



GIẢI TÍCH

12

PHƯƠNG TRÌNH MŨ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Hoàng Xuân Nhàn

TRẮC
NGHIỆM
VẬN
DỤNG
&
VẬN
DỤNG
CAO



MỤC LỤC:



A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:	1
B. PHÂN DẠNG BÀI TẬP:	5
Dạng 1. Phương trình mũ	5
<i>Bài toán 1: Các phương trình mũ thường gặp</i>	<i>5</i>
<i>Bài toán 2: Phương trình mũ dạng đặt ẩn phụ</i>	<i>7</i>
<i>Bài toán 3: Phương trình mũ dạng tích</i>	<i>9</i>
<i>Bài toán 4: Giải phương trình mũ bằng phương pháp đánh giá</i>	<i>11</i>
<i>Bài toán 5: Giải phương trình mũ bằng phương pháp hàm đặc trưng</i>	<i>13</i>
Dạng 2. Phương trình lôgarit	15
<i>Bài toán 1: Các phương trình lôgarit thường gặp</i>	<i>15</i>
<i>Bài toán 2: Phương trình lôgarit dạng đặt ẩn phụ</i>	<i>17</i>
<i>Bài toán 3: Phương trình lôgarit dạng tích</i>	<i>19</i>
<i>Bài toán 4: Giải phương trình lôgarit bằng phương pháp đánh giá</i>	<i>21</i>
<i>Bài toán 5: Giải phương trình lôgarit bằng phương pháp hàm đặc trưng</i>	<i>24</i>
Dạng 3. Phương trình mũ và lôgarit có chứa tham số	26
<i>Phương pháp giải toán</i>	<i>26</i>
<i>Bài toán 1: Phương trình mũ, lôgarit quy về bậc hai có nghiệm đẹp</i>	<i>28</i>
<i>Bài toán 2: Áp dụng định lý Vi-ét cho phương trình mũ, lôgarit quy về bậc hai</i>	<i>30</i>
<i>Bài toán 3: Tìm điều kiện tham số thông qua miền giá trị hàm số</i>	<i>32</i>
<i>Bài toán 4: Tìm điều kiện tham số thông qua bảng biến thiên của hàm số</i>	<i>34</i>
<i>Bài toán 5: Tìm điều kiện tham số dựa vào hàm đặc trưng</i>	<i>37</i>
<i>Bài toán 6: Nghiệm đặc biệt của phương trình mũ, lôgarit chứa hàm đối xứng</i>	<i>41</i>
<i>Bài toán 7: Tìm điều kiện tham số của phương trình mũ, lôgarit có chứa hàm ẩn</i>	<i>42</i>
Dạng 4. Nghiệm nguyên của phương trình mũ, lôgarit	45
<i>Phương pháp giải toán</i>	<i>45</i>
<i>Bài toán 1: Nghiệm nguyên của phương trình mũ và lôgarit dạng tích</i>	<i>45</i>
<i>Bài toán 2: Nghiệm nguyên của phương trình mũ và lôgarit chứa hàm đặc trưng</i>	<i>47</i>
<i>Bài toán 3: Phương pháp đánh giá và bài toán nghiệm nguyên phương trình</i>	<i>49</i>
<i>Bài toán 4: Xét nghiệm nguyên phương trình dựa vào đặc thù tổng, tích... các số nguyên</i>	<i>52</i>
<i>Bài toán 5: Bài toán nghiệm nguyên phương trình mũ, lôgarit nhiều ẩn chứa tham số</i>	<i>53</i>
C. BÀI TẬP THỰC HÀNH:	55
BÀI TẬP MỨC ĐỘ I:	55
<i>Đáp án:</i>	<i>57</i>
BÀI TẬP MỨC ĐỘ II:	57
<i>Đáp án:</i>	<i>59</i>
BÀI TẬP MỨC ĐỘ III:	60
<i>Đáp án:</i>	<i>62</i>
BÀI TẬP MỨC ĐỘ IV:	63
<i>Đáp án:</i>	<i>66</i>

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

I – PHƯƠNG TRÌNH MŨ:

- 1. Phương trình mũ cơ bản:** Cho trước $a > 0, a \neq 1$.

Phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x = b$	
$b > 0$	$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ (nghiệm duy nhất)
$b \leq 0$	$a^x = b \Leftrightarrow x \in \emptyset$ (phương trình vô nghiệm)

- 2. Phương trình mũ dạng cùng cơ số:** Cho trước $a > 0, a \neq 1$.

Ta có: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

- 3. Phương trình mũ dạng lôgarit hóa hai vế:** Cho trước $a, b > 0, a \neq 1$.

$$\begin{aligned} * a^{f(x)} = b &\Leftrightarrow f(x) = \log_a b \\ * a^{f(x)} = b^{g(x)} &\Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b \quad (b \neq 1) \end{aligned}$$

- 4. Phương trình mũ dạng đặt ẩn phụ:**

■ Đặt $t = a^{f(x)} > 0$.

■ Đưa phương trình đã cho về dạng phương trình đa thức bậc n theo $t \longrightarrow$ Giải tìm t .

■ Với t có được, thay vào $t = a^{f(x)}$ để tìm x .

- a) Phương trình $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p = 0$ với $a > 0, a \neq 1$.**

Đặt $t = a^{f(x)} > 0$.

Phương trình trở thành: $mt^2 + nt + p = 0$.

- b) Phương trình $m.a^{g(x)} + n.b^{g(x)} + p.c^{g(x)} = 0$ với $a, b, c > 0, a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$.**

Nhận dạng: $ma^{2f(x)} + n(a.c)^{f(x)} + p.c^{2f(x)} = 0$.

Chia hai vế phương trình cho $c^{2f(x)} \neq 0$, ta được: $m\left(\frac{a}{c}\right)^{2f(x)} + n\left(\frac{a}{c}\right)^{f(x)} + p = 0$.

🔗 Chú ý: Ta có thể chia hai vế của phương trình cho bất kỳ hàm mũ nào trong ba hàm $\{a^{g(x)}; b^{g(x)}; c^{g(x)}\}$, kết quả sau cùng của bài toán không thay đổi.

- c) Phương trình $m.(a + \sqrt{b})^{f(x)} + n.(a - \sqrt{b})^{f(x)} = p$ với $\begin{cases} a + \sqrt{b} > 0, a + \sqrt{b} \neq 1 \\ a - \sqrt{b} > 0, a - \sqrt{b} \neq 1 \end{cases}$.**

Nhận dạng: $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b = 1$.

Đặt $t = (a + \sqrt{b})^{f(x)}, t > 0 \Rightarrow \frac{1}{t} = (a - \sqrt{b})^{f(x)}$.

Phương trình trở thành: $mt + \frac{n}{t} = p \Leftrightarrow mt^2 - pt + n = 0$.

- 5. Phương trình mũ dạng tích:**

a) Dạng cơ bản:

$$\begin{aligned} * ab = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \\ * ab = ac &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases} \end{aligned}$$

b) Dạng thường gặp: $a^{f(x)} + a^{g(x)} = a^{f(x)+g(x)} + 1$ với $a > 0, a \neq 1$.

Cách giải: $a^{f(x)} + a^{g(x)} = a^{f(x)+g(x)} + 1 \Leftrightarrow a^{f(x)} - 1 = a^{g(x)} \cdot (a^{f(x)} - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} a^{f(x)} - 1 = 0 \\ a^{g(x)} = 1 \end{cases}$

II – PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT:

1. Phương trình lôgarit cơ bản: Cho trước $a > 0, a \neq 1$.

Ta có: $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$ (dạng này không cần đặt điều kiện cho x).

2. Phương trình lôgarit dạng cùng cơ số: Cho trước $a > 0, a \neq 1$.

Ta có: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) > 0$.

3. Phương trình lôgarit dạng mũ hóa hai vế: Cho trước $a > 0, a \neq 1$.

Ta có: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$ (dạng này không cần đặt điều kiện cho $f(x)$).

4. Phương trình lôgarit dạng đặt ẩn phụ:

■ Đặt $t = \log_a f(x)$.

■ Đưa phương trình đã cho về dạng phương trình đa thức bậc n theo $t \longrightarrow$ giải tìm t .

■ Có t , thay vào $t = \log_a f(x)$ để tìm x .

a) Phương trình $m \log_a^2 f(x) + n \log_a f(x) + p = 0$ với $a > 0, a \neq 1$.

Đặt $t = \log_a f(x)$.

Phương trình đã cho trở thành: $mt^2 + nt + p = 0$.

b) Phương trình $m \cdot \log_a f(x) + n \cdot \log_{f(x)} a + p = 0$ với $a > 0, a \neq 1$.

Điều kiện: $f(x) > 0, f(x) \neq 1$.

Đặt $t = \log_a f(x) \Rightarrow \frac{1}{t} = \log_{f(x)} a$.

Phương trình trở thành: $mt + \frac{n}{t} + p = 0 \Leftrightarrow mt^2 + pt + n = 0$.

c) Phương trình đơn giản chứa $\log_a f(x), \log_b g(x)$ với $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$.

Điều kiện: $f(x) > 0, g(x) > 0$.

Đặt $t = \log_a f(x) \Leftrightarrow f(x) = a^t$ (cô lập x nếu được).

Thay trở lại phương trình, ta có một phương trình mới đơn giản hơn (chứa ít lôgarit hơn).

5. Phương trình lôgarit dạng tích:

a) Dạng cơ bản:

$$\begin{aligned} * ab = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \\ * ab = ac &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases} \end{aligned}$$

b) Dạng thường gặp:

$$\log_a f(x) + \log_b f(x) = \log_a f(x) \log_b f(x) + 1 \quad \text{với} \quad \begin{cases} a > 0, a \neq 1 \\ b > 0, b \neq 1 \end{cases}$$

Cách giải: $\log_a f(x) + \log_b f(x) = \log_a f(x) \log_b f(x) + 1$

$$\Leftrightarrow \log_a f(x) [1 - \log_b f(x)] = 1 - \log_b f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \log_b f(x) = 0 \\ \log_a f(x) = 1 \end{cases}$$

III – GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ-LÔGARIT BẰNG CÁC ĐÁNH GIÁ NÂNG CAO

1. Phương pháp đánh giá hai vế:

a) Dạng 1: Phương pháp đối lập.

Xét phương trình $f(x) = g(x)$ với $x \in D$.

Ta chứng minh: $\begin{cases} f(x) \geq M \\ g(x) \leq M \end{cases}$ với mọi $x \in D$. Do đó: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$.

☞ **Chú ý:** $\begin{cases} * a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \\ * |a| + |b| = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \end{cases}$

b) Dạng 2: Dùng tính đơn điệu của hàm số (phương trình có nghiệm duy nhất).

Xét phương trình $f(x) = g(x)$ có miền điều kiện là D .

Bước 1: Nhận thấy $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.

Bước 2: Chứng minh một trong các trường hợp sau:

- $f(x)$ đồng biến trên D , $g(x)$ nghịch biến trên D .
- $f(x)$ nghịch biến trên D , $g(x)$ đồng biến trên D .
- $f(x)$ đơn điệu trên D , $g(x)$ không đổi trên D .
- $f(x)$ không đổi trên D , $g(x)$ đơn điệu trên D .

Bước 3: Kết luận phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm duy nhất $x = x_0$.

c) Dạng 3: Dùng tính đơn điệu của hàm số (phương trình có hai nghiệm, ba nghiệm,...).

Với nguyên tắc làm tương tự **Dạng 2**, ta thực hiện:

- Nhận thấy $x = x_1, x = x_2$ là nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.
- Mặt khác, hàm số $y = f(x) - g(x)$ với đạo hàm $y' = 0$ có duy nhất một nghiệm. Suy ra phương trình $f(x) = g(x)$ có tối đa hai nghiệm.

• Kết luận: Vậy $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Mở rộng: Xét phương trình $f(x) = g(x)$ với hàm số $y = f(x) - g(x)$ liên tục trên miền D ; trong đó $y' = 0$ có n nghiệm, ta suy ra phương trình $f(x) = g(x)$ có tối đa $n + 1$ nghiệm.

2. Phương trình chứa hàm đặc trưng:

Xét phương trình dạng: $f(u) = f(v)$ trên miền điều kiện D .

Nếu hàm $y = f(t)$ đơn điệu trên miền D (tức là đạo hàm chỉ mang một dấu duy nhất trên D)

thì: $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

B – PHÂN DẠNG BÀI TẬP:

Dạng 1. Phương trình mũ

Phương pháp:

Bạn đọc cần nắm vững phương pháp giải phương trình trong phần **Tóm tắt lí thuyết** gồm:

- *Phương trình mũ cơ bản.*
- *Phương trình mũ dạng lôgarit hóa hai vế.*
- *Phương trình mũ dạng đặt ẩn phụ.*
- *Phương trình mũ dạng tích.*
- *Đánh giá hai vế phương trình hoặc dựa vào tính đơn điệu của hàm số, chứng minh phương trình vô nghiệm, có tối đa 1 nghiệm, 2 nghiệm...*

Bài toán 1. Các phương trình mũ thường gặp

VÍ DỤ 1. Phương trình $2^{2x+1} = 32$ có nghiệm là

A. $x = \frac{5}{2}$.

B. $x = 2$.

C. $x = \frac{3}{2}$.

D. $x = 3$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $2^{2x+1} = 32 \Leftrightarrow 2^{2x+1} = 2^5 \Leftrightarrow 2x+1=5 \Leftrightarrow x=2$.

Chọn B.

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $2^{x^2+3x} = 1$.

A. $x = 0, x = 3$.

B. $x = 1, x = -3$.

C. $x = 1, x = 2$.

D. $x = 0, x = -3$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $2^{x^2+3x} = 1 \Leftrightarrow 2^{x^2+3x} = 2^0 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Chọn D.

VÍ DỤ 3. Tìm tích số của tất cả các nghiệm thực của phương trình $7^{x^2-x+\frac{3}{2}} = 49\sqrt{7}$.

- A. -1. B. 1. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có : } 7^{x^2-x+\frac{3}{2}} = 49\sqrt{7} \Leftrightarrow 7^{x^2-x+\frac{3}{2}} = 7^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Khi đó tích các nghiệm là: $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -1$. **Chọn A.**

VÍ DỤ 4. Cho phương trình $(7+4\sqrt{3})^{x^2+x-1} = (2+\sqrt{3})^{x-2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Phương trình có hai nghiệm không dương.
B. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.
C. Phương trình có hai nghiệm trái dấu.
D. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

Hướng dẫn giải:

Do $7+4\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^2$ nên phương trình ban đầu tương đương với

$$(2+\sqrt{3})^{2(x^2+x-1)} = (2+\sqrt{3})^{x-2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 2 = x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm không dương. **Chọn A.**

VÍ DỤ 5. Nghiệm của phương trình $2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+1}$ là.

- A. $\log_{\frac{3}{4}} \frac{3}{2}$. B. $x = 1$. C. $x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{4}$. D. $x = \log_{\frac{4}{3}} \frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có : } 2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+1} \Leftrightarrow 2^x + 2 \cdot 2^x = 3^x + 3 \cdot 3^x \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x = 4 \cdot 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{4}.$$

Chọn C.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

VÍ DỤ 6. Cho biết phương trình $5^{x^2-3x+2} = 3^{x-2}$ có một nghiệm không nguyên dạng $x = \log_a b$ với a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 16. Khi đó $a + 2b$ bằng:
A. 35. B. 25. C. 40. D. 30.

Hướng dẫn giải:

Xét phương trình : $5^{x^2-3x+2} = 3^{x-2}$. Lấy logarit cơ số 5 cho hai vế, ta được :

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2) \log_5 3 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1) - (x - 2) \log_5 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 1 - \log_5 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 + \log_5 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \log_5 15 \end{cases}.$$

Suy ra $a = 5, b = 15$. Vậy $a + 2b = 35$. **Chọn A.**

Bài toán 2. Phương trình mũ dạng đặt ẩn phụ

VÍ DỤ 7. Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$ ta được phương trình nào sau đây:
A. $4t - 3 = 0$. B. $t^2 + t - 3 = 0$.
C. $t^2 + 2t - 3 = 0$. D. $2t^2 - 3t = 0$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có : } 4^x + 2^{x+1} - 3 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 3 = 0.$$

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Phương trình trở thành : $t^2 + 2t - 3 = 0$. **Chọn C.**

VÍ DỤ 8. Số nghiệm của phương trình $3^x - 3^{1-x} = 2$ là:
A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có : } 3^x - 3^{1-x} = 2 \Leftrightarrow 3^x - \frac{3}{3^x} = 2 \Leftrightarrow 3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = 3^x, t > 0. \text{ Phương trình trở thành : } t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 < 0 \text{ (loại)} \\ t = 3 \end{cases}.$$

Với $t = 3$ thì $3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy phương trình đã cho có một nghiệm. **Chọn B.**

VÍ DỤ 9. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2^{2x^2+1} - 5 \cdot 2^{x^2+3x} + 2^{6x+1} = 0$ bằng:
A. 6. B. 10. C. 3. D. 5.

Hướng dẫn giải:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Ta có: $2^{2x^2+1} - 5.2^{x^2+3x} + 2^{6x+1} = 0 \Leftrightarrow 2.2^{2x^2} - 5.2^{x^2+3x} + 2.2^{6x} = 0$.

Chia hai vế phương trình cho $2^{6x} \neq 0$, ta được: $2.2^{2x^2-6x} - 5.2^{x^2-3x} + 2 = 0$.

Đặt $t = 2^{x^2-3x}$, $t > 0$; suy ra $t^2 = 2^{2(x^2-3x)}$, $t > 0$. Phương trình trở thành: $2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Với $t = 2$ thì $2^{x^2-3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 1 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$; suy ra $x_1 + x_2 = 3$.

Với $t = \frac{1}{2}$ thì $2^{x^2-3x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 3x = -1 \Leftrightarrow x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; suy ra $x_3 + x_4 = 3$.

Vậy tổng các nghiệm phương trình là: $3 + 3 = 6$. **Chọn A.**

VÍ DỤ 10. Cho phương trình $5.49^x + 3.35^x = 14.25^x$. Kết luận nào sau đây **sai**?

- | | |
|---|--|
| A. Phương trình vô nghiệm. | B. Phương trình có một nghiệm. |
| C. $x = 1$ là nghiệm của phương trình. | D. Phương trình không có nghiệm âm. |

Hướng dẫn giải:

Chia hai vế phương trình cho $25^x \neq 0$, ta có: $5.49^x + 3.35^x = 14.25^x$

$$\Leftrightarrow 5.\left(\frac{49}{25}\right)^x + 3.\left(\frac{35}{25}\right)^x = 14 \Leftrightarrow 5.\left(\frac{7}{5}\right)^{2x} + 3.\left(\frac{7}{5}\right)^x - 14 = 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{7}{5}\right)^x > 0$. Phương trình trở thành: $5t^2 + 3t - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{7}{5} > 0 \\ t = -2 < 0 \text{ (loại)} \end{cases}$.

Với $t = \frac{7}{5}$ thì $\left(\frac{7}{5}\right)^x = \frac{7}{5} \Leftrightarrow x = 1$. **Chọn A.**

VÍ DỤ 11. Cho phương trình: $(3 + \sqrt{5})^x + 16(3 - \sqrt{5})^x = 2^{x+3}$ (*). Phát biểu nào sau đây **sai**?

- | | |
|--------------------------------------|--|
| A. (*) có nghiệm là số vô tỉ. | B. (*) có nghiệm dương. |
| C. (*) có nghiệm duy nhất. | D. (*) có hai nghiệm phân biệt. |

Hướng dẫn giải:

Chia hai vế phương trình cho $2^x \neq 0$, ta được: $\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^x + 16\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^x = 2^3$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Nhận thấy: $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1$. Đặt $t = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x > 0 \Rightarrow \frac{1}{t} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x$.

Phương trình trở thành: $t + \frac{16}{t} - 8 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 16 = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

Với $t = 4$ thì $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} 4$. **Chọn D.**

VÍ DỤ 12. Gọi x_0 là một nghiệm của phương trình $2^{x^2+4} = 2^{2(x^2+1)} + \sqrt{2^{2(x^2+2)} - 2^{x^2+3}} + 1$. Khi đó $x_0^2 = \log_a(3 + \sqrt{b}) - c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $a^2 - b^2 + c^2$.

