

Trao đổi kinh nghiệm dạy học theo định hướng tiếp cận năng lực người học

Ứng dụng một số tích chất đặc biệt của hàm số để giải phương trình, bất phương trình

Ths NGUYỄN SỸ

Giáo viên Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định.

Phương trình, bất phương trình, hệ phương trình là một mảng kiến thức khá quan trọng của chương trình toán THPT, nó đóng vai trò quan trọng trong việc rèn luyện kỹ năng giải toán và phát triển tư duy cho học sinh, chính vì thế bài tập phương trình, bất phương trình, hệ phương trình xuất hiện nhiều trong các kỳ thi TN THPT và kỳ thi HSG cấp tỉnh. Các kỹ thuật giải phương trình, bất phương trình rất phong phú và đa dạng. Tuy nhiên, kỹ thuật sử dụng tính chất đặc biệt của hàm số có rất nhiều ưu thế trong việc giúp các em tìm tòi, phát hiện, tạo hứng thú trong quá trình học bộ môn Toán, và hơn nữa là góp phần nâng cao chất lượng giảng dạy vì thế tôi viết chuyên đề “Ứng dụng một số tích chất đặc biệt của hàm số để giải phương trình, bất phương trình”.

1. Cơ sở lý thuyết

1.1. Kiến thức cần nắm

1.1.1. Định nghĩa hàm số chẵn, hàm số lẻ

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập D .

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số chẵn trên tập D nếu
$$\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x), \forall x \in D. \end{cases}$$

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số lẻ trên tập D nếu
$$\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x), \forall x \in D. \end{cases}$$

1.1.2. Một số kết quả thường dùng

Định lý 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

Nếu $f'(x) > 0 \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K .

Nếu $f'(x) < 0 \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K .

Lưu ý: Nếu $f'(x) > 0 \forall x \in (a; b)$ và hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a; b]$.

Tính chất 1. Cho hàm số f liên tục và đơn điệu trên khoảng K , khi đó

$$\text{PT } f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \text{ với } \begin{cases} u \in K \\ v \in K. \end{cases}$$

Tính chất 2. Cho hàm số f liên tục và đồng biến trên khoảng K , khi đó

$$\text{BPT } f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v \text{ với } \begin{cases} u \in K \\ v \in K. \end{cases}$$

Tính chất 3. Cho hàm số f liên tục và nghịch biến trên khoảng K , khi đó

$$\text{BPT } f(u) > f(v) \Leftrightarrow u < v \text{ với } \begin{cases} u \in K \\ v \in K. \end{cases}$$

Một số hàm số có một vài tính chất đặc biệt:

+) Với $a > 1$ hàm số $f(x) = a^x - a^{-x}$ là hàm số lẻ, đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+) Với $a > 1$, hàm số $f(x) = \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, và thỏa mãn $f(x) + f(1-x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

+) Với $a, b > 1$, hàm số $f(x) = \log_a x + b^x - b^{\frac{1}{x}}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) \quad \forall x > 0$.

+) Với $a > 1$ hàm số $f(x) = \log_a \sqrt{x + \sqrt{x^2 + a^2}}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

+) Với $a, b > 0$, hàm số $f(x) = a(e^x - e^{-x}) + b \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ là hàm số lẻ, đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+) Hàm số $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) \cdot f(-x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Việc chứng minh các tính chất trên khá đơn giản (xin dành cho bạn đọc).

2. Bài tập áp dụng:

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = 2021^x - 2021^{-x}$. Giá trị nguyên lớn nhất của m để $f(m) + f(2m + 2019) < 0$ là

A. -673.

B. -674.

C. 673.

D. 674.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 2021^x \ln 2021 + 2021^{-x} \ln 2021 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

BPT:

$$f(m) + f(2m + 2019) < 0 \Leftrightarrow f(2m + 2019) < -f(m)$$

$$\Leftrightarrow f(2m + 2019) < f(-m)$$

$$\Leftrightarrow 2m + 2019 < -m$$

$$\Leftrightarrow 3m < -2019 \Leftrightarrow m < -673.$$

Vậy giá trị nguyên lớn nhất của m là -674.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = 2020^x - 2020^{-x}$. Giá trị nguyên lớn nhất của tham số m để phương trình $f(\log_2 x - m) + f(\log_2^3 x) = 0$ có nghiệm $x \in (1; 16)$.

