

BÀI 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Khái niệm cực trị của hàm số

Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên K ($K \subset \mathbb{R}$) và $x_0 \in K$

a) x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a; b) \subset K$ chứa điểm x_0 sao cho $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số f .

b) x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a; b) \subset K$ chứa điểm x_0 sao cho $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$.

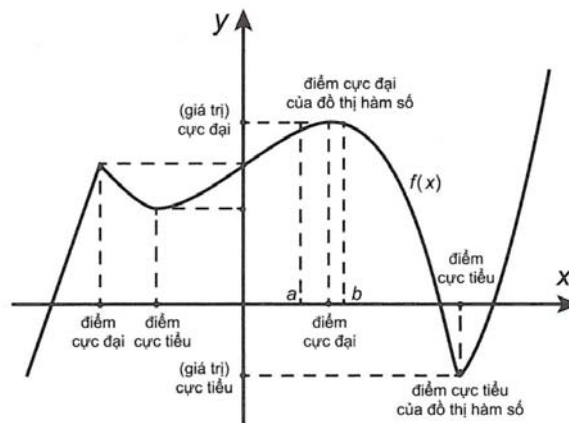
Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số f .

Chú ý:

1) Điểm cực đại (cực tiểu) x_0 được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ của hàm số được gọi chung là cực trị. Hàm số có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập hợp K .

2) Nói chung, giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên tập K ; $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên một khoảng $(a; b)$ chứa x_0 .

3) Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số f .



2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Định lý 1

Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 . Khi đó, nếu f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý:

1) Điều ngược lại có thể không đúng. Đạo hàm f' có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0 .

2) Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

Định lí 2

a) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

x	a	x_0	b
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$f(x_0)$ (cực đại)	

b) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0 .

x	a	x_0	b
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(x_0)$ (cực tiểu)	

Định lí 3

Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 , $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0 .

a) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0 .

b) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

Nếu $f''(x_0) = 0$ thì ta chưa thể kết luận được, cần lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu đạo hàm.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP BÀI TẬP

Dạng 1: Cho hàm số $f(x)$ hoặc $f'(x)$. Tìm điểm cực trị, giá trị cực trị

1. Phương pháp

Cách 1: Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu

Bước 1. Tìm $f'(x)$

Bước 2. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, \dots)$ tại đó đạo hàm bằng không hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.

Bước 3. Xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_i thì hàm số đạt cực trị tại điểm x_i .

Cách 2: Dùng định lý 3

Bước 1: Tìm $f'(x)$

Bước 2: Tìm các nghiệm $x_i (i = 1, 2, \dots)$ của phương trình $f'(x) = 0$.

Bước 3: Tính $f''(x_i)$

- Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i .
- Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i .

Nếu $f''(x_i) = 0$ thì ta lập bảng biến thiên để xác định điểm cực trị.

* Tìm (điểm) cực trị thông qua đạo hàm $f'(x)$: Ta đi đếm số nghiệm bội lẻ của phương trình đạo hàm

2. Bài tập

Bài tập 1: Giá trị cực đại của hàm số $f(x) = x - 2\sqrt{x^2 + 1}$ là số nào dưới đây?

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $-\sqrt{3}$.

D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Từ đó: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x^2 + 1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, giá trị cực đại của hàm số là $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

Bài tập 2: Các điểm cực đại của hàm số $f(x) = x - 2\sin x$ có dạng (với $k \in \mathbb{Z}$)

A. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

C. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$.

D. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 1 - 2\cos x$. Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$$f''(x) = 2\sin x$$

Vì $f''\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = 2\sin\frac{\pi}{3} > 0$ nên $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ là điểm cực tiểu.

Vì $f''\left(-\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\frac{\pi}{3} < 0$ nên $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ là điểm cực đại

Bài tập 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 2)(x^2 - 2x)$.

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 6.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $f'(x) = (x - 2)(x - 1)^3 x(x + 1)(x + 2)$ và $f'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ nên có 5 điểm cực trị.

Bài tập 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x - 1)(x - 4)^2$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2)$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\left[f(x^2)\right]' = 2x \cdot f'(x^2) = 2x^5(x^2 - 1)(x^2 - 4)^2$

Phương trình $\left[f(x^2)\right]' = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ là $x = 0, x = \pm 1$ nên số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2)$ là 3.

Chú ý:

Đạo hàm của hàm số hợp $(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$ hay $f'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Bài tập 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f'(x) \geq 3x + \frac{1}{x^2} - \frac{7}{2}, \forall x > 0$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số có đúng một điểm cực trị trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số có ít nhất một điểm cực trị trên $(0; +\infty)$.
- C. Hàm số không có điểm cực trị nào trên $(0; +\infty)$.
- D. Hàm số có đúng hai điểm cực trị trên $\mathbb{R}$.

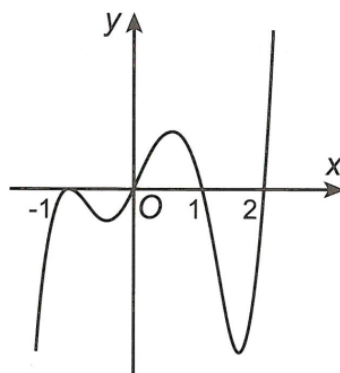
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Với $\forall x > 0$ ta có: $f'(x) \geq 3x + \frac{1}{x^2} - \frac{7}{2} = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x + \frac{1}{x^2} - \frac{7}{2} \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2} - \frac{7}{2} > 0$.

Vậy hàm số không có cực trị trên $(0; +\infty)$.

Bài tập 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - x - 2)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)g(x)$ với $g(x)$ là hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ dưới đây ($g(x)$ đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và trên $(2; +\infty)$). Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là



- A. 5.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Dựa vào đồ thị, phương trình $g(x) = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ là $x = 0, x = 1, x = 2$ và một nghiệm bội chẵn là $x = -1$.

Tóm lại, phương trình $y' = 0$ chỉ có $x = -1, x = 0, x = 2$ và $x = 3$ là nghiệm bội lẻ, nên hàm số có 4 điểm cực trị.

Dạng 2. Tìm (điểm) cực trị thông qua bảng xét dấu, bảng biến thiên của đạo hàm

Bài tập 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-5	$-1/3$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 1.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương 1 lần nên có 1 điểm cực tiểu.

Bài tập 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-5	-3	4	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đạo hàm đổi dấu hai lần nên có hai điểm cực trị.

Bài tập 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-1	0	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Chắc chắn hàm số có 3 điểm cực trị là $x = -1, x = 2, x = 3$.

Xét tại điểm $x = 0$, đạo hàm đổi dấu, hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = 0$, nhưng theo đề bài, hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(0)$ xác định. Vậy hàm số có tổng cộng 4 điểm cực trị.

Bài tập 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-2	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hàm số có 3 điểm cực trị là $x = -2, x = 2, x = 3$ (hàm số không đạt cực trị tại điểm $x = 1$ vì hàm số không xác định tại điểm $x = 1$).

Bài tập 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên của $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-5	0	1	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	3	0	1	-4	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 4

B. 2

C. 3

D. 5

Hướng dẫn giải

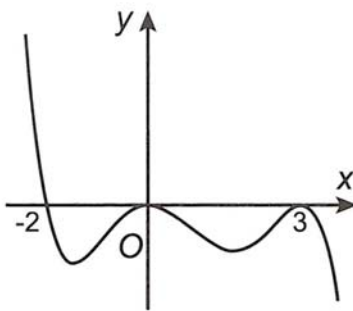
Chọn C.

x	$-\infty$	-5	0	1	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	3	0	1	-4	$+\infty$

Dễ thấy phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm bội lẻ nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Dạng 3. Tìm (điểm) cực trị thông qua đồ thị f, f', f''

Bài tập 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f''(x)$ như hình vẽ dưới đây (đồ thị $y = f''(x)$ chỉ có 3 điểm chung với trục hoành như hình vẽ). Số điểm cực trị tối đa của hàm số là



A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn giải

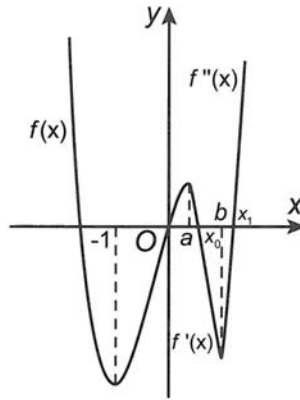
Chọn D.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f'(x)$					

Nhận thấy trục hoành cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại tối đa 2 điểm nên $f'(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm phân biệt. Vậy hàm số $y = f(x)$ có tối đa 2 điểm cực trị.

Bài tập 2: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức. Trên hình vẽ là đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $(-\infty; a]$ (và hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1]$), đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[a; b]$ (và $f'(x_0) = 0$), đồ thị của hàm số $y = f''(x)$ trên $[b; +\infty)$ (và hàm số $y = f''(x)$ luôn đồng biến trên $[b; +\infty)$, $f''(x_1) = 0$). Hỏi hàm số $y = f(x)$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1.

B. 6.

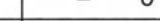
C. 5.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Bảng xét dấu bên dưới được lập từ các suy luận sau:

x	$-\infty$	-1	a	x_0	b	x_1	$+\infty$	
$f''(x)$						$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$			$+$ 0 $-$				

* Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ nên $f'(x) < 0, \forall x \in (-\infty; -1)$ và đồng biến trên $(-1; a)$ nên $f'(x) > 0, \forall x \in (-1; a)$.

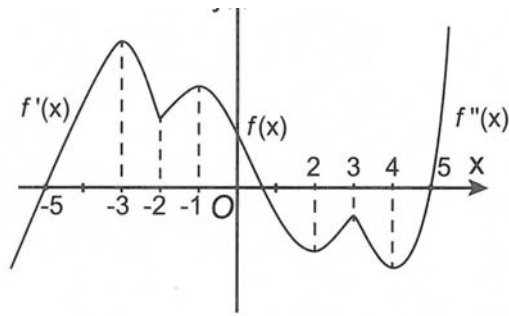
* Hàm số $y = f'(x)$ có $f'(x) > 0, \forall x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0; b)$
 $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0; b]$.

* Hàm số $y = f''(x)$ có $f''(x) < 0, \forall x \in (b; x_1)$ mà $f'(b) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in (b; x_1)$

Lại có $f''(x) > 0, \forall x \in (x_1; +\infty)$. Vậy trong khoảng $(x_1; +\infty)$, phương trình $f'(x) = 0$ có tối đa 1 nghiệm, và nếu có đúng 1 nghiệm thì $f'(x)$ đổi dấu khi qua nghiệm ấy.

Vậy $f'(x)$ có tối đa 3 nghiệm (bội lẻ) nên hàm số $y = f(x)$ có tối đa 3 điểm cực trị.

Bài tập 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Trên hình vẽ là đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 3]$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $(-\infty; -2]$, đồ thị của hàm số $y = f''(x)$ trên $[3; +\infty)$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Bảng xét dấu bên dưới được lập từ các suy luận sau:

+ Đồ thị của hàm số $y = f''(x)$ trên $[3; +\infty)$ cắt trục hoành tại điểm $x = 5$, $f''(x) < 0$ khi $x \in (3; 5)$ và $f''(x) > 0$ khi $x \in (5; +\infty)$.

+ Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $(-\infty; -2]$ cắt trục hoành tại điểm $x = -5$, $f'(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -5)$ và $f'(x) > 0$ khi $x \in (-5; -2)$.

+ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 3]$: hàm số đồng biến trên $(-2; -1)$ và $(2; 3)$; hàm số nghịch biến trên $(-1; 2)$

x	$-\infty$	-5	-3	-2	-1	2	3	4	5	$+\infty$
$f''(x)$								-	0	+
$f'(x)$	-	0	+		+	0	-	0	+	

Từ bảng xét dấu trên, đồ thị $f'(x)$ cắt trục hoành tối đa tại 2 điểm trên $(3; +\infty)$, khi đó trên $(2; +\infty)$ thì $f'(x)$ đổi dấu 2 lần, trên $(-\infty; 2)$ thì $f'(x)$ đổi dấu 3 lần nên hàm số $y = f(x)$ có tối đa 5 điểm cực trị.

Dạng 4: Cực trị hàm bậc ba

1. Phương pháp

Bước 1. Hàm số đạt cực đại (cực tiểu) tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$, tìm được tham số.

Bước 2. Với giá trị tham số tìm được, ta thế vào hàm số ban đầu để thử lại.

Chú ý: Đối với hàm bậc ba, ta có thể làm trắc nghiệm như sau:

+) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$.

+) Hàm số đạt cực đại tại $x = x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại điểm $x = 3$.

A. $m = -1$.

B. $m = -5$.

C. $m = 5$.

D. $m = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4 \Rightarrow y'' = 2x - 2m$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$ thì

$$y'(3) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \end{cases}$$

• Với $m = 1, y''(3) = 2.3 - 2.1 = 4 > 0$ suy ra $x = 3$ là điểm cực tiểu.

• Với $m = 5, y''(3) = 2.3 - 2.5 = -4 < 0$ suy ra $x = 3$ là điểm cực đại.

Bài tập 2: Hàm số $y = ax^3 + x^2 - 5x + b$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng 2, giá trị của $H = 4a - b$ là

A. $H = 1$.

B. $H = -1$.

C. $H = -2$.

D. $H = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2x - 5 \Rightarrow y'' = 6ax + 2$.

+) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

+) Thay $a = 1$ ta thấy $y''(1) = 6 + 2 = 8 > 0$ nên $x = 1$ là điểm cực tiểu.

+) Mặt khác ta có: $y(1) = 2 \Leftrightarrow 1 + 1 - 5 + b = 2 \Leftrightarrow b = 5$.

Vậy $H = 4.1 - 5 = -1$.

Bài tập 3: Hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1, f(1) = 1$. Giá trị của biểu thức $T = a + 2b - 3c + d$ là

A. $T = 2$.

B. $T = 3$.

C. $T = 4$.

D. $T = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Do hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1, f(1) = 1$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} f'(0)=0 \\ f(0)=0 \\ f'(1)=0 \\ f(1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=0 \\ 3a+2b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow T=4.$$

Bài tập 4: Giá trị của m để hàm số $y = x^3 + mx - 1$ có cực đại và cực tiểu là

- A. $m \geq 0$. B. $m \leq 0$. C. $m > 0$. D. $m < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số $y = x^3 + mx - 1$ có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay $3x^2 + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Do đó $m < 0$.

