

Nội dung	Trang
LÍ THUYẾT LỚP 10	
Chương 1: Mệnh đề - tập hợp.....	1
Chương 2: Hàm số bậc nhất và hàm số bậc hai.....	2
Chương 3: Phương trình và hệ phương trình.....	4
Chương 4: Bất đẳng thức.....	8
Chương 6: Góc lượng giác và công thức lượng giác.....	10
Chương 1: Vec tơ.....	47
Chương 2: Tích vô hướng hai vec tơ và ứng dụng.....	48
Chương 3: Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng.....	50
LÍ THUYẾT LỚP 11	
Chương 1: Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác.....	13
Chương 2: Tổ hợp – xác suất.....	15
Chương 3: Dãy số - cấp số cộng – cấp số nhân.....	18
Chương 4: Giới hạn.....	19
Chương 5: Đạo hàm.....	23
Chương 1: Phép biến hình.....	51
Chương 2: Quan hệ song song trong không gian.....	56
Chương 3: Quan hệ vuông góc trong không gian.....	59
LÍ THUYẾT LỚP 12	
Chương 1: Ứng dụng đạo hàm và khảo sát hàm số.....	27
Chương 2: Hàm số lũy thừa – mũ – logarit.....	31
Chương 3: Nguyên hàm – tích phân.....	36
Chương 4: Số phức.....	43
Chương 1: Khối đa diện và thể tích khối đa diện.....	61
Chương 2: Mặt trụ - mặt nón – mặt cầu.....	63
Chương 3: Phương pháp tọa độ trong không gian.....	65

LÍ THUYẾT ĐẠI SỐ LỚP 10

CHƯƠNG I: MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

A. Mệnh đề và mệnh đề chứa biến

1. Mệnh đề: Mệnh đề là một câu khẳng định hoặc đúng hoặc sai.

2. Mệnh đề phủ định: Cho mệnh đề P , mệnh đề phủ định của P là: “Không phải P ” và ta kí hiệu $\bar{P}$.

Chú ý: Mệnh đề P và $\bar{P}$ là hai câu khẳng định trái ngược nhau.

3. Mệnh đề kéo theo: Cho hai mệnh đề P và Q . Mệnh đề kéo theo là: “Nếu P thì Q ” và kí hiệu $P \Rightarrow Q$

Chú ý: + Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai khi P đúng, Q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

+ Trong mệnh đề $P \Rightarrow Q$ thì: - P là giả thiết (hay P là điều kiện đủ để có Q)

- Q là kết luận (hay Q là điều kiện cần để có P)

Mệnh đề đảo: Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$

4. Mệnh đề tương đương: Cho hai mệnh đề P và Q , mệnh đề tương đương là: “ P nếu và chỉ nếu Q ” và ta kí hiệu: $P \Leftrightarrow Q$

Chú ý: Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng

Cách phát biểu khác của hai mệnh đề tương đương:

- P khi và chỉ khi Q

- P là điều kiện cần và đủ để có Q (Q là điều kiện cần và đủ để có P)

5. Mệnh đề chứa biến: Ví dụ cho khẳng định “ $2 + n = 4$ ”. Khi thay mỗi giá trị cụ thể n vào khẳng định trên ta được một mệnh đề. Khẳng định có đặc điểm như thế gọi là mệnh đề chứa biến.

6. Các kí hiệu $\forall$ và $\exists$: $\forall$ đọc là với mọi, $\exists$ đọc là tồn tại

Ví dụ: Mệnh đề: “Với mọi x thuộc X , $P(x)$ đúng”, ta kí hiệu: “ $\forall x \in X, P(x)$ ”

Mệnh đề: “Tồn tại x thuộc X để $P(x)$ đúng”, ta kí hiệu: “ $\exists x \in X, P(x)$ ”

7. Mệnh đề phủ định của mệnh đề có chứa kí hiệu $\forall, \exists$

+ Xét mệnh đề: “ $\forall x \in X, P(x)$ ” thì mệnh đề phủ định của nó là: “ $\exists x \in X, \bar{P}(x)$ ”

+ Xét mệnh đề: “ $\exists x \in X, P(x)$ ” thì mệnh đề phủ định của nó là: “ $\forall x \in X, \bar{P}(x)$ ”

Chú ý: + Phủ định của ‘ $a > b$ ’ là: ‘ $a \leq b$ ’

+ Phủ định của ‘ $a = b$ ’ là: ‘ $a \neq b$ ’

+ Phủ định của ‘ $a < b$ ’ là: ‘ $a \geq b$ ’

+ Phủ định của ‘ a chia hết cho b ’ là: ‘ a không chia hết cho b ’

B. Áp dụng mệnh đề vào suy luận toán học

1. Định lí và chứng minh định lí: Trong toán học, định lí là một mệnh đề đúng. Nhiều định lí được phát biểu dưới dạng: “ $\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$ ” (1)

Có 2 cách chứng minh định lí 1.

Cách 1: Chứng minh trực tiếp

+ Lấy x tùy ý thuộc X mà $P(x)$ đúng

+ Dùng suy luận và kiến thức toán học để chỉ ra $Q(x)$ đúng

Cách 2: Chứng minh phản chứng

+ giả sử tồn tại x_0 thuộc X sao cho $P(x_0)$ đúng và $Q(x_0)$ sai, tức mệnh đề (1) là mệnh đề sai.

+ Dùng suy luận và kiến thức toán học để chỉ ra mâu thuẫn.

2. Điều kiện cần, điều kiện đủ: a) Xét định lí dạng: “ $\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$ ” thì $P(x)$ gọi là giả thiết còn $Q(x)$ gọi là kết luận của định lí.

Định lí trên được phát biểu: $P(x)$ là điều kiện đủ để có $Q(x)$, hoặc $Q(x)$ là điều kiện cần để có $P(x)$

b) Xét định lí “ $\forall x \in X, P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ ” khi đó ta nói $P(x)$ là điều kiện cần và đủ để có $Q(x)$.

C. Tập hợp và các phép toán trên tập hợp

1. Tập con: A là tập con của B nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B .

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$$

2. Tập hợp bằng nhau: Tập A, B bằng nhau nếu mỗi phần tử của A là một phần tử của B và ngược lại.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B; B \subset A)$$

3. Phép hợp: Hợp của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm tất cả phần tử thuộc A hoặc thuộc B .

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$$

4. Phép giao: Giao của hai tập A và B là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc cả A và B .

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ và } x \in B\}$$

5. Phép lấy phần bù: Cho A là tập con của E . Phần bù của A trong E là tập hợp gồm các phần tử của E mà không là phần tử của A .

Hiệu của hai tập A và B là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B .

$$A \setminus B = \{x : x \in A; x \notin B\}$$

CHƯƠNG II: HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

A. Đại cương về hàm số

1. Sự biến thiên của hàm số: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập D .

+ $f(x)$ đồng biến trên D nếu $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. (đồ thị của hàm đồng biến đi từ dưới đi lên, từ trái qua phải)

+ $f(x)$ nghịch biến trên D nếu $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. (đồ thị của hàm nghịch biến đi từ trên xuống dưới, từ trái qua phải)

2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số: là ta xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số đó.

Để khảo sát sự biến thiên của hàm $f(x)$ trên tập D , ta xét biểu thức: $P = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, $\forall x_1, x_2 \in D$

+ Nếu $P > 0$ thì hàm $f(x)$ đồng biến trên D

+ Nếu $P < 0$ thì hàm $f(x)$ nghịch biến trên D .

3. Hàm số chẵn, hàm số lẻ: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

+ $f(x)$ là hàm số chẵn nếu $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

+ $f(x)$ là hàm số lẻ nếu $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

- Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng, đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng

4. Tịnh tiến đồ thị: Cho đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ và các số a, b, p, q dương. Khi đó:

+ đồ thị hàm $y = f(x - a)$ là phép tịnh tiến đồ thị (C) sang phải a đơn vị.

+ đồ thị hàm $y = f(x + b)$ là phép tịnh tiến đồ thị (C) sang trái b đơn vị.

+ đồ thị hàm $y = f(x) + p$ là phép tịnh tiến đồ thị (C) lên trên p đơn vị.

+ đồ thị hàm $y = f(x) - q$ là phép tịnh tiến đồ thị (C) xuống dưới q đơn vị.

B. Hàm số bậc nhất và hàm số bậc hai

1. Hàm số bậc nhất: là hàm số có dạng $y = ax + b$

+ Hàm số đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
$y = ax + b$ $a < 0$	$+\infty$	$-\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$y = ax + b$ $a > 0$	$-\infty$	$+\infty$

+ Đồ thị hàm số là đường thẳng và ta gọi a là hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$

2. Hàm số bậc hai: là hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$

+ TXĐ: $\mathbb{R}$

+ Tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta = b^2 - 4ac$, đồ thị nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng.

+ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

+ $a > 0$ hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

$\text{Min}y = -\frac{\Delta}{4a}$ tại $x = -\frac{b}{2a}$, và đồ thị có bề lõm hướng lên trên.

+ $a < 0$ hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

$\text{Max}y = -\frac{\Delta}{4a}$ tại $x = -\frac{b}{2a}$, và đồ thị có bề lõm hướng xuống dưới.

+ Vẽ Parabol ta cần lập bảng giá trị gồm ít nhất 5 điểm.

3. Hàm số trị tuyệt đối: Từ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ ta suy ra cách vẽ:

a) Đồ thị (C_1) của hàm số $y = |f(x)|$

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía trên Ox.

+ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm bên dưới Ox qua Ox.

b) Đồ thị (C_2) của hàm số $y = f(|x|)$

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải Oy.

+ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm bên phải Oy qua Oy.

4. Bài toán tương giao: Xét Parabol (P) $y = ax^2 + bx + c$ và đường thẳng (d) $y = kx + m$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $ax^2 + bx + c = kx + m$ (1)

Số giao điểm của (P) và đường thẳng d chính là số nghiệm của phương trình (1) và ngược lại.

CHƯƠNG III. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. Phương trình bậc nhất và phương trình bậc hai

1. Phương trình bậc nhất: có dạng $ax + b = 0$ (1)

+ Nếu $a \neq 0$ thì pt (1) có nghiệm duy nhất.

+ Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì pt (1) vô nghiệm.

+ Nếu $a = b = 0$ thì pt (1) vô số nghiệm.

2. Phương trình bậc hai: có dạng: $ax^2 + bx + c = 0$ (2)

Ta xét trường hợp $a \neq 0$. Tính $\Delta = b^2 - 4ac$

+ Nếu $\Delta < 0$ thì pt (2) vô nghiệm.

+ Nếu $\Delta = 0$ thì pt (2) có một nghiệm (nghiệm kép) là $x = -\frac{b}{2a}$

+ Nếu $\Delta > 0$ thì pt (2) có 2 nghiệm phân biệt $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Định lý Viet: giả sử x_1 ; x_2 là hai nghiệm của pt (2) thì ta có $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

3. Các bài toán liên quan phương trình bậc hai. Xét phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ (1)

a) Phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu khi $ac < 0$

$$\begin{array}{ll} \text{b) Pt (1) có 2 nghiệm cùng dấu khi } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases} & \text{c) Pt (1) có 2 nghiệm cùng dương khi } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{d) Pt (1) có hai nghiệm cùng âm khi } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

$$\text{e) Pt (1) có hai nghiệm } x_1, x_2 < k \text{ khi } \begin{cases} x_1 - k < 0 \\ x_2 - k < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - k) + (x_2 - k) < 0 \\ (x_1 - k)(x_2 - k) > 0 \end{cases}$$

4. Định lý đảo tam thức bậc hai.

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$. Giả sử x_1, x_2 là 2 nghiệm của pt $f(x) = 0$. Khi đó:

$$\text{a) } x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow a \cdot f(\alpha) < 0$$

$$\text{b) } x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha < 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } x_1 < \alpha < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$$

$$\text{e) } x_1 < \alpha < x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \end{cases}$$

$$\text{f) } \alpha < x_1 < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$$

$$\text{g) } \alpha < x_1 < x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha > 0 \\ \frac{S}{2} - \beta < 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \end{cases}$$

B. Cách giải phương trình, bất phương trình vô tỉ

1. Phương trình, bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

$$\text{a) } |A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = \pm B \end{cases}$$

$$\text{b) } |A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$$

$$\text{c) } |A| < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ -B < A < B \end{cases}$$

$$\text{d) } |A| < |B| \Leftrightarrow A^2 < B^2 \Leftrightarrow (A - B)(A + B) < 0$$

Chú ý: Đối với phương trình, bất phương trình mà chứa nhiều giá trị tuyệt đối ta thường lập bảng phá dấu trị tuyệt đối để giải.	e) $A > B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A \text{ cả nghĩa} \\ B \geq 0 \\ \begin{cases} A > B \\ A < -B \end{cases} \end{cases}$
--	---

2. Phương trình, bất phương trình chứa căn thức

a) $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 (B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$ b) $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A^2 = B \end{cases}$ chú ý: Với phương trình, bất phương trình mà chứa nhiều căn thì trước tiên ta tìm điều kiện, sau đó ta biến đổi hai vế của phương trình không âm rồi mới bình phương.	c) $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases}$ d) $\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ A \geq 0 \\ A < B^2 \end{cases}$ e) $\sqrt{A} > \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B \end{cases}$
--	--

3. Các phương pháp giải phương trình

Phương pháp 1: Biến đổi tương đương

- Ta có thể đưa về phương trình tích.

$$\text{- Ta đưa về tổng các số không âm } A^2 + B^2 + C^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

- Ta sử dụng phép liên hợp.

Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ

- Đặt ẩn phụ không hoàn toàn(phương trình chứa cả x và ẩn phụ t). Chỉ dùng khi đưa được về phương trình bậc hai và định thức $\Delta = b^2 - 4ac$ là số chính phương.

- Đặt ẩn phụ đưa phương trình về dạng phương trình tích.

- Đặt ẩn phụ đưa phương trình về hệ phương trình.

Chú ý: Khi đặt ẩn phụ thì ta dựa vào điều kiện của x để tìm điều kiện cho ẩn phụ t (rất quan trọng).

Phương pháp 3: Phương pháp hàm số

a) Xét phương trình: $f(x) = k$ (1)

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên tập xác định D thì phương trình (1) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

b) Xét phương trình: $f(x) = g(x)$ (2)

- Nếu hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ đơn điệu ngược và liên tục trên tập D (Nghĩa là nếu $f(x)$ là hàm đồng biến thì $g(x)$ là hàm nghịch biến) thì phương trình (2) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

c) Xét phương trình: $f(u) = f(v)$ (3)

- Xét hàm đặc trưng $y = f(t)$. Nếu hàm $f(t)$ đồng biến hoặc nghịch biến và liên tục trên tập D thì ta có:

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$$

Chú ý: Điều kiện của t chính là hợp điều kiện của u và v .

4. Phương pháp hàm số giải bất phương trình.

a) Xét phương trình: $f(x) \geq k$ (1)

Bước 1: Nhắm nghiệm $x = x_0$ sao cho $f(x_0) = k$.

Bước 2: Chỉ ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên tập D .

- Nếu $f(x)$ đồng biến thì $f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow x \geq x_0$

- Nếu $f(x)$ nghịch biến thì $f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow x \leq x_0$

b) Xét phương trình: $f(x) \leq g(x)$ (2)

Bước 1: Nhắm nghiệm $x = x_0$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$

Bước 2: Chỉ ra hàm $y = f(x)$, $y = g(x)$ là đơn điệu ngược, giả sử $f(x)$ là hàm đồng biến còn $g(x)$ là hàm nghịch biến.

- Nếu $x \geq x_0$ thì $g(x) \leq g(x_0) = f(x_0) \leq f(x)$

- Nếu $x \leq x_0$ thì $g(x) \geq g(x_0) = f(x_0) \geq f(x)$

c) Xét phương trình: $f(u) < f(v)$ (3)

+ Xét hàm đặc trưng $y = f(t)$ và chỉ ra hàm $f(t)$ đơn điệu trên tập D .

- Nếu $f(t)$ là hàm đồng biến thì $f(u) < f(v) \Leftrightarrow u < v$

- Nếu $f(t)$ là hàm nghịch biến thì $f(u) < f(v) \Leftrightarrow u > v$

D. Hệ phương trình

1. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Là hệ phương trình có dạng
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Ta tính các định thức sau: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Quy tắc nhớ: Anh bạn – cầm bát – ăn cơm.

a) Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất (x, y) với $x = \frac{D_x}{D}$ và $y = \frac{D_y}{D}$

b) Nếu $D = 0$ còn $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ vô nghiệm

c) Nếu $D = D_x = D_y = 0$ thì hệ vô số nghiệm.

2. Hệ phương trình đối xứng loại 1

Là hệ có dạng
$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Trong đó khi ta thay đổi vai trò x, y trong hệ thì mỗi phương trình trong hệ không thay đổi.

+ Nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ thì cặp $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hệ.

+ Điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $x_0 = y_0$

Cách giải: - Bước 1: Tìm điều kiện nếu có

- Bước 2: Đặt $S = x + y$ và $P = x.y$ (Đk: $S^2 \geq 4P$). Khi đó hệ mới chứa S, P .

- Bước 3: giải hệ mới tìm S, P . Với S, P tìm được thì x, y là nghiệm phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0$$

Là hệ có dạng $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$

Trong đó khi ta thay đổi vai trò x, y thì phương trình này biến thành phương trình kia trong hệ.

Cách giải:- Bước 1: Trừ 2 vế của phương trình rồi biến đổi phương trình về dạng tích.

- Bước 2: Kết hợp một phương trình tích và một phương trình trong hệ để tìm nghiệm.

CHƯƠNG IV: BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. Bất đẳng thức

1. Bất đẳng thức cơ bản

a) $a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \forall a, b$

b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad \forall a, b, c$

c) $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \quad \forall a, b, c$

d) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \quad \forall a, b, c$

e) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \quad \forall a, b \geq 0$

f) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c) \quad \forall a, b, c$

g) $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c) \quad \forall a, b, c$

h) $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c) \quad \forall a, b, c$

i) $\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2} \geq \sqrt{(a + b)^2 + (x + y)^2} \quad \forall a, b, x, y$

2. Bất đẳng thức Cauchy

a) Cauchy cho 2 số $a, b \geq 0$ là: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, dấu '=' xảy ra khi $a = b$

b) Cauchy cho 3 số $a, b, c \geq 0$ là: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, dấu '=' xảy ra khi $a = b = c$

c) Cauchy cho n số $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ là: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$, dấu '=' xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

Hệ quả: Cho $a, b, c > 0$ ta có:

$$1) ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$4) abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27}$$

$$2) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

$$5) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

$$3) \frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2}$$

$$6) \frac{1}{abc} \geq \frac{27}{(a+b+c)^3}$$

$$7) a^{m+n} + b^{m+n} \geq a^m b^n + a^n b^m$$

3. Bất đẳng thức Bunhiacopski

Cho a, b, c và x, y, z là các số thực bất kì. Ta có

$$1) (ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2), \text{ dấu '=' xảy ra khi } \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

$$2) (ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2), \text{ dấu '=' xảy ra khi } \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Hệ quả: Cho a, b, c tùy ý và $x, y, z > 0$, ta có:

$$a) \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}, \text{ dấu '=' xảy ra khi } \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

$$b) \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \text{ dấu '=' xảy ra khi } \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

B. Bất phương trình

1. Dấu nhị thức bậc nhất

Nhị thức bậc nhất có dạng $f(x) = ax + b$

$$\text{Phương trình } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Bảng xét dấu thể hiện như sau:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	trái dấu với a	0	cùng dấu với a

Quy tắc: Phải cùng – trái khác

2. Dấu tam thức bậc hai

Tam thức bậc hai có dạng: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tính $\Delta = b^2 - 4ac$

a) Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi x

b) Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$

c) Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x) = ax^2 + bx + c$	cùng dấu với a	0	trái dấu với a	0	cùng dấu với a

Quy tắc: Trong trái – ngoài cùng

3. Bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

Là bất phương trình có một trong các dạng: $ax + by + c < 0$, $ax + by + c > 0$,...

