

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ - ĐÁNH GIÁ (KHÔNG CHỨA THAM SỐ)

PHƯƠNG PHÁP

Vận dụng các kết quả sau :

- ✚ **Kết quả 1 :** Nếu $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên K (với K là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng) thì $f(x) = 0$ có tối đa một nghiệm trên K .
- ✚ **Kết quả 2 :** Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$.
- ✚ **Kết quả 3 :** Nếu $f(x)$ là hàm đơn điệu trên $K, \forall a, b \in K; f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$.
- ✚ **Kết quả 4 :** Nếu hàm $f(x)$ tăng trong khoảng $(a; b)$ và hàm $g(x)$ là hàm một hàm giảm trong khoảng $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

Các bước giải phương trình :

- ✚ **Bước 1 :** Tìm điều kiện xác định của phương trình.
- ✚ **Bước 2 :** Biến đổi phương trình sao cho một vế là hàm số đơn điệu, một vế là hằng số hoặc một vế là hàm đồng biến và vế còn lại là hàm số nghịch biến.
- ✚ **Bước 3 :** Nhẩm nghiệm của phương trình trên mỗi khoảng xác định (nếu có).
- ✚ **Bước 4 :** Kết luận nghiệm của phương trình.

Câu 1. Tìm số nghiệm của phương trình $(x^2 - 2022x)\ln x - x + 2021 = 0$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = (0; +\infty)$.

Phương trình $(x^2 - 2022x)\ln x - x + 2021 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2022x)\ln x = x - 2021$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2022x}{x - 2021} = \frac{1}{\ln x} \Leftrightarrow \frac{1}{\ln x} + \frac{x}{x - 2021} - x = 0$$

(NX: $x = 1$ và $x = 2021$ không là nghiệm của phương trình).

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\ln x} + \frac{x}{x - 2021} - x$ trên $(0; +\infty) \setminus \{1; 2021\}$.

$$\text{Có } f'(x) = -\frac{1}{x \ln x} - \frac{2021}{(x - 2021)^2} - 1 < 0, \forall x \in (0; +\infty) \setminus \{1; 2021\}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	2021	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	-
$f(x)$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm.

- Câu 2.** Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ thuộc đoạn $[1; 2020]$ thỏa mãn y là số nguyên và $\ln x + e^{\ln x} = y + e^y$?
- A. 6. B. 7. C. 2021. D. 2020.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\ln x + e^{\ln x} = y + e^y$

Xét hàm số $f(t) = t + e^t$ có $f'(t) = 1 + e^t > 0, \forall t$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó ta có: $f(\ln x) = f(y) \Leftrightarrow \ln x = y$

Ta có: $1 \leq x \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq \ln x \leq \ln 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \ln 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 7,61\dots$

Do y là số nguyên thuộc đoạn $[1; 2020]$ nên $y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

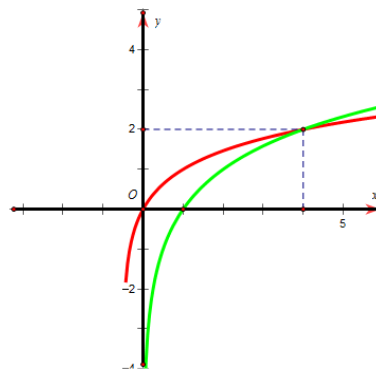
Kết luận: có 7 cặp số $(x; y)$ thỏa yêu cầu bài toán.

- Câu 3:** Có bao nhiêu cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $\log_2(x + 2y) \leq \log_3(2x + 4y + 1)$ và $\log_3(x + y) \geq y - 2$?
- A. 7. B. 6. C. 10. D. 8.

Lời giải

Chọn B

♦ Đặt $t = x + 2y, t > 0$, khi đó $\log_2(x + 2y) \leq \log_3(2x + 4y + 1)$ trở thành $\log_2 t \leq \log_3(2t + 1)$.



- Dựa vào đồ thị ta thấy $\log_2 t \leq \log_3(2t + 1) \Leftrightarrow 0 < t \leq 4 \Leftrightarrow 0 < x + 2y \leq 4$.
- Kết hợp với điều kiện $\log_3(x + y) \geq y - 2$ ta có các cặp số tự nhiên $(x; y) = \{(0; 1), (0; 2), (0; 3), (1; 0), (1; 1), (1; 2)\}$.

- Câu 4:** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq y \leq 2020$ và $\log_3\left(\frac{2^x - 1}{y}\right) = y + 1 - 2^x$?
- A. 2019. B. 11. C. 2020. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có:
$$\begin{cases} y \neq 0 \\ \frac{2^x - 1}{y} > 0 \Leftrightarrow 2^x > 1 \Leftrightarrow x > 0. \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ta có phương trình $\Leftrightarrow \log_3(2^x - 1) + 2^x - 1 = \log_3 y + y (*)$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0; +\infty)$.

Khi đó $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$ do đó hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

(*) có dạng $f(2^x - 1) = f(y) \Leftrightarrow y = 2^x - 1$.

Vì $0 \leq y \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq 2^x - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 2^x \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \log_2(2021)$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \log_2(2021) \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}.$$

Vậy có 11 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 5: Phương trình $\log_2^3(x-1) - 27y^3 = 8^y + 1 - x$ có bao nhiêu nghiệm nguyên $(x; y)$ với $x \in [8^{1992}; 8^{2020}]$?

A. 26**B.** 28**C.** 24**D.** 30

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2^3(x-1) - 27y^3 = 8^y + 1 - x \Leftrightarrow \log_2^3(x-1) + x - 1 = 27y^3 + 2^{3y}$

Đặt $t = \log_2(x-1) \Leftrightarrow x-1 = 2^t$. Thay vào phương trình ta được $t^3 + 2^t = (3y)^3 + 2^{3y} (1)$.

Xét hàm số $y = f(u) = u^3 + 2^u$.

Ta có $f'(u) = 3u^2 + 2^u \ln 2 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow f(t) = f(3y) \Leftrightarrow t = 3y \Leftrightarrow \log_2(x-1) = 3y \Leftrightarrow x = 8^y + 1$.

Do $x \in [8^{1992}; 8^{2020}]$ nên $8^{1992} \leq 8^y + 1 \leq 8^{2020} \Leftrightarrow 1992 \leq y \leq 2019$ với $y \in \mathbb{Z}$.

Vậy có 28 giá trị nguyên của y nên phương trình có 28 nghiệm.

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT BẰNG PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG HÀM ĐẶC TRƯNG (KHÔNG CHỨA THAM SỐ)

PHƯƠNG PHÁP

- ✚ Bước 1 : Đưa phương trình về dạng $f(u(x)) = f(v(x))$.
- ✚ Bước 2 : Xét hàm số $y = f(t)$ trên D .
- Tính $y' = f'(t)$.
- Chứng minh hàm số $y' = f'(t)$ luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên D .
- Suy ra $f(u(x)) = f(v(x)) \Leftrightarrow u(x) = v(x)$.