- A. 65. B. 67. C. 68. D. 69.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 2020^x \ln 2020 + 2020^{-x} \ln 2020 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ lẻ trên $\mathbb{R}$.

Đặt $t = \log_2 x$, ĐK $t \in (0; 4)$. PT trở thành

$$f(t-m) + f(t^3) = 0 \Leftrightarrow f(t^3) = -f(t-m) \Leftrightarrow f(t^3) = f(m-t)$$

$$\Leftrightarrow t^3 = m-t \Leftrightarrow t^3 + t = m.$$

Xét hàm số $g(t) = t^3 + t$ với $t \in (0; 4)$, ta có $g'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in (0; 4)$. Mà $f(t)$ liên tục trên $[0; 4]$. Suy ra $g(0) < g(t) < g(4) \forall t \in (0; 4)$, hay $0 < g(t) < 68, \forall t \in (0; 4)$.

Vậy PT đã cho có nghiệm $x \in (1; 16)$ khi và chỉ khi $0 < m < 68$. Suy ra giá trị nguyên lớn nhất của tham số m là 67.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \ln x + e^x - e^{\frac{1}{x}}$. Có bao nhiêu nghiệm nguyên dương của phương trình sau $f(\log_{(9x+2)} 10) + f(\log(2+x^3)) = 0$?

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{x} + e^x + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} > 0, \forall x > 0$, suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Với } x > 0, \text{ ta có } f\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}} - e^x = -\left[\ln x + e^x - e^{\frac{1}{x}}\right] = -f(x).$$

Với $x \in \mathbb{Z}_+^*$, phương trình

$$f(\log_{(9x+2)} 10) + f(\log(2+x^3)) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{\log(9x+2)}\right) + f(\log(2+x^3)) = 0$$

$$\Leftrightarrow -f(\log(9x+2)) + f(\log(2+x^3)) = 0 \Leftrightarrow f(\log(2+x^3)) = f(\log(9x+2))$$

$$\Leftrightarrow \log(2+x^3) = \log(2+9x) \Leftrightarrow x(x^2-9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 3 \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện đang xét. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$. Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$f\left(3m + \frac{1}{4} \sin x\right) + f(\cos^2 x) = 1 \text{ có nghiệm là}$$

- A. $-\frac{1}{192} \leq m \leq \frac{3}{4}$. B. $-\frac{1}{192} < m < \frac{3}{4}$. C. $-\frac{1}{192} \leq m \leq \frac{5}{12}$. D. $-\frac{1}{192} < m < \frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$. Ta có $f'(x) = \frac{1.3 - 1.0}{(9^x + 3)^2} \cdot 9^x \cdot \ln 9 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(x) + f(1-x) = \frac{9^x}{9^x + 3} + \frac{9^{1-x}}{9^{1-x} + 3} = \frac{9^x}{9^x + 3} + \frac{3}{9^x + 3} = 1 \Rightarrow f(x) + f(1-x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(\cos^2 x) = f(1 - \sin^2 x) = 1 - f(\sin^2 x)$.

Nên PT đã cho $\Leftrightarrow f\left(3m + \frac{1}{4}\sin x\right) = f(\sin^2 x)$

$$\Leftrightarrow 3m + \frac{1}{4}\sin x = \sin^2 x \Leftrightarrow 3m = \sin^2 x - \frac{1}{4}\sin x$$

Đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1]; g(t) = t^2 - \frac{1}{4}t \Rightarrow g'(t) = 2t - \frac{1}{4}; g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{8}$.

t	-1	1/8	1
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$	5/4	-1/64	3/4

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{1}{64} \leq 3m \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{192} \leq m \leq \frac{5}{12}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$. Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$f\left(m - \frac{1}{4}\sin x\right) + f(\cos^2 x) = 1$ có đúng 8 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ là

- A.** $-\frac{1}{64} < m < \frac{3}{4}$. **B.** $-\frac{1}{64} < m \leq 0$. **C.** $-\frac{1}{64} < m < 0$. **D.** $-\frac{1}{64} < m \leq \frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$, ta có

$$f'(x) = \frac{2 \cdot 4^x \cdot \ln 4}{(4^x + 2)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{hàm số } f(x) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}. \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có: } f(1-x) = \frac{4^{1-x}}{4^{1-x} + 2} = \frac{4}{4 + 2 \cdot 4^x} = \frac{2}{2 + 4^x}$$

$$\text{Suy ra } f(1-x) + f(x) = \frac{2}{4^x + 2} + \frac{4^x}{4^x + 2} = 1 \Rightarrow f(x) = 1 - f(1-x).$$

$$\text{Từ đó, PT } f\left(m - \frac{1}{4}\sin x\right) + f(\cos^2 x) = 1 \Leftrightarrow f\left(m - \frac{1}{4}\sin x\right) = 1 - f(1 - \sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow f\left(m - \frac{1}{4}\sin x\right) = f(\sin^2 x). \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có PT (2) } \Leftrightarrow m - \frac{1}{4}\sin x = \sin^2 x \Leftrightarrow m = \sin^2 x + \frac{1}{4}\sin x \quad (*)$$

Phương trình (*) có 8 nghiệm phân biệt thuộc $[-\pi; 2\pi]$ khi và chỉ $m = t^2 + \frac{1}{4}t$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(-1; 0]$.

Xét hàm số $y = t^2 + \frac{t}{4}$

Bảng biến thiên:

t	-1	$-\frac{1}{8}$	0
$y = t^2 + \frac{t}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{64}$	0

Vậy (*) có 8 nghiệm phân biệt thuộc $[-\pi; 2\pi]$ khi $-\frac{1}{64} < m \leq 0$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \log_3 x + 3^x - 3^{\frac{1}{x}}$. Tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(\frac{1}{4|x-m|+3}\right) + f(x^2 - 4x + 7) = 0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt bằng

A. 14. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

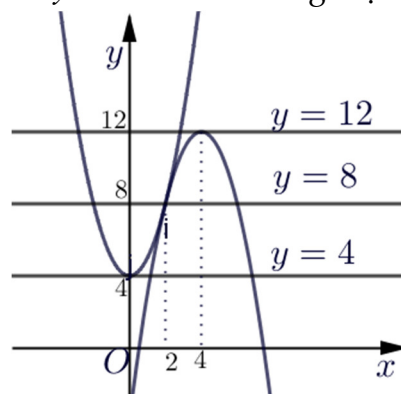
Ta có: $f\left(\frac{1}{x}\right) = \log_3 \frac{1}{x} + 3^{\frac{1}{x}} - 3^x = -\left(\log_3 x + 3^x - 3^{\frac{1}{x}}\right) = -f(x) \forall x > 0$

Lại có: $f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} + 3^x \ln 3 + \frac{1}{x^2} \cdot 3^{\frac{1}{x}} \ln 3 > 0 \forall x > 0 \Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Do đó $f\left(\frac{1}{4|x-m|+3}\right) + f(x^2 - 4x + 7) = 0 \Leftrightarrow f(4|x-m|+3) = f(x^2 - 4x + 7)$

$\Leftrightarrow 4|x-m|+3 = x^2 - 4x + 7 \Leftrightarrow 4|x-m| = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 4m = -x^2 + 8x - 4 \\ 4m = x^2 + 4 \end{cases}$

Vẽ hai parabol $y = -x^2 + 8x - 4$ và $y = x^2 + 4$ trên cùng một hệ trục



Hai parabol $y = -x^2 + 8x - 4$ và $y = x^2 + 4$ tiếp xúc với nhau tại điểm $A(2; 8)$.

Parabol $y = -x^2 + 8x - 4$ có đỉnh $I_1(4; 12)$; parabol $y = x^2 + 4$ có đỉnh $I_2(0; 4)$.

Phương trình đã cho có đúng ba nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 4m = 4 \\ 4m = 8 \\ 4m = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \\ m = 3 \end{cases}$.

Vậy tổng bình phương các giá trị của m là $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \log_2 \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 4}}$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f((x+1)^4 - 4x - 5) + f(x^2 + 6m - m^2 - m^4) \geq 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = \log_2 \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 4}} = \frac{1}{2} \log_2 (x + \sqrt{x^2 + 4})$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có $f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}}{2(x + \sqrt{x^2 + 4}) \ln 2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4} \ln 2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(-x) = \frac{1}{2} \log_2 (-x + \sqrt{(-x)^2 + 4}) = \frac{1}{2} \log_2 (\sqrt{x^2 + 4} - x)$
 $= \frac{1}{2} \log_2 \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = 1 - \frac{1}{2} \log_2 (\sqrt{x^2 + 4} + x) = 1 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Do đó bất phương trình đã cho tương đương

$f((x+1)^4 - 4x - 5) + f(x^2 + 6m - m^2 - m^4) \geq 1 \Leftrightarrow f((x+1)^4 - 4x - 5) \geq 1 - f(x^2 + 6m - m^2 - m^4)$

$\Leftrightarrow f((x+1)^4 - 4x - 5) \geq f(-x^2 - 6m + m^2 + m^4)$

$\Leftrightarrow (x+1)^4 - 4x - 5 \geq -x^2 - 6m + m^2 + m^4$

$\Leftrightarrow (x+1)^4 + (x+1)^2 - 6(x+1) \geq m^4 + m^2 - 6m.$

Đặt $t = x+1; t \in \mathbb{R}$. Bất phương trình trở thành $t^4 + t^2 - 6t \geq m^4 + m^2 - 6m.$

Xét hàm số $g(t) = t^4 + t^2 - 6t; t \in \mathbb{R}.$

Ta có $g'(t) = 4t^3 + 2t - 6; g'(t) = 0 \Leftrightarrow 4t^3 + 2t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$	$+\infty$	-4	$+\infty$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^4 + m^2 - 6m \leq -4$

$\Leftrightarrow g(m) \leq -4 \Leftrightarrow g(m) = -4 \Leftrightarrow m = 1$ (Suy ra từ bảng biến thiên).

Vậy có 1 giá trị thực của m thỏa mãn.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = (e^{2x} - e^{-2x}) + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + x^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $f(|3x^2 + m|) + f(x^3 - 12) \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 1]$.

A. 21.

B. 22.

C. Vô số.

D. 20.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = (e^{2x} - e^{-2x}) + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + x^3$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}.$

Ta có $f'(x) = (2e^{2x} + 2e^{-2x}) + \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} + 3x^2 = (2e^{2x} + 2e^{-2x}) + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 3x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} f(-x) &= (e^{-2x} - e^{2x}) + \ln(\sqrt{x^2+1} - x) - x^3 \\ &= (e^{-2x} - e^{2x}) + \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} - x^3 \\ &= (e^{-2x} - e^{2x}) - \ln(\sqrt{x^2+1} + x) - x^3 \\ &= -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

BPT $f(|3x^2 + m|) + f(x^3 - 12) \leq 0 \Leftrightarrow f(|3x^2 + m|) \leq f(12 - x^3)$

$$\Leftrightarrow |3x^2 + m| \leq 12 - x^3 \Leftrightarrow x^3 + |3x^2 + m| - 12 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x^2 + m - 12 \leq 0, (1) \\ x^3 - 3x^2 - m - 12 \leq 0, (2) \end{cases}$$

+) Đặt $g(x) = x^3 + 3x^2 + m - 12 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Ta có BBT:

x	-2		0		1
$g'(x)$	0	-	0	+	
$g(x)$	$m-8$				$m-8$

Do đó (1) thỏa mãn với mọi $x \in [-2; 1] \Leftrightarrow m - 8 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 8$.

+) Đặt $h(x) = x^3 - 3x^2 - m - 12 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ta có BBT:

x	-2		0		1
$h'(x)$		+	0	-	
$h(x)$			$-m-12$		

Do đó (2) thỏa mãn với mọi $x \in [-2; 1] \Leftrightarrow \max_{[-2; 1]}(h(x)) \leq 0 \Leftrightarrow -m - 12 \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -12$.

