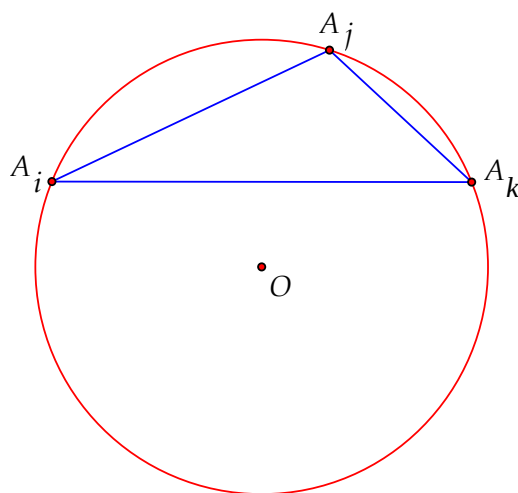
- Bước 1: Chọn đỉnh đầu tiên của tứ giác, có 30 cách.
- Bước 2: Chọn 3 đỉnh còn lại sao cho hai đỉnh bất kỳ của tứ giác cách nhau ít nhất 1 đỉnh. Điều này tương đương với việc ta phải chia $m = 30$ chiếc kẹo cho $n = 4$ đứa trẻ sao cho mỗi đứa trẻ có ít nhất $k = 2$ cái, có $C_{m-n(k-1)-1}^{n-1} = C_{25}^3$ cách, nhưng làm như thế mỗi tứ giác lặp lại 4 lần.

$\Rightarrow$ Số phần tử của biến cố A là $n(A) = \frac{30 \cdot C_{25}^3}{4}$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\frac{30 \cdot C_{25}^3}{4}}{C_{30}^4} = \frac{1150}{1827} \approx 0,6294$.

Câu: Cho đa giác đều 2018 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác và có một góc lớn hơn 100° ?

Lời giải



Gọi $A_1, A_2, \dots, A_{2018}$ là các đỉnh của đa giác đều 2018 đỉnh.

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều $A_1 A_2 \dots A_{2018}$.

Các đỉnh của đa giác đều chia (O) thành 2018 cung tròn bằng nhau, mỗi cung tròn có số đo bằng $\frac{360^\circ}{2018}$.

Vì tam giác cần đếm có đỉnh là đỉnh của đa giác nên các góc của tam giác là các góc nội tiếp của (O).

Suy ra góc lớn hơn 100° sẽ chắn cung có số đo lớn hơn 200° . Cố định một đỉnh A_i . Có 2018 cách chọn A_j .

Gọi A_i, A_j, A_k là các đỉnh sắp thứ tự theo chiều kim đồng hồ sao cho cung nhỏ $A_i A_k < 160^\circ$ thì cung lớn $A_i A_k > 360 - 160 = 200^\circ \Rightarrow A_i A_j A_k > 100^\circ$ và tam giác $A_i A_j A_k$ là

tam giác cần đếm. Khi đó $A_i A_k$ là hợp liên tiếp của nhiều nhất $\left\lfloor \frac{\frac{160}{360}}{\frac{360}{2018}} \right\rfloor = 896$ cung tròn

nói trên.

896 cung tròn này có 897 đỉnh. Trừ đi đỉnh A_i thì còn 896 đỉnh. Do đó có C_{896}^2 cách chọn hai đỉnh A_j, A_k .

Vậy có tất cả $2018 \cdot C_{896}^2$ tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý: Phân tích sai lầm khi giải bài tập này:

Giả sử $A_m A_n A_p > 100^\circ$ thì cung $A_m A_p$ (không chứa điểm A_n) sẽ có số đo lớn hơn 200° .

Tức là cung $A_m A_p$ (không chứa điểm A_n) sẽ là hợp liên tiếp của ít nhất $\left\lfloor \frac{\frac{200}{360}}{\frac{360}{2018}} \right\rfloor + 1 = 1122$

cung tròn bằng nhau nói trên.

Từ đó ta có cách dựng tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán như sau:

- Bước 1: Đánh dấu một cung tròn là hợp liên tiếp của 1122 cung tròn bằng nhau nói trên. Có 2018 cách đánh dấu.
- Bước 2: Trong $2018 - 1121 = 897$ điểm không thuộc cung tròn ở bước 1 (bao gồm cả hai điểm đầu mút của cung), chọn ra 3 điểm bất kì, có C_{897}^3 cách chọn, 3 điểm này sẽ tạo thành tam giác có một góc lớn hơn 100° .

Vậy có tất cả $2018 \cdot C_{897}^3$ tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách lập luận này là không chính xác, vì ta chưa trừ đi các trường hợp trùng nhau!

Câu 58: Có bao nhiêu số tự nhiên có 2018 chữ số sao cho trong mỗi số tổng các chữ số bằng 5?

Lời giải

Vì $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 2 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ nên ta có các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Số tự nhiên có một chữ số 5 đứng đầu và 2017 số 0 đứng sau: Có 1 số.

- Trường hợp 2: Số tự nhiên có một chữ số 4, một chữ số 1 và 2016 số 0.

+ Khả năng 1: Nếu số 4 đứng đầu thì số 1 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^1 số.

+ Khả năng 2: Nếu số 1 đứng đầu thì số 4 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^1 số.

- Trường hợp 3: Số tự nhiên có một chữ số 3, một chữ số 2 và 2016 số 0

+ Khả năng 1: Nếu số 3 đứng đầu thì số 2 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^1 số.

+ Khả năng 2: Nếu số 2 đứng đầu thì số 3 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^1 số.

- Trường hợp 4: Số tự nhiên có hai chữ số 2, một chữ số 1 và 2015 số 0

+ Khả năng 1: Nếu số 2 đứng đầu thì số 1 và số 2 còn lại đứng ở hai trong 2017 vị trí còn lại nên ta có A_{2017}^2 số.

+ Khả năng 2: Nếu số 1 đứng đầu thì hai chữ số 2 đứng ở hai trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^2 số.

- Trường hợp 5: Số tự nhiên có 2 chữ số 1, một chữ số 3 thì tương tự như trường hợp 4 ta có $A_{2017}^2 + C_{2017}^2$ số.

- Trường hợp 6: Số tự nhiên có một chữ số 2, ba chữ số 1 và 2014 số 0.

+ Khả năng 1: Nếu số 2 đứng đầu thì ba chữ số 1 đứng ở ba trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^3 số.

+ Khả năng 2: Nếu số 1 đứng đầu và số 2 đứng ở vị trí mà không có số 1 nào khác đứng trước nó thì hai số 1 còn lại đứng ở trong 2016 vị trí còn lại nên ta có C_{2016}^2 số.

+ Khả năng 3: Nếu số 1 đứng đầu và số 2 đứng ở vị trí mà đứng trước nó có hai số 1 thì hai số 1 và 2 còn lại đứng ở trong 2016 vị trí còn lại nên ta có A_{2016}^2 số.

- Trường hợp 7: Số tự nhiên có năm chữ số 1 và 2013 số 0, vì chữ số 1 đứng đầu nên bốn chữ số 1 còn lại đứng ở bốn trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^4 số.

Áp dụng quy tắc cộng ta có $1 + 4C_{2017}^1 + 2(C_{2017}^2 + A_{2017}^2) + (C_{2017}^3 + A_{2016}^2 + C_{2016}^2) + C_{2017}^4$ số cần tìm.