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ thỏa mãn: $ax_0 + by_0 + c < 0$ được gọi là một nghiệm của bất pt: $ax + by + c < 0$

Cách xác định miền nghiệm của bất phương trình: $ax + by + c < 0$ (1)

Bước 1: Vẽ đường thẳng d: $ax + by + c = 0$.

Bước 2: Xét một điểm $M(x_0; y_0)$ không thuộc d.

- Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ d) chứa điểm M sẽ là miền nghiệm bất pt (1)
- Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ d) không chứa điểm M sẽ là nghiệm bất pt (1).

4. Hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn.

Là hệ có dạng
$$\begin{cases} f(x, y) > 0 \\ g(x, y) < 0 \\ h(x, y) \geq 0 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Cách xác định miền nghiệm của hệ như sau:

- Với mỗi bất phương trình trong hệ ta xác định miền nghiệm của nó và gạch bỏ miền còn lại.
- Sau khi làm như trên lần lượt đối với tất cả các bất phương trình trong hệ trên cùng một mặt phẳng tọa độ, miền còn lại không bị gạch chính là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

5. Cách giải bất phương trình một ẩn

Bước 1: giải tử số và giải mẫu số (nếu có) để tìm các nghiệm

Bước 2: Lập bảng xét dấu (chú ý: nghiệm x được xếp từ nhỏ đến lớn)

Dùng quy tắc xét dấu nhị thức bậc nhất và dấu tam thức bậc hai để điền dấu

Bước 3: Dựa vào bảng xét dấu để kết luận nghiệm bất phương trình.

CHƯƠNG VI: GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC**A. Góc và cung lượng giác****1. Độ**

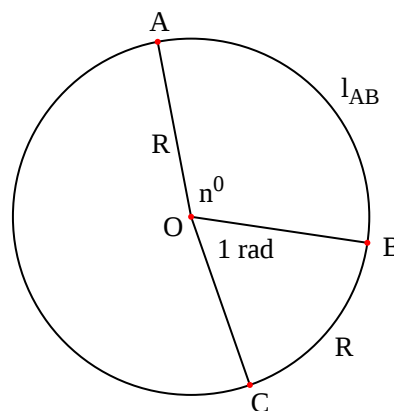
Cho đường tròn $(O; R)$, góc $AOB = n^\circ$.

Khi đó độ dài cung AB là: $l_{AB} = \frac{\pi R n}{180}$

2. Định nghĩa radian: Cung tròn có độ dài bằng bán kính R gọi là cung có số đo 1 rad.

Giả sử góc $AOB = \alpha$ rad thì độ dài cung AB là: $l_{AB} = \alpha \cdot R$

3. Mối liên hệ giữa độ và radian: $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{n}{180}$



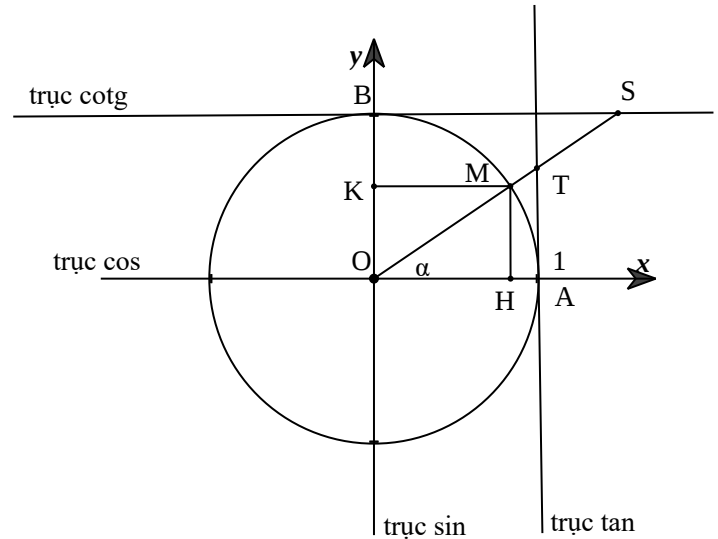
4. Đường tròn lượng giác

a) $\cos \alpha = \overline{OH}$

b) $\sin \alpha = \overline{OK}$

c) $\tan \alpha = \overline{AT}$

d) $\cot \alpha = \overline{BS}$

**B. Công thức lượng giác****1. Công thức cơ bản**

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} ; \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$-1 \leq \sin \alpha, \cos \alpha \leq 1$ $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha ; \quad \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$ $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha ; \quad \cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha$
---	---

2. Giá trị lượng giác của cung có liên quan đặc biệt

Cung đối nhau: α và $-\alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	Cung bù nhau: α và $\pi - \alpha$ $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	Cung hơn kém: α và $\pi + \alpha$ $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$
Cung phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$	Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$: α và $\frac{\pi}{2} + \alpha$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$	

3. Công thức lượng giác

Công thức cộng $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$ $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$ $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$	Công thức nhân đôi, nhân ba $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ $= 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$ $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$ $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$ $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$ $\tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a}$	Công thức hạ bậc $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$ $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$ $\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$
Công thức biến đổi tích thành tổng $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$ $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$ $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$	Công thức biến đổi tổng thành tích $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$ $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$	Đặc biệt $\sin a \pm \cos a$ $= \sqrt{2} \sin\left(a \pm \frac{\pi}{4}\right)$ $\sin a - \cos a$ $= -\sqrt{2} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$

LÍ THUYẾT ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH LỚP 11

CHƯƠNG 1: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A. Hàm số lượng giác

Hàm số $y = \sin x$	Hàm số $y = \cos x$
TXĐ: $\mathbb{R}$ Tập giá trị: $[-1 ; 1]$ - Là hàm số lẻ - Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π - Đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi ; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ - Nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi ; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$	TXĐ: $\mathbb{R}$ Tập giá trị: $[-1 ; 1]$ - Là hàm số chẵn - Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π - Đồng biến trên $(-\pi + k2\pi ; k2\pi)$ - Nghịch biến trên $(k2\pi ; \pi + k2\pi)$
Hàm số $y = \tan x$	Hàm số $y = \cot x$
TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ Tập giá trị: $\mathbb{R}$ - là hàm số lẻ - Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π - Đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ - Nhận đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ là tiệm cận đứng	TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ Tập giá trị: $\mathbb{R}$ - là hàm số lẻ - Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π - Nghịch biến trên $(k\pi ; \pi + k\pi)$ - Nhận đường thẳng $x = k\pi$ là tiệm cận đứng

B. Phương trình lượng giác cơ bản

1. Phương trình: $\sin f(x) = m$ (1)

+ Nếu $m > 1$ hoặc $m < -1$ thì pt (1) vô nghiệm.

+ Nếu $-1 \leq m \leq 1$ thì: $\sin f(x) = m \Leftrightarrow \sin f(x) = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \alpha + k2\pi \\ f(x) = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}$

2. Phương trình: $\cos f(x) = m$ (2)

+ Nếu $m > 1$ hoặc $m < -1$ thì pt (2) vô nghiệm.

+ Nếu $-1 \leq m \leq 1$ thì: $\cos f(x) = m \Leftrightarrow \cos f(x) = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \alpha + k2\pi \\ f(x) = -\alpha + k2\pi \end{cases}$

3. Phương trình $\tan f(x) = m$ (3)

+ Phương trình (3) có nghiệm với mọi m . Khi đó:

$$\tan f(x) = m \Leftrightarrow \tan f(x) = \tan \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha + k\pi$$

4. Phương trình $\cot f(x) = m$ (4)

+ Phương trình (4) có nghiệm với mọi m . Khi đó:

$$\cot f(x) = m \Leftrightarrow \cot f(x) = \cot \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha + k\pi$$

5. Phương trình đặc biệt

$\sin f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$	$\cos f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = k2\pi$	$\tan f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\pi}{4} + k\pi$
$\sin f(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$	$\cos f(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) = \pi + k2\pi$	$\tan f(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$
$\sin f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = k\pi$	$\cos f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\tan f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = k\pi$

C. Phương trình lượng giác thường gặp

1. Phương trình: $a.\sin^2 x + b.\sin x + c = 0$

Phương pháp giải: Ta đặt $t = \sin x$ ($t = \cos x$). Điều kiện: $-1 \leq t \leq 1$ rồi đưa về phương trình bậc hai.

Chú ý: đặt $t = \tan x$ $t = \cot x$ thì t không cần điều kiện.

2. Phương trình bậc nhất đối với $\sin$ và $\cos$ có dạng: $A \sin x + B \cos x = C$ (1)

+ Phương trình trên có nghiệm khi $A^2 + B^2 \geq C^2$

+ Cách giải: Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{A^2 + B^2}$

$$\begin{aligned} \text{Pt (1)} &\Leftrightarrow \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ &\Leftrightarrow \cos \alpha . \sin x + \sin \alpha . \cos x = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{trong đó: } \cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} ; \sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ &\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} . \quad \text{đến đây ta giải bình thường.} \end{aligned}$$

3. Phương trình thuần nhất bậc hai với $\sin$ và $\cos$

$$\text{Có dạng: } a.\sin^2 x + b.\sin x.\cos x + c.\cos^2 x = d \quad (2)$$

Cách giải: + TH1: Xét xem $\cos x = 0$ có là nghiệm pt (2) hay không?

TH2: Chia hai vế của pt (2) cho $\cos^2 x$

$$\begin{aligned} \text{Pt (2)} &\Leftrightarrow a.\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b.\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} + c.\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = d.\frac{1}{\cos^2 x} \\ &\Leftrightarrow a.\tan^2 x + b.\tan x + c = d(1 + \tan^2 x) \\ &\Leftrightarrow (a - d)\tan^2 x + b.\tan x + (c - d) = 0 \quad \text{đến đây ta giải bình thường.} \end{aligned}$$

4. Phương trình đối xứng

$$\text{Có dạng: } a.(\sin x \pm \cos x) + b.\sin x \cos x + c = 0 \quad (3)$$

Cách giải: đặt $t = \sin x \pm \cos x$, điều kiện: $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

$$t^2 = (\sin x \pm \cos x)^2 \Leftrightarrow t^2 = 1 \pm 2 \sin x \cos x$$

Từ đó ta đưa pt (3) về phương trình bậc hai ẩn t.

D. Tìm Max – Min của hàm số lượng giác

1. Hàm số cơ bản: $y = A \cdot \sin f(x) + B$

Cách giải: Ta dùng nhận xét: $-1 \leq \sin f(x), \cos f(x) \leq 1$ là xong.

2. Hàm số dạng: $y = a \cdot \sin^2 f(x) + b \cdot \sin f(x) + c$

Cách giải: ta đặt $t = \sin f(x)$ (chú ý: ta dựa vào điều kiện của x để tìm điều kiện của t chính xác)

Khi đó bài toán quy về tìm Max – Min hàm $y = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$

(Ta dựa vào bảng biến thiên của hàm số Parabol lớp 10 để tìm max – min)

3. Hàm số dạng: $y = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x + c$

Cách giải: ta biến đổi như sau:

$$y = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x + c$$

$$y = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) + c$$

$$y = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \cdot \sin x + \sin \alpha \cdot \cos x) + c$$

$$y = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha) + c$$

Nhận xét: $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha) \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} + c \leq y \leq \sqrt{a^2 + b^2} + c$$

Vậy: $\text{Max}_y = \sqrt{a^2 + b^2} + c$; $\text{Min}_y = -\sqrt{a^2 + b^2} + c$

CHƯƠNG 2: TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

A. Tổ hợp

1. Hai quy tắc đếm

a) **Quy tắc cộng:** giả sử một công việc có thể được làm theo 2 cách. Cách một có m cách làm, cách hai có n cách làm. Khi đó ta có $(m + n)$ cách làm công việc đó.

b) **Quy tắc nhân:** giả sử một công việc bao gồm 2 công đoạn. Công đoạn một có n cách làm, với mỗi cách thực hiện công đoạn một thì công đoạn hai có m cách làm. Khi đó công việc có $n \cdot m$ cách làm.

2. Hoán vị

a) Định nghĩa: Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp n phần tử của tập A theo một thứ tự thì ta gọi là một hoán vị của tập A.

b) Số các hoán vị của n phần tử là $n! = n.(n-1).(n-2).(n-3)...3.2.1$

3. Chỉnh hợp

a) Định nghĩa: Cho tập A gồm n phần tử. Khi lấy ra k phần tử của tập A và với mỗi cách sắp xếp k phần tử của tập A gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.

b) Để tính số các chỉnh hợp chập k của n phần tử ta dùng công thức: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

4. Tổ hợp

a) Định nghĩa: Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

b) Để tính số tổ hợp chập k của n phần tử ta dùng công thức sau: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

c) Tính chất tổ hợp

$$C_n^k = C_n^{n-k} ; \quad C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k ; \quad k.C_n^k = n.C_{n-1}^{k-1} ; \quad \frac{1}{k+1}.C_n^k = \frac{1}{n+1}.C_{n+1}^{k+1}$$

B. Nhị thức Niuton

Xét khai triển: $(a+b)^n = C_n^0.a^n + C_n^1.a^{n-1}b + C_n^2.a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n.b^n$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k.a^{n-k}b^k$$

Trong khai triển trên ta chú ý:

+ Khai triển trên gồm $(n+1)$ số hạng

+ Số hạng tổng quát thứ $(k+1)$ là $T_{k+1} = C_n^k.a^{n-k}b^k$

+ Số hạng không chứa x , nghĩa là số mũ của x bằng 0.

Chú ý: Xét khai triển $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1.x + C_n^2.x^2 + \dots + C_n^{n-1}.x^{n-1} + C_n^n.x^n$ (1)

+ Thay $x = 1$ vào hai vế của (1) ta được: $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n$

+ Thay $x = -1$ vào hai vế của (1) ta được: $0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n$

+ Đạo hàm hai vế của (1) ta được: $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2C_n^3 + \dots + nx^{n-1}C_n^n$ (2)

Thay $x = 1$ vào hai vế của (2) ta được: $n.2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$

+ Tích phân hai vế của (1) ta được:

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 (C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + x^3C_n^3 + \dots + x^nC_n^n) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \left(xC_n^0 + \frac{x^2}{2}C_n^1 + \frac{x^3}{3}C_n^2 + \dots + \frac{x^{n+1}}{n+1}C_n^n \right) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{n+1}}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$$

C. Xác suất

1. Phép thử - không gian mẫu – biến cố

a) Phép thử là một hành động thỏa mãn hai điều kiện:

- + Kết quả của nó không đoán trước được
- + Biết trước được tất cả các kết quả xảy ra của phép thử đó.

b) Không gian mẫu là tập hợp tất cả các kết quả của phép thử, ta kí hiệu là Ω

c) Biến cố A liên quan đến phép thử T là một sự kiện mà việc xảy ra hay không xảy ra A phụ thuộc vào kết quả của phép thử T.

- + Mỗi kết quả của phép thử T mà làm cho biến cố A xảy ra gọi là kết quả thuận lợi cho A.
- + Số kết quả thuận lợi của A kí hiệu là $n(A)$

2. Xác suất của biến cố A được tính bởi công thức: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$

Trong đó: $n(A)$ là số kết quả thuận lợi của A, còn $n(\Omega)$ số kết quả của không gian mẫu.

Tính chất xác suất: $0 \leq P(A) \leq 1$

D. Quy tắc tính xác suất

1. Các phép toán về biến cố

a) Biến cố hợp: Cho hai biến cố A, B. Hợp hai biến cố A, B kí hiệu là $A \cup B$: ‘A hoặc B xảy ra’

b) Biến cố xung khắc: Hai biến cố A, B gọi là xung khắc với nhau nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

c) Biến cố đối của A kí hiệu là $\bar{A}$: ‘Không xảy ra A’

Chú ý: + $A \cup \bar{A} = \Omega$

+ Hai biến cố đối nhau là hai biến cố xung khắc, ngược lại không đúng.

d) Biến cố giao: Cho hai biến cố A, B. Giao hai biến cố A, B kí hiệu là AB : ‘A và B cùng xảy ra’

e) Biến cố độc lập: Hai biến cố A, B gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra biến cố này không làm ảnh hưởng tới việc xảy ra biến cố kia.

Chú ý: Nếu A, B độc lập thì các cặp $(A, \bar{B})$; $(\bar{A}, B)$; $(\bar{A}, \bar{B})$ cũng độc lập.

2. Công thức tính xác suất

a) Quy tắc cộng xác suất: Nếu A, B là hai biến cố xung khắc thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Chú ý: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

b) Quy tắc nhân xác suất: Nếu A, B là hai biến cố độc lập thì $P(AB) = P(A).P(B)$

CHƯƠNG 3: Dãy số - Cấp số cộng – Cấp số nhân

A. Phương pháp quy nạp toán học

Để chứng minh mệnh đề $A(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n , ta làm theo hai bước:

Bước 1: Chứng minh $A(n)$ đúng khi $n = 1$.

Bước 2: giả sử mệnh đề $A(n)$ đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là $A(k)$ đúng. (gọi là giả thiết quy nạp)

Ta phải chứng $A(n)$ đúng với $n = k + 1$.

Chú ý: Khi mệnh đề $A(n)$ đúng với $n = p$ trở đi thì ở bước 1 ta kiểm tra $n = p$.

B. Dãy số

1. Định nghĩa: Một hàm số $u(n)$ xác định trên tập số nguyên dương N^* được gọi là một dãy số.

