

Câu 1. [HSG-BÌNH DƯƠNG 2021-2022] Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$\frac{(x-4)\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{4-x}+x-5} = \frac{2+(2x-4)\sqrt{x-2}}{x-1}.$$

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{4-x}+x-5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ -(4-x)+\sqrt{4-x}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{(x-4)\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{4-x}+x-5} &= \frac{2+(2x-4)\sqrt{x-2}}{x-1} \\ \Leftrightarrow (x-1)[(x-4)\sqrt{x-2}-1] &= (\sqrt{4-x}+x-5)[2+2(x-2)\sqrt{x-2}] \\ \Leftrightarrow (x^2-9x+16)\sqrt{x-2}+2(x-2)\sqrt{(4-x)(x-2)}+2\sqrt{4-x}+3x-11 &= 0. (1) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$\begin{aligned} &(x^2-9x+16)\sqrt{x-2}+2(x-2)\sqrt{(4-x)(x-2)}+2\sqrt{4-x}+3x-11 \\ &\leq \frac{(x^2-9x+16)(x-1)}{2}+2(x-2)+5-x+3x-11 \\ &= \frac{1}{2}(x^3-10x^2+33x-36) = \frac{1}{2}(x-4)(x-3)^2 \leq 0, \forall x \in [2;4]. \end{aligned}$$

Như vậy vế trái của (1) nhỏ hơn hoặc bằng 0. Do đó phương trình có nghiệm khi

$$\begin{cases} x=4 \\ x=3 \\ \sqrt{x-2}=1 \Leftrightarrow x=3. \\ 4-x=x-2 \\ 4-x=1 \end{cases}$$

Thử lại ta kết luận phương trình có nghiệm duy nhất: $x=3$.

Câu 2. [HSG-BÌNH DƯƠNG 2021-2022] Cho các số nguyên tố thỏa mãn $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ và $p_4 - p_1 = 8$.

Giả sử $p_1 > 5$. Chứng minh rằng p_1 chia 30 dư 11.

Lời giải

Từ giả thiết thì p_2, p_3 chỉ có thể nhận hai trong ba giá trị lần lượt là

$$\{p_1+2; p_1+4; p_1+6\}.$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} p_2 = p_1+2 \\ p_3 = p_1+4 \end{cases}$ thì trong ba số p_1, p_2, p_3 có một số chia hết cho 3.

Điều này là vô lí.

Trường hợp 2: $\begin{cases} p_2 = p_1+4 \\ p_3 = p_1+6 \end{cases}$ thì trong ba số p_2, p_3, p_4 có một số chia hết cho 3.

Điều này là vô lí.

$$\text{Do đó } p_2 = p_1+2, p_3 = p_1+6, p_4 = p_1+8. \text{ Từ đó suy ra: } \begin{cases} p_1 \equiv 2 \pmod{3} \\ p_1 \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}.$$

Kết hợp với p_1 lẻ ta suy ra $p_1 \equiv 11 \pmod{30}$ tức ta có điều cần phải chứng minh.

Câu 3. [HSG-BÌNH DƯƠNG 2021-2022] Cho dãy số $\{u_n\}$ với $u_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{(2n+1)}{(2n+2)}$. Tính $\lim u_n$.

Lời giải

Ta có

$$2 > \sqrt{1.3}$$

$$4 > \sqrt{3.5}$$

$$6 > \sqrt{5.7}$$

...

$$2n+2 > \sqrt{(2n+1)(2n+3)}.$$

Do đó

$$2.4.6 \cdots (2n+2) > \sqrt{1^2.3^2.5^2 \cdots (2n+1)^2.(2n+3)} = 1.3.5 \cdots (2n+1)\sqrt{2n+3}.$$

Suy ra

$$0 < u_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{(2n+1)}{(2n+2)} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}.$$

Áp dụng nguyên lý kẹp, vì $\lim \frac{1}{\sqrt{2n+3}} = 0$ nên $\lim u_n = 0$.

Câu 4. [HSG-BÌNH DƯƠNG 2021-2022] Một hàng cây bưởi Tân Uyên gồm 17 cây thẳng hàng được đánh số cây theo thứ tự là các số tự nhiên từ 1 đến 17. Ban đầu mỗi cây có một con ong đậu trên đó để hút mật hoa. Sau đó, cứ mỗi giờ có hai con ong nào đó bay sang hai cây bên cạnh để tìm và hút mật nhưng theo hai chiều ngược nhau. Hỏi sau một số giờ, có hay không trường hợp mà:

- Không có con ong ở cây có thứ tự chẵn.
- Có 9 con ong ở cây cuối cùng.

