CHUYÊN ĐỀ

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN
LIÊN QUAN ĐẾN MŨ – LOGARIT

Tác giả: Trần Trọng Trị

Nhóm Giáo viên Toán tiếp sức Chinh phục kỳ thi THPT năm 2020

Tiếp nối chuyên đề Max – Min liên quan đến Mũ – Logarit, chuyên đề này kế thừa các kĩ năng thu gọn mối quan hệ giữa các biến đã biết như: $f(u)=f(v)$, $f(u)\le f(v)$, với f là hàm số đơn điệu trên một khoảng cho trước; đánh giá bằng các bất đẳng thức đơn giản; …. Từ đó sử dụng các kĩ thuật cơ bản liên quan đến các biến nguyên để giải một bài toán phương trình nghiệm nguyên.
Thầy hy vọng với chuyên đề nhỏ này, sẽ giúp các em có cái nhìn rõ hơn về một số dạng toán liên quan đến phương trình nghiệm nguyên.

1. Dạng 1: Có đúng một biến nguyên và rút được biến nguyên này theo biến còn lại. Đến đây, ta xét hàm để tìm miền giá trị cho biến nguyên đó.

Ví dụ 1: **(Đề 1 – VTV7)** Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho tồn tại số thực y lớn hơn 1 thỏa mãn $\left(xy^2+x-2y-1\right)\log y=\log\dfrac{2y-x+3}{x}$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $\begin{cases} y>1 \\ x\in\mathbb{N}^* \\ \dfrac{2y-x+3}{x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>1 \\ x\in\mathbb{N}^* \\ 2y-x+3>0 \end{cases}$.

Ta có :

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

$\left(xy^2+x-2y-1\right)\log y=\log\dfrac{2y-x+3}{x}$

$\Leftrightarrow \left(xy^2+x-2y-3\right)\log y+2\log y=\log\left(2y-x+3\right)-\log x$

$\Leftrightarrow \left(xy^2+x-2y-3\right)\log y=\log\left(2y-x+3\right)-\log\left(xy^2\right)\ \left(1\right)$

+ Nếu $xy^2>2y-x+3$ thì $\begin{cases}VT>0\\VP<0\end{cases}$ (do $\log y>0$).

+ Nếu $xy^2<2y-x+3$ thì $\begin{cases}VT<0\\VP>0\end{cases}$ (do $\log y>0$).

Do đó, từ $\left(1\right)$ suy ra: $xy^2=2y-x+3\Leftrightarrow x=\dfrac{2y+3}{y^2+1}$.

Xét hàm $f\left(y\right)=\dfrac{2y+3}{y^2+1}$, $y\in\left(1;+\infty\right)$. Ta có:

$f'\left(y\right)=\dfrac{-2y^2-6y+2}{\left(y^2+1\right)^2}<0$, $\forall y\in\left(1;+\infty\right)$. Suy ra: Hàm số $f\left(y\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

Suy ra: $x=f\left(y\right)\in\left(0;\dfrac{5}{2}\right)$. Vì $x\in\mathbb{N}^*$ nên $x\in\left\{1;2\right\}$.

Vậy có 2 giá trị x thỏa yêu cầu bài toán.

2. Dạng 2: Khi phương trình rút gọn là phương trình bậc hai theo biến không nguyên. Ta sử dụngđiều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai để tìm miền giá trị cho biến nguyên.

Ví dụ 2: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $4^{x+y}=3^{x^2+y^2}$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B.

$4^{x+y}=3^{x^2+y^2}\Leftrightarrow x^2+y^2-\left(x+y\right)\log_3 4=0\Leftrightarrow y^2-2y\log_3 2+x^2-2x\log_3 2=0$. $\left(*\right)$

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

Ta coi $(*)$ là phương trình bậc hai theo biến y. Phương trình $(*)$ có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (\log_3 2)^2 - (x^2 - 2x\log_3 2) \geq 0 \Rightarrow -0,2 < x < 1,6$.

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{0;1\}$. Vậy có 2 giá trị x thỏa yêu cầu bài toán.

Chú ý:

- ❖ Trong câu 1, ta có thể giải theo cách sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai như sau:

Từ $xy^2 = 2y - x + 3 \Leftrightarrow xy^2 - 2y + x - 3 = 0 \ (*)$.

Ta coi $(*)$ là phương trình bậc hai theo biến y. Phương trình $(*)$ có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = 1 - x(x-3) = -x^2 + 3x + 1 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{3-\sqrt{13}}{2} \leq x \leq \dfrac{3+\sqrt{13}}{3}$.

Vì $x \in \mathbb{N}^*$ nên $x \in \{1;2;3\}$.

- ◎ Với $x = 1$, ta có : $y^2 - 2y - 2 = 0$ có một nghiệm $y = 1 + \sqrt{3} > 1$ (thỏa).
- ◎ Với $x = 2$, ta có : $2y^2 - 2y - 1 = 0$ có một nghiệm $y = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$ (thỏa).
- ◎ Với $x = 3$, ta có : $3y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y \in \left\{0; \dfrac{2}{3}\right\}$ (loại do $y > 1$).

Vậy $x \in \{1;2\}$, tức là có 2 số nguyên dương x thỏa yêu cầu bài toán.

- ❖ Với cách giải sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai, ta phải thử lại nghiệm, nên có hạn chế hơn so với phương pháp cô lập, xét hàm. Do đó, trong một bài toán nếu có thể cô lập, xét hàm thì ta nên chọn phương pháp này.

Ví dụ 3: **(Đề tham khảo lần 2 năm 2020)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B.

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

Điều kiện: $\begin{cases} x+y>0 \\ x^2+y^2>0 \end{cases}$.

Điều kiện cần : Đặt $t=\log_3(x+y)=\log_4(x^2+y^2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3^t \\ x^2+y^2=4^t \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3^t-y \\ y^2+(3^t-y)^2=4^t \end{cases} \Rightarrow 2y^2-2y.3^t+9^t-4^t=0 \ (*)$

$(*)$ có nghiệm $y \Leftrightarrow \Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 9^t-2(9^t-4^t) \ge 0 \Leftrightarrow t \le \log_{\frac{9}{4}} 2 \approx 0,8548$.

Khi đó: $x^2+y^2 \le 4^{\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} \approx 3,27 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x^2 \le 3 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Điều kiện đủ:

◎ Với $x=-1 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t+1 \\ y^2=4^t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^t-1>0 \\ 4^t-1=(3^t+1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t>0 \\ f(t)=9^t+2.3^t+2-4^t=0 \end{cases}$.

Khi $0<t<0,8548 \Rightarrow 9^t \ge 4^t \Rightarrow f(t)>0$ nên loại $x=-1$.

◎ Với $x=0$. Rõ ràng tồn tại $y=1$ để $\log_3(x+y)=\log_4(x^2+y^2)$.

◎ Với $x=1$. Rõ ràng tồn tại $y=0$ để $\log_3(x+y)=\log_4(x^2+y^2)$.