Câu 59: Có 1 viên bi xanh, 2 viên bi vàng và 3 viên bi đỏ (các viên bi có bán kính khác nhau). Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 viên bi thành một hàng ngang sao cho các viên bi cùng màu không xếp cạnh nhau?

Lời giải

Ta đánh số thứ tự các ô cần xếp bi.

I	II	III	IV	V	VI
---	----	-----	----	---	----

- Trường hợp thứ nhất.

Bi màu đỏ ở các vị trí I, III, V nên có $3!$ cách.

Bi màu vàng và màu xanh ở các vị trí còn lại II, IV, VI nên cũng có $3!$ cách.

Do đó trong trường hợp này có $3! \cdot 3! = 36$ cách.

- Trường hợp thứ hai (như trường hợp thứ nhất)

Bi màu đỏ ở các vị trí II, IV, VI nên có $3!$ cách.

Bi màu vàng và màu xanh ở các vị trí còn lại I, III, V nên cũng có $3!$ cách.

Do đó trong trường hợp này có $3! \cdot 3! = 36$ cách.

- Trường hợp thứ ba

Bi màu đỏ ở các vị trí I, III, VI nên có $3!$ cách.

Bi màu vàng và màu xanh ở tùy ý các vị trí còn lại thì có $3!$ cách nhưng trong đó có vị trí II(x)–IV(v)–V(v) không thỏa mãn.

Do đó trong trường hợp này có $3! \cdot (3! - 2) = 24$ cách.

- Trường hợp thứ tư (như trường hợp thứ ba)

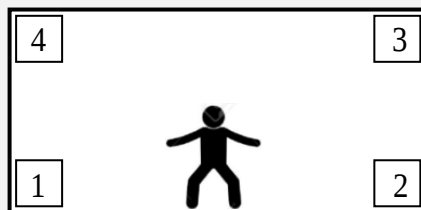
Bi màu đỏ ở các vị trí I, IV, VI nên có $3!$ cách.

Bi màu vàng và màu xanh ở tùy ý các vị trí còn lại thì có $3!$ cách nhưng trong đó có vị trí II(v)–III(v)–V(x) không thỏa mãn.

Do đó trong trường hợp này có $3! \cdot (3! - 2) = 24$ cách.

Vậy có tất cả $36 + 24 + 36 + 24 = 120$ cách thỏa mãn bài toán.

Câu 560: Trong trận đấu bóng đá giữa 2 đội Real madrid và Barcelona, trọng tài cho đội Barcelona được hưởng một quả Penalty. Cầu thủ sút phạt ngẫu nhiên vào 1 trong bốn vị trí 1, 2, 3, 4 và thủ môn bay người cản phá ngẫu nhiên đến 1 trong 4 vị trí 1, 2, 3, 4 với xác suất như nhau (thủ môn và cầu thủ sút phạt đều không đoán được ý định của đối phương). Biết nếu cầu thủ sút và thủ môn bay cùng vào vị trí 1 (hoặc 2) thì thủ môn cản phá được cú sút đó, nếu cùng vào vị trí 3 (hoặc 4) thì xác suất cản phá thành công là 50%. Tính xác suất của biến cố “cú sút đó không vào lưới”?



Lời giải

Cách 1:

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 4.4 = 16$

Gọi biến cố $A =$ “Cú sút đó không vào lưới”

Khi đó biến cố $\bar{A} =$ “Cú sút đó vào lưới”

Số phần tử của $n(\bar{A})$ là

- Trường hợp 1: Cầu thủ sút vào vị trí 1 thủ môn bay vào 1 trong 3 vị trí còn lại. Cầu thủ có 1 cách sút. Thủ môn có 3 cách bay. Do đó, có 3 khả năng xảy ra
- Trường hợp 2: Cầu thủ sút vào vị trí 2 thủ môn bay vào 1 trong 3 vị trí còn lại. Cầu thủ có 1 cách sút. Thủ môn có 3 cách bay. Do đó, có 3 khả năng xảy ra
- Trường hợp 3: Cầu thủ sút vào vị trí 3 thủ môn bay vào 1 trong 3 vị trí còn lại. Cầu thủ có 1 cách sút. Thủ môn có 3 cách bay. Do đó, có 3 khả năng xảy ra
- Trường hợp 4: Cầu thủ sút vào vị trí 4 thủ môn bay vào 1 trong 3 vị trí còn lại. Cầu thủ có 1 cách sút. Thủ môn có 3 cách bay. Do đó, có 3 khả năng xảy ra. Trường hợp 5: Cầu thủ sút vào vị trí 3 thủ môn bay vào vị trí 3. Cầu thủ có 1 cách sút. Thủ môn có 1 cách bay. Do đó, có 1 khả năng xảy ra
- Trường hợp 6: Cầu thủ sút vào vị trí 4 thủ môn bay vào vị trí 4. Cầu thủ có 1 cách sút. Thủ môn có 1 cách bay. Do đó, có 1 khả năng xảy ra

Khi đó $n(\bar{A}) = 4.3 + 2.1 = 14$.

Xác suất xảy ra biến cố $\bar{A}$ là $p(\bar{A}) = \frac{4.3}{16} + \frac{2.1}{16} = \frac{13}{16}$ (Do 2 trường hợp 5, 6 thì xác suất xảy ra chỉ là 50%). Vậy $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{13}{16} = \frac{3}{16}$.

Cách 2:

Gọi A_i là biến cố “cầu thủ sút phạt vào vị trí i ”

B_i là biến cố “thủ môn bay người cản phá vào vị trí thứ i ”

Và C là biến cố “Cú sút phạt không vào lưới”

Dễ thấy $P(A_i) = P(B_i) = \frac{1}{4}$. Ta có

$$P(C) = P(A_1)P(B_1) + P(A_2)P(B_2) + \frac{1}{2}P(A_3)P(B_3) + \frac{1}{2}P(A_4)P(B_4)$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}.$$

Câu 61: Trong một lớp có n học sinh có ba bạn A, B, C cùng $n - 3$ học sinh khác. Khi xếp tùy ý n học sinh này vào một dãy ghế dài có đánh số từ 1 đến n (mỗi học sinh ngồi một ghế). Xác suất để số ghế của A bằng trung bình cộng số ghế của B và C bằng $\frac{13}{675}$. Tìm n ?

Lời giải

Số cách xếp tùy ý là $n!$. Ta tìm số cách xếp thỏa mãn; giả sử số ghế của A,B,C lần lượt là a,b,c . Theo giả thiết ta có $a = \frac{b+c}{2} \Leftrightarrow b+c=2a$. Do đó b và c cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Ta xét 2 khả năng của n .

Trường hợp 1: $n = 2m$

- Nếu b,c chẵn có $A_{\frac{n}{2}}^2$ cách xếp B và C; 1 cách xếp A và $(n-3)!$ cách xếp học sinh khác.
- Nếu b,c lẻ có $A_{\frac{n}{2}}^2$ cách xếp B và C; 1 cách xếp A và $(n-3)!$ cách xếp học sinh khác.