Lời giải

- Không có con ong ở cây có thứ tự chẵn.

Có thể xảy ra trường hợp này. Chẳng hạn, sau giờ thứ nhất con ong ở cây thứ 2 chuyển sang cây thứ 3, con ong thứ 4 chuyển sang cây thứ 3, Sau giờ thứ 4, con ong ở cây 14 chuyển sang cây 15, con ong ở cây 16 chuyển sang cây thứ 15. Lúc này sẽ không còn con ong nào ở cây có thứ tự chẵn.

- Có 9 con ong ở cây cuối cùng.

Đánh số các con ong bằng vị trí của cây bưởi mà nó đang đậu. Gọi S là tổng của tất cả các con ong. Ban đầu ta có $S = \sum_{i=1}^{17} i = 153$.

Khi một con ong bay sang cây bên cạnh, nếu nó bay về hướng cây số 1, trị số gán của con ong đó cũng giảm đi 1; ngược lại, nếu nó bay về hướng cây số 17, trị số gán của con ong đó sẽ tăng thêm 1. Do sau mỗi giờ có hai con ong bay sang cây bên cạnh và ngược hướng nhau nên $S = \text{const}$. Vậy nếu có 9 con ong ở cây cuối cùng thì $S > 153$ (điều này là vô lí).

Cho nên ta kết luận là không thể xảy ra trường hợp này.

Câu 5. [HSG-BÌNH DƯƠNG 2021-2022] Cho $a, b, c \in [-1; 1]$ thỏa mãn $1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2$. Chứng minh rằng $1 + 2a^3b^3c^3 \geq a^6 + b^6 + c^6$.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow (1 - a^2)(1 - b^2) \geq (ab - c)^2$. (*)

Ta lại có: $1 + 2a^3b^3c^3 \geq a^6 + b^6 + c^6 \Leftrightarrow (1 - a^6)(1 - b^6) \geq (a^3b^3 - c^3)^2$

$$\Leftrightarrow (1 - a^6)(1 - b^6) \geq (ab - c)^2 (a^2b^2 + abc + c^2)^2.$$

Bất đẳng thức vừa phân tích luôn đúng vì

$$0 \leq a^2b^2 + abc + c^2 \leq a^2b^2 + |ab| + 1 \leq \sqrt{(a^4 + a^2 + 1)(b^4 + b^2 + 1)}.$$

Kết hợp với (*) ta có

$$(ab - c)^2 (a^2b^2 + abc + c^2)^2 \leq (1 - a^2)(1 - b^2)(a^4 + a^2 + 1)(b^4 + b^2 + 1) \leq (1 - a^6)(1 - b^6).$$

Suy ra: $(1 - a^6)(1 - b^6) \geq (ab - c)^2 (a^2b^2 + abc + c^2)^2$ là bất đẳng thức đúng.

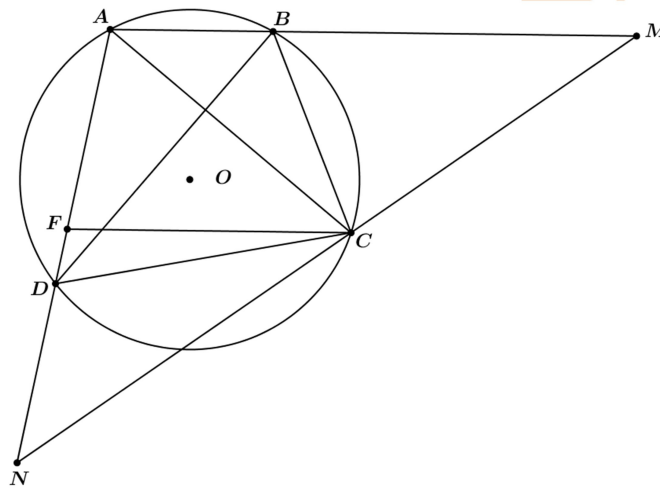
Do vậy bất đẳng thức ban đầu đúng, ta có điều phải chứng minh.