Ta gọi $u(1)$, $u(2)$ là số hạng thứ nhất, số hạng thứ hai của dãy. Ta kí hiệu $u(1)$, $u(2)$ sẽ là $u_1, u_2, \dots$

2. Dãy số tăng, dãy số giảm

a) (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow u_n < u_{n+1}, \forall n$

b) (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow u_n > u_{n+1}, \forall n$

Chú ý: Để chứng minh dãy số tăng, giảm ta có 2 cách

Cách 1: ta xét hiệu $u_{n+1} - u_n$

Cách 2: ta xét thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

3. Dãy số bị chặn

a) (u_n) là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in N^*$

b) (u_n) là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in N^*$

c) (u_n) là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên và dưới, nghĩa là $m \leq u_n \leq M, \forall n \in N^*$

C. Cấp số cộng – cấp số nhân

Cấp số cộng	Cấp số nhân
a) Định nghĩa: (u_n) là CSC $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d$	a) Định nghĩa: (u_n) là CSN $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n \cdot q$
b) Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 + (n - 1)d$	b) Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$
c) Tính chất: $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$	c) Tính chất: $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$
d) Tổng n số hạng đầu của CSC: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$	d) Tổng n số hạng đầu của CSN: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$

CHƯƠNG 4: GIỚI HẠN**A. Giới hạn dãy số****1. Một số giới hạn cơ bản**

$$\lim \frac{1}{n^\alpha} = 0 \quad (\alpha \text{ nguyên dương}) ; \quad \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 ; \quad \lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$$

Định lí 1: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) . Nếu $\begin{cases} |u_n| \leq v_n \\ \lim v_n = 0 \end{cases}$ thì $\lim u_n = 0$

Định lí 2: Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$

Định lí 3: Nếu $\lim u_n = A$ thì:

a) $\lim |u_n| = |A|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{A}$

b) Nếu $u_n \geq 0, \forall n$ thì $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{A}$

Định lí 4: Cho $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ ta có:

a) $\lim (u_n \pm v_n) = \lim u_n \pm \lim v_n = a \pm b$

b) $\lim (u_n v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n = a \cdot b$

c) $\lim (k \cdot u_n) = k \cdot \lim u_n = k \cdot a$

d) $\lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{\lim u_n}{\lim v_n} = \frac{a}{b}$

2. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân (u_n) có công bội q gọi là cấp số nhân lùi vô hạn nếu $-1 < q < 1$.

Tổng cấp số nhân lùi vô hạn là: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1-q}$

3. Dãy số có giới hạn vô cực

Định lí: Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$

Quy tắc 1

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim (u_n v_n)$ là

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim (u_n v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc 2

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = A$ thì $\lim(u_n v_n)$ là:

$\lim u_n$	Dấu của A	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	-	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	-	$+\infty$

Quy tắc 3

Nếu $\lim u_n = A$; $\lim v_n = 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ là:

Dấu của A	Dấu của v_n	$\lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right)$
+	+	$+\infty$
+	-	$-\infty$
-	+	$-\infty$
-	-	$+\infty$

4. Cách tìm giới hạn dãy số

Xét giới hạn $\lim \frac{f(n)}{g(n)}$

+ Nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các đa thức ta chia cả tử và mẫu cho n có số mũ cao nhất, rồi áp dụng các giới hạn đặc biệt để làm.

+ Nếu $f(n)$, $g(n)$ có chứa căn thức thì ta cần nhân liên hợp để đưa về dạng cơ bản để làm.

+ Nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm mũ thì ta chia cả tử và mẫu cho cơ số lớn nhất.

B. Giới hạn hàm số**1. Các định nghĩa giới hạn hàm số**

a) Định nghĩa giới hạn hàm số tại một điểm: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là A khi x dần tới x_0 , kí hiệu là $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì mà $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = A$.

Nghĩa là: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in K \setminus \{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = A$.

b) Định nghĩa giới hạn vô cực: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

Ta nói $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in K \setminus \{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = +\infty$

Giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

c) Định nghĩa giới hạn hàm số tại vô cực: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$

Ta nói $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n > a \text{ mà } \lim x_n = +\infty \text{ ta đều có } \lim f(x_n) = A$

Các giới hạn tại vô cực khác được định nghĩa tương tự.

2. Các giới hạn đặc biệt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c; \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty, & k \text{ chẵn} \\ -\infty, & k \text{ lẻ} \end{cases}$$

3. Một số định lý về giới hạn hữu hạn

Định lý 1: Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Khi đó

$$a) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \pm b$$

$$b) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x). \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a.b; \lim_{x \rightarrow x_0} k.f(x) = k. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k.a$$

$$c) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{a}{b}$$

Định lý 2: Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, khi đó:

$$a) \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$$

$$b) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$$

$$c) \text{ Nếu } f(x) \geq 0 \text{ thì } A \geq 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$$

4. Giới hạn một bên

a) Định nghĩa giới hạn một bên:

+ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn bên phải x_0 , kí hiệu là

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in (x_0; b) \text{ mà } \lim x_n = x_0 \text{ ta đều có } \lim f(x_n) = A$$

+ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn bên trái x_0 , kí hiệu là

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in (a; x_0) \text{ mà } \lim x_n = x_0 \text{ ta đều có } \lim f(x_n) = A$$

$$\text{Chú ý: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

5. Các quy tắc tìm giới hạn vô cực

$$\text{Định lý 1: Nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \text{ thì } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Quy tắc 1: tìm giới hạn $f(x).g(x)$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)]$ được tính bởi bảng sau:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)]$
$A > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$A < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc 2: Tìm giới hạn $\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của g(x)	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
A	$\pm \infty$	Tùy ý	0
A > 0	0	+	$+\infty$
		-	$-\infty$
A < 0		+	$-\infty$
		-	$+\infty$

6. Cách tìm giới hạn hàm số các dạng vô định

Xét giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

a) Dạng vô định $\frac{0}{0}$

+ Ta phân tích tử và mẫu thành các nhân tử rồi rút gọn

+ Nếu $f(x)$, $g(x)$ là các biểu thức chứa căn ta nhân cả tử và mẫu với liên hợp sau đó phân tích thành nhân tử để rút gọn.

b) Dạng $\frac{\infty}{\infty}$

+ Ta chia cả tử và mẫu cho x có số mũ cao nhất

+ Nếu $f(x)$, $g(x)$ có chứa căn thì ta biến đổi trong căn trước rồi mới chia cả tử và mẫu cho x có số mũ cao nhất.

c) Dạng $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$

+ Nếu $f(x)$ chứa căn thì ta nhân và chia cho biểu thức liên hợp.

+ Nếu biểu thức chứa nhiều phân thức thì ta quy đồng mẫu và đưa về cùng một biểu thức.

d) Hàm lượng giác dạng $\frac{0}{0}$

Ta dùng các công thức sau: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$; $\lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\tan u(x)}{u(x)} = 1$

C. Hàm số liên tục

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

TH1: Xét hàm số $f(x) = \begin{cases} A(x) & \text{khi } x \neq x_0 \\ B(x) & \text{khi } x = x_0 \end{cases}$ thì $f(x)$ liên tục tại x_0 khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

TH2: Xét hàm số $f(x) = \begin{cases} A(x) & \text{khi } x \geq x_0 \\ B(x) & \text{khi } x < x_0 \end{cases}$ thì $f(x)$ liên tục tại x_0 khi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 thì ta nói $f(x)$ gián đoạn tại x_0

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, một đoạn

a) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó. Nghĩa là $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $\forall x_0 \in (a, b)$

b) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \forall x_0 \in (a, b) \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b) \end{cases}$

3. Các định lí

Định lí 1: Hàm đa thức, hàm phân thức hữu tỉ, hàm lượng giác liên tục trên tập xác định của chúng.

Định lí 2: Nếu $f(x)$, $g(x)$ là các hàm liên tục tại x_0 thì các hàm $f(x) \pm g(x)$, $f(x).g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng liên tục tại x_0

Định lí 3 (Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại số $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$ (nghĩa là phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $c \in (a, b)$)

CHƯƠNG 5: ĐẠO HÀM

A. Khái niệm đạo hàm

1. Định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm

a) Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D và $x_0 \in D$. Đạo hàm của hàm $f(x)$ tại x_0 kí hiệu là $f'(x_0)$ và được tính bởi công thức: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (1)

+ Nếu ta đặt $\Delta x = x - x_0$ (Δx gọi là số gia của biến số tại x_0) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (Δy là số gia của hàm số) thì công thức (1) có dạng:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (2)$$

b) Quy tắc tính đạo hàm của $f(x)$ tại x_0

Bước 1: Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Bước 2: Tính giới hạn $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

c) Tính chất đạo hàm

Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì sẽ liên tục tại điểm đó, ngược lại không đúng. Như vậy hàm số không liên tục tại x_0 thì sẽ không có đạo hàm tại điểm đó.

2. Công thức tính đạo hàm

a) Quy tắc tính đạo hàm

$$+ (f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$+ (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \text{và} \quad (k \cdot f)' = k \cdot f'$$

$$+ \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

b) Bảng đạo hàm các hàm cơ bản

Đạo hàm hàm cơ bản	Đạo hàm hàm hợp
$(k)' = 0$ $(kx)' = k$ $(x)' = 1$ $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ $\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ $\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$ $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$ $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $(e^x)' = e^x$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ $(e^u)' = u' \cdot e^u$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

3. Đạo hàm cấp cao

Định nghĩa: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$

+ Đạo hàm cấp hai của $f(x)$ là $f''(x) = [f'(x)]'$

+ Đạo hàm cấp ba của $f(x)$ là $f'''(x) = [f''(x)]'$

+ Tương tự như vậy, đạo hàm cấp n của $f(x)$ là $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$

B. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

1. Phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) , điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Trong đó $f'(x_0)$ gọi là hệ số góc của tiếp tuyến.

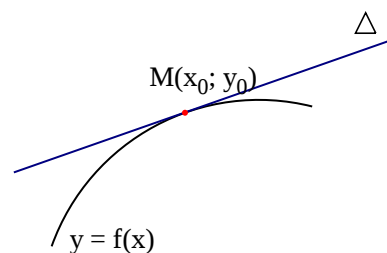
Chú ý: + Hai đường thẳng song song thì hệ số góc bằng nhau.

+ Hai đường thẳng vuông góc thì tích hệ số góc bằng -1

+ Đường thẳng (d) có dạng: $y = ax + b$ thì a là hệ số góc của (d)

+ Đường thẳng (d) có hệ số góc là a , đường thẳng (d') có hệ số góc là k và $\alpha = (d, d')$. Khi đó ta

có công thức sau: $\tan \alpha = \left| \frac{k - a}{1 + ka} \right|$



2. Viết phương trình tiếp tuyến nếu biết trước hệ số góc

Bài toán: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$, biết tiếp tuyến có hệ số góc là k .

Phương pháp giải:

Bước 1: Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến.

Bước 2: Tính $y' = f'(x)$, sau đó giải phương trình $f'(x_0) = k$ từ đó tìm được x_0 rồi suy ra $y_0 = f(x_0)$

Bước 3: Khi tìm được tiếp điểm M rồi ta dùng công thức ở trên để viết phương trình tiếp tuyến.

3. Viết phương trình tiếp tuyến đi qua một điểm

Bài toán: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$, biết tiếp tuyến đi qua $A(x_1; y_1)$

Phương pháp giải:

Bước 1: Gọi đường thẳng (d) đi qua $A(x_1; y_1)$ và nhận k làm hệ số góc thì (d) có dạng: $y = k(x - x_1) + y_1$

Bước 2: Để (d) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ thì hệ sau có nghiệm
$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_1) + y_1 \\ f'(x) = k \end{cases}$$

Ta giải hệ trên để tìm x sau đó tìm k , thay k tìm được vào đường thẳng (d) là xong. (Có bao nhiêu k thì ứng với bấy nhiêu tiếp tuyến).

C. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

1. Vận tốc tức thời

Xét chuyển động thẳng có phương trình $s = f(t)$. Khi đó vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$

2. Gia tốc tức thời

Xét chuyển động có phương trình $s = s(t)$, gia tốc tức thời tại t_0 là $a(t_0) = s''(t_0)$

3. Cường độ tức thời

Dòng điện có điện lượng $Q = Q(t)$ thì cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0 là $I(t_0) = Q'(t_0)$

D. Vi phân

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng (a, b) và có đạo hàm trên khoảng đó. Vi phân hàm $f(x)$ ta kí hiệu $df(x)$ (hay dy) tính bởi công thức: $df(x) = f'(x).dx$ (hay $dy = y'.dx$)

2. Ứng dụng phép vi phân để tính số gần đúng

Từ công thức tính đạo hàm bằng định nghĩa: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Với $|\Delta x|$ đủ nhỏ, thì $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

$$\Leftrightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$$

LÍ THUYẾT GIẢI TÍCH LỚP 12

CHƯƠNG 1: ỨNG DỤNG VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ

A. Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D .

$+ y = f(x)$ đồng biến trên $D \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in D$

$+ y = f(x)$ nghịch biến trên $D \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in D$ (dấu '=' chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm)

Chú ý: Với hàm $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ thì $f(x)$ đồng biến khi $f'(x) > 0$ và nghịch biến khi $f'(x) < 0$

2. Các bước xét tính đơn điệu của hàm $y = f(x)$

Bước 1: Tìm TXĐ

Bước 2: Tính y' và giải phương trình $y' = 0$ để tìm các nghiệm

Bước 3: Lập bảng biến thiên rồi kết luận (Khi điền giá trị x vào bảng biến thiên thì ta xếp từ nhỏ đến lớn và bao gồm cả giá trị x vi phạm điều kiện).

3. Các dạng toán thường gặp

Dạng 1: Tìm m để hàm số $y = f(x, m)$ đơn điệu trên tập xác định (ta làm theo định nghĩa)

Bước 1: Tìm TXĐ

Bước 2: Tính y' , để hàm số đồng biến trên TXĐ thì $y' \geq 0$, nghịch biến trên TXĐ thì $y' \leq 0$

Chú ý: $ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac \leq 0 \end{cases}$; $ax^2 + bx + c \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac \leq 0 \end{cases}$

Dạng 2: Tìm m để hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên khoảng (a, b) là tập con của TXĐ

Bước 1: Tính y' , để hàm số đồng biến trên khoảng (a, b) thì $y' \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$, hàm số nghịch biến trên (a, b) thì $y' \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

Đến đây ta có 2 cách làm.

Cách 1: Nếu không cô lập được m thì ta làm theo tam thức bậc hai.

Cách 2: Nếu cô lập được m thì ta biến đổi $y' \geq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow g(x) \geq h(m)$. Ta lập bảng biến thiên hàm $g(x)$ rồi dựa vào bảng biến thiên để kết luận m .

Chú ý: $f(x) \geq m \quad \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow \min_{(a,b)} f(x) \geq m$

$f(x) \leq m \quad \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow \max_{(a,b)} f(x) \leq m$

B. Cực trị của hàm số

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

$+ x_0$ gọi là điểm cực đại của hàm số $f(x)$ nếu có khoảng (a, b) mà $x_0 \in (a, b)$ và $f(x) < f(x_0), \quad \forall x \in (a, b)$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số.

+ x_1 gọi là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$ nếu có khoảng (a, b) mà $x_1 \in (a, b)$ và $f(x) > f(x_1), \forall x \in (a, b)$. Khi đó $f(x_1)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số.

Chú ý: - Điểm cực đại, điểm cực tiểu gọi chung là điểm cực trị.

- Giá trị cực đại, giá trị cực tiểu gọi chung là cực trị.

- Điểm $(x_0; f(x_0))$ gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)$.

2. Định lý 1: Nếu hàm $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và x_0 là điểm cực trị thì $f'(x_0) = 0$.

Định lý 2: Điểm cực trị được nhận biết qua bảng sau

x	a	x_0	b
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$		$f(x_0)$ (cực tiểu)	

x	a	x_0	b
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$		$f(x_0)$ (cực đại)	

3. Quy tắc 1 tìm cực trị hàm $y = f(x)$

Bước 1: Tìm TXĐ

Bước 2: Tính y' , giải phương trình $y' = 0$ để tìm các nghiệm

Bước 3: Lập bảng biến thiên rồi ta kết luận (giá trị x trong bảng biến thiên gồm các nghiệm pt $y' = 0$ và các giá trị vi phạm điều kiện).

4. Quy tắc 2 tìm cực trị hàm số $y = f(x)$.

Bước 1: Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x) = 0$ để tìm các nghiệm x_0

Bước 2: Tính $f''(x)$ và tính giá trị $f''(x_0)$.

+ Nếu $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số

+ Nếu $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.

Chú ý: Với hàm lượng giác thì ta dùng quy tắc 2 tìm cực trị. Hoặc với bài tìm tham số m ta cũng dùng quy tắc 2 làm cho nhanh.

5. Bài toán liên quan đến tìm m để hàm số có cực trị

a) Hàm số bậc ba, hoặc hàm phân thức bậc hai / bậc nhất có cực trị (2 cực trị) khi phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

b) Công thức tính nhanh

+ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có cực trị khi $b^2 - 3ac > 0$ và $a \neq 0$.

+ $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị khi $ab < 0$, và có 1 cực trị khi $ab \geq 0$

c) Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.

Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

6. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

+ Với hàm đa thức bậc ba, ta thường có hai cách làm

Cách 1: Nếu phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm đẹp thì ta tìm trực tiếp hai điểm cực trị A, B và viết phương trình đường thẳng AB có dạng: $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$

Cách 2: Nếu phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm xấu, thì ta chia $f(x)$ cho $f'(x)$ sẽ có dạng:

$f(x) = p(x) \cdot f'(x) + q(x)$. Khi đó $y = q(x)$ là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số.

+ Với hàm bậc hai / bậc nhất $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ thì phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là $y = \frac{f'(x)}{g'(x)}$

C. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D và $x_0; x_1 \in D$

+ $f(x_0)$ được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ nếu $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D$. Kí hiệu: $\max_D f(x) = f(x_0)$

+ $f(x_1)$ được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ nếu $f(x) \geq f(x_1) \quad \forall x \in D$. Kí hiệu: $\min_D f(x) = f(x_1)$

2. Quy tắc tìm max – min của hàm số $y = f(x)$ trên một khoảng

Bước 1: Tìm TXĐ (nếu đề bài chưa cho trước khoảng nào)

Bước 2: Tính y' và giải phương trình $y' = 0$ để tìm các nghiệm

Bước 3: Lập bảng biến thiên rồi kết luận

3. Quy tắc tìm max – min của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a, b]$

Bước 1: Tính y' và giải phương trình $y' = 0$ để tìm các nghiệm $x_0 \in [a, b]$

Bước 2: Tính $f(a), f(b), f(x_0), \dots$. Khi đó giá trị lớn nhất là max, giá trị nhỏ nhất là min.

D. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

1. Định nghĩa: + Đường thẳng $y = b$ là tiệm cận ngang (TCN) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu một trong hai điều kiện sau thỏa mãn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$

+ Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng (TCD) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu một trong bốn điều kiện sau thỏa mãn: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$

2. Dấu hiệu nhận biết tiệm cận ngang

+ Hàm đa thức không có TCN

+ Xét hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ thì:

- Nếu bậc $f(x) >$ bậc $g(x)$ thì hàm số không có TCN

- Nếu bậc $f(x) <$ bậc $g(x)$ thì TCN là $y = 0$

- Nếu bậc $f(x) =$ bậc $g(x)$ thì TCN là $y =$ hệ số của x có số mũ cao nhất ở tử / hệ số của x có số mũ cao nhất ở mẫu. (nếu hàm chứa căn bậc hai thì ta chú ý có thể có hai TCN)

3. Dấu hiệu nhận biết tiệm cận đứng

+ $x = a$ là TCD của đồ thị hàm số nếu a là nghiệm của mẫu nhưng không là nghiệm của tử, đồng thời a phải thuộc TXĐ của hàm số.