- Câu 1.** Biết rằng phương trình $\log_2 \left(\frac{x^2+2}{2x+5} \right) = -x^2 + 4x + 9$ có hai nghiệm $x = a + b\sqrt{c}$ và $x = a - b\sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính tích $a.b.c$.
- A.** 8. **B.** -8. **C.** -12. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $\frac{x^2+2}{2x+5} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{-5}{2}$

$$\log_2 \left(\frac{x^2+2}{2x+5} \right) = -x^2 + 4x + 9 \Leftrightarrow \log_2 (x^2+2) - \log_2 (2x+5) = -x^2 + 4x + 9$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2+2) + x^2 + 2 = \log_2 (2x+5) + \log_2 2 + 4x + 10$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2+2) + x^2 + 2 = \log_2 (4x+10) + 4x + 10$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0; +\infty)$

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty)$$

Đặt: $\begin{cases} u = x^2 + 2 > 0 \\ v = 4x + 10 > 0 \end{cases}$. Khi đó ta được $\log_2 u + u = \log_2 v + v \Leftrightarrow f(u) = f(v)$

Do đó $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow x^2 + 2 = 4x + 10$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2\sqrt{3} \\ x = 2 - 2\sqrt{3} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vì a, b, c là các số nguyên dương nên $a = 2, b = 2, c = 3$. Vậy $a.b.c = 12$.

- Câu 2.** Phương trình $\log_2 \frac{x^2+3x+2}{3x^2-5x+8} = x^2 - 4x + 3$ có các nghiệm $x_1; x_2$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$.
- A.** 31. **B.** -1. **C.** 1. **D.** -31.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện: } \frac{x^2+3x+2}{3x^2-5x+8} > 0 \Leftrightarrow x^2+3x+2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < -2 \end{cases} \text{ (do } 3x^2-5x+8 = 3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{71}{12} > 0)$$

$$\text{Phương trình đã cho tương đương với: } \log_2 \frac{x^2+3x+2}{3x^2-5x+8} = x^2-4x+3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2+3x+2) - \log_2 (3x^2-5x+8) = \frac{1}{2} [(3x^2-5x+8) - (x^2+3x+2)]$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2+3x+2) + \frac{1}{2}(x^2+3x+2) = \log_2 (3x^2-5x+8) + \frac{1}{2}(3x^2-5x+8) \quad (*)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \log_2 t + \frac{1}{2}t, (t > 0); f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + \frac{1}{2} > 0 \quad \forall t > 0.$$

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mà phương trình $(*)$ có dạng: $f(x^2+3x+2) = f(3x^2-5x+8)$.

Nên phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$(3x^2-5x+8) = (x^2+3x+2) \Leftrightarrow 2x^2-8x+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện ban đầu)}$$

$$\text{Vậy } A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2 = 1.$$

Câu 3. Cho phương trình sau:

$$\frac{1}{2} \log_2 (x+2) + x + 3 = \log_2 \frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}.$$

Gọi S là tổng tất cả các nghiệm phương trình trên. Giá trị của S là:

$$\text{A. } S = -2. \quad \text{B. } S = \frac{1-\sqrt{13}}{2}. \quad \text{C. } S = 2. \quad \text{D. } S = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} -2 < x < -\frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình đã cho tương đương } \frac{1}{2} \log_2 (x+2) + x + 3 = \log_2 \frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x+2} + (\sqrt{x+2}-1)^2 = \log_2 \left(2 + \frac{1}{x}\right) + \left[\left(2 + \frac{1}{x}\right) - 1\right]^2 \quad (*)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \log_2 t + (t-1)^2, t > 0.$$

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2(t-1) = \frac{2 \ln 2 t^2 - 2 \ln 2 t + 1}{t \cdot \ln 2} > 0, \forall t > 0$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Phương trình } (*) \text{ có dạng } f(\sqrt{x+2}) = f\left(2 + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 2 + \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x+2 = \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} + 4 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 3x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \text{ . Kết hợp với điều kiện ta được } \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \text{ . Vậy } S = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \text{ .}$$

Câu 4. Nghiệm nhỏ nhất của phương trình $2\log_5 \frac{x^2+1}{x} + 2x^4 - 6x^2 + 1 = 0$

có dạng $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, trong đó $a, c \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{N}, \frac{b}{a}$ tối giản. Tính giá trị của biểu thức: $P = a + b + c$

A. $P = 6$.

B. $P = 4$.

C. $P = 8$.

D. $P = 5$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$

$$\text{Ta có: } 2\log_5 \frac{x^2+1}{x} + 2x^4 - 6x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \log_5 (x^2+1) + x^4 + 2x^2 + 1 = \log_5 x + \frac{1}{2} + 5x^2$$

$$\Leftrightarrow \log_5 (x^2+1) + (x^2+1)^2 = \log_5 (x\sqrt{5}) + (x\sqrt{5})^2 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + \log_5 t$ trên khoảng $(0; +\infty)$; $f'(t) = 2t + \frac{1}{t \ln 5} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có: } (*) \Leftrightarrow f(x^2+1) = f(x\sqrt{5}) \Leftrightarrow x^2+1 = x\sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Nghiệm nhỏ nhất của phương trình là $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Vậy $P = -1 + 5 + 2 = 6$.

Câu 5. Tất cả các nghiệm của phương trình

$$2021^x = 4041 - 2021x + \log_{2021} 2021(2x+1)^{2021} \text{ thỏa mãn bất phương trình nào sau đây?}$$

A. $x^2 - 1 > 0$.

B. $x^2 - 3x < 0$.

C. $x^2 - x \geq 0$.

D. $x^2 + 2x - 3 \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện ban đầu: $x > -\frac{1}{2}$

Ta có phương trình tương đương với

$$2021^x = 4041 - 2021x + \log_{2021} 2021(2x+1)^{2021} \Leftrightarrow 2021^x = 4042 - 2021x + 2021 \cdot \log_{2021} (2x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2021^x + 2021x - 2021 = 4042x + 2021 + 2021 \cdot \log_{2021} (2x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2021^{x-1} + x - 1 = 2x + 1 + \log_{2021} (2x+1)$$

$$\Leftrightarrow (2021^{x-1}) + \log_{2021} (2021^{x-1}) = (2x+1) + \log_{2021} (2x+1) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_{2021} t$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2021} > 0, \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Phương trình (*) $\Leftrightarrow f(2021^{x-1}) = f(2x+1) \Leftrightarrow 2021^{x-1} = 2x+1 \Leftrightarrow 2021^{x-1} - 2x - 1 = 0$

Xét hàm số $g(x) = 2021^{x-1} - 2x - 1$ trên $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có: $g'(x) = 2021^{x-1} \cdot \ln 2021 - 2$; $g''(x) = 2021^{x-1} \cdot \ln^2 2021 > 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Suy ra hàm số $g'(x)$ đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \Rightarrow$ Phương trình $g'(x) = 0$ có tối đa một nghiệm trên $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ có tối đa một điểm cực trị

$\Rightarrow$ Phương trình $g(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm phân biệt.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} g(x) = 2021^{-\frac{3}{2}} > 0$; $g(0) = -\frac{2020}{2021}$

$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} g(x) \cdot g(0) < 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

$g(1) \cdot g(2) = (-2) \cdot 2016 = -4032 < 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$

Do phương trình $g(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm nên phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm $x_1; x_2$ trong đó $x_1 \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ và $x_2 \in (1; 2)$. Đến đây ta thử từng đáp án như sau:

Xét bất phương trình $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow$ Nghiệm x_1 không thỏa mãn bất phương trình.