Vậy có 2 số nguyên x thỏa yêu cầu bài toán là $x=0,\ x=1$.

Chú ý : Ngoài ra, ta có thể chặn điều kiện cho các biến bằng cách sử dụng các bất đẳng thức cơ bản, điều kiện tương giao giữa đường thẳng và đường tròn như sau :

$\begin{cases} x+y=3^t & (d) \\ x^2+y^2=4^t & (C) \end{cases}$. Do đó để x,y tồn tại thì đường thẳng d phải có điểm chung với đường tròn $(C) \Leftrightarrow d(O;d) \le R \Leftrightarrow \dfrac{|-3^t|}{\sqrt{2}} \le 2^t \Rightarrow t \le \log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2} \approx 0,8548$.

Hoặc $\begin{cases} x+y=3^t \\ x^2+y^2=4^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3^t \\ xy=\dfrac{9^t-4^t}{2} \end{cases}$. Vì $(x+y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow 2.4^t \ge 9^t \Leftrightarrow t \le \log_{\frac{9}{4}} 2$.

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

3. Dạng 3: Cả hai biến đều nguyên, trong đó có một biến nguyên thuộc tập K cho trước, với K có thể là một khoảng, một đoạn. Khi đó, ta cũng rút biến nguyên thuộc K theo biến còn lại để tìm miền giá trị cho biến đó.

Ví dụ 4: **(Đề tham khảo lần 1 năm 2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0 \le x \le 2020$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$?

A. 2019. **B.** 6. **C.** 2020. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1)+(x+1)=2y+3^{2y}$

$\Leftrightarrow f(x+1)=f(2y)$, với $f(t)=t+3^t$, $t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=1+3^t\ln 3>0, \forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó:

$f(x+1)=f(2y) \Leftrightarrow \log_3(x+1)=2y \Leftrightarrow x=9^y-1$

Vì $0\le x\le 2020$ nên $0\le 9^y-1\le 2020 \Leftrightarrow 0\le y\le \log_9 2021$.

Do y nguyên nên $y\in\{0;1;2;3\}$. Suy ra $(x;y)\in\{(0;0);(8;1);(80;2);(728;3)\}$.

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa đề.

4. Dạng 4: Cả hai biến đều nguyên, rút được biến này theo biến kia đưa về bài toán tìm điểm nguyên trên các đường cong đơn giản

Ví dụ 5: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_2\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1}=4-(x-1)(y+1)?$$

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có $(y+1)\log_2\left[(x+1)(y+1)\right]=4-(x-1)(y+1)$

$$\Leftrightarrow \log_2\left[(x+1)(y+1)\right]=\frac{4}{y+1}-(x-1) \Leftrightarrow \log_2(x+1)+\log_2(y+1)=\frac{4}{y+1}-x+1$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1)+(x+1)=-\log_2(y+1)+2+\frac{4}{y+1}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1)+(x+1)=\log_2\frac{4}{y+1}+\frac{4}{y+1} \Leftrightarrow f(x+1)=f\left(\frac{4}{y+1}\right),$$

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

với $f\left(t\right)=t+\log_2 t$, $t\in\left(0;+\infty\right)$.

Ta có $f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln 2}>0,\forall t>0\Rightarrow$ hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Do đó $f\left(x+1\right)=f\left(\dfrac{4}{y+1}\right)\Leftrightarrow x+1=\dfrac{4}{y+1}\Leftrightarrow x=-1+\dfrac{4}{y+1}$.

Vì $x;y$ là số nguyên dương nên $\dfrac{4}{y+1}$ cũng là số nguyên dương

$\Rightarrow y+1\in\left\{1;2;4\right\}\Rightarrow y\in\left\{1;3\right\}$ (loại $y=0$).

- Với $y=1\Rightarrow x=1$ (nhận).
- Với $y=3\Rightarrow x=0$ (loại).

Vậy có 1 cặp số nguyên dương $(x;y)$ là $\left(1;1\right)$.

5. Dạng 5: Đưa phương trình về tổng các bình phương của hai biến nguyên

Ví dụ 6: **(Đề thi thử lần 2 – Sở GDĐT Hà Nội năm 2020)** Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $\sqrt{\log x}+\sqrt{\log y}+\log\sqrt{x}+\log\sqrt{y}=100$ và $\sqrt{\log x},\sqrt{\log y},\log\sqrt{x},\log\sqrt{y}$ là các số nguyên dương.
Khi đó kết quả xy bằng

A. 10^{164}. **B.** 10^{144}. **C.** 10^{100}. **D.** 10^{200}.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases}\sqrt{\log x}=a\\ \sqrt{\log y}=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log x=a^2\\ \log y=b^2\end{cases}$. Ta có:

$$\sqrt{\log x}+\sqrt{\log y}+\log\sqrt{x}+\log\sqrt{y}=\sqrt{\log x}+\sqrt{\log y}+\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{2}\log y=100$$

$$\Leftrightarrow a+b+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2=100\Leftrightarrow\left(a+1\right)^2+\left(b+1\right)^2=202\Leftrightarrow\left(a+1\right)^2+\left(b+1\right)^2=9^2+11^2$$

Mà $a+1$, $b+1$ là các số nguyên dương nên suy ra $\begin{cases}a+1=9\\ b+1=11\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a+1=11\\ b+1=9\end{cases}$.

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} a+1=9 \\ b+1=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x=64 \\ \log y=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10^{64} \\ y=10^{100} \end{cases} \Rightarrow xy=10^{64+100}=10^{164}$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} a+1=11 \\ b+1=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x=100 \\ \log y=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10^{100} \\ y=10^{64} \end{cases} \Rightarrow xy=10^{100+64}=10^{164}.$$

Vậy $xy=10^{164}$.

6. Dạng 6: Đưa về phương trình tích của hai biến nguyên

Ví dụ 7: Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho tồn tại số nguyên dương y thỏa mãn điều kiện $\log_3\left[(2x-2y+1)(x+2y)\right]+3.9^{x-y}=27^{\frac{1}{x+2y}}+1$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 2020. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x,y\in\mathbb{Z}^+ \\ 2x-2y+1>0 \end{cases}$.

Ta có:

$$\log_3\left[(2x-2y+1)(x+2y)\right]+3.9^{x-y}=27^{\frac{1}{x+2y}}+1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x-2y+1)+\log_3(x+2y)+3^{2x-2y+1}=3^{\frac{3}{x+2y}}+\log_3 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x-2y+1)+3^{2x-2y+1}=\log_3\frac{3}{x+2y}+3^{\frac{3}{x+2y}} \Leftrightarrow f(2x-2y+1)=f\left(\frac{3}{x+2y}\right),$$

với $f(t)=\log_3 t+3^t$, $t\in(0;+\infty)$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+2^t\ln 3>0,\ \forall t>0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

Do đó $f\left(2x-2y+1\right)=f\left(\frac{3}{x+2y}\right)\Leftrightarrow 2x-2y+1=\frac{3}{x+2y}$

$\Leftrightarrow\left(2x-2y+1\right)\left(x+2y\right)=3$. $\left(*\right)$

Vì x,y nguyên dương nên $\left(*\right)$ tương đương $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-2y+1=1\\x+2y=3\end{cases}\\\begin{cases}2x-2y+1=3\\x+2y=1\end{cases}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=0\\x+2y=3\end{cases}\\\begin{cases}x-y=1\\x+2y=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\left(n\right)\\\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\left(l\right)\end{array}\right..$$

Vậy có 1 giá trị của x thỏa mãn bài toán.