Vậy xác suất cần tính là:

$$\frac{2(n-3)!A_{\frac{n}{2}}^2}{n!} = \frac{2(2m-3)! \frac{m!}{(m-2)!}}{(2m)!} = \frac{2m(m-1)}{2m(2m-1)(2m-2)} = \frac{13}{675} \Leftrightarrow m = \frac{701}{52}$$

Trường hợp này không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $n = 2m + 1$

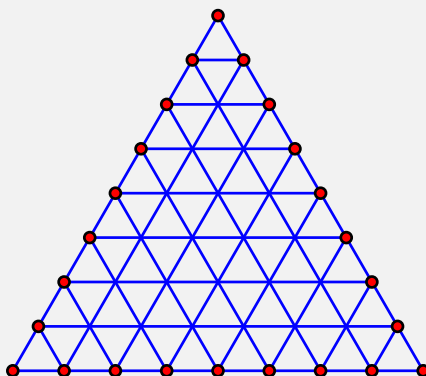
- Nếu b,c chẵn có A_m^2 cách xếp B và C; 1 cách xếp A và $(2m-2)!$ cách xếp học sinh khác.
- Nếu b,c lẻ có A_{m+1}^2 cách xếp B và C; 1 cách xếp A và $(2m-2)!$ cách xếp học sinh khác.

Vậy xác suất cần tính là:

$$\frac{(2m-2)! [A_m^2 + A_{m+1}^2]}{(2m+1)!} = \frac{m(m-1) + (m+1)m}{(2m+1)(2m)(2m-1)} = \frac{13}{675} \Leftrightarrow m = 13 \Rightarrow n = 27$$

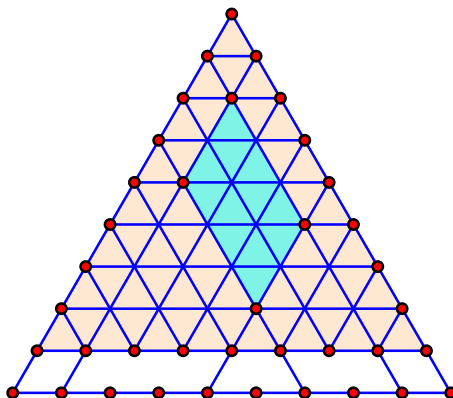
Vậy $n = 27$

Câu 62: Cho tam giác đều H có cạnh bằng 8. Chia tam giác này đều thành 64 tam giác đều có cạnh bằng 1 bởi các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác đều đã cho. Gọi S là tập hợp các đỉnh của 64 tam giác đều có cạnh bằng 1. Chọn Ngẫu nhiên 4 đỉnh của tập S. Tính xác suất để 4 đỉnh chọn được là bốn đỉnh của một hình bình hành nằm trong miền trong tam giác đều H.



*Lời giải***Cách 1:**

Ta thấy có 3 loại hình bình hành dựa vào cách chọn phương của hai cạnh của hình bình hành. Số hình bình hành của mỗi loại là bằng nhau nên chỉ cần tính một loại rồi nhân với 3.



Dựng thêm một đường thẳng song song với cạnh đáy và cách cạnh đáy một khoảng bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng song song kề nhau, tạo thành một tam giác đều mở rộng như hình vẽ. Ta chia cạnh mới thành 9 phần bằng nhau bởi 8, cộng thêm 2 đầu mút nữa thành 10 điểm. Các điểm được đánh số từ trái sang phải từ 1 đến 10.

Khi đó, với 1 hình bình hành có hai cạnh song song với hai cạnh bên tương ứng với bốn số $1 \leq a < b < c < d \leq 10$ theo quy tắc sau: Nối dài các cạnh của hình bình hành, cắt các cạnh mới tại 4 điểm có số thứ tự là a, b, c, d . Ví dụ với hình bình hành màu đỏ trên ta có bộ $(2, 5, 7, 9)$. Ngược lại nếu có một bộ số $1 \leq a < b < c < d \leq 10$ ta sẽ kẻ các đường thẳng từ điểm a, b song song với cạnh bên trái và từ c, d song song với cạnh bên phải giao nhau ra một hình bình hành.

Vậy số hình bình hành loại này là số cách lấy ra bốn số phân biệt $(a; b; c; d)$ từ 10 số tự nhiên $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ và ta được $C_{10}^4 = 210$.

Vậy kết quả là $3 \cdot C_{10}^4 = 630$ hình bình hành.

Ta thấy có $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$ giao điểm giữa các đường thẳng nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{45}^4$.

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \frac{3C_{10}^4}{C_{45}^4} = \frac{2}{473}$.

Cách 2: Để chọn được một hình bình hành mà 4 đỉnh chọn được là bốn đỉnh của một hình bình hành nằm trong miền trong tam giác đều H ta làm như sau:

Chọn 2 trong 7 điểm trên một cạnh (trừ hai điểm đầu mút của cạnh), cùng với hai điểm trong 5 điểm nằm tương ứng trên một cạnh trong hai cạnh còn lại của tam giác (trừ mỗi

đầu cạnh đi 2 điểm). Qua 4 điểm này có 4 đường thẳng tương ứng của đầu bài sẽ cắt nhau tạo thành một hình bình hành thỏa mãn bài toán.

Vì vai trò các cạnh như nhau nên số hình bình hành thu được là: $C_7^2 \cdot C_5^2 \cdot 3 = 630$ (hình).

Ta thấy có $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$ giao điểm giữa các đường thẳng nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{45}^4$.

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \frac{3C_{10}^4}{C_{45}^4} = \frac{2}{473}$.

Câu 63 : Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc A , tính xác suất để số tự nhiên được chọn chia hết cho 45.

Lời giải

Ta có $n(\Omega) = A_{10}^8 - A_9^7$.

Gọi A là tập hợp các số a có 8 chữ số khác nhau chia hết cho 45.

Khi đó a chia hết cho 5 và 9 (tổng các chữ số chia hết cho 9 và số hàng đơn vị bằng 0 hoặc 5).

- Trường hợp 1: a có hàng đơn vị bằng 0; 7 chữ số còn lại có chữ số 9 và 3 trong 4 bộ số $\{1;8\}, \{2;7\}, \{3;6\}, \{4;5\}$, có $4 \cdot 7!$ số.
- Trường hợp 2: a có hàng đơn vị bằng 5; 7 chữ số còn lại có chữ số 4 và 3 trong 4 bộ số $\{0;9\}, \{1;8\}, \{2;7\}, \{3;6\}$.

Không có bộ $\{0;9\}$, có $7!$ số.

Có bộ $\{0;9\}$, có $C_3^2(7! - 6!)$ số

$$\Rightarrow n(A) = 4 \cdot 7! + C_3^2(7! - 6!) \text{ số} \Rightarrow P(A) = \frac{4 \cdot 7! + C_3^2(7! - 6!)}{A_{10}^8 - A_9^7} = \frac{53}{2268}.$$

Câu 64 : Một khối lập phương có độ dài cạnh là 2cm được chia thành 8 khối lập phương cạnh 1cm. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các đỉnh của khối lập phương cạnh 1cm.

Lời giải

Có tất cả 27 điểm.

Chọn 3 điểm trong 27 có $C_{27}^3 = 2925$.

Có tất cả $(8 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2) = 49$ bộ ba điểm thẳng hàng.

Vậy có $2925 - 49 = 2876$ tam giác.

Câu 65: Hai người ngang tài ngang sức tranh chức vô địch của một cuộc thi cờ tướng. Người giành chiến thắng là người đầu tiên thắng được năm ván cờ. Tại thời điểm người chơi thứ nhất đã thắng 4 ván và người chơi thứ hai mới thắng 2 ván, tính xác suất để người chơi thứ nhất giành chiến thắng.