Xét bất phương trình $x^2 - 3x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3 \Rightarrow$ Nghiệm x_1 không thỏa mãn bất phương trình.

Xét bất phương trình $x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$ Các nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn bất phương trình.

Xét bất phương trình $x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \Rightarrow$ Nghiệm x_2 không thỏa mãn bất phương trình.

Câu 6. Cho phương trình sau: $\log_2(x^2 - 2x - 1) + x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0$. Biết rằng phương trình trên có 1 nghiệm dương có dạng $x_0 = a + b\sqrt{c}$, trong đó $a; b \in \mathbb{Q}$, c là số nguyên tố. Tính giá trị biểu thức $T = 2a + 3b + c$

A. $T = 8$.

B. $T = \frac{25}{4}$.

C. $T = \frac{17}{2}$.

D. $T = \frac{31}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện ban đầu: $x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 + \sqrt{2} \\ x < 1 - \sqrt{2} \end{cases}$

Do x_0 là nghiệm dương nên ta xét phương trình trên khoảng $(1 + \sqrt{2}; +\infty)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \log_2(x^2 - 2x - 1) + x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0 &\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 2x - 1) + (x^2 - 2x - 1)(x + 1) = x + 1 \\ &\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 2x - 1)(x + 1) + (x^2 - 2x - 1)(x + 1) = \log_2(x + 1) + x + 1 \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_2 t$ trên khoảng $(0; +\infty)$, $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\text{Ta có: } (*) \Leftrightarrow f((x^2 - 2x - 1)(x + 1)) = f(x + 1) \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 1)(x + 1) = x + 1$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \\ x = -1 \end{cases}$$

Đổi chiều với điều kiện, suy ra $x = 1 + \sqrt{3}$. Vậy $T = 2a + 3b + c = 2.1 + 3.1 + 3 = 8$.

Câu 7. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ với $x \leq 2020$ thỏa mãn

$$2(3x - y) = 3(1 + 9^y) - \log_3(2x - 1)$$

A. 3.

B. 1010.

C. 4.

D. 2020.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_3(2x - 1) = t \Rightarrow 2x = 3^t + 1$, ta được phương trình như sau:

$$3(3^t + 1) - 2y = 3(1 + 3^{2y}) - t \Leftrightarrow 3.3^t + t = 3.3^{2y} + 2y \quad (*)$$

Xét hàm số $f(u) = 3.3^u + u \Rightarrow f'(u) = 3.3^u \ln 3 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow t = 2y$, vậy nên $2x = 3^{2y} + 1 \Leftrightarrow 9^y = 2x - 1$.

Vì $x \leq 2020 \Rightarrow 9^y \leq 4039 \Leftrightarrow y \leq \log_9 4039$. Vì y nguyên dương nên $y \in \{1; 2; 3\}$.

Ta thấy với mỗi giá trị nguyên của y thì tìm được 1 giá trị nguyên của x . Vậy có 3 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 8. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ là các số nguyên không âm thỏa mãn

$$2(1 + \sqrt{x + 2y})^2 + \log_2(x + 2y) = 2\log_2(x^2 + y^2 + 2xy + x) + 2(x + y)^2 + 4x + 4y$$

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Từ } 2(1 + \sqrt{x + 2y})^2 + \log_2(x + 2y) = 2\log_2(x^2 + y^2 + 2xy + x) + 2(x + y)^2 + 4x + 4y$$

$$\text{Biến đổi về: } 2\sqrt{x + 2y} + \log_2(2\sqrt{x + 2y}) = \log_2[(x + y)^2 + x] + [(x + y)^2 + x] \quad (*)$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên $[0; +\infty)$

$$\text{Có } (*) \Leftrightarrow f(2\sqrt{x + 2y}) = f((x + y)^2 + x) \Leftrightarrow 2\sqrt{x + 2y} = (x + y)^2 + x \quad (**)$$

$$\text{Có } x = 2\sqrt{x + 2y} - (x + y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 \leq 2\sqrt{x + 2y} \leq 2\sqrt{x + 2y + x} = 2\sqrt{2(x + y)}$$

$$\text{Suy ra } (x + y)^4 \leq 8(x + y) \Rightarrow 0 \leq x + y \leq 2$$

Với $x + y = 0 \Leftrightarrow (x = 0; y = 0)$ thỏa (**)

Với $x + y = 1$. Ta được 2 cặp số $(x; y)$: $(x = 0; y = 1)$ không thỏa (**) và $(x = 1; y = 0)$ thỏa (**)

Với $x + y = 2$. Ta được 3 cặp số $(x; y)$: $(x = 0; y = 2)$ thỏa (**); $(x = 2; y = 0)$ không thỏa (**);

$(x=1; y=1)$ không thỏa (**).

Vậy có tất cả 3 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \sqrt[3]{\ln|x| + \sqrt[3]{\ln x}}$. Biết rằng phương trình

$$f^3\left(\log_2(x-2) + \sqrt[3]{9x^2}\right) + f^3\left(7 + 6\sqrt[3]{\frac{x}{3}} + \log_2 \sqrt[3]{\frac{3}{x}}\right) = \ln(x^2)$$
 có nghiệm x_0 được viết dưới dạng

là: $x_0 = \frac{a}{\sqrt[3]{b}-c}$ với a, b, c nguyên dương. Từ đó giá trị của biểu thức $P = a - b + c$ là

A. 3.

B. 1.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x-2 > 0 \\ x \neq 0 \\ 3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

Đầu tiên hàm số $f(x) = \sqrt[3]{\ln|x| + \sqrt[3]{\ln x}}$ với $\forall x \in (2; +\infty)$ có $f'(x) > 0 \forall x \in (2; +\infty)$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$

$$\text{Ta có: } f(x) = \sqrt[3]{\ln|x| + \sqrt[3]{\ln x}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt[3]{\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt[3]{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}} = \sqrt[3]{\ln x + \sqrt[3]{-\ln x}} = \sqrt[3]{\ln x - \sqrt[3]{\ln x}}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} f^3(x) = \ln x + \sqrt[3]{\ln x} \\ f^3\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x - \sqrt[3]{\ln x} \Rightarrow f^3(x) + f^3\left(\frac{1}{x}\right) = 2\ln x = \ln(x^2) \Rightarrow f^3\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x^2) - f^3(x) \\ x > 2 > 1 \Leftrightarrow \ln x > 0 \end{cases}$$