A. $a^2 - b^2 + c^2 = -95$. **B.** $a^2 - b^2 + c^2 = 85$. **C.** $a^2 - b^2 + c^2 = -65$. **D.** $a^2 - b^2 + c^2 = 75$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $2^{x^2+4} = 2^{2(x^2+1)} + \sqrt{2^{2(x^2+2)} - 2^{x^2+3}} + 1 \Leftrightarrow 8 \cdot 2^{x^2+1} = 2^{2(x^2+1)} + \sqrt{4 \cdot 2^{2(x^2+1)} - 4 \cdot 2^{x^2+1}} + 1$

Đặt $t = 2^{x^2+1}$ ($t \geq 2$). Phương trình trở thành: $t^2 + \sqrt{4t^2 - 4t} + 1 = 8t \Leftrightarrow t^2 + \sqrt{(2t-1)^2} = 8t$

$\Leftrightarrow t^2 + \underbrace{(2t-1)}_+ = 8t \Leftrightarrow t^2 - 6t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \pm \sqrt{10}$; vì $t \geq 2$ nên $t = 3 + \sqrt{10}$.

Với $t = 3 + \sqrt{10}$ thì $2^{x^2+1} = 3 + \sqrt{10} \Leftrightarrow x^2 + 1 = \log_2(3 + \sqrt{10}) \Leftrightarrow x^2 = \log_2(3 + \sqrt{10}) - 1$.

Ta có x_0 là một nghiệm của phương trình và $x_0^2 = \log_a(3 + \sqrt{b}) - c \Rightarrow a = 2, b = 10, c = 1$.

Suy ra: $a^2 - b^2 + c^2 = -95$. **Chọn A.**

Bài toán 3. Phương trình mũ dạng tích

VÍ DỤ 13. Gọi a, b ($a > b$) là các nghiệm của phương trình $6^x + 6 = 2^{x+1} + 3^{x+1}$. Tính giá trị của $P = 2^a + 3^b$.

A. 17. **B.** 7. **C.** 31. **D.** 5.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $6^x + 6 = 2^{x+1} + 3^{x+1} \Leftrightarrow 6^x + 6 = 2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x \Leftrightarrow 2^x \cdot (3^x - 2) = 3 \cdot (3^x - 2) \Leftrightarrow (3^x - 2)(2^x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 2 \\ 2^x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3 2 \\ x = \log_2 3 \end{cases} \Rightarrow a = \log_2 3; b = \log_3 2 \text{ (} a > b \text{)}.$

Vậy $P = 2^{\log_2 3} + 3^{\log_3 2} = 3 + 2 = 5$. **Chọn D.**

VÍ DỤ 14. Tính giá trị T là tổng tất cả nghiệm thực của phương trình: $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

A. 3.

B. -5.

C. -3.

D. 5.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} &= 4^{2x^2+3x+7} + 1 \Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{x^2-3x+2} \cdot 4^{x^2+6x+5} + 1 \\ \Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2} - 1 &= 4^{x^2-3x+2} \cdot 4^{x^2+6x+5} - 4^{x^2+6x+5} \Leftrightarrow (4^{x^2-3x+2} - 1) \cdot 1 = 4^{x^2+6x+5} (4^{x^2-3x+2} - 1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2-3x+2} - 1 = 0 \\ 4^{x^2+6x+5} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2-3x+2} = 4^0 \\ 4^{x^2+6x+5} = 4^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 + 6x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = 2 \\ x = -1 \vee x = -5 \end{cases}. \end{aligned}$$

Tổng các nghiệm của phương trình: $T = 1 + 2 + (-1) + (-5) = -3$. **Chọn C.**

VÍ DỤ 15. Tìm tổng bình phương tất cả nghiệm thực của phương trình $4^x = x(2^x + 1) + \sqrt{2^x - x}$.

A. 10.

B. 5.

C. 1.

D. 13.

_____ **TRÍCH TỪ ĐỀ THI HSG 12, TP. HCM, 2021** _____

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $2^x - x \geq 0$. Ta có: $4^x = x(2^x + 1) + \sqrt{2^x - x}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 4^x - 1 &= x(2^x + 1) + \sqrt{2^x - x} - 1 \Leftrightarrow (2^x - 1)(2^x + 1) - x(2^x + 1) = \frac{2^x - x - 1}{\sqrt{2^x - x} + 1} \\ \Leftrightarrow (2^x - 1 - x)(2^x + 1) &= \frac{2^x - x - 1}{\sqrt{2^x - x} + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - x - 1 = 0 & (1) \\ 2^x + 1 = \frac{1}{\sqrt{2^x - x} + 1} & (2) \end{cases}. \end{aligned}$$

Giải phương trình (1): Xét hàm số $f(x) = 2^x - x - 1$ có $f(1) = 0$, $f(0) = 0$.

Ngoài ra: $f'(x) = 2^x \ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{1}{\ln 2}$; vì $f'(x) = 0$ chỉ có một nghiệm nên phương trình

$f(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm. Vậy (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Giải phương trình (2): Ta có: $\begin{cases} 2^x > 0 \\ \sqrt{2^x - x} + 1 \geq 1 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + 1 > 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2^x - x} + 1} \leq 1 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra phương

trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình ban đầu có đúng hai nghiệm là $x = 0$; $x = 1$. Suy ra $0^2 + 1^2 = 1$. **Chọn C.**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Bài toán 4. Giải phương trình mũ bằng phương pháp đánh giá

VÍ DỤ 16. Cho phương trình $2023^{x^2-1} + (x^2-1) \cdot 2024^x = 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

- A. Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.
- B. Phương trình đã cho có nhiều hơn hai nghiệm.
- C. Phương trình đã cho có tổng các nghiệm bằng 0.
- D. Phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt.

Hướng dẫn giải:

Xét phương trình (*): $2023^{x^2-1} + (x^2-1) \cdot 2024^x = 1$. Ta thấy $x = \pm 1$ là các nghiệm của (*).

Xét trường hợp: $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases}$. Khi đó: $\begin{cases} 2023^{x^2-1} > 1 \\ (x^2-1) \cdot 2024^x > 0 \end{cases} \Rightarrow$ Vế trái (*) > 1 nên dấu đẳng thức không thể xảy ra. Vậy trường hợp này **không thỏa mãn**.

Xét trường hợp: $x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$. Khi đó: $\begin{cases} 2023^{x^2-1} < 1 \\ (x^2-1) \cdot 2024^x < 0 \end{cases} \Rightarrow$ Vế trái (*) < 1 nên dấu đẳng thức không thể xảy ra. Vậy trường hợp này cũng **không thỏa mãn**.

thức không thể xảy ra. Vậy trường hợp này cũng **không thỏa mãn**.

Tóm lại phương trình (*) có hai nghiệm $x = \pm 1$, suy ra tổng hai nghiệm bằng 0. **Chọn C.**

VÍ DỤ 17. Phương trình $x(2^{x-1} + 4) = 2^{x+1} + x^2$ có tổng các nghiệm bằng

- A. 5.
- B. 3.
- C. 6.
- D. 7.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $x(2^{x-1} + 4) = 2^{x+1} + x^2 \Leftrightarrow x \cdot 2^{x-1} - 2^2 \cdot 2^{x-1} = x^2 - 4x \Leftrightarrow 2^{x-1}(x-4) = x(x-4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 2^{x-1} = x \end{cases} (*)$.

Đặt $f(x) = 2^{x-1} - x \Rightarrow f'(x) = 2^{x-1} \cdot \ln 2 - 1$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \log_2 \frac{1}{\ln 2} = 1 - \log_2(\ln 2)$.

Ta thấy $f'(x) = 0$ có duy nhất 1 nghiệm nên phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm.

Mặt khác: $f(1) = 0$; $f(2) = 0$, suy ra phương trình (*) có 2 nghiệm $x = 1$; $x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x = 1$; $x = 2$; $x = 4$. Tổng các nghiệm bằng 7. **Chọn D.**

VÍ DỤ 18. Cho phương trình: $2025^x + x^2 = \sqrt{2023 + \sqrt[3]{2024 + \sqrt[5]{2025}}}$. Tìm số nghiệm của phương trình trên.

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

_____ Trích THPT Số 2-485 tháng 11, năm 2017 _____

Hướng dẫn giải:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Ta có: $2025^x + x^2 = \sqrt{2023 + \sqrt[3]{2024 + \sqrt[5]{2025}}} \Leftrightarrow 2025^x + x^2 - \sqrt{2023 + \sqrt[3]{2024 + \sqrt[5]{2025}}} = 0$.

Đặt $f(x) = 2025^x + x^2 - \sqrt{2023 + \sqrt[3]{2024 + \sqrt[5]{2025}}}$, $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 2025^x \cdot \ln 2025 + 2x$; $f''(x) = 2025^x \cdot \ln^2 2025 + 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ mà $f'(-1) \cdot f'(0) < 0$ nên $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất trong khoảng $(-1; 0)$, suy ra phương trình $f(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm.

Tới đây, ta cần sự hỗ trợ của **MTBT** để dò khoảng nghiệm của phương trình:

Sử dụng chức năng **Table** của máy (thao tác sau đây được thực hiện trên **VINACAL 680EX PLUS**):

MODE $\xrightarrow{\text{NEXT}}$ **8** $\xrightarrow{\text{NEXT}}$ $F(X) = 2025^X + X^2 - \sqrt{2023 + \sqrt[3]{2024 + \sqrt[5]{2025}}}$ $\xrightarrow{\text{NEXT}}$ **START: -10**
 $\xrightarrow{\text{NEXT}}$ **END: 10** $\xrightarrow{\text{NEXT}}$ **STEP: 1** $\xrightarrow{\text{NEXT}}$ **=**. (Lưu ý trong quá trình nhập, nếu gặp $G(X)$ thì

ta nhấn dấu **=** để bỏ qua).

Kết quả hiển thị từ màn hình **MTBT**, ta thấy $F(X)$ đổi dấu hai lần khi x đi từ $-7 \rightarrow -6$, $0 \rightarrow 1$.

x	$f(x)$
-8	18.881
-7	3.8817
-6	-9.118
-5	-20.111

x	$f(x)$
-1	-44.111
0	-44.111
1	1980.8
2	4.1111

Ta có: $\begin{cases} f(-7) \cdot f(-6) < 0 \\ f(0) \cdot f(1) < 0 \end{cases}$. Vậy phương trình đã cho chỉ có hai nghiệm trên hai khoảng $(-7; -6)$

và $(0; 1)$. Do đó số nghiệm phương trình đã cho bằng 2.

VÍ DỤ 19. Tổng lập phương tất cả các nghiệm thực của phương trình $15x \cdot 5^x = 5^{x+1} + 27x + 23$.

A. 5.

B. 6.

C. 8.

D. 0.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $15x \cdot 5^x = 5^{x+1} + 27x + 23 \Leftrightarrow 5^{x+1} \cdot (3x - 1) = 27x + 23$ (1).

Ta thấy $x = \frac{1}{3}$ không là nghiệm của (1). Với $x \neq \frac{1}{3}$, (1) trở thành: $5^{x+1} = \frac{27x + 23}{3x - 1}$ (2).

Trường hợp 1: Xét $x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Ta thấy hàm số $y = 5^{x+1}$ (với $y' = 5^{x+1} \ln 5 > 0$) đồng biến trên

$\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$, hàm số $y = \frac{27x + 23}{3x - 1}$ (với $y' = -\frac{96}{(3x - 1)^2} < 0$) nghịch biến trên $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Mặt khác: $x = 1 \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ là một nghiệm của (2). Vậy (2) có nghiệm duy nhất $x = 1 \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Trường hợp 2: Xét $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ ta có hàm số $y = 5^{x+1}$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$, hàm số

$$y = \frac{27x+23}{3x-1} \text{ nghịch biến trên } \left(-\infty; \frac{1}{3}\right).$$

Mặt khác: $x = -1 \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ là một nghiệm của (2). Vậy (2) có nghiệm duy nhất $x = -1 \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = 1, x = -1$. Suy ra: $1^3 + (-1)^3 = 0$. **Chọn D.**

VÍ DỤ 20. Số nghiệm của phương trình $2x^2 + 2x - 9 = (x^2 - x - 3) \cdot 8^{x^2+3x-6} + (x^2 + 3x - 6) \cdot 8^{x^2-x-3}$ là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

____ THPT Chuyên Vĩnh Phúc, lần 3, 2018 ____

Hướng dẫn giải:

Đặt $u = x^2 - x - 3, v = x^2 + 3x - 6$. Phương trình trở thành: $u + v = u \cdot 8^v + v \cdot 8^u$ (*).

Trường hợp 1: $u = 0$, (*) trở thành $v = v$ (đúng). Ta có: $u = x^2 + 3x - 6 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$.

Trường hợp 2: $v = 0$, (*) trở thành $u = u$ (đúng). Ta có $v = x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Trường hợp 3: $uv \neq 0$; khi đó: $u + v = u \cdot 8^v + v \cdot 8^u \Leftrightarrow \frac{8^v}{v} + \frac{8^u}{u} = \frac{1}{v} + \frac{1}{u} \Leftrightarrow \frac{8^v - 1}{v} + \frac{8^u - 1}{u} = 0$ (**).

Xét $f(v) = \frac{8^v - 1}{v}$. Ta sẽ chứng minh $f(v) = \frac{8^v - 1}{v} > 0, \forall v \neq 0$. Thật vậy:

— Nếu $v > 0$ thì $8^v > 8^0 \Rightarrow 8^v - 1 > 0 \Rightarrow f(v) = \frac{8^v - 1}{v} > 0$.

— Nếu $v < 0$ thì $8^v < 8^0 \Rightarrow 8^v - 1 < 0 \Rightarrow f(v) = \frac{8^v - 1}{v} > 0$.

Suy ra $f(v) = \frac{8^v - 1}{v} > 0, \forall v \neq 0$. Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $f(u) = \frac{8^u - 1}{u} > 0, \forall u \neq 0$.

Ta thấy vế trái (**) luôn dương nên (**) vô nghiệm.

Vậy, phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt. **Chọn D.**

Bài toán 5. Giải phương trình mũ bằng phương pháp hàm đặc trưng

VÍ DỤ 21. Số nghiệm của phương trình $2024^{\sqrt{2x^2-3x-2}} - 2024^{x-3} + \sqrt{2x^2-3x-x+1} = 0$ là

A. 3

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Điều kiện: $2x^2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Phương trình đã cho tương đương với $2024^{\sqrt{2x^2-3x}-2} + \sqrt{2x^2-3x} - 2 = 2024^{x-3} + x - 3 \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t) = 2024^t + t$ với $t \in \mathbb{R}$; $f'(t) = 2024^t \ln 2024 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do vậy: $(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{2x^2-3x}-2) = f(x-3) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x}-2 = x-3 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x} = x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x^2-3x = x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (thỏa điều kiện).}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **Chọn C.**

VÍ DỤ 22. Tìm số nghiệm của phương trình $e^{x^2+2024-\sqrt{x^2+2023}} \cdot \sqrt{x^2+2023} = x^2+2024$.

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $e^{x^2+2024-\sqrt{x^2+2023}} \cdot \sqrt{x^2+2023} = x^2+2024 \Leftrightarrow \frac{e^{x^2+2024}}{x^2+2024} = \frac{e^{\sqrt{x^2+2023}}}{\sqrt{x^2+2023}} \quad (1)$.

Nhận xét: $\sqrt{x^2+2023} > 1$ và $x^2+2024 > 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{e^t}{t}$ với $t > 1$, $f'(t) = \frac{e^t \cdot t - e^t}{t^2} = \frac{e^t(t-1)}{t^2} > 0$ với mọi $t > 1$.

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$. Vì vậy $(1) \Leftrightarrow f(x^2+2024) = f(\sqrt{x^2+2023})$

$$\Leftrightarrow x^2+2024 = \sqrt{x^2+2023} \Leftrightarrow (x^2+2023) - \sqrt{x^2+2023} + 1 = 0 \quad (2).$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+2023} \geq \sqrt{2023}$. Phương trình (2) trở thành: $t^2 - t + 1 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. **Chọn A.**

VÍ DỤ 23. Gọi T là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{2024}{643\pi} - \left(\frac{2024}{643\pi}\right)^{2\cos^2 x} = \cos 2x \cdot \left(\frac{2024}{643\pi}\right)^{\cos^2 x}$ trên đoạn $[0; \pi]$.

A. $x = \pi$.

B. $x = \frac{\pi}{4}$.

C. $x = \frac{\pi}{2}$.

D. $x = \frac{3\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Đặt $a = \frac{2024}{643\pi} \approx 1,002 > 1$. Phương trình trở thành: $a - a^{2\cos^2 x} = \cos 2x \cdot a^{\cos^2 x}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a^{\cos^2 x}} - \frac{a^{2\cos^2 x}}{a^{\cos^2 x}} = \cos 2x \Leftrightarrow a^{1-\cos^2 x} - a^{\cos^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x \Leftrightarrow a^{\sin^2 x} + \sin^2 x = a^{\cos^2 x} + \cos^2 x \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = a^t + t$ với $t \geq 0$; $f'(t) = a^t \ln a + 1 > 0, \forall t \geq 0$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy: $(*) \Leftrightarrow f(\sin^2 x) = f(\cos^2 x) \Leftrightarrow \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \text{ Vì } x \in [0; \pi] \text{ nên } x = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

Suy ra $T = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$. **Chọn A.**

Dạng 2. Phương trình lôgarit

☞ Phương pháp:

Bạn đọc cần nắm vững phương pháp giải phương trình trong phần Tóm tắt lí thuyết gồm:

- *Phương trình lôgarit cơ bản.*
- *Phương trình lôgarit dạng mũ hóa hai vế.*
- *Phương trình lôgarit dạng đặt ẩn phụ.*
- *Phương trình lôgarit dạng tích.*
- *Đánh giá hai vế phương trình hoặc dựa vào tính đơn điệu của hàm số, chứng minh phương trình vô nghiệm, có tối đa 1 nghiệm, 2 nghiệm...*

📌 **Lưu ý:** Với phương trình $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$ thì ta không cần đặt điều kiện cho $f(x)$, tất cả phương trình lôgarit còn lại luôn cần điều kiện để lôgarit có nghĩa trước khi được giải.

Bài toán 1. Các phương trình lôgarit thường gặp

VÍ DỤ 24. Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 - 7) = 2$ là:

- A. $\{-\sqrt{15}; \sqrt{15}\}$. B. $\{-4; 4\}$. C. $\{4\}$. D. $\{-4\}$.

🔗 **Nhận xét:** Với phương trình dạng $\log_a f(x) = b$ ($a > 0, a \neq 1$) thì ta không cần đặt điều kiện cho x .

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\log_3(x^2 - 7) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 7 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$. Vậy tập nghiệm phương trình là $S = \{-4; 4\}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Chọn B.

VÍ DỤ 25. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - x) = \log_2(x + 1)$. Tính $P = x_1^2 + x_2^2$.

A. $P = 6$.

B. $P = 8$.

C. $P = 2$.

D. $P = 4$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } \log_2(x^2 - x) = \log_2(x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = x + 1 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{2} \\ x_2 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}.$$

Do đó: $x_1^2 + x_2^2 = (1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2 = 6$. **Chọn B.**

VÍ DỤ 26. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_3(2x + 1) - \log_3(x - 1) = 1$.

A. $S = \{1\}$.

B. $S = \{-2\}$.

C. $S = \{3\}$.

D. $S = \{4\}$.

_____ Đề thi THPT QG, năm 2017 _____

Hướng dẫn giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\text{Ta có: } \log_3(2x + 1) - \log_3(x - 1) = 1 \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x + 1}{x - 1} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x + 1}{x - 1} = 3 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn). } \textbf{Chọn D.}$$

VÍ DỤ 27. Nghiệm của phương trình $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } \log_3(3^x - 8) = 2 - x \Leftrightarrow 3^x - 8 = 3^{2-x} \Leftrightarrow 3^x - 8 = \frac{3^2}{3^x} \Leftrightarrow (3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = -1 < 0 \text{ (loại)} \\ 3^x = 9 \text{ (nhận)} \end{cases} \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Chọn B.

VÍ DỤ 28. Phương trình $\log_{49} x^2 + \frac{1}{2} \log_7(x - 1)^2 = \log_7(\log_{\sqrt{3}} 3)$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 > 0 \\ (x-1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}.$

Ta có: $\log_{49} x^2 + \frac{1}{2} \log_7 (x-1)^2 = \log_7 (\log_{\sqrt{3}} 3) \Leftrightarrow \log_7 |x| + \log_7 |x-1| = \log_7 2$

$\Leftrightarrow \log_7 |x(x-1)| = \log_7 2 \Leftrightarrow |x(x-1)| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 2 \\ x(x-1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x^2 - x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \text{ (nhận)}.$

Chọn A.