Lời giải

Theo giả thiết hai người ngang tài ngang sức nên xác suất thắng thua trong một ván đấu là $0,5; 0,5$.

Xét tại thời điểm người chơi thứ nhất đã thắng 4 ván và người chơi thứ hai thắng 2 ván.

Để người thứ nhất chiến thắng thì người thứ nhất cần thắng 1 ván và người thứ hai thắng không quá hai ván. Có ba khả năng:

- TH1: Đánh 1 ván. Người thứ nhất thắng xác suất là $0,5$.
- TH2: Đánh 2 ván. Người thứ nhất thắng ở ván thứ hai xác suất là $(0,5)^2$.
- TH3: Đánh 3 ván. Người thứ nhất thắng ở ván thứ ba xác suất là $(0,5)^3$.

$$\text{Vậy } P = 0,5 + (0,5)^2 + (0,5)^3 = \frac{7}{8}.$$

Câu 66: Xét một bảng ô vuông gồm 4×4 ô vuông. Người ta điền vào mỗi ô vuông đó một trong hai số 1 hoặc -1 sao cho tổng các số trong mỗi hàng và tổng các số trong mỗi cột đều bằng 0. Hỏi có bao nhiêu cách?

Lời giải

Nhận xét 1: Trên mỗi hàng có 2 số 1 và 2 số -1 , mỗi cột có 2 số 1 và 2 số -1

Nhận xét 2: Để tổng các số trong mỗi hàng và trong mỗi cột bằng 0 đồng thời có không quá hai số bằng nhau và ba hàng đầu tiên đã được xếp số thì ta chỉ có một cách xếp hàng thứ tự.

Do vậy ta tìm số cách xếp ba hàng đầu tiên. Phương pháp giải bài này là xếp theo hàng. (Hình vẽ). Các hàng được đánh số như sau:

Hàng 1				
Hàng 2				
Hàng 3				
Hàng 4				

Nếu xếp tự do thì mỗi hàng đều có $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ cách điền số mà tổng các số bằng 0, đó là các cách xếp như sau (Ta gọi là các bộ số từ (1) đến (6)):

$$11-1-1 \text{ (1)}, 1-1-11 \text{ (2)}, -1-111 \text{ (3)}, -11-11 \text{ (4)}, 1-11-1 \text{ (5)}, -111-1 \text{ (6)}$$

Giả sử hàng 1 được xếp như bộ (1). Số cách xếp hàng 2 có các khả năng sau

- Khả năng 1: Hàng 2 xếp giống hàng 1: Có 1 cách xếp (bộ (1)).

Hàng 3 có 1 cách (bộ (3)). Hàng 4 có 1 cách. Vậy có $1.1.1.1 = 1$ cách xếp.

- Khả năng 2: Hàng 2 xếp đối xứng với hàng 1: Có 1 cách xếp (bộ (3))

Hàng 3 có 6 cách (lấy thoải mái từ các bộ vì tổng hai hàng trên đã bằng 0). Hàng 4 có 1 cách. Vậy có $1.1.6.1 = 6$ cách xếp.

- Khả năng 3: Hàng 2 xếp trùng với cách xếp hàng 1 ở 2 vị trí: Có 4 cách xếp (4 bộ còn lại)

Khi đó, với mỗi cách xếp hàng thứ 2, hàng 3 có 2 cách. Hàng 4 có 1 cách. Vậy có $1.1.6.1 = 6$ cách xếp.

Vì vai trò các bộ số như nhau nên số cách xếp thỏa mãn ycbt là $6.(1+6+6) = 90$ cách.

Câu 67: Thầy X có 15 cuốn sách gồm 4 cuốn sách toán, 5 cuốn sách lí và 6 cuốn sách hóa. Các cuốn sách đôi một khác nhau. Thầy X chọn ngẫu nhiên 8 cuốn sách để làm phần thưởng cho một học sinh. Tính xác suất để số cuốn sách còn lại của thầy X có đủ 3 môn.

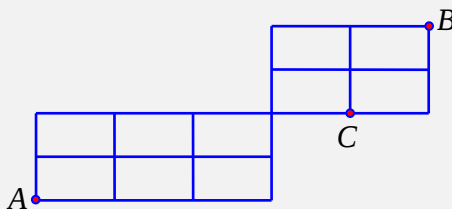
Lời giải

Gọi A là biến cố “Số cuốn sách còn lại của thầy X có đủ 3 môn”, suy ra $\bar{A}$ là biến cố “Số cuốn sách còn lại của thầy X không có đủ 3 môn” = “Thầy X đã lấy hết số sách của một môn học”.

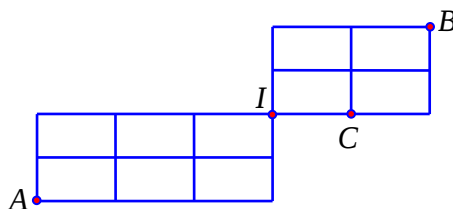
Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{15}^8 = 6435$

$$n(\bar{A}) = C_4^4 \cdot C_{11}^4 + C_5^5 \cdot C_{10}^3 + C_6^6 \cdot C_9^2 = 486 \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{54}{715} \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{661}{715}$$

Câu 68: Một con thỏ di chuyển từ địa điểm A đến địa điểm B bằng cách qua các điểm nút (trong lưới cho ở hình vẽ) thì chỉ di chuyển sang phải hoặc đi lên (mỗi cách di chuyển như vậy xem là một cách đi). Biết nếu thỏ di chuyển đến nút C thì bị cáo ăn thịt, tính xác suất để thỏ đến được vị trí B.



Lời giải



Vẽ thêm cho em điểm J ngay phía trên điểm I nhé

Chú ý : Nếu di chuyển trên lưới theo hướng lên trên hoặc sang ngang thì đi từ $O(0;0)$ đến $A(m;n)$ sẽ có $C_{m+n}^m = C_{m+n}^n$ cách.

Số cách di chuyển từ A đến I là C_5^2 , số cách di chuyển từ I đến B là C_4^2 .

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = C_5^2 \cdot C_4^2 = 60$.

Gọi X là biến cố thỏ đến được vị trí B.

Số cách di chuyển từ A đến I là C_5^2 , số cách di chuyển từ I đến J là 1 cách, số cách di chuyển từ J đến B là C_3^1 . Ta có $n(X) = C_5^2 \cdot 1 \cdot C_3^1 = 30$.

$$\text{Vậy } P(X) = \frac{n(X)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2}.$$

Câu 69: Mỗi lượt, ta gieo một con xúc sắc (loại 6 mặt, cân đối) và một đồng xu (cân đối). Tính xác suất để trong 3 lượt gieo như vậy, có ít nhất một lượt gieo được kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp.

Lời giải

Trước hết ta tính xác suất để trong một lượt gieo thứ k không được kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp.

Số phần tử của không gian mẫu là $C_2^1 \cdot C_6^1 = 12$.

Số cách gieo để được kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp là $C_1^1 \cdot C_1^1 = 1$. Vậy $P(A_k) = \frac{12-1}{12} = \frac{11}{12}$

Gọi A là biến cố trong 3 lượt gieo có ít nhất một lượt gieo được kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp.

$$\text{Khi đó } P(A) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = 1 - \left(\frac{11}{12}\right)^3 = \frac{397}{1728}.$$

Câu 70: Xếp ngẫu nhiên 8 chữ cái trong cụm từ "THANH HOA" thành một hàng ngang. Tính xác suất để có ít nhất hai chữ H đứng cạnh nhau.