7. Dạng 7: Sử dụng tính chất chia hết

Ví dụ 8: Có bao nhiêu số nguyên x thuộc đoạn $\left[1;2020\right]$ sao cho tồn tại số nguyên dương y thỏa mãn $10^{\left(4x^2-3y+1\right)\log x}=\frac{3y+1}{4}$?

A. 2020. **B.** 1347. **C.** 673. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B.

$10^{\left(4x^2-3y+1\right)\log x}=\frac{3y+1}{4}\Leftrightarrow\left(4x^2-3y+1\right)\log x=\log\left(\frac{3y+1}{4}\right)$

$\Leftrightarrow\left(4x^2-\left(3y+1\right)+2\right)\log x=\log\left(3y+1\right)-\log 4$

$\Leftrightarrow\left[4x^2-\left(3y+1\right)\right]\log x+2\log x+\log 4-\log\left(3y+1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[4x^2-\left(3y+1\right)\right]\log x+\left[\log\left(4x^2\right)-\log\left(3y+1\right)\right]=0$ $\left(1\right)$

+ Nếu $4x^2>3y+1$ thì $\log\left(4x^2\right)>\log\left(3y+1\right)$. Suy ra: $VT\left(1\right)>0$.

+ Nếu $4x^2<3y+1$ thì $\log\left(4x^2\right)<\log\left(3y+1\right)$. Suy ra: $VT\left(1\right)<0$.

Do đó, từ $\left(1\right)$ suy ra: $4x^2=3y+1\Leftrightarrow y=\frac{4x^2-1}{3}\Leftrightarrow y=x^2+\frac{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{3}$ $\left(2\right)$

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

Với $x=3k+1$, $x=3k+2$, $k\in\mathbb{N}$, từ (2) dễ dàng thấy y là số nguyên dương.

Xét y không là số nguyên dương. Từ (2), suy ra: x chia hết cho 3.

Đặt $x=3k$, $k\in\mathbb{N}^*$. Vì $x\in\mathbb{Z}\cap[1;2020]$ nên $1\le 3k\le 2020$, $k\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow 1\le k\le 673, k\in\mathbb{N}^*$.

Do đó có 673 số nguyên x thuộc đoạn $[1;2020]$ mà y không phải là số nguyên dương.

Vậy có $2020-673=1347$ số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

8. Dạng 8: Đếm điểm nguyên trong các hình cơ bản

Ví dụ 9: Có bao nhiêu cặp số nguyên (a,b) thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

$$a^2+b^2>1 \text{ và } a^2+b^2-3\le \log_{a^2+b^2}\left(\frac{b^2\left(a^2+b^2+4\right)+4a^2}{a^2+2b^2}\right)?$$

A. 10. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D.

Ta có :

$$a^2+b^2-3\le \log_{a^2+b^2}\left(\frac{b^2\left(a^2+b^2+4\right)+4a^2}{a^2+2b^2}\right)\Leftrightarrow a^2+b^2-3\le \log_{a^2+b^2}\frac{\left(b^2+4\right)\left(a^2+b^2\right)}{a^2+2b^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-3\le \log_{a^2+b^2}\left(b^2+4\right)-\log_{a^2+b^2}\left(a^2+2b^2\right)+1$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+2b^2\right)+\log_{a^2+b^2}\left(a^2+2b^2\right)\le\left(b^2+4\right)+\log_{a^2+b^2}\left(b^2+4\right).$$

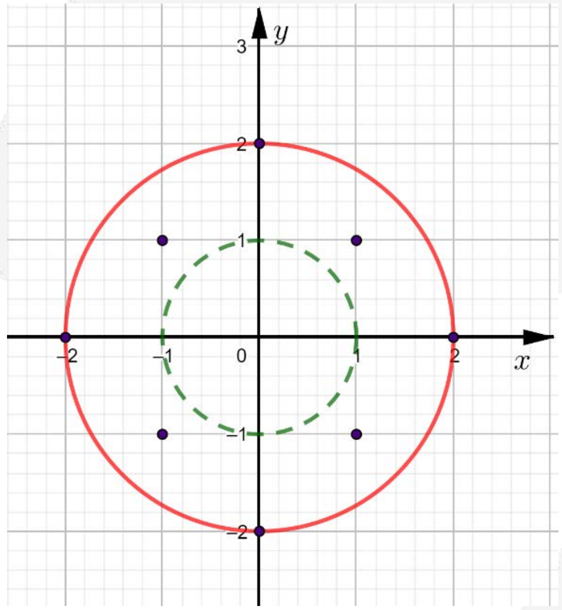
Nếu $a^2+2b^2>b^2+4$ thì $\log_{a^2+b^2}\left(a^2+2b^2\right)>\log_{a^2+b^2}\left(b^2+4\right)$. Suy ra:

$$\left(a^2+2b^2\right)+\log_{a^2+b^2}\left(a^2+2b^2\right)>\left(b^2+4\right)+\log_{a^2+b^2}\left(b^2+4\right) \text{ (vô lí).}$$

Do đó, $a^2+2b^2\le b^2+4\Leftrightarrow a^2+b^2\le 4$.

Mà $a^2+b^2>1$, $a,b\in\mathbb{Z}$ nên nghiệm nguyên (a,b) là các điểm nguyên trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) nằm trong hình vành khăn, tạo bởi 2 đường tròn đồng tâm $O(0;0)$ bán kính lần lượt là 1 và 2 (bỏ đi biên của hình tròn $(O;1)$) (Xem hình vẽ).

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn



Suy ra: $(a,b)\in\{(2;0),(-2;0),(0;2),(0;-2),(1;1),(1;-1),(-1;1),(-1;1)\}$.

Vậy có 8 cặp số nguyên (a,b).