Chú ý: Do hàm bậc ba có đạo hàm là tam thức bậc hai nên các yêu cầu sau: hàm số có cực trị, hàm số có cực đại và cực tiểu, hàm số có hai cực trị có cách làm giống nhau, tức là $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 5: Với giá trị nào của m thì hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + x^2 + x + 7$ có cực trị?

- A. $m \in (1; +\infty) \cup \{0\}$. B. $m < 1$.
C. $m \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}$. D. $m \leq 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y' = mx^2 + 2x + 1$.

+) Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = x^2 + x + 7$, đồ thị là một parabol nên hiển nhiên có cực trị.

Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu.

+) Xét $m \neq 0$, để hàm số có cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

Hợp cả hai trường hợp, khi $m < 1$ thì hàm số có cực trị.

Chú ý: Với bài toán hỏi “có cực trị” và hệ số của bậc ba (bậc cao nhất) có chứa tham số thì nên chia hai trường hợp: Hệ số của bậc cao nhất bằng 0 và khác 0.

Bài tập 6: Tìm các giá trị của m để hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 - (m-1)x + 2$ **không** có cực trị.

- A. $0 < m < \frac{1}{4}$. B. $0 \leq m < \frac{1}{4}$.
C. $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$. D. $0 < m \leq \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $y' = 3mx^2 - 6mx - m + 1$.

+) Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = x + 2$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên không có cực trị, nhận $m = 0$.

+) Xét $m \neq 0$, hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9m^2 - 3m(1 - m) \leq 0 \Leftrightarrow 12m^2 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1}{4}.$$

Hợp cả hai trường hợp, khi $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$ thì hàm số không có cực trị.

Bài tập 7: Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số

$$y = \left(\frac{m-1}{3}\right)x^3 + (m^2 - 4)x^2 + (m^2 - 9)x + 1 \text{ có hai điểm cực trị trái dấu là}$$

A. 18.

B. 17.

C. 19.

D. 16.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$y' = (m-1)x^2 + 2(m^2 - 4)x + (m^2 - 9).$$

Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu khi $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow (m-1)(m^2 - 9) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 1 < m < 3 \end{cases}.$$

Vậy $m \in \{-20; -19; \dots; -4; 2\}$, có 18 giá trị của m .

Bài tập 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = mx^3 + m(m-1)x^2 - (m+1)x - 1$ có hai điểm cực trị đối nhau?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$Ta \text{ có: } y' = 3mx^2 + 2m(m-1)x - (m+1).$$

Hàm số có hai điểm cực trị đối nhau $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm đối nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2(m-1)^2 + 3m(m+1) > 0 \\ m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$$

Bài tập 9: Giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+2)x - 6$ có hai điểm cực trị có hoành độ dương là

A. $m < \frac{1}{4}$.

B. $0 < m < \frac{1}{4}$.

C. $m < 0$.

D. $-\frac{1}{4} < m < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y' = mx^2 + 2(m-1)x + m + 2$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị có hoành độ dương $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - m(m+2) > 0 \\ \frac{-(m-1)}{m} > 0 \\ \frac{m+2}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{4} \\ 0 < m < 1 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{4} \\ \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases} \end{cases}$$

Bài tập 10: Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$. các giá trị của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1 là

A. $\begin{cases} m < -1 \\ \frac{5}{4} < m < \frac{7}{5} \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m < -1 \\ \frac{5}{4} < m < \frac{8}{5} \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m < -1 \\ \frac{5}{4} < m < \frac{7}{5} \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m < -2 \\ \frac{3}{2} < m < \frac{5}{2} \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2-m$.

Đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = (1-2m)^2 - 3(2-m) > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - m - 5 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > \frac{5}{4} \end{cases}$$

Khi đó, giả sử x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

Khi đó, yêu cầu bài toán trở thành:

$$x_2 < 1 \Leftrightarrow \frac{2m-1 + \sqrt{4m^2 - m - 5}}{3} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{4m^2 - m - 5} < 4 - 2m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-2m \geq 0 \\ 4m^2 - m - 5 < 4m^2 - 16m + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m < \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{7}{5}.$$

Kết hợp điều kiện có cực trị thì $m < -1$ và $\frac{5}{4} < m < \frac{7}{5}$ thỏa mãn yêu cầu.

Chú ý: Có thể dùng Vi-ét để lời giải đơn giản hơn như sau:

Xét $x_1 < x_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 2 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 < 3 \\ 2 - m + 2(1 - 2m) + 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m < \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{7}{5}$$

Bài tập 11: Tìm các giá trị thực của tham số m sao cho điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx - 1$ nằm bên phải trục tung.

A. $m < 0$.

B. $0 < m < \frac{1}{3}$.

C. $m < \frac{1}{3}$.

D. Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $y' = 3x^2 + 2x + m$.

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3} \quad (1).$$

Khi đó, giả sử x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$ thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$				$+\infty$

Do $x_1 + x_2 = -\frac{2}{3} < 0$ nên điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx - 1$ nằm bên phải trục tung

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{m}{3} < 0 \Leftrightarrow m < 0 \quad (2).$$

Từ (1), (2) ta có $m < 0$

Bài tập 12: Giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-2)x^2 + (4m-8)x + m + 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -2 < x_2$ là

A. $m < 2$.

B. $m < 2$ hoặc $m > 6$.

C. $m < \frac{3}{2}$ hoặc $m > 6$.

D. $m < \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $y' = x^2 - 2(m-2)x + (4m-8)$.

Yêu cầu bài toán trở thành

$$(x_1 + 2)(x_2 + 2) < 0 \Leftrightarrow (4m-8) + 4(m-2) + 4 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$$

Bài tập 13: Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (x-m)(x^2 - 2x - m - 1)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $|x_1 \cdot x_2| = 1$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 2.

B. -2.

C. 4.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $y' = 3x^2 - 2(m+2)x + m - 1$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 + m + 7 > 0 \quad (\text{luôn đúng}).$$

Theo định lí Vi-ét ta có:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{m-1}{3} \Rightarrow |x_1 \cdot x_2| = 1 \Leftrightarrow |m-1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Vậy tổng cần tìm bằng $4 + (-2) = 2$.

Bài tập 14: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-20; 20]$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| \geq 2\sqrt{6}$?

A. 38.

B. 35.

C. 34.

D. 37.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - m > 0 (*).$$

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}$.

Khi đó

$$|x_1 - x_2| \geq 2\sqrt{6} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 \geq 24 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m \geq 24 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq -2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn(*)}).$$

Do m nguyên và $m \in [-20; 20]$ nên $m \in \{-20; -19; \dots; -2; 3; 4; \dots; 20\}$.

Vậy có 37 giá trị của m .

Bài tập 15: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - m$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 sao cho $3x_1 - 2x_2 = m + 6$ là

A. 0.

B. 1.

C. -2.

D. -3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9$

Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9(m+1)^2 - 27 > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 > 3 (*).$$

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = 3 \end{cases}$.

Từ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ 3x_1 - 2x_2 = m + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m + 2 \\ x_2 = m \end{cases}$ thế vào $x_1 \cdot x_2 = 3$ ta được

$$m(m+2) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases} \text{ thỏa mãn } (*).$$

Bài tập 16: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + 9mx^2 + 12m^2x$ có điểm cực đại x_{CD} , điểm cực tiểu x_{CT} thỏa mãn $x_{CD}^2 = x_{CT}$?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $y' = 6x^2 + 18mx + 12m^2 = 6(x+m)(x+2m)$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0 (*)$

Trường hợp 1: $m < 0$ khi đó, lập bảng xét dấu đạo hàm dễ thấy

$$x_{CD} = -m, x_{CT} = -2m$$

Khi đó:

$$x_{CD}^2 = x_{CT} \Leftrightarrow m^2 = -2m \Leftrightarrow m = -2 \text{ (thỏa mãn).}$$

Trường hợp 2: $m > 0$ lập bảng xét dấu đạo hàm ta có $x_{CD} = -2m, x_{CT} = -m$.

$$x_{CD}^2 = x_{CT} \Leftrightarrow 4m^2 = -m \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}, \text{ loại.}$$

Vậy $m = -2$ thỏa mãn đề bài.

Bài tập 17: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-18; 18]$ để đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 + 2mx + 1)$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 34.

B. 30.

C. 25.

D. 19.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Bảng biến thiên của hàm số bậc ba khi có hai cực trị và hai điểm cực trị của đồ thị nằm về hai phía trục hoành là

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành thì $y=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 + 2mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1^2 + 2m \cdot 1 + 1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$$

Do m nguyên và $m \in [-18; 18]$ nên $m \in \{-18; -17; \dots; -2; 2; 3; \dots; 18\}$

Vậy có 34 giá trị của m thỏa mãn đề.

Bài tập 18: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + x + m$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $(-10; 10)$ để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của đường thẳng $y = x - 6$.

Số phần tử của tập S là

A. 9.

B. 12.

C. 7.

D. 11.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $f(x) = 2x^3 - 3mx^2 + m + 6$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x^3 - 3mx^2 + m + 6)' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \end{cases}$.

Xét $g(x) = g(x) - x + 6$. Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị nằm về hai phía đường thẳng $y = x = 6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ g(0).g(m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m+12)(-m^3+12) < 0 \end{cases}$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và thuộc $(-10; 10)$ nên $m \in \{3; 4; \dots; 9\}$.

Bài tập 19: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị (C) và điểm $C(1; 4)$. Tổng các giá trị nguyên dương của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4 là

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

Đồ thị (C) luôn có hai điểm cực trị với mọi m nguyên dương (vì m là số nguyên dương nên phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt).

Khi đó $A(0; 4m^2 - 2), B(2m; -4m^3 + 4m^2 - 2)$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{4m^2 + 16m^6} = 2|m|\sqrt{4m^4 + 1}.$$

$$(AB): \frac{x-0}{2m-0} = \frac{y-(4m^2-2)}{-4m^3} \Leftrightarrow 2m^2x + y - 4m^2 + 2 = 0.$$

Thế tọa độ C vào phương trình đường thẳng (AB) , dễ thấy $C \notin (AB)$.

$$d(C, AB) = \frac{|2m^2 + 4 - 4m^2 + 2|}{\sqrt{4m^4 + 1}} = \frac{2|m^2 - 3|}{\sqrt{4m^4 + 1}}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(C, AB) = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2|m| \cdot \sqrt{4m^4 + 1} \cdot \frac{2|m^2 - 3|}{\sqrt{4m^4 + 1}} = 4$$

$$\Leftrightarrow |m(m^2 - 3)| = 2 \Leftrightarrow m^6 - 6m^4 + 9m^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 1)^2 (m^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm 2 \end{cases}.$$

Do m nguyên dương nên ta nhận được $m = 1, m = 2$. Tổng là 3.

Chú ý: Học sinh nên kiểm tra điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị và điều kiện để ba điểm A, B, C không thẳng hàng (dù trong bài toán này, nếu “quên” thì không ảnh hưởng đến kết quả).

Ta có thể tính nhanh diện tích như sau:

Ta có $\overrightarrow{OA} = (0; 4m^2 - 2)$ và $\overrightarrow{OB} = (2m; -4m^3 + 4m^2 - 2)$

$$\text{Khi đó: } S_{ABC} = \frac{1}{2} |2m(4m^2 - 2)| = 4$$

Bài tập 20: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + (m^2 - 3)x$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho giá trị biểu thức $P = |x_1(x_2 - 2) - 2(x_2 + 1)|$ đạt giá trị lớn nhất?

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y' = x^2 - 2x + m^2 - 3$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi $1 - (m^2 - 3) > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Theo định lí Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} P &= |x_1(x_2 - 2) - 2(x_2 + 1)| = |x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) - 2| \\ &= |m^2 - 3 - 2 \cdot 2 - 2| = |m^2 - 9| \leq 9. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = 0$ (thỏa mãn).

Bài tập 21: Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 - 4x - 10$. Giá trị lớn nhất của

$$S = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 16)$$
 là

A. 16.

B. 32.

C. 4.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $y' = x^2 - mx - 4$. Do $a = 1, c = -4$ trái dấu nhau nên $y' = 0$ luôn có hai nghiệm trái dấu hay hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Theo định lí Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = -4 \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } S = (x_1x_2)^2 - (16x_1^2 + x_2^2) + 16 \leq (x_1x_2)^2 - 2\sqrt{16x_1^2 \cdot x_2^2} + 16 = 0.$$

Dấu “=” xảy ra khi $16x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_2 = -4x_1 \Rightarrow m = \pm 3$.

Bài tập 21: Tìm m để đồ thị hàm số $(C): y = x^3 + (m+3)x^2 - (2m+9)x + m+6$ có hai điểm cực trị và khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng qua hai điểm cực trị đạt giá trị lớn nhất

$$\text{A. } m \in \left\{ -6 + \frac{3}{\sqrt{2}}; -6 - \frac{3}{\sqrt{2}} \right\}.$$

$$\text{B. } m \in \left\{ -3 - \frac{3}{\sqrt{2}}; -3 + \frac{3}{\sqrt{2}} \right\}.$$

$$\text{C. } m \in \left\{ -3 - 6\sqrt{2}; -3 + 6\sqrt{2} \right\}.$$

$$\text{D. } m \in \left\{ -6 - 6\sqrt{2}; -6 + 6\sqrt{2} \right\}.$$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y' &= 3x^2 + 2(m+3)x - 2m - 9 = (3x^2 + 6x - 9) + (2mx - 2m) \\ &= (x-1)(3x+9+2m). \end{aligned}$$

Hàm số có hai cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 3+9+2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -6$

Một trong hai điểm cực trị là $A(1;1)$ và $\overline{OA} = (1;1) \Rightarrow OA = \sqrt{2}$ và $k_{(OA)} = 1$.

Đường thẳng d qua hai điểm cực trị có hệ số góc là $k_d = -\left[\frac{2}{3}(2m+9) + \frac{2}{9}(m+3)^2 \right]$

Ta có $d[O; d] \leq OA = \sqrt{2}$.

Dấu “=” xảy ra khi $d \perp OA \Leftrightarrow k_d k_{(OA)} = -1 \Leftrightarrow -\left[\frac{2}{3}(2m+9) + \frac{2}{9}(m+3)^2 \right] = -1$

$$\Leftrightarrow m = -6 \pm \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Bài tập 22: Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và đường thẳng (AB) đi qua gốc tọa độ. Giá trị lớn nhất $P_{\min}$ của $P = abc + ab + c$ bằng

$$\text{A. } P_{\min} = -9.$$

$$\text{B. } P_{\min} = 1.$$

$$\text{C. } P_{\min} = -\frac{16}{25}.$$

$$\text{D. } P_{\min} = -\frac{25}{9}.$$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đường thẳng qua hai cực trị là $(AB): y = \left(\frac{2}{3}b - \frac{2a^2}{9} \right)x + c - \frac{ab}{9}$.