Từ đó ta có:

$$f^3\left(\log_2(x-2) + \sqrt[3]{9x^2}\right) = \ln(x^2) - f^3\left(7 + 6\sqrt[3]{\frac{x}{3}} + \log_2 \sqrt[3]{\frac{3}{x}}\right) = f^3\left(7 + 6\sqrt[3]{\frac{1}{3x}} + \log_2 \sqrt[3]{3x}\right)$$

$$\Rightarrow \log_2(x-2) + \sqrt[3]{9x^2} = 7 + 6\sqrt[3]{\frac{1}{3x}} + \log_2 \sqrt[3]{3x} \Leftrightarrow \log_2 \frac{(x-2)}{\sqrt[3]{3x}} + \sqrt[3]{9x^2} - 6\sqrt[3]{\frac{1}{3x}} = 7$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{(x-2)}{\sqrt[3]{3x}} + \frac{3x-6}{\sqrt[3]{3x}} = 7 \Leftrightarrow \log_2 \left[\frac{(x-2)}{\sqrt[3]{3x}} \right] + 3 \cdot \left[\frac{(x-2)}{\sqrt[3]{3x}} \right] = \log_2(2) + 3 \cdot (2)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + 3t$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 3 > 0$ nên $f(t)$ đồng biến. Phương trình trên chính là

$$f\left(\frac{(x-2)}{\sqrt[3]{3x}}\right) = f(2) \Leftrightarrow \frac{(x-2)}{\sqrt[3]{3x}} = 2 \Leftrightarrow (x-2)^3 = 24x$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = (x+2)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{2} = x+2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[3]{2}-1}$$

Dễ thấy nghiệm này thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = \frac{2}{\sqrt[3]{2}-1} \Rightarrow P = a - b + c = 1$

- Câu 10.** Biết phương trình: $\log_2 \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 5x + 8} = x^2 - 4x + 3$ có nghiệm các nghiệm $x_1; x_2$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$.
- A.** 31. **B.** -31. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có : $3x^2 - 5x + 8 > 0, \forall x \in R$ nên điều kiện của phương trình là: $x^2 + 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > -1 \end{cases}$

$$+ \log_2 \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 5x + 8} = x^2 - 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + 3x + 2) - \log_2 (3x^2 - 5x + 8) = \frac{1}{2} [(3x^2 - 5x + 8) - (x^2 + 3x + 2)]$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + 3x + 2) + \frac{1}{2} (x^2 + 3x + 2) = \log_2 (3x^2 - 5x + 8) + \frac{1}{2} (3x^2 - 5x + 8)$$

+ Xét hàm số

$$f(t) = \log_2 t + \frac{1}{2}t, (t > 0); f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + \frac{1}{2} > 0, \forall t > 0.$$

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên tập $(0; +\infty)$.

Mà phương trình có dạng : $f(x^2 + 3x + 2) = f(3x^2 - 5x + 8)$.

Vậy phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$(3x^2 - 5x + 8) = (x^2 + 3x + 2) \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} (t/m).$$

$$\text{Vậy } A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = 1.$$

- Câu 11.** Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_2 (2x + 2) + x - 3y = 8^y$?

- A.** 2019. **B.** 2018. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Do $0 \leq x \leq 2020$ nên $\log_2 (2x + 2)$ luôn có nghĩa.

$$\text{Ta có } \log_2 (2x + 2) + x - 3y = 8^y$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x + 1) + x + 1 = 3y + 2^{3y}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x + 1) + 2^{\log_2 (x + 1)} = 3y + 2^{3y} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t + 2^t$.

Tập xác định $D = R$ và $f'(t) = 1 + 2^t \ln 2 \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t \in R$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên R .

Do đó $(1) \Leftrightarrow \log_2(x+1) = 3y \Leftrightarrow x+1 = 2^{3y} \Leftrightarrow y = \log_8(x+1)$.

Ta có $0 \leq x \leq 2020$ nên $1 \leq x+1 \leq 2021$ suy ra $0 \leq \log_8(x+1) \leq \log_8 2021$.

Lại có $\log_8 2021 \approx 3,66$ và $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 4 cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là các cặp $(0; 0), (7; 1), (63; 2), (511; 3)$.

Câu 12. Biết phương trình $\log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5$ có hai nghiệm là a và $\frac{a}{b}$ với $a; b$ là các số nguyên

tốt. Giá trị của b là:

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5.$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} - 1 = 3x^2 - 8x + 4 \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x-1}{3(x-1)^2} = 3(x-1)^2 - (2x-1).$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x-1) + (2x-1) = \log_3(3(x-1)^2) + 3(x-1)^2 \quad (1).$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_3(t) + t$ với $t > 0$.

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \quad \forall t > 0.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow f(2x-1) = f(3(x-1)^2).$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = 3(x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \text{ hay } \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Vậy hai nghiệm của phương trình là 2 và $\frac{2}{3}$ suy ra $b = 3$.

Câu 13. Tìm số nghiệm của phương trình

$$\log_3 \sqrt{x^2 - x + 1} + \log_{\frac{1}{3}}(1-2x) + 2x = 1 - \sqrt{x^2 - x + 1}$$

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x < \frac{1}{2}$

Ta có: $\log_3 \sqrt{x^2 - x + 1} + \log_{\frac{1}{3}}(1 - 2x) + 2x = 1 - \sqrt{x^2 - x + 1}$

$$\Leftrightarrow \log_3 \sqrt{x^2 - x + 1} - \log_3(1 - 2x) + 2x = 1 - \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = \log_3(1 - 2x) + 1 - 2x \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t, t > 0$. Dễ thấy $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Ta có $f(\sqrt{x^2 - x + 1}) = f(1 - 2x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = 1 - 2x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = 1 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x \geq 0 \\ x^2 - x + 1 = (1 - 2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 0$.

Câu 14. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình:

$\log_{2022}(x^3 - x^2 - 10x + 2) + 3x^3 - 9x^2 - 45x + 27 = \log_{2022}(2x^2 + 5x - 7)$ là:

A. 3. B. $\sqrt{6}$. C. $3 + \sqrt{6}$. D. 6.

Lời giải

Chọn C

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} x^3 - x^2 - 10x + 2 > 0 \\ 2x^2 + 5x - 7 > 0 \end{cases}$$

Ta có: $\log_{2022}(x^3 - x^2 - 10x + 2) + 3x^3 - 9x^2 - 45x + 27 = \log_{2022}(2x^2 + 5x - 7)$

$$\Leftrightarrow \log_{2022}(x^3 - x^2 - 10x + 2) + 3(x^3 - x^2 - 10x + 2) = \log_{2022}(2x^2 + 5x - 7) + 3(2x^2 + 5x - 7) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_{2022} t + 3t$ trên $(0; +\infty)$.

$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2022} + 3 > 0, \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow f(x^3 - x^2 - 10x + 2) = f(2x^2 + 5x - 7) \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 10x + 2 = 2x^2 + 5x - 7$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 15x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 & (lo^1i) \\ x = 3 + \sqrt{6} & (tháa m \cdot n) \\ x = 3 - \sqrt{6} & (lo^1i) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3 + \sqrt{6}$.

Câu 15. Phương trình $e^{2021 \cdot \log_2(3x-2)} + e^{\frac{8084}{x}} = e^{\frac{2021 \cdot \log_1(3x-2)}{2}} + e^{\frac{8084}{x}}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn D

ĐKXD: $x > \frac{2}{3}$.

Ta có:

$$e^{2021 \cdot \log_2(3x-2)} + e^{-\frac{8084}{x}} = e^{\frac{2021 \cdot \log_1(3x-2)}{2}} + e^{-\frac{8084}{x}} \Leftrightarrow e^{2021 \cdot \log_2(3x-2)} - e^{-2021 \cdot \log_2(3x-2)} = e^{\frac{8084}{x}} - e^{-\frac{8084}{x}} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = e^t - e^{-t}$ trên R .