Bài toán 2. Phương trình lôgarit dạng đặt ẩn phụ

VÍ DỤ 29. Cho phương trình $\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2}$ (*). Tìm mệnh đề đúng.

A. (*) có hai nghiệm dương.

B. (*) vô nghiệm.

C. (*) có một nghiệm âm.

D. (*) có hai nghiệm trái dấu.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $0 < x \neq 1$. Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow \frac{1}{t} = \log_x 2$.

Phương trình (*) trở thành: $\frac{1}{t} + t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}.$

Với $t = 2$ thì $\log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 2^2 = 4$. Với $t = \frac{1}{2}$ thì $\log_2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

Vậy, tập nghiệm của phương trình (*) là: $S = \{\sqrt{2}; 4\}$. **Chọn A.**

VÍ DỤ 30. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_3^2(3x) + \log_3(9x) - 7 = 0$ bằng

A. 84.

B. $\frac{28}{81}$.

C. $\frac{244}{81}$.

D. $\frac{244}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x > 0$. Ta có: $\log_3^2(3x) + \log_3(9x) - 7 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2(3x) + \log_3(3x) + \log_3 3 - 7 = 0$
 $\Leftrightarrow \log_3^2(3x) + \log_3(3x) - 6 = 0.$

Đặt $t = \log_3(3x)$. Phương trình trở thành: $t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 2 \end{cases}.$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Khi đó:
$$\begin{cases} \log_3(3x) = -3 \\ \log_3(3x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3^{-3} \\ 3x = 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{81} \\ x = 3 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện).}$$

Tổng các nghiệm của phương trình là $\frac{1}{81} + 3 = \frac{244}{81}$. **Chọn C.**

VÍ DỤ 31. Tích các nghiệm của phương trình $\log_x(125x)\log_{25}^2 x = 1$ bằng:

A. $\frac{7}{25}$.

B. $\frac{630}{625}$.

C. $\frac{1}{125}$.

D. 630.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện : $0 < x \neq 1$.

Ta có : $\log_x(125x)\log_{25}^2 x = 1 \Leftrightarrow (\log_x 5^3 + 1)\log_{5^2}^2 x = 1 \Leftrightarrow (3\log_x 5 + 1)\frac{1}{4}\log_5^2 x = 1$.

Đặt $t = \log_5 x \Rightarrow \frac{1}{t} = \log_x 5$. Phương trình trở thành: $\left(\frac{3}{t} + 1\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot t^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -4 \end{cases}$.

Với $t = 1$ thì $\log_5 x = 1 \Leftrightarrow x = 5$. Với $t = -4$ thì $\log_5 x = -4 \Leftrightarrow x = 5^{-4}$.

Tích hai nghiệm phương trình là $5 \cdot 5^{-4} = \frac{1}{125}$. **Chọn C.**

VÍ DỤ 32. Cho phương trình $\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x - 1)^2 = 4$. Tìm tích hai nghiệm của phương trình trên.

A. 3.

B. 2.

C. $\frac{5}{4}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Điều kiện:
$$\begin{cases} 2x^2 + x - 1 > 0 \\ 0 < 2x - 1 \neq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \neq 1. \\ 0 < x + 1 \neq 1 \end{cases}$$

Phương trình đã cho trở thành $\log_{2x-1}(2x-1)(x+1) + 2\log_{x+1}(2x-1) = 4$

$\Leftrightarrow 1 + \log_{2x-1}(x+1) + 2\log_{x+1}(2x-1) = 4 \Leftrightarrow \log_{2x-1}(x+1) + 2\log_{x+1}(2x-1) - 3 = 0$ (*).

Đặt $t = \log_{2x-1}(x+1) \Rightarrow \frac{1}{t} = \log_{x+1}(2x-1)$.

Khi đó (*) trở thành: $t + \frac{2}{t} - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$.

Với $t = 1$ thì $\log_{2x-1}(x+1) = 1 \Leftrightarrow x+1 = 2x-1 \Leftrightarrow x = 2$.

Với $t = 2$ thì $\log_{2x-1}(x+1) = 2 \Leftrightarrow x+1 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = \frac{5}{4} \text{ (nhận)} \end{cases}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Phương trình có hai nghiệm $x = 2$; $x = \frac{5}{4}$ nên tích của chúng bằng $\frac{5}{2}$. **Chọn D.**

VÍ DỤ 33. Cho phương trình $(x+2)\log_3^2(x+1) + 4(x+1)\log_3(x+1) - 16 = 0$. Biết a, b là hai nghiệm thực của phương trình đã cho với $a > b$, hãy tính giá trị $a + 27b$.

- A. $-\frac{49}{2}$. B. $-\frac{74}{3}$. C. 1. D. 0.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x > -1$. Đặt $t = \log_3(x+1)$.

Phương trình trở thành: $(x+2)t^2 + 4(x+1)t - 16 = 0$ (*). Nhận xét: $x+2 \neq 0, \forall x > -1$.

Ta có: $\Delta' = 4(x+1)^2 + 16(x+2) = 4x^2 + 24x + 36 = (2x+6)^2$.

Khi đó, (*) có hai nghiệm: $t_1 = \frac{-2(x+1)+2x+6}{x+2} = \frac{4}{x+2}$; $t_2 = \frac{-2(x+1)-2x-6}{x+2} = \frac{-4(x+2)}{x+2} = -4$.

Với $t = t_1 = \frac{4}{x+2}$ thì $\log_3(x+1) = \frac{4}{x+2}$. Phương trình này chỉ có một nghiệm $x = 2$ vì vế trái là hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$, vế phải là hàm nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.

Với $t = t_2 = -4$ thì $\log_3(x+1) = -4 \Leftrightarrow x+1 = \frac{1}{81} \Leftrightarrow x = -\frac{80}{81}$.

Do vậy, ta có: $a = 2, b = -\frac{80}{81} \Rightarrow a + 27b = -\frac{74}{3}$. **Chọn B.**

Bài toán 3. Phương trình lôgarit dạng tích

VÍ DỤ 34. Phương trình $\log_2(3x-4) \cdot \log_2 x = \log_2 x$ có số nghiệm là:

- A. 1. B. 5. C. 10. D. 17.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x > \frac{4}{3}$.

Ta có: $\log_2(3x-4) \cdot \log_2 x = \log_2 x \Leftrightarrow \log_2 x \cdot [\log_2(3x-4) - 1] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ \log_2(3x-4) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3x-4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 2 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có đúng một nghiệm. **Chọn A.**

VÍ DỤ 35. Tổng các nghiệm của phương trình $\log^2 x - \log x \cdot \log_2(4x) + 2\log_2 x = 0$ là:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

A. 100.

B. 101.

C. 102.

D. 103

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $\log^2 x - \log x \cdot \log_2(4x) + 2\log_2 x = 0 \Leftrightarrow \log^2 x - 2\log x - \log x \cdot \log_2 x + 2\log_2 x = 0$

$\Leftrightarrow \log x(\log x - 2) - \log_2 x(\log x - 2) = 0 \Leftrightarrow (\log x - \log_2 x) \cdot (\log x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log x - \log_2 x = 0 \\ \log x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x - \log_2 10 \cdot \log x = 0 \\ \log x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x(1 - \log_2 10) = 0 \\ x = 10^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 100 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}.$

Tổng các nghiệm của phương trình là 101. **Chọn B.**

VÍ DỤ 36. Cho biết $x_0 = \frac{\sqrt{a}}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}$ và a là số nguyên tố) là một nghiệm của phương trình

$\log_3\left(\frac{3}{x}\right)\log_2 x - \log_3\left(\frac{x^3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$. Tìm bội số chung nhỏ nhất của hai số a và b .

A. 16.

B. 24.

C. 12.

D. 6.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $\log_3\left(\frac{3}{x}\right)\log_2 x - \log_3\left(\frac{x^3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x} \Leftrightarrow (1 - \log_3 x)\log_2 x - \left(3\log_3 x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2 x$

$\Leftrightarrow (1 - \log_3 x)\log_2 x - 3\log_3 x - \frac{1}{2}\log_2 x = 0 \Leftrightarrow (1 - \log_3 x)\log_2 x - 3\log_3 2\log_2 x - \frac{1}{2}\log_2 x = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x \left(1 - \log_3 x - 3\log_3 2 - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ \log_3 x = -3\log_3 2 + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3^{-3\log_3 2 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{8} \end{cases}$

Vậy $x_0 = \frac{\sqrt{a}}{b} = \frac{\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 8 \end{cases}$. Bội số chung nhỏ nhất của 3 và 8 là 24. **Chọn B.**

VÍ DỤ 37. Cho phương trình $3\log_3^2(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) + 2\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})\log_3(9x^2) + \left(1 - \log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 = 0$,

biết rằng $x_0 = \frac{a\sqrt{17}}{b}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) là một nghiệm của phương trình trên. Giá trị $\log_a b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. (1; 2).

B. (0; 1).

C. (3; 4).

D. (2; 3).

_____ Trích từ đề thi tự luận Kỳ thi THPT Quốc gia năm 2016 _____

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $0 < x \leq 2$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

$$\begin{aligned}
 &\text{Phương trình} \Leftrightarrow 3\log_3^2(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}) - 2\log_3(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})\log_3(3x)^2 + (1+\log_3 x)^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 3\log_3^2(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}) - 4\log_3(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})\log_3(3x) + \log_3^2(3x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 3\log_3^2(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}) - 3\log_3(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})\log_3(3x) - \log_3(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})\log_3(3x) + \log_3^2(3x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 3\log_3(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})[\log_3(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}) - \log_3(3x)] - \log_3(3x)[\log_3(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}) - \log_3(3x)] = 0 \\
 &\Leftrightarrow [\log_3(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}) - \log_3(3x)] \cdot [3\log_3(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}) - \log_3(3x)] = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}) = \log_3(3x) \\ \log_3(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})^3 = \log_3(3x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2+x}+\sqrt{2-x} = 3x & (1) \\ (\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})^3 = 3x & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\bullet (1) \Leftrightarrow 2+x+2-x+2\sqrt{4-x^2} = 9x^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x^2} = 9x^2 - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 4 \geq 0 \\ 4(4-x^2) = 81x^4 - 72x^2 + 16 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{2}{3} \vee x \geq \frac{2}{3} \\ 81x^4 - 68x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{2}{3} \vee x \geq \frac{2}{3} \\ x^2 = 0 \vee x^2 = \frac{68}{81} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{17}}{9}. \text{ So điều kiện, ta nhận } \boxed{x = \frac{2\sqrt{17}}{9}}.
 \end{aligned}$$

- Xét phương trình (2): Ta có: $(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})^2 = 4+2\sqrt{4-x^2} \geq 4, \forall x \in (0; 2]$; mặt khác $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x} \geq 2, \forall x \in (0; 2]$. Suy ra vế trái (2) $= (\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})^2 \geq 8$.
 Vế phải (2) $= 3x \leq 6, \forall x \in (0; 2]$. Do vậy phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{2\sqrt{17}}{9} = \frac{a\sqrt{17}}{b} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 9 \end{cases} \Rightarrow \log_2 9 \approx 3,17 \in (3; 4)$.

Chọn C.

Bài toán 4. Giải phương trình lôgarit bằng phương pháp đánh giá

VÍ DỤ 38. Số nghiệm của phương trình $\log_x(x+1) = \log \frac{9}{2}$ là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải:

Xét phương trình (*): $\log_x(x+1) = \log \frac{9}{2}$. Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

Xét $x > 1$. Vế trái (*): $\log_x(x+1) > \log_x x = 1 > \log \frac{9}{2}$. Suy ra (*) không có nghiệm thuộc $(1; +\infty)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Xét $0 < x < 1$. Về trái (*): $\log_x(x+1) < \log_x 1 = 0 < \log \frac{9}{4}$. Suy ra (*) không có nghiệm thuộc $(0;1)$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. **Chọn A.**

VÍ DỤ 39. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x+1) + \log_5(2x+1) = 2$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x > -\frac{1}{2}$. Xét hàm số $f(x) = \log_3(x+1) + \log_5(2x+1)$ với $x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 3} + \frac{2}{(2x+1)\ln 5} > 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Mặt khác: $f(2) = 2$ nên $x = 2$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 2$. **Chọn A.**

VÍ DỤ 40. Xét phương trình $\log_{46}(1+\sqrt{x}) = \log_{2025} x$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. Phương trình có nghiệm là một số chính phương.

B. Phương trình vô nghiệm.

C. Phương trình có đúng hai nghiệm.

D. Phương trình có nghiệm là số thực nhỏ hơn 2024.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt } t = \log_{46}(1+\sqrt{x}) = \log_{2025} x \Rightarrow \begin{cases} 1+\sqrt{x} = 46^t & (1) \\ x = 2025^t & (2) \end{cases}.$$

Thay (2) vào (1): $1+\sqrt{2025^t} = 46^t \Leftrightarrow 1+45^t = 46^t \Leftrightarrow \left(\frac{1}{46}\right)^t + \left(\frac{45}{46}\right)^t = 1$ (*).

Đặt $f(t) = \left(\frac{1}{46}\right)^t + \left(\frac{45}{46}\right)^t$; ta có $f(1) = 1$; $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (vì nó là tổng của hai hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$), vế phải của (*) là hằng số.

Vậy (*) chỉ có nghiệm duy nhất $t = 1$; suy ra $\log_{2025} x = 1 \Leftrightarrow x = 2025 = 45^2$. **Chọn A.**

VÍ DỤ 41. Hỏi phương trình $3x^2 - 6x + \ln(x+1)^3 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

_____ Đề tham khảo, Kỳ thi THPT QG năm 2017, lần 2 _____

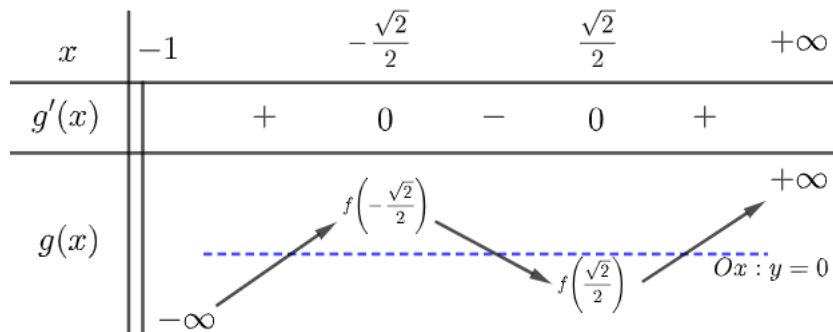
Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x > -1$. Phương trình đã cho tương đương với $3x^2 - 6x + 3\ln(x+1) + 1 = 0$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 - 6x + 3\ln(x+1) + 1$ liên tục trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Ta có: $g'(x) = 6x - 6 + \frac{3}{x+1} = \frac{6x^2 - 3}{x+1}$; $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ (thỏa điều kiện).



Vì $g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 3,059 > 0$, $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx -0,138 < 0$ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$

cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt. Vì vậy phương trình (*): $g(x) = 0$ có ba nghiệm. **Chọn C.**

VÍ DỤ 42. Cho biết phương trình $\log_3(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) = \frac{2}{3} \log_2 \sqrt{x}$ có nghiệm là x_0 , hỏi 2^{x_0} có tất cả bao nhiêu chữ số?

A. 1234.

B. 4097.

C. 4096.

D. 1233.

Nhận xét: Điều kiện bài toán là $x > 0$. Ta thấy trong lôgarit xuất hiện căn bậc hai và căn bậc ba (có bội số chung là 6), thêm nữa ta muốn đổi biến sao cho $\log_2 \sqrt{x}$ được tính một cách dễ dàng. Từ những lí do trên, ta nảy sinh ý tưởng đặt $x = 2^{6y}$.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $x = 2^{6y}$, phương trình trở thành: $\log_3(1 + \sqrt{2^{6y}} + \sqrt[3]{2^{6y}}) = \frac{2}{3} \log_2 \sqrt{2^{6y}}$

$$\Leftrightarrow \log_3(1 + 2^{3y} + 2^{2y}) = \frac{2}{3} \log_2 2^{3y} \Leftrightarrow \log_3(1 + 2^{3y} + 2^{2y}) = 2y \Leftrightarrow 1 + 2^{3y} + 2^{2y} = 3^{2y}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 8^y + 4^y = 9^y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^y + \left(\frac{8}{9}\right)^y + \left(\frac{4}{9}\right)^y = 1 \quad (*).$$

Đặt $f(y) = \left(\frac{1}{9}\right)^y + \left(\frac{8}{9}\right)^y + \left(\frac{4}{9}\right)^y$; ta có $f(2) = 1$ và $f(y)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (vì nó là tổng của các hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$). Do vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất $y = 2$.

Suy ra: $x = 2^{6 \cdot 2} = 2^{12} = 4096 = x_0$. Khi đó: $2^{x_0} = 2^{4096}$.

Số các chữ số của 2^{4096} là $[4096 \log 2] + 1 = 1234$ (chữ số).

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Ghi nhớ: Số các chữ số của số tự nhiên rất lớn M là $[\log M] + 1$; trong đó $[\log M]$ là phần nguyên của $\log M$.

Bài toán 5. Giải phương trình lôgarit bằng phương pháp hàm đặc trưng

VÍ DỤ 43. Phương trình $\ln \frac{x^2+3x+4}{-x+2} + x^2+4x+2=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó x_1+x_2 bằng

A. -4.

B. 2.

C. 4.

D. -2.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $\frac{x^2+3x+4}{-x+2} > 0 \Leftrightarrow -x+2 > 0$ (do $x^2+3x+4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow x < 2$.

Ta có: $\ln \frac{x^2+3x+4}{-x+2} + x^2+4x+2=0 \Leftrightarrow \ln(x^2+3x+4) + (x^2+3x+4) = \ln(-x+2) + (-x+2)$ (*).

Xét hàm số $f(t) = t + \ln t$ với $t \in (0; +\infty)$.

Ta có: $f'(t) = 1 + \frac{1}{t} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Vậy (*) $\Leftrightarrow f(x^2+3x+4) = f(-x+2) \Leftrightarrow x^2+3x+4 = -x+2 \Leftrightarrow x^2+4x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{2} \\ x = -2 - \sqrt{2} \end{cases}$

(thỏa mãn điều kiện).

Khi đó: $x_1+x_2 = -4$. **Chọn A.**

VÍ DỤ 44. Biết phương trình $\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$ có một nghiệm dạng $x = a + b\sqrt{2}$

trong đó a, b là các số nguyên. Tính $2a+b$.

A. 3.

B. 8.

C. 4.

D. 5.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

Ta có: $\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}} \right) \Leftrightarrow \log_5 (2\sqrt{x}+1) - \log_5 x = 2\log_3 (x-1) - 2\log_3 (2\sqrt{x})$

$\Leftrightarrow \log_5 (2\sqrt{x}+1) + 2\log_3 (2\sqrt{x}) = \log_5 x + 2\log_3 (x-1)$ (*).

Xét hàm số: $f(t) = \log_5 (t+1) + 2\log_3 t$ với $t > 0$.

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{(t+1)\ln 5} + \frac{2}{t\ln 3} > 0, \forall t > 0$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

$$\text{Vì vậy } (*) \Leftrightarrow f(2\sqrt{x}) = f(x-1) \Rightarrow 2\sqrt{x} = x-1 \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1-\sqrt{2} < 1 \\ \sqrt{x}=1+\sqrt{2} > 1 \end{cases}.$$

Vậy $\sqrt{x}=1+\sqrt{2} \Rightarrow x=3+2\sqrt{2} \Rightarrow a=3, b=2$. Ta có: $2a+b=8$. **Chọn B.**

VÍ DỤ 45. Tính tổng S tất cả các nghiệm của phương trình: $\ln\left(\frac{5^x+3^x}{6x+2}\right) + 5^{x+1} + 5 \cdot 3^x - 30x - 10 = 0$.