Lời giải

Cách 1.

Xét trường hợp các chữ cái được xếp bất kì, khi đó ta xếp các chữ cái lần lượt như sau

- Có C_8^3 cách chọn vị trí và xếp có 3 chữ cái H.
- Có C_5^2 cách chọn vị trí và xếp có 2 chữ cái A.
- Có $3!$ cách xếp 3 chữ cái T, O, N.

Do đó số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot 3!$.

Gọi A là biến cố "có ít nhất hai chữ H đứng cạnh nhau"

- Nếu có ba chữ H đứng cạnh nhau, có 6 cách xếp 3 chữ H.
- Nếu đúng hai chữ H đứng cạnh nhau thì
 - + Khi hai chữ H ở hai vị trí đầu hoặc cuối có 5 cách xếp chữ cái H còn lại
 - + Khi hai chữ H đứng ở vị trí giữa thì có 4 cách xếp chữ cái H còn lại.

Do đó có $2 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 30$ cách xếp 3 chữ H sao cho có đúng hai chữ H đứng cạnh nhau.

Như vậy có $30 + 6 = 36$ cách xếp 3 chữ H, ứng với cách xếp trên ta có C_5^2 cách chọn vị trí và xếp 2 chữ cái A và $3!$ cách xếp T, O, N

Suy ra $n(A) = 36 \cdot C_5^2 \cdot 3!$. Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{9}{14}$.

Cách 2. Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \frac{8!}{2!3!} = 3360$

Gọi A là biến cố “có ít nhất hai chữ H đứng cạnh nhau”

Đầu tiên ta xếp 2 chữ A và ba chữ T, O, N có $\frac{5!}{2!}$ cách.

Tiếp theo ta có 6 vị trí (xen giữa và ở hai đầu) để xếp 3 chữ H và không có chữ H nào đứng liền nhau, có C_6^3 cách.

Do đó $n(\bar{A}) = \frac{5!}{2!} C_6^3 \Rightarrow n(A) = n(\Omega) - n(\bar{A}) = 2160$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{9}{14}$.

Câu 71: Trong một bài thi trắc nghiệm khách quan có 10 câu. Mỗi câu có bốn phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Mỗi câu trả lời đúng thì được 1 điểm, trả lời sai thì bị trừ 0,5 điểm. Một thí sinh do không học bài nên làm bài bằng cách với mỗi câu đều chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Xác suất để thí sinh đó làm bài được số điểm không nhỏ hơn 7 là bao nhiêu?

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên phương án trả lời cho 10 câu hỏi ta được không gian mẫu có số phần tử là $n(\Omega) = 4^{10}$.

Gọi A là biến cố thí sinh làm bài được số điểm không nhỏ hơn 7.

Một thí sinh làm bài được số điểm không nhỏ hơn 7 thuộc một trong các trường hợp sau:

- Đúng 10 câu (được 10 điểm) có: 1 cách chọn.
- Đúng 9 câu và sai 1 câu (được 8,5 điểm) có: $C_{10}^1 \cdot 3 = 30$ cách chọn.
- Đúng 8 câu và sai 2 câu (được 7 điểm) có: $C_{10}^2 \cdot 3^2 = 405$ cách chọn.

Khi đó $n(A) = 1 + 30 + 405 = 436$.

Vậy xác suất để thí sinh làm bài được số điểm không nhỏ hơn 7 là

Vậy $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{436}{4^{10}} = \frac{109}{262144}$.

Chú ý:

Gọi x là số câu đúng (với $0 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{N}$), $10 - x$ là số câu sai thì điểm của thí sinh là $d = x - 0,5(10 - x) = \frac{3x}{2} - 5$.

Vì $d \geq 7$ nên $\frac{3x}{2} - 5 \geq 7 \Leftrightarrow x \geq 8$ nên $x \in \{8; 9; 10\}$. Do đó ta có 3 trường hợp như trong lời giải.

Câu 72: Cho A là tập các số tự nhiên có 7 chữ số. Lấy một số bất kỳ của tập A. Tính xác suất để lấy được số lẻ và chia hết cho 9.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9000000 = 9 \cdot 10^6$ số.

Gọi A là biến cố thỏa mãn bài toán. Ta đếm số phần tử của A.

Ta có các số lẻ chia hết cho 9 là dãy 1000017, 1000035, 1000053, ..., 9999999 lập thành một cấp số cộng có $u_1 = 1000017$ và công sai $d = 18$ nên số phần tử của dãy này là $\frac{9999999 - 1000017}{18} + 1 = 500000$. Vậy $n(A) = 5 \cdot 10^5$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^6} = \frac{1}{18}$ Vì A và B là hai biến cố xung khắc nên hai biến cố này không đồng thời xảy ra.

Câu 73: Từ 2 chữ số 1 và 8 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số sao cho không có 2 chữ số 1 đứng cạnh nhau?

Lời giải

- TH1: Có 8 chữ số 8. Có 1 số
- TH2: Có 1 chữ số 1, 7 chữ số 8. Có 8 cách xếp chữ số 1 nên có 8 số.
- TH3: Có 2 chữ số 1, 6 chữ số 8. Xếp 6 số 8 ta có 1 cách. Từ 6 số 8 ta có 7 chỗ trống để xếp 2 số 1. Nên ta có: $C_7^2 = 21$ số.
- TH4: Có 3 chữ số 1, 5 chữ số 8. Tương tự TH3, từ 5 chữ số 8 ta có 6 chỗ trống để xếp 3 chữ số 1. Nên có: $C_6^3 = 20$ số.
- TH5: Có 4 chữ số 1, 4 chữ số 8. Từ 4 chữ số 8 ta có 5 chỗ trống để xếp 4 chữ số 1. Nên có: $C_5^4 = 5$.

Vậy có: $1 + 8 + 21 + 20 + 5 = 55$ số.

Câu 74: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 10^6 được thành lập từ hai chữ số 0 và 1. Lấy ngẫu nhiên hai số trong S. Xác suất để lấy được ít nhất một số chia hết cho 3 bằng bao nhiêu?

Lời giải

Có: $a_1 \neq 0$; $a_1, \dots, a_6 \in \{0; 1\}$.

Số phần tử của S là: $2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$.

Lấy ngẫu nhiên hai số trong S, có: C_{63}^2 (cách lấy).

Gọi A là biến cố lấy được ít nhất một số chia hết cho 3.

$\Rightarrow \bar{A}$ là biến cố không lấy được số chia hết cho 3.

Ta xét xem trong 63 số của tập S có bao nhiêu số chia được cho 3:

- TH1: Số có 1 chữ số a_1 : có 2 số và hai số này đều không chia được cho 3.

- TH2: Số có 2 chữ số $\overline{a_1a_2}$ với $a_1 = 1$: có 2 số và 2 số này đều không chia được cho 3.
- TH3: Số có 3 chữ số $\overline{a_1a_2a_3}$ với $a_1 = 1$: có 4 số và trong đó có 1 số chia được cho 3.
- TH4: Số có 4 chữ số $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ với $a_1 = 1$: có 8 số và trong đó có 3 số chia được cho 3.
- TH5: Số có 5 chữ số $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ với $a_1 = 1$: có 16 số và trong đó có 6 số chia được cho 3.
- TH6: Số có 6 chữ số $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ với $a_1 = 1$: có 32 số và trong đó có 11 số chia được cho 3.