$f'(t) = e^t + e^{-t} > 0, \forall t \in R \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên R .

Do đó $(1) \Leftrightarrow f(2021 \cdot \log_2(3x-2)) = f\left(\frac{8084}{x}\right)$

$$\Leftrightarrow 2021 \cdot \log_2(3x-2) = \frac{8084}{x} \Leftrightarrow \log_2(3x-2) - \frac{4}{x} = 0 \quad (2)$$

Xét hàm số $g(x) = \log_2(3x-2) - \frac{4}{x}$ trên $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

$$g'(x) = \frac{3}{(3x-2)\ln 2} + \frac{4}{x^2} > 0, \forall x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right) \Rightarrow \text{Hàm số } g(x) \text{ đồng biến trên } \left(\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

Mà $g(2) = 0$

Do đó $(1) \Leftrightarrow g(x) = g(2) \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 2$.

Câu 16. Tìm số nghiệm của phương trình

$$4^x - 2x - 1 = \frac{1}{2} \log_2 \frac{(3x+1) \log_4(3x+1)}{x}$$

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Với $x > 0$, phương trình tương đương

$$4^x - 2x - 1 = \log_4(3x+1) + \log_4[\log_4(3x+1)] - \log_4 x$$

$$\Leftrightarrow 4^x + x + \log_4 x = 3x + 1 + \log_4(3x+1) + \log_4[\log_4(3x+1)]$$

Đặt $\log_4(3x+1) = y \Leftrightarrow 3x+1 = 4^y$

Phương trình trở thành: $\Leftrightarrow 4^x + x + \log_4 x = 4^y + y + \log_4 y \quad (1)$

Xét hàm số $f(t) = 4^t + t + \log_4 t$ trên $(0; +\infty)$.

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Phương trình $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Trở lại phép đặt ta được: $4^x = 3x+1 \Leftrightarrow 4^x - 3x - 1 = 0$

Xét hàm số $g(x) = 4^x - 3x - 1$ trên R .

Chúng minh được phương trình $g(x) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm trên R .

Có $g(0) = g(1) = 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm $x = 0; x = 1$.

Kết hợp điều kiện, phương trình có nghiệm $x = 1$.

Câu 17. Phương trình $\frac{1}{2}\log_{2021}(x+1)+x-\frac{76}{9}=\log_{2021}\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{x}\right)-4\sqrt{x+1}+\frac{1}{x^2}+\frac{22}{3x}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} -1 < x < -\frac{3}{5} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2}\log_{2021}(x+1)+x-\frac{76}{9}=\log_{2021}\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{x}\right)-4\sqrt{x+1}+\frac{1}{x^2}+\frac{22}{3x}$$

$$\Leftrightarrow \log_{2021}\sqrt{x+1}+(\sqrt{x+1}+2)^2=\log_{2021}\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{x}+2\right)^2 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t)=\log_{2021}t+(t+2)^2$ trên $(0;+\infty)$.

$$f'(t)=\frac{1}{t\ln 2021}+2(t+2)>0, \forall t \in (0;+\infty) \Rightarrow \text{Hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } (0;+\infty).$$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+1})=f\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\frac{5}{3}+\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{3}+\frac{1}{x} \geq 0 \\ x+1=\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{x}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{3}+\frac{1}{x} \geq 0 \\ 9x^3-16x^2-30x-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{3}+\frac{1}{x} \geq 0 \\ x=3 \\ x=\frac{-11+\sqrt{13}}{18} \\ x=\frac{-11-\sqrt{13}}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{-11-\sqrt{13}}{18} \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Câu 18. Số nghiệm dương của phương trình $2^x-\frac{1}{2}x-1=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\frac{\left(\frac{3}{2}x+1\right)\log_2\left(\frac{3}{2}x+1\right)}{x}$ là

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \frac{3}{2}x+1>0 \\ \log_2\left(\frac{3}{2}x+1\right) > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{-2}{3} \\ x>0 \\ x<0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ -\frac{2}{3}<x<0 \end{cases}.$$

Với $x>0$ phương trình tương đương

$$2^x - \frac{1}{2}x - 1 = \log_2 \left(\frac{3}{2}x + 1 \right) + \log_2 \left[\log_2 \left(\frac{3}{2}x + 1 \right) \right] - \log_2 x$$

$$\Leftrightarrow 2^x + x + \log_2 x = \frac{3}{2}x + 1 + \log_2 \left(\frac{3}{2}x + 1 \right) + \log_2 \left[\log_2 \left(\frac{3}{2}x + 1 \right) \right].$$

$$\text{Đặt } \log_2 \left(\frac{3}{2}x + 1 \right) = y \Leftrightarrow \frac{3}{2}x + 1 = 2^y.$$

$$\text{Phương trình trở thành: } \Leftrightarrow 2^x + x + \log_2 x = 2^y + y + \log_2 y \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t + \log_2 t$ trên $(0; +\infty)$. Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, (vì là tổng của các hàm đồng biến).

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

$$\text{Khi đó } \frac{3}{2}x + 1 = 2^y \Leftrightarrow \frac{3}{2}x + 1 = 2^x \Leftrightarrow 2^x - \frac{3}{2}x - 1 = 0.$$

Xét hàm số $g(x) = 2^x - \frac{3}{2}x - 1$ trên $\mathbb{R}$ ta có

$$g'(x) = 2^x \ln 2 - \frac{3}{2}, \quad g'(x) = 0 \text{ có một nghiệm suy ra } g(x) = 0 \text{ có không quá 2 nghiệm}$$

$$\text{Mà } g(0) = g(2) = 0.$$

Kết hợp điều kiện, phương trình có một nghiệm dương $x = 2$.

Câu 19. Tìm số nghiệm của phương trình $\log_{2021} \left(\frac{7^x + 3^x}{8x + 2} \right) + 7^{x+1} + 7 \cdot 3^x - 56x - 14 = 0$

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện } x > -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Phương trình đã cho tương đương } \log_{2021} (7^x + 3^x) - \log_{2021} (8x + 2) + 7(7^x + 3^x) - 7(8x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_{2021} (7^x + 3^x) + 7(7^x + 3^x) = \log_{2021} (8x + 2) + 7(8x + 2) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_{2021} t + 7t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 2021} + 7 > 0, \forall t > 0$, do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Từ (1) ta thấy } f(7^x + 3^x) = f(8x + 2) \Leftrightarrow 7^x + 3^x = 8x + 2 \Leftrightarrow 7^x + 3^x - 8x - 2 = 0$$

Xét $g(x) = 7^x + 3^x - 8x - 2$, ta có

$$g'(x) = 7^x \ln 7 + 3^x \ln 3 - 8, \quad g''(x) = 7^x (\ln 7)^2 + 3^x (\ln 3)^2 > 0 \text{ và } g'(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R}.$$

Nên $g'(x) = 0$ có không quá 1 nghiệm suy ra $g(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm.

Mà $g(0) = g(1) = 0$.