A. $S=1$.

B. $S=2$.

C. $S=-1$.

D. $S=3$.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện $x > -\frac{1}{3}$. Phương trình tương đương $\ln(5^x+3^x) - \ln(6x+2) + 5(5^x+3^x) - 5(6x+2) = 0$

$$\Leftrightarrow \ln(5^x+3^x) + 5(5^x+3^x) = \ln(6x+2) + 5(6x+2) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \ln t + 5t, t > 0; f'(t) = \frac{1}{t} + 5 > 0, \forall t > 0$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Vì vậy: $(1) \Leftrightarrow f(5^x+3^x) = f(6x+2) \Leftrightarrow 5^x+3^x = 6x+2 \Leftrightarrow 5^x+3^x-6x-2=0$.

Xét $g(x) = 5^x+3^x-6x-2, g'(x) = 5^x \ln 5 + 3^x \ln 3 - 6; g''(x) = 5^x \ln^2 5 + 3^x \ln^2 3 > 0, \forall x > -\frac{1}{3}$.

Vì vậy phương trình $g'(x) = 0$ có không quá một nghiệm, suy ra phương trình $g(x) = 0$ có không quá hai nghiệm.

Ta lại có: $g(0) = g(1) = 0$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=0; x=1$.

Tổng hai nghiệm này bằng 1. **Chọn A.**

Dạng 3. Phương trình mũ và lôgarit có chứa tham số

☞ Phương pháp giải toán:

1. Biện luận nghiệm phương trình dựa vào tam thức bậc hai:

a) Dạng tam thức bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

$$\Delta = b^2 - 4ac \left(\Delta' = b'^2 - ac, b' = \frac{b}{2} \right).$$

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.
- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (hoặc $x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$).

b) **Định lý Vi-ét:** Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ với $a \neq 0, \Delta \geq 0$. Ta có:

- Tổng hai nghiệm: $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.
- Tích hai nghiệm: $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

c) **Điều kiện có nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ với $f(x) = ax^2 + bx + c$.**

- Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ S > 0, P > 0 \end{cases}$.
- Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ S < 0, P > 0 \end{cases}$.
- Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0$.
- Phương trình có hai nghiệm phân biệt lớn hơn $\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0, \frac{S}{2} > \alpha \end{cases}$.
- Phương trình có hai nghiệm phân biệt bé hơn $\beta \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ af(\beta) > 0, \frac{S}{2} < \beta \end{cases}$.
- Phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow af(\alpha) < 0$.

☞ Chú ý: Những chỗ có điều kiện $\Delta > 0$, ta đều có thể thay bằng $\Delta' > 0$.

2. Biện luận nghiệm phương trình dựa vào khảo sát hàm số:

a) Mối quan hệ giữa nghiệm phương trình và tương giao đồ thị:

Xét phương trình $f(x) = g(x)$ (*), miền điều kiện D .

Khi đó: (*) có n nghiệm $\Leftrightarrow$ Đồ thị hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ cắt nhau tại n điểm.

b) Phương pháp biện luận nghiệm dựa vào khảo sát hàm số:

Xét phương trình $f(x, m) = 0$ (*).

Bước 1: Cô lập m từ phương trình (*): $\boxed{g(x) = m}$

(hoặc $g(x) = h(m)$, trong đó $h(m)$ là một hàm chỉ chứa tham số m).

Bước 2: Thực hiện một trong hai tình huống sau:

- Nếu đề bài chỉ đưa ra giả thiết: “**phương trình có nghiệm**”; ta chỉ cần tìm **miền giá trị** T của hàm số $g(x)$ trên tập khảo sát của nó, sau đó cho $m \in T$ (hoặc $h(m) \in T$).
- Nếu đề bài đưa ra giả thiết: “**Phương trình có n nghiệm (âm, dương, lớn hơn a , bé hơn b ...)**”; ta **lập bảng biến thiên** của hàm số $g(x)$ trên tập khảo sát của nó.

Vì đường thẳng $y = m$ (hay $y = h(m)$) luôn là đường thẳng nằm ngang (vuông góc trục tung), ta chọn m ứng với đường thẳng nằm ngang phù hợp đề bài.

3. Nghiệm đặc biệt của phương trình chứa biểu thức đối xứng:

a) Biểu thức đối xứng theo u, v :

Một biểu thức hai biến dạng $f(u, v)$ được gọi là **biểu thức đối xứng** nếu

$$f(u, v) = f(v, u).$$

b) Phương trình đối xứng loại 1:

Xét một phương trình dạng $f(u, v) = 0$. Phương trình này được gọi là **đối xứng loại 1** theo u, v nếu $f(u, v)$ là biểu thức đối xứng, tức là $f(u, v) = f(v, u)$.

c) Nghiệm đặc biệt của phương trình đối xứng loại 1:

Xét phương trình chứa biểu thức đối xứng dạng: $f(u, v) = 0$ (*). Khi đó:

- Nếu $(u_0; v_0)$ là một nghiệm của (*) thì $(v_0; u_0)$ cũng là một nghiệm của (*).
- Nếu phương trình (*) có $2n+1$ ($n \in \mathbb{N}$) nghiệm thì sẽ có một nghiệm dạng $(u_0; u_0)$, tức là $u_0 = v_0$.
- Nếu $v = -u$ thì (*) có dạng: $f(u, -u) = 0$.

Nếu phương trình này có nghiệm x_0 thì nó cũng có một nghiệm là $-x_0$. Vì vậy, **phương trình có nghiệm duy nhất** suy ra $x_0 = -x_0 \Rightarrow x_0 = 0$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Bài toán 1. Phương trình mũ, lôgarit quy về bậc hai có nghiệm đẹp

VÍ DỤ 46. Cho phương trình $\log_3^2(9x) - (m+5)\log_3 x + 3m - 10 = 0$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1; 81]$ là

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 2.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\log_3^2(9x) - (m+5)\log_3 x + 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow (2 + \log_3 x)^2 - (m+5)\log_3 x + 3m - 10 = 0$ (1).

Đặt $t = \log_3 x$; với $x \in [1; 81]$ thì $t \in [0; 4]$.

Khi đó (1) trở thành (2): $t^2 - (m+1)t + 3m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = m - 2 \end{cases}$.

Mỗi nghiệm t của (2) sẽ tương ứng với một nghiệm x của (1) trong điều kiện của chúng.

Theo đề: (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1; 81] \Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt thuộc $[0; 4]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \neq 3 \\ 0 \leq m - 2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 5 \\ 2 \leq m \leq 6 \end{cases}$. Vì m nguyên nên $m \in \{2; 3; 4; 6\}$. **Chọn C.**

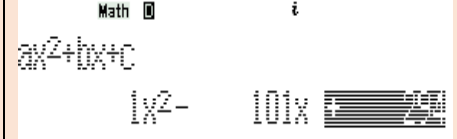
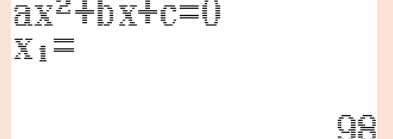
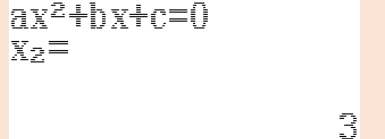
Bình luận: Một phương trình bậc hai chứa tham số được gọi là **có nghiệm đẹp** khi biệt số Δ của nó được biểu diễn ở dạng bình phương một đa thức theo tham số đó; vì vậy nghiệm của phương trình được biểu diễn dễ dàng theo tham số đó.

Xét phương trình (2): $t^2 - (m+1)t + 3m - 6 = 0$; $\Delta = (m+1)^2 - 4(3m-6) = m^2 - 10m + 25 = (m-5)^2$.

Nhờ vậy mà phương trình có hai nghiệm đẹp là: $t_1 = \frac{m+1+(m-5)}{2.1} = m-2$; $t_2 = \frac{m+1-(m-5)}{2.1} = 3$.

Điều này **giải đáp cho mục (???)** trong lời giải trên.

Tuy vậy, trong trắc nghiệm, học sinh còn có một giải pháp hiệu quả hơn, đó là nhờ sự hỗ trợ của máy tính bỏ túi, trong đó các em **thay $m = 100$** để thử xem liệu phương trình có cho nghiệm đẹp?

Dùng chức năng giải phương trình bậc hai với $a = 1$, $b = -(100+1)$, $c = 3.100 - 6$ (tức thay $m = 100$).	Kết quả thu được: $x_1 = 98 = 100 - 2 = m - 2$	Kết quả thu được: $x_2 = 3$
		

Nhờ vậy, ta viết nhanh nghiệm của phương trình (2) là $t = 3$; $t = m - 2$.

Tuy vậy, nếu máy tính không cho ra những kết quả lý tưởng như trên, ta buộc lựa chọn phương pháp giải khác mà cuốn sách này sẽ đề cập đến trong các bài toán sau.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

VÍ DỤ 47. Giả sử phương trình $\log_2^2 x - (m+2)\log_2 x + 2m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 6$. Giá trị biểu thức $|x_1 - x_2|$ là

A. 4.

B. 3.

C. 8.

D. 2.

Hướng dẫn giải:

Xét phương trình (1): $\log_2^2 x - (m+2)\log_2 x + 2m = 0$. Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$. Phương trình (1) tương đương với (2): $t^2 - (m+2)t + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = m \end{cases}$.

Mỗi nghiệm t của (2) sẽ tương ứng với một nghiệm x của (1) trong điều kiện của chúng.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 2$.

Ta có: $\log_2 x_1 = 2 \Leftrightarrow x_1 = 4$; $\log_2 x_2 = m \Leftrightarrow x_2 = 2^m$.

Theo giả thiết: $x_1 + x_2 = 6 \Leftrightarrow 2^m + 4 = 6 \Leftrightarrow m = 1$. Vì vậy $x_2 = 2 \Rightarrow |x_1 - x_2| = 2$. **Chọn D.**

VÍ DỤ 48. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4 \cdot 4^{x^2+2x} + (2m-2)6^{x^2+2x+1} - (6m+3)3^{2x^2+4x+2} = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $4 - 3\sqrt{2} < m < 4 + 3\sqrt{2}$ B. $m > 4 + 3\sqrt{2}$ hoặc $m < 4 - 3\sqrt{2}$.C. $m > -1$ hoặc $m < \frac{-1}{2}$.D. $-1 < m < \frac{-1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $4 \cdot 4^{x^2+2x} + (2m-2)6^{x^2+2x+1} - (6m+3)3^{2x^2+4x+2} = 0$

$$\Leftrightarrow 4^{(x+1)^2} + (2m-2)6^{(x+1)^2} - (6m+3)9^{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^{(x+1)^2} + (2m-2)\left(\frac{2}{3}\right)^{(x+1)^2} - (6m+3) = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{(x+1)^2}$; vì $(x+1)^2 \geq 0$ nên $0 < t \leq 1$.

Phương trình (1) trở thành (2): $t^2 + (2m-2)t - 6m-3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \notin (0;1) \\ t = -2m-1 \end{cases}$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow t = -2m-1 \in (0;1)$

$$\Leftrightarrow 0 < -2m-1 < 1 \Leftrightarrow 1 < -2m < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} > m > -1. \quad \text{Chọn D.}$$

Nhận xét: Khi $t = t_0 \in (0;1)$ thì $\left(\frac{2}{3}\right)^{(x+1)^2} = t_0 \Rightarrow (x+1)^2 = \log_{\frac{2}{3}} t_0 > 0$, từ đây ta giải được hai

nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Nếu $t = 1$ thì $\left(\frac{2}{3}\right)^{(x+1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (nghiệm kép). Vì vậy, muốn phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , ta cần $t \in (0;1)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Bài toán 2. Áp dụng định lí Vi-ét cho phương trình mũ, lôgarit quy về bậc hai

VÍ DỤ 49. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt

A. $m \in (-\infty; 1)$.

B. $m \in (0; 1]$.

C. $m \in (0; 1)$.

D. $m \in (0; +\infty)$.

Hướng dẫn giải:

Phương trình đã cho tương đương với $4^x - 2^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + m = 0 \quad (1)$.

Đặt $t = 2^x > 0$. Phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2t + m = 0 \quad (2)$.

Khi đó: (1) có hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ -\frac{2}{1} > 0 \\ \frac{m}{1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1. \text{ Chọn C.}$$

VÍ DỤ 50. Phương trình $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = -1$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-5; 0)$.

B. $(-7; -5)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(5; 7)$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + m = 0 \quad (1)$.

Đặt $t = 2^x$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 6t + m = 0 \quad (2)$.

Xét $t_1 t_2 = 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 2^{x_1 + x_2} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$. Theo định lí Vi-ét: $t_1 t_2 = m \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2}$. Suy ra $m = \frac{1}{2}$.

Thử lại: Thay $m = \frac{1}{2}$ vào (2): $t^2 - 6t + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{34}}{2} > 0$. Như vậy, (2) có hai nghiệm

dương phân biệt nên (1) có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 . Vậy $m = \frac{1}{2}$ thỏa mãn đề bài. **Chọn C.**

VÍ DỤ 51. Cho biết m là số thực để phương trình $\log_3^2 x - 3 \log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 72$. Mệnh đề nào đúng?

A. $m \in (4; 5)$.

B. $m \in (3; 4)$.

C. $m \in (2; 3)$.

D. $m \in (1; 2)$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = \log_3 x$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 3t + 2m - 7 = 0 \quad (*)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Ứng với mỗi nghiệm t của (*) thì phương trình ban đầu sẽ có một nghiệm $x > 0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$$\Leftrightarrow (-3)^2 - 4(2m-7) > 0 \Leftrightarrow 9 - 8m + 28 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{37}{8}.$$

Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm phương trình (*). Theo định lí Vi-ét: $t_1 + t_2 = 3$

$$\Rightarrow \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 3 \Rightarrow \log_3 (x_1 \cdot x_2) = 3 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 27.$$

$$\text{Theo giả thiết: } (x_1 + 3)(x_2 + 3) = 72 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9 = 72 \Rightarrow x_1 + x_2 = 12.$$

$$\text{Vậy ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 \cdot x_2 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow t_1 \cdot t_2 = 2.$$

$$\text{Theo định lý Viét: } t_1 \cdot t_2 = 2 \Leftrightarrow 2m - 7 = 2 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2} \text{ (thỏa điều kiện). Chọn A.}$$

VÍ DỤ 52. Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = 2a + 3b$

A. $S_{\min} = 33$.

B. $S_{\min} = 30$.

C. $S_{\min} = 17$.

D. $S_{\min} = 25$.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện để hai phương trình: $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ và $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt là: $b^2 - 20a > 0$.

$$\text{Áp dụng định lý Vi-ét cho mỗi phương trình: } \begin{cases} \ln x_1 + \ln x_2 = \ln(x_1 x_2) = -\frac{b}{a} \\ \log x_3 + \log x_4 = \log(x_3 x_4) = -\frac{b}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 x_2 = e^{-\frac{b}{a}} \\ x_3 x_4 = 10^{-\frac{b}{5}} \end{cases}.$$

$$\text{Theo giả thiết: } x_1 x_2 > x_3 x_4 \Rightarrow e^{-\frac{b}{a}} > 10^{-\frac{b}{5}} (*).$$

$$\text{Lấy lôgarit cơ số } e \text{ hai vế của } (*): -\frac{b}{a} > -\frac{b}{5} \ln 10 \Rightarrow \frac{b \in \mathbb{N}^*}{a} < \frac{1}{5} \ln 10 \Rightarrow a > \frac{5}{\ln 10} \approx 2,17 \Rightarrow a \geq 3 \quad (1)$$

$$\text{Theo điều kiện: } b^2 - 20a > 0 \Rightarrow b^2 > 20a \geq 60 \Rightarrow b \geq 8 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } S = 2a + 3b \geq 2 \cdot 3 + 3 \cdot 8 = 30 \Rightarrow S_{\min} = 30. \text{ Chọn B.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 3, b = 8$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Bài toán 3. Tìm điều kiện tham số thông qua miền giá trị hàm số

VÍ DỤ 53. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^{\sin x} + 2^{1+\sin x} - m = 0$ có nghiệm.

A. $\frac{5}{4} \leq m \leq 8$.

B. $\frac{5}{4} \leq m \leq 9$.

C. $\frac{5}{4} \leq m \leq 7$.

D. $\frac{5}{3} \leq m \leq 8$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = 2^{\sin x}$; với $-1 \leq \sin x \leq 1$ thì $\frac{1}{2} \leq t \leq 2$.

Phương trình trở thành: $t^2 + 2t - m = 0 \Leftrightarrow \boxed{t^2 + 2t = m}$ (*).

Xét hàm $f(t) = t^2 + 2t$ với $t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$, ta có: $f'(t) = 2t + 2 > 0, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Ta lại có: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}, f(2) = 8$. Hơn nữa, hàm $f(t)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Vậy miền giá trị của hàm số $f(t)$ trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ là $T = \left[\frac{5}{4}; 8\right]$.

Phương trình đã cho có nghiệm $x \Leftrightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm $t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right] \Leftrightarrow \frac{5}{4} \leq m \leq 8$. **Chọn A.**

VÍ DỤ 54. Cho phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2)5^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$ với m là tham số thực. Tập hợp tất cả giá trị m để phương trình trên có nghiệm là $[a; b]$. Tìm tích ab .

A. $ab = \frac{1500}{11}$.

B. $ab = \frac{3072}{25}$.

C. $ab = 100$.

D. $ab = \frac{3072}{23}$.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$. Đặt $t = 5^{1+\sqrt{1-x^2}}; t' = 5^{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \ln 5 \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0 \in (-1; 1)$.

Ta lại có: $t(-1) = t(1) = 5, t(0) = 25$. Do vậy $t \in [5; 25]$.

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - (m+2)t + 2m+1 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = m(t-2) \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 2t + 1}{t-2} \quad (\text{do } t \in [5; 25]) \Leftrightarrow \boxed{m = t + \frac{1}{t-2}} \quad (*).$$

Đặt $f(t) = t + \frac{1}{t-2}, t \in [5; 25]$; ta có: $f'(t) = 1 - \frac{1}{(t-2)^2} = 0 \Rightarrow (t-2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=1 \end{cases}$ (loại).

Mặt khác: $f(5) = \frac{16}{3}, f(25) = \frac{576}{23}$; đồng thời hàm $f(t)$ liên tục trên đoạn $[5; 25]$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Vì vậy miền giá trị của $f(t)$ trên $[5; 25]$ là $T = \left[\frac{16}{3}; \frac{576}{23} \right]$.

Phương trình đã cho có nghiệm $x \Leftrightarrow (*)$ có nghiệm $t \in [5; 25] \Leftrightarrow m \in \left[\frac{16}{3}; \frac{576}{23} \right]$.

Do vậy $a = \frac{16}{3}$, $b = \frac{576}{23} \Rightarrow ab = \frac{3072}{23}$. **Chọn D.**

VÍ DỤ 55. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3 x + \sqrt{\log_3 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1; 27]$.

A. $m \in (0; 2)$.

B. $m \in [0; 2]$.

C. $m \in [2; 4]$.

D. $m \in (0; 4)$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = \sqrt{\log_3 x + 1} \Rightarrow t^2 - 1 = \log_3 x$; với $x \in [1; 27]$ thì $t \in [1; 2]$.

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 1 + t - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t = 2m + 2$ (*).

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên $[1; 2]$; $f'(t) = 2t + 1 > 0$, $\forall t \in [1; 2]$.

Ta lại có: $f(1) = 2$, $f(2) = 6$; đồng thời hàm $f(t)$ liên tục trên đoạn $[1; 2]$.

Vì vậy miền giá trị của $f(t)$ là $T = [2; 6]$.

Phương trình đã cho có nghiệm $x \in [1; 27] \Leftrightarrow (*)$ có nghiệm $t \in [1; 2] \Leftrightarrow 2 \leq 2m + 2 \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$.

Chọn B.

VÍ DỤ 56. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_3(3^x + 2m) = \log_5(3^x - m^2)$ có nghiệm?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 5.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 3^x + 2m > 0 \\ 3^x - m^2 > 0 \end{cases}$. Đặt $\log_3(3^x + 2m) = \log_5(3^x - m^2) = t \Rightarrow \begin{cases} 3^x + 2m = 3^t & (1) \\ 3^x - m^2 = 5^t & (2) \end{cases}$.

Trừ theo vế (1) và (2), ta được: $2m + m^2 = 3^t - 5^t \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 = 3^t - 5^t + 1$ (*).

Xét hàm số $f(t) = 3^t - 5^t + 1$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = 3^t \ln 3 - 5^t \ln 5 = 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^t = \frac{\ln 5}{\ln 3} = \log_3 5 \Rightarrow t = \log_{\frac{3}{5}}(\log_3 5) = t_0$; $f(t_0) \approx 1,1396$.