Ví dụ 10: Có bao nhiêu cặp số nguyên (a,b) thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

$$0<a^2+b^2\le 16 \text{ và } |a|+|b|>\log_2\frac{16|b|+64}{|a|+2|b|}?$$

A. 10. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D.

Từ điều kiện $0<a^2+b^2\le 16$, suy ra a, b không đồng thời bằng 0 nên $|a|+2|b|>0$. Ta có:

$$|a|+|b|>\log_2\frac{16|b|+64}{|a|+2|b|}\Leftrightarrow |a|+|b|>4+\log_2(|b|+4)-\log_2(|a|+2|b|)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(|a|+2|b|)+(|a|+2|b|)>\log_2(|b|+4)+(|b|+4)\Leftrightarrow f(|a|+2|b|)>f(|b|+4),$$

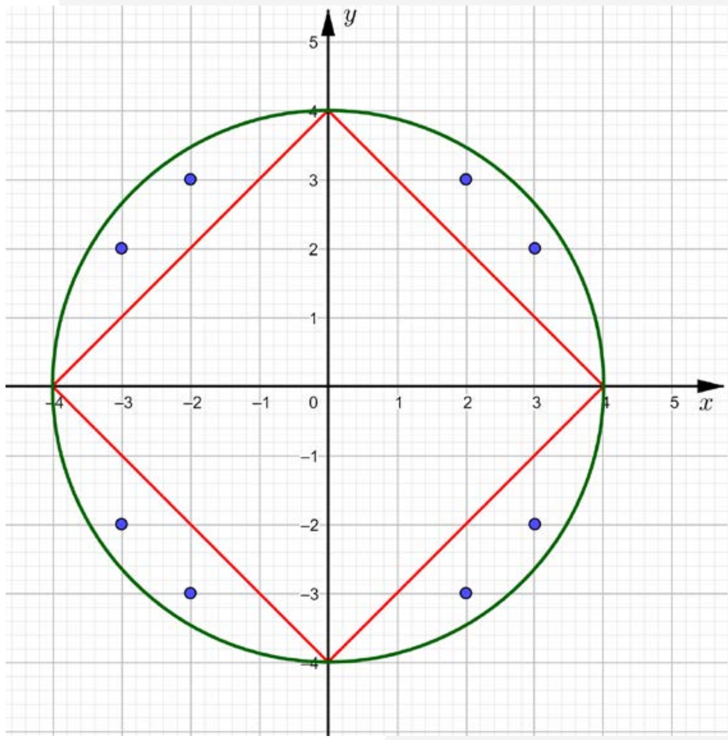
với $f(t)=t+\log_2 t$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó, $f(|a|+2|b|)>f(|b|+4)\Leftrightarrow |a|+2|b|>|b|+4\Leftrightarrow |a|+|b|>4$.

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

Kết hợp với điều kiện $0 < a^2 + b^2 \le 16$, $a, b \in \mathbb{Z}$ nên nghiệm nguyên (a, b) là các điểm nguyên trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) nằm trong hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính bằng 4 (bỏ đi tâm O) và nằm ngoài hình vuông $|x| + |y| = 4$.

(Xem hình vẽ).



Đếm trực tiếp trên hình, ta có 8 điểm nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy có 8 cặp số nguyên (a, b).

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Có bao nhiêu số thực x sao cho tồn tại số nguyên y thỏa mãn

$$\log_2\left(\frac{x-3}{y}\right)-\log_2\left(4x^2+4x+8\right)=\frac{y\left(x^2+x\right)+3-x}{y}\ ?$$

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 2. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3\left(x+2y-2\right)=\log_4\left(x^2+4y^2-2x-4y+2\right)$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên y để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_7\left(4x+3y\right)=\log_2\left(x^2+y^2\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 4. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0<y\le 2020$ và

$$\log_2\left(\frac{3^x-1}{y}\right)=2y+2-3^x\ ?$$

A. 2019. **B.** 7. **C.** 2020. **D.** 4.

Câu 5. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$5^{x+3y}+5^{xy+1}+x\left(y+1\right)+1=5^{-xy-1}+\frac{1}{5^{x+3y}}-3y\,?$$

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 6. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_{\sqrt{2}}\frac{x+y+20}{x^2+y^2+6y}=x^2+y^2-2x+4y-42\,?$$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 7. **(Chuyên ĐH Vinh – lần 2 – 2020)** Có bao nhiêu cặp số thực dương $(a;b)$ thỏa mãn $\log_2 a$ là số nguyên dương, $\log_2 a=1+\log_3 b$ và $a^2+b^2<2020^2$?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 8.

Câu 8. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$2.625^{x^2}-6250.125^{3y^2}=9y^2-4x^2+5\,?$$

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

Câu 9. Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với x,y là các số nguyên thỏa mãn $1\le x,y\le 243$ và $9\log_3\left(9x^2\right)=3^{xy}+9x\left(y-x\right)$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 243.

Câu 10. Có bao nhiêu cặp số nguyên (a,b) thỏa mãn điều kiện:

$$e^{a^2+2b^2}+e^{ab}\left(a^2-ab+b^2-1\right)-e^{1+ab+b^2}=0?$$

A. 4. **B.** 2. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 11. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn điều kiện:

$$2^{x^3}.8^x+x^2\left(x-y\right)=32.2^{y\left(x^2+2\right)}+2y-3x+5?$$

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 12. Có bao nhiêu cặp số nguyên không âm $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện:

$$\log\frac{x^2+y^2+11}{6x+8y+2}+x^2+y^2-6x-8y+9\le 0?$$

A. 45. **B.** 49. **C.** 48. **D.** 47.

Câu 13. Có bao nhiêu cặp số nguyên (a,b) thỏa mãn điều kiện:

$$2^{a^2+b^2}+\log_2\frac{a^2+b^2}{|a|+|b|}\le 4^{|a|+|b|}+1?$$

A. 25. **B.** 24. **C.** 36. **D.** 35.

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

ĐÁP ÁN

Câu 1. Có bao nhiêu số thực x sao cho tồn tại số nguyên y thỏa mãn

$$\log_2\left(\frac{x-3}{y}\right)-\log_2\left(4x^2+4x+8\right)=\frac{y\left(x^2+x\right)+3-x}{y}\ ?$$

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $\begin{cases}\dfrac{x-3}{y}>0\\ y\in\mathbb{Z}\end{cases}$. Ta có :

$$\log_2\left(\frac{x-3}{y}\right)-\log_2\left(4x^2+4x+8\right)=\frac{y\left(x^2+x\right)+3-x}{y}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x-3}{y}\right)-\log_2\left(x^2+x+2\right)-2=x^2+x-\frac{x-3}{y}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x-3}{y}\right)+\frac{x-3}{y}=\log_2\left(x^2+x+2\right)+\left(x^2+x+2\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{x-3}{y}\right)=f\left(x^2+x+2\right)$$

, với $f(t)=\log_2 t+t$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Do đó:

$$f\left(\frac{x-3}{y}\right)=f\left(x^2+x+2\right)\Leftrightarrow\frac{x-3}{y}=x^2+x+2\Leftrightarrow y=\frac{x-3}{x^2+x+2}.$$

Nhận xét : Nếu tồn tại cặp số $(x;y)$ thì điều kiện $\dfrac{x-3}{y}>0$ luôn thỏa mãn.