Kết hợp với điều kiện suy ra phương trình có tập nghiệm là $S = \{0; 1\}$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) + e^x - e^{-x}$. Hỏi phương trình

$$f\left(\frac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3\right) + f\left(\log_2\frac{x}{2x+1} - \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 - 2\sqrt{x+2}\right) = 0$$
 có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) + e^x - e^{-x}$

Ta có: $\sqrt{x^2+1}+x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(-x) = \ln(\sqrt{(-x)^2+1}-x) + e^{-x} - e^x = -\ln(\sqrt{x^2+1}+x) + e^{-x} - e^x$
 $= -(\ln(\sqrt{x^2+1}+x) + e^x - e^{-x}) = -f(x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.

$$\text{Mà } f'(x) = \frac{\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x} + e^x + e^{-x} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} + e^x + e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Xét phương trình: } f\left(\frac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3\right) + f\left(\log_2\frac{x}{2x+1} - \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 - 2\sqrt{x+2}\right) = 0.$$

$$\text{Điều kiện: } x \in \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty).$$

$$\text{Ta có: } f\left(\frac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3\right) + f\left(\log_2\frac{x}{2x+1} - \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 - 2\sqrt{x+2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3\right) = -f\left(\log_2\frac{x}{2x+1} - \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 - 2\sqrt{x+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3\right) = f\left(\log_2\frac{2x+1}{x} + \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3 = \log_2\frac{2x+1}{x} + \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}.$$

$$\Leftrightarrow \log_2(\sqrt{x+2}) + (\sqrt{x+2}-1)^2 = \log_2\left(2+\frac{1}{x}\right) + \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 \quad (1)$$

Với $x \in \left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ ta thấy $f(x) = \log_2(\sqrt{x+2}) + (\sqrt{x+2} - 1)^2$ là hàm số đồng biến và $g(x) = \log_2\left(2 + \frac{1}{x}\right) + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$ là hàm số nghịch biến. Do đó (1) có nhiều nhất một nghiệm $x \in \left(-2; -\frac{1}{2}\right)$. Mà $f(-1) = g(-1)$ nên $x = -1$ là nghiệm duy nhất của (1) trong $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$.

Với $x \in (0; +\infty)$, xét hàm số $h(t) = \log_2(t+1) + t^2$ có $h'(t) = \frac{1}{(t+1)\ln 2} + 2t > 0, \forall t > 0$ nên $h(t)$ là một hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$(1) \Leftrightarrow h(\sqrt{x+2} - 1) = h\left(1 + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} - 1 = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Câu 21. Tính tổng S của tất cả các nghiệm của phương trình.

$$\ln\left(\frac{5^x + 3^x}{6x + 2}\right) + 5^{x+1} + 5 \cdot 3^x - 30x - 10 = 0.$$

A. $S = 1$.

B. $S = 2$.

C. $S = -1$.

D. $S = 3$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } 6x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3} (*).$$

Khi đó ta có:

$$\ln\left(\frac{5^x + 3^x}{6x + 2}\right) + 5^{x+1} + 5 \cdot 3^x - 30x - 10 = 0 \Leftrightarrow \ln(5^x + 3^x) + 5(5^x + 3^x) = \ln(6x + 2) + 5(6x + 2) \quad (1)$$

Xét hàm số $y = f(t) = \ln t + 5t, t > 0$.

$$y' = \frac{1}{t} + 5 > 0 \quad \forall t > 0 \text{ nên hàm số luôn đồng biến khi } t > 0,$$

$$\text{do đó } (1) \Leftrightarrow f(5^x + 3^x) = f(6x + 2) \Leftrightarrow 5^x + 3^x = 6x + 2 \quad (2).$$

Với $x \in [0; 1]$. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli ta có: $5^x + 3^x \leq 5x - x + 3x - x + 2 = 6x + 2$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1, x = 0$.

Với $x \leq 0$ hoặc $x \geq 1$. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli ta có:

$$5^x + 3^x \geq 5x - x + 3x - x + 2 = 6x + 2. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } x = 1, x = 0.$$

Vậy phương trình (2) có nghiệm $x = 1, x = 0$, suy ra $S = 1$.

Cách giải khác: (Giải Phương trình (2)). Xét hàm số $f(x) = 5^x + 3^x - 6x - 2$ có $f(1) = f(0) = 0$ suy ra phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x = 1, x = 0$.

Ta có $f'(x) = 5^x \ln 5 + 3^x \ln 3 - 6, f''(x) = 5^x (\ln 5)^2 + 3^x (\ln 3)^2 > 0, \forall x$ nên $f'(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm, suy ra $f''(x) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm. Vậy phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x = 1, x = 0$, suy ra $S = 1$.

Câu 22. Cho phương trình $\log_3 \left(\frac{\sqrt{2x+1}+3}{x} \right) = \log_{25} \left(\frac{x-3}{\sqrt{2x+1}} \right)$. Biết rằng phương trình trên có nghiệm duy nhất có dạng là $x = a + b\sqrt{c}$ (với $a; b; c \in \mathbb{N}$, $\sqrt{c}$ tối giản). Tính giá trị của $S = a + b^2 + c^3$.

A. 26.

B. 36.

C. 16.

D. 46.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 3$.

$$\text{Ta có: } \log_3 \left(\frac{\sqrt{2x+1}+3}{x} \right) = \log_{25} \left(\frac{x-3}{\sqrt{2x+1}} \right) \Leftrightarrow \log_3 \left(\frac{\sqrt{2x+1}+3}{x} \right) = 2 \log_5 \left(\frac{x-3}{\sqrt{2x+1}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \left(\frac{\sqrt{2x+1}+3}{x} \right) = \log_5 \left(\frac{x-3}{\sqrt{2x+1}} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (\sqrt{2x+1}+3) + \log_5 (2x+1) = \log_3 x + \log_5 (x-3)^2 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } y = \sqrt{2x+1}+3, (y > 3) \Rightarrow 2x+1 = (y-3)^2.$$

$$\text{Khi đó (1) có dạng } \log_3 y + \log_5 (y-3)^2 = \log_3 x + \log_5 (x-3)^2 \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + \log_5 (t-3)^2$ với $t > 3$.

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + \frac{2}{(t-3) \ln 5} > 0; \forall t > 3.$$

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(3; +\infty)$.

$$\text{Khi đó: (2) có dạng } f(y) = f(x) \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}+3 = x$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = (x-3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{2} \\ x = 4 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Do $x > 3$ nên $x = 4 + 2\sqrt{2}$. Khi đó: $a = 4; b = 2; c = 2$.

$$\text{Vậy: } S = a + b^2 + c^3 = 4 + 2^2 + 2^3 = 16.$$

Câu 23. Cho phương trình sau: $\log_3 (2x^2y^4 + 2 + 4x^2 + y^4)^{y^4+2} = 27 + (2-2x^2)(y^4+2)$. Khi y là số nguyên thì phương trình trên có bao nhiêu nghiệm x là số nguyên?