Mặt khác: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 1$ và hàm $f(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy miền giá trị của hàm $f(t)$ với $t \in \mathbb{R}$ là $T = \left[-\infty; f(t_0) \right]$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Phương trình đã cho có nghiệm $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (*)$ có nghiệm $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 \leq f(t_0)$
 $\Leftrightarrow (m+1)^2 \leq f(t_0) \Leftrightarrow |m+1| \leq \sqrt{f(t_0)} \Leftrightarrow -\sqrt{f(t_0)} \leq m+1 \leq \sqrt{f(t_0)} \Leftrightarrow \underbrace{-1-\sqrt{f(t_0)}}_{\approx -2,0675} \leq m \leq \underbrace{-1+\sqrt{f(t_0)}}_{\approx 0,0675}.$

Vì m nguyên nên $m \in \{-2; -1; 0\}$. **Chọn A.**

Bài toán 4. Tìm điều kiện tham số thông qua bảng biến thiên hàm số

VÍ DỤ 57. Gọi $(a; b)$ là tập các giá trị của tham số m để phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \ln 5)$. Tổng $a + b$ là

A. 2.

B. 4.

C. -6.

D. -14.

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = e^x$; với $x \in (0; \ln 5)$ thì $t \in (1; 5)$. Phương trình trở thành $2t^2 - 8t = m$ (*).

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 - 8t$ với $t \in (1; 5)$; $f'(t) = 4t - 8 = 0 \Rightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên:

t	1	2	5
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	-6	-8	10

$y = m$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; \ln 5) \Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm $t \in (1; 5)$

$\Leftrightarrow -8 < m < -6$. Do vậy $m \in (-8; -6) = (a; b) \Rightarrow a = -8, b = -6$. Suy ra $a + b = -14$. **Chọn D.**

VÍ DỤ 58. Tìm số giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để phương trình $(\sqrt{10} + 1)^{x^2} + m(\sqrt{10} - 1)^{x^2} = 2 \cdot 3^{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 14.

B. 15.

C. 13.

D. 16.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $(\sqrt{10} + 1)^{x^2} + m(\sqrt{10} - 1)^{x^2} = 2 \cdot 3^{x^2+1} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{10} + 1}{3}\right)^{x^2} + m\left(\frac{\sqrt{10} - 1}{3}\right)^{x^2} = 6$ (1).

Đặt $t = \left(\frac{\sqrt{10} + 1}{3}\right)^{x^2} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{10} - 1}{3}\right)^{x^2} = \frac{1}{t}$; với $x^2 \geq 0$ thì $t \geq 1$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Khi đó (1) trở thành: $t + m \cdot \frac{1}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 + m = 6t \Leftrightarrow \boxed{-t^2 + 6t = m}$ (2).

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 6t$ trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, ta có: $f'(t) = -2t + 6 = 0 \Rightarrow t = 3$.

Bảng biến thiên:

t	1	3	$+\infty$	
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$	5	9	$-\infty$	

Nhận xét: (1) có đúng hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có đúng một nghiệm lớn hơn 1.

Dựa vào bảng biến thiên, ta được: $m < 5$ hoặc $m = 9$. Do $m \in (-10; 10)$ nên

$m \in \{-9; -8; \dots; 3; 4; 9\}$. Vậy có 15 giá trị m cần tìm. **Chọn B.**

VÍ DỤ 59. Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x + 7 = 2^{x+3} + m^2 + 6m$ có nghiệm $x \in (1; 3)$. Chọn đáp án đúng.

A. $S = -35$.

B. $S = 20$.

C. $S = 25$.

D. $S = -21$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $4^x + 7 = 2^{x+3} + m^2 + 6m \Leftrightarrow 4^x - 8 \cdot 2^x + 7 = m^2 + 6m$ (*).

Đặt $t = 2^x$; với $x \in (1; 3)$ thì $t \in (2; 8)$. Phương trình trở thành: $t^2 - 8t + 7 = m^2 + 6m$.

Đặt $f(t) = t^2 - 8t + 7$, $t \in (2; 8)$; ta có: $f'(t) = 2t - 8 = 0 \Rightarrow t = 4$ (nhận).

Bảng biến thiên:

t	2	4	8	
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$	-5	-9	7	

$y = m^2 + 6m$

Theo đó, phương trình (*) có nghiệm $x \in (1; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m \geq -9 \\ m^2 + 6m < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ -7 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -7 < m < 1$.

Vì m nguyên nên $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$. Suy ra tổng $S = -21$. **Chọn D.**

VÍ DỤ 60. Cho phương trình $m \ln(x+1) - x - 2 = 0$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(3, 7; 3, 8)$.

B. $(3, 6; 3, 7)$.

C. $(3, 8; 3, 9)$.

D. $(3, 5; 3, 6)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO

CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x > -1$. Nhận xét: $x = 0$ không là nghiệm phương trình đã cho, vì vậy ta có:

$$m \ln(x+1) - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{m = \frac{x+2}{\ln(x+1)}} \quad (*).$$

Đặt $f(x) = \frac{x+2}{\ln(x+1)}$ với $x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}$. Ta có: $f'(x) = \frac{\ln(x+1) - (x+2) \cdot \frac{1}{x+1}}{\ln^2(x+1)}$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1} = 0.$$

Đặt $g(x) = \ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Mặt khác: $g(2) \cdot g(3) = \left(\ln 3 - \frac{4}{3}\right) \left(\ln 4 - \frac{5}{4}\right) \approx -0,032 < 0$ nên $g(x) = 0$ có một nghiệm $x_0 \in (2; 3)$;

Vậy $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in (2; 3)$. Từ đây ta có bảng biến thiên:

x	-1	0	2	x_0	4	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	0	+	
$f(x)$		$+\infty$	$\frac{4}{\ln 3}$		$\frac{6}{\ln 5}$	$+\infty$

Theo đó, phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt thỏa $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2 \Leftrightarrow m > \frac{6}{\ln 5}$.

Vậy $m \in \left(\frac{6}{\ln 5}; +\infty\right)$ thỏa mãn đề bài, nên $a = \frac{6}{\ln 5} \approx 3,728 \in (3,7; 3,8)$. **Chọn A.**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Bài toán 5. Tìm điều kiện tham số dựa vào hàm đặc trưng

VÍ DỤ 61. Biết rằng điều kiện cần và đủ của tham số m để phương trình $\log_2(m + \sqrt{m + 2^x}) = 2x$ có nghiệm là $m \geq -\frac{a}{b}$ với a, b là hai số nguyên dương và $b < 7$. Hỏi $a + b + b^2$ bằng bao nhiêu?

A. 31. B. 32. C. 21. D. 23.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $m + 2^x \geq 0$ và $m + \sqrt{m + 2^x} > 0$.

Ta có: $\log_2(m + \sqrt{m + 2^x}) = 2x \Leftrightarrow m + \sqrt{m + 2^x} = 2^{2x} \Leftrightarrow (m + 2^x) + \sqrt{m + 2^x} = (2^x)^2 + 2^x$ (1).

Xét hàm $f(t) = t^2 + t$ ($t \geq 0$); $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \geq 0$, suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Vậy: (1) $\Leftrightarrow f(\sqrt{m + 2^x}) = f(2^x) \Leftrightarrow \sqrt{m + 2^x} = 2^x \Leftrightarrow (2^x)^2 = 2^x + m \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x = m \Leftrightarrow \left(2^x - \frac{1}{2}\right)^2 = m + \frac{1}{4}$ (2).

Xét hàm $g(x) = \left(2^x - \frac{1}{2}\right)^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$; ta có: $\left(2^x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vì vậy miền giá trị của $g(x)$ trên $\mathbb{R}$ là $[0; +\infty)$.

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $\Leftrightarrow m + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{4} = -\frac{a}{b}$.

Suy ra: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b + b^2 = 21$. **Chọn C.**

VÍ DỤ 62. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $e^{3m} + e^m = 2(x + \sqrt{1 - x^2})(1 + x\sqrt{1 - x^2})$ có nghiệm là

A. $\left(0; \frac{1}{2} \ln 2\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{1}{2} \ln 2\right]$. C. $\left(0; \frac{1}{e}\right)$. D. $\left[\frac{1}{2} \ln 2; +\infty\right)$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $e^{3m} + e^m = 2(x + \sqrt{1 - x^2})(1 + x\sqrt{1 - x^2}) \Leftrightarrow e^{3m} + e^m = (x + \sqrt{1 - x^2})(2 + 2x\sqrt{1 - x^2})$ (*).

Đặt $t = x + \sqrt{1 - x^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$) $\Rightarrow t^2 = 1 + 2x\sqrt{1 - x^2} \Rightarrow t^2 - 1 = 2x\sqrt{1 - x^2}$.

Ta có: $t' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\sqrt{1 - x^2} - x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{1 - x^2} - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - x^2 = x^2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta tính được: $t(-1) = -1, t(1) = 1, t\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$. Vì vậy ta có: $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Khi đó (*) trở thành: $e^{3m} + e^m = t(t^2 + 1) \Leftrightarrow \boxed{e^{3m} + e^m = t^3 + t} \quad (**).$

Xét hàm $f(u) = u^3 + u \Rightarrow f'(u) = 3u^2 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$; suy ra hàm $f(u)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó: $(**) \Leftrightarrow f(e^m) = f(t) \Leftrightarrow e^m = t$.

Phương trình này có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq e^m \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow e^m \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \boxed{m \leq \frac{1}{2} \ln 2}$. **Chọn B.**

VÍ DỤ 63. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\ln[m + \ln(m + \sin x)] = \sin x$ có nghiệm.

- A. $\frac{1}{e} + 1 \leq m \leq e - 1$. B. $1 \leq m \leq e - 1$. C. $1 \leq m \leq \frac{1}{e} + 1$. D. $1 \leq m < e - 1$.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $\begin{cases} m + \sin x > 0 \\ m + \ln(m + \sin x) > 0 \end{cases}$. Ta có: $\ln[m + \ln(m + \sin x)] = \sin x$

$$\Leftrightarrow \ln[m + \ln(m + \sin x)] + [m + \ln(m + \sin x)] = \ln(m + \sin x) + (m + \sin x) \quad (1).$$

Xét hàm $f(t) = \ln t + t \quad (t > 0)$; $f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0, \forall t > 0$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Vì vậy: $(1) \Leftrightarrow f(m + \ln(m + \sin x)) = f(m + \sin x) \Leftrightarrow m + \ln(m + \sin x) = m + \sin x$

$$\Leftrightarrow \ln(m + \sin x) = \sin x \Leftrightarrow m + \sin x = e^{\sin x} \Leftrightarrow m = e^{\sin x} - \sin x \quad (2).$$

Đặt $u = \sin x \in [-1; 1]$, (2) trở thành: $\boxed{m = e^u - u} \quad (3).$

Xét hàm $g(u) = e^u - u$ với $u \in [-1; 1]$; $g'(u) = e^u - 1 = 0 \Rightarrow u = 0 \in [-1; 1]$.

Vì hàm $g(u)$ liên tục trên $[-1; 1]$ và $g(-1) = \frac{1}{e} + 1, g(1) = e - 1, g(0) = 1$.

Do vậy tập giá trị của hàm $g(u)$ trên $[-1; 1]$ là $T = [1; e - 1]$.

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (3)$ có nghiệm $u \in [-1; 1] \Leftrightarrow \boxed{1 \leq m \leq e - 1}$. **Chọn B.**

VÍ DỤ 64. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình

$$\log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2 \quad \text{có hai nghiệm phân biệt?}$$

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x^2 + mx + 1 \geq 0 \\ \frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + mx + 1 > 0 \\ x > -2 \end{cases}.$$

Phương trình đã cho tương đương với $\log_2 \sqrt{2x^2 + mx + 1} + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2 + \log_2(x + 2) \quad (1).$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$, $t \in (0; +\infty)$; $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0$, $\forall t \in (0; +\infty)$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\begin{aligned} \text{Vì vậy: } (1) &\Leftrightarrow f(\sqrt{2x^2 + mx + 1}) = f(x + 2) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2 \xrightarrow{x > -2} 2x^2 + mx + 1 = x^2 + 4x + 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (m - 4)x - 3 = 0 \quad (2). \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{S}{2} > -2 \\ af(-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-4)^2 - 4(-3) > 0 \\ \frac{4-m}{2} > -2 \\ 1 \cdot (4 - 2m + 8 - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-4)^2 + 12 > 0, \forall m \in \mathbb{R} \\ 4 - m > -4 \\ -2m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 \\ m < \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{9}{2}.$$

Do $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\}$. Vậy có bốn giá trị của m thỏa mãn. **Chọn C.**

VÍ DỤ 65. Cho phương trình $4^{-|x-m|} \cdot \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{2x-x^2} \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2|x-m| + 2) = 0$ với m là tham số.

Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt là

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.**

Hướng dẫn giải:

Phương trình đã cho tương đương với $2^{1-2|x-m|} \cdot \log_2[(x-1)^2 + 2] - 2^{1-(x-1)^2} \cdot \log_2(2|x-m| + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{1-2|x-m|}}{\log_2(2|x-m| + 2)} = \frac{2^{1-(x-1)^2}}{\log_2[(x-1)^2 + 2]} \quad (*).$$

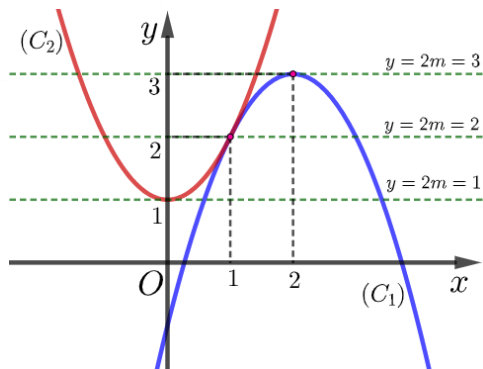
$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{2^{1-t}}{\log_2(t+2)} \quad (t \geq 0); f'(t) = \frac{-\overbrace{2^{1-t} \cdot \ln 2 \cdot \log_2(t+2)}^+ - \overbrace{\frac{2^{1-t}}{(t+2) \ln 2}}^+}{\underbrace{[\log_2(t+2)]^2}_+} < 0, \forall t \geq 0.$$

Suy ra hàm $f(t)$ nghịch biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Vì vậy: } (*) \Leftrightarrow f(2|x-m|) = f((x-1)^2) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 2x - 2m \\ x^2 - 2x + 1 = -2x + 2m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x - 1 = 2m \\ x^2 + 1 = 2m \end{cases} \quad (**).$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT



Nhận xét: Số nghiệm của (**) chính là số giao điểm giữa đường thẳng nằm ngang $y = 2m$ với hợp hai đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x - 1$ (C_1), $y = x^2 + 1$ (C_2). **Xem hình.**

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (**) \Leftrightarrow$ có ba

$$\text{nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 1 \\ 2m = 2 \\ 2m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = 1 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Tổng các giá trị của m là: $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3$. **Chọn D.**

VÍ DỤ 66. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho hai phương trình $2x^2 + 1 = 3^m$ và $m = 3^x - 2x^2 + x - 1$ có nghiệm chung. Tính tổng các phần tử của S .

A. 6.

B. 3.

C. 1.

D. $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Vì hai phương trình đã cho có nghiệm chung nên hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x^2 + 1 = 3^m \\ m = 3^x - 2x^2 + x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \log_3(2x^2 + 1) \\ m = 3^x - 2x^2 + x - 1 \end{cases} \Rightarrow \log_3(2x^2 + 1) = 3^x - 2x^2 + x - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x^2 + 1) + 2x^2 + 1 = 3^x + x \Leftrightarrow 3^{\log_3(2x^2 + 1)} + \log_3(2x^2 + 1) = 3^x + x \quad (*).$$

Xét hàm $f(t) = 3^t + t$, $t \in \mathbb{R}$; $f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0$; suy ra hàm $f(t) = 3^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do vậy: } (*) \Leftrightarrow f(\log_3(2x^2 + 1)) = f(x) \Leftrightarrow \log_3(2x^2 + 1) = x \Leftrightarrow 2x^2 + 1 = 3^x.$$

Xét hàm số $g(x) = 2x^2 + 1 - 3^x$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } g'(x) = 4x - 3^x \ln 3, g''(x) = 4 - 3^x \ln^2 3, g'''(x) = -3^x \ln^3 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra hàm số $g''(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $g''(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Suy ra $g'(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm; và vì thế phương trình $g(x) = 0$ có tối đa là ba nghiệm.

$$\text{Ta lại có: } g(0) = g(1) = g(2) = 0. \text{ Vì vậy: } 2x^2 + 1 = 3^x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases}.$$

Tổng các giá trị m thu được bằng 3. **Chọn B.**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Bài toán 6. Nghiệm đặc biệt của phương trình mũ, lôgarit chứa hàm đối xứng

VÍ DỤ 67. Cho biết có một giá trị của m để phương trình $4^{|x|} - 2^{|x|+1} - m = 0$ có nghiệm duy nhất, khi đó:

- A. $-2 < m < -\frac{3}{2}$. B. $m > 1$. C. $m < -2$. D. $-\frac{3}{2} < m < 0$.

Hướng dẫn giải:

Xét hàm số $f(x) = 4^{|x|} - 2^{|x|+1} - m$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(-x) = 4^{|-x|} - 2^{|-x|+1} - m = 4^{|x|} - 2^{|x|+1} - m = f(x)$.

Vì vậy $f(x)$ là hàm số chẵn. Nếu x_0 là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ thì $-x_0$ cũng là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Điều kiện cần: Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất suy ra $x_0 = -x_0 \Rightarrow x_0 = 0$.

Thay vào phương trình ban đầu, ta có: $4^0 - 2^{0+1} - m = 0 \Rightarrow m = -1$.

Điều kiện đủ: Thử lại với $m = -1$, thay vào phương trình đã cho:

$$4^{|x|} - 2 \cdot 2^{|x|} + 1 = 0 \Leftrightarrow (2^{|x|} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2^{|x|} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy $m = -1$ thỏa mãn đề bài. **Chọn D.**

VÍ DỤ 68. Cho phương trình $2^x = \sqrt{m \cdot 2^x \cdot \cos(\pi x) - 4}$, với m là tham số. Gọi m_0 là giá trị của m sao cho phương trình trên có đúng một nghiệm thực. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $m_0 \in [-5; -1)$. B. $m_0 < -5$. C. $m_0 \in [-1; 0)$. D. $m_0 > 0$.

Hướng dẫn giải:

Phương trình đã cho tương đương với $4^x = m \cdot 2^x \cdot \cos(\pi x) - 4 \Leftrightarrow 2^x + 2^{2-x} - m \cdot \cos(\pi x) = 0$ (*).

Xét hàm $f(x) = 2^x + 2^{2-x} - m \cdot \cos(\pi x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f(2-x) = 2^{2-x} + 2^{2-(2-x)} - m \cos \pi(2-x)$
 $= 2^{2-x} + 2^x - m \cos(2\pi - \pi x) = 2^{2-x} + 2^x - m \cos(\pi x) = f(x)$.

Vậy $f(2-x) = f(x)$ nên hàm f đối xứng theo x và $2-x$. Nếu x_0 là một nghiệm của (*) thì $2-x_0$ cũng là một nghiệm của (*).

Điều kiện cần: Phương trình (*) có nghiệm duy nhất nên $x_0 = 2-x_0 \Rightarrow x_0 = 1$.

Thay vào phương trình ta có: $2^1 + 2^{2-1} - m \cdot \cos(\pi) = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

Điều kiện đủ: Thử lại với $m = -4$, ta có: $4^x + 4 \cdot 2^x \cos(\pi x) + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 4^x + 4 \cdot 2^x \cos(\pi x) + 4 \cos^2(\pi x) + 4 - 4 \cos^2(\pi x) = 0 \Leftrightarrow [2^x + 2 \cos(\pi x)]^2 + 4 \sin^2(\pi x) = 0$$

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = -2 \cos(\pi x) \\ \sin(\pi x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = -2 \cos(\pi x) \\ \cos(\pi x) = 1 \\ \cos(\pi x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2 \\ \cos(\pi x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $m = -4$ thỏa mãn. **Chọn A.**

Bài toán 7. Tìm điều kiện tham số của phương trình mũ, lôgarit có chứa hàm ẩn

VÍ DỤ 69. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	
y'		-	0	+	0	-
y	$+\infty$		$\frac{15}{13}$	1	$\frac{15}{13}$	$-\infty$

Tìm giá trị lớn nhất của m để phương trình: $e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2}} = m$ có nghiệm trên đoạn $[0; 2]$.