+ Để tìm tiệm cận đứng của hàm số ta nên phân tích tử và mẫu thành các nhân tử rồi rút gọn cho đơn giản sau đó mới tìm tiệm cận đứng.

E. Bài toán tương giao

1. Các bước khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$

Bước 1: Tìm TXĐ

Bước 2: Sự biến thiên

+ Chiều biến thiên: Tính y' và giải phương trình $y' = 0$.

+ Bảng biến thiên

+ Kết luận: Tính đồng biến, nghịch biến và cực trị hàm số

+ Tìm giới hạn – tiệm cận

Bước 3: Vẽ đồ thị

+ Cần bảng giá trị các điểm

2. Dựa vào đồ thị biện luận số nghiệm phương trình

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng (d) $y = g(m)$ cắt đồ thị (C) theo yêu cầu bài toán.

Cách giải: Ta lập bảng biến thiên hàm $y = f(x)$, sau đó dựa vào bảng biến thiên ta kết luận m .

3. Bài toán tương giao

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị (C_2).

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $f(x) = g(x)$ (1)

Số nghiệm phương trình (1) chính là số giao điểm của hai đồ thị hàm số và ngược lại số giao điểm của hai đồ thị hàm số chính là số nghiệm phương trình (1).

F. Phương trình tiếp tuyến

1. Phương trình tiếp tuyến tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và điểm $M(x_0 ; y_0) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến tại M là:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$$

Trong đó $f'(x_0)$ được gọi là hệ số góc của tiếp tuyến và $M(x_0 ; y_0)$ gọi là tiếp điểm.

2. Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc k

Bước 1: Gọi $M(x_0 ; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến.

Bước 2: Giải phương trình $f'(x_0) = k$ để tìm x_0 từ đó tìm $y_0 = f(x_0)$, khi đó ta tìm được tiếp điểm M

Bước 3: Viết phương trình tiếp tuyến tại M giống phần trên.

Chú ý: + Đường thẳng (d_1) có hệ số góc là a , đường thẳng (d_2)

có hệ số góc là k . Gọi $\alpha = (d_1 ; d_2)$ thì

+ Hai đường thẳng song song thì hệ số góc bằng nhau

+ Hai đường thẳng vuông góc thì tích hệ số góc bằng -1

$$\tan \alpha = \left| \frac{a - k}{1 + ka} \right|$$

+ Đường thẳng (d) có dạng: $y = ax + b$ thì a được gọi là hệ số góc của d.

3. Phương trình tiếp tuyến đi qua một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ đồ thị (C), viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua $A(x_1; y_1)$.

Bước 1: Gọi (d) là đường thẳng qua A nhận k làm hệ số góc thì (d) có phương trình:

$$y = k.(x - x_1) + y_1$$

Bước 2: Để (d) là tiếp tuyến của (C) thì hệ phương trình:
$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_1) + y_1 & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$$
 có nghiệm

Ta thế (2) vào (1) để tìm x sau đó thay x vừa tìm được vào (2) để tìm k. Hệ phương trình có bao nhiêu k thì ứng với bấy nhiêu tiếp tuyến.

G. Cách vẽ đồ thị hàm trị tuyệt đối

Từ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ ta suy ra cách vẽ đồ thị hàm số

1. Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có đồ thị (C_1)

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía trên Ox, kí hiệu (T_1)

+ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm phía dưới Ox qua Ox, kí hiệu (T_2)

+ $(C_1) = (T_1) \cup (T_2)$

2. Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có đồ thị (C_2)

+ giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải Oy, kí hiệu (T_3)

+ Lấy đối xứng phần đồ thị (T_3) qua Oy, kí hiệu (T_4)

+ $(C_2) = (T_3) \cup (T_4)$

H. Phép tịnh tiến đồ thị

Từ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ ta suy ra cách vẽ đồ thị của hàm số:

1. $y = f(x - a)$. Ta di chuyển (C) sang phải a đơn vị.

$y = f(x + b)$. Ta di chuyển (C) sang trái b đơn vị.

2. $y = f(x) + p$. Ta di chuyển (C) lên trên p đơn vị

$y = f(x) - q$. Ta di chuyển (C) xuống dưới q đơn vị.

3. $y = m.f(x)$. Đồ thị (C) được giãn ra m lần theo trục Oy.

$y = f(nx)$. Đồ thị (C) được giãn ra $\frac{1}{n}$ lần theo trục Ox.

CHƯƠNG II: HÀM LŨY THỪA – HÀM MŨ – HÀM LÔGARIT

A. Công thức lũy thừa - logarit

1. Tính chất lũy thừa

+ $a^m . a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{m.n}$, $(ab)^n = a^n . b^n$

$$+ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \frac{1}{a^n} = a^{-n}, \frac{1}{a^{-n}} = a^n, \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (\text{ tử trong – mẫu ngoài })$$

$$+ \text{ Nếu } a > 1 \text{ thì } a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$$

$$+ \text{ Nếu } 0 < a < 1 \text{ thì } a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$$

2. Logarit

a) Định nghĩa: Logarit cơ số a của b , kí hiệu là $\log_a b$ được định nghĩa như sau:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c, \text{ điều kiện: } 0 < a \neq 1 \text{ và } b > 0$$

$$\text{Chú ý: } \log_{10} b \equiv \log b \equiv \lg b, \log_e b \equiv \ln b$$

$$+ \text{ Nếu } a > 1 \text{ thì } \log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$$

$$+ \text{ Nếu } 0 < a < 1 \text{ thì } \log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$$

b) Công thức

$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1, \log_a a^b = b, a^{\log_a b} = b$ $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$ $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$	$\log_a b^m = m \log_a b; \log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$
--	--

3. Đạo hàm hàm mũ và hàm logarit

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $(e^x)' = e^x$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ $(e^u)' = u' \cdot e^u$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
--	--	---	---

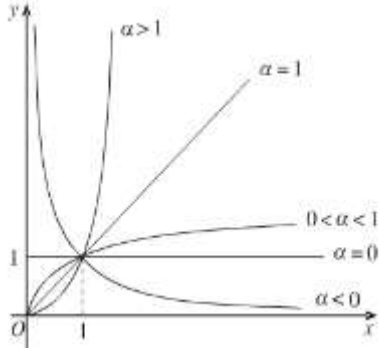
B. Hàm lũy thừa – hàm mũ – hàm logarit

1. Hàm lũy thừa: $y = x^\alpha$

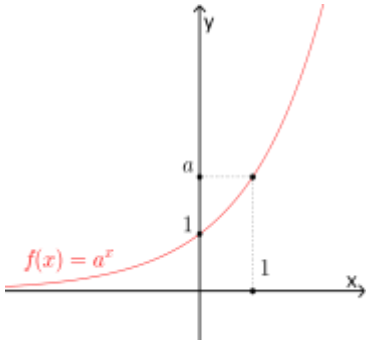
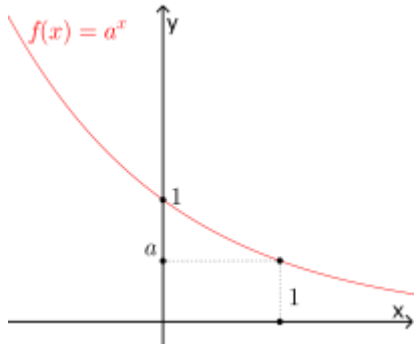
Cách tìm điều kiện hàm lũy thừa

a) Hàm cơ bản: $y = x^\alpha$ + Nếu α nguyên dương thì TXĐ: $\mathbb{R}$ + Nếu α nguyên âm thì TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ + Nếu α không nguyên thì TXĐ: $D = (0, +\infty)$	b) Hàm tổng quát: $y = [f(x)]^\alpha$ + Nếu α nguyên dương thì TXĐ: $\mathbb{R}$ + Nếu α nguyên âm thì điều kiện: $f(x) \neq 0$ + Nếu α không nguyên thì điều kiện: $f(x) > 0$
---	---

Khảo sát hàm lũy thừa

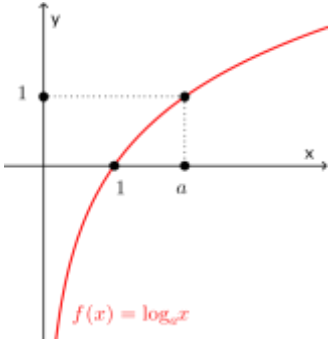
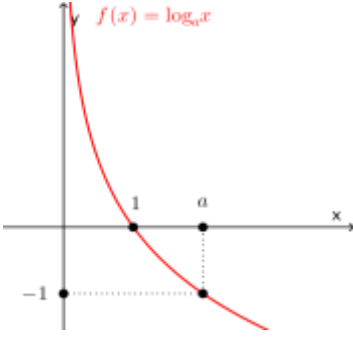
$y = x^\alpha \quad ; \alpha > 0$	$y = x^\alpha \quad ; \alpha < 0$
+ TXĐ: $D = (0; +\infty)$ + Sự biến thiên - hàm số đồng biến trên TXĐ - Hàm số không có tiệm cận + Đồ thị	+ TXĐ: $D = (0; +\infty)$ + Sự biến thiên - hàm số nghịch biến trên TXĐ - Hàm số có tiệm cận ngang là Ox ($y = 0$) và tiệm cận đứng là Oy ($x = 0$)
	

2. Khảo sát hàm số mũ

$y = a^x \quad ; a > 1$	$y = a^x \quad ; 0 < a < 1$
+ TXĐ: $\mathbb{R}$ + Sự biến thiên: - Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ - Hàm số có tiệm cận ngang Ox ($y = 0$) + Đồ thị	+ TXĐ: $\mathbb{R}$ + Sự biến thiên: - Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ - Hàm số có tiệm cận ngang Ox ($y = 0$) + Đồ thị
	

3. Khảo sát hàm logarit

$y = \log_a x \quad ; a > 1$	$y = \log_a x \quad ; 0 < a < 1$
+TXĐ: $D = (0; +\infty)$	+TXĐ: $D = (0; +\infty)$

+ Sự biến thiên - Hàm số đồng biến trên TXĐ - Hàm số có tiệm cận đứng Oy (x = 0) + Đồ thị 	+ Sự biến thiên - Hàm số nghịch biến trên TXĐ - Hàm số có tiệm cận đứng Oy (x = 0) + Đồ thị 
---	--

C. Phương trình mũ – phương trình logarit

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1; b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$ $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a, b \neq 1 \\ f(x) = g(x) \cdot \log_a b \end{cases}$ Chú ý: đặt $t = a^{f(x)}$ thì điều kiện $t > 0$ $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < g(x) \\ a = 1 \\ 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$ $a^{f(x)} < b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < \log_a b \\ 0 < a < 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases}$	$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) > 0 \end{cases}$ $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = a^b \end{cases}$ Chú ý: đặt $t = \log_a f(x)$ thì không cần điều kiện t $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \\ 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases}$ $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < \log_a b \\ 0 < a < 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases}$
--	---

Các phương pháp giải phương trình mũ – logarit

Cách 1: Phương pháp biến đổi tương đương về các dạng cơ bản ở trên

Cách 2: Phương pháp biến đổi đưa về phương trình tích

Cách 3: Phương pháp đặt ẩn phụ

- + Đặt ẩn phụ đưa về dạng cơ bản
- + Đặt ẩn phụ không hoàn toàn (gồm cả t và x trong phương trình), dạng này đặt khi Δ là số chính phương
- + Đặt ẩn phụ đưa về phương trình tích
- + Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình

Cách 4: Dùng phương pháp hàm số (Lí thuyết xem phần lớp 10)

Cách 5: Phương pháp đánh giá

Áp dụng tính chất bất đẳng thức, bất đẳng thức Côsi, Bunhia, trị tuyệt đối... ta đánh giá $VP \leq k$, $VT \geq k$.

dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} VP = k \\ VT = k \end{cases}$

Phương pháp tìm tham số m để phương trình có nghiệm thỏa mãn đề bài

Xét phương trình: $f(x, m) = 0$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có nghiệm thỏa mãn điều kiện A

- + Nếu phương trình đơn giản ta làm trực tiếp.
- + Nếu phương trình phức tạp ta làm theo các bước sau:

Bước 1: Đặt ẩn phụ t, dựa vào điều kiện của x để tìm điều kiện cho t (rất quan trọng)

Bước 2: Phương trình (1) đưa về dạng mới theo t. Ta phải biến đổi để cô lập biểu thức chứa t một vế, biểu thức chứa m một vế.

Phương trình sẽ có dạng: $g(t) = h(m)$. Từ đó ta lập bảng biến thiên hàm $g(t)$, sau đó dựa vào BBT để kết luận.

D. Bài toán lãi suất

1. Lãi đơn: Ban đầu có số tiền là A ta đem gửi ngân hàng với lãi suất r % mỗi kì hạn với hình thức lãi đơn. Sau n kì hạn ta rút ra được tổng số tiền là $T = A(1 + n.r)$

2. Lãi kép: Ban đầu có số tiền là A ta đem gửi ngân hàng với hình thức lãi kép, với lãi suất r % mỗi kì hạn. Sau n kì hạn ta rút được tổng số tiền là $T = A.(1 + r\%)^n$

3. Bài toán 1: Ông A hàng tháng gửi vào ngân hàng X một số tiền như nhau là a đồng (vào đầu mỗi kì hạn) với lãi suất r %/1 kì hạn. Sau n kì hạn ông A nhận được số tiền là: $T_n = a(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

4. Bài toán 2: Ông A gửi vào ngân hàng a đồng với lãi suất r %/ 1 tháng. Hàng tháng ông A rút ra x đồng vào ngày ngân hàng tính lãi, thì số tiền còn lại sau n tháng là: $T_n = a(1+r)^n - x \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

5. Bài toán 3: Ông A vay số tiền là a đồng, kì hạn 1 tháng với lãi suất cho số tiền chưa trả là r%/ 1 tháng. Số tháng vay là n tháng, sau đúng 1 tháng kể từ ngày vay, ông A bắt đầu hoàn nợ. Hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau là x đồng trả ngân hàng. Thì công

thức tính x là: $x = \frac{a.(1+r)^n . r}{(1+r)^n - 1}$. (Vì số tiền còn lại sau tháng thứ n là: $T_n = a.(1+r)^n - x \frac{(1+r)^n - 1}{r}$, mà

sau n tháng ông A trả hết nợ nên $T_n = 0$ từ đó suy ra x).

6. Bài toán lãi kép liên tục: Ta đã biết nếu đem gửi ngân hàng số tiền ban đầu là A đồng với lãi suất mỗi năm là $r\%$ theo thể thức lãi kép thì sau n năm số tiền thu được là: $A(1+r)^n$

Giả sử mỗi năm ta chia thành m kì để tính lãi, thì lãi suất mỗi kì là $\frac{r}{m}$ và số tiền thu được sau n năm là:

$A \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n \cdot m}$. Khi $m \rightarrow +\infty$ thì ta gọi là lãi kép liên tục. Như vậy với số vốn ban đầu là A với lãi suất mỗi năm là $r\%$ thì theo thể thức lãi kép liên tục thì số tiền thu về sau n năm là $T_n = A \cdot e^{n \cdot r}$

CHƯƠNG III: NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN

A. Nguyên hàm

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K thì $g(x)$ gọi là nguyên hàm của $f(x)$ nếu $g'(x) = f(x)$. Ta kí hiệu nguyên hàm là $\int f(x)dx = g(x) + c$

Vậy $\int f(x)dx = g(x) \Leftrightarrow g'(x) = f(x)$

2. Tính chất

$$a) \left(\int f(x)dx \right)' = f(x) ; \int f'(x)dx = f(x) + c$$

$$b) \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$c) \int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx$$

B. Tích phân

$$1. \text{ Định nghĩa: } \int_a^b f(x)dx = g(x) \Big|_a^b = g(b) - g(a)$$

2. Tính chất:

$$a) \int_a^a f(x)dx = 0 ; \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$b) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \text{với } a < c < b$$

$$c) \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx ; \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$d) \text{ Nếu } f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \text{ thì } \int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

$$e) \text{ Nếu } f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \text{ thì } \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \quad \forall x \in [a, b]$$

f) Nếu $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$ thì: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

3. Chú ý quan trọng

a) Nếu $f(x)$ liên tục và $f(x)$ là hàm lẻ trên đoạn $[-a, a]$ thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

b) Nếu $f(x)$ liên tục và $f(x)$ là hàm chẵn trên đoạn $[-a, a]$ thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

C. Bảng đạo hàm – nguyên hàm cơ bản

1. Quy tắc đạo hàm

a) $(f \pm g)' = f' \pm g'$

b) $(f.g)' = f'.g + f.g'$; $(k.f)' = k.f'$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$

Chú ý: $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

$$\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}{(dx^2+ex+f)^2}$$

2. Bảng đạo hàm

Đạo hàm hàm cơ bản	Đạo hàm hàm hợp	Đạo hàm hàm cơ bản	Đạo hàm hàm hợp
$k' = 0$; $x' = 1$; $(kx)' = k$			
$(x^n)' = n.x^{n-1}$	$(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \sin u$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$
		$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

3. Bảng nguyên hàm

$\int k dx = kx + c$ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $\int e^x dx = e^x + c$ $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$ $\int \sin x dx = -\cos x + c$ $\int \cos x dx = \sin x + c$ $\int \tan x dx = -\ln \cos x + c$	$\int \cot x dx = \ln \sin x + c$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	Chú ý: +) $du = u' \cdot dx$ $; u = u(x)$ +) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $; \frac{1}{a^n} = a^{-n}$
---	---	---	--

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c ; \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c ; \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

D. Cách đặt ẩn phụ cơ bản

$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$ đặt $x = a \cdot \tan t$ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ đặt $x = a \cdot \sin t$ $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ đặt $x = a \cdot \sin t$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$ đặt $x = \frac{a}{\sin t}$ $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$ đặt $x = \frac{a}{\sin t}$ $\int \left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}, \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \right) dx$ Đặt $x = a \cos 2t$	$\int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx$ Đặt $x = a + (b-a) \sin^2 t$ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$ Đặt $t = x + \sqrt{x^2 \pm a^2}$ $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$ đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 - a^2} \\ dv = dx \end{cases}$
--	--	---

E. Các dạng toán thường gặp

I. Tích phân hàm hữu tỉ

TỔNG QUÁT: $I = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx$

a) Nếu bậc $f(x) \geq$ bậc $g(x)$ thì ta lấy tử chia cho mẫu. Sau đó dùng phương pháp đồng nhất hệ số.

b) Nếu bậc $f(x) <$ bậc $g(x)$ thì ta dùng phương pháp đồng nhất hệ số luôn.