Do (AB) qua gốc O nên $c - \frac{ab}{9} = 0 \Leftrightarrow ab = 9c$.

Khi đó $P = abc + ab + c = 9c^2 + 10c = \left(3c + \frac{5}{3} \right)^2 - \frac{25}{9} \geq -\frac{25}{9}, \forall c \in \mathbb{R}$.

Vậy $P_{\min} = -\frac{25}{9}$ khi $\begin{cases} c = -\frac{5}{9} \\ ab = -5 \end{cases}$.

Bài tập 23: Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có hai điểm cực trị A, B . Gọi M, N là hai giao điểm của đường thẳng (AB) và đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$. Biết MN lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $E(3;1)$ đến (AB) bằng

A. $\sqrt{3}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. $2\sqrt{3}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3m$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Viết hàm số dưới dạng $y = \frac{x}{3}(3x^2 - 3m) - 2mx + 2 = \frac{x}{3}y' - 2mx + 2$

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $(AB): y = -2mx + 2$.

Đường thẳng (AB) luôn đi qua điểm cố định là $M(0;2)$.

Đường tròn (C) tâm $I(1;1)$, bán kính $R = \sqrt{3}$ và $d[I; (AB)] \leq IM = 1 < \sqrt{3} = R$ nên đường thẳng luôn cắt đường tròn tại hai điểm M, N .

Giả sử $I(1;1) \in (AB) \Rightarrow 1 = -2m + 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Vậy khi $m = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn hàm số có hai điểm cực trị) thì (AB) qua $I(1;1)$, cắt đường tròn (C) tại hai điểm

M, N với $MN = 2R$ là lớn nhất. Khi đó: $d[E(3;1); (AB): y + x - 2 = 0] = \sqrt{2}$.

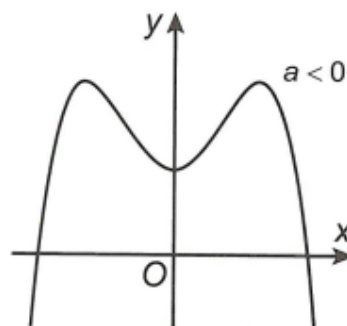
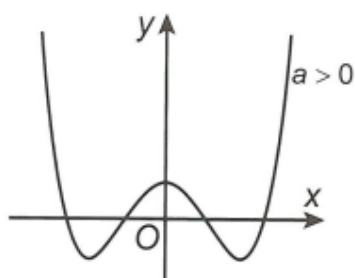
Dạng 5. Cực trị hàm bậc bốn trùng phương

1. Phương pháp

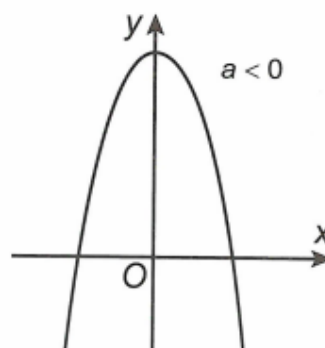
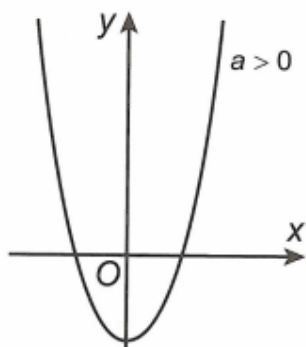
Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$, có đạo hàm là $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

- + Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ab < 0$.
- + Đồ thị hàm số có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow ab \geq 0$.
- + Đồ thị hàm số hoặc có đúng một điểm cực trị hoặc có ba điểm cực trị, và luôn có một điểm cực trị nằm trên trục tung.
- + Đồ thị hàm số có ba cực trị:
 - Nếu $a > 0$ hàm số có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại;
 - Nếu $a < 0$ hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Chú ý rằng ba điểm cực trị của đồ thị hàm số luôn tạo thành một tam giác cân.



- + Khi hàm số có một cực trị:
 $a > 0$ thì điểm cực trị là điểm cực tiểu;
 $a < 0$ thì điểm cực trị là điểm cực đại.



- + Đồ thị hàm số $y = |ax^4 + bx^2 + c|$ có nhiều điểm cực trị nhất (bảy cực trị) khi đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị và đồ thị của nó cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.
- + Đồ thị hàm số $y = |ax^4 + bx^2 + c|$ có ít điểm cực trị nhất (một cực trị) khi đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có một điểm cực trị và đồ thị của nó không có điểm chung hoặc chỉ tiếp xúc với trục hoành.

2. Bài tập

Bài tập 1. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-20; 20]$ để đồ thị hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 1$ có ba điểm cực trị?

A. 20.

B. 19.

C. 18.

D. 17.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x = 2x[2mx^2 + (m^2 - 9)]$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2mx^2 + m^2 - 9 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt hay (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\text{khác } 0 \Leftrightarrow 2m(m^2 - 9) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 3 \end{cases}.$$

Vậy có 19 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Bài tập 2. Tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 3mx^2 - 4$ có ba điểm cực trị phân biệt và hoành độ của chúng trong khoảng $(-2; 2)$ là

A. $\left(-\frac{8}{3}; 0\right)$. B. $\left(0; \frac{8}{3}\right)$. C. $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$. D. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y' = 4x^3 + 6mx$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 = -3m \end{cases} (2)$.

Để thỏa mãn đề bài phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0 và thuộc khoảng $(-2; 2)$

$$\Leftrightarrow 0 < -\frac{3m}{2} < 4 \Leftrightarrow 0 > m > -\frac{8}{3}.$$

Bài tập 3. Biết rằng hàm số $y = x^4 - 2(m^2 + 1)x^2 + 2$ có điểm cực tiểu. Giá trị lớn nhất của cực tiểu là

A. 1. B. -1. C. 0. D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$y' = 4x^3 - 4(m^2 + 1)x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m^2 + 1 \end{cases}$$

Rõ ràng phương trình $y' = 0$ luôn có ba nghiệm phân biệt.

Lập bảng biến thiên, dễ thấy $x = \pm\sqrt{m^2 + 1}$ là các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Giá trị cực tiểu là $y_{CT} = 2 - (m^2 + 1)^2 = 1 - (m^4 + 2m^2) \leq 1$ (dấu "=" xảy ra khi $m = 0$).

Bài tập 4. Với giá trị nào của k thì hàm số $y = kx^4 + (k - 1)x^2 + 1 - 2k$ chỉ có một cực trị?

A. $0 < k \leq 1$. B. $0 \leq k \leq 1$. C. $\begin{cases} k \geq 1 \\ k < 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} k \geq 1 \\ k \leq 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

+ Với $k = 0$, hàm số trở thành $y = -x^2 + 1$ có đồ thị là một parabol nên có đúng một cực trị. Do đó $k = 0$ thỏa mãn đề bài.

+ Với $k \neq 0$. Ta có $y' = 4kx^3 + 2(k-1)x = 2x(2kx^2 + k-1)$.

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì phương trình $2kx^2 + k-1 = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm

$$x = 0 \Leftrightarrow k(k-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq 1 \\ k < 0 \end{cases}.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được các giá trị cần tìm là $k \geq 1$ hoặc $k \leq 0$.

Chú ý: $x=0$ là nghiệm của phương trình $2kx^2 + k-1 = 0$

Bài tập 5. Giá trị của m để hàm số $y = (m+1)x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ đạt cực đại tại $x = 2$ là

A. $m = \frac{4}{3}$.

B. $m = -\frac{4}{3}$.

C. $m = -\frac{3}{4}$.

D. $\emptyset$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y' = 4(m+1)x^3 - 4mx \Rightarrow y'' = 12(m+1)x^2 - 4m$.

Để hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ thì $y'(2) = 0 \Rightarrow 32(m+1) - 8m = 0 \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$.

Với $m = -\frac{4}{3}$ thì $y''(2) = 12\left(-\frac{4}{3} + 1\right) \cdot 2^2 - 4\left(-\frac{4}{3}\right) < 0$, suy ra $x = 2$ là điểm cực đại.

Chú ý: Nếu $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ thì ta lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu đạo hàm để kiểm tra.

Bài tập 6. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}mx^2 + x$ có $x = m$ là một điểm cực trị. Tổng các giá trị của m là

A. 1.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. -1.

D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$y' = 2x^3 - 3mx + 1 \Rightarrow y'' = 6x^2 - 3m$.

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x = m \Rightarrow y'(m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

- Với $m = 1$, ta có: $y''(1) = 6 - 3 > 0$ $x = 1$ là điểm cực tiểu (cực trị) nên $m = 1$ thỏa mãn.
- Với $m = -\frac{1}{2}$, ta có: $y''\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} > 0$ $x = -\frac{1}{2}$ là điểm cực tiểu (cực trị) nên $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn.

Vậy tổng các giá trị của m thỏa mãn điều kiện trên là $1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Bài tập 7. Biết đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hai điểm cực trị là $A(0; 2)$, $B(2; -14)$. Giá trị của $y(1)$ là

- A. $y(1) = -5$. B. $y(1) = -4$. C. $y(1) = -2$. D. $y(1) = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx$.

Các điểm $A(0; 2)$, $B(2; -14)$ thuộc đồ thị hàm số nên $\begin{cases} c = 2 \\ 16a + 4b + c = -14 \end{cases} \quad (1)$.

Mặt khác, hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 2$, suy ra $32a + 4b = 0 \quad (2)$.

Từ (1); (2) ta có $y = x^4 - 8x^2 + 2$.

Dễ thấy hàm số có các điểm cực trị là $A(0; 2)$, $B(2; -14)$ nên $y = x^4 - 8x^2 + 2$ là hàm số cần tìm.

Khi đó $y(1) = -5$.

Bài tập 8. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + 3m$ có A là điểm cực đại và B , C là hai điểm cực tiểu. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = OA + \frac{12}{BC}$ là

- A. 9. B. 8. C. 12. D. 15.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m-1)x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m-1 \end{cases}$.

Hàm số có ba điểm cực trị nên $m > 1$.

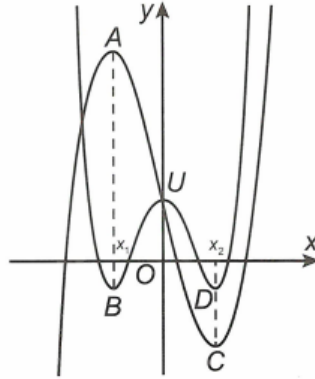
Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là $A(0; 3m)$, $B(\sqrt{m-1}; 5m - m^2 - 1)$ và $C(-\sqrt{m-1}; 5m - m^2 - 1)$. Suy ra $OA = 3m$, $BC = 2\sqrt{m-1}$.

Ta có $P = OA + \frac{12}{BC} = 3m + \frac{6}{\sqrt{m-1}} = \left[3(m-1) + \frac{3}{\sqrt{m-1}} + \frac{3}{\sqrt{m-1}} \right] + 3$

$\geq 3 + 3\sqrt[3]{3(m-1)\left(\frac{3}{\sqrt{m-1}}\right)^2} = 12$.

Dấu "=" xảy ra khi $3(m-1) = \frac{3}{\sqrt{m-1}} \Leftrightarrow m = 2$.

Bài tập 9. Cho đồ thị hàm số $(C_1): y = f(x) = x^4 + ax^2 + b$ và đồ thị hàm số $(C_2): y = g(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$ như hình vẽ dưới. Gọi B, D là hai điểm cực tiểu của (C_1) và A, C lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của (C_2) (A, C đối xứng nhau qua $U \in Oy$). Biết hoành độ của A, B bằng nhau và hoành độ của C, D bằng nhau. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $AB \leq 3$?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Phân tích: dựa vào đồ thị ta có $b = p$ và $m = 0$. Khi đó: $(C_2): y = x^3 + nx + b$

Ta cần tìm tung độ của điểm A và B (theo a).

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{-a}{2} \end{cases} \text{ và } g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-n}{3}.$$

Theo đề bài ta có $a, n < 0$ và $\frac{-a}{2} = \frac{-n}{3} \Leftrightarrow n = \frac{3}{2}a$.

Khi đó:

$$y_B = f\left(-\sqrt{\frac{-a}{2}}\right) = b - \frac{a^2}{4}; \quad y_A = g\left(-\sqrt{\frac{-n}{3}}\right) = b - a\sqrt{\frac{-a}{2}}.$$

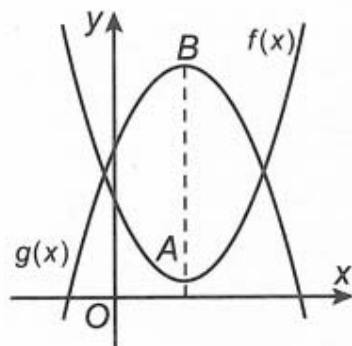
$$AB = \left| \frac{a^2}{4} + 2\frac{-a}{2} \cdot \sqrt{\frac{-a}{2}} \right| = t^4 + 2t^3 \text{ trong đó } t = \sqrt{\frac{-a}{2}} > 0.$$

$$\text{Xét } AB \leq 3 \Leftrightarrow t^4 + 2t^3 \leq 3 \Leftrightarrow t \leq 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{-a}{2}} \leq 1 \Leftrightarrow a \geq -2.$$

Do $a < 0$ nên $a \in \{-2; -1\}$.

Bài tập 10. Cho hai hàm đa thức $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị là hai đường cong như hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A , đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng một điểm cực

trị là B (với $x_A = x_B$) và $AB = \frac{7}{2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-10; 10)$ để hàm số



$y = \|f(x) - g(x)\| + m$ có đúng bảy điểm cực trị?

A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi x_1, x_2 với $x_1 < x_2$ là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ (dựa vào đồ thị đã cho, hai đồ thị chỉ có hai giao điểm đã kể trên, tức là

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}.$$

Xét $h(x) = |f(x) - g(x)| + m$.

$$\text{Ta có: } h'(x) = [f'(x) - g'(x)] \cdot \frac{f(x) - g(x)}{|f(x) - g(x)|}.$$

Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_A = x_B$. Ta có bảng biến thiên của $h(x)$ như sau

x	$-\infty$	x_1	x_A	x_2	$+\infty$			
$h'(x)$		-		+	0	-		+
$h(x)$	$+\infty$				$\frac{7}{2}+m$			$+\infty$
					m			m

Dựa vào bảng biến thiên của $h(x)$, yêu cầu bài toán trở thành $m < 0 < m + \frac{7}{2} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < m < 0$.