Do đó có 21 số chia được cho 3 và có 43 số không chia được cho 3.

Do đó: $P(\overline{A}) = \frac{C_{43}^2}{C_{64}^2} = \frac{43}{96}$. Vậy $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{53}{96}$.

Câu 75: Trong lễ tổng kết năm học 2017 – 2018, lớp 12T nhận được 20 cuốn sách gồm 5 cuốn sách toán, 7 cuốn sách vật lý, 8 cuốn sách Hóa học, các sách cùng môn học là giống nhau. Số sách này được chia đều cho 10 học sinh trong lớp, mỗi học sinh chỉ nhận được hai cuốn sách khác môn học. *Bình* và *Bảo* là hai trong số 10 học sinh đó. Tính xác suất để 2 cuốn sách mà *Bình* nhận được giống 2 cuốn sách của *Bảo*.

Lời giải

Gọi x, y, z lần lượt là số phần quà gồm sách Toán và Vật lý, Toán và Hóa học, Vật lý và

Hóa học. Khi đó theo đề bài ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 7 \\ y + z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases}$$

Số phần tử không gian mẫu là $|n_\Omega| = C_{10}^2 \cdot C_8^3 \cdot C_5^5 = 2520$.

Gọi A là biến cố 2 cuốn sách mà *Bình* nhận được giống 2 cuốn sách của *Bảo*.

Số phần tử của A là $n_A = C_2^2 \cdot C_8^3 \cdot C_5^5 + C_8^2 \cdot C_6^1 \cdot C_5^5 + C_8^2 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 784$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{784}{2520} = \frac{14}{45}$

Câu 76: Trong không gian cho $2n$ điểm phân biệt ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}$), trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và trong $2n$ điểm đó có đúng n điểm cùng nằm trên một mặt phẳng. Biết rằng có đúng 505 mặt phẳng phân biệt được tạo thành từ $2n$ điểm đã cho. Tìm n ?

Lời giải

Xem 3 điểm trong $2n$ điểm đã cho lập nên một mặt phẳng, thế thì ta có C_{2n}^3 mặt phẳng.

Tuy nhiên vì trong $2n$ điểm đó có đúng n điểm cùng nằm trên một mặt phẳng nên n điểm này có duy nhất 1 mặt phẳng.

Vậy số mặt phẳng có được là $(C_{2n}^3 - C_n^3 + 1)$.

Theo đề bài ta có: $C_{2n}^3 - C_n^3 + 1 = 505 \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} - \frac{n!}{3!(n-3)!} = 504$

$\Leftrightarrow 2n(2n-1)(2n-2) - n(n-1)(n-2) = 3024 \Leftrightarrow 7n^3 - 9n^2 + 2n - 3024 = 0 \Leftrightarrow n = 8.$

Câu 77: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số được lập từ tập $A = \{0; 1; 2; 3; \dots; 9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để chọn được số tự nhiên có tích các chữ số bằng 7875.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là số cách lập các số có 6 chữ số từ tập A , do đó số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = 9 \cdot 10^5$.

Gọi B là biến cố chọn được số tự nhiên có tích các chữ số bằng $7875 = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$.

Số phần tử của B là $C_6^2 \cdot C_4^3 = 60$.

Suy ra xác suất $P(B) = \frac{60}{9 \cdot 10^5} = \frac{1}{15000}$.

Câu 78: Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất ba lần liên tiếp. Gọi P là tích ba số ở ba lần tung (mỗi số là số chấm trên mặt xuất hiện ở mỗi lần tung), tính xác suất sao cho P không chia hết cho 6.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 6^3 = 216$

Gọi A là biến cố "tích số chấm ở ba lần gieo là một số không chia hết cho 6"

- Trường hợp 1. Số chấm ở cả ba lần gieo đều là các chữ số thuộc tập $\{1, 2, 4, 5\}$
 - + Cả ba lần số chấm khác nhau có A_4^3 khả năng.
 - + Có hai lần số chấm giống nhau có $C_4^2 \cdot \frac{3!}{2!} \cdot 2$ khả năng.
 - + Cả ba lần số chấm giống nhau có 4 khả năng.
 - $\Rightarrow$ Có 64 khả năng.
 - Trường hợp 2. Số chấm ở cả ba lần gieo đều là các chữ số thuộc tập $\{1, 3, 5\}$
 - + Cả ba lần số chấm khác nhau có $3!$ khả năng.
 - + Có hai lần số chấm giống nhau có $C_3^2 \cdot \frac{3!}{2!} \cdot 2$ khả năng.
 - + Cả ba lần số chấm giống nhau có 3 khả năng.
 - $\Rightarrow$ Có 27 khả năng.
- Tuy nhiên ở trường hợp 1 và 2 bị trùng nhau ở khả năng:
- + Ba lần số chấm giống nhau đối với số chấm 1 và 5: Chỉ có 2 khả năng
 - + Có hai lần số chấm giống nhau đối với 1 và 5: Chỉ có 6 khả năng.

Do đó $n(A) = 64 + 27 - (2 + 6) = 83$.

Vậy $P(A) = \frac{83}{216}$.

Câu 79: Một người viết ngẫu nhiên một số có bốn chữ số. Tính xác suất để các chữ số của số được viết ra có thứ tự tăng dần hoặc giảm dần (nghĩa là nếu số được viết dưới dạng $\overline{abcd}$ thì $a < b < c < d$ hoặc $a > b > c > d$).

Lời giải

Viết ngẫu nhiên một số có 4 chữ số nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.

Gọi A là biến cố các chữ số của số được viết ra có thứ tự tăng dần hoặc giảm dần

Gọi số tự nhiên có 4 chữ số mà các chữ số của số được viết ra có thứ tự tăng dần hoặc giảm dần có dạng $\overline{abcd}$.

- Trường hợp 1: số tự nhiên có 4 chữ số mà các chữ số của số được viết ra có thứ tự giảm dần. Vì $a > b > c > d$ nên các chữ số đôi một khác nhau và các chữ số a, b, c, d lấy từ tập $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ và với 4 chữ số lấy ra từ X thì chỉ lập được duy nhất một số thỏa yêu cầu bài toán. Do đó số số tự nhiên có 4 chữ số mà các chữ số của số được viết ra có thứ tự tăng dần là C_9^4 .
- Trường hợp 2: số tự nhiên có 4 chữ số mà các chữ số của số được viết ra có thứ tự tăng dần. Vì $a < b < c < d$ nên các chữ số đôi một khác nhau và các chữ số a, b, c, d lấy từ tập $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ và với 4 chữ số lấy ra từ Y thì chỉ lập được duy nhất một số thỏa yêu cầu bài toán. Do đó số số tự nhiên có 4 chữ số mà các chữ số của số được viết ra có thứ tự giảm dần dần là C_{10}^4 .

Vậy số phần tử của biến cố A là $n(A) = C_9^4 + C_{10}^4 = 336$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{336}{9000} = \frac{14}{375}$.