- A. e^5 . B. $e^{\frac{15}{13}}$. C. e^3 . D. e^4 .

Hướng dẫn giải:

Ta có: $e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2}} = m \Leftrightarrow 2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2} = \ln m$.

Đặt $g(x) = 2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2}$; $g'(x) = [6f^2(x) - 13f(x) + 7] \cdot f'(x)$.

Ta có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 1 \vee f(x) = \frac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = 3 \\ x = 1 \vee x = a > 3 \\ x = b < 0 \end{cases}$

Bảng biến thiên của $g(x)$ trên đoạn $[0; 2]$:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$			4		

Giá trị lớn nhất của m để phương trình có nghiệm trên $[0; 2]$ thỏa mãn: $\ln m = 4 \Leftrightarrow m = e^4$.

Chọn D.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

VÍ DỤ 70. Cho cấp số cộng (a_n) , cấp số nhân (b_n) , thỏa mãn $a_2 > a_1 \geq 0$, $b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $b_n > a_n - (n - 2022)$.

A. 17.

B. 12.

C. 15.

D. 13.

Định hướng: Ta cần tìm công thức tổng quát của các dãy số (a_n) và (b_n) dựa vào những dữ kiện đã cho trước khi tìm n thông qua $b_n > a_n - (n - 2022)$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $a_2 > a_1 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} d = a_2 - a_1 > 0 \\ a_2 = a_1 + d \end{cases}$ với d là công sai cấp số cộng.

Khi đó: $f(a_2) + 2 = f(a_1) \Leftrightarrow f(a_1 + d) + 2 = f(a_1) \Leftrightarrow (a_1 + d)^3 - 3(a_1 + d) + 2 = a_1^3 - 3a_1$

$$\Leftrightarrow \underbrace{3a_1}_{\geq 0} \underbrace{d}_{+} \underbrace{\left(a_1 + d\right)}_{+} + \underbrace{(d-1)^2}_{\geq 0} \underbrace{(d+2)}_{+} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ (d-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ d = 1 \end{cases}.$$

Do vậy: $a_n = a_1 + (n-1)d = n-1$.

Ta lại có: $b_2 > b_1 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{b_2}{b_1} > 1 \\ b_2 = b_1 q \end{cases}$. Suy ra: $\log_2(b_2) = \log_2(b_1 q) = \log_2 b_1 + \log_2 q$.

Đặt $t_2 = \log_2 b_2 > 0$, $t_1 = \log_2 b_1 \geq 0$, $m = \log_2 q > 0 \Rightarrow t_2 = t_1 + m$.

Khi đó: $f(t_2) + 2 = f(t_1) \Leftrightarrow t_2^3 - 3t_2 + 2 = t_1^3 - 3t_1 \Leftrightarrow (t_1 + m)^3 - 3(t_1 + m) + 2 = t_1^3 - 3t_1$

$$\Leftrightarrow \underbrace{3m}_{+} \underbrace{t_1}_{\geq 0} \underbrace{(t_1 + m)}_{+} + \underbrace{(m-1)^2}_{\geq 0} \underbrace{(m+2)}_{+} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 b_1 = 0 \\ \log_2 q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}.$$

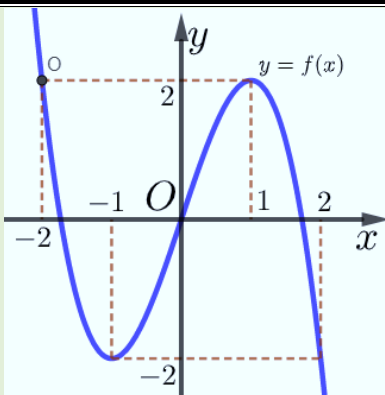
Do vậy: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2^{n-1}$.

Ta có: $b_n > a_n - (n - 2022) \Leftrightarrow 2^{n-1} > n - 1 - n + 2022 \Leftrightarrow 2^{n-1} > 2021 \Leftrightarrow n - 1 > \log_2 2021 \approx 10,98$.

Suy ra $n > 11,98$. Vì n nguyên dương và nhỏ nhất nên $n = 12$. **Chọn B.**

VÍ DỤ 71. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0; 9]$ sao cho bất phương trình $2^{f^2(x)+f(x)-m} - 16 \cdot 2^{f^2(x)-f(x)-m} - 4^{f(x)} + 16 = 0$ có nghiệm $x \in (-1; 1)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT



A. 6.

B. 8.

C. 5.

D. 7.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $2^{f^2(x)+f(x)-m} - 16 \cdot 2^{f^2(x)-f(x)-m} - 4^{f(x)} + 16 = 0$

$$\Leftrightarrow [16 - 16 \cdot 2^{f^2(x)-f(x)-m}] - [2^{2f(x)} - 2^{f^2(x)+f(x)-m}] = 0$$

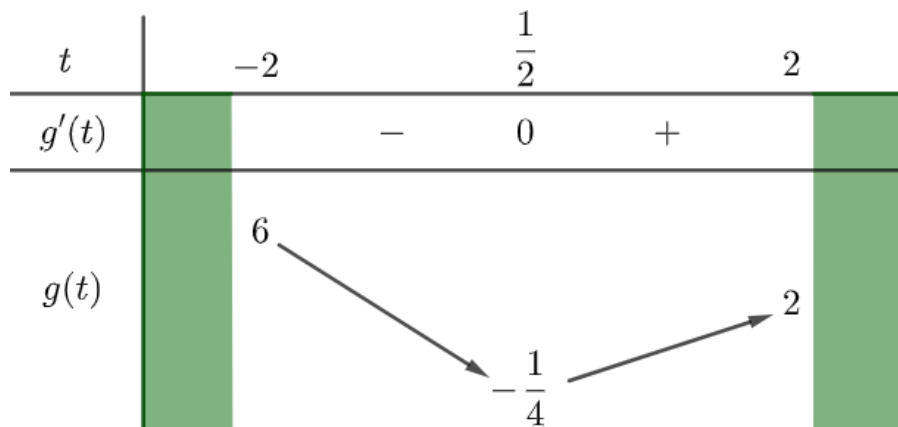
$$\Leftrightarrow 16[1 - 2^{f^2(x)-f(x)-m}] - 2^{2f(x)}[1 - 2^{f^2(x)-f(x)-m}] = 0 \Leftrightarrow [1 - 2^{f^2(x)-f(x)-m}][16 - 2^{2f(x)}] = 0 \quad (1).$$

Với $x \in (-1; 1)$ thì $f(x) \in (-2; 2) \Rightarrow 2f(x) \in (-4; 4) \Rightarrow 2^{2f(x)} \in \left(\frac{1}{16}; 16\right) \Rightarrow 16 - 2^{2f(x)} > 0$.

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow 1 - 2^{f^2(x)-f(x)-m} = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - f(x) - m = 0 \Leftrightarrow m = f^2(x) - f(x) \quad (2).$

Đặt $t = f(x)$, $t \in (-2; 2)$. Khi đó: (2) trở thành $\Leftrightarrow m = t^2 - t \quad (3).$

Xét hàm $g(t) = t^2 - t$, $t \in (-2; 2)$; $g'(t) = 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.



Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x \in (-1; 1) \Leftrightarrow (3)$ có nghiệm $t \in (-2; 2) \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq m < 6$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$, $m \in [0; 9] \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. **Chọn A.**

Dạng 4. Nghiệm nguyên của phương trình mũ và logarit nhiều ẩn

☞ Phương pháp giải toán:

1. Phương trình nhiều ẩn:

- Một phương trình nhiều ẩn là một mệnh đề chứa biến có dạng: $f(x, y, z, t, \dots) = 0$ (*) trong đó $f(x, y, z, t, \dots)$ là một biểu thức chứa nhiều biến số là $x, y, z, t, \dots$. Mỗi bộ số $(x; y; z; t; \dots)$ làm cho mệnh đề (*) đúng thì chúng được gọi là một nghiệm của (*).
- Phương trình hai ẩn có dạng: $f(x, y) = 0$ (**). Mỗi bộ số $(x; y)$ làm cho (**) thỏa mãn được gọi là một nghiệm của (**).

2. Tìm điều kiện của ẩn cho bài toán nghiệm nguyên:

Một cách tổng quát, ta xét bài toán phương trình hai biến dạng $f(x, y) = 0$.

☞ Cách giải 1:

— Cô lập một ẩn của phương trình, đưa về dạng: $x = g(y)$ hoặc $y = g(x)$.

Trong bước giải này, ta có thể sử dụng phương trình tích hoặc các phương pháp đánh giá hai vế bằng bất đẳng thức, hàm số; cũng có thể dùng hàm đặc trưng để làm.

— Dựa vào điều kiện cho ẩn x hoặc y để giới hạn số nghiệm của phương trình.

☞ Cách giải 2:

— Tìm một mối liên hệ thu gọn của các biến.

— Sử dụng điều kiện $\Delta \geq 0$ để phương trình bậc hai có nghiệm (hoặc dùng điều kiện tương giao giữa các đường cơ bản, hay các bất đẳng thức cơ bản đã học) để giới hạn phạm vi một ẩn.

— Suy ra phạm vi của ẩn còn lại dựa vào giả thiết của bài toán.

☞ Cách giải 3:

— Tìm một mối liên hệ thu gọn của các biến.

— Dựa vào tính chất điểm có tọa độ nguyên thuộc các đường cong đã học (sử dụng thêm các tính chất đặc thù của số nguyên đối với phép nhân, chia, tổng, tổng bình phương v.v...) để suy ra phạm vi nghiệm phương trình.

Bài toán 1. Nghiệm nguyên của phương trình mũ và lôgarit dạng tích

VÍ DỤ 73. Có bao nhiêu số nguyên dương a nhỏ hơn 2021 sao cho tồn tại số nguyên x thỏa mãn

$$2^a(2^{x+3} - 1) + a^2 = a(2^a + 2^{x+3} - 1)?$$

A. 12.

B. 15.

C. 10.

D. 14.

Hướng dẫn giải:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Ta có: $2^a(2^{x+3}-1)+a^2=a(2^a+2^{x+3}-1) \Leftrightarrow 2^a(2^{x+3}-1)-2^a.a+a^2-a(2^{x+3}-1)=0$

$$\Leftrightarrow 2^a(2^{x+3}-1-a)-a(2^{x+3}-1-a)=0 \Leftrightarrow (2^a-a)(2^{x+3}-1-a)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^a-a=0 \\ 2^{x+3}-1-a=0 \end{cases}.$$

Trường hợp 1: $2^a-a=0$. Xét hàm số $f(a)=2^a-a$ với $a>0$.

Ta có: $f'(a)=2^a \ln 2-1$; $f'(a)=0 \Leftrightarrow a=\log_2\left(\frac{1}{\ln 2}\right)=a_0$.

Bảng biến thiên

a	0	a_0	$+\infty$
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	1	$f(a_0)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra $f(a) \geq f(a_0) \approx 0,914 > 0$. Suy ra phương trình $2^a-a=0$ vô nghiệm.

Trường hợp 2: $2^{x+3}-1-a=0 \Leftrightarrow a=2^{x+3}-1$.

Vì a dương và nhỏ hơn 2021 nên $\begin{cases} 2^{x+3}-1 > 0 \\ 2^{x+3}-1 < 2021 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3 > 0 \\ x+3 < \log_2 2022 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x < \log_2 2022-3 \approx 7,98 \end{cases}$.

Mặt khác $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} = A$.

Với mỗi giá trị x thuộc tập A , ta tìm được một giá trị nguyên a tương ứng. **Chọn C.**

VÍ DỤ 74. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $3^{x+y}-x^2(3^x-1)=(x+1)3^y-x^3$, với $x < 2024$?

A. 13.

B. 15.

C. 6.

D. 7.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $3^{x+y}-x^2(3^x-1)=(x+1)3^y-x^3 \Leftrightarrow 3^y(3^x-x-1)=x^2(3^x-1-x)$

$$\Leftrightarrow (3^y-x^2)(3^x-x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x-x-1=0 & (1) \\ 3^y-x^2=0 & (2) \end{cases}.$$

Giải phương trình (1): Đặt $f(x)=3^x-x-1$, $x \in (0; 2024)$; $f'(x)=3^x \ln 3-1 > 0$, $\forall x \in (0; 2024)$.

Suy ra $f(x) > f(0)=0$, $\forall x \in (0; 2024)$. Vì vậy phương trình (1) vô nghiệm.

Giải phương trình (2): Ta có: $3^y-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=3^y \xrightarrow{x>0} x=3^{\frac{1}{2}y}$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Do $x < 2024$ nên $3^{\frac{1}{2}y} < 2024 \Rightarrow \frac{1}{2}y < \log_3 2024 \Rightarrow y < 2\log_3 2024 \approx 13,86$; mà y nguyên dương nên $y \in \{1; 2; \dots; 13\}$. Vậy có 13 cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn đề bài. **Chọn A.**

Bài toán 2. Nghiệm nguyên của phương trình mũ và lôgarit chứa hàm đặc trưng

VÍ DỤ 75. Cho $0 \leq x \leq 2021$ và $\log_3(x+1) + x - 3y + 1 = 27^y$. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn điều kiện trên?

- A. 2021. B. 2020. C. 4. D. 3.

Hướng dẫn giải:

Với điều kiện $0 \leq x \leq 2021$, phương trình đã cho tương đương:

$$\log_3(x+1) + x + 1 = 27^y + 3y \Leftrightarrow 3^{\log_3(x+1)} + \log_3(x+1) = 3^{3y} + 3y \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$ với $t \in \mathbb{R}$; $f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy: $(*) \Leftrightarrow f(\log_3(x+1)) = f(3y) \Leftrightarrow \log_3(x+1) = 3y \Leftrightarrow x+1 = 27^y \Leftrightarrow x = 27^y - 1$.

Theo giả thiết: $0 \leq x \leq 2021 \Rightarrow 0 \leq 27^y - 1 \leq 2021 \Rightarrow 1 \leq 27^y \leq 2022 \Rightarrow 0 \leq y \leq \log_{27} 2022 \approx 2,31$.

Ta có $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{0; 1; 2\}$; suy ra $x \in \{0; 26; 728\}$.

Do đó có 3 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình đã cho là: $(0; 0), (26; 1), (728; 2)$.

Chọn D.

VÍ DỤ 76. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ sao cho y nguyên thuộc đoạn $[-2023; 2023]$ và x là số thực thỏa mãn $\log_2(y - 5 + \sqrt{y + 2^x - 5}) = 2x$?

- A. 2019. B. 2021. C. 4041. D. 2021.

_____Thi thử Chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM, 2021_____

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $\begin{cases} y + 2^x - 5 \geq 0 \\ y - 5 + \sqrt{y + 2^x - 5} > 0 \end{cases}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$y - 5 + \sqrt{y + 2^x - 5} = 2^{2x} \Leftrightarrow y + 2^x - 5 + \sqrt{y + 2^x - 5} = 2^{2x} + 2^x \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ với $t \geq 0$; $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \geq 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Vì vậy: $(1) \Leftrightarrow f(\sqrt{y - 5 + 2^x}) = f(2^x) \Leftrightarrow \sqrt{y - 5 + 2^x} = 2^x \Leftrightarrow y - 5 + 2^x = 2^{2x} \Leftrightarrow y = 2^{2x} - 2^x + 5 \quad (2).$

Xét hàm $g(x) = 2^{2x} - 2^x + 5$ với $x \in \mathbb{R}$;

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

$$g'(x) = 4^x \ln 4 - 2^x \ln 2 = 0 \Rightarrow 2^x = \frac{\ln 2}{\ln 4} = \log_4 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = -1.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	5	$\frac{19}{4}$	$+\infty$

Ta thấy: Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow y \geq \frac{19}{4}$.

Do $y \in \mathbb{Z}$ và $y \in [-2023; 2023]$ nên $y \in \{5; 6; \dots; 2023\}$. Vậy có 2019 cặp $(x; y)$ thỏa mãn. **Chọn A.**

VÍ DỤ 77. Cho phương trình $(4xy + 7y)(2x - 1)(e^{2xy} - e^{4x+y+7}) = [2x(2 - y) + y + 7]e^y$. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình đã cho?

A. 8.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } (4xy + 7y)(2x - 1)(e^{2xy} - e^{4x+y+7}) = [2x(2 - y) + y + 7]e^y$$

$$\Leftrightarrow (4x + 7)(2xy - y)(e^{2xy-y} - e^{4x+7}) = 2x(2 - y) + y + 7 \quad (\text{chia hai vế phương trình cho } e^y > 0).$$

$$\Leftrightarrow (4x + 7)(2xy - y) \cdot (e^{2xy-y} - e^{4x+7}) = (4x + 7) - (2xy - y)$$

$$\Leftrightarrow (4x + 7) \cdot [(2xy - y)e^{2xy-y} - 1] = (2xy - y)[(4x + 7)e^{4x+7} - 1]$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2xy - y)e^{2xy-y} - 1}{2xy - y} = \frac{(4x + 7)e^{4x+7} - 1}{4x + 7} \quad (\text{do } x, y \text{ nguyên nên } x \neq -\frac{7}{4}, x \neq \frac{1}{2}, y \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow e^{2xy-y} - \frac{1}{2xy-y} = e^{4x+7} - \frac{1}{4x+7} \quad (*).$$

Xét hàm $f(t) = e^t - \frac{1}{t}$ với $t \neq 0$; $f'(t) = e^t + \frac{1}{t^2} > 0, \forall t \neq 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên các khoảng xác định của nó.

$$\text{Vì vậy: } (*) \Leftrightarrow f(2xy - y) = f(4x + 7) \Leftrightarrow 2xy - y = 4x + 7 \Leftrightarrow y = \frac{4x + 7}{2x - 1} = 2 + \frac{9}{2x - 1}.$$

$$\text{Vì } y \text{ nguyên nên } 2x - 1 \text{ là ước số nguyên của } 9, \text{ do vậy } \begin{cases} 2x - 1 = \pm 1 \\ 2x - 1 = \pm 3 \\ 2x - 1 = \pm 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = 0 \\ x = 2 \vee x = -1. \\ x = 5 \vee x = -4 \end{cases}$$

Vậy có 6 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đề bài. **Chọn C.**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Bài toán 3. Phương pháp đánh giá và bài toán nghiệm nguyên phương trình mũ, lôgarit

VÍ DỤ 78. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{9x}$.

A. 27.

B. 9.

C. 11.

D. 12.

_____Mã đề 101, Đề thi THPT Quốc Gia năm 2021_____

Ý tưởng:

- Tìm điều kiện cho y với $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$. Biến đổi phương trình về $27^{3x^2+xy-9x} - 1 - xy = 0$.
- Xét hàm hai biến $f(x, y) = 27^{3x^2+xy-9x} - 1 - xy$, đây là hàm liên tục với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.
- Ta chứng minh $f(3, y) > 0$ trên miền điều kiện của nó. Phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{3}, y\right) \cdot f(3, y) < 0 \stackrel{f(3, y) > 0}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{1}{3}, y\right) < 0$ (ứng với đặc thù của hàm số đang xét).
 Từ đây ta tìm điều kiện cho y .

Hướng dẫn giải:

Từ phương trình suy ra: $1 + xy > 0 \stackrel{x > 0}{\Rightarrow} y > -\frac{1}{x}$ mà $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ nên $y > -3$; vì y nguyên nên $y \geq -2$.

Phương trình tương đương với $27^{3x^2+xy-9x} - 1 - xy = 0$ (*).

Xét hàm hai biến $f(x, y) = 27^{3x^2+xy-9x} - 1 - xy$, ta thấy hàm này liên tục với mọi $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$, $y \geq -2$.

Ta có: $f(3, y) = 27^{3y} - 3y - 1 = g(y)$ với $g(-2) = 27^{-6} + 5 > 0$, $g(-1) = 27^{-3} + 2 > 0$ (1);

$g(0) = 0$ nên ta thay $y = 0$ vào phương trình đã cho: $27^{3x^2} = 27^{9x} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin \left(\frac{1}{3}; 3\right) \\ x = 3 \notin \left(\frac{1}{3}; 3\right) \end{cases}$, do vậy $y = 0$

không thỏa mãn phương trình ban đầu (2).