Cách 1: Xét hàm $y=\dfrac{x-3}{x^2+x+2}$ với $x\neq 3$, ta có :

$$y'=\frac{-x^2+6x+5}{\left(x^2+x+2\right)^2};\ y'=0\Leftrightarrow -x^2+6x+5=0\Leftrightarrow x\in\left\{3-\sqrt{14};3+\sqrt{14}\right\}$$

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$3-\sqrt{14}$		3		$3+\sqrt{14}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$\dfrac{-7-2\sqrt{14}}{7}$	$\nearrow$	$0 \; \Vert$	$\nearrow$	$\dfrac{-7+2\sqrt{14}}{7}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra : $y \in \left[\dfrac{-7-2\sqrt{14}}{7};\dfrac{-7+2\sqrt{14}}{7}\right] \setminus \left\{0\right\}$.

Mà $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \left\{-2;-1\right\}$.

Mặt khác, dựa vào BBT, ứng với mỗi giá trị $y \in \left\{-2;-1\right\}$ ta có 2 nghiệm x.

Vậy có 4 giá trị x thỏa yêu cầu bài toán.

Cách 2: Xét phương trình $yx^2+\left(y-1\right)x+2y+3=0 \; \left(*\right)$

Phương trình $\left(*\right)$ có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = \left(y-1\right)^2 - 4y\left(2y+3\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow -7y^2 - 14y + 1 \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{-7-2\sqrt{14}}{7} \le y \le \dfrac{-7+2\sqrt{14}}{7}$.

Vì $y \in \mathbb{Z}, y \ne 0 \Rightarrow y \in \left\{-2;-1\right\}$.

- Với $y=-2$. Thay vào $\left(*\right)$, suy ra: $x \in \left\{-1;-\dfrac{1}{2}\right\}$.
- Với $y=-1$. Thay vào $\left(*\right)$, suy ra: $x \in \left\{-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right\}$.

Vậy có 4 giá trị x thỏa yêu cầu bài toán.

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

Câu 2. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+2y-2)=\log_4(x^2+4y^2-2x-4y+2)$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_3(x+2y-2)=\log_4(x^2+4y^2-2x-4y+2)$

$\Leftrightarrow \log_3(x+2y-2)=\log_4\left[(x-1)^2+(2y-1)^2\right]$.

Đặt $a=x-1, b=2y-1$. Phương trình trở thành $\log_3(a+b)=\log_4(a^2+b^2)$. Đây chính là một câu trong đề tham khảo lần 2 năm 2019 – 2020.

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên y để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_7(4x+3y)=\log_2(x^2+y^2)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases}4x+3y>0\\x^2+y^2>0\end{cases}$.

Điều kiện cần :

Đặt $t=\log_7(4x+3y)=\log_2(x^2+y^2)\Leftrightarrow\begin{cases}4x+3y=7^t\\x^2+y^2=2^t\end{cases}$.

Để tồn tại x thì đường thẳng $d:4x+3y-7^t=0$ và đường tròn (C) tâm $O(0;0)$, $R=\sqrt{2^t}=\left(\sqrt{2}\right)^t$ phải có điểm chung $\Leftrightarrow d(O;d)\le R$

$\Leftrightarrow \dfrac{7^t}{5}\le\left(\sqrt{2}\right)^t\Leftrightarrow\left(\dfrac{7}{\sqrt{2}}\right)^t\le 5\Rightarrow t\le\log_{\frac{7}{\sqrt{2}}}5\approx 1{,}006$.

Suy ra: $y^2\le 2^t\le 2^{\log_{\frac{7}{\sqrt{2}}}5}\approx 2{,}009$, mà $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{-1;0;1\}$.

Điều kiện đủ:

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

◎ Với $y=1 \Rightarrow \log_7(4x+3)=\log_2(x^2+1)$ có nghiệm $x=1$ nên nhận $y=1$.

◎ Với $y=0 \Rightarrow \begin{cases} 4x=7^t \\ x^2=2^t \end{cases} \Rightarrow (7^t)^2=16.2^t \Rightarrow \left(\dfrac{49}{2}\right)^t=16$ có nghiệm t nên tồn tại x.

Do đó nhận $y=0$.

◎ Với $y=-1 \Rightarrow \log_7(4x-3)=\log_2(x^2+1)$.

Vì $\log_2(x^2+1)\ge 0$ nên $\log_7(4x-3)\ge 0 \Rightarrow 4x-3\ge 1 \Rightarrow x\ge 1$.

Xét hàm $f(x)=\log_7(4x-3)-\log_2(x^2+1)$ trên $[1;+\infty)$. Ta có :

$$f'(x)=\frac{4}{(4x-3)\ln 7}-\frac{2x}{(x^2+1)\ln 2}=\frac{4\ln 2(x^2+1)-2\ln 7(4x-3)x}{(4x-3)\ln 7(x^2+1)\ln 2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\approx -0,196\ (l) \\ x\approx 1,108\ (n) \end{array}\right..$$

Lập bảng biên thiên, suy ra $f(x)\le f(1,108)\approx -0,975$. Suy ra phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm. Do đó, loại $y=-1$.

Vậy có 2 số nguyên y thỏa yêu cầu bài toán là $y=0$, $y=1$.

Câu 4. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0<y\le 2020$ và $\log_2\left(\dfrac{3^x-1}{y}\right)=2y+2-3^x$?

A. 2019. **B.** 7. **C.** 2020. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} 0<y\le 2020 \\ \dfrac{3^x-1}{y}>0 \end{cases} \Rightarrow 3^x>1 \Rightarrow x>0$. Khi đó, ta có:

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

$\log_2\left(\dfrac{3^x-1}{y}\right)=2y+2-3^x \Leftrightarrow \log_2\left(3^x-1\right)+\left(3^x-1\right)=\log_2\left(2y\right)+\left(2y\right)$

$\Leftrightarrow f\left(3^x-1\right)=f\left(2y\right)$,

với $f\left(t\right)=\log_2 t+t$ là hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$. Do đó:

$f\left(3^x-1\right)=f\left(2y\right)\Leftrightarrow 2y=3^x-1\Leftrightarrow y=\dfrac{3^x-1}{2}$

Vì $0<y\le 2020\Leftrightarrow 0<3^x-1\le 2\times 2020\Leftrightarrow 1<3^x\le 4041\Leftrightarrow 0<x\le \log_3 4041\approx 7,56$.

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\left\{1;2;3;4;5;6;7\right\}$. Suy ra, có 7 cặp số nguyên $\left(x,y\right)$

Vậy có 7 cặp $\left(x;y\right)$ thỏa mãn.

Câu 5. Có bao nhiêu cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn

$$5^{x+3y}+5^{xy+1}+x\left(y+1\right)+1=5^{-xy-1}+\frac{1}{5^{x+3y}}-3y?$$

A. 2. **B.** 1 . **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $5^{x+3y}+5^{xy+1}+x\left(y+1\right)+1=5^{-xy-1}+\dfrac{1}{5^{x+3y}}-3y$

$\Leftrightarrow 5^{x+3y}-5^{-x-3y}+x+3y=5^{-xy-1}-5^{xy+1}-xy-1$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=5^t-5^{-t}+t, t\in\mathbb{R}$. Ta có $f'\left(t\right)=5^t\ln 5+5^{-t}\ln 5+1>0$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra : hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $f\left(x+3y\right)=f\left(-xy-1\right)\Leftrightarrow x+3y=-xy-1\Leftrightarrow y\left(3+x\right)=-x-1$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{-x-1}{3+x}$ (Do $x=-3$ không là nghiệm của phương trình) $\Leftrightarrow y=-1+\dfrac{2}{x+3}$.