Do m nguyên và $m \in (-10; 10)$ nên $m \in \{-3; -2; -1\}$.

Bài tập 11. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m = \pm 1$.

B. $m = 0$.

C. $m = \pm 2$.

D. $m = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m^2 \end{cases}$.

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là $A(0; 1)$, $B(m; -m^4 + 1)$, $C(-m; -m^4 + 1)$

$\Rightarrow \overline{AB} = (m; -m^4)$, $\overline{AC} = (-m; -m^4)$, dễ thấy $AB = AC$.

Do đó tam giác ABC vuông cân tại A khi và chỉ khi $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$

$\Leftrightarrow -m^2 + m^8 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$ (do $m \neq 0$).

Bài tập 12. Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + 3m$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có góc bằng 60° thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{5}{2}; \frac{13}{5}\right)$.

B. $\left(\frac{12}{5}; \frac{5}{2}\right)$.

C. $\left(2; \frac{11}{5}\right)$.

D. $\left(\frac{11}{5}; \frac{12}{5}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y' = 4x^3 - 4(m-1)x$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m-1 \end{cases} \quad (2)$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi $m > 1$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là $A(0; 3m)$, $B(\sqrt{m-1}; 5m - m^2 - 1)$ và $C(-\sqrt{m-1}; 5m - m^2 - 1)$.

Suy ra $AB^2 = AC^2 = (m-1) + (m-1)^4$; $BC = 2\sqrt{m-1}$.

Tam giác ABC là tam giác cân tại A , có một góc bằng 60° nên là tam giác đều

$\Leftrightarrow AB = BC \Leftrightarrow (m-1) + (m-1)^4 = 4(m-1) \Leftrightarrow m = 1 + \sqrt[3]{3}$.

Bài tập 13. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 4mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có một góc bằng 30° ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y' = 8x^3 - 8mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$.

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là $A(0;1), B(\sqrt{m}; -2m^2+1), C(-\sqrt{m}; -2m^2+1)$

$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 = m + 4m^4, BC = 2\sqrt{m}.$$

Do đó tam giác ABC cân tại A .

$$\begin{aligned} + \text{ Trường hợp 1: } \widehat{BAC} = 30^\circ, \text{ ta có } \cos \widehat{BAC} &= \frac{2AB^2 - BC^2}{2AB^2} \Leftrightarrow (2 - \sqrt{3})AB^2 = BC^2 \\ &\Leftrightarrow (2 - \sqrt{3})(m + 4m^4) = 2m \\ &\Leftrightarrow 4(2 - \sqrt{3})m^3 = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Phương trình này có đúng một nghiệm thực.

$$+ \text{ Trường hợp 2: } \widehat{ABC} = 30^\circ, \text{ khi đó}$$

$$BC = \sqrt{3}.AB \Leftrightarrow 3AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow 3m + 12m^4 = 4m \Leftrightarrow 12m^3 = 1.$$

Phương trình này có đúng một nghiệm thực.

Bài tập 14. Cho đồ thị hàm số $(C): y = x^4 - 2(m^2 + 1)x^2 + m^4$. Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của (C) và S_1, S_2 lần lượt là phần diện tích phía trên và phía dưới trục hoành của tam giác ABC . Có bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{3}$?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 4(m^2 + 1)x.$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = m^4 \\ x^2 = m^2 + 1 \Rightarrow y = -2m^2 - 1 \end{cases}$$

Hàm số luôn có ba điểm cực trị với mọi tham số m .

Gọi $A(0; m^4), B(\sqrt{m^2 + 1}; -2m^2 - 1), C(-\sqrt{m^2 + 1}; -2m^2 - 1)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$$\text{Ta có } OA = m^4, h = d(A; (BC)) = m^4 + 2m^2 + 1$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{S_{ABC} - S_1}{S_1} = 3 \Leftrightarrow \frac{S_{ABC}}{S_1} = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{h}{OA}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{m^4 + 2m^2 + 1}{m^4} = 2$$

$$\Leftrightarrow m^4 - 2m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{1 + \sqrt{2}}.$$

Vậy có hai giá trị của tham số thỏa mãn đề bài.

Lưu ý: Do hai tam giác đồng dạng nên tỉ lệ diện tích bằng bình phương tỉ lệ đồng dạng, với tỉ lệ đồng dạng là tỉ lệ đường cao.

Bài tập 15. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + m(m+2)x - \frac{m^3}{3}$ có đồ thị (C) với m là tham số. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C) và parabol (P): $y = x^2 - 2mx + 8$ có chung một điểm cực trị. Tổng bình phương tất cả các phần tử của S là

- A. 8. B. 10. C. 16. D. 18.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

+ (P) có điểm cực trị là $M(m; -m^2 + 8)$.

+ $f'(x) = x^2 - 2(m+1)x + m(m+2)$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \Rightarrow A(m; m^2) \\ x = m+2 \Rightarrow B(m+2; y_B) \neq M \end{cases}$$

Vì hai đồ thị hàm số có chung một điểm cực trị nên $A \equiv M \Leftrightarrow m^2 = -m^2 + 8 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Bài tập 16. Biết hai hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x - 1$ và $g(x) = -x^3 + bx^2 - 3x + 1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |a| + |b|$ là

- A. $\sqrt{30}$. B. $2\sqrt{6}$. C. $3 + \sqrt{6}$. D. $3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Giả sử điểm cực trị chung của $f(x)$ và $g(x)$ là $x_0 \neq 0$, suy ra

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ g'(x_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0^2 + 2ax_0 + 2 = 0 \\ -3x_0^2 + 2bx_0 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \left(-3x_0 - \frac{2}{x_0} \right) \\ b = \frac{1}{2} \left(3x_0 + \frac{3}{x_0} \right) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } P = |a| + |b| = \frac{1}{2} \left(\left| 3x_0 + \frac{2}{x_0} \right| + 3 \left| x_0 + \frac{1}{x_0} \right| \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(6|x_0| + \frac{5}{|x_0|} \right) \stackrel{AM-GM}{\geq} \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{6|x_0| \cdot \frac{5}{|x_0|}} = \sqrt{30}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } 6|x_0| = \frac{5}{|x_0|} \Leftrightarrow |x_0| = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

$$\text{Khi đó } |a| = \frac{9\sqrt{30}}{20} \text{ và } |b| = \frac{11\sqrt{30}}{20}.$$

Chú ý: Khi A và B cùng dấu thì $|A+B| = |A| + |B|$.
Hiển nhiên x_0 và $\frac{1}{x_0}$ cùng dấu.

Bất đẳng thức AM - GM :

$$\frac{x+y}{2} \geq 2\sqrt{xy}, \forall x, y \geq 0$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Dạng 6. Cực trị hàm phân thức

1. Phương pháp

Xét $y = \frac{u(x)}{v(x)}$. Ta có $y' = \frac{u'(x).v(x) - v'(x).u(x)}{v^2(x)}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cực trị. Khi đó $y'(x_0) = 0$.

Suy ra $u'(x_0).v(x_0) - v'(x_0).u(x_0) = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$.

+ Đường cong qua các điểm cực trị (nếu có) của đồ thị hàm số $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ là $y = \frac{u'(x)}{v'(x)}$.

+ Nói riêng, đường thẳng qua các điểm cực trị (nếu có) của đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ là

$$y = \frac{2ax + b}{d}.$$

Chú ý:

$$\left(\frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} \right)' = \frac{adx^2 + 2aex + \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix}}{(dx + e)^2} \cdot \left(\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{(a_2x^2 + b_2x + c_2)^2}.$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Giá trị của m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 3m - 1}{x}$ có cực trị là

A. $m > \frac{1}{3}$.

B. $m \geq \frac{1}{3}$.

C. $m < \frac{1}{3}$.

D. $m \leq \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện $x \neq 0$. Ta có $y' = \frac{x^2 - 3m + 1}{x^2}$.

Hàm số có cực trị khi $x^2 - 3m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow 3m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}.$$

Bài tập 2. Giá trị của m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 1$ là

A. $m = 2$.

B. $m = -1$.

C. $m = -2$.

D. $m = 1$.

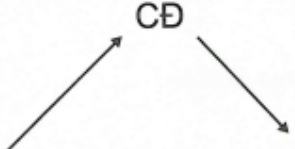
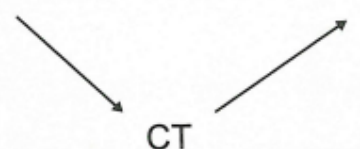
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện: $x \neq -m$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m - 1 \\ x = -m + 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-m-1$	$-m$	$-m+1$	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y						

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x = 1 \Leftrightarrow -m - 1 = 1 \Leftrightarrow m = -2$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = x + p + \frac{q}{x+1}$ (với p, q là tham số thực). Biết hàm số đạt cực đại tại $x = -2$, giá trị cực đại bằng -2 . Tổng $S = p + 2q$ bằng

- A. $S = 2$. B. $S = 0$. C. $S = 1$. D. $S = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện: $x \neq -1$.

Ta có: $y' = 1 - \frac{q}{(x+1)^2}$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$, giá trị cực đại bằng -2 nên

$$\begin{cases} 1 - q = 0 \\ -2 + p - q = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 1 \\ p = 1 \end{cases}.$$

Thử lại $p = q = 1$ thỏa mãn nên $S = 1 + 2 = 3$.

Bài tập 4. Giá trị của m để khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx}{1 - x}$ bằng 10 là

- A. $m = 10$. B. $m = 8$. C. $m = 4$. D. $m = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện: $x \neq 1$.

Ta có $y' = \frac{-x^2 + 2x + m}{(1-x)^2}$.

Hàm số có hai cực trị khi $-x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 2 + m \neq 0 \\ \Delta' = 1 + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1.$$

Khi đó theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \end{cases}$.

Đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị là $(d): y = -2x - m$.

Tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị là $A(x_1; -2x_1 - m)$, $B(x_2; -2x_2 - m)$

$$\Rightarrow \overline{AB} = (x_2 - x_1; 2x_1 - 2x_2).$$

Theo yêu cầu của đề bài ta có

$$(x_1 - x_2)^2 + 4(x_1 - x_2)^2 = 100 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 20$$

$$\Leftrightarrow 4 + 4m = 20$$

$$\Leftrightarrow m = 4.$$

Bài tập 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$ có hai điểm cực trị và tất cả các điểm cực trị đều thuộc hình tròn tâm O , bán kính 6?

A. 10.

B. 8.

C. 9.

D. 7.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện: $x \neq 0$. Ta có: $y' = m - \frac{1}{x^2}$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi $m > 0$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{m}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{m}} \end{cases}$.

Tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị là $A\left(\frac{1}{\sqrt{m}}; 2\sqrt{m}\right)$, $B\left(-\frac{1}{\sqrt{m}}; -2\sqrt{m}\right)$.

Theo đề bài ta có $OA^2 = OB^2 = \frac{1}{m} + 4m \leq 36 \Leftrightarrow 4m^2 - 36m + 1 \leq 0$.

Do $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ nên $m \in \{1; 2; 3; \dots; 8\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Bài tập 6. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - |m|x + 4}{x - |m|}$ có hai điểm cực trị A , B và ba

điểm A , B , $C(4; 2)$ phân biệt thẳng hàng?

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện: $x \neq |m|$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 - 2|m|x + m^2 - 4}{(x - |m|)^2} = \frac{(x - |m|)^2 - 4}{(x - |m|)^2}.$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow (x - |m|)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = |m| + 2 \Rightarrow y = |m| + 4 \\ x = |m| - 2 \Rightarrow y = |m| - 4 \end{cases}$$

Do $|m| + 2 \neq |m| - 2$, $\forall m$ nên $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Do đó đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị. Khi đó đường thẳng qua hai điểm cực trị là $(AB): y = 2x - |m|$. Ba điểm A , B , $C(4; 2)$ phân biệt thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\begin{cases} C(4; 2) \in (AB) \\ |m| + 2 \neq 4 \\ |m| - 2 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| = 6 \\ |m| \neq 2 \\ |m| \neq 6 \end{cases}$$

Suy ra không có giá trị nào của m thỏa mãn đề bài.

Bài tập 7. Cho hàm số $(C): y = \frac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x+2}$. Có bao nhiêu giá trị thực của m để đồ thị

hàm số (C) có điểm cực đại, cực tiểu A , B sao cho tam giác OAB vuông?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện: $x \neq -2$. Ta có $y' = \frac{x^2 + 4x + 4 - m^2}{(x+2)^2}$.

$$\text{Ta có } x^2 + 4x + 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 2 \\ x = -m - 2 \end{cases}$$

Hàm số có điểm cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị là

$$A(-m-2; -2), B(m-2; 4m-2) \Rightarrow \overline{AB} = (2m; 4m)$$

Dễ thấy $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{AB} \neq \vec{0}$.

Trường hợp 1: Tam giác OAB vuông tại O

$$\Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0 \Leftrightarrow -m^2 - 8m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = -4 \pm 2\sqrt{6} \text{ (thỏa mãn)}$$

Trường hợp 2: Tam giác OAB vuông tại $A \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{AB} = 0$

$$\Leftrightarrow 2m(-m-2) - 2 \cdot 4m = 0 \Leftrightarrow -m-2-4=0 \Leftrightarrow m=-6 \text{ (thỏa mãn)}$$

Trường hợp 3: Tam giác OAB vuông tại $B \Leftrightarrow \overline{OB} \cdot \overline{AB} = 0$

$$\Leftrightarrow 2m(m-2) + (4m-2)4m = 0 \Leftrightarrow m-2+2(4m-2)=0 \Leftrightarrow m=\frac{2}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy có bốn giá trị thực của m thỏa mãn đề bài.

Bài tập 8. Cho hàm số $(C): y = \frac{x^2 - mx - 1}{x^2 + 1}$ với m là tham số. Giá trị thực của m để đồ thị hàm số (C)

có hai điểm cực trị A , B sao cho đường thẳng (AB) đi qua điểm $M(-1; 2)$ là

A. $m = 8$.

B. $m = 6$.

C. $m = 4$.

D. $m = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = \frac{mx^2 + 4x - m}{(x^2 + 1)^2}$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $mx^2 + 4x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 4 + m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0$.

