

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ (1), m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

b) Tìm m để hàm số (1) có hai điểm cực trị x_1 và x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình $\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x$.

Câu 3 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1 + \sin 2x) dx$.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = a$. Tính thể tích của khối tứ diện $ABB'C'$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a .

Câu 6 (1,0 điểm). Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2)$.

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm): Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần riêng (phần A hoặc phần B)**A. Theo chương trình Chuẩn**

Câu 7.a (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là $x + 3y = 0$ và $x - y + 4 = 0$; đường thẳng BD đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.

Câu 8.a (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 10 = 0$ và điểm $I(2; 1; 3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và cắt (P) theo một đường tròn có bán kính bằng 4.

Câu 9.a (1,0 điểm). Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z + \frac{2(1+2i)}{1+i} = 7+8i$. Tìm môđun của số phức $w = z + 1 + i$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 2x - y + 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d , cắt trục Ox tại A và B , cắt trục Oy tại C và D sao cho $AB = CD = 2$.

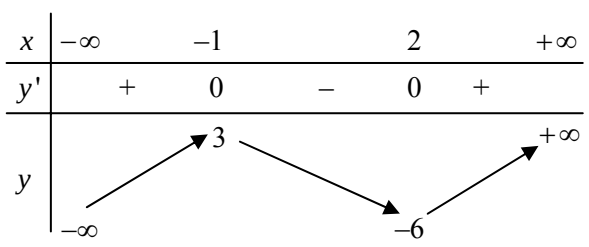
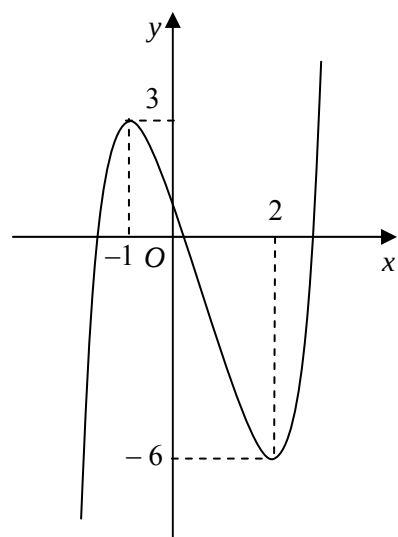
Câu 8.b (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(2; -1; 0)$. Xác định tọa độ điểm M thuộc d sao cho tam giác AMB vuông tại M .

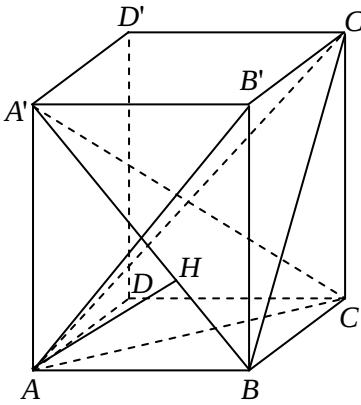
Câu 9.b (1,0 điểm). Giải phương trình $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$ trên tập hợp các số phức.

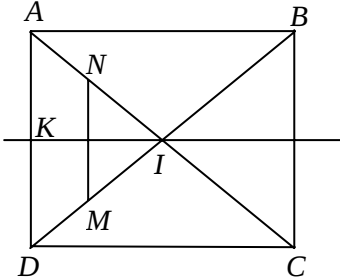
----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

Câu	Đáp án	Điểm												
1 (2,0 điểm)	a) (1,0 điểm)													
	Khi $m = 1$, hàm số trở thành $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + \frac{2}{3}$. • Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. • Sự biến thiên: - Chiều biến thiên: $y' = 2x^2 - 2x - 4; y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$.	0,25												
	Các khoảng đồng biến: $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$; khoảng nghịch biến $(-1; 2)$. - Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = -1, y_{CD} = 3$, đạt cực tiểu tại $x = 2, y_{CT} = -6$. - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$,	0,25												
	- Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td></td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table> 	x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$	y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0,25
	x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$								
y'	$+$	0	$-$	0	$+$									
• Đồ thị: 	0,25													
b) (1,0 điểm)														
	Ta có $y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1)$.	0,25												
	Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 13m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{2\sqrt{13}}{13}$ hoặc $m < -\frac{2\sqrt{13}}{13}$.	0,25												
	Ta có: $x_1 + x_2 = m$ và $x_1 x_2 = 1 - 3m^2$, do đó $x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow 1 - 3m^2 + 2m = 1$	0,25												
	$\Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = \frac{2}{3}$. Kiểm tra điều kiện ta được $m = \frac{2}{3}$.	0,25												