Ta có: $g'(y) = 3 \cdot 27^{3y} \ln 27 - 3 = 3(27^{3y} \ln 27 - 1) > 0$, $\forall y \geq 1$; suy ra $g(y) > g(1) = 27^3 - 4 > 0$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $g(y) > 0$, $\forall y \geq -2$, $y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Ta có: $f\left(\frac{1}{3}, y\right) = 3^{y-8} - \frac{1}{3}y - 1 = h(y)$ với $y \geq -2$; trong đó $h'(y) = 3^y \ln 3 - \frac{1}{3} = 0$

$\Rightarrow y = \log_3\left(\frac{1}{3\ln 3}\right) = y_0$. Mặt khác $h(-3) \cdot h(-2) < 0$ và $h(9) \cdot h(10) < 0$ nên tồn tại

$y_1 \in (-3; -2)$, $y_2 \in (9; 10)$ để $h(y) = 0$. Ta có bảng biến thiên:

y	-3	y_1	-2	y_0	9	y_2	10	$+\infty$
$h'(y)$	$-$			0			$+$	
$h(y)$								

Phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right) \Leftrightarrow g(y) \cdot h(y) < 0 \Leftrightarrow h(y) < 0$ (do $g(y) > 0$).
 $f\left(\frac{1}{3}, y\right)$ $f(3, y)$

Dựa vào bảng biến thiên, kết hợp $y \in \mathbb{Z}$, $y \geq 2$, ta có: $y \in \{-2; -1; 1; 2; \dots; 9\}$ thỏa mãn. **Chọn C.**

VÍ DỤ 79. Có bao nhiêu số nguyên y nằm trong khoảng $(-2027; +\infty)$ sao cho với mỗi giá trị của y tồn tại nhiều hơn hai số thực x thỏa mãn $x^2 + y + (x^2 - x) \cdot 2027^{x+y} = (2x^2 - x + y) \cdot 2027^{x-x^2}$?

- A.** 2026. **B.** 2027. **C.** 2028. **D.** 2029.

Hướng dẫn giải:

Nhân hai vế phương trình đã cho với 2027^{x^2-x} , ta được phương trình sau:

$$(x^2 + y) \cdot 2027^{x^2-x} + (x^2 - x) \cdot 2027^{x^2+y} = (x^2 - x) + (x^2 + y)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y) \cdot (2027^{x^2-x} - 1) + (x^2 - x) \cdot (2027^{x^2+y} - 1) = 0 \quad (1).$$

Xét $(x^2 + y)(x^2 - x) \neq 0$. Khi đó: $(1) \Leftrightarrow \frac{2027^{x^2-x} - 1}{x^2 - x} + \frac{2027^{x^2+y} - 1}{x^2 + y} = 0 \quad (2)$

- Nếu $x^2 - x > 0$ thì $2027^{x^2-x} - 1 > 0$ nên $\frac{2027^{x^2-x} - 1}{x^2 - x} > 0$.
- Nếu $x^2 - x < 0$ thì $2027^{x^2-x} - 1 < 0$ nên $\frac{2027^{x^2-x} - 1}{x^2 - x} > 0$. Vậy $\frac{2027^{x^2-x} - 1}{x^2 - x} > 0$ khi $x^2 - x \neq 0$.
- Lý luận tương tự, ta có $\frac{2027^{x^2+y} - 1}{x^2 + y} > 0$ khi $x^2 + y \neq 0$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Vì vậy về trái (2) luôn dương nên (2) vô nghiệm. Do đó: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^2 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x^2 = -y \end{cases}$.

Nhận xét: Với mọi số thực y thì phương trình đã cho luôn có sẵn hai nghiệm 0; 1. Vì vậy ta cần phương trình $x^2 = -y$ có không dưới một nghiệm khác 0; 1. Suy ra $-y > 0 \Leftrightarrow y < 0$.

Do y nguyên thuộc $(-2027; +\infty)$ nên $y \in \{-2026; -2025; \dots; -1\}$. **Chọn A.**

VÍ DỤ 80. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+2y^2)$

A. 3.

B. 2.

C. Vô số.

D. 1.

_____ **Thi thử THPT Quốc Oai, Hà Nội, 2021** _____

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x+y > 0 \\ x^2+2y^2 > 0 \end{cases}$. Đặt: $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+2y^2) = t \Rightarrow \begin{cases} x+y = 3^t \\ x^2+2y^2 = 4^t \end{cases}$.

Ta có: $\left(x+y\right)^2 = \left(1 \cdot x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}y\right)^2 \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(\underbrace{x^2 + 2y^2}_{4^t}\right) \Leftrightarrow (3^t)^2 \leq \frac{3}{2} \cdot 4^t \Rightarrow t \leq \log_{\frac{9}{4}} \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

Mặt khác $x^2 \leq 4^t \leq 4^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1\}$.

Với $x = -1$, ta có: $\begin{cases} y = 1 + 3^t \\ 2y^2 = 4^t - 1 \end{cases} \Rightarrow 4^t - 1 = 2(1 + 3^t)^2 \Rightarrow 2 \cdot 9^t + 4 \cdot 3^t + 3 - 4^t = 0 \quad (1)$.

• Nếu $t \geq 0$ thì $2 \cdot 9^t - 4^t > 0$; $4 \cdot 3^t + 3 > 0 \Rightarrow$ Vế trái (1) luôn dương.

• Nếu $t < 0$ thì $3 - 4^t > 0$; $2 \cdot 9^t + 4 \cdot 3^t > 0 \Rightarrow$ Vế trái (1) luôn dương.

Do vậy (1) không có nghiệm t nên không tồn tại y thỏa mãn đề bài.

Với $x = 0$, ta có: $\begin{cases} y = 3^t \\ 2y^2 = 4^t \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 9^t = 4^t \Rightarrow t = \log_{\frac{9}{4}} \frac{1}{2}$. Khi đó $y = 3^{\log_{\frac{9}{4}} \frac{1}{2}} \approx 0,391$ (tồn tại số thực y).

Với $x = 1$, ta có: $\begin{cases} y = 3^t - 1 \\ 2y^2 = 4^t - 1 \end{cases} \Rightarrow 4^t - 1 = 2 \cdot (3^t - 1)^2 \Rightarrow 2 \cdot 9^t - 4 \cdot 3^t + 3 - 4^t = 0$. Ta thấy phương trình

này có ít nhất một nghiệm $t = 0$, suy ra $y = 0$ (tức là đã tồn tại y thỏa mãn phương trình ban đầu).

Vậy có 2 giá trị nguyên của x thỏa đề là $x = 0$ và $x = 1$. **Chọn B.**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Bài toán 4. Xét nghiệm nguyên phương trình mũ, lôgarit dựa vào đặc thù của tổng, tích, tổng bình phương... các số nguyên

VÍ DỤ 81. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $\sqrt{\log x} + \sqrt{\log y} + \log \sqrt{x} + \log \sqrt{y} = 100$ và $\sqrt{\log x}, \sqrt{\log y}, \log \sqrt{x}, \log \sqrt{y}$ cũng là các số nguyên dương?

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

_____Thi thử Sở GD-ĐT Hà Nội năm 2020_____

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\sqrt{\log x} + \sqrt{\log y} + \log \sqrt{x} + \log \sqrt{y} = 100 \Leftrightarrow \sqrt{\log x} + \sqrt{\log y} + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log y = 100$ (1).

Đặt $a = \sqrt{\log x}, b = \sqrt{\log y} \Rightarrow a^2 = \log x, b^2 = \log y$.

Khi đó (1) trở thành: $a + b + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = 100 \Leftrightarrow (a+1)^2 + (b+1)^2 = 202 \Leftrightarrow (a+1)^2 + (b+1)^2 = 9^2 + 11^2$.

Vì $a, b \in \mathbb{N}^*$ nên $\begin{cases} a+1=9 \\ b+1=11 \end{cases} \vee \begin{cases} a+1=11 \\ b+1=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=10 \end{cases} \vee \begin{cases} a=10 \\ b=8 \end{cases}$.

• Với $\begin{cases} a=8 \\ b=10 \end{cases}$ thì $\begin{cases} \sqrt{\log x}=8 \\ \sqrt{\log y}=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x=64 \\ \log y=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10^{64} \\ y=10^{100} \end{cases}$.

• Với $\begin{cases} a=10 \\ b=8 \end{cases}$ thì $\begin{cases} \sqrt{\log x}=10 \\ \sqrt{\log y}=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x=100 \\ \log y=64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10^{100} \\ y=10^{64} \end{cases}$.

Vậy có hai cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đề bài. **Chọn B.**

VÍ DỤ 82. Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho tồn tại số nguyên dương y thỏa mãn điều kiện

$$\log_3 [(2x-2y+1)(x+2y)] + 3 \cdot 9^{x-y} = 27^{\frac{1}{x+2y}} + 1?$$

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* \\ 2x-2y+1 > 0 \end{cases}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\log_3 (2x-2y+1) + \log_3 (x+2y) + 3^{2x-2y+1} = 3^{\frac{3}{x+2y}} + \log_3 3$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x-2y+1) + 3^{2x-2y+1} = \log_3 \frac{3}{x+2y} + 3^{\frac{3}{x+2y}} \quad (1).$$

Đặt $f(t) = \log_3 t + 3^t, t > 0; f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 3^t \ln 3 > 0, \forall t > 0$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Vì vậy: $(1) \Leftrightarrow f(2x-2y+1) = f\left(\frac{3}{x+2y}\right) \Leftrightarrow 2x-2y+1 = \frac{3}{x+2y} \Leftrightarrow (2x-2y+1)(x+2y) = 3 \quad (*)$.

Do điều kiện nên $\begin{cases} 2x-2y+1 \in \mathbb{N}^* \\ x+2y \in \mathbb{N}^* \end{cases}$, $(*)$ suy ra: $\begin{cases} 2x-2y+1=1 \\ x+2y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x-2y+1=3 \\ x+2y=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ (nhận) hoặc $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ (loại).

Vậy có duy nhất một cặp số $(x; y) = (1; 1)$ thỏa mãn đề bài. **Chọn D.**

Bài toán 5. Bài toán nghiệm nguyên phương trình mũ, lôgarit nhiều ẩn chứa tham số

VÍ DỤ 83. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m \in [-1; 1]$ sao cho phương trình $\log_{m^2+1}(x^2 + y^2) = \log_2(2x + 2y - 2)$ có nghiệm nguyên $(x; y)$ duy nhất?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Hướng dẫn giải:

Nhận xét: Vì x, y có vai trò như nhau (đối xứng) nên nếu phương trình đã cho có một nghiệm $(x_0; y_0)$ thì $(y_0; x_0)$ cũng là một nghiệm của phương trình đó. Theo giả thiết, phương trình có nghiệm nguyên duy nhất nên $x_0 = y_0 \in \mathbb{Z}$.

Điều kiện: $x + y - 1 > 0$.

Điều kiện cần: Phương trình đã cho có nghiệm nguyên duy nhất $(x_0; y_0) \Rightarrow x_0 = y_0$.

Thay vào phương trình, ta được: $\log_{m^2+1}(2x_0^2) = \log_2(4x_0 - 2) \quad (*)$

Vì $x_0 \in \mathbb{Z}$, $4x_0 - 2 > 0 \Rightarrow \boxed{4x_0 - 2 > 1}$. Hơn nữa: $2(x_0^2 - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{2x_0^2 \geq 4x_0 - 2}$

Do đó $(*)$: $\underbrace{\log_2(4x_0 - 2)}_{+} = \log_{m^2+1}(2x_0^2) \geq \underbrace{\log_{m^2+1}(4x_0 - 2)}_{+} \Rightarrow \underbrace{\log_{4x_0-2}(m^2+1)}_{4x_0-2>1} \geq \log_{4x_0-2} 2$

$\Rightarrow m^2 + 1 \geq 2 \Rightarrow m^2 \geq 1$ mà $m \in [-1; 1] \Rightarrow m = \pm 1$.

Điều kiện đủ: Với $m = \pm 1$ thì phương trình đã cho trở thành $\log_2(x^2 + y^2) = \log_2(2x + 2y - 2)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x + 2y - 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$; ta thấy phương trình đã cho có nghiệm

nguyên duy nhất $(1; 1)$ nên $m = \pm 1$ thỏa mãn.

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn đề bài. **Chọn B.**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

VÍ DỤ 84. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\log_3(2x^2 + y^2) = \log_7(x^3 + 2y^3) = \log z$. Có bao giá trị nguyên của z để có đúng hai cặp $(x; y)$ thỏa mãn đẳng thức trên.

A. 2.

B. 211.

C. 99.

D. 4.

Nhận xét:

$$\text{Sau khi đặt } \log_3(2x^2 + y^2) = \log_7(x^3 + 2y^3) = \log z = t \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 3^t & (1) \\ x^3 + 2y^3 = 7^t & (2) \\ z = 10^t & (3) \end{cases}$$

Phương trình (1) có vế trái là đẳng cấp bậc hai theo x, y ; phương trình (2) có vế trái là đẳng cấp bậc ba theo x, y . Bội số chung nhỏ nhất của 2 và 3 là 6, vì vậy ta lập phương hai vế của (1), bình phương hai vế của (2), và sau đó tiến hành như lời giải sau.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt: } \log_3(2x^2 + y^2) = \log_7(x^3 + 2y^3) = \log z = t \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 3^t & (1) \\ x^3 + 2y^3 = 7^t & (2) \\ z = 10^t & (3) \end{cases}$$

Trường hợp 1: $y = 0$.

Khi đó: (2) $\Rightarrow x = 7^{\frac{t}{3}}$. Thay vào (1) ta được: $2 \cdot 7^{\frac{2t}{3}} = 3^t \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{\sqrt[3]{49}}} 2$; (3) $\Rightarrow z = 10^{\log_{\frac{3}{\sqrt[3]{49}}} 2}$.

Trường hợp này không tồn tại hai cặp $(x; y)$ thỏa mãn đề bài.

Trường hợp 2: $y \neq 0$.

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } \begin{cases} (2x^2 + y^2)^3 = 27^t \\ (x^3 + 2y^3)^2 = 49^t \end{cases} \Rightarrow \frac{(x^3 + 2y^3)^2}{(2x^2 + y^2)^3} = \left(\frac{49}{27}\right)^t \xRightarrow{\text{Chia } y^6} \frac{\left[\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 2\right]^2}{\left[2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1\right]^3} = \left(\frac{49}{27}\right)^t \quad (*).$$

$$\text{Đặt } u = \frac{x}{y}. \text{ Xét hàm } f(u) = \frac{(u^3 + 2)^2}{(2u^2 + 1)^3}; f'(u) = \frac{6u(u^3 + 2)(u - 4)}{(2u^2 + 1)^4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = -\sqrt[3]{2} \\ u = 4 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

u	$-\infty$	$-\sqrt[3]{2}$	0	4	$+\infty$	
$f'(u)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(u)$		$\frac{1}{8}$	0	4	$\frac{4}{33}$	$\frac{1}{8}$

Với mỗi giá trị u thỏa mãn (*), ta tìm được một cặp (x, y) thỏa mãn đề bài.

Yêu cầu bài toán tương đương:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{8} \leq \left(\frac{49}{27}\right)^t < 4 \\ 0 < \left(\frac{49}{27}\right)^t < \frac{4}{33} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{\frac{49}{27}}\left(\frac{1}{8}\right) \leq t \leq \log_{\frac{49}{27}} 4 \\ t < \log_{\frac{49}{27}} \frac{4}{33} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10^{\log_{\frac{49}{27}}\left(\frac{1}{8}\right)} \leq 10^t < 10^{\log_{\frac{49}{27}} 4} \\ 0 < 10^t < 10^{\log_{\frac{49}{27}}\left(\frac{4}{33}\right)} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \underbrace{10^{\log_{\frac{49}{27}}\left(\frac{1}{8}\right)}}_{\approx 3,24 \cdot 10^{-4}} \leq z < \underbrace{10^{\log_{\frac{49}{27}} 4}}_{\approx 211,87} \\ 0 < z < \underbrace{10^{\log_{\frac{49}{27}}\left(\frac{4}{33}\right)}}_{\approx 2,88 \cdot 10^{-4}} \end{array} \right].$$

Vì z nguyên nên $z \in \{1; 2; \dots; 211\}$. Vậy có 211 giá trị nguyên của z thỏa mãn. **Chọn B.**

C – BÀI TẬP THỰC HÀNH:

★ BÀI TẬP MỨC ĐỘ I:

- Câu 1.** Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = \frac{1}{27}$ là
A. $x = -1$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = -2$. **D.** $x = -3$.
- Câu 2.** Phương trình $\log_5(2x-3) = 1$ có nghiệm là
A. $x = 2$. **B.** $x = 4$. **C.** $x = 5$. **D.** $x = 3$.
- Câu 3.** Nghiệm của phương trình $\log(3x-5) = 2$
A. $x = 36$. **B.** $x = 35$. **C.** $x = 40$. **D.** $x = 30$.
- Câu 4.** Nghiệm của phương trình $\log_3(x-1) = 2$ là
A. $x = 10$. **B.** $x = 9$. **C.** $x = 8$. **D.** $x = 11$.
- Câu 5.** Nghiệm của phương trình $2^{x-1} = 8$ là
A. $x = 2$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 4$. **D.** $x = 5$.
- Câu 6.** Nghiệm của phương trình $5^{x+1} = 125$ là

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

- A. $x=2$. B. $x=3$. C. $x=0$. D. $x=1$.

Câu 7. Nghiệm của phương trình $\log_2(3x-2)=3$ là

- A. $x=\frac{10}{3}$. B. $x=8$. C. $x=1$. D. $x=\frac{1}{3}$.

Câu 8. Phương trình $\log_2(x+1)=3$ có nghiệm là

- A. $x=5$. B. $x=7$. C. $x=8$. D. $x=10$.

Câu 9. Số nghiệm của phương trình $\log_2 x = \log_2(x^2 - x)$ là.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 10. Nghiệm của phương trình $2^{x+1}=8$ là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 11. Phương trình $\log_3(5x-1)=2$ có nghiệm là

- A. 2. B. $\frac{9}{5}$. C. $\frac{11}{5}$. D. $\frac{8}{5}$.

Câu 12. Nghiệm của phương trình $3^{x+2}=9$ là

- A. $x=4$. B. $x=0$. C. $x=-4$. D. $x=3$.

Câu 13. Nghiệm của phương trình $3^{2x-4}=9$.

- A. $x=3$. B. $x=2$. C. $x=1$. D. $x=-1$.

Câu 14. Nghiệm của phương trình $\log_4(8-3x)=\frac{1}{2}$ là

- A. $x=3$. B. $x=2$. C. $\frac{36}{2^{x-2}}=10+4^{\frac{x}{2}}$. D. 3.

Câu 15. Nghiệm của phương trình $T=-1$ là

- A. $T=6$. B. $T=\frac{5}{6}$. C. $x=-\frac{1}{2}$. D. $x=\frac{3}{2}$.

Câu 16. Nghiệm của phương trình $\log_3(x-3)=3$ là

- A. $x=12$. B. $x=24$. C. $x=30$. D. $x=6$.

Câu 17. Số nghiệm của phương trình $7^{x-3}=\left(\frac{1}{7}\right)^{x+1}$ là bao nhiêu

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 18. Tìm nghiệm của phương trình $4a+5b$

- A. $x=6$. B. $x=21$. C. $x=13$. D. $x=9$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Câu 19. Cho phương trình $3^{x^2-4x+5} = 9$, tổng lập phương các nghiệm thực của phương trình là:
A. 25. **B.** 28. **C.** 26. **D.** 27.

Câu 20. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_4 x = 3$.
A. $S = \{12\}$. **B.** $S = \emptyset$. **C.** $S = \{64\}$. **D.** $S = \{81\}$.

Câu 21. Tập nghiệm của phương trình $\log(x^2 + x + 4) = 1$ là
A. $\{-3; 2\}$. **B.** $\{-3\}$. **C.** $\{2\}$. **D.** $\{-2; 3\}$.

Câu 22. Tập nghiệm của phương trình $\ln(2x^2 - x + 1) = 0$ là
A. $\{0\}$. **B.** $\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$. **C.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $\emptyset$.

Câu 23. Phương trình $(\sqrt{5})^{2x-1} = \log_2 32$ có nghiệm là
A. $x = 1$. **B.** $x = \frac{2}{3}$. **C.** $x = \frac{3}{2}$. **D.** $x = \frac{1}{2}$.