Đường cong qua hai điểm cực trị có phương trình là $y = \frac{2x - m}{2x}$.

Ta viết phương trình đường cong dưới dạng $y = \frac{2x - m + k(mx^2 + 4x - m)}{2x}$.

Ta chọn k sao cho nghiệm của mẫu là nghiệm của tử để có thể rút gọn thành hàm số bậc nhất. Vì $x = 0$ là nghiệm của mẫu, nên thế $x = 0$ vào tử ta được $-m + k(-m) = 0 \Rightarrow k = -1$.

Với $k = -1$: $y = \frac{2x - m - mx^2 - 4x + m}{2x} = -\frac{m}{2}x - 1 \Rightarrow (AB): y = -\frac{m}{2}x - 1$.

Điểm $M(-1; 2) \in (AB) \Rightarrow 2 = \frac{m}{2} - 1 \Leftrightarrow m = 6$ (thỏa mãn).

Dạng 7: Cực trị của hàm chứa căn

Bài tập 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = -2x + 2 + m\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ có cực tiểu?

A. 7.

B. 16.

C. 8.

D. 14.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = -2 + m \cdot \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$ và $y'' = \frac{m}{\sqrt{(x^2 - 4x + 5)^3}}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-2)^2 + 1} = m(x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} m(x-2) > 0 \\ (m^2 - 4)(x-2)^2 = 4 \end{cases} \quad (1)$

Hàm số có cực tiểu khi và chỉ khi (1) có nghiệm $\Rightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$.

Khi đó, (1) có hai nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{m^2 - 4}}$.

- Với $m > 2$, thì $x_1 = 2 + \frac{2}{\sqrt{m^2 - 4}}$ thỏa mãn $y'(x_1) = 0$ và $y''(x_1) > 0$,

suy ra x_1 là điểm cực tiểu, nhận $m > 2$.

Chú ý: Để làm trắc nghiệm ta có thể làm như sau: Hàm số đạt cực tiểu khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y'' > 0 \end{cases}$$

- Với $m < -2$, thì $x_2 = 2 - \frac{2}{\sqrt{m^2 - 4}}$ thỏa mãn $y'(x_2) = 0$ và $y''(x_2) < 0$,
suy ra x_2 là điểm cực đại, loại, do $m < -2$.

Do m nguyên, $m > 2$ và $m \in [-10; 10]$ nên $m \in \{3; 4; \dots; 9; 10\}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(x-2) > 0 \\ (m^2 - 4)(x-2)^2 = 4 \\ m > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m > 0, x > 2 \\ m^2 - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow m > 2$$

Bài tập 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x + m\sqrt{x^2 + 1}$ có điểm cực trị và tất cả các điểm cực trị thuộc hình tròn tâm O , bán kính $\frac{\sqrt{82}}{3}$?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 1 + m \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}, (x \neq 0)$.

Xét $g(x) = -\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} > 0, \forall x \neq 0$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	1	$+\infty$	$-\infty$

Hàm số có cực trị khi $m \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1]$.

Gọi $A(a; b)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Khi đó $m = -\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}$ và $b = a - \frac{a^2 + 1}{a} = -\frac{1}{a} \Rightarrow A\left(a; -\frac{1}{a}\right)$.

Ta có: $OA = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} \leq \frac{\sqrt{82}}{3} \Rightarrow \frac{1}{9} \leq a^2 \leq 9$.

$$\text{Vậy } |m| = \left| \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} \right| = \sqrt{1+\frac{1}{a^2}} \in \left[\frac{\sqrt{10}}{3}; \sqrt{10} \right].$$

Kết hợp với các điều kiện $m \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1]$, ta được $m \in \{-3; -2; 2; 3\}$.

Bài tập 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x + \frac{mx}{\sqrt{x^2+2}}$ có điểm cực trị và tất cả các điểm cực trị thuộc hình tròn tâm O , bán kính $\sqrt{68}$?

A. 16.

B. 10.

C. 12.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y = 2x + \frac{mx}{\sqrt{x^2+2}} \Rightarrow y' = 2 + \frac{2m}{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} = -\sqrt[3]{m}.$$

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi $-\sqrt[3]{m} > \sqrt{2} \Leftrightarrow m < -2\sqrt{2}$.

Gọi $A(a; b)$ ($a \neq 0$) là điểm cực trị của đồ thị hàm số, khi đó:

$$\sqrt{a^2+2} = -\sqrt[3]{m} \text{ và } b = 2a + \frac{ma}{\sqrt{a^2+2}} = 2a + \frac{ma}{-\sqrt[3]{m}} = a\left(2 - \sqrt[3]{m^2}\right) = a(-a^2) = -a^3.$$

$$\text{Theo đề bài ta có } OA \leq \sqrt{68} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq \sqrt{68} \Leftrightarrow a^2 + a^6 \leq \sqrt{68} \Leftrightarrow a^2 \leq 4.$$

Ta có:

$$0 < a^2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} < \sqrt{a^2+2} \leq \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{2} < -\sqrt[3]{m} \leq \sqrt{6} \Leftrightarrow -6\sqrt{6} < m \leq -2\sqrt{2}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $-6\sqrt{6} < m \leq -2\sqrt{2}$ nên $m \in \{-14; -13; \dots; -4; -3\}$.

Vậy có 12 giá trị của tham số m thỏa mãn đề bài.

Chú ý: Hàm số không thể đạt cực trị tại điểm $x = 0$.

Dạng 8: Cực trị của hàm bậc cao và hàm lượng giác

Bài tập 1. Biết rằng tồn tại các số thực a, b, c sao cho hàm số $f(x) = x^6 + ax^4 + bx^2 + 3x + c$ đạt cực trị tại điểm $x = 2$. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = -2$ là

A. 0.

B. -3.

C. 3.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 6x^5 + 4ax^3 + 2bx + 3.$$

$$\text{Hàm số đạt cực trị tại điểm } x = 2 \text{ nên } f'(2) = 0 \Rightarrow 6.2^5 + 4.a.2^3 + 4b + 3 = 0.$$

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = -2$ là

$$f'(-2) = 0 \Rightarrow -6.2^5 - 4.a.2^3 - 4b + 3 = 3 - (6.2^5 + 4.a.2^3 + 4b) = 6.$$

Bài tập 2. Biết rằng tồn tại các số thực a, b, c sao cho hàm số $f(x) = a.\sin^2 x - b.\cos 3x + x + c$ đạt cực trị tại điểm $x = -\frac{\pi}{6}$. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{6}$ là

- A. 0. B. -1. C. 2. D. -2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $f'(x) = a.\sin 2x + 3b.\sin 3x + 1$.

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x = -\frac{\pi}{6}$, suy ra $f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow -a.\sin \frac{\pi}{3} - 3b.\sin \frac{\pi}{2} + 1 = 0$.

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{6}$ là

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = a.\sin \frac{\pi}{3} + 3b.\sin \frac{\pi}{2} + 1 = 2.$$

Bài tập 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-4)x^5 - (m^2-16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$?

- A. 8. B. Vô số. C. 7. D. 9.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $y' = 8x^7 + 5(m-4)x^4 - 4(m^2-16)x^3 = x^3[8x^4 + 5(m-4)x - 4(m^2-16)] = x^3.g(x)$

- Với $g(x) = 8x^4 + 5(m-4)x - 4(m^2-16)$. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

+ Khi $m = 4$ ta có $y' = 8x^7 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực tiểu.

+ Khi $m = -4$ ta có $y' = x^4(8x^3 - 40) \Rightarrow x = 0$ không là điểm cực tiểu.

- Nếu $m^2 - 16 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 4 \Rightarrow g(0) \neq 0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$

$\Leftrightarrow$ Đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow -4(m^2 - 16) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4 \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}.$$

Tổng hợp các trường hợp ta có: $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có tám giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Bài tập 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. Vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3 = x^3 \cdot h(x)$ với $h(x) = 8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)$.

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.
 - Khi $m = 2$ thì $y' = 8x^7 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực tiểu nên $m = 2$ thỏa mãn.
 - Khi $m = -2$ thì $y' = x^4(8x^3 - 20) \Rightarrow x = 0$ không là điểm cực tiểu.
- Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2 \Rightarrow h(0) \neq 0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$ khi và chỉ khi giá trị đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x = 0$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} h(x) < 0$$

$$\Rightarrow -4(m^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2 \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}.$$

Tổng hợp các trường hợp ta có $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có bốn giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Dạng 9: Tìm cực trị của hàm số chứa trị tuyệt đối

1. Phương pháp

Bước 1. Tập xác định và tính đạo hàm

Đạo hàm hàm chứa trị tuyệt đối với công thức:

$$(|u|)' = (\sqrt{u^2})' = \frac{u' \cdot u}{|u|}.$$

Chú ý: $|u| = \begin{cases} u & \text{khi } u \geq 0 \\ -u & \text{khi } u < 0. \end{cases}$

Bước 2. Giải phương trình đạo hàm bằng 0 và tìm những điểm làm cho đạo hàm không xác định (nhưng hàm số xác định tại những điểm đó).

Bước 3. Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu đạo hàm.

2. Bài tập:

Bài tập 1. Số điểm cực đại của hàm số $f(x) = x - 2\sqrt{x^2 - 2|x| + 2}$ là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(x) = 1 - 2 \frac{x - |x|}{\sqrt{x^2 - 2|x| + 2}}$

Hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

- Khi $x < 0$ ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 2x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x^2 + 6x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{3}}{3} = x_1.$$

- Khi $x > 0$ ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x^2 - 6x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} = x_2.$$

Bảng xét dấu y' :

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$+$	0	$-$	0

Vậy hàm số có hai điểm cực đại.

Bài tập 2. Số điểm cực trị của hàm số $y = (x+1)|x-2|$ là

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có đồ thị của hàm số $y = (x+1)(x-2)$ như sau.

$$\text{Vì } y = (x+1)|x-2| = \begin{cases} (x+1)(x-2), & x \geq 2 \\ -(x+1)(x-2), & x < 2 \end{cases}$$

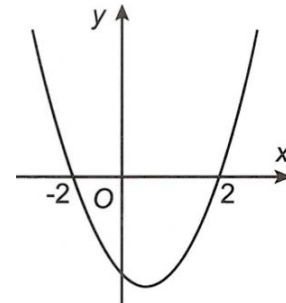
nên để vẽ đồ thị hàm số đã cho, ta giữ nguyên đồ

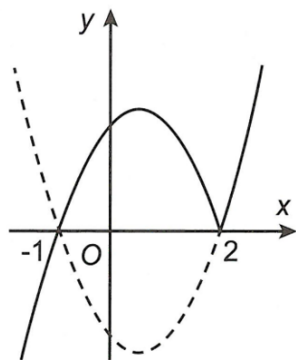
thị $y = (x+1)(x-2)$ khi $x \geq 2$ và lấy đối xứng qua

trục hoành phần đồ thị $y = (x+1)(x-2)$ ứng với

$x < 2$.

Dễ thấy hàm số $y = (x+1)|x-2|$ có hai điểm cực trị (xem hình vẽ dưới đây):





Dạng 10: Tìm cực trị của hàm số trị tuyệt đối nếu biết bảng biến thiên hoặc đồ thị

1. Phương pháp

Khi cho trước bảng biến thiên của hàm số, tìm cực trị của hàm số chứa giá trị tuyệt đối:

Ta dùng các phép biến đổi đồ thị chứa giá trị tuyệt đối để lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu.

Chú ý: Cách nhằm nhanh số điểm cực trị của hàm số.

Bước 1. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Bước 2. Tìm số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$

Bước 3. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là tổng số điểm của cả hai bước trên.

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$.

Hướng dẫn giải

Để thấy trực hoành cắt đồ thị $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Bảng biến thiên của $y = |f(x)|$:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$ f(x) $	$+\infty$	3	1	$+\infty$

Suy ra hàm số có 5 điểm cực trị.

Nhắm nhanh số cực trị

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Để thấy trực hoành cắt đồ thị $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt. Số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$ là 3.

Suy ra hàm số có năm điểm cực trị.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$				$-\infty$

Chú ý: Có thể nhầm nhanh số điểm cực trị như sau:

Số điểm cực trị của hàm $y = f(|x|)$ bằng hai lần số điểm cực trị dương của hàm số $y = f(x)$ rồi cộng thêm 1.

Số cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là

- A. 5. B. 4. C. 3. D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Khi $x \geq 0$ thì $f(|x|) = f(x)$ nên bảng biến thiên của $y = f(x)$ trên

$[0; +\infty)$ cũng chính là bảng biến thiên của $y = f(|x|)$ trên $[0; +\infty)$.

Do đồ thị $y = f(|x|)$ nhận trục tung làm trục đối xứng nên ta có bảng

biến thiên của $y = f(|x|)$ trên $\mathbb{R}$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$						$-\infty$

Suy ra hàm số có 5 điểm cực trị.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		-2		3		-4	$+\infty$

Biết $f(0) + f(0,5) \leq 0$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(|x|)|$ là

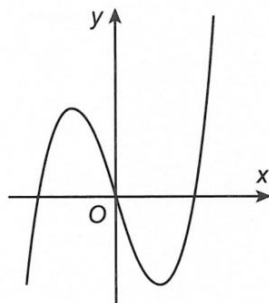
- A. 8. B. 9. C. 10. D. 11.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Hàm số đã cho đồng biến trên $(-1;1)$ nên $f(0) < f(0,5)$.

Bài tập 3. Cho hàm số $f(x) = x(x^2 - 3)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x(x + \sqrt{3})|x - \sqrt{3}|$ và $h(x) = (x + \sqrt{3})|x^2 - x\sqrt{3}|$ lần lượt là m, n .

Giá trị của $m + n$ là

- A. 7. B. 5. C. 4. D. 6.

Hướng dẫn giải

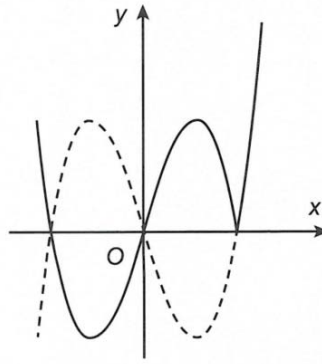
Chọn A.

+) Xét $g(x) = x(x + \sqrt{3})|x - \sqrt{3}| = \begin{cases} x(x^2 - 3), & x \geq \sqrt{3} \\ -x(x^2 - 3), & x < \sqrt{3} \end{cases}$, suy ra đồ thị của $g(x)$ gồm hai phần được suy

ra từ đồ thị ban đầu như sau:

+ Phần 1: là đồ thị hàm $f(x)$ tương ứng với $x \geq \sqrt{3}$.