Vậy $-12 \leq m \leq 8$. Suy ra có 21 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \ln(\sqrt{4x^2+1} + 2x) + \frac{4^x-1}{2^x}$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $f(\sqrt{x-4} - m(x-1)) + f(m+1) \geq 0$ có nghiệm là

A. $m \leq \frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

B. $m \leq 0$.

C. $m \leq \frac{-1+\sqrt{3}}{4}$.

D. $m \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = \ln(\sqrt{4x^2+1} + 2x) + \frac{4^x-1}{2^x}$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(\sqrt{4x^2+1}-2x) + \frac{4^{-x}-1}{2^{-x}} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right) + \frac{1-4^x}{2^x} \\ &= \ln\left(\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)^{-1}\right) - \frac{4^x-1}{2^x} = -\ln(\sqrt{4x^2+1}+2x) - \frac{4^x-1}{2^x} = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Do đó $f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

Ta lại có $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} + 2^x \ln 2 + 2^{-x} \ln 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Xét bất phương trình $f(\sqrt{x-4}-m(x-1)) + f(m+1) \geq 0, \text{ĐKXĐ } x \geq 4$.

$$\Leftrightarrow f(\sqrt{x-4}-m(x-1)) \geq -f(m+1)$$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt{x-4}-m(x-1)) \geq f(-m-1) \text{ (do } f(x) \text{ là hàm số lẻ)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-4}-m(x-1) \geq -m-1 \text{ (do } f(x) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow m(2-x) \geq -1-\sqrt{x-4}$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{\sqrt{x-4}+1}{x-2}. (*)$$

Xét $g(x) = \frac{\sqrt{x-4}+1}{x-2}$. Ta có $g'(x) = \frac{6-x-2\sqrt{x-4}}{2\sqrt{x-4} \cdot (x-2)^2}$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6-x-2\sqrt{x-4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x = 8+2\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 8-2\sqrt{3} \\ x = 8-2\sqrt{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	4	$8-2\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{4}$	0

Từ BBT, bất phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq \frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

Cách khác: Đặt $t = \sqrt{x-4}, t \geq 0$, khi đó (*) trở thành $m \leq \frac{t+1}{t^2+2}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $g(t) = \frac{t+1}{t^2+2}$ trên khoảng $[0; +\infty)$ ta được

$$\max_{[0; +\infty)} g(t) = g(\sqrt{3}-1) = \frac{\sqrt{3}+1}{4}, \text{ từ đó suy ra bất phương trình (*) có nghiệm } \Leftrightarrow m \leq \frac{1+\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$. Tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình $(-x^2+2x-2)f(-x^2+2x-2) + \frac{(2|x-m|+1)}{f(2\sqrt{x^2-2mx+m^2+1})} = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt là

A. $\frac{13}{4}$.

B. $\frac{7}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\sqrt{x^2 - 2mx + m^2} = |x - m|$; $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$ và

$$f(-x) = -x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) \cdot f(-x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{f(-x)} \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(-x^2 + 2x - 2) = \frac{1}{f(x^2 - 2x + 2)}.$$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \frac{2|x - m| + 1}{f(2|x - m| + 1)} = \frac{x^2 - 2x + 2}{f(x^2 - 2x + 2)} \quad (1).$

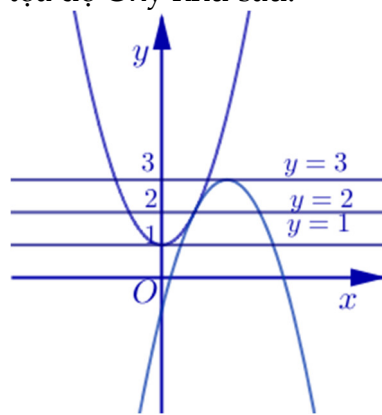
Xét hàm số

$$g(t) = \frac{t}{f(t)} (t > 0) \Rightarrow g'(t) = \frac{f(t) - t \cdot f'(t)}{f^2(t)} = \frac{t + \sqrt{t^2 + 1} - t - \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}}}{f^2(t)} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1} \cdot f^2(t)} > 0$$

Vậy hàm số $g(t)$ đồng biến, khi đó phương trình (1) tương đương với pt

$$x^2 - 2x + 2 = 2|x - m| + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2|x - m| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 2(x - m) \\ x^2 - 2x + 1 = -2(x - m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -x^2 + 4x - 1 \\ 2m = x^2 + 1 \end{cases}.$$

Ta thấy hai parabol $y = -x^2 + 4x - 1$, $y = x^2 + 1$ tiếp xúc với nhau tại điểm có tọa độ $(1; 2)$ nên đồ thị của chúng trong cùng hệ tọa độ Oxy như sau.