Câu 80 : Chia ngẫu nhiên 9 viên bi gồm 4 viên màu đỏ và 5 viên màu xanh có cùng kích thước thành ba phần, mỗi phần 3 viên. Xác suất để không có phần nào gồm 3 viên cùng màu bằng

Lời giải

Cách 1: Vì xác suất không thay đổi khi ta coi ba phần này có xếp thứ tự 1, 2, 3.

Chia ngẫu nhiên 9 viên bi gồm 4 viên màu đỏ và 5 viên màu xanh có cùng kích thước thành ba phần, mỗi phần 3 viên như sau:

- Phần 1: Chọn 3 viên cho phần 1 có C_9^3 cách.
- Phần 2: Chọn 3 viên cho phần 2 có C_6^3 cách.

- Phần 3: Chọn 3 viên lại cho phần 3 có 1 cách.

Do đó số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_9^3 \cdot C_6^3 = 1680$.

Gọi A là biến cố không có phần nào gồm 3 viên cùng màu, khi đó ta chia các viên bi thành 3 bộ như sau:

- Bộ 1: 2 đỏ, 1 xanh: Có $C_4^2 C_5^1$ cách chọn
- Bộ 2: 1 đỏ, 2 xanh: Có $C_2^1 C_4^2$ cách chọn
- Bộ 3: gồm các viên bi còn lại (1 đỏ, 2 xanh).

Vì bộ 2 và 3 có các viên bi giống nhau để không phân biệt hai bộ này nên có $\frac{3!}{2!}$ sắp xếp

3 bộ vào 3 phần trên. Do đó $n(A) = \frac{3!}{2!} C_4^2 C_5^1 C_2^1 C_4^2 = 1080$.

Ta được $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1080}{1680} = \frac{9}{14}$.

Cách 2: Mã hóa:

- 4 viên bi đỏ giống nhau là 1, 1, 1, 1.
- 5 viên bi xanh giống nhau là 0, 0, 0, 0, 0.

+ Xếp 9 phần tử hàng ngang có $|\Omega| = \frac{9!}{5!4!} = 126$ (cách).

+ Một cách xếp thỏa yêu cầu là $1, 1, 0 \mid 1, 0, 0 \mid 1, 0, 0$.

- Hoán vị các nhóm có $\frac{3!}{2!} = 3$ (do có 2 nhóm giống nhau).

- Rồi hoán vị các số trong mỗi nhóm có: $3.3.3 = 27$.

Do đó biến cố A có: $|\Omega_A| = 3 \times 27 = 81$. Vậy $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{81}{126} = \frac{9}{14}$.

Câu 81: Cho đa giác đều (P) có 20 đỉnh. Lấy tùy ý 3 đỉnh của (P), tính xác suất để 3 đỉnh lấy được tạo thành một tam giác vuông sao cho, không có cạnh nào là cạnh của (P).

Lời giải

Không gian mẫu: Chọn 3 đỉnh bất kì từ 20 đỉnh để tạo thành một tam giác $\Rightarrow n(\Omega) = C_{20}^3$

Biến cố A: 3 đỉnh lấy được tạo thành một tam giác vuông sao cho, không có cạnh nào là cạnh của (P).

Ta có đa giác (P) nội tiếp một đường tròn, nên tam giác vuông tạo ra từ một đường chéo (qua tâm) bất kì và một điểm khác (tam giác nội tiếp có một cạnh là đường kính là tam giác vuông)

Số cách chọn đường chéo qua tâm là 10 cách.

Một đường chéo đi qua 2 đỉnh, nên theo yêu cầu, đỉnh thứ ba không thể là 4 đỉnh nằm cạnh hai đỉnh đã chọn $\rightarrow$ có $20 - 2 - 4 = 14$ cách chọn (trừ hai đỉnh tạo thành đường chéo nữa) Vậy $n(A) = 10 \times 14 = 140$ tam giác.

Vậy xác suất để 3 đỉnh lấy được tạo thành một tam giác vuông sao cho, không có cạnh nào là cạnh của (P) là $p = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{140}{C_{20}^3} = \frac{7}{57}$.

Câu 82: Một hộp đựng 26 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 26. Bạn Hải rút ngẫu nhiên cùng một lúc ba tấm thẻ. Hỏi có bao nhiêu cách rút sao cho bất kỳ hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn kém nhau ít nhất 2 đơn vị?

Lời giải

Giả sử số ghi trên ba thẻ sắp xếp theo thứ tự tăng dần là $a < b < c$.

Vì hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn kém nhau ít nhất 2 đơn vị nên ta có:
$$\begin{cases} a < b-1 \\ b < c-1 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq a < b-1 < c-2 \leq 24.$$

Vậy số cách lấy là: $C_{24}^3 = 2024$ cách.

Câu 83: Cho A là tập các số tự nhiên có 9 chữ số. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập A. Tính xác suất lấy được một số lẻ và chia hết cho 9.

Lời giải

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = 9 \cdot 10^8$

Gọi B là biến cố thỏa yêu cầu bài toán.

Ta có các số lẻ có 9 chữ số chia hết cho 9 là 100000017, 100000035, 100000053, ..., 999999999 lập thành một cấp số cộng với $u_1 = 100000017$ và công sai $d = 18$.

Nên số phần tử của dãy là $\frac{999999999 - 100000017}{18} + 1 = 50000000$

Vậy $n(B) = 5 \cdot 10^7$. Xác suất là $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{5 \cdot 10^7}{9 \cdot 10^8} = \frac{1}{18}$.

Câu 84: Cho đa giác đều (H) có 15 đỉnh. Người ta lập một tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của (H). Tính số tứ giác được lập thành mà không có cạnh nào là cạnh của (H).

Lời giải

Kí hiệu đa giác là $A_1 A_2 \dots A_{15}$.

- TH1: Chọn tứ giác có dạng $A_1 A_m A_n A_p$ với $1 < m < n < p \leq 15$. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là số các đỉnh nằm giữa A_1 với A_m , A_m với A_n , A_n với A_p và A_p với A_1 .

Khi đó ta có hệ
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ x_i \geq 1, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

Đặt $x'_i = x_{i-1}$ thì $x'_i \geq 0$ và $x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = 7$ nên có $C_{10}^3 = 120$ tứ giác.

- TH2: Không chọn đỉnh A_1 . Giả sử tứ giác được chọn là $A_m A_n A_p A_q$ với $1 < m < n < p < q \leq 15$. Gọi x_1 là số các đỉnh giữa A_1 và A_m , x_2 là số các đỉnh giữa A_m và A_n , x_3 là số các đỉnh giữa A_n và A_p , x_4 là số các đỉnh giữa A_p và A_q , x_5 là các đỉnh giữa A_q và A_1 .

Ta có hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 1, x_5 \geq 0 \end{cases}$. Tương tự trường hợp trên có $C_{11}^4 = 330$ tứ giác.

Vậy có 450 tứ giác

Câu 85: Có bao nhiêu số có 5 chữ số tận cùng là 1 và chia hết cho 7.

Lời giải

Số tự nhiên có 5 chữ số thỏa mãn đề bài là $\overline{abcd1}$

Giả sử $\overline{abcd1} = 10.\overline{abcd} + 1 = 3.\overline{abcd} + 7.\overline{abcd} + 1$

Ta có chia hết cho 7 khi $3.\overline{abcd} + 1$ chia hết cho 7.