+ Phần 2: là phần đối xứng với phần đồ thị hàm $f(x)$ qua trục Ox khi $x < \sqrt{3}$. Đồ thị hàm số $g(x)$ là đường nét liền ở hình dưới đây.



Từ đồ thị hàm số $g(x)$, ta có số điểm cực trị là 3 hay $m = 3$.

+) Xét $h(x) = (x + \sqrt{3})|x^2 - x\sqrt{3}| = \begin{cases} x(x^2 - 3), & x \in (-\infty; \sqrt{3}] \cup [0; +\infty) \\ -x(x^2 - 3), & x \in (0; \sqrt{3}). \end{cases}$

Suy ra đồ thị của $h(x)$ gồm 2 phần được suy ra từ đồ thị ban đầu như sau:

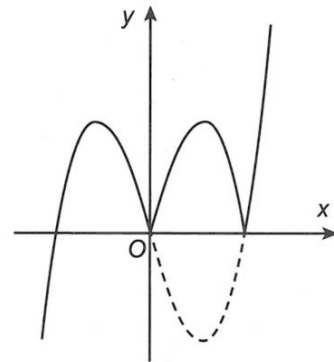
+ Phần 1: đồ thị hàm $f(x)$ ứng với $x \geq \sqrt{3}$ và với $x \leq 0$.

+ Phần 2: là phần đối xứng với phần đồ thị hàm $f(x)$ khi $0 < x < \sqrt{3}$.

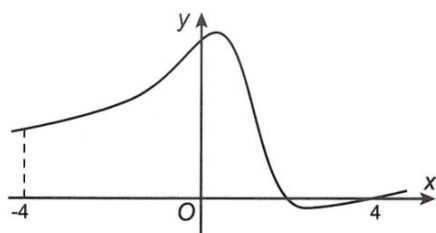
Đồ thị hàm số $h(x)$ là đường nét liền ở hình dưới đây.

Từ đồ thị hàm số $h(x)$, ta có số điểm cực trị là 4 hay $n = 4$.

Vậy $m + n = 3 + 4 = 7$.



Bài tập 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Chú ý:

Đề bài hỏi số điểm cực trị trong khoảng $(-4; 4)$ nên các điểm $x = \pm 4$ không là điểm cực trị.

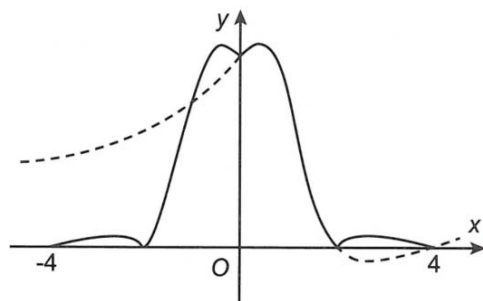
Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(|x|)|$ trên $(-4; 4)$ là

- A. 5. B. 7. C. 9. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có đồ thị $y = |f(|x|)|$ như sau:



Vậy số điểm cực trị của hàm số $y = |f(|x|)|$ trên $(-4; 4)$ là 7.

Dạng 11: Một số bài toán sử dụng phép dịch chuyển đồ thị

1. Phương pháp

Cho đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$

- Đồ thị hàm số $(C_1): y = f(x - a)$ có được bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số (C) qua bên phải a đơn vị nếu $a > 0$ và dịch qua trái a đơn vị nếu $a < 0$.
- Đồ thị hàm số $(C_2): y = f(x) + b$ có được bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số (C) lên trên b đơn vị nếu $b > 0$ và dịch xuống dưới b đơn vị nếu $b < 0$.

Chú ý : Khi tịnh tiến đồ thị lên – xuống, trái – phải thì số điểm cực trị của hàm số (C) , (C_1) , (C_2) là bằng nhau.

Chú ý : Số điểm cực trị của các hàm số sau là bằng nhau:

$$y = m|f(|x + p| + q) + t| + n \quad (1);$$

$$y = m|f(|x+p|+q)+t| \quad (2);$$

$$y = |f(|x+p|+q)+t| \quad (3);$$

$$y = |f(|x|+q)+t| \quad (4);$$

Từ (1) qua (2): dịch chuyển lên xuống không làm thay đổi số điểm cực trị.

Từ (2) qua (3): phóng to và thu nhỏ không làm thay đổi số điểm cực trị.

Từ (3) qua (4): dịch trái phải không làm thay đổi số điểm cực trị.

Để tìm số điểm cực trị của hàm số, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Tìm hàm số có cùng số điểm cực trị với hàm ban đầu.

Bước 2. Dựa vào đồ thị, bảng biến thiên, bảng xét dấu đạo hàm của đề bài mà suy ra số điểm cực trị của hàm tìm được ở bước 1.

2. Bài tập:

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 7	↗ $+\infty$	

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x+3)-9|$ là

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Số điểm cực trị của các hàm số sau đây là như nhau:

$y = |f(x+3)-9|$; $y = |f(x)-9|$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)-9$ là

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-	-	0	+
y	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ -2	↗ $+\infty$	

Suy ra số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)-9|$ là 4.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = 2|f(x-1)-1|+1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Số điểm cực trị của các hàm số sau đây là như nhau:

$$y = 2|f(x-1)-1|+1; y = 2|f(x-1)-1|; y = |f(x-1)-1|; y = |f(x)-1|$$

Hàm số $y = f(x)-1$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$+\infty$	-1	$+\infty$

Suy ra số điểm cực trị của hàm $y = |f(x)-1|$ là 4.

Vậy hàm số $y = 2|f(x-1)-1|+1$ có 4 điểm cực trị.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = |2f(x+2)-1|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5.

B. 9.

C. 7.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Số điểm cực trị của các hàm số sau đây là như nhau:

$$y = |2f(x+2)-1|; y = \left|f(x+2)-\frac{1}{2}\right|; y = \left|f(x)-\frac{1}{2}\right|$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x) - \frac{1}{2}$ là

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$	$-2,5$	$+\infty$	$0,5$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Từ đó suy ra số cực trị của hàm số $y = \left| f(x) - \frac{1}{2} \right|$ là 9 nên số cực trị của hàm số $y = |2f(x+2) - 1|$ cũng là 9.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	3	$-\infty$

Hàm số $y = 2f(|x-2|) - 3$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Số điểm cực trị của các hàm số sau đây là như nhau:

$$y = 2f(|x-2|) - 3; y = 2f(|x-2|); y = f(|x-2|); y = f(|x|)$$

(vì ba hàm đầu có số nghiệm của đạo hàm là như nhau; từ hàm thứ tư, ta dịch qua phải 2 đơn vị sẽ được đồ thị hàm thứ ba).

Từ bảng biến thiên đã cho, suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x|)$:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	$f(0)$	3	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số $y = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

Do đó hàm số $y = 2f(|x-2|) - 3$ có 3 điểm cực trị.

Bài tập 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		3		
	$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$

Biết $f(0).f(1) < 0$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |2f(|x-2|) - 3|$ là

A. 5.

B. 9.

C. 7.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Quan sát bảng biến thiên, rõ ràng hàm số đã cho đồng biến trên $(-1; 3)$, suy ra $f(0) < f(1)$. Lại do $f(0).f(1) < 0$ nên $f(0) < 0 < f(1)$.

Tương tự như ở Bài tập 4, số điểm cực trị của hàm $y = |2f(|x-2|) - 3|$ bằng với số cực trị của hàm $y = |f(|x|)|$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x|)$ là:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$								

Đến đây, ta dễ dàng suy ra được số điểm cực trị của hàm $y = |f(|x|)|$ là 7.

Vậy hàm số $y = |2f(|x-2|) - 3|$ có 7 điểm cực trị.

Chú ý: Nếu $f(x) \geq 0$ thì hàm số $y = |2f(|x-2|) - 3|$ chỉ có 5 điểm cực trị.

Bài tập 6. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y = 3f(|x| - 2) + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$	0	1	5	$+\infty$	
$f'(x-2)$		+		+	0	-
$f(x-2)$			$+\infty$		3	
	$-\infty$			$-\infty$		$-\infty$

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Số điểm cực trị của các hàm số sau đây là như nhau:

$$y = 3f(|x|-2)+1; y = 3f(|x|-2) \text{ và } y = f(|x|-2).$$

Để vẽ được bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $y = f(|x|-2)$, ta dịch bảng biến thiên (đồ thị) của hàm số $y = f(x)$ qua phải 2 đơn vị rồi lấy đối xứng phần bên phải trục Oy qua Oy (bỏ phần bên trái Oy).

Sau đây lần lượt là bảng biến thiên của $y = f(x-2)$ và $y = f(|x|-2)$

x	$-\infty$	0	1	5	$+\infty$	
$f'(x-2)$		+		+	0	-
$f(x-2)$			$+\infty$		3	
	$-\infty$			$-\infty$		$-\infty$

x	$-\infty$	-5	-1	0	1	5	$+\infty$					
$f'(x -2)$		+	0	-		-	0	+		+	0	-
$f(x -2)$			3		$+\infty$		$+\infty$		3		$-\infty$	
	$-\infty$			$-\infty$		$f(-2)$		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$

Vậy hàm số ban đầu có 3 điểm cực trị.

Dạng 12: Định tham số để hàm số chứa dấu trị tuyệt đối có n điểm cực trị

1. Phương pháp

Xét bài toán: Định tham số để đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ hoặc $y = |f(|x|)|$ có n điểm cực trị.

Bước 1. Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

Bước 2. Dựa vào bảng biến thiên, suy ra tham số thỏa mãn yêu cầu đề bài

2. Bài tập

Bài tập 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-5; 5]$ để hàm số **Lời bình:** Ta có thể nhìn

$y = |x^3 - 6x^2 + (9-m)x + 2m - 2|$ có 5 điểm cực trị?

A. 6. B. 8 C. 5. D. 7.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét $f(x) = x^3 - 6x^2 + (9-m)x + 2m - 2$

Cho $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + (9-m)x + 2m - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 2 - mx + 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x + 1 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x + 1 - m = 0 \end{cases}$$

Hàm số $y = |x^3 - 6x^2 + (9-m)x + 2m - 2|$ có 5 điểm cực trị khi $f(x) = 0$

có 3 nghiệm phân biệt và chỉ khi $x^2 - 4x + 1 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - (1-m) > 0 \\ 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3.$$

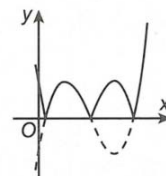
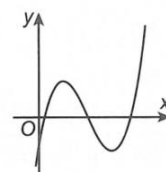
Do m nguyên $m \in [-5; 5]$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Vậy có 8 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

rõ những kết luận này từ việc biến đổi đồ thị.

Từ đồ thị $y = f(x)$ suy

ra đồ thị $y = |f(x)|$



Bài tập 2. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số

$y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 5 điểm cực trị.

A. $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$. B. $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$.

C. $m \in (1; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; 0]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét $f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5$.

Suy ra $f'(x) = 3x^2 - 2(2m+1)x + 3m$.

Hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

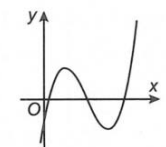
hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt dương

Lời bình: Ta có thể nhìn

rõ những kết luận này từ việc biến đổi đồ thị.

Từ đồ thị $y = f(x)$ suy

ra đồ thị $y = f(|x|)$.



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (2m+1)^2 - 9m > 0 \\ 2m+1 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 5m + 1 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 0 < m < \frac{1}{4} \end{cases}$$

Bài tập 3. Có bao nhiêu số nguyên của tham số $m \in (-2021; 2020)$ để hàm số $f(x) = x^2 - 2m|x - m + 2020| + 2021$ có 3 điểm cực trị?

A. 1009.

B. 2020.

C. 2019.

D. 1008

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$f'(x) = 2x - 2m \frac{x - m + 2020}{|x - m + 2020|} = \begin{cases} 2x - 2m, & x - m + 2020 > 0 \\ 2x + 2m, & x - m + 2020 < 0. \end{cases}$$

Dễ thấy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = m - 2020$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2m = 0 \\ x - m + 2020 > 0 \\ 2x + 2m = 0 \\ x - m + 2020 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -m \\ 2m - 2020 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -m, & m > 1010. \end{cases}$$

Nếu $m \leq 1010$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = m$ và không có đạo hàm tại điểm $x = m - 2020$ nên không có đủ 3 điểm cực trị. Do đó loại trường hợp này.

Khi $m > 1010$, ta có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	$-m$	$m-2020$	m	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	-	0	+

Vậy hàm số có 3 điểm cực trị với $m > 1010$.

Mà $m \in (-2021; 2020)$ nên $m \in \{1011; 1012; \dots; 2019\}$.

Vậy có 1009 số thỏa mãn đề bài.

Bài tập 4. Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 2$ với m, n là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} m + n < 1 \\ 2m - n > 5 \end{cases}$. Số điểm

cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ f(-2) = -8 + 4m - 2n - 2 = 2(2m - n - 5) > 0 \\ f(1) = 1 + m + n - 2 = m + n - 1 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot f(-2) < 0 \\ f(-2) \cdot f(1) < 0 \\ f(1) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0 \end{cases}$$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 3 nghiệm. Mà $f(x) = 0$ là phương trình bậc 3 nên có tối đa 3 nghiệm. Vậy $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y = |f(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị.

Bài tập 5. Cho hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 + mx\sqrt{x^2 + 1} \right|$ với m là tham số thực. Đồ thị của hàm số đã cho có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx\sqrt{x^2 + 1}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = x^2 + m \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{x^2 \sqrt{x^2 + 1}}{2x^2 + 1} = g(x)$.

Ta có $g'(x) = \frac{x(2x^4 - 3x^2 + 2)}{(2x^2 + 1)^2 \sqrt{x^2 + 1}}$. Bảng biến thiên $g(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f'(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm khác 0 khi $m < 0$. Do hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x) = 0$ có tối đa 3 nghiệm phân biệt. Nếu tồn tại giá trị của tham số m sao cho phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt thì hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 + mx\sqrt{x^2 + 1} \right|$ có 5 điểm cực trị.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -3m\sqrt{x^2 + 1} \end{cases} \quad (2)$

Khi $m < 0$ thì $(2) \Leftrightarrow x^4 - 9m^2x^2 - 9m^2 = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt nếu $m < 0$.

Vậy số điểm cực trị tối đa của hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 + mx\sqrt{x^2 + 1} \right|$ là 5.