Quy tắc đồng nhất:

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x+b)(x^2+cx+d)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{Cx+D}{x^2+cx+d} \quad (\text{chú ý bậc tử luôn nhỏ hơn bậc mẫu 1 đơn vị})$$

Quy đồng về phải, đồng nhất hệ số để tìm A, B, C, D là xong.

TH 1: $I = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

a) Nếu $\Delta \geq 0$ thì mẫu số có nghiệm, khi đó ta phân tích mẫu thành nhân tử rồi dùng đồng nhất hệ số.

b) Nếu $\Delta < 0$ thì $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$. Khi đó ta đặt: $x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}} \cdot \tan t$

$$\text{TH 2: } I = \int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx$$

Phân tích: $\frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} = \frac{A(2ax + b)}{ax^2 + bx + c} + \frac{B}{ax^2 + bx + c}$. Ta đồng nhất hệ số để tìm A, B.

Cách làm giống như TH1.

$$\text{TH 3: } I = \int \frac{ax^2 + c}{(ax^2 + b_1x + c)(ax^2 + b_2x + c)} dx$$

Phương pháp: - Chia cả tử và mẫu cho x^2

$$\text{- Đặt } t = ax \pm \frac{c}{x}$$

II. Tích phân hàm lượng giác

$$\text{TH 1: } I = \int f(\sin x, \cos x) dx$$

a) Nếu $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \cos x$

b) Nếu $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \sin x$

c) Nếu $f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \tan x$

d) Trong các TH còn lại đặt $t = \tan \frac{x}{2}$. Chú ý: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\text{TH 2: } I = \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} dx$$

Ta phân tích:

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1 = A(a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2)' + B(a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2) + C$$

Ta đồng nhất hệ số tìm A, B, C là xong.

Còn đối với tích phân $I = \int \frac{1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} dx$ ta đặt $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\text{TH 3: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$. Khi đó $I = J = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\sin x) + f(\cos x)] dx$

$$\text{TH 4: } I = \int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx$$

Đặt $x = \pi - t$. Khi đó $I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$

III. Tích phân hàm vô tỉ

TH 1: $I = \int \left(x; \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}; \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}; \dots \right) dx$.

Gọi $k = \text{BCNN}(n, m, \dots)$. Ta đặt $t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Leftrightarrow x = g(t)$

TH 2: $I = \int f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$. Ta đặt $x = a \sin t$

$I = \int f\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx$. Ta đặt $x = a \tan t$

$I = \int f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$. Ta đặt $x = \frac{a}{\sin t}$

$I = \int f\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$

+ Nếu $\Delta > 0$ thì $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x-x_1) \sqrt{a \frac{x-x_2}{x-x_1}}$

+ Nếu $\Delta < 0$ thì ta đặt: $\sqrt{ax^2 + bx + c} \pm x\sqrt{a} = t$

$I = \int \frac{f(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$

+ Nếu bậc $f(x) = 1$ thì ta phân tích: $\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{\alpha(2ax+b)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \frac{\beta}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

Ta đồng nhất hệ số tìm $\alpha; \beta$ là xong.

+ Nếu bậc $f(x) = 2$ thì ta phân tích: $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = g(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + m \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

- Trong đó bậc $g(x) = \text{bậc } f(x) - 1$. Ta lấy đạo hàm 2 vế rồi đồng nhất hệ số hai vế.

- giải hệ phương trình tìm $g(x)$ và m .

TH 3: $I = \int x^m \cdot (a + bx^n)^p dx$

+ Nếu $p \in \mathbb{Z}$, đặt $x = t^s$ với $s = \text{BCNN}(\text{các mẫu của } m, n)$

+ Nếu $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, đặt $a + bx^n = t^s$ với $s = \text{mẫu số của phân số } p$.

+ Nếu $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, đặt $a \cdot x^{-n} + b = t^s$ với $s = \text{mẫu số của phân số } p$.

IV. Tích phân hàm mũ – lôgarit

$$I = \int_{-k}^k \frac{f(x)}{a^x + 1} dx, \text{ với } f(x) \text{ là hàm chẵn.}$$

$$\text{Đặt } x = -t. \text{ Khi đó } \int_{-k}^0 \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_0^k \frac{a^x f(x)}{a^x + 1} dx \Rightarrow I = \int_0^k f(x) dx$$

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Xét tích phân: $I = \int f(x).g(x)dx$; ($I = \int u dv$)

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \int g(x)dx = h(x) \end{cases} \text{ Khi đó } I = uv - \int v du = f(x).h(x) - \int h(x).f'(x)dx$$

$$\text{TH 1: } I = \int P(x).f(\sin x, \cos x)dx \quad . \text{ Đặt } \begin{cases} u = P(x) \\ dv = f(\sin x, \cos x)dx \end{cases}$$

$$\text{TH 2: } I = \int P(x).f(e^x)dx \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = P(x) \\ dv = f(e^x)dx \end{cases}$$

$$\text{TH 3: } I = \int f(e^x).g(\sin x, \cos x)dx \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = f(e^x) \\ dv = g(\sin x, \cos x)dx \end{cases}$$

$$\text{TH 4: } I = \int P(x).f(\ln x)dx \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = f(\ln x) \\ dv = P(x)dx \end{cases}$$

Ưu tiên đặt u: Nhất log- nhì đa- tam lượng- tứ mũ

F. Ứng dụng tích phân

1. Diện tích hình phẳng

TH 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 1 đường cong

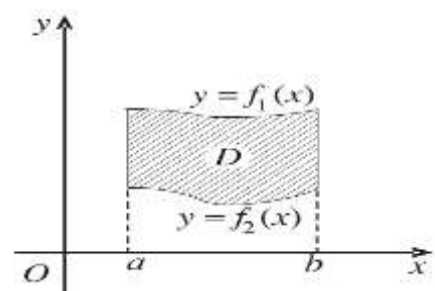
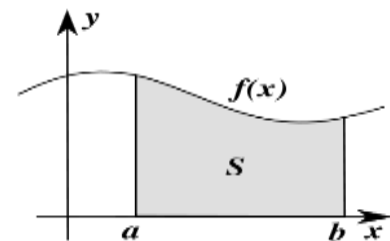
$$\text{Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi: } \begin{cases} y = f(x); & y = 0 \\ x = a; & x = b \end{cases}$$

$$\text{Khi đó diện tích hình phẳng (H) là: } S = \int_a^b |f(x)| dx$$

TH 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

$$\text{Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi: } \begin{cases} y = f_1(x); & y = f_2(x) \\ x = a; & x = b \end{cases}$$

$$\text{Khi đó diện tích hình phẳng (H) là: } S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$$



2. Cách tính diện tích hình phẳng

Bài toán 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường $x = a$, $x = b$.

Bước 1: Xét phương trình hoành độ: $f(x) = 0$

Ta giải phương trình trên, tìm các nghiệm x_0 (chỉ lấy nghiệm trong $[a, b]$)

Bước 2: Dùng công thức:
$$S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{x_0} |f(x)| dx + \int_{x_0}^b |f(x)| dx$$

$$= \left| \int_a^{x_0} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_0}^b f(x) dx \right|$$

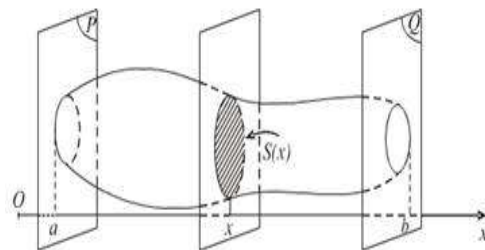
Chú ý: Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a, b]$ ($f(x)$ vô nghiệm trên $[a, b]$) thì $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

Bài toán 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y=f(x)$, $y=g(x)$ và $x=a$, $x=b$.

Đầu tiên ta xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$. giải phương trình và lấy các nghiệm trong $[a, b]$. Các bước tiếp theo làm giống bài trên.

3. Thể tích vật thể

Một vật thể (B) được giới hạn bởi 2 mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại 2 điểm $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể (B) bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x \in [a, b]$. Thể tích của vật thể (B) là: $V = \int_a^b S(x) dx$

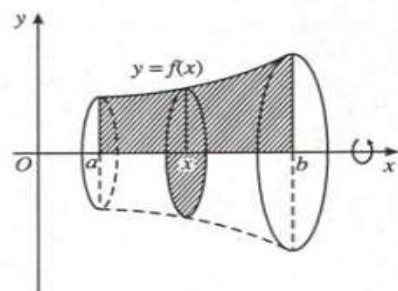


4. Thể tích khối tròn xoay

TH 1: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y = f(x), y = 0 \\ x = a, x = b \end{cases}$.

Thể tích khối tròn xoay khi cho hình (H) quay quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



TH 2: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $\begin{cases} x = g(y), x = 0 \\ y = c, y = d \end{cases}$. Thể tích khối tròn xoay khi cho hình

(H) quay xung quanh trục Oy là $V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$

TH 3: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y = f(x), y = g(x) \\ x = a, x = b \end{cases}$. Thể tích khối tròn xoay khi cho

hình (H) quay xung quanh trục Ox là $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$

Chú ý: Trong nhiều bài toán người ta không cho $x = a$, $x = b$ thì ta đi xét phương trình hoành độ để tìm nghiệm a, b .

5. Bài toán chuyển động

$$v(t) = s'(t) \Leftrightarrow s(t) = \int v(t)dt$$

$$a(t) = v'(t) \Leftrightarrow v(t) = \int a(t)dt$$

CHƯƠNG IV: SỐ PHỨC**A. Khái niệm**

1. Định nghĩa: Số phức z có dạng $z = a + bi$, trong đó a, b là số thực còn i là đơn vị ảo thỏa mãn $i^2 = -1$.
 z là số thực nếu phần ảo bằng 0 ($b = 0$).
 z là số thuần ảo nếu phần thực bằng 0 ($a = 0$).

2. Hai số phức bằng nhau: Cho hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i$ và $z_2 = a_2 + b_2i$. Khi đó $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$

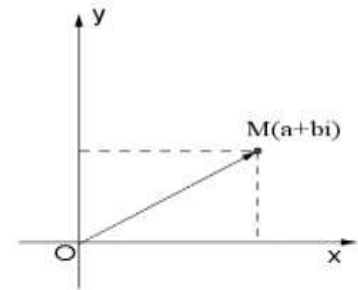
3. Biểu diễn hình học của số phức:

Mỗi số phức $z = a + bi$ đều được biểu diễn bởi điểm $M(a, b)$ và $\overrightarrow{OM}$ là vec tơ biểu diễn của số phức z .

Khi đó mặt phẳng Oxy gọi là mặt phẳng phức.

Trục Ox gọi là trục thực là trục biểu diễn các số thực.

Trục Oy gọi là trục ảo là trục biểu diễn các số ảo.

**B. Các phép toán trên số phức**

1. Cộng, trừ số phức: Cho hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i$ và $z_2 = a_2 + b_2i$.

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

2. Ý nghĩa hình học của phép cộng, trừ: Nếu $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ biểu diễn các số phức z_1, z_2 . Thì

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \text{ biểu diễn số phức } z_1 + z_2$$

$$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \text{ biểu diễn số phức } z_1 - z_2$$

3. Phép nhân số phức: Cho hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i$ và $z_2 = a_2 + b_2i$

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i)$$

$$= a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

4. Phép chia số phức: Để chia hai số phức thì ta nhân cả tử và mẫu với liên hợp của mẫu.

C. Số phức liên hợp và mô đun số phức

1. Số phức liên hợp: Cho $z = a + bi$ thì liên hợp của z là $\bar{z}$ và tính bởi công thức $\bar{z} = a - bi$

Tính chất: $\overline{\bar{z}} = z$, $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Khi $|z| = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} = \bar{z}$; $\frac{1}{\bar{z}} = z$

2. Mô đun của số phức: Cho $z = a + bi$ thì mô đun của z kí hiệu là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Chú ý: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

3. Tính chất mô đun

$$+ |z| = |\bar{z}|, \quad |z| \geq 0, \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z_2}}{|z_2|^2}$$

$$+ ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z^2| = |z|^2, \quad |-z| = |z|$$

D. Căn bậc hai số phức và phương trình bậc hai

1. Căn bậc hai số phức: Cho số phức z , ta nói số phức w là căn bậc hai của z nếu $w^2 = z$.

+ Mọi số phức $z \neq 0$ đều có hai căn bậc hai.

+ Khi $a < 0$ thì a có hai căn bậc hai là: $i\sqrt{-a}$ và $-i\sqrt{-a}$

+ Khi $a > 0$ thì a có hai căn bậc hai là: $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$

2. Cách tìm căn bậc hai: Cho trước $z = a + bi$. Tìm căn bậc hai của z ?

Giả sử $w = x + yi$ là căn bậc hai của z nên $w^2 = z \Leftrightarrow (x + yi)^2 = a + bi$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên tìm x, y là xong.

3. Phương trình bậc hai: Xét phương trình: $Az^2 + Bz + C = 0$. (1)

$$\text{Ta tính } \Delta = B^2 - 4AC$$

+ Nếu $\Delta = 0$ thì pt(1) có nghiệm kép $z = -\frac{B}{2A}$

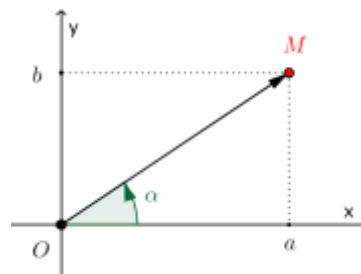
+ Nếu $\Delta > 0$ thì pt(1) có 2 nghiệm phân biệt $z_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}, z_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}$

+ Nếu $\Delta < 0$ hoặc Δ là số phức thì ta tìm căn bậc hai của Δ . Giả sử α là căn bậc hai của Δ . Khi đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $z_1 = \frac{-B + \alpha}{2A}, z_2 = \frac{-B - \alpha}{2A}$

E. Dạng lượng giác của số phức

1. Acgumen của số phức: Cho số phức z , điểm M là điểm biểu diễn của z trên mặt phẳng phức.

Thế thì $\varphi = (\text{Ox}, \text{OM})$ gọi là acgumen của số phức z



2. Dạng lượng giác của số phức: Cho số phức $z = a + bi$ thì dạng lượng giác của z là $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Trong đó: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ là mô đun của z , còn $\cos \varphi = \frac{a}{r}$, $\sin \varphi = \frac{b}{r}$

3. Nhân, chia số phức dưới dạng lượng giác: Cho $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ và $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

4. Công thức Moivre: $z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

5. Căn bậc hai của số phức dạng lượng giác: Số phức $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ có hai căn bậc hai là:

$$\sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) \text{ và } \sqrt{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right)$$

F. Các dạng toán số phức

1. Bài toán cực trị

a) Bất đẳng thức tam giác + $z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2$ dấu = xảy ra khi $z_1 = kz_2$, $k \geq 0$ + $z_1 - z_2 \leq z_1 + z_2$ dấu = xảy ra khi $z_1 = kz_2$, $k \leq 0$ + $z_1 + z_2 \geq z_1 - z_2$ dấu = xảy ra khi $z_1 = kz_2$, $k \leq 0$ + $z_1 - z_2 \geq z_1 - z_2$ dấu = xảy ra khi $z_1 = kz_2$, $k \geq 0$	b) Công thức đường trung tuyến $ z_1 + z_2 ^2 + z_1 - z_2 ^2 = 2(z_1 ^2 + z_2 ^2)$ c) Tập hợp điểm + $z - (a + bi) = R$ thì tập hợp là đường tròn tâm $I(a, b)$, bán kính R.
--	---

+ $|z - (a_1 + b_1 i)| = |z - (a_2 + b_2 i)|$ tập hợp là đường trung trực AB với $A(a_1, b_1)$; $B(a_2, b_2)$

+ $|z - (a_1 + b_1 i)| + |z - (a_2 + b_2 i)| = 2a$

- Nếu $2a = AB$ với $A(a_1, b_1)$; $B(a_2, b_2)$ thì tập hợp là đoạn thẳng AB

- Nếu $2a > AB$ thì tập hợp là Elip (E) nhận A, B làm hai tiêu điểm với độ dài trục lớn là $2a$.

Đặc biệt khi $|z - c| + |z + c| = 2a$ tập hợp là Elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 + c^2 = a^2$

2. Bài toán max – min

a) Sử dụng tính chất số phức liên hợp, các bất đẳng thức trên và kết hợp **bất đẳng thức bunhiacopski**.

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2), \text{ dấu = xảy ra khi } \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

Bất đẳng thức vec tơ: Cho $\vec{u} = (a, b)$ và $\vec{v} = (x, y)$ ta có: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2}$$

b) Dùng phương pháp lượng giác hóa:

Giả sử tập hợp số phức z là đường tròn (C) có pt: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Ta đặt: $\begin{cases} x = a + R \sin t \\ y = b + R \cos t \end{cases}$ rồi thay vào giả thiết điều kiện để tìm max – min là xong

Chú ý: Cách tìm max – min hàm lượng giác $y = A.\sin x + B.\cos x + C$

$$y = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x \right) + C$$

$$y = \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \alpha . \sin x + \sin \alpha . \cos x) + C$$

$$y = \sqrt{A^2 + B^2} . \sin(x + \alpha) + C$$

Ta có:

$$-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{A^2 + B^2} \leq \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x + \alpha) \leq \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{A^2 + B^2} + C \leq y \leq \sqrt{A^2 + B^2} + C$$

Vậy $\max y = \sqrt{A^2 + B^2} + C$ và $\min y = -\sqrt{A^2 + B^2} + C$

c) Dùng phương pháp hình học: Ta vẽ hình ra và nhận xét

LÍ THUYẾT HÌNH HỌC LỚP 10

CHƯƠNG I. VEC TƠ

A. Định nghĩa và các tính chất vec tơ

1. Định nghĩa: Vec tơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu điểm nào là điểm cuối.

2. Tính chất:

- Hai vec tơ gọi là cùng phương nếu chúng song song hoặc trùng nhau.
- Hai vec tơ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.
- Điều kiện để hai vec tơ cùng phương: $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b} \Leftrightarrow$ tồn tại số k sao cho $\vec{a} = k.\vec{b}$
- Điều kiện để 3 điểm thẳng hàng: Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$
- Biểu thị một vec tơ qua 2 vec tơ không cùng phương: Cho 2 vec tơ không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$. Khi đó mọi vec tơ $\vec{c}$ đều được viết dưới dạng $\vec{c} = m.\vec{a} + n.\vec{b}$ trong đó (m, n) là cặp số duy nhất.