Vì $x,y\in\mathbb{Z}$ nên $x+3\in\left\{1;-1;2;-2\right\}\Rightarrow x\in\left\{-2;-4;-1;-5\right\}$.

Vậy có 4 cặp số $\left(x;y\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

Câu 6. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{\sqrt{2}}\dfrac{x+y+20}{x^2+y^2+6y}=x^2+y^2-2x+4y-42$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_{\sqrt{2}}\dfrac{x+y+20}{x^2+y^2+6y}=x^2+y^2-2x+4y-42$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}}\left[2(x+y+20)\right]+2(x+y+20)=\log_{\sqrt{2}}\left(x^2+y^2+6y\right)+\left(x^2+y^2+6y\right)(*)$

Xét hàm số $f(t)=\log_{\sqrt{2}}t+t$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln\sqrt{2}}+1>0,\forall t>0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó, $(*)\Leftrightarrow f\left[2(x+y+20)\right]=f\left(x^2+y^2+6y\right)\Leftrightarrow 2(x+y+20)=x^2+y^2+6y$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+4y=40\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=45\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=3^2+6^2$.

Vì $x,y\in\mathbb{Z}^+$ nên $\begin{cases}x-1=3\\y+2=6\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x-1=6\\y+2=3\end{cases}\Rightarrow (x;y)\in\{(4;4),(7;1)\}$.

Vậy có 2 cặp số nguyên dương $(x;y)$.

Câu 7. **(Chuyên ĐH Vinh – lần 2 – 2020)** Có bao nhiêu cặp số thực dương $(a;b)$ thỏa mãn $\log_2 a$ là số nguyên dương, $\log_2 a=1+\log_3 b$ và $a^2+b^2<2020^2$?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\log_2 a=n\,(n\in\mathbb{N}^*)$ suy ra $a=2^n$ và $\log_3 b=n-1\Leftrightarrow b=3^{n-1}$

Ta có $a^2+b^2<2020^2\Leftrightarrow 2^{2n}+3^{2n-2}<2020^2$ (1)

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

$\Rightarrow 3^{2n-2} < 2020^2 \Rightarrow 2n-2 < \log_2\left(2020^2\right) \Rightarrow n < 8$, mà $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \le 7$

Xét hàm số $f\left(t\right) = 2^{2t} + 3^{3t-2}$ trên $\mathbb{R}$. Ta có

$f'\left(t\right) = 2.2^{2t}.\ln 2 + 2.3^{2t-2}.\ln 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì $f\left(n\right) \le f\left(7\right) < 2020^2$ nên $n \le 7$, $n \in \left\{1; 2; ...; 7\right\}$.

Vậy có 7 cặp số thực dương $\left(a; b\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chú ý: Khi có $n \le 7$, thử với $n = 7$ thấy thỏa thì ta có thể kết luận $n \in \left\{1; 2; ...; 7\right\}$.

Câu 8. Có bao nhiêu cặp số nguyên $\left(x; y\right)$ thỏa mãn

$$2.625^{x^2} - 6250.125^{3y^2} = 9y^2 - 4x^2 + 5?$$

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$2.625^{x^2} - 6250.125^{3y^2} = 9y^2 - 4x^2 + 5 \Leftrightarrow 2.5^{4x^2} - 2.5^{9y^2+5} = 9y^2 - 4x^2 + 5$$

$$\Leftrightarrow 2.5^{4x^2} + 4x^2 = 2.5^{9y^2+5} + \left(9y^2 + 5\right) \Leftrightarrow f\left(4x^2\right) = f\left(9y^2 + 5\right),$$

với $f\left(t\right) = 2.5^t + t$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó:

$$f\left(4x^2\right) = f\left(9y^2 + 5\right) \Leftrightarrow 4x^2 = 9y^2 + 5 \Leftrightarrow 4x^2 - 9y^2 = 5 \Leftrightarrow \left(2x - 3y\right)\left(2x + 3y\right) = 5 \quad \left(*\right).$$

Vì x, y là số nguyên nên $\left(*\right)$ tương đương $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 2x + 3y = -5 \end{cases} \end{array}\right.$ hoặc $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases} \end{array}\right.$.

Cả 4 trường hợp đều cho kết quả $x, y \notin \mathbb{Z}$.

Vậy không tồn tại cặp số $\left(x; y\right)$ thỏa mãn bài toán.

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

Câu 9. Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với x, y là các số nguyên thỏa mãn $1 \le x, y \le 243$ và $9\log_3(9x^2) = 3^{xy} + 9x(y-x)$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 243.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$9\log_3(9x^2) = 3^{xy} + 9x(y-x) \Leftrightarrow \log_3 x^2 + x^2 = 3^{xy-2} + xy - 2$

$\Leftrightarrow \log_3 x^2 + x^2 = 3^{xy-2} + \log_3 3^{xy-2} \Leftrightarrow f(x^2) = f(3^{xy-2})$,

với $f(t) = t + \log_3 t$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó: $f(x^2) = f(3^{xy-2}) \Leftrightarrow x^2 = 3^{xy-2}$ $(*)$

Ta có:

$3^{xy-2} = x^2 \le 243^2 = 3^{10} \Rightarrow xy \le 12 \Rightarrow x \le 12$.

Mặt khác, vì $x, y \in \mathbb{Z}^+$ nên từ $(*)$ suy ra: $x = 3^n$, với n là số nguyên không âm.

Suy ra: $x = 3^n \le 12 \Rightarrow n \in \{0;1;2\}$.

- Với $n = 0$. Suy ra: $x = 1$, $y = 2$.
- Với $n = 1$. Suy ra: $x = 3$, $3^{3y-2} = 9 \Rightarrow y = \dfrac{4}{3}$ (loại).
- Với $n = 2$. Suy ra: $x = 9$, $3^{9y-2} = 81 \Rightarrow y = \dfrac{2}{3}$ (loại).

Vậy có 1 bộ (x,y) là $(1;2)$.

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

Câu 10. Có bao nhiêu cặp số nguyên (a,b) thỏa mãn điều kiện:

$$e^{a^2+2b^2}+e^{ab}\left(a^2-ab+b^2-1\right)-e^{1+ab+b^2}=0?$$

A. 4. **B.** 2. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $e^{a^2+2b^2}+e^{ab}\left(a^2-ab+b^2-1\right)-e^{1+ab+b^2}=0$

$\Leftrightarrow e^{a^2+2b^2-ab}+a^2-ab+b^2-1-e^{1+b^2}=0$

$\Leftrightarrow e^{a^2+2b^2-ab}+a^2-ab+2b^2=e^{1+b^2}+1+b^2\ (1)$.