Câu 24. Tìm tập nghiệm S của phương trình $3^x = 2$.
A. $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$. **B.** $S = \{\log_3 2\}$. **C.** $S = \emptyset$. **D.** $S = \{\log_2 3\}$.

Câu 25. Nghiệm của phương trình $(5 - 2\sqrt{6})^{3x} = 5 + 2\sqrt{6}$ là
A. 1. **B.** -1. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM					1C	2B	3B	4A	5C
6A	7A	8B	9B	10C	11A	12B	13A	14B	15C
16C	17A	18B	19B	20C	21A	22B	23C	24B	25C

★ BÀI TẬP MỨC ĐỘ II:

Câu 26. Phương trình $2^x = 3^{x^2}$ có bao nhiêu nghiệm thực?
A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 27. Phương trình $\frac{36}{2^{x-2}} = 10 + 4^{\frac{x}{2}}$ có số nghiệm là
A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 28. Cho số thực x thỏa mãn: $25^x - 5^{1+x} - 6 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = 5 - 5^x$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

A. $T = 5$.

B. $T = -1$.

C. $T = 6$.

D. $T = \frac{5}{6}$.

Câu 29. Số nghiệm thực của phương trình $\log_4 x^2 = \log_2 (x^2 - 2)$ là

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Câu 30. Phương trình $x(\ln^2 x - 1) = 0$ có số nghiệm là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Câu 31. Số nghiệm thực của phương trình $3^{\sqrt{x}} = 3^{2-x}$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Câu 32. Phương trình $(2^x - 5)(\log_2 x - 3) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$). Tính giá trị của biểu thức $K = x_1 + 3x_2$.

A. $K = 32 + \log_3 2$.

B. $K = 18 + \log_2 5$.

C. $K = 24 + \log_2 5$.

D. $K = 32 + \log_2 3$.

Câu 33. Biết $\log_x \sqrt[10]{3} = -0,1$. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $x \in (-1; 0)$.

B. $x \in (1; 4)$.

C. $x \in (0; 1)$.

D. $x \in (-4; -1)$.

Câu 34. Tìm nghiệm phương trình $2\log_4 x + \log_2 (x - 3) = 2$.

A. $x = 4$.

B. $x = 1$.

C. $x = 3$.

D. $x = 16$.

Câu 35. Tập nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}\log_2 (x + 2)^2 - 1 = 0$ là

A. $\{-1; 0\}$.

B. $\{-4\}$.

C. $\{0; -4\}$.

D. $\{0\}$.

Câu 36. Nghiệm của phương trình $9^{\sqrt{x-1}} = e^{\ln 81}$ là

A. $x = 4$.

B. $x = 5$.

C. $x = 6$.

D. $x = 17$.

Câu 37. Với a, b, x là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x = 5 \cdot \log_2 a + 3 \cdot \log_2 b$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $x = 3a + 5b$.

B. $x = 5a + 3b$.

C. $x = a^5 + b^3$.

D. $x = a^5 \cdot b^3$.

Câu 38. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $\log_2 (x^2 - x) = \log_2 (x + 1)$. Tính $P = x_1^2 + x_2^2$.

A. $P = 6$.

B. $P = 8$.

C. $P = 2$.

D. $P = 4$.

Câu 39. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 (4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 7.

D. 3.

Câu 40. Gọi P là tích tất cả các nghiệm của phương trình: $\log_2 (x^3 + x + 1) = \log_2 (2x^2 + 1)$. Tính P .

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

A. $P=1$. B. $P=3$. C. $P=6$. D. $P=0$.

Câu 41. Nếu $\log_2 x = 5\log_2 a + 4\log_2 b$ ($a, b > 0$) thì x bằng

A. $a^5 b^4$. B. $a^4 b^5$. C. $5a + 4b$. D. $4a + 5b$.

Câu 42. Nghiệm của phương trình $4^{x+3} = 2^{2020}$ là

A. $x=2013$. B. $x=2023$. C. $x=1007$. D. $x=2017$.

Câu 43. Gọi S là tập hợp các giá trị của x để 3 số $\log_8(4x)$; $1 + \log_4 x$; $\log_2 x$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Số phần tử của S là

A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 44. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2(a+b) = 3 + \log_2(ab)$. Giá trị $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ bằng

A. 3. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{8}$. D. 8.

Câu 45. Phương trình $3^{x^2-4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $x_1 x_2$.

A. 6. B. -2. C. -5. D. -6.

Câu 46. Biết phương trình $4^x - 5 \cdot 2^x + 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $x_1 + x_2$.

A. 3. B. $\log_2 3$. C. 5. D. $\log_2 5$.

Câu 47. Số nghiệm của phương trình $9^x + 3^{x+2} - 1 = 0$ là

A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 48. Gọi P là tổng bình phương tất cả các nghiệm của phương trình $2^{x-1} + 2^{2-x} = 3$. Khi đó, P bằng

A. $P=3$. B. $P=5$. C. $P=9$. D. $P=1$.

Câu 49. Phương trình $\log_{\sqrt{3}}|x+1| = 2$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 2 nghiệm. B. Vô nghiệm. C. 3 nghiệm. D. 1 nghiệm.

Câu 50. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$ là $S = a + b\sqrt{2}$ (với $a; b$ là các số nguyên). Giá trị của biểu thức $Q = ab$ bằng:

A. 0. B. 3. C. 9. D. 6.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM					26A	27B	28B	29B	30C
31C	32C	33C	34A	35C	36B	37D	38A	39A	40D
41A	42C	43A	44D	45D	46B	47C	48B	49A	50D

★ BÀI TẬP MỨC ĐỘ III:

- Câu 51.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2 x + 2\log_7 x = 2 + \log_2 x \cdot \log_7 x$ bằng
 A. 13. B. 11. C. 15. D. 10.
- Câu 52.** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{5+\sqrt{21}}\right)^x + \left(\sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^x = 5 \cdot 2^{\frac{x}{2}}$ bằng:
 A. -2. B. -4. C. 4. D. 2.
- Câu 53.** Tính S là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $4 \cdot (2^{2x} + 2^{-2x}) - 4 \cdot (2^x + 2^{-x}) - 7 = 0$.
 A. $S = 1$. B. $S = -1$. C. $S = 3$. D. $S = 0$.
- Câu 54.** Phương trình $3 \cdot 25^{x-2} + (3x-10)5^{x-2} + 3 - x = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?
 A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 55.** Cho phương trình $(x^2 + x + 1)^{\frac{|x+5|}{x+2}} = (x^2 + x + 1)^3$. Tìm tổng tất cả các nghiệm của phương trình.
 A. $-\frac{17}{4}$. B. $-\frac{13}{4}$. C. $-\frac{15}{4}$. D. $-\frac{11}{4}$.
- Câu 56.** Cho phương trình $m \cdot 16^x - 2(m-2) \cdot 4^x + m - 3 = 0$. Tập hợp tất cả các giá trị dương của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tổng $T = a + 2b$ bằng:
 A. 14. B. 10. C. 11. D. 7.
- Câu 57.** Biết phương trình $(3 + \sqrt{5})^x + 15(3 - \sqrt{5})^x = 2^{x+3}$ có hai nghiệm x_1, x_2 và $\frac{x_1}{x_2} = \log_a b > 1$, trong đó a, b là các số nguyên tố, giá trị của biểu thức $2a + b$ là:
 A. 11. B. 17. C. 13. D. 19.
- Câu 58.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x-2} = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{81}} (x+3)^4$ bằng
 A. $\sqrt{10}$. B. $3\sqrt{10}$. C. 0. D. 3.
- Câu 59.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3 x + \sqrt{\log_3 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1; 27]$.
 A. $m \in (0; 2)$. B. $m \in [0; 2]$. C. $m \in [2; 4]$. D. $m \in (0; 4)$.
- Câu 60.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m \log_9 x^2 + 2 - m = 0$ có nghiệm $x \in [1; 9]$.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

A. 1. B. 5. C. 3. D. 2.

Câu 61. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\log_2(mx) = \log_{\sqrt{2}}(x+1)$ vô nghiệm?

A. 4. B. 6. C. 3. D. 5.

Câu 62. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^{\sin x} + 2^{1+\sin x} - m = 0$ có nghiệm.

A. $\frac{5}{3} \leq m \leq 8$. B. $\frac{5}{4} \leq m \leq 8$. C. $\frac{5}{4} \leq m \leq 7$. D. $\frac{5}{4} \leq m \leq 9$.

Câu 63. Cho phương trình $\log_2^2 x - (5m+1)\log_2 x + 4m^2 + m = 0$. Biết phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 165$. Giá trị của $|x_1 - x_2|$ bằng

A. 16. B. 119. C. 120. D. 159.

Câu 64. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\log_3(x+3) + m \log_{\sqrt{x+3}} 9 = 16$ có hai nghiệm thỏa mãn $-2 < x_1 < x_2$.

A. 17. B. 16. C. 14. D. 15.

Câu 65. Cho phương trình $\log_3^2(9x) - (m+5)\log_3 x + 3m - 10 = 0$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1; 81]$ là

A. 3. B. 5. C. 4. D. 2.

Câu 66. Phương trình $(2+\sqrt{3})^x + (1-2a)(2-\sqrt{3})^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$. Khi đó a thuộc khoảng

A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. B. $(0; +\infty)$. C. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. D. $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Câu 67. Biết rằng $m = m_0$ là giá trị của tham số m sao cho phương trình $9^x - 2(2m+1)3^x + 3(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2) = 12$. Khi đó m_0 thuộc khoảng nào sau đây

A. $(3; 9)$. B. $(9; +\infty)$. C. $(1; 3)$. D. $(-2; 0)$.

Câu 68. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $16^x - 2(m+1)4^x + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm trái dấu?

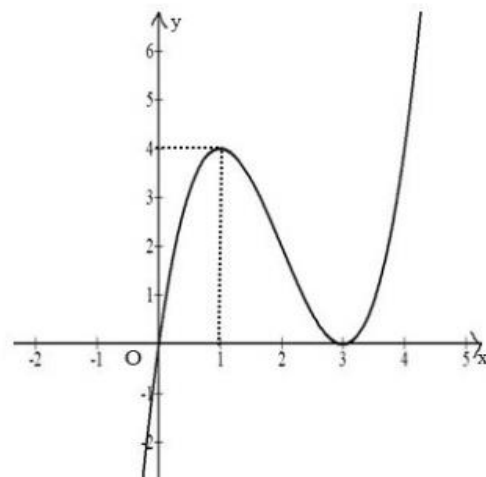
A. 6. B. 7. C. 0. D. 3.

Câu 69. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m \cdot 4^{x-1} + 5m^2 - 44 = 0$ có hai nghiệm đối nhau. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

- Câu 70.** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - 2m \cdot 2^x - m + 6 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2 < 3$. Tập hợp S có bao nhiêu phần tử?
A. Vô số. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.
- Câu 71.** Gọi $(a; b)$ là tập các giá trị của tham số m để phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \ln 5)$. Tổng $a + b$ bằng
A. 2. **B.** 4. **C.** -6. **D.** -14.
- Câu 72.** Giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - (2m + 3) \cdot 2^x + 64 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 24$ thuộc khoảng nào sau đây?
A. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$. **C.** $\left(\frac{21}{2}; \frac{29}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{11}{2}; \frac{19}{2}\right)$.
- Câu 73.** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $5^x + 10 = m\sqrt{25^x + 4}$ có nghiệm duy nhất. Số tập con của S là
A. 3. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 15.
- Câu 74.** Tập các giá trị của m để phương trình $4^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2)2^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$ có nghiệm là
A. $\left(-\infty; \frac{9}{2}\right)$. **B.** $\left[4; \frac{9}{2}\right]$. **C.** $(-\infty; 4)$. **D.** $[4; +\infty)$.
- Câu 75.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.
 Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để phương trình $f(e^{x^2}) = m$ có đúng 2 nghiệm thực là
A. $[0; 4]$. **B.** $\{0; 4\}$.
C. $\{0\} \cup (4; +\infty)$. **D.** $[4; +\infty)$.



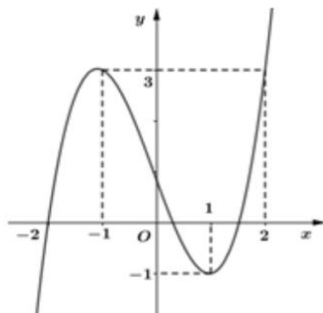
ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM					51B	52B	53D	54B	55A
56C	57A	58A	59B	60A	61A	62B	63D	64D	65C
66D	67C	68A	69B	70C	71D	72D	73C	74D	75C

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

★ BÀI TẬP MỨC ĐỘ IV:

- Câu 76.** Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) \cdot 3^{x-3} = 3^x + 1$ có 3 nghiệm phân biệt.
- A. 34. B. 27. C. 38. D. 45.
- Câu 77.** Gọi m_0 là giá trị nhỏ nhất của tham số thực m sao cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - (m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(2; 4)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
- A. $m_0 \in \left(-1; \frac{4}{3}\right)$. B. $m_0 \in \left(2; \frac{10}{3}\right)$. C. $m_0 \in \left(4; \frac{16}{3}\right)$. D. $m_0 \in \left(-5; \frac{-5}{2}\right)$.
- Câu 78.** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $4\log_{36}^2 x - m\log_6 \frac{x}{6} + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 - 72\sqrt{x_1 \cdot x_2} + 1296 \leq 0$
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 79.** Tập hợp các số thực m để phương trình $\ln(3x - mx + 1) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$ có nghiệm là nửa khoảng $[a; b)$. Tổng $a + b$ bằng
- A. $\frac{10}{3}$. B. 4. C. $\frac{22}{3}$. D. 7.
- Câu 80.** Cho a, b là các số thực dương lớn hơn 1, thay đổi thỏa mãn $a + b = 2019$ để phương trình $5\log_a x \cdot \log_b x - 4\log_a x - 3\log_b x - 2019 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Biết giá trị lớn nhất của $\ln(x_1 \cdot x_2)$ bằng $\frac{3}{5}\ln\left(\frac{m}{7}\right) + \frac{4}{5}\ln\left(\frac{n}{7}\right)$; với m, n là các số nguyên dương. Tính $S = m + 2n$
- A. 22209. B. 20190. C. 2019. D. 14133.
- Câu 81.** Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2018 của tham số m để phương trình $\log_6(2018x + m) = \log_4(1009x)$ có nghiệm là
- A. 2018. B. 2017. C. 2020. D. 2019.
- Câu 82.** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_3(3^x + 2m) = \log_5(3^x - m^2)$ có nghiệm?
- A. 3. B. 4. C. 2. D. 5.
- Câu 83.** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ sao cho phương trình $\log_2^3(f(x) + 1) - \log_{\sqrt{2}}^2(f(x) + 1) + (2m - 8)\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{f(x) + 1} + 2m = 0$ có nghiệm $x \in (-1; 1)$?

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT



- A. 7. B. 5. C. 6. D. vô số.

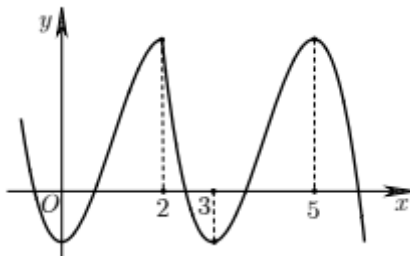
Câu 84. Cho phương trình $m \ln^2(x+1) - (x+2-m) \ln(x+1) - x - 2 = 0$ (1). Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó a thuộc khoảng

- A. $(3,8;3,9)$ B. $(3,6;3,7)$. C. $(3,7;3,8)$. D. $(3,5;3,6)$.

Câu 85. Cho hàm số $f(x) = 3^{x-4} + (x+1) \cdot 2^{7-x} - 6x + 3$, khi phương trình $f(7 - 4\sqrt{6x - 9x^2}) + 3m - 1 = 0$ có số nghiệm nhiều nhất thì giá trị nhỏ nhất của tham số m có dạng $\frac{a}{b}$. Tính $T = a + b$.

- A. $T = 7$. B. $T = 11$. C. $T = 8$. D. $T = 13$.

Câu 86. Cho số thực m và hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Phương trình $f(2^x + 2^{-x}) = m$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 87. Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \cdot 4^x - b \cdot 2^x + 50 = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $9^x - b \cdot 3^x + 50a = 0$ (2) có hai nghiệm x_3, x_4 thỏa mãn điều kiện $x_3 + x_4 > x_1 + x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 3a + 4b$.

- A. 109. B. 51. C. 49. D. 87.

Câu 88. Cho phương trình: $2^{x^3+x^2-2x+m} - 2^{x^2+x} + x^3 - 3x + m = 0$. Tập các giá trị để bất phương trình có ba nghiệm phân biệt có dạng $(a; b)$. Tổng $a + 2b$ bằng:

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

A. 1. B. 2. C. -4. D. 0.

Câu 89. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $9.3^{2x} - m(4\sqrt{x^2 + 2x + 1} + 3m + 3)3^x + 1 = 0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

A. Vô số. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 90. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in -2019; 2019$ để phương trình $2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{mx-2m-1}{x-2} = 0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

A. 4038. B. 2019. C. 2017. D. 4039.

Câu 91. Có bao nhiêu số nguyên $m (m \geq 2)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn $(m^{\ln x} + 4)^{\ln m} + 4 = x$?

A. 8. B. 9. C. 1. D. Vô số

Câu 92. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m với $m > 1$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn: $(m^{\log_5 x} + 3)^{\log_5 m} = x - 3 \quad (1)$.

A. 4. B. 3. C. 5. D. 8.

Câu 93. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình:

$$2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$$
 có đúng ba nghiệm phân biệt là:

A. 2. B. $\frac{3}{2}$. C. 0. D. 3.

Câu 94. Cho phương trình $\log_{2+\sqrt{3}}^2(\sqrt{x^2+1}+x) + (m^2-2)\log_{2-\sqrt{3}}(\sqrt{x^2+1}-x) - 1 = 0$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $\frac{\sqrt{x_1^2+1}-x_1}{\sqrt{x_2^2+1}+x_2} = 7 + 4\sqrt{3}$. Tích các phần tử của S bằng

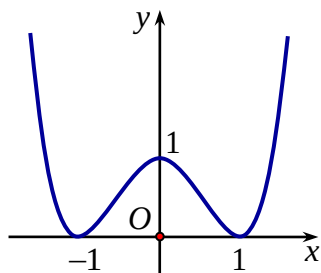
A. -4. B. 4. C. 0. D. 2.

Câu 95. Có bao nhiêu số nguyên y nằm trong khoảng $(-2021; +\infty)$ sao cho với mỗi giá trị của y tồn tại nhiều hơn hai số thực x thỏa mãn $x^2 + y + (x^2 - x) \cdot 2020^{x+y} = (2x^2 - x + y) \cdot 2020^{x-x^2}$?

A. 2020. B. 2019. C. 2021. D. 2022.

Câu 96. Cho hàm số bậc 4 có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m và $m \in [-2021; 2021]$ để phương trình $\log \frac{f(x)}{mx^2} + x[f(x) - mx] = mx^3 - f(x)$ có hai nghiệm dương phân biệt?

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG & VẬN DỤNG CAO
CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT



A. 2022.

B. 2020.

C. 2019.

D. 2021.

Câu 97. Biết điều kiện cần và đủ của tham số m để phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x+2} - 8m + 4 = 0$ có nghiệm thuộc $\left[-\frac{3}{2}; 6\right]$ là $m \in (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b$.

A. $T = -\frac{8}{3}$.

B. $T = -\frac{22}{3}$.

C. $T = \frac{8}{3}$.

D. $T = \frac{22}{3}$.

Câu 98. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2 + 2y^2)$

A. 3.

B. 2.

C. Vô số.

D. 1.

Câu 99. Có bao nhiêu cặp số x, y là các số nguyên không âm thỏa mãn:

$$2\left(1 + \sqrt{x+2y}\right)^2 + \log_2(x+2y) = 2\log_2(x^2 + y^2 + 2xy + x) + 2(x+y)^2 + 4x + 4y$$

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 100. Có bao nhiêu số nguyên dương a nhỏ hơn 2021 sao cho tồn tại số nguyên x thỏa mãn

$$2^a(2^{x+3} - 1) + a^2 = a(2^a + 2^{x+3} - 1)?$$

A. 12.

B. 15.

C. 10.

D. 14.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM					76B	77D	78A	79D	80A
81C	82A	83A	84C	85C	86B	87A	88B	89C	90C
91C	92B	93D	94B	95A	96D	97D	98B	99B	100C