3. Các quy tắc tính vec tơ

- Quy tắc ba điểm: Với 3 điểm A, B, C bất kì ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- Quy tắc hình bình hành: Cho hình bình hành $ABCD$ ta có:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

- Quy tắc hiệu vec tơ: $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

- Quy tắc đường trung tuyến:

+ Nếu M là trung điểm BC thì $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

+ Với mọi điểm A bất kì thì $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$ (quy tắc đường trung tuyến)

- Quy tắc trọng tâm

+ Cho G là trọng tâm tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

+ Với mọi điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$

4. Tâm tỉ cự của hệ điểm

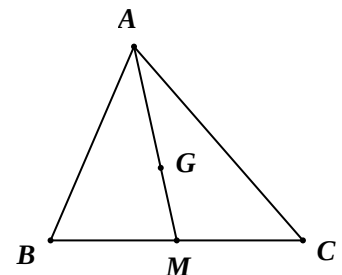
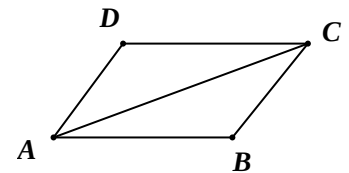
Cho k điểm $A_1, A_2, \dots, A_k$ và k số thực $m_1, m_2, \dots, m_k$. Khi đó tồn tại duy nhất điểm I sao cho:

$$m_1.\overrightarrow{IA_1} + m_2.\overrightarrow{IA_2} + \dots + m_k.\overrightarrow{IA_k} = \vec{0}; I \text{ được gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm trên.}$$

B. Tọa độ vec tơ

1. Các phép toán về vec tơ

Cho $\vec{a} = (x_1; y_1)$ và $\vec{b} = (x_2; y_2)$ ta có:



a) $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2)$;

$k\vec{a} = (kx_1; ky_1)$

b) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$ (chú ý: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$)

d) $\vec{a}; \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$

e) Độ dài vec tơ: $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

f) Góc giữa 2 vec tơ: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

2. Tọa độ điểm

Cho $A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$; $C(x_C, y_C)$

a) $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$; $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

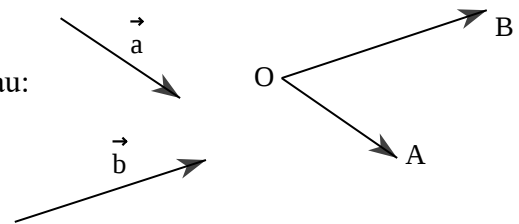
b) Gọi $M(x_M, y_M)$ là trung điểm BC thì
$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases}$$

c) Gọi $G(x_G, y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC thì
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

CHƯƠNG II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VEC TƠ VÀ ỨNG DỤNG

A. Tích vô hướng của hai vec tơ

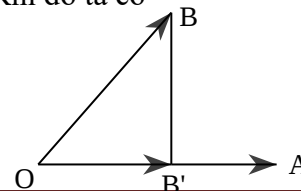
1. Góc giữa hai vec tơ.

Cho hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Cách xác định góc giữa hai vec tơ như sau:Bước 1: Từ điểm O bất kì ta dựng $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$ Bước 2: Kết luận $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{OA}, \vec{OB}) = \angle AOB$ 

2. Định nghĩa tích vô hướng: Tích vô hướng của hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$ và tính bằng công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

Chú ý: Bình phương vô hướng của một vec tơ bằng bình phương độ dài vec tơ đó, nghĩa là: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

3. Công thức hình chiếu:

Vec tơ $\vec{OB'}$ là hình chiếu của vec tơ $\vec{OB}$ trên đường thẳng OA. Khi đó ta cócông thức hình chiếu như sau: $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OB'}$ 

4. Phương tích điểm M đối với đường tròn tâm (O).

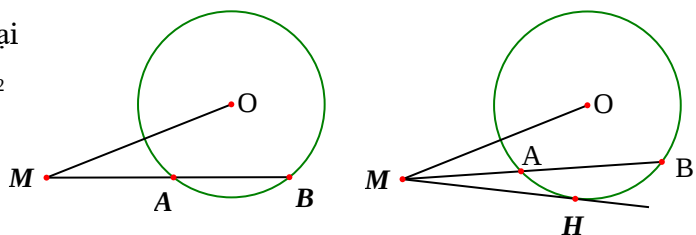
Cho đường tròn (O, R) và điểm M cố định.

Một đường thẳng qua M cắt đường tròn (O) tại

hai điểm A và B khi đó: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$

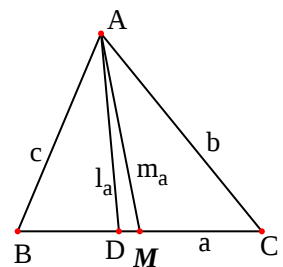
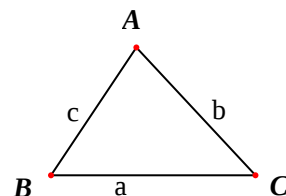
Đặc biệt khi MH là tiếp tuyến đường tròn

thì ta có: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MH^2$

**B. Hệ thức lượng trong tam giác****1. Định lý cos trong tam giác bất kì**

Cho tam giác ABC ta có:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

**2. Định lý sin trong tam giác bất kì**

Cho tam giác ABC ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

3. Công thức độ dài đường trung tuyến

Cho tam giác ABC, có $AM = m_a$ là đường trung tuyến thì: $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$

4. Công thức độ dài phân giác trong

Cho tam giác ABC, có $AD = l_a$ là phân giác trong góc A thì: $l_a = \frac{bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b + c}$

5. Công thức diện tích tam giác

Cho tam giác ABC, với h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh A, B, C. Còn R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác, $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác. Ta có:

$$S = \frac{1}{2} h_a \cdot a = \frac{1}{2} h_b \cdot b = \frac{1}{2} h_c \cdot c$$

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$$

$$S = \frac{abc}{4R}; \quad S = p \cdot r \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{He-rong})$$

CHƯƠNG III. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

A. Phương trình đường thẳng

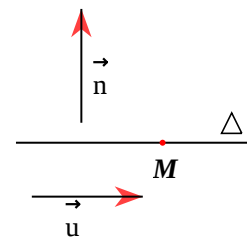
1. Phương trình tổng quát của đường thẳng

a) Vec tơ pháp tuyến của đường thẳng:

+ Vec tơ $\vec{n}$ được gọi là vec tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \perp \Delta$

+ Nếu $\vec{n}$ là vec tơ pháp tuyến của Δ thì $k \cdot \vec{n}$ cũng là vec tơ pháp tuyến của Δ .

Vậy một đường thẳng có vô số vec tơ pháp tuyến.



b) Phương trình tổng quát của đường thẳng

Đường thẳng Δ đi qua $M(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{n}(a, b)$ là vec tơ pháp tuyến thì Δ có phương trình tổng quát là:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Chú ý: Khi phương trình tổng quát Δ có dạng: $ax + by + c = 0$ thì $\vec{n}(a, b)$ sẽ là vec tơ pháp tuyến của Δ

c) Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn: Cho đường thẳng Δ cắt trục Ox tại $A(a; 0)$ và cắt trục Oy tại $B(0; b)$ thì phương trình Δ có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

2. Phương trình tham số - chính tắc của đường thẳng

a) Vec tơ chỉ phương của đường thẳng:

+ Vec tơ $\vec{u}$ gọi là vec tơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ .

+ Nếu $\vec{u}$ là một vec tơ chỉ phương của Δ thì $k \cdot \vec{u}$ cũng là vec tơ chỉ phương của Δ . Vậy đường thẳng có vô số vec tơ chỉ phương.

b) Phương trình tham số của đường thẳng.

Đường thẳng Δ qua $M(x_0; y_0)$, nhận $\vec{u}(a, b)$ làm vec tơ chỉ phương có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

c) Nếu $a, b \neq 0$ thì phương trình chính tắc của Δ là:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

3. Chú ý quan trọng

a) Cách chuyển từ vec tơ chỉ phương sang vec tơ pháp tuyến.

Quy tắc: Đảo vị trí thêm dấu trừ.

Nếu $\vec{u}(a, b)$ là vec tơ chỉ phương của Δ thì $\vec{n}(b, -a)$ sẽ là vec tơ pháp tuyến của Δ và ngược lại.

b) Hai đường thẳng song song thì có cùng vec tơ chỉ phương hoặc pháp tuyến. Hai đường thẳng vuông góc thì chỉ phương của đường thẳng này là pháp tuyến của đường thẳng kia và ngược lại.

B. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho đường thẳng $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ khi đó:

$$+ \Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

$$+ \Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$+ \Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$

C. Khoảng cách và góc

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$. Khoảng cách từ M đến Δ tính bằng công thức:

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Chú ý: + Khoảng cách từ M đến trục Ox là $d(M, Ox) = |y_0|$

+ Khoảng cách từ M đến trục Oy là $d(M, Oy) = |x_0|$

2. Vị trí của hai điểm đối với đường thẳng

Cho hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ và đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$.

Xét biểu thức $P = (ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c)$ khi đó:

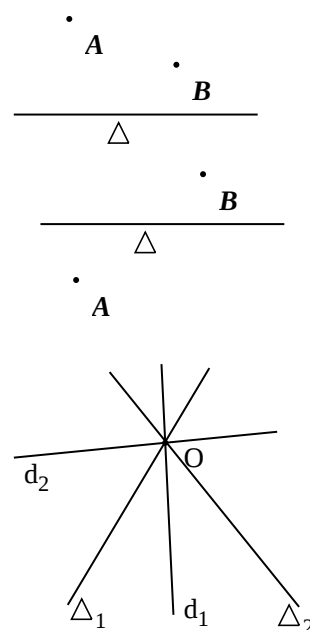
+ Nếu $P > 0$ thì A, B nằm cùng phía với Δ

+ Nếu $P < 0$ thì A, B nằm khác phía với Δ

3. Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ cắt nhau tại O . Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng là:

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$



4. Góc giữa hai đường thẳng

Đường thẳng Δ_1 có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}_1(a_1, b_1)$ và đường thẳng Δ_2 có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}_2(a_2, b_2)$. Gọi α

là góc giữa hai đường thẳng thì: $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

Chú ý: Công thức vẫn đúng cho vec tơ chỉ phương.

D. Đường tròn

1. Phương trình đường tròn

a) Cho đường tròn (C) tâm $I(a, b)$ bán kính R thì phương trình đường tròn (C) là:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

b) Cho phương trình (C) có dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (1)

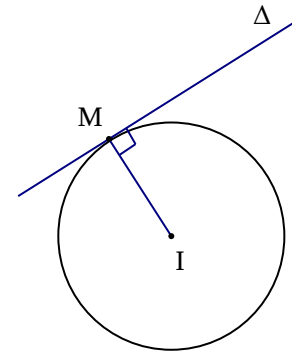
phương trình (1) là đường tròn khi $a^2 + b^2 - c > 0$. Khi đó đường tròn có tâm $I(a, b)$ và $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Cho đường tròn (C) tâm $I(a, b)$, bán kính R .

Đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$ là tiếp tuyến của đường tròn (C)

khi và chỉ khi: $d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|A.a + B.b + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = R$



E. Đường Elip

1. Định nghĩa

Cho 2 điểm cố định F_1 và F_2 với $F_1F_2 = 2c$ ($c > 0$)

Đường Elip là tập hợp các điểm M thỏa mãn $MF_1 + MF_2 = 2a$ ($a > c$)

Trong đó: F_1, F_2 là các tiêu điểm Elip, còn $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự Elip.

2. Phương trình chính tắc Elip

Elip có phương trình chính tắc là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ trong đó $a^2 = b^2 + c^2$

+ Đoạn $A_1A_2 = 2a$ gọi là độ dài trục lớn

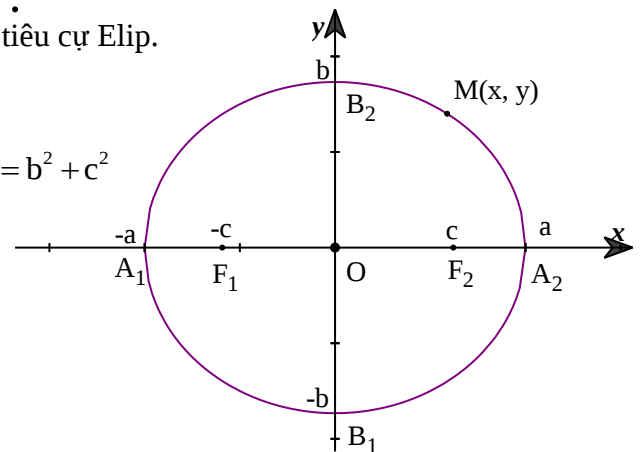
+ Đoạn $B_1B_2 = 2b$ gọi là độ dài trục bé.

+ $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự.

+ Điểm $F_1(-c, 0)$ và $F_2(c, 0)$ gọi là tiêu điểm.

+ Điểm $M(x, y)$ thuộc Elip thì $MF_1 = a + \frac{cx_M}{a}$; $MF_2 = a - \frac{cx_M}{a}$ là các bán kính qua tiêu

+ $e = c/a$ gọi là tâm sai Elip



LÍ THUYẾT HÌNH HỌC LỚP 11

CHƯƠNG 1: PHÉP DỜI HÌNH – PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẪNG

A. Phép tịnh tiến

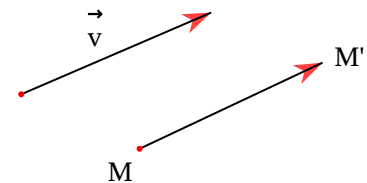
1. Định nghĩa.

Cho trước vec tơ $\vec{v}$. Phép tịnh tiến theo vec tơ $\vec{v}$ kí hiệu là $T_{\vec{v}}$ biến

điểm M thành M' thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

Như vậy $T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

2. Tính chất



a) Tính chất 1: Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách nên nó là phép dời hình, nghĩa là: $T_{\vec{v}}(M) = M'$ và : $T_{\vec{v}}(N) = N'$ thì $MN = M'N'$

b) Tính chất 2: Phép tịnh tiến biến:

+ Đường thẳng thành đường thẳng song song với nó

+ Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, tam giác thành tam giác bằng nó.

+ Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính

3. Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng cho $\vec{v} = (a, b)$, điểm $M(x_0, y_0)$. Tìm tọa độ điểm M' là ảnh của M qua $T_{\vec{v}}$

Gọi $M'(x', y') = T_{\vec{v}}(M) \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

$$\Leftrightarrow (x' - x_0, y' - y_0) = (a, b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x_0 = a \\ y' - y_0 = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x_0 + a \\ y' = y_0 + b \end{cases}$$

4. Các dạng toán

Dạng 1: Tìm ảnh của một điểm qua phép tịnh tiến

Ta dùng công thức biểu thức tọa độ là xong

Dạng 2: Tìm ảnh của đường thẳng (d) qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Bước 1: Gọi $(d') = T_{\vec{v}}(d)$ theo tính chất phép tịnh tiến thì $d' \parallel d$. Ta tìm được vectơ pháp tuyến (d').

Bước 2: Chọn $M \in d$, rồi tìm $M' = T_{\vec{v}}(M)$

Bước 3: Cho $M' \in d'$ là xong.

Dạng 3: Tìm ảnh của đường tròn (C) tâm I , bán kính R qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$

Bước 1: Gọi (C') có tâm I' , bán kính R là ảnh của đường tròn (C) qua $T_{\vec{v}}$

Bước 2: Tìm tọa độ I' là ảnh của điểm I qua $T_{\vec{v}}$

Bước 3: Viết phương trình (C') có tâm I' , bán kính R .

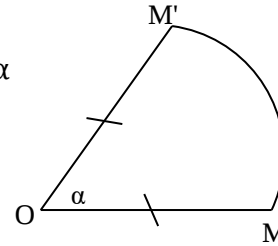
Dạng 4: Dùng phép tịnh tiến giải bài toán tìm tập hợp điểm

Phương pháp: Chứng minh tập hợp điểm phải tìm là ảnh của một hình đã biết qua phép tịnh tiến.

B. Phép quay**1. Định nghĩa**

Cho điểm O cố định và góc lượng giác α . Phép quay tâm O, góc quay α

Kí hiệu là $Q_{(O,\alpha)}$ biến điểm M thành M' thỏa mãn
$$\begin{cases} OM = OM' \\ (OM, OM') = \alpha \end{cases}$$



Như vậy $Q_{(O,\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (OM, OM') = \alpha \end{cases}$

Chú ý: + Góc lượng giác α nghĩa là: Khi quay theo chiều ngược chiều kim đồng hồ thì $\alpha > 0$, còn quay theo chiều thuận chiều kim đồng hồ thì $\alpha < 0$.

+ Khi $\alpha = \pi + k2\pi$ thì phép quay là phép đối xứng tâm O

+ Khi $\alpha = k2\pi$ thì phép quay là phép đồng nhất.

2. Tính chất

a) Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì, tức phép quay là phép dời hình. Nghĩa là

$A' = Q_{(O,\alpha)}(A)$; $B' = Q_{(O,\alpha)}(B)$ thì $A'B' = AB$

b) Phép quay biến:

+ Đường thẳng thành đường thẳng

+ Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, tam giác thành tam giác bằng nó.

+ Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

3. Các dạng toán

Dạng 1: Tìm ảnh của một điểm, một đường thẳng, một đường tròn qua phép quay

Phương pháp: Ta dùng định nghĩa phép quay để làm.

Dạng 2: Sử dụng phép quay để giải các bài toán hình học

Phương pháp: Ta phải chọn được tâm quay và góc quay thích hợp rồi dùng tính chất phép quay.

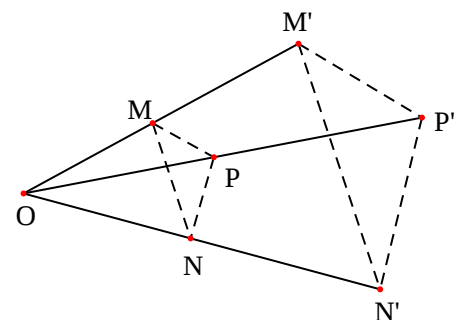
C. Phép vị tự**1. Định nghĩa.**

Cho điểm O cố định và số $k \neq 0$. Phép vị tự tâm O, tỉ số k kí hiệu là

$V_{(O,k)}$ biến điểm M thành M' thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$

Như vậy: $M' = V_{(O,k)}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$

Chú ý: $M' = V_{(O,k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{(O,\frac{1}{k})}(M')$

**2. Tính chất**

a) Nếu phép vị tự tỉ số k biến M thành M' và N thành N' thì
$$\begin{cases} \overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN} \\ M'N' = k \cdot MN \end{cases}$$

b) Phép vị tự tỉ số k biến:

- + Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy.
- + Đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
- + Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó.
- + Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k|R$

3. Tâm vị tự của hai đường tròn

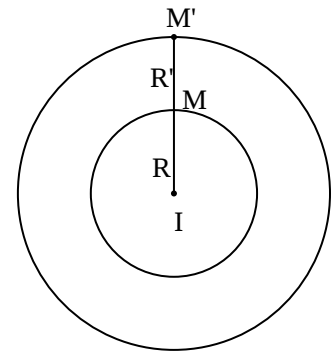
Định lý: Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia. Tâm của phép vị tự được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn.

Cho hai đường tròn (I, R) và đường tròn (I', R') xảy ra 3 trường hợp:

TH1: Khi I trùng I' .