Bài tập 6. Có bao nhiêu số nguyên của $m \in [0; 2021]$ để hàm số $y = |x|^3 + (m-1)x$ có đúng một điểm cực trị?

A. 2021.

B. 2022.

C. 21.

D. 20.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta sẽ chứng minh hàm số trên luôn có đúng 1 điểm cực trị với mọi tham số m .

Hiển nhiên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = \frac{3x^3}{|x|} + m - 1 = \begin{cases} 3x^2 + m - 1, & x > 0 \\ -3x^2 + m - 1, & x < 0. \end{cases}$

Đạo hàm không xác định tại điểm $x = 0$.

+) Khi $m = 1$ thì $y' = \begin{cases} 3x^2, & x > 0 \\ -3x^2, & x < 0 \end{cases}$

Hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = 0$ và đạo hàm đổi dấu khi đi qua điểm $x = 0$ (vì $\lim_{x \rightarrow 0^+} y' > 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} y' < 0$).

Vậy hàm số chỉ đạt cực trị tại $x = 0$.

+) Khi $m > 1$, ta có $y' > 0, \forall x > 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} y' < 0$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{m-1}{3}}$ và đạo hàm đổi dấu khi đi qua điểm đó nên hàm số cũng chỉ có 1 điểm cực trị.

+) Tương tự với $m < 1$, hàm số cũng chỉ đạt cực trị tại điểm $x = \sqrt{\frac{1-m}{3}}$.

Vậy hàm số luôn có 1 điểm cực trị với mọi tham số m .

Do m nguyên và $m \in [0; 2021]$ nên có 2022 giá trị của m .

Dạng 13: Cho bảng biến thiên, định giá trị tham số để hàm số trị tuyệt đối có n điểm cực trị

1. Phương pháp

Bài toán: Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ hoặc cho bảng biến thiên, bảng xét dấu của $f'(x)$.

Yêu cầu tìm giá trị của tham số m để hàm số $g(x, m)$ có n điểm cực trị.

Đưa hàm số $g(x, m)$ về hàm số đơn giản hơn (nếu có thể). Sau đó sử dụng các phép biến đổi đồ thị hàm trị tuyệt đối.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $g(x) = 2f(|x| - m) + 2^{2020}$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 21.

B. 19.

C. 22.

D. 20.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Số điểm cực trị của $g(x) = 2f(|x| - m) + 2^{2020}$ bằng với số điểm cực trị của hàm số $h(x) = f(|x| - m)$.

Ta có $h'(x) = \frac{x}{|x|} f'(|x| - m)$.

Hiển nhiên hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

$$\text{Cho } h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| - m = 0 \\ |x| - m = x_1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = m \\ |x| = x_1 + m. \end{cases}$$

Hàm số $h(x) = f(|x| - m)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi và chỉ khi $h'(x) = 0$ có nhiều nghiệm dương nhất hay $0 < m$.

Do m nguyên và $m \in [-20; 20]$ nên $m \in \{1; 2; 3; \dots; 20\}$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-1	2	1	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^4 - 4x^2 + m|)$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $g'(x) = (4x^3 - 8x) \frac{x^4 - 4x^2 + m}{|x^4 - 4x^2 + m|} f'(|x^4 - 4x^2 + m|)$.

Ta có $|x^4 - 4x^2 + m| \geq 0$.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $f'(|x^4 - 4x^2 + m|) = 0$ vô nghiệm (*).

Hàm số $g(x)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi $g'(x) = 0$ có nhiều nghiệm phân biệt nhất.

Kết hợp với (*), ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^4 - 4x^2 + m = 0 \\ 4x^3 - 8x = 0 \end{cases}$ có nhiều nghiệm phân biệt nhất

$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + m = 0$ có nhiều nghiệm nhất và tất cả các nghiệm đều khác 0 và khác $\pm\sqrt{2}$ (vì $4x^3 - 8x = 0$ luôn có ba nghiệm phân biệt là $0; \pm\sqrt{2}$) $\Leftrightarrow m = -x^4 + 4x^2$ có nhiều nghiệm nhất và tất cả các nghiệm đều khác 0 và khác $\pm\sqrt{2}$ (**).

Lập bảng biến thiên của $y = -x^4 + 4x^2$ ta có:

x	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$			
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y							

Do đó (**) $\Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Vậy có ba giá trị nguyên là $m \in \{1; 2; 3\}$.

Dạng 14: Cho đồ thị, định tham số để có hàm số có n điểm cực trị

1. Phương pháp

Bước 1. Tìm hàm số đơn giản hơn có cùng số điểm cực trị với hàm ban đầu

Bước 2. Dựa vào đồ thị, xác định số cực trị của hàm đơn giản ở bước 1.

2. Bài tập

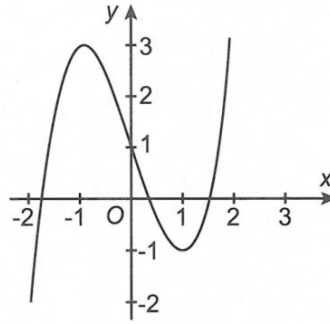
Bài tập 1. Cho đường cong như hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(|x+3|+m)$ có 5 điểm cực trị.

A. $m \in (-\infty; -1]$.

B. $m \in (-1; 1)$.

C. $m \in (1; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; -1)$.



Hướng dẫn giải

Chọn D.

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x+3|+m)$ bằng với số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|+m)$.

Ta có $g'(x) = \frac{x}{|x|} \cdot f'(|x|+m)$.

Dựa vào đồ thị, ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x|+m=1 \\ |x|+m=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|=1-m \\ |x|=-1-m \end{cases} (*)$

(chú ý rằng hàm số $g(x)$ không có đạo hàm tại điểm $x=0$).

Hàm số $y = f(|x+3|+m)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow g(x) = f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow (*)$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1$.

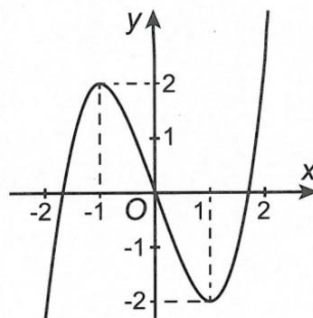
Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x)+m|$ có nhiều điểm cực trị nhất.

A. $m \in (-2; 2)$.

B. $m \in [-2; 2]$.

C. $m \in (-1; 1)$.

D. $m \in [-1; 1]$.

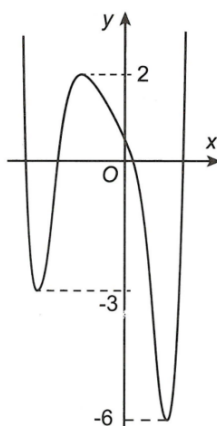


Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ có nhiều điểm cực trị nhất khi và chỉ khi $y = f(x) + m$ cắt trục hoành tại nhiều điểm nhất $\Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi S là tập hợp các số nguyên dương của m để hàm số $y = \left| f(x + 2020) + \frac{1}{3}m^2 \right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. 5.

B. 10.

C. 6.

D. 7.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có số điểm cực trị của hàm $y = \left| f(x + 2020) + \frac{1}{3}m^2 \right|$ bằng số điểm cực trị của hàm $y = \left| f(x) + \frac{1}{3}m^2 \right|$.

Xét hàm $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}m^2$.

Dựa vào đồ thị ta có số điểm cực trị của hàm $g(x)$ bằng số điểm cực trị của hàm $f(x)$ và bằng 3.

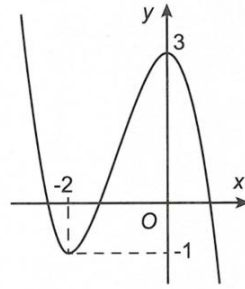
Suy ra hàm số $y = \left| f(x + 2020) + \frac{1}{3}m^2 \right|$ có 5 điểm cực trị thì số giao điểm của $g(x)$ với trục Ox (không kể các điểm tiếp xúc) là 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}m^2 \geq 2 \\ -6 < -\frac{1}{3}m^2 \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow 9 < m^2 < 18 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq m < 3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} < m \leq -3. \end{cases}$$

Do m nguyên dương nên $m \in \{3; 4\}$.

Vậy tổng các giá trị là 7.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x) = |f^3(x) - 3f(x) + m|$ có đúng 9 điểm cực trị là



A. 16.

B. 17.

C. 15.

D. 18.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét $h(x) = f^3(x) - 3f(x) + m$.

Suy ra $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(x)[f^2(x) - 1] = 0$.

Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

$f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < -2 \\ x = x_2 \in (-2; 0) \text{ (đạo hàm đều đổi dấu khi đi qua cả 3 nghiệm đều là nghiệm đơn và khác} \\ x = x_3 > 0 \end{cases}$

2 nghiệm trên).

$f(x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_4 > x_3 \\ x = -2 \end{cases}$ (trong đó $x = x_4$ là nghiệm đơn $x = -2$ là nghiệm kép).

Ta tính các giá trị: $h(x_1) = h(x_2) = h(x_3) = m - 2$

$h(x_4) = h(-2) = m + 2$ và $h(0) = m + 18$

Bảng biến thiên $h(x)$:

x	$-\infty$	x_1	-2	x_2	0	x_3	x_4	$+\infty$		
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$+\infty$	$m-2$	$m+2$	$m-2$	$m+18$	$m-2$	$m+2$	$m-2$	$+\infty$	$-\infty$

Suy ra hàm số $h(x)$ luôn có 6 điểm cực trị.

Đồ thị hàm số $g(x) = |f^3(x) - 3f(x) + m|$ có đúng 9 điểm cực trị tương đương đồ thị $y = h(x)$ cắt trục hoành tại đúng 3 điểm (không kể những điểm tiếp xúc) $\Leftrightarrow m + 2 \leq 0 < m + 18 \Leftrightarrow -18 < m \leq -2$.

Vậy $m \in \{-17; -16; \dots; -2\}$ hay có 16 giá trị nguyên của m .

Dạng 15. Biết được đồ thị của hàm số $f(x)$ tìm (số điểm) cực trị của hàm ẩn

1. Phương pháp

Bước 1. Tìm đạo hàm của hàm số $y = f(u(x))$: $y' = u'(x) \cdot f'(u(x))$.

Bước 2. Từ đồ thị hàm số, xác định số nghiệm bội lẻ của phương trình $y' = 0$.

Bước 3. Kết luận cực trị của hàm số $y = f(u(x))$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới (chỉ đạt cực trị tại 3 điểm và cũng chỉ có 3 điểm chung với trục hoành).

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ là

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $g'(x) = 2f'(x) \cdot f(x)$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 0 & (2) \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị trên, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = 0 \\ x = x_2 \end{cases} \quad (\text{các nghiệm đều là nghiệm bội lẻ}).$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \\ x = 0 \end{cases} \quad (\text{trong đó } x = 0 \text{ nghiệm kép, hai nghiệm kia là nghiệm đơn}).$$

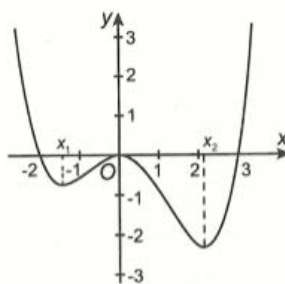
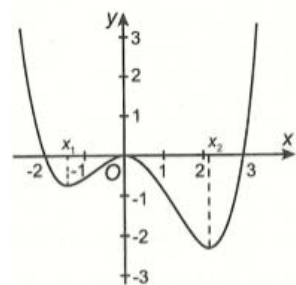
Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ.

Do vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ là 5.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới (chỉ đạt cực trị tại 3 điểm và cũng chỉ có 3 điểm chung với trục hoành). Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f[f(x)]$ là

A. 6

B. 7



Chú ý: Chỉ cần quan tâm đến nghiệm bội lẻ hoặc nghiệm mà đạo hàm đổi dấu khi đi qua của phương trình $f'(x) = 0$

C. 8

D. 9

Hướng dẫn giải**Chọn D**

Ta có: $g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)]$.

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f'[f(x)] = 0 & (2) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị trên ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = 0 \\ x = x_2 \end{cases} \text{ (các nghiệm đều là nghiệm bội lẻ).}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x_1 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = x_2. \end{cases}$$

Phương trình $f(x) = x_1$ với $x_1 \in (-2; -1)$ có 2 nghiệm đơn khác với 3 nghiệm $x = x_1; x = 0; x = x_2$.

Phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm đơn là $x = -2, x = 3$ (khác với 5 nghiệm đơn trên) và nghiệm kép $x = 0$.

Phương trình $f(x) = x_2$ với $x_2 \in (2; 3)$ có 2 nghiệm đơn khác với tất cả các nghiệm trên.

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có tổng cộng 9 nghiệm bội lẻ nên hàm số $g(x) = f[f(x)]$ có tổng cộng 9 điểm cực trị.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng 2 điểm cực trị $x = -1, x = 1$ có đồ thị như hình vẽ sau:

Hỏi hàm số $y = 3f(x^3 - 6x^2 + 9x + 1) + 2020$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

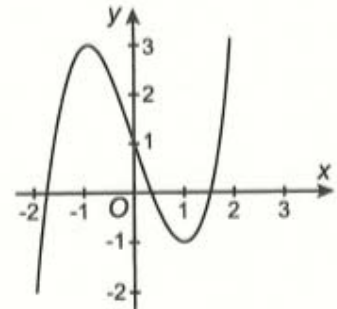
B. 3.

C. 4.

D. 5.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

Do hàm số $y = f(x)$ có đúng hai điểm cực trị $x = -1, x = 1$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $x = -1, x = 1$.



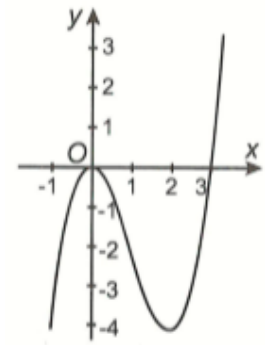
Ta có: $y' = 3(3x^2 - 12x + 9)f'(x^3 - 6x^2 + 9x + 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12x + 9 = 0 \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 1 = -1 \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = x_0 \in (-1; 0) \\ x(x-3)^2 = 0. \end{cases}$$

Vì $y' = 0$ có các nghiệm lẻ là $x = x_0, x = 1$ và $x = 3$ nên hàm số $y = 3f(x^3 - 6x^2 + 9x + 1) + 2020$ có tất cả 4 điểm cực trị.

Bài tập 4. Biết rằng hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = 5f[f(x-3)+1] - 20$ là

- A. 6. B. 5.
C. 3. D. 4.