Câu 6. [HSG-BÌNH DƯƠNG 2021-2022] Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng qua C

cắt các tia đối của tia BA, DA lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng $\frac{4S_{BCD}}{S_{AMN}} \leq \left(\frac{BD}{AC}\right)^2$.

Lời giải

Đầu tiên ta có hình vẽ như sau



Qua C kẻ $CF \parallel AB$ với $F \in AD$.

Ta có:
$$\begin{cases} \widehat{FAC} = \widehat{DBC} \\ \widehat{ACF} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC} \end{cases} \Rightarrow \Delta AFC \approx \Delta BCD (g - g) \Rightarrow \frac{S_{BCD}}{S_{AFC}} = \left(\frac{BD}{AC}\right)^2. \quad (1)$$

Lại có:
$$\begin{cases} S_{AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin \widehat{BAD} \\ S_{AFC} = \frac{1}{2} AF \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAD} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{AFC}} = \frac{AM \cdot AN}{AF \cdot AC}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra
$$\frac{S_{BCD}}{S_{AMN}} = \left(\frac{BD}{AC}\right)^2 \cdot \frac{AF \cdot AC}{AM \cdot AN}. \quad (3)$$

Tiếp theo ta có: $\frac{4S_{BCD}}{S_{AMN}} \leq \left(\frac{BD}{AC}\right)^2$, kết hợp với (3) ta có: $AM \cdot AN \geq 4AF \cdot AC$

$$\Leftrightarrow \frac{AM}{FC} \cdot AN \geq 4AF \Leftrightarrow \frac{AN}{FN} \cdot AN \geq 4AF$$

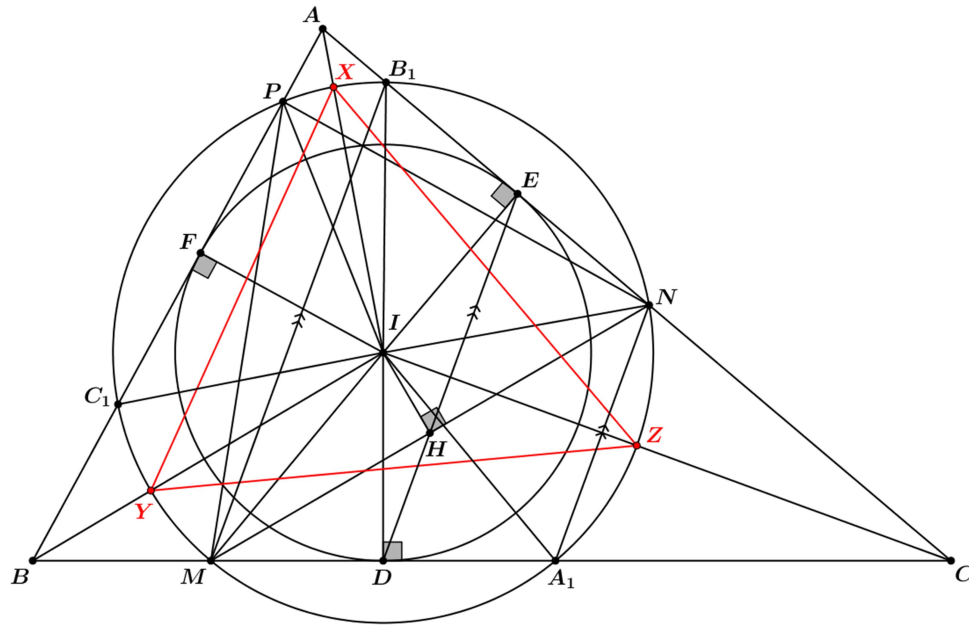
$$\Leftrightarrow AN^2 \geq 4AF \cdot FN \Leftrightarrow (AF + FN)^2 \geq 4AF \cdot FN.$$

Bất đẳng thức $(AF + FN)^2 \geq 4AF \cdot FN$ đúng theo bất đẳng thức AM - GM nên ta suy ra điều phải chứng minh.

Câu 7. [HSG-BÌNH DƯƠNG 2021-2022] Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $AN - AP = BP - BM = CM - CN$. Gọi X, Y, Z lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ANP, BPM, CMN . Chứng minh rằng I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ .

Lời giải

Đầu tiên ta có hình vẽ như sau:



Ta gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của I lên BC, CA, AB . Do I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên $ID = IE = IF$ và $AE = AF; BF = BD; CD = CE$.