A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$\text{ĐK: } 2x^2y^4 + 2 + 4x^2 + y^4 > 0 \Leftrightarrow (2x^2+1)(y^4+2) > 0 \Leftrightarrow \forall x, y.$$

$$\text{Ta có: } \log_3 (2x^2y^4 + 2 + 4x^2 + y^4)^{y^4+2} = 27 + (2-2x^2)(y^4+2)$$

$$\Leftrightarrow (y^4+2) \log_3 [(2x^2+1)(y^4+2)] = 27 - (2x^2+1)(y^4+2) + 3(y^4+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x^2+1) + \log_3(y^4+2) = \frac{27}{y^4+2} - (2x^2+1) + 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x^2+1) + (2x^2+1) = \frac{27}{y^4+2} - \log_3(y^4+2) + 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x^2+1) + (2x^2+1) = \frac{27}{y^4+2} + \log_3 \frac{27}{y^4+2}$$

Xét hàm số $g(t) = \log_3 t + t, t > 0 \Rightarrow g'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra: $y = g(t)$ luôn đồng biến $\forall t > 0$.

$$\text{Khi đó: } (*) \Leftrightarrow g(2x^2+1) = g\left(\frac{27}{y^4+2}\right) \Leftrightarrow 2x^2+1 = \frac{27}{y^4+2}.$$

Do y nguyên nên x nguyên khi và chỉ khi y^4+2 là ước của 27, mà $y^4+2 \geq 2$ nên $y^4+2 \in \{3; 9; 27\} \Leftrightarrow y = \pm 1$. Suy ra $x = \pm 2$.

Câu 24. Tính tổng S của tất cả các nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{2} \log_2(x+2) + x + 3 - \log_2 \frac{2x+1}{x} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\sqrt{x+2} = 0$$

A. $S = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

B. $S = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

C. $S = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

D. $S = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \in (-2; +\infty) \\ x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; -\frac{1}{2}) \cup (0; +\infty)$$

Khi đó phương trình được viết lại:

$$\log_2 \sqrt{x+2} - 2(\sqrt{x+2}) + x + 2 = \log_2 \left(2 + \frac{1}{x}\right) - 2\left(2 + \frac{1}{x}\right) + \left(2 + \frac{1}{x}\right)^2 \quad (1)$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_2 t - 2t + t^2, \forall t > 0$ ta có:

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2t - 2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{t \ln 2}} \cdot 2t - 2 = 2\sqrt{\frac{2}{\ln 2}} - 2 > 0, \forall t > 0 \text{ nên } f(t) \text{ đồng biến trên khoảng } (0; +\infty).$$

$$(1) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+2}) = f\left(2 + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 2 + \frac{1}{x} \quad (2)$$

Bình phương hai vế phương trình (2) ta có:

$$x+2 = 4 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases} \text{ thay vào phương trình ban đầu chỉ có}$$

hai giá trị $x = -1, x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -1, x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ nên $S = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Câu 25. Gọi x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là các nghiệm của phương trình: $\log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5$. Giá trị của

biểu thức $P = 2x_1 + 3x_2$ bằng:

A. $P = 4$.

B. $P = 6$.

C. $P = 2$.

D. $P = -6$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{ĐK: } \frac{2x-1}{(x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương

$$\log_3(2x-1) - \log_3(x-1)^2 = 3(x-1)^2 - (2x-1) + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x-1) + (2x-1) = 3(x-1)^2 + \log_3 3(x-1)^2 \quad (1)$$

Xét $f(t) = \log_3 t + t$, với $t > 0$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên

$(0; +\infty)$. Từ đó ta có: $(1) \Leftrightarrow f(2x-1) = f[3(x-1)^2]$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = 3(x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{2, \frac{2}{3}\right\}$ nên $P = 6$.

GIẢI PT LÔGARIT BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ KHÔNG HOÀN TOÀN (KHÔNG CHỨA THAM SỐ)

PHƯƠNG PHÁP

Phương pháp này thường được sử dụng đối với những phương trình khi lựa chọn ẩn phụ cho một biểu thức thì các biểu thức còn lại không biểu diễn được triệt để qua ẩn phụ đó hoặc nếu biểu diễn được thì công thức biểu diễn lại phức tạp.

Câu 1. Số nghiệm của phương trình $\lg^2 x + \lg x \cdot \log_2(4x) + 2 \log_2 x = 0$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x > 0$

$$\lg^2 x + \lg x \cdot \log_2(4x) + 2 \log_2 x = 0 \Leftrightarrow \lg^2 x + (2 + \log_2 x) \lg x + 2 \log_2 x = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \lg x$

Khi đó phương trình (1) trở thành: $t^2 + (2 + \log_2 x)t + 2 \log_2 x = 0 \quad (2)$

Ta có: $\Delta = (2 + \log_2 x)^2 - 4 \cdot 2 \log_2 x = (\log_2 x - 2)^2$.

Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt là:

$$\begin{cases} t = \frac{2 + \log_2 x + \log_2 x - 2}{2} = \log_2 x \\ t = \frac{2 + \log_2 x - \log_2 x + 2}{2} = 2 \end{cases}$$

Với $t = \log_2 x \Leftrightarrow \lg x = \log_2 x \Leftrightarrow \lg x - \log_2 x = 0$.

Đặt $f(x) = \lg x - \log_2 x$ với $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 10} - \frac{1}{x \ln 2} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\ln 10} - \frac{1}{\ln 2} \right) < 0, \forall x > 0.$$

Suy ra hàm số $f(x) = \lg x - \log_2 x$ luôn nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Mặt khác: $f(1) = 0$. Do đó phương trình $\lg x - \log_2 x = 0$ có nghiệm duy nhất là $x = 1$ (thỏa điều kiện).

Với $t = 2 \Leftrightarrow \lg x = 2 \Leftrightarrow x = 100$ (thỏa điều kiện).

Vậy số nghiệm của phương trình là 2.

Cách 2 Điều kiện $x > 0$

$$\lg^2 x + \lg x \cdot \log_2(4x) + 2 \log_2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \lg^2 x + (2 + \log_2 x) \lg x + 2 \log_2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \lg^2 x + \left(2 + \frac{\lg x}{\lg 2} \right) \lg x + 2 \frac{\lg x}{\lg 2} = 0 \quad (1)$$

$$\left(1 + \frac{1}{\lg 2} \right) \lg^2 x + \left(2 + \frac{1}{\lg 2} \right) \lg x = 0$$

Đặt $t = \lg x$. Phương trình trở thành $\left(1 + \frac{1}{\lg 2}\right)t^2 + \left(2 + \frac{1}{\lg 2}\right)t = 0$. Dễ thấy phương trình có hai nghiệm t phân biệt nên phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 2. Số nghiệm thực của phương trình $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x + 2x - 6 = 0$

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$

Đặt $t = \log_2 x$. Khi đó phương trình trở thành: $t^2 + (x-1)t + 2x - 6 = 0$.

$$\text{Ta có } \Delta = (x-5)^2 \Rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 3-x \end{cases}$$

Với $t = 3-x$ ta có $\log_2 x = 3-x \Leftrightarrow \log_2 x + x - 3 = 0$ (*)

Đặt $f(x) = \log_2 x + x - 3$ với $x > 0$, có $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + 1 > 0; \forall x > 0$

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ mà $f(2) = 0 \Rightarrow x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm thực.