Thì có hai phép vị tự tâm I tỉ số $k = \frac{R'}{R}$ và tỉ số $k = -\frac{R'}{R}$ biến đường tròn

tâm (I, R) thành đường tròn tâm (I', R') .

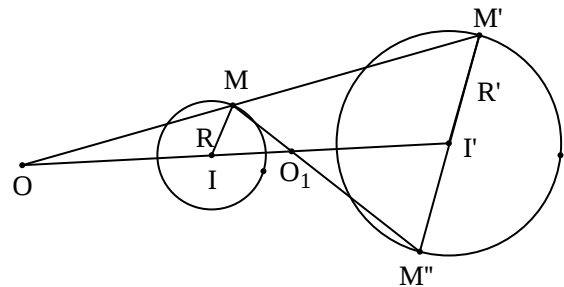


TH2: $I \neq I'$ và $R \neq R'$

Thì phép vị tự tâm O , tỉ số $k = \frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm O_1

tỉ số $k_1 = -\frac{R'}{R}$ biến đường tròn tâm (I, R) thành

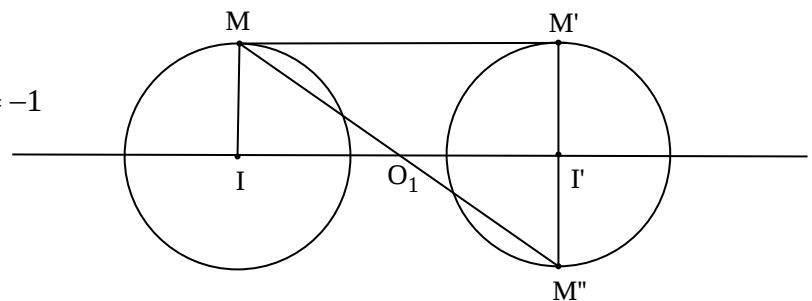
đường tròn tâm (I', R') .



TH3: $I \neq I'$ và $R = R'$

Thì có một phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k = -\frac{R'}{R} = -1$

biến đường tròn tâm (I, R) thành đường tròn tâm (I', R') .



D. Phép đồng dạng

1. Định nghĩa

Phép biến hình F gọi là phép đồng dạng tỉ số $k > 0$ nếu nó biến 2 điểm M, N thành 2 điểm M', N' thỏa mãn điều kiện $M'N' = k.MN$

Nhận xét: + Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số $k = 1$

+ Phép vị tự tâm k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$

+ Phép đồng dạng tỉ số k là hợp của một phép dời hình và phép vị tự tỉ số k .

2. Tính chất phép đồng dạng

a) Phép đồng dạng tỉ số k biến:

+ Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa ba điểm ấy.

+ Đường thẳng thành đường thẳng, đoạn thẳng thành đoạn thẳng

+ Tam giác thành tam giác đồng dạng tỉ số k

+ Đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $k.R$

b) Nếu thực hiện liên tiếp phép đồng dạng tỉ số k và phép đồng dạng tỉ số p ta được phép đồng dạng tỉ số pk

c) Nếu một phép đồng dạng biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ thì nó cũng biến trọng tâm, trục tâm, tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác ABC tương ứng thành trọng tâm, trục tâm, tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$.

3. Hình đồng dạng

Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

CHƯƠNG 2: QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

A. Mở đầu về hình học không gian

1. Quy tắc vẽ hình trong không gian

+ Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.

+ Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song.

+ Dùng nét liền cho đường nhìn thấy, nét đứt cho đường bị che khuất.

+ Trong không gian bảo toàn tính song song, tỉ lệ đoạn thẳng nhưng không bảo toàn tính vuông góc

+ Hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành trong không gian được biểu diễn là hình bình hành.

+ Tam giác cân, tam giác vuông, tam giác đều, tam giác thường trong không gian được biểu diễn là tam giác thường.

2. Tính chất thừa nhận

a) Có duy nhất một đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt

b) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng.

c) Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì đường thẳng đó nằm trên mặt phẳng ấy.

d) Tồn tại 4 điểm không nằm trên cùng một mặt phẳng.

e) Nếu 2 mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn một điểm chung khác nữa.

f) Tính chất trong hình học phẳng cũng đúng trong không gian.

3. Các cách xác định một mặt phẳng

a) Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng

b) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua 1 điểm và 1 đường thẳng

- c) Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau
 d) Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song
 e) Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song đường thẳng kia.

4. Đặc điểm các hình đặc biệt

a) Tứ diện đều có đặc điểm:

- + 6 cạnh bằng nhau (cạnh bên bằng cạnh đáy)
- + Đường cao từ đỉnh xuống trọng tâm đáy (cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy)

b) Chóp tam giác đều có đặc điểm:

- + Đáy là tam giác đều
- + Các cạnh bên bằng nhau
- + Đường cao từ đỉnh xuống trọng tâm đáy.

c) Hình chóp tứ giác đều có đặc điểm:

- + Đáy là hình vuông
- + Các cạnh bên bằng nhau (khác cạnh đáy)
- + Đường cao từ đỉnh xuống tâm đáy (tâm đáy là giao 2 đường chéo)

d) Hình lăng trụ có đặc điểm:

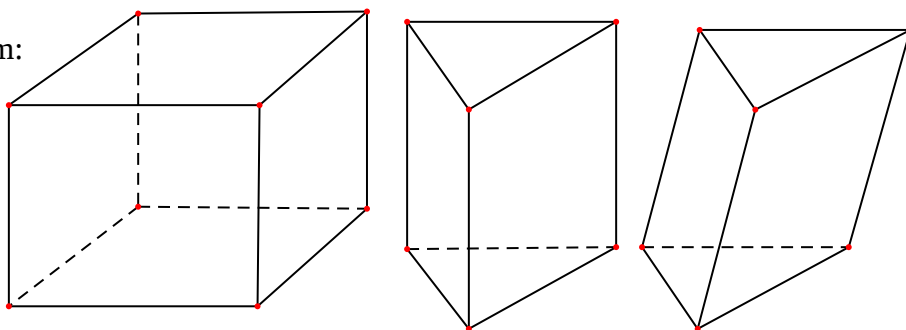
- + Hai đáy là hai đa giác song song và bằng nhau.
- + Các cạnh bên song song và bằng nhau.
- + Các mặt bên là hình bình hành.

e) Hình lăng trụ đứng có đặc điểm:

- + Hai đáy song song với nhau
- + Các mặt bên là hình chữ nhật

f) Hình lăng trụ đa giác đều là:

- + Lăng trụ đứng
- + Đáy là đa giác đều



i) Hình lập phương là hình có 6 mặt là hình vuông. Hình hộp chữ nhật là hình có 6 mặt là hình chữ nhật. Hình hộp là hình có 6 mặt là hình bình hành.

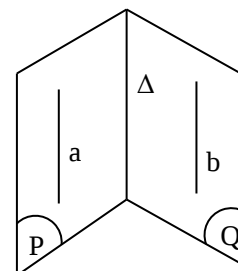
B. Giao tuyến của hai mặt phẳng và giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

1. Cách tìm giao tuyến hai mặt phẳng

Cách 1: Theo định nghĩa, tức là ta tìm hai điểm chung.

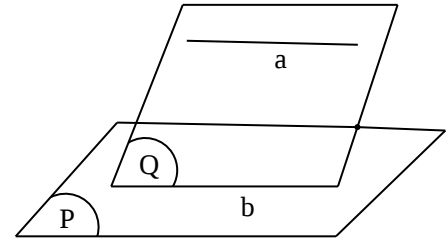
Cách 2: Sử dụng hệ quả về giao tuyến 3 mặt phẳng:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng cũng song song với hai đường thẳng ấy.



Cách 3: Sử dụng định lí:

Cho đường thẳng a song song $mp(P)$, mọi $mp(Q)$ chứa a và cắt $mp(P)$ theo giao tuyến b thì b song song với a .



2. Cách tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.

Để tìm giao điểm đường thẳng a và $mp(P)$ ta có 2 cách làm

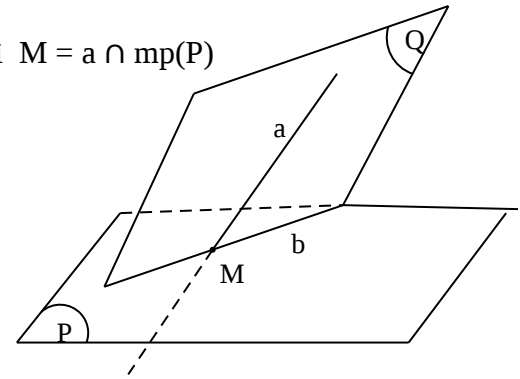
Cách 1: Tìm trong $mp(P)$ có một đường thẳng b mà $b \cap a = M$ thì $M = a \cap mp(P)$

Cách 2:

+ Dựng $mp(Q)$ chứa a và $mp(P)$ theo giao tuyến b

+ Tìm $M = a \cap b$

+ Kết luận $M = a \cap mp(P)$



Chú ý: Để tìm giao điểm hai đường thẳng trong không gian ta phải xét chúng trên cùng một mặt phẳng.

C. Các dạng toán

1. Chứng minh đường thẳng song song mặt phẳng

Để chứng minh đường thẳng a song song với $mp(P)$ ta chỉ ra đường thẳng a song song với một đường thẳng nằm trong $mp(P)$.

2. Cách chứng minh hai mặt phẳng song song

Để chứng minh $mp(P)$ song song với $mp(Q)$ ta chỉ ra trong $mp(P)$ có hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với $mp(Q)$.

CHƯƠNG 3: QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

A. Cách chứng minh các dạng toán cơ bản

1. Cách chứng minh hai đường thẳng a, b vuông góc với nhau

- Ta có 2 cách: Cách 1: Chứng minh trực tiếp như trong hình học phẳng.

Cách 2: Chỉ ra đường thẳng a vuông góc $mp(P)$ chứa đường thẳng b .

2. Cách chứng minh đường thẳng d vuông góc $mp(P)$:

Chỉ ra đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong $mp(P)$

3. Cách chứng minh hai $mp(P)$ và (Q) vuông góc.

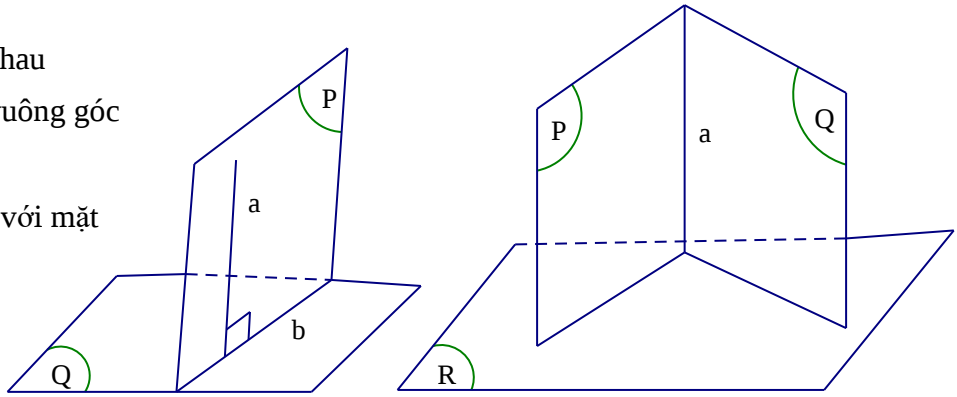
Ta có hai cách: Cách 1: Chỉ ra trong $mp(P)$ có một đường thẳng a vuông góc với $mp(Q)$

Cách 2: Tìm góc giữa (P) và (Q) rồi chỉ ra góc đó bằng 90°

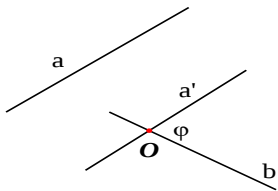
4. Tính chất hai mp vuông góc.

T/c 1: Nếu (P) và (Q) vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng a nằm trong (P) vuông góc với giao tuyến sẽ vuông góc với (Q)

T/c 2: Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

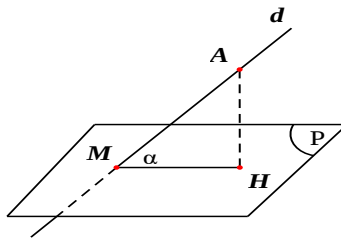
**B. Cách xác định góc****1. Cách xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b**

Quy tắc: Ta đưa về chung gốc



B1: Qua O thuộc b , ta kẻ đt $a' // a$

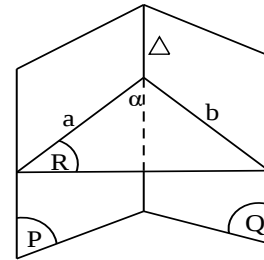
B2: Vậy $(a, b) = (a', b) = \varphi$

2. Cách xác định góc giữa đường thẳng d và mp(P)

B1: Tìm giao điểm $M = d \cap (P)$

B2: Từ A bất kì thuộc d , kẻ $AH \perp (P)$

B3: Vậy $(d, (P)) = AMH = \alpha$

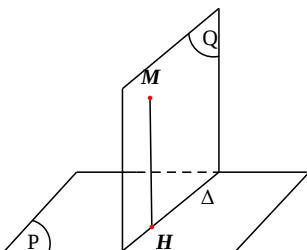
3. Cách xác định góc giữa mp(P) và mp(Q)

B1: Tìm giao tuyến $\Delta = (P) \cap (Q)$

B2: Dựng $mp(R) \perp \Delta$

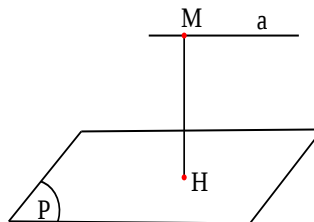
B3: Tìm giao tuyến (R) với (P) và (Q) là đt a và b

Vậy $((P); (Q)) = (a, b) = \alpha$

C. Khoảng cách**1. Cách xác định khoảng cách từ M đến mp(P)**

B1: Dựng $mp(Q)$ chứa M và $mp(Q) \perp mp(P)$

B2: Tìm giao tuyến $\Delta = (P) \cap (Q)$

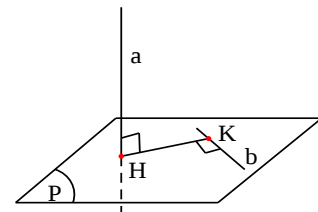
2. Khoảng cách từ đường thẳng a song song với mp(P)

Ta có:

$d(a, (P)) = d(M, (P))$; với M bất kì nằm trên đường thẳng a .

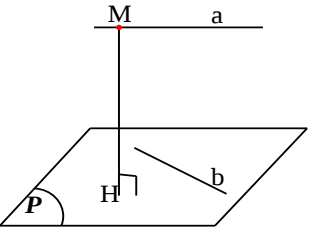
3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b .

TH1: a, b chéo nhau và $a \perp b$.



B1: Dựng $mp(P)$ chứa đt b và vuông góc với đt a .

B2: Tìm giao điểm $H = a \cap (P)$

B3: Kẻ $MH \perp \Delta$ thì $MH = d(M, (P))$		B3: Kẻ $HK \perp b$ thì $HK = d(a, b)$ TH2: a, b chéo nhau và a không vuông góc với b.  B1: Dựng mp(P) chứa b và $(P) \parallel a$ B2: $d(a, b) = d(a, (P)) = MH$
---	--	--

LÍ THUYẾT HÌNH HỌC LỚP 12

CHƯƠNG I. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

A. Khối đa diện

1. Hình đa diện: Hình đa diện (đa diện) là hình tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn 2 tính chất sau:

+ Hai đa giác phân biệt có 3 khả năng:

- Hoặc không có điểm chung
- Hoặc chỉ có một đỉnh chung
- Hoặc chỉ có một cạnh chung

+ Mỗi cạnh của đa giác bất kì cũng là cạnh chung của đúng 2 đa giác

2. Khối đa diện: Là hình đa diện cộng với phần không gian được giới hạn bởi hình đa diện đó.

3. Khối đa diện lồi: là khối đa diện mà đoạn thẳng nối 2 điểm bất kì thuộc khối đa diện, đều nằm trong khối đa diện đó.

4. Khối đa diện đều loại $\{p, q\}$: là khối đa diện lồi thỏa mãn 2 tính chất:

- + Mỗi mặt là một đa giác đều gồm p cạnh
- + Mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng q mặt.