Xét hàm số đặc trưng: $f(t)=e^t+t$ với $t\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=e^t+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó:

$(2)\Leftrightarrow f\left(a^2+2b^2-ab\right)=f\left(1+b^2\right)\Leftrightarrow a^2+2b^2-ab=1+b^2\Leftrightarrow a^2-ab+b^2=1$.

Cách 1: $a^2-ab+b^2-1=0$, ta xem như là phương trình bậc hai theo biến a.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=b^2-4\left(b^2-1\right)\ge 0\Leftrightarrow b^2\le\dfrac{4}{3}$.

Vì $b\in\mathbb{Z}$ nên $b\in\{-1;0;1\}$.

- Với $b=0\Rightarrow a\in\{-1;1\}$.
- Với $b=-1\Rightarrow a\in\{0;1\}$.
- Với $b=1\Rightarrow a\in\{0;-1\}$.

Vậy có 6 cặp số nguyên (a,b).

Cách 2:

$a^2-ab+b^2=1\Leftrightarrow a^2+b^2+(a-b)^2=2\Leftrightarrow a^2+b^2+(a-b)^2=1+1+0$

Vì $a,b\in\mathbb{Z}$ nên $\begin{cases}a^2=b^2=1\\a-b=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a^2=(a-b)^2=1\\b=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}b^2=(a-b)^2=1\\a=0\end{cases}$

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=1 \\ a=b=-1 \end{array}\right.$ hoặc $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1, b=0 \\ a=-1, b=0 \end{array}\right.$ hoặc $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0, b=1 \\ a=0, b=-1 \end{array}\right.$

Vậy có 6 cặp số nguyên (a,b).

Câu 11. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn điều kiện:

$$2^{x^3}.8^x + x^2(x-y) = 32.2^{y(x^2+2)} + 2y - 3x + 5?$$

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$2^{x^3}.8^x + x^2(x-y) = 32.2^{y(x^2+2)} + 2y - 3x + 5 \Leftrightarrow 2^{x^3+3x} + (x^3+3x) = 2^{y(x^2+2)+5} + y(x^2+2) + 5$

$\Leftrightarrow f(x^3+3x) = f\left(y(x^2+2)+5\right)$, với $f(t) = 2^t + t$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $x^3+3x = y(x^2+2)+5 \Leftrightarrow y = \dfrac{x^3+3x-5}{x^2+2} \Leftrightarrow y = x + \dfrac{x-5}{x^2+2}$.

Cách 1:

Xét hàm $g(x) = \dfrac{x-5}{x^2+2}$, $x \in \mathbb{R}$. Ta có :

$g'(x) = \dfrac{-x^2+10x+2}{(x^2+2)^2} = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{5-3\sqrt{3}; 5+3\sqrt{3}\right\}$.

Lập bảng biến thiên ta được $g(x) \in \left[\dfrac{-5-3\sqrt{3}}{4}; \dfrac{-5+3\sqrt{3}}{4}\right]$.

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $g(x) \in \mathbb{Z}$. Suy ra $g(x) \in \{-2; -1; 0\}$. Thử lại :

- Với $g(x) = -2 \Rightarrow \dfrac{x-5}{x^2+2} = -2 \Rightarrow x = -1,\ y = -3$.
- Với $g(x) = -1 \Rightarrow \dfrac{x-5}{x^2+2} = -1 \Rightarrow x \in \left\{\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$ (loại).

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

- Với $g(x)=0 \Rightarrow \dfrac{x-5}{x^2+2}=0 \Rightarrow x=5,\ y=5$.

Vậy có 2 cặp số nguyên $(x;y)$ là : $(-1;-3)$, $(5;5)$.

Cách 2:

Ta có: $y=x+\dfrac{x-5}{x^2+2}$. Vì $x,y\in\mathbb{Z}$ nên $\dfrac{x-5}{x^2+2}\in\mathbb{Z}$. Suy ra $\dfrac{x-5}{x^2+2}=k\in\mathbb{Z}$.

Ta có : $\dfrac{x-5}{x^2+2}=k \Leftrightarrow kx^2-x+2k+5=0\ (*)$.

- Với $k=0 \Rightarrow x=5; y=5$ (nhận)
- Với $k\neq 0$. Khi đó, $(*)$ có nghiệm khi và chỉ khi

  $$\Delta=1-4k(2k+5)\geq 0 \Leftrightarrow k\in\left[\frac{-5-3\sqrt{3}}{4};\frac{-5+3\sqrt{3}}{4}\right].$$

Vì $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ nên $k\in\{-2;-1\}$. Thử lại ta nhận $k=-2$, $x=-1$ $y=-3$.

Vậy có 2 cặp số nguyên $(x;y)$ là : $(-1;-3)$, $(5;5)$.

Cách 3:

Ta có: $y=x+\dfrac{x-5}{x^2+2}$. Vì $x,y\in\mathbb{Z}$ nên

$(x-5)\vdots(x^2+2) \Rightarrow (x-5)(x+5)\vdots(x^2+2) \Rightarrow (x^2-25)\vdots(x^2+2)$.

$\Rightarrow (x^2+2-27)\vdots(x^2+2) \Rightarrow 27\vdots(x^2+2)$

$\Rightarrow (x^2+2)\in\{1;3;9;27\} \Rightarrow x^2\in\{1;25\} \Rightarrow x\in\{-1;1;-5;5\}$. Thử lại:

- Với $x=-1 \Rightarrow y=-3$ (nhận).
- Với $x=1 \Rightarrow y=-\dfrac{1}{3}$ (loại).
- Với $x=-5 \Rightarrow y=-\dfrac{145}{27}$ (loại).
- Với $x=5 \Rightarrow y=5$ (nhận).

Vậy có 2 cặp số nguyên $(x;y)$ là : $(-1;-3)$, $(5;5)$.

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

Câu 12. Có bao nhiêu cặp số nguyên không âm $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện:

$$\log\frac{x^2+y^2+11}{6x+8y+2}+x^2+y^2-6x-8y+9\le 0?$$

A. 45. **B.** 49. **C.** 48. **D.** 47.

Lời giải

Chọn C.