Câu 3. Tổng các nghiệm thực của phương trình $(x+1)\log_3^2(x+1) + (x-2)\log_3(x+1) - 3 = 0$

- A. 1. B. 2. C. $-\frac{2}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > -1$

Đặt: $t = \log_3(x+1)$. Khi đó phương trình trở thành: $(x+1)t^2 + (x-2)t - 3 = 0$.

$$\text{Ta có: } \Delta = (x-4)^2 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{3}{x+1} \end{cases}$$

Với $t = -1$ ta có $\log_3(x+1) = -1 \Leftrightarrow x+1 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ (thỏa mãn điều kiện $x > -1$)

Với $t = \frac{3}{x+1}$ ta có $\log_3(x+1) = \frac{3}{x+1}$ (*)

Đặt $f(x) = \log_3(x+1)$ và $g(x) = \frac{3}{x+1}$

với mọi $x > -1$, có $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 3} > 0$; $g'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} < 0$

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$ và hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; +\infty) \Rightarrow x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*).

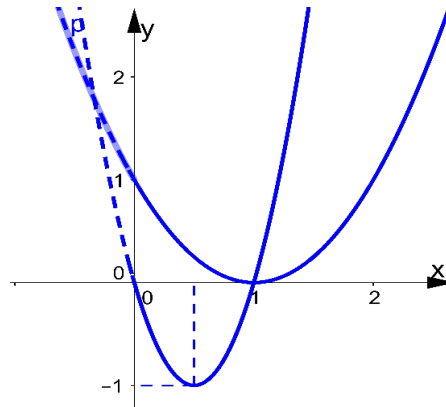
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm thực $x_1 = -\frac{2}{3}$; $x_2 = 2$ và $x_1 + x_2 = \frac{4}{3}$.

Câu 4. Cho phương trình $9^x + 3^{x+1} + 2m = (3^{x+1} + 1)\sqrt{3^x + m}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số thực $m \in [-20; 20]$ để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt biết rằng $4m \in \mathbb{Z}$?

- A. 79. B. 82. C. 81. D. 80.

Lời giải

Chọn D



Ta đặt $3^x = t > 0$ suy ra $t^2 + 3t + 2m = (3t + 1)\sqrt{t + m}$. Ta đặt $\sqrt{t + m} = y$.

Khi đó: $2y^2 - (3t + 1)y + (t^2 + t) = 0$.

$$\text{Ta có } \Delta = (t - 1)^2 \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3t + 1 + t - 1}{4} \\ y = \frac{3t + 1 - (t - 1)}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{t + m} \\ t + 1 = 2\sqrt{t + m} \end{cases}.$$

Do đó: $\begin{cases} 4m = 4t^2 - 4t = f(t) & (t > 0) \\ 4m = t^2 - 2t + 1 = g(t) & (t > 0) \end{cases}$ và có đồ thị như hình bên.

Từ đây ta suy ra để có 2 nghiệm phân biệt thì điều kiện cần và đủ là $\begin{cases} 4m \geq 1 \\ -1 < 4m < 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq 4m \leq 80$

Câu 5. Cho phương trình

$$2\log_2^2 x - (x - \log_2 x^2)\sqrt{48 - \log_2 x \cdot \log_2 256x} \cdot \log_2 8x + \left(28 + \log_{\frac{1}{2}} x\right)x = 56\log_2 x.$$

Biết tổng các nghiệm của phương trình trên là một biểu thức có dạng: $S = 6 + 2^{\sqrt{a-b}} + 2^{4\sqrt{c-d}}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$. Khi đó biểu thức $T = a + b + c + d$ có giá trị bằng

A. 40.

B. 40.

C. 50.

D. 30.

Lời giải

Chọn A

♦ Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 48 - \log_2 x \cdot \log_2 256x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 48 - 8\log_2 x - \log_2^2 x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{12}} \leq x \leq 16.$

♦ Ta có $2\log_2^2 x - (x - \log_2 x^2)\sqrt{48 - \log_2 x \cdot \log_2 256x} \cdot \log_2 8x + \left(28 + \log_{\frac{1}{2}} x\right)x = 56\log_2 x$

$$\Leftrightarrow 2\log_2^2 x + (28 - \log_2 x)x - 56\log_2 x - (x - \log_2 x^2)\sqrt{48 - \log_2 x \cdot \log_2 256x} \cdot \log_2 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\log_2 x - x)(\log_2 x - 28) - (x - 2\log_2 x)\sqrt{48 - \log_2 x \cdot \log_2 256x} \cdot \log_2 8x = 0$$

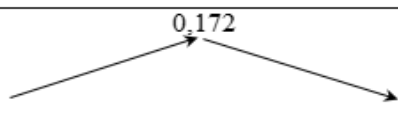
$$\Leftrightarrow (2\log_2 x - x)\left(\log_2 x - 28 + \sqrt{48 - 8\log_2 x - \log_2^2 x} \cdot \log_2 8x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_2 x - x = 0 & (1) \\ \log_2 x - 28 + \sqrt{48 - 8\log_2 x - \log_2^2 x} \cdot \log_2 8x = 0 & (2) \end{cases}$$

♦ Xét hàm $f(x) = 2\log_2 x - x$, $x \in \left[\frac{1}{2^{12}}; 16\right]$.

Ta có $f'(x) = \frac{2}{x \ln 2} - 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\ln 2}$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = 2\log_2 x - x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2^{12}}; 16\right]$ như sau:

x	$\frac{1}{2^{12}}$	$\frac{2}{\ln 2}$	16
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm. Mà $f(2) = f(4) = 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có đúng 2 nghiệm $x = 2$, $x = 4$.

♦ Đặt $t = \log_2 x$, $t \in [-12; 4]$. Phương trình (2) trở thành $t - 28 + (t+3)\sqrt{48-8t-t^2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(48-8t-t^2) - (t+3)\sqrt{48-8t-t^2} + \frac{1}{2}t^2 + 3t + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(48-8t-t^2) - (t+3)\sqrt{48-8t-t^2} + \frac{1}{2}t^2 + 3t + 4 = 0.$$

Đặt $u = \sqrt{48-8t-t^2}$, $u \geq 0$.

Ta được phương trình ..

$$\Leftrightarrow u^2 - 2(t+3)u + t^2 + 6t + 8 = 0 \quad (\text{Chú ý } \Delta' = (t+3)^2 - (t^2 + 6t + 8) = 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = t + 4 \\ u = t + 2 \end{cases}.$$

$$\text{Với } u = t + 4 \text{ ta được } \sqrt{48-8t-t^2} = t + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t + 4 \geq 0 \\ 48-8t-t^2 = (t+4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + 4 \geq 0 \\ t^2 + 8t - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = -4 + 4\sqrt{2}. \text{ Khi đó } x = 2^{4\sqrt{2}-4}.$$

$$\text{Với } u = t + 2 \text{ ta được } \sqrt{48-8t-t^2} = t + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t + 2 \geq 0 \\ 48-8t-t^2 = (t+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + 2 \geq 0 \\ t^2 + 6t - 22 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = -3 + \sqrt{31}. \text{ Khi đó } x = 2^{\sqrt{31}-3}.$$

♦ Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho là $S = 6 + 2^{\sqrt{31}-3} + 2^{4\sqrt{2}-4}$. Suy ra $a = 31$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 4 \Rightarrow T = 40$.

_____ TOANMATH.com _____