Ta có:

$$\begin{aligned} AN - AP &= BP - BM = CM - CN \\ &= (AE + EN) - (AF - PF) = (BF + FP) - (BD - MD) = (CD + DM) - (CE - EN) \\ &= (AF + EN) - (AF - PF) = (BD + FP) - (BD - MD) = (CE + DM) - (CE - EN) \\ &= EN + PF = PF + MD = MD + EN. \end{aligned}$$

Suy ra $EN = PF = MD$ mà $ID = IE = IF$ nên $\triangle IEN = \triangle IFP = \triangle IDM \Rightarrow IM = IN = IP$ tức I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle MNP$.

Tiếp theo, ta gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng với M, N, P qua D, E, F

Khi đó ta suy ra $AC_1 = AN, AB_1 = AP$.

Chứng minh tương tự hai phần còn lại và cứ thế ta suy ra $\triangle IC_1B = \triangle IMB \Rightarrow IC_1 = IM$.

Tương tự ta cũng có: $IN = IC_1 \Rightarrow IM = IN = IC_1$.

Chứng minh tương tự ta cũng có: $IN = IP = IA_1; IM = IP = IB_1$ mà $IM = IN = IP$ nên suy ra 6 điểm M, N, P, A_1, B_1, C_1 đồng viên.

Gọi H là hình chiếu của I lên MN .

Ta có: $EH \parallel A_1N \parallel B_1M \parallel DH$ và E, H, D thẳng hàng (theo tiên đề Euclid).

Suy ra E, H, D tạo thành điểm Simpson của $\triangle MCN \Rightarrow I \in (MCN)$.

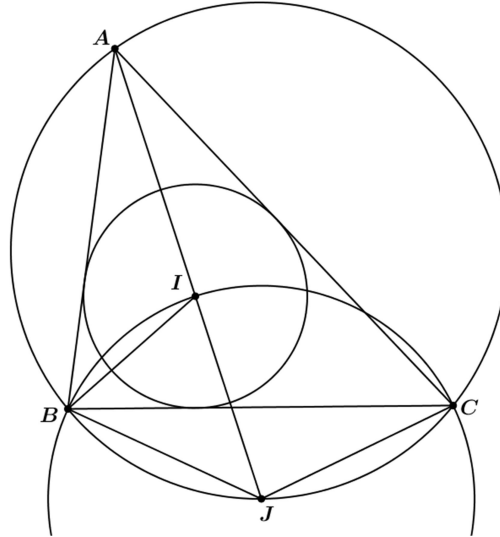
Chứng minh tương tự ta hoàn toàn có ngay: $I \in (ANP), I \in (MBP)$.

Suy ra lần lượt bộ ba điểm $\overline{I, X, A}, \overline{I, Y, B}, \overline{I, Z, C}$ thẳng hàng.

Tiếp theo ta xét **bổ đề** sau:

Cho tam giác ABC có O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC . Gọi J là điểm chính giữa của cung $\widehat{BC}$ không chứa A , khi đó J là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác IBC .

Chứng minh bổ đề:



Ta có: $\widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \widehat{BIJ}$ (tính chất góc ngoài) mà $\widehat{IBA} = \widehat{IBC}$ và $\widehat{IAB} = \widehat{IAC}$ (tính chất phân giác) nên ta suy ra $\widehat{IAC} + \widehat{IBC} = \widehat{BIJ}$ mà $\widehat{IAC} = \widehat{JBC}$ nên ta cũng suy ra $\widehat{JBC} + \widehat{IBC} = \widehat{BIJ}$.

Mặt khác $\widehat{JBC} + \widehat{IBC} = \widehat{IBJ}$ nên ta suy ra $\widehat{BIJ} = \widehat{IBJ}$ tức tam giác BIJ cân tại J , suy ra $JB = JI$. (1)

Mà J là điểm chính giữa của cung $\widehat{BC}$ không chứa A nên $JB = JC$. (2)

Nên từ (1) và (2) ta suy ra J là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác IBC

Áp dụng bổ đề vừa nêu trên, suy ra
$$\begin{cases} IM = IN = IZ \\ IN = IP = IX \\ IP = IM = IY \end{cases} \text{ mà } IM = IN = IP \text{ nên từ đó ta suy ra}$$

$IX = IY = IZ$ tức I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ .

HẾT