Ta có:

$$\log\frac{x^2+y^2+11}{6x+8y+2}+x^2+y^2-6x-8y+9\le 0$$

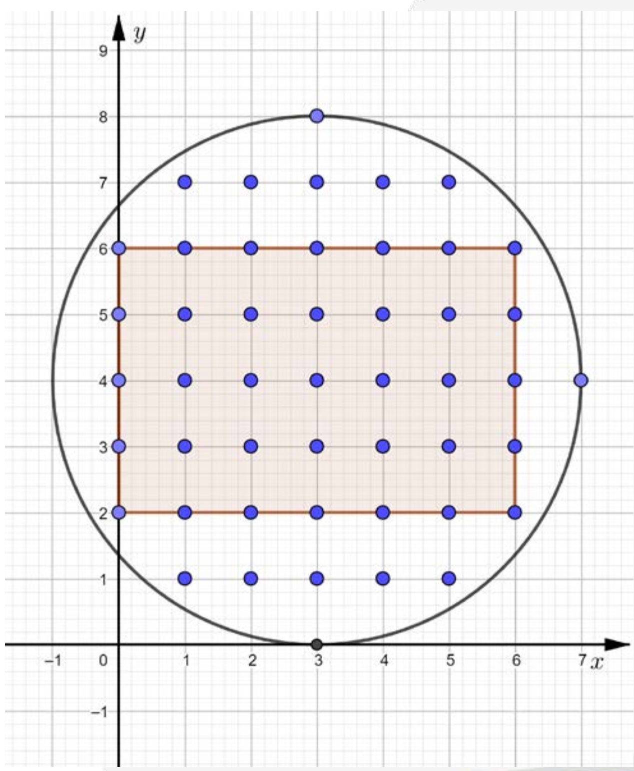
$$\Leftrightarrow \log\left(x^2+y^2+11\right)+x^2+y^2+11\le \log\left(6x+8y+2\right)+6x+8y+2 \qquad (1)$$

Xét hàm số đặc trưng: $f(t)=t+\log t$ với $t>0$. Ta có:

$f'(t)=1+\frac{1}{t.\ln 10}>0,\forall t>0\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow f\left(x^2+y^2+11\right)\le f\left(6x+8y+2\right)\Leftrightarrow x^2+y^2+11\le 6x+8y+2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2\le 16$.



43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

Vì x,y là số nguyên không âm nên ta coi cặp số (x,y) là các điểm nguyên (x,y) nằm trong hình tròn (C) có tâm $I(3;4),R=4$ ở góc phần tư thứ nhất.

(Xem hình vẽ).

Vậy có $5\times7+5\times2+1+1+1=48$ cặp số nguyên $(x;y)$.

Chú ý: Ta cũng có tính tính trực tiếp như sau:

$(x-3)^2+(y-4)^2\le16\ (*)\Rightarrow(x-3)^2\le16\Rightarrow-1\le x\le7$.

Vì x là số nguyên không âm nên $x\in\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Thay vào $(*)$ ta cũng có được 48 cặp số nguyên $(x;y)$.

Câu 13. Có bao nhiêu cặp số nguyên (a,b) thỏa mãn điều kiện:

$$2^{a^2+b^2}+\log_2\frac{a^2+b^2}{|a|+|b|}\le4^{|a|+|b|}+1\,?$$

A. 25. **B.** 24. **C.** 36. **D.** 35.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $\dfrac{a^2+b^2}{|a|+|b|}>0\Leftrightarrow$ a, b không đồng thời bằng 0. Khi đó, ta có:

$2^{a^2+b^2}+\log_2\dfrac{a^2+b^2}{|a|+|b|}\le4^{|a|+|b|}+1\Leftrightarrow2^{a^2+b^2}+\log_2\left(a^2+b^2\right)\le4^{|a|+|b|}+\log_2\left(|a|+|b|\right)+1$

$\Leftrightarrow2^{a^2+b^2}+\log_2\left(a^2+b^2\right)\le2^{2(|a|+|b|)}+\log_2\left[2\left(|a|+|b|\right)\right]\Leftrightarrow f\left(a^2+b^2\right)\le f\left[2\left(|a|+|b|\right)\right]$,

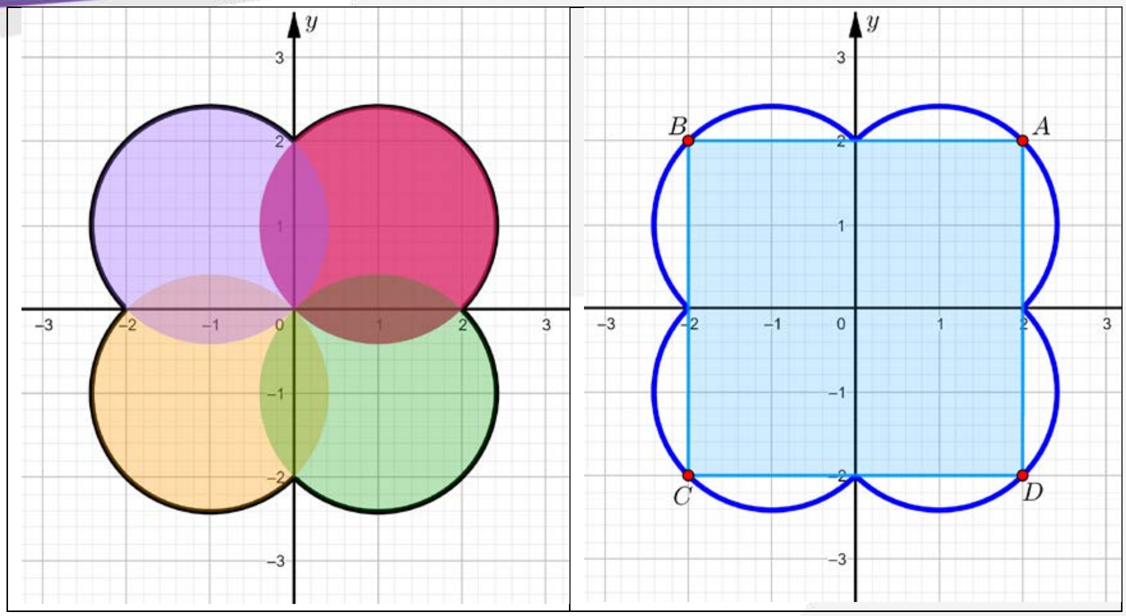
với $f(t)=2^t+\log_2t$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó, $f\left(a^2+b^2\right)\le f\left[2\left(|a|+|b|\right)\right]\Leftrightarrow a^2+b^2\le2\left(|a|+|b|\right)\Leftrightarrow\left(|a|-1\right)^2+\left(|b|-1\right)^2\le2$.

Kết hợp với điều kiện $a,b\in\mathbb{Z}$, a, b không đồng thời bằng 0 nên nghiệm nguyên (a,b) là các điểm nguyên trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) nằm trong hình hoa, kể cả biên, bỏ đi điểm $O(0;0)$ (hình hoa là hình hợp bởi bốn hình tròn bán kính $\sqrt2$ lần lượt có tâm $I_1(1;1)$, $I_2(1;-1)$, $I_3(-1;1)$, $I_4(-1;-1)$)

(Xem hình vẽ).

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn



Đếm trực tiếp, ta thấy đó là các điểm nguyên nằm trong hình vuông $ABCD$ kích thước 4×4, bỏ đi điểm $\left(0;0\right)$. Do đo, có $5^2 - 1 = 24$ điểm nguyên.

Vậy có 24 cặp số nguyên $\left(a,b\right)$.

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn