

CÂU TỔ HỢP XÁC SUẤT CẦN HỌC NHỮNG GÌ?

Lời nói đầu. Dưới đây là các nhận xét chủ quan của tôi về các câu tổ hợp – xác suất trong đề thi những năm gần đây. Học sinh cần ôn kỹ kiến thức về các quy tắc đếm, các định nghĩa về tổ hợp – chỉnh hợp – hoán vị; tính xác suất của biến cố đối. Về điểm thì những năm gần hơn số điểm đã giảm dần, tăng tính ứng dụng của xác suất trong thực tế. Về mức độ khó và phức tạp ở mức tăng nhẹ so với từng năm, yêu cầu học sinh cần tư duy cao, pháp hiện phương pháp phù hợp để xác định số phần tử không gian mẫu và biến cố.

Ngoài ra còn các phương trình về các đại lượng tổ hợp, tìm hệ số, số hạng của nhị thức Newton học sinh cũng cần lưu ý.

Tài liệu này được chia là hai phần chính:

Phần A: BÀN VỀ CÂU TỔ HỢP XÁC SUẤT TRONG CÁC ĐỀ THI.....	2
Phần B: NHỮNG VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN TỔ HỢP XÁC SUẤT	8
Bài 1: QUI TẮC CỘNG, QUI TẮC NHÂN.....	8
Bài 2: HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP	11
Bài 3: NHỊ THỨC NEWTON	22
Bài 4: ÔN TẬP PHẦN TỔ HỢP	28
Bài 5: BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ.....	32

Phần A là để học sinh định hình được những gì cần ôn lại cho câu Tổ hợp xác suất trong các đề thi gần nhất. Giúp học sinh hình dung tổng quát nhất về kỳ thi, ôn tập một cách hiệu quả.

Phần B chỉ đóng vai trò tham khảo cho sự ôn tập của học sinh. Hãy chọn những phần trọng tâm nhất, những phần mà các bạn còn nắm chưa vững để đọc và nghiên cứu bài tập.

Mọi ý kiến thắc mắc về tài liệu này xin gửi về địa chỉ mail: cuong11102@gmail.com hoặc liên lạc theo FB: <https://www.facebook.com/cuong.leeminh> .

Sài Gòn, ngày 30 tháng 8 năm 2016

Phần A: BÀN VỀ CÂU TỔ HỢP XÁC SUẤT TRONG CÁC ĐỀ THI

[THPTQG – 2016] (0,5 điểm) Học sinh A thiết kế bảng điều khiển điện tử mở cửa phòng học của lớp mình. Bảng gồm 10 nút, mỗi nút được ghi một số từ 0 tới 9 và không có hai nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa cần nhấn liên tiếp 3 nút khác nhau sao cho 3 số trên nút đó theo thứ tự thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Học sinh B không biết quy tắc mở cửa trên, đã nhấn ngẫu nhiên liên tiếp 3 nút khác nhau trên bảng điều khiển. Tính xác suất để B mở được cửa phòng học đó.

Nhận xét: Học sinh cần nắm rõ kiến thức về xác suất và công thức tính $P = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$. Trong đó việc xác định

không gian mẫu và số lượng phần tử của không gian mẫu trong từng bài toán rất là quan trọng. Ở bài này chúng ta quan sát kỹ phép thử: “nhấn ngẫu nhiên liên tiếp 3 nút khác nhau trên bảng điều khiển”. Có hai cách để tính số phần tử của không gian mẫu là:

Cách 1: Sử dụng quy tắc đếm: Nút thứ nhất có 10 cách chọn, nút thứ 2 còn 9 cách chọn, nút thứ ba còn 8 cách chọn. Vậy số phần tử của Ω là: $n(\Omega) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ cách.

Cách 2: Sử dụng định nghĩa chỉnh hợp: Học sinh B chọn 3 nút trong 10 nút, mỗi bộ 3 nút này có kể đến thứ tự, thứ tự khác nhau thì ra được các cách khác nhau. Vậy theo định nghĩa thì số phần tử trong không gian mẫu là chỉnh hợp chập 3 của 10 phần tử là: $n(\Omega) = A_{10}^3 = 720$ cách.