Bảng tóm tắt 5 loại khối đa diện đều

Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt
{3, 3}	Tứ diện đều	4	6	4
{3, 4}	Bát diện đều	6	12	8
{3, 5}	Hai mươi mặt đều	12	30	20
{4, 3}	Lập phương	8	12	6
{5, 3}	Mười hai mặt đều	20	30	12

5. Định lý Ôle:

$$\text{Số đỉnh} - \text{số cạnh} + \text{số mặt} = 2$$

B. Thể tích khối đa diện

1. **Thể tích khối chóp:** $V = \frac{1}{3}h.S$ (h là đường cao, S là diện tích đáy)

2. **Thể tích khối lăng trụ:** $V = h.S$ (h là đường cao, S là diện tích đáy)

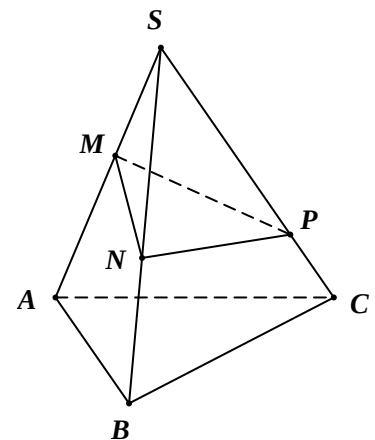
3. **Thể tích khối hộp chữ nhật:** $V = a.b.c$ (a, b, c là độ dài 3 cạnh)

4. **Thể tích khối lập phương:** $V = a^3$ (a là độ dài cạnh hình lập phương)

5. **Tỉ số thể tích** (chỉ đúng với khối chóp tam giác)

Cho khối chóp S.ABC, các điểm M, N, P nằm bất kì trên SA, SB, SC

$$\text{Khi đó ta có tỉ số thể tích } \frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC}$$

**C. Kiến thức bổ trợ cho việc tính thể tích**

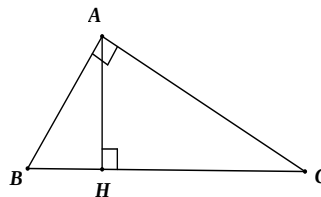
1. **Hệ thức lượng trong tam giác vuông:** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Ta có

$$+ AB^2 = BH.BC ; AC^2 = CH.CB$$

$$+ AH^2 = HB.HC$$

$$+ AB.AC = AH.BC$$

$$+ \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

**2. Diện tích tam giác**

a) Tam giác bất kì ta có 5 công thức tính diện tích

$$S = \frac{1}{2}h_a.a = \frac{1}{2}h_b.b = \frac{1}{2}h_c.c$$

$$S = \frac{1}{2}b.c.\sin A = \frac{1}{2}a.c.\sin B = \frac{1}{2}a.b.\sin C$$

$$S = \frac{a.b.c}{4R} \quad (R \text{ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác})$$

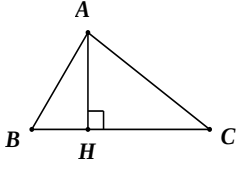
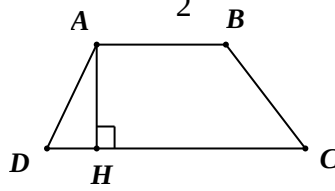
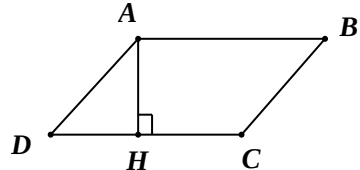
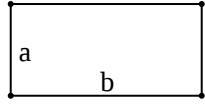
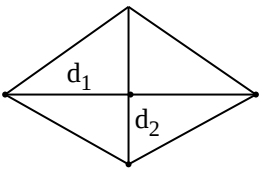
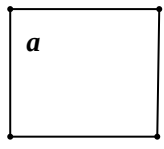
$$S = p.r \quad (r \text{ là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác, } p \text{ là nửa chu vi và } p = \frac{a+b+c}{2})$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{gọi là công thức Hê rông (dùng tính diện tích khi biết độ dài 3 cạnh tam giác)}$$

b) Tam giác ABC vuông tại A thì $S = \frac{1}{2} AB.AC$

c) Tam giác đều ABC cạnh x thì
$$\begin{cases} S = x^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \\ h = x \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

3. Diện tích các hình

Tam giác: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH.BC$ 	Hình thang: $S_{ABCD} = \frac{(AB+CD)AH}{2}$ 	Hình bình hành: $S_{ABCD} = AH.CD$ 
Hình chữ nhật: $S = a.b$ 	Hình thoi: $S = \frac{1}{2} d_1.d_2$ 	Hình vuông: $S = a^2$ 

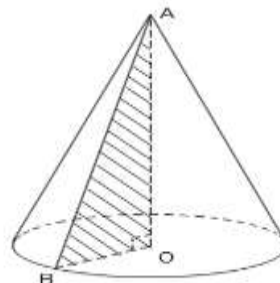
CHƯƠNG II. KHỐI TRỤ - KHỐI NÓN - KHỐI CẦU

A. Mặt nón tròn xoay

1. Định nghĩa:

a) Hình nón: Cho tam giác BOA vuông tại O. Khi quay tam giác đó xung quanh OA thì sẽ tạo ra hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón). Trong đó:

- OA là đường cao hình nón
- AB là đường sinh hình nón
- OB là bán kính đáy hình nón
- góc 2 OAB gọi là góc ở đỉnh mặt nón



b) Khối nón: Là phần không gian giới hạn bởi hình nón và kể cả hình nón đó.

2. Công thức diện tích xung quanh, toàn phần và thể tích khối nón

a) Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi.r.l$ (l là đường sinh)

b) Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi.r.l + \pi.r^2$

c) Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3} \pi.r^2.h$ (h là đường cao)

B. Mặt trụ tròn xoay

1. Định nghĩa

a) Hình trụ: Xét hình chữ nhật ABCD, khi quay hình chữ nhật quanh cạnh AB thì sẽ tạo ra một hình gọi là hình trụ tròn xoay (gọi tắt là hình trụ). Trong đó:

- AB gọi là đường cao hay trục hình trụ.
- CD gọi là đường sinh (trong hình trụ thì độ dài đường sinh bằng độ dài đường cao)
- BC gọi là bán kính đáy.

b) Khối trụ: Là phần không gian được giới hạn bởi hình trụ kể cả hình trụ đó.

2. Công thức tính diện tích xung quanh, toàn phần và thể tích khối trụ.

a) Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi.r.h$

b) Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2\pi.r.h + 2\pi.r^2$

c) Thể tích khối trụ: $V = \pi.r^2.h$

C. Mặt cầu

1. Định nghĩa

a) Mặt cầu: Tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R không đổi được gọi là mặt cầu tâm O, bán kính R. Kí hiệu $S(O, R)$

b) Khối cầu: Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu tâm $S(O, R)$ và các điểm nằm trong mặt cầu đó gọi là khối cầu hoặc hình cầu tâm O, bán kính R.

2. Vị trí tương đối giữa điểm và mặt cầu: Cho mặt cầu $S(O, R)$ và điểm A bất kì, khi đó nếu:

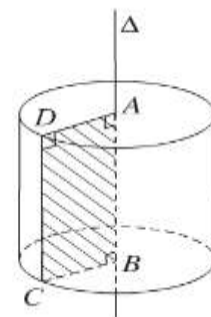
- $OA > R$ thì điểm A nằm ngoài mặt cầu.
- $OA = R$ thì điểm A nằm trên mặt cầu.
- $OA < R$ thì điểm A nằm trong mặt cầu.

3. Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu.

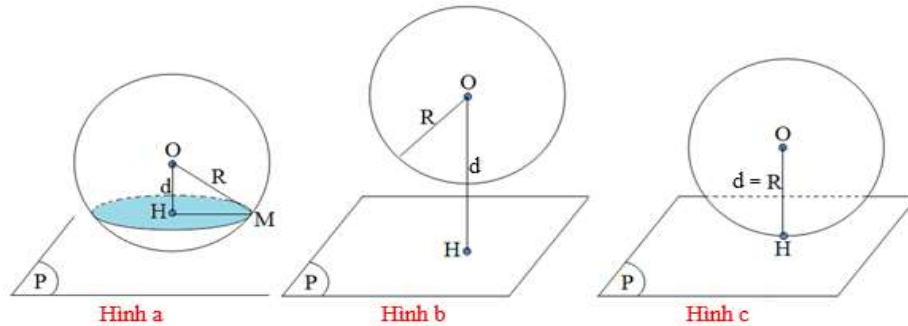
Cho mp(P) và mặt cầu $S(O, R)$, gọi H là hình chiếu của O lên mp(P) thì $OH = d(O, (P))$. Khi đó nếu:

- $OH > R$ thì mp(P) không có điểm chung với mặt cầu.
- $OH = R$ thì mp(P) tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H khi đó H gọi là tiếp điểm còn mp(P) là mặt phẳng tiếp diện.

CHÚ Ý: mp(P) tiếp xúc mặt cầu $S(O, R)$ tại H khi và chỉ khi $mp(P) \perp OH$



- $OH < R$ thì mp(P) cắt mặt cầu $S(O, R)$ theo giao tuyến là đường tròn tâm H, bán kính $r = \sqrt{R^2 - OH^2}$



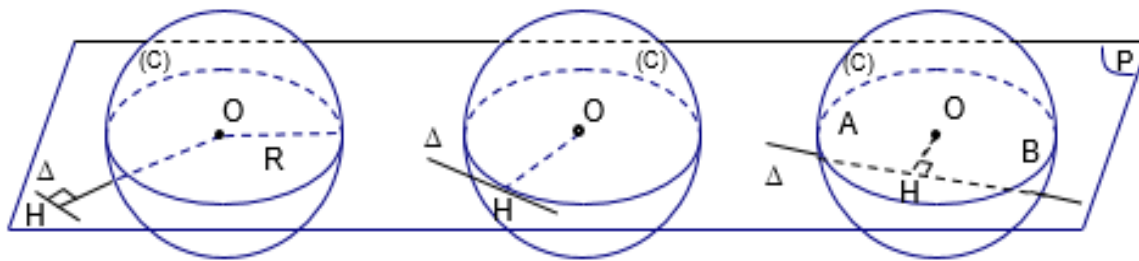
4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O, R)$ và đường thẳng Δ . Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên Δ thì $OH = d(O, \Delta)$. Nếu:

- $OH > R$ thì Δ không cắt mặt cầu.
- $OH = R$ thì Δ tiếp xúc mặt cầu tại H, ta gọi Δ là tiếp tuyến của mặt cầu và H là tiếp điểm.

CHÚ Ý: Δ là tiếp tuyến của mặt cầu $S(O, R)$ khi và chỉ khi $\Delta \perp OH$ tại điểm H.

- $OH < R$ thì Δ cắt mặt cầu tại 2 điểm phân biệt A, B.



5. Công thức tính diện tích, thể tích khối cầu

a) Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$

b) Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

6. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp

a) Định nghĩa: Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp nếu các đỉnh khối chóp đều thuộc mặt cầu.

Mặt cầu nội tiếp khối chóp nếu mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của khối chóp.

Chú ý: Điều kiện cần để khối chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy khối chóp phải ngoại tiếp đường tròn.

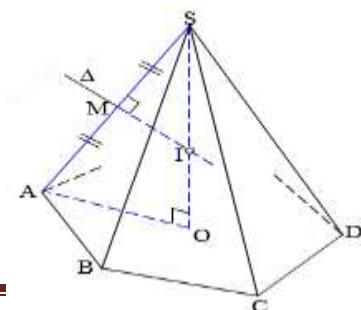
Điều kiện cần và đủ để khối lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp là khối lăng trụ đứng và đáy có đường tròn ngoại tiếp.

b) Cách xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp.

Bước 1: Tìm tâm đáy (là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy)

Bước 2: Dựng đường thẳng Δ đi qua tâm đáy và vuông góc với đáy

(Δ gọi là trục của chóp, lưu ý là mọi điểm nằm trên trục thì cách đều các đỉnh của đa giác đáy khối chóp)



Bước 3: Dựng đường trung trực của cạnh bên, hoặc mặt phẳng

trung trực của cạnh bên cắt trục Δ tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp.

Chú ý: + Tam giác bất kì tâm đường tròn ngoại tiếp là giao 3 đường trung trực.

+ Tam giác vuông tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm cạnh huyền.

+ Tam giác đều tâm đường tròn ngoại tiếp là trọng tâm.

+ Hình chữ nhật, hình vuông tâm đường tròn ngoại tiếp là giao 2 đường chéo.

CHƯƠNG III. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. Vec tơ trong không gian và tính chất

1. Vec tơ và tính chất cơ bản

Cho $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ và $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

$$a) \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$$

$$b) \vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$$

$$c) k \cdot \vec{u} = (kx_1, ky_1, kz_1)$$

$$d) \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

$$e) \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \quad (\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0)$$

$$f) |\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$g) \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

2. Tọa độ điểm

Cho $A(x_A, y_A, z_A); B(x_B, y_B, z_B); C(x_C, y_C, z_C)$

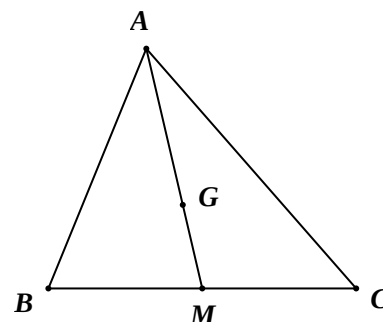
a) Gọi $M(x_M, y_M, z_M)$ là trung điểm BC thì

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \\ z_M = \frac{z_B + z_C}{2} \end{cases}$$

b) Gọi $G(x_G, y_G, z_G)$ là trọng tâm tam giác ABC thì

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$$

$$c) \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$



$$d) AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

B. Tích có hướng và ứng dụng

1. Định nghĩa: Cho $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ và $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, tích có hướng của hai vec tơ kí hiệu là: $[\vec{u}, \vec{v}]$

$$\text{Công thức } [\vec{u}, \vec{v}] = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

2. Tính chất

a) $[\vec{u}, \vec{v}]$ vuông góc với $\vec{u}$ và $\vec{v}$

$$b) |[\vec{u}, \vec{v}]| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

c) $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$

3. Ứng dụng tích có hướng

a) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} = 0$

b) AB, CD chéo nhau (ABCD là tứ diện) $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$

c) ABCD là tứ giác (4 điểm A, B, C, D đồng phẳng) $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

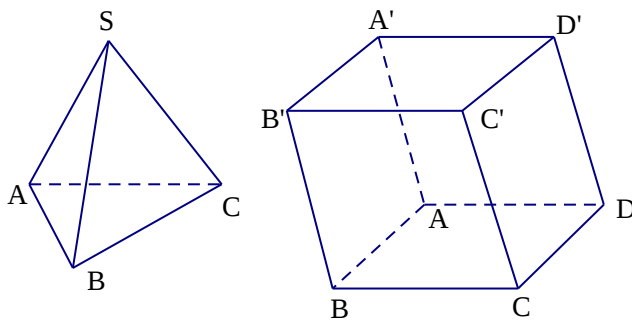
d) 3 điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \vec{0}$

e) Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$

f) Diện tích hình bình hành ABCD: $S_{ABCD} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]|$

g) Thể tích tứ diện S.ABC: $V_{S.ABC} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}] \cdot \overrightarrow{SC}|$

h) Thể tích khối hộp ABCD.A'B'C'D': $V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AA'}|$



C. Phương trình mặt cầu

a) Mặt cầu (S) có tâm I(a, b, c) và bán kính R thì có phương trình là:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

b) Phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

Khi đó mặt cầu có tâm I(a, b, c) và $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

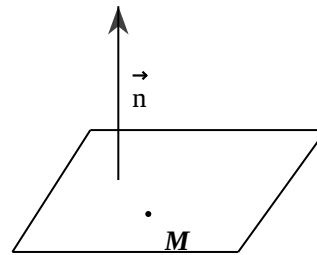
c) mp(P) tiếp xúc với mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R $\Leftrightarrow d(I, (P)) = R$

d) mp(P) cắt mặt cầu (S) $\Leftrightarrow d(I, (P)) < R$. Khi đó giao tuyến là đường tròn

(C) có bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$ trong đó $IH = d(I, (P))$

D. Phương trình mặt phẳng**1. Vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng**

- a) Vec tơ $\vec{n}$ là vec tơ pháp tuyến của mp(P) nếu $\vec{n} \perp mp(P)$
- b) Nếu $\vec{n}$ là vec tơ pháp tuyến của mp(P) thì $k\vec{n}$ cũng là vec tơ pháp tuyến của mp(P).

**2. Phương trình mặt phẳng**

- a) Nếu mp(P) nhận $\vec{n} = (A, B, C)$ làm vec tơ pháp tuyến và đi qua $M(x_0, y_0, z_0)$ thì phương trình mp(P) là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

- b) Phương trình tổng quát của mp(P) là: $Ax + By + Cz + D = 0$, khi đó $\vec{n} = (A, B, C)$ là vec tơ pháp tuyến.

- c) *Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn:*

Nếu mp(P) cắt các trục Ox, Oy, Oz tại $A(a, 0, 0)$; $B(0, b, 0)$; $C(0, 0, c)$ thì phương trình mp(P) là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

- d) *Phương trình chùm mặt phẳng:*

Cho mp(P): $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và mp(Q): $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Khi đó phương trình mặt phẳng chứa giao tuyến của mp(P) và mp(Q) có dạng là:

$m(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + n(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$ (ta thường cho $m = 1$ để tìm n là xong)

- e) Nếu mp(P) đi qua 3 điểm A, B, C thì vec tơ pháp tuyến mp(P) là: $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$

- f) *Chú ý:* +) Hai mặt phẳng song song thì cùng vec tơ pháp tuyến.

+) Hai mặt phẳng vuông góc thì vec tơ pháp tuyến của mp này sẽ song song với mp kia.

3. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho mp(P): $Ax + By + Cz + D = 0$ và mp(Q): $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

- a) mp(P) cắt mp(Q) $\Leftrightarrow A:B:C \neq A':B':C'$

- b) mp(P) song song mp(Q) $\Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$

- c) mp(P) vuông góc với mp(Q) $\Leftrightarrow A.A' + B.B' + C.C' = 0$

- d) mp(P) trùng với mp(Q) $\Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$

4. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Cho $M(x_0, y_0, z_0)$ và mp(P): $Ax + By + Cz + D = 0$. Khoảng cách từ M đến mp(P) là:

$$d(M, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Chú ý: mp(P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm I, bán kính R $\Leftrightarrow d(I, (P)) = R$ (mp(P) gọi là mp tiếp diện)

5. Góc giữa hai mặt phẳng

Cho mp(P): $Ax + By + Cz + D = 0$ và mp(Q): $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

Gọi α là góc giữa hai mp(P) và (Q). Khi đó

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| |\vec{n}_Q|} = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

E. Phương trình đường thẳng

1. Vec tơ chỉ phương của đường thẳng

+ Vec tơ $\vec{u}$ được gọi là vec tơ chỉ phương của đường thẳng Δ khi giá $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ .

+ Nếu $\vec{u}$ là vec tơ chỉ phương của Δ thì $k\vec{u}$ ($k \neq 0$) cũng là vec tơ chỉ phương của Δ

2. Phương trình tham số của đường thẳng

Đường thẳng Δ đi qua $M(x_0, y_0, z_0)$ và nhận $\vec{u} = (a, b, c)$ làm vec tơ chỉ phương thì có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = x_0 + a.t \\ y = y_0 + b.t \\ z = z_0 + c.t \end{cases}$$

3. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Nếu $a, b, c \neq 0$ thì đường thẳng Δ có dạng chính tắc là: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

4. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho đường thẳng Δ_1 có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_1$ và đi qua M_1 , đường thẳng Δ_2 có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_2$ và đi qua M_2 .

$$TH1: \Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2}] \neq \vec{0} \end{cases}$$

$$TH2: \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ trùng nhau} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2}] = \vec{0} \end{cases}$$

$$TH3: \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ cắt nhau} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0 \end{cases}$$

$$TH4: \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ chéo nhau} \Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$$

5. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua M và nhận $\vec{u}$ là vec tơ chỉ phương. Mặt phẳng (P) có $\vec{n}$ là vec tơ pháp tuyến.

$$\textbf{TH1: } \Delta // \text{mp(P)} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ M \notin \text{mp(P)} \end{cases}$$

$$\textbf{TH2: } \Delta \text{ nằm trên mp(P)} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ M \in \text{mp(P)} \end{cases}$$

$$\textbf{TH3: } \Delta \text{ cắt mp(P)} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$$

$$\textbf{TH4: } \Delta \perp \text{mp(P)} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{n} \text{ cùng phương.}$$

6. Góc giữa hai đường thẳng

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 thì $\cos \alpha = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$

trong đó $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ là các vec tơ chỉ phương của Δ_1 và Δ_2

7. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và mp(P) thì $\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

Trong đó $\vec{u}, \vec{n}$ lần lượt là vec tơ chỉ phương và vec tơ pháp tuyến của Δ và mp(P)

8. Khoảng cách

TH1: Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho M và đường thẳng Δ đi qua A, nhận $\vec{u}$ làm vec tơ chỉ phương.

Khoảng cách từ M đến Δ là: $d(M, \Delta) = \frac{|\vec{u} \cdot \overrightarrow{MA}|}{|\vec{u}|}$

TH2: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Cho đường thẳng Δ_1 có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_1$ và đi qua M_1 , đường thẳng Δ_2 có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_2$ và đi qua M_2

Khoảng cách giữa hai đường thẳng là: $d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}$