Khi đó, $3.\overline{abcd} + 1 = 7k \Leftrightarrow \overline{abcd} = 2k + \frac{k-1}{3}, k \in \mathbb{Z}$ là số nguyên khi $k = 3l + 1$.

Suy ra $\overline{abcd} = 7l + 2 \Rightarrow 1000 \leq 7l + 2 \leq 9999 \Leftrightarrow \frac{998}{7} \leq l \leq \frac{9997}{7}$ có 1286 giá trị của l .

Vậy có 1286 số thỏa mãn bài toán.

Câu 86: Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có năm chữ số. Tính xác suất để số được chọn có dạng $\overline{abcde}$ trong đó $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq 9$.

Lời giải

Có 9.10^4 số tự nhiên có 5 chữ số được tạo thành.

Từ $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq 9 \Rightarrow 1 \leq a < b+1 < c+2 < d+3 < e+4 \leq 13$.

Đặt $a_1 = a, a_2 = b+1, a_3 = c+2, a_4 = d+3, a_5 = e+4 \Rightarrow 1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 \leq 13$.

Mỗi cách chọn bộ số $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ tương ứng ta được một số $\overline{abcde}$ thỏa mãn bài toán.

Số các số có dạng $\overline{abcde}$ thỏa mãn là $C_{13}^5 = 1287$ số.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \frac{1287}{9.10^4} = \frac{143}{10000}$.

Câu 87: Cho các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập một số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau dạng $\overline{abcdef}$. Tính xác suất để số lập được thỏa mãn $a+b=c+d=e+f$?

Lời giải

Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = 6.6! = 4320$.

Số lập được thỏa mãn $a+b=c+d=e+f$ ta có các trường hợp sau:

- TH1: xét các bộ số $\{0;6\}, \{1;5\}, \{2;4\}$:

Nếu $\{a;b\} = \{0;6\}$ thì có 1 cách sắp xếp. Khi đó hai cặp số còn lại có: $2.2.2 = 8$ cách.

Nếu $\{a; b\} = \{1; 5\}$ thì có 2 cách sắp xếp. Khi đó hai cặp số còn lại có: $2.2.2 = 8$ cách.

Nếu $\{a; b\} = \{2; 4\}$ thì có 2 cách sắp xếp. Khi đó hai cặp số còn lại có: $2.2.2 = 8$ cách.

Suy ra có: $8.5 = 40$ (số).

- TH2: xét các bộ số $\{0; 5\}$, $\{1; 4\}$, $\{2; 3\}$: tương tự TH1 có $8.5 = 40$ (số).
- TH3: xét các bộ số $\{1; 6\}$, $\{2; 5\}$, $\{3; 4\}$: có $3.2.8 = 48$ (số).

$$\text{Vậy xác suất } P(A) = \frac{40 + 40 + 48}{4320} = \frac{4}{135}.$$

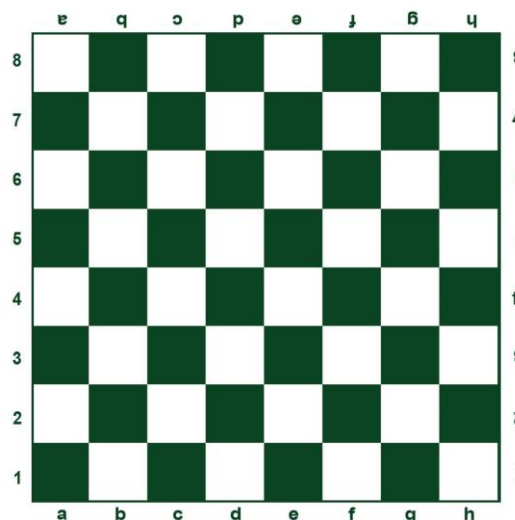
Câu 88: Có tất cả bao nhiêu hình chữ nhật trên bàn cờ vua 8×8 ?

Lời giải

Số các hình chữ nhật chỉ chứa 1 ô vuông là 64. Số cách chọn ra 2 ô vuông phân biệt trong 64 ô vuông này là $C_{64}^2 = 2016$. Trong đó số cách chọn 2 ô thuộc cùng 1 hàng hoặc 1 cột là $16C_8^2$. Suy ra có 448 hình chữ nhật mà có chiều rộng là 1 (các ô vuông của nó cùng thuộc 1 hàng hoặc 1 cột). Vậy số cách chọn 2 ô vuông mà không cùng hàng hay cột là:

$$2016 - 448 = 1568$$

Nhận xét: Với 2 ô vuông không cùng hàng cùng cột ta có thể tạo ra 1 hình chữ nhật bằng cách chiếu



Các đường song song với các cạnh của bàn cờ và đi qua 2 ô vuông đó. Cụ thể như sau: Với 2 ô vuông C5 và F3 thì ta có thể tạo thành hình chữ nhật có 4 đỉnh là: C5; C3; F3; F5. Như vậy mỗi hình chữ nhật có thể được tạo ra bởi 2 cặp ô vuông không cùng hàng cùng cột. Do đó số hình chữ nhật trong trường hợp này là $\frac{1568}{2} = 784$ hình chữ nhật.

Câu 89: Một hộp đựng 26 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 26. Bạn Hải rút ngẫu nhiên cùng một lúc ba tấm thẻ. Hỏi có bao nhiêu cách rút sao cho bất kỳ hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn kém nhau ít nhất 2 đơn vị?

Lời giải

Giả sử số ghi trên ba thẻ sắp xếp theo thứ tự tăng dần là $a < b < c$.

Vì hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn kém nhau ít nhất 2 đơn vị nên ta có:
$$\begin{cases} a < b-1 \\ b < c-1 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq a < b-1 < c-2 \leq 24.$$

Vậy số cách lấy là: $C_{24}^3 = 2024$ cách.

Câu 90: Có 4 cặp vợ chồng cần xếp ngồi vào một bàn tròn. Tính số cách xếp sao cho có vợ chồng nhà A là ngồi cạnh nhau còn các cặp vợ chồng khác thì hai người là vợ chồng của nhau thì không ngồi cạnh nhau.

Lời giải

Có 2 cách sắp xếp cho vợ chồng A ngồi vào bàn tròn (giả sử ông chồng ngồi cố định, còn bà vợ có 2 cách xếp).

- Ta lại xếp 1 cặp vợ chồng khác vào bàn tròn, cặp vợ chồng này có thể đổi chỗ cho nhau nên có $2!$ cách.
- Bây giờ có tất cả 3 khe trống (vì cặp vợ chồng A không cho ai ngồi giữa). Ta xếp 1 cặp vợ chồng khác vào 3 khe này nên có $A_3^2 = 6$ cách.
- Bây giờ có tất cả 5 khe trống. Ta xếp 1 cặp vợ chồng còn lại vào 5 khe này nên có $A_5^2 = 20$ cách.

Vậy có $2 \times 2 \times 6 \times 20 = 480$ cách.

LỜI KẾT

Mặc dù chuyên đề này mình gửi tới cho các bạn chưa đầy đủ các vấn đề của chương trình toán liên quan tới ôn thi THPT Quốc Gia, nhưng mong rằng nó cũng giúp ích được phần nào cho các bạn trong việc giải những nhóm câu mà mình đã đề cập tới trong chuyên đề. Rất hy vọng nhận được sự ủng hộ và đóng góp từ mọi người. Một lần nữa cảm ơn bạn đọc đã theo dõi, chúc các bạn một mùa thi sắp tới thành công!