Câu	Đáp án	Điểm	
2 (1,0 điểm)	Phương trình đã cho tương đương với: $(2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2})\cos 2x = 0$.	0,25	
	$\bullet \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$.	0,25	
	$\bullet 2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$	0,25	
	$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \ x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi, \ x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.	0,25	
3 (1,0 điểm)	Hệ đã cho tương đương với: $\begin{cases} xy + x - 2 = 0 & (1) \\ (2x - y + 1)(x^2 - y) = 0 & (2) \end{cases}$	0,25	
	$\bullet 2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 1$. Thay vào (1) ta được $x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Do đó ta được các nghiệm $(x; y) = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \sqrt{5}\right)$ và $(x; y) = \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; -\sqrt{5}\right)$.	0,25	
	$\bullet x^2 - y = 0 \Leftrightarrow y = x^2$. Thay vào (1) ta được $x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow x = 1$. Do đó ta được nghiệm $(x; y) = (1; 1)$. Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là:	0,25	
	$(x; y) = (1; 1), \ (x; y) = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \sqrt{5}\right), \ (x; y) = \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; -\sqrt{5}\right)$.	0,25	
4 (1,0 điểm)	$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx = \frac{\pi^2}{32} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx$	0,25	
	Đặt $u = x; dv = \sin 2x dx$, suy ra $du = dx; v = -\frac{1}{2} \cos 2x$.	0,25	
	Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x \Big _0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$	0,25	
	$= \frac{1}{4} \sin 2x \Big _0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}$. Do đó $I = \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4}$.	0,25	
5 (1,0 điểm)		Tam giác $A'AC$ vuông cân tại A và $A'C = a$ nên $A'A = AC = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Do đó $AB = B'C' = \frac{a}{2}$.	0,25
	$V_{ABB'C'} = \frac{1}{3} B'C' \cdot S_{\triangle ABB'} = \frac{1}{6} B'C' \cdot AB \cdot BB' = \frac{a^3 \sqrt{2}}{48}$.	0,25	
	Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của $\triangle A'AB$. Ta có $AH \perp A'B$ và $AH \perp BC$ nên $AH \perp (A'BC)$, nghĩa là $AH \perp (BCD')$. Do đó $AH = d(A, (BCD'))$.	0,25	
	Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{6}{a^2}$. Do đó $d(A, (BCD')) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.	0,25	

Câu	Đáp án	Điểm
6 (1,0 điểm)	Ta có $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 8(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x+y \leq 8$.	0,25
	$A = (x+y)^3 - 3(x+y) - 6xy + 6 \geq (x+y)^3 - \frac{3}{2}(x+y)^2 - 3(x+y) + 6$.	0,25
	Xét hàm số: $f(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 3t + 6$ trên đoạn $[0; 8]$.	
	Ta có $f'(t) = 3t^2 - 3t - 3$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (loại).	0,25
	Ta có $f(0) = 6$, $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$, $f(8) = 398$. Suy ra $A \geq \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$.	
	Khi $x = y = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ thì dấu bằng xảy ra. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17-5\sqrt{5}}{4}$.	0,25
7.a (1,0 điểm)		0,25
	Tọa độ điểm A thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+3y=0 \\ x-y+4=0 \end{cases} \Rightarrow A(-3;1)$.	0,25
	Gọi N là điểm thuộc AC sao cho $MN \parallel AD$. Suy ra MN có phương trình là $x - y + \frac{4}{3} = 0$. Vì N thuộc AC , nên tọa độ của điểm N thỏa mãn hệ $\begin{cases} x - y + \frac{4}{3} = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow N\left(-1; \frac{1}{3}\right)$.	
	Đường trung trực Δ của MN đi qua trung điểm của MN và vuông góc với AD , nên có phương trình là $x + y = 0$. Gọi I và K lần lượt là giao điểm của Δ với AC và AD . Suy ra tọa độ của điểm I thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+y=0 \\ x+3y=0, \end{cases}$	0,25
	và tọa độ của điểm K thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+4=0. \end{cases}$ Do đó $I(0; 0)$ và $K(-2;2)$. $\overline{AC} = 2\overline{AI} \Rightarrow C(3;-1)$; $\overline{AD} = 2\overline{AK} \Rightarrow D(-1;3)$; $\overline{BC} = \overline{AD} \Rightarrow B(1;-3)$.	0,25
8.a (1,0 điểm)	Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) . Suy ra H là tâm của đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) cần viết phương trình.	0,25
	Ta có $IH = d(I; (P)) = 3$.	0,25
	Bán kính của mặt cầu (S) là: $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.	0,25
	Phương trình của mặt cầu (S) là: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$.	0,25
9.a (1,0 điểm)	Ta có: $(2+i)z + \frac{2(1+2i)}{1+i} = 7+8i \Leftrightarrow (2+i)z = 4+7i$	0,25
	$\Leftrightarrow z = 3+2i$.	0,25
	Do đó $w = 4+3i$.	0,25
	Môđun của w là $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.	0,25

Câu	Đáp án	Điểm
7.b (1,0 điểm)	Gọi I là tâm của đường tròn (C) cần viết phương trình. Do $I \in d$ nên tọa độ của I có dạng $I(t; 2t+3)$.	0,25
	$AB = CD \Leftrightarrow d(I, Ox) = d(I, Oy) \Leftrightarrow t = 2t+3 \Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = -3$.	0,25
	• Với $t = -1$ ta được $I(-1; 1)$, nên $d(I; Ox) = 1$. Suy ra, bán kính của (C) là $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Do đó $(C): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$.	0,25
	• Với $t = -3$ ta được $I(-3; -3)$, nên $d(I; Ox) = 3$. Suy ra, bán kính của (C) là $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Do đó $(C): (x+3)^2 + (y+3)^2 = 10$.	0,25
8.b (1,0 điểm)	Do $M \in d$ nên tọa độ của điểm M có dạng $M(1+2t; -1-t; t)$.	0,25
	Ta có $\overrightarrow{AM} = (2t; -t; t-2)$, $\overrightarrow{BM} = (-1+2t; -t; t)$.	0,25
	Tam giác AMB vuông tại $M \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ $\Leftrightarrow 2t(-1+2t) + t^2 + t(t-2) = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 4t = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = \frac{2}{3}$. Do đó $M(1; -1; 0)$ hoặc $M\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$.	0,25
9.b (1,0 điểm)	Phương trình bậc hai $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$ có biệt thức $\Delta = -2i$.	0,25
	$= (1-i)^2$.	0,25
	Do đó nghiệm của phương trình là $z = \frac{-3(1+i) + (1-i)}{2} = -1 - 2i$	0,25
	hoặc $z = \frac{-3(1+i) - (1-i)}{2} = -2 - i$.	0,25

----- HẾT -----