Hướng dẫn giải

Chọn D.

Số điểm cực trị của hàm số $y = 5f[f(x-3)+1] - 20$ bằng với số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x-3)+1]$ và cũng bằng với số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f[f(x)]$.

Ta có: $g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)]$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f'[f(x)] = 0 & (2) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị, ta có

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \text{ (trong đó } x = 0 \text{ và } x = 2 \text{ là nghiệm bội lẻ).}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (3) \\ f(x) = 2 & (4) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow x = 3 \text{ (nghiệm đơn) hoặc } x = 0 \text{ (nghiệm kép).}$$

$$(4) \Leftrightarrow x = x_0 > 3 \text{ (nghiệm đơn).}$$

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 4 nghiệm bội lẻ nên $g(x)$ có 4 điểm cực trị

Suy ra hàm số $y = 5f[f(x-3)+1] - 20$ cũng có 4 điểm cực trị.

Dạng 16. Tìm (số điểm) cực trị hàm ẩn biết đồ thị của hàm số $f'(x)$

1. Phương pháp

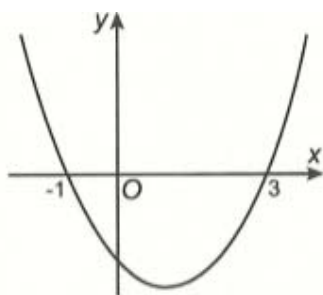
Bài toán: Cho trước đồ thị của hàm số $f'(x)$. Tìm (số điểm) cực trị của (đồ thị) hàm số $f(u)$.

+ Nếu $f'(x) = 0$ có các nghiệm x_i , thì $f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = x_i$.

+ Chúng ta chỉ cần quan tâm đến các nghiệm bội lẻ của phương trình.

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(3 - x^2)$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = 0$.

B. $x = 2$.

C. $x = \pm 2$.

D. $x = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm bội lẻ là $x = -1, x = 3$.

Ta có: $g'(x) = [f(3 - x^2)]' = -2x \cdot f'(3 - x^2)$.

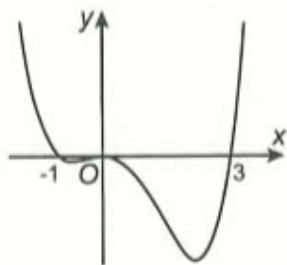
$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3 - x^2 = -1 \\ 3 - x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 \\ x^2 = 0 \end{cases}$$

Suy ra $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ là $x = 0, x = \pm 2$.

Vì $g'(3) = -6 \cdot f'(6) < 0$ nên ta có bảng xét dấu $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	-

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Lưu ý: Do các nghiệm đều là nghiệm bội lẻ, nên $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua mỗi nghiệm ấy. Chính vì vậy mà ta chỉ cần biết dấu của một khoảng nào đó sẽ suy ra dấu ở các khoảng còn lại. Do hàm số liên tục, nên chỉ cần biết dấu tại 1 điểm, ta sẽ biết dấu ở khoảng chứa điểm đó.

Ở bài này, ta xét tại điểm $x = 3 \in (2; +\infty)$.

Số cực trị của hàm số $h(x) = f(x^2 - 2x)$ là

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $h'(x) = (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x)$.

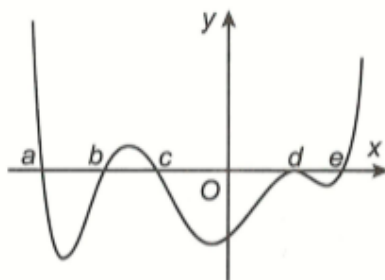
Dựa vào đồ thị, ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 3. \end{cases}$

Phương trình trên chỉ có 3 nghiệm bội lẻ là $x = \pm 1, x = 3$ nên hàm số

$h(x)$ chỉ có 3 điểm cực trị.

Chú ý: Ta chỉ cần quan tâm đến nghiệm bội lẻ, nên trong bài này ta bỏ qua nghiệm $x=0$ của phương trình $f'(x)=0$ (là nghiệm bội chẵn nên đạo hàm không đổi dấu khi qua nghiệm này). Ta cũng không cần xét đến phương trình $x^2 - 2x = -1$

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Biết $f(a) > f(c) > 0; f(b) < 0 < f(e)$.

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = [f(x+m)]^2$ là

A. 5.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Từ đồ thị của đạo hàm, ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	a	b	c	d	e	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	+
$f(x)$		$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$f(d)$	$f(e)$		

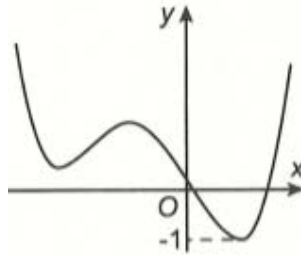
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị, suy ra hàm số $y = f(x+m)$ cũng có 4 điểm cực trị và $f'(x+m) = 0$ có 4 nghiệm bội lẻ phân biệt. Khi $f(a) > f(c) > 0; f(b) < 0 < f(e)$ thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên đồ thị hàm số $y = f(x+m)$ cũng cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Ta có $g(x) = [f(x+m)]^2 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x+m) \cdot f(x+m)$.

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x+m) = 0 & (1) \\ f(x+m) = 0 & (2) \end{cases}.$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt, phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt khác với 4 nghiệm của phương trình (1). Vậy $g'(x)$ có 7 nghiệm (bội lẻ) phân biệt hay $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x-2)$ có đồ thị như hình dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là



A. 1.

B. 2.

C. 0.

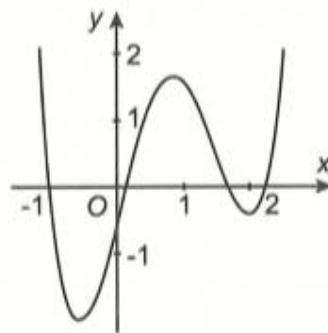
D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ bằng với số điểm cực trị của $y = f(x-2)$. Vì hàm số $y = f(x-2)$ có 2 điểm cực trị nên hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Bài tập 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f'(x-2)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = 2f(x-3) - 4$ là



A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

Nhận xét: Số điểm cực trị của hàm số $y = 2f(x-3) - 4$ bằng với số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ và bằng với số điểm cực trị của hàm số $y = f(x-2)$. Ta có đồ thị hàm số $y = f(x-2)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt nên hàm số $y = f(x-2)$ có 4 điểm cực trị. Vậy hàm số $y = 2f(x-3) - 4$ có 4 điểm cực trị.

Dạng 17. Biết được $f'(x)$ hoặc bảng xét dấu, bảng biến thiên của $f'(x)$, tìm số điểm cực trị của hàm ẩn

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (4-x)(x^3-1) + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2) - x^4 - m$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

Ta có $g'(x) = 2x[(4-x^2)(x^6-1) + 2x^2] - 4x^3 = 2x(4-x^2)(x^6-1)$.

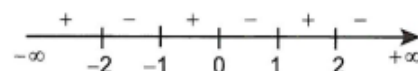
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2. \end{cases}$$

Lập bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Lưu ý: Khi làm trắc nghiệm, ta có thể lập bảng xét dấu thu gọn như sau:



Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-2)^4, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 + x - 1)$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**

Ta có:

$$\begin{aligned}g'(x) &= (2x+1)f'(x^2+x-1) \\ &= (2x+1)(x^2+x-1)^2(x^2+x-2)(x^2+x-3)^4\end{aligned}$$

Dễ thấy $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn là $x = -2, x = -\frac{1}{2}, x = 1$ nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x) - x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x + 2020$ là

- A. 3. B. 2.
C. 1. D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 3(x^2 - x - 2)$.

Nhận xét: $g'(-1) = g'(2) = 0$.

- Khi $\begin{cases} x > 2 \\ x < -1 \end{cases}$ thì $\begin{cases} f'(x) < 0 \\ -3(x^2 - x - 2) < 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0$.
- Khi $-1 < x < 2$ thì $\begin{cases} f'(x) > 0 \\ -3(x^2 - x - 2) > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) > 0$.

Tức là $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua 2 điểm $x = -1$ và $x = 2$.

Vậy hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 17. B. 16.
C. 14. D. 15.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$.

Ta có: $f'(x) = (x-1)^2 x(x-2)$ suy ra

$$g'(x) = (2x-8)f'(x^2-8x+m)$$

$$= (2x-8)(x^2-8x+m-1)^2(x^2-8x+m)(x^2-8x+m-2).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ (x^2-8x+m-1)^2 = 0 \quad (1) \\ (x^2-8x+m) = 0 \quad (2) \\ (x^2-8x+m-2) = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và (1) nếu có các nghiệm thì nghiệm ấy là nghiệm bội chẵn.

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) đều có 2 nghiệm phân biệt khác 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16-m > 0 \\ 16-m+2 > 0 \\ 16-32+m \neq 0 \\ 16-32+m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m < 18 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m < 16.$$

Do m nguyên dương và $m < 16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Bài tập 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)(x-3)^2(x^2+2mx+5)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m > -20$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 6.

B. 7.

C. 9.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do tính chất đối xứng qua trục Oy của đồ thị hàm số $f(|x|)$ nên hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm bội lẻ phân biệt và dương (*).

$$\text{Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ (x-3)^2 = 0 \\ x^2 + 2mx + 5 = 0(1). \end{cases}$$

Để thỏa mãn (*) ta có các trường hợp sau:

+) (1) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' = m^2 - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5}.$$

Do m nguyên âm nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

+) (1) có 2 nghiệm dương phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bằng 1, nghiệm còn lại khác 2.

Ta có (1) nhận $x=1$ là nghiệm khi $1^2 + 2.1.m + 5 = 0 \Rightarrow m = -3$. Khi $m = -3$, thế vào (1) ta thấy phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt là $x=1$ và $x=5$. Vậy $m = -3$ thỏa mãn.

+) (1) có 2 nghiệm dương phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bằng 2, nghiệm còn lại khác 1.

Nếu (1) nhận $x=2$ là nghiệm thì $2^2 + 2.2.m + 5 = 0 \Rightarrow m = -\frac{9}{4} \notin \mathbb{Z}$.

Trường hợp này không có giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Vậy $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Bài tập 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0

Hàm số $g(x) = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $g'(x) = -12x(x^2 - 2) \left[f'(-2 - (x^2 - 2)^2) - (x^2 + 1) \right]$.

Dựa vào bảng xét dấu, ta có $f'(x) < 0, \forall x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Ta có $-2 - (x^2 - 2)^2 \leq -2$ nên $\Rightarrow f'[-2 - (x^2 - 2)^2] \leq 0$.

Suy ra $f'[-2 - (x^2 - 2)^2] - (x^2 + 1) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$, cả 3 nghiệm đều là nghiệm bội lẻ.

Vì $-12f'[-2 - (x^2 - 2)^2] - (x^2 + 1) > 0$ nên $g'(x)$ cùng dấu với $h(x) = x(x^2 - 2)$ nên dễ thấy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Bài tập 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		2		5		$-\infty$

Số cực đại của hàm số $g(x) = \left[f(2x^2 + x) \right]^2$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có

$$g'(x) = 2 \cdot (4x+1) \cdot f'(2x^2+x) \cdot f(2x^2+x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ f'(2x^2+x) = 0 \\ f(2x^2+x) = 0. \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$$f'(2x^2+x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x = -2 \\ 2x^2+x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 > 1$.

Khi đó $f(2x^2+x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2+x-x_0 = 0$.

Vì $ac = 2(-x_0) < 0$ nên phương trình này luôn có 2 nghiệm trái dấu là

$$x_1 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{1+8x_0}}{4}; x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{1+8x_0}}{4}.$$

Ta có $x_1 < -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{1+8}}{4} < -1$ và $x_2 > -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{1+8}}{4} = \frac{1}{2}, \forall x_0 > 1$.

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$	x_1	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	x_2	$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+

Từ đó suy ra hàm số $g(x)$ chỉ có 2 điểm cực đại.

Bài tập 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x) - \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x + 20$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải**Chọn C.**Ta có: $g'(x) = (x^2 - 1)[3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3]$.Để thấy khi $x \in [-1; 2]$ thì $(x^3 - 3x) \in [-2; 2]$ và khi ấy $f'(x^3 - 3x) \in [-3; 1]$.Suy ra $3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3 \leq 0$.Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} f'(x^3 - 3x) = 1 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow f(0) = 1$ (vô lý).Vậy $3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3 < 0, \forall x \in [-1; 2]$.Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ (đều có 2 nghiệm đơn).Bảng xét dấu $g'(x), x \in [-1; 2]$ là

x	-1	1	2
$g'(x)$	0	+	0 -

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x) - \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x + 20$ trên đoạn $[-1; 2]$ chỉ có 1 điểm cực trị.**Bài tập 9.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)(x-4)(x-5)$ với $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - mx$ có 4 điểm cực trị?

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**Ta có: $g'(x) = f'(x) - m$.Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - m = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 5)(x^2 - 6x + 8) - m = 0$.Đặt $t = (x-3)^2, t \geq 0$, phương trình trở thành: $(t-4)(t-1) - m = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 - m = 0 \quad (1).$ Hàm số $g(x) = f(x) - mx$ có 4 điểm cực trị khi và chỉ khi (1) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 25 - 4(4 - m) > 0 \\ S = 5 > 0 \\ P = 4 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < m < 4.$$

Do m nguyên và $m \in \left(-\frac{9}{4}; 4\right)$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Bài tập 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x\sqrt{8-x^2}, \forall x \in [-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - m^2x - 2m$ có 2 điểm cực trị?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số $g(x) = f(x) - m^2x - 2m$ xác định trên $[-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$.

Đạo hàm $g'(x) = f'(x) - m^2 = x\sqrt{8-x^2} - m^2$.

Hàm số $g(x) = f(x) - m^2x - 2m$ có 2 điểm cực trị khi $g'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm đó (1).

Ta có: $x\sqrt{8-x^2} - m^2 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{8-x^2} = m^2$ (*).

Xét hàm số $h(x) = x\sqrt{8-x^2}, x \in [-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$.

Có $h'(x) = \frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$. Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$:

x	$-\sqrt{8}$	-2	0	2	$\sqrt{8}$	
$h'(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$	0	$\parallel$
$h(x)$		0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra (*) có tối đa 2 nghiệm hay $g'(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm.

Vậy (1) $\Leftrightarrow 0 < m^2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq 0. \end{cases}$

Vì m nguyên nên $m \in \{-1; 1\}$.