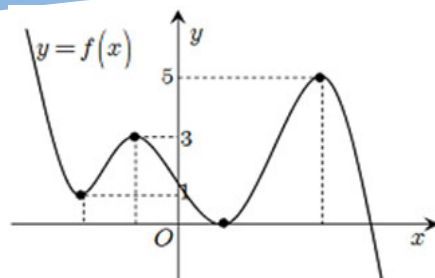
Khi đó để phương trình có 3 nghiệm thì đường thẳng $y = 2m$ cắt hai parabol tại 3 điểm

phân biệt, từ đồ thị suy ra $\begin{cases} 2m = 3 \\ 2m = 2 \\ 2m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = 1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}.$

Vậy tổng bình phương các giá trị của m bằng $\frac{7}{2}$.

3. Bài tập tự luyện:

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\frac{m^3 + 5m}{\sqrt{f^2(x) + 1}} = f^2(x) + 6$ có đúng bốn nghiệm thực phân biệt.



- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Bài 2. Gọi S là tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^3 + 2 - m = \sqrt[3]{3x^2 + 4x + m}$ có đúng hai nghiệm thực. Tích tất cả phần tử của tập hợp S bằng.

- A. $\frac{23}{27}$. B. 0. C. 1. D. $\frac{4}{27}$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = x^3 + x + 2$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}) = -x^3 - x + 2$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$ là

- A. 1746. B. 1750. C. 1747. D. 1748.

Bài 4. Cho phương trình $4^{-x} + x - \log_4(m - x) - 2m - \frac{1}{2} = 0$, ($m \in \mathbb{R}$). Số giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$ là

- A. 3. B. 6. C. 5. D. Vô số.

Bài 5. Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương a với $a < 2021$ để phương trình $(ax + a \ln a) \cdot \ln(ax + a \ln a) = e^{e^x + x}$ có nghiệm $x \geq 2$

- A. 1199. B. 2003. C. 1001. D. 1802.

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m để bất phương trình $(x - m)f(x - m) + \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{f(1 + \sqrt{1 - x^2})} \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 1]$.

- A. $1 + \sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3} - 1$. D. 1.

Bài 7. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ với $x \leq 2021$ thỏa mãn $2(3x - y) = 3(1 + 9^y) - \log_3(2x - 1)$?

- A. 2020. B. 1010. C. 3. D. 4.

Bài 8. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 15x^2 + 78x - 141 - m - 5\sqrt[3]{2x - 9 + m}$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ sao cho $f(x) \leq 0$ với mọi x thuộc đoạn $[2; 4]$?

- A. 2020. B. 2024. C. 2021. D. 2022.

Bài 9. Cho hàm số $f(x) = \log_{2021}(\sqrt{x^2 + 1} + x) + x^{2021} + x^{2023}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f(2^{-x}) + f(-x - 3) \leq 0$ là

- A. $[-1; +\infty)$. B. $(-1; +\infty)$. C. $(-\infty; -1]$. D. $(-\infty; -1)$.

Bài 10. Xét hàm số $f(t) = \frac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi x, y thỏa mãn $e^{x+y} \leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S .

- A. 0. B. Vô số. C. 1. D. 2.

Lời kết: Trên đây là bài viết nhỏ sử dụng tính chất của hàm số để giải quyết một số bài toán về PT-BPT bài viết được tham khảo, tổng hợp từ nhiều câu hỏi được đăng trên FB **NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM** với các kỹ thuật như trên chúng ta có thể tạo ra các lớp bài toán thú vị hơn.

Do kinh nghiệm chưa nhiều và thời gian hạn chế nên chuyên đề còn nhiều thiếu sót. Rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy, cô và bạn bè đồng nghiệp để bài viết được hoàn thiện hơn. Chúc các thầy cô và các em sức khỏe, thành công!