Số phần tử của biến cố E: “B mở được cửa phòng học” thì ta cần liệt kê ra và đếm các trường hợp mà 3 số trên nút đó theo thứ tự thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Để liệt kê chính xác, đầy đủ thì học sinh cần có cách thức đếm các bộ ba: Bắt đầu là bộ ba dạng $(0; a; b)$ với $0 < a < b$ và $a + b = 10$ khi đó ta có các bộ số sau: $(0; 1; 9), (0; 2; 8), (0; 3; 7), (0; 4; 6)$. Kế tiếp là bộ ba dạng $(1; a; b)$ với $1 < a < b$ và $a + b = 9$ khi đó ta có các bộ số sau: $(1; 2; 7), (1; 3; 6), (1; 4; 5)$. Cứ như thế ta có: $(2; 3; 5)$.

Vậy tất cả các phần tử của biến cố là: $n(E) = 8$.

Tính xác suất theo quy tắc: $P = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{1}{90}$.

Lưu ý: Nhiều học sinh, thí sinh còn nhầm lẫn về chỉnh hợp (có thứ tự) và tổ hợp (không thứ tự) dẫn đến tính sai về ý không gian mẫu. Ngoài ra còn nhiều bạn liệt kê thiếu các trường hợp đúng trong biến cố dẫn đến sai kết quả.

[THPTQG – 2015] (0,5 điểm) Trong đợt ứng phó dịch MERS-CoV, Sở Y tế thành phố đã chọn ngẫu nhiên 3 đội phòng chống dịch cơ động trong số 5 đội của trung tâm y tế dự phòng thành phố và 20 đội của các trung tâm y tế cơ sở để kiểm tra công tác chuẩn bị. Tính xác suất để có ít nhất 2 đội của các Trung tâm y tế cơ sở được chọn.

Nhận xét: Phép thử ở đây là chọn ngẫu nhiên 3 đội trong tổng số 25 đội của TT Y tế dự phòng thành phố và của TT Y tế các cơ sở. Đến đây học sinh cần phân biệt được rằng 3 đội được chọn có kể đến thứ tự hay không? Nếu đổi vị trí 3 đội được chọn thì có hình thành kết quả mới hay không?

Rõ ràng trong trường hợp này, theo định nghĩa thì số phần tử của không gian mẫu sẽ là: $n(\Omega) = C_{25}^3$.

Biến cố E: “có ít nhất 2 đội của các Trung tâm y tế cơ sở được chọn”. Ta thấy từ ít nhất 2, nếu hiểu chính xác thì chúng ta có thể nói là có 2 hoặc có cả 3 đội được chọn là đội của các Trung tâm y tế cơ sở.

Cách 1: Đếm trực tiếp: TH1 có 2 hoặc TH2 có cả 3 đội rồi dùng quy tắc cộng.

Đối với TH1 thì chọn 2 đội trong 20 đội của cơ sở là: C_{20}^2 cách chọn và chọn 1 đội trong 5 đội của thành phố là: C_5^1 cách chọn. Vậy có: $C_{25}^2 C_5^1$ cách ở trường hợp này.

Đối với TH2 thì chọn 3 đội trong 20 đội của cơ sở là: C_{20}^3 cách chọn.

Số lượng phần tử của biến cố E sẽ là: $n(E) = C_{20}^2 C_5^1 + C_{20}^3 = 2090$.

Cách 2: Đếm gián tiếp (hoặc cách tính xác suất của biến cố đối): Đếm số cách chọn mà: “có 1 hoặc không có đội được chọn là đội của các Trung tâm y tế cơ sở”

TH1: Có 1 đội được chọn là đội của các Trung tâm y tế cơ sở thì: $C_{20}^1 C_5^2$ cách chọn.

TH2: Không có đội được chọn là đội của các Trung tâm y tế cơ sở thì: C_5^3 cách chọn.

Số cách chọn mà: “có 1 hoặc không có đội được chọn là đội của các Trung tâm y tế cơ sở” là: 210 cách.

Suy ra số lượng phần tử của biến cố E là: $n(E) = n(\Omega) - 210 = 2090$.

Tính xác suất theo quy tắc: $P = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{209}{230}$.

Lưu ý: Nhiều học sinh, thí sinh còn nhầm lẫn về chỉnh hợp (có thứ tự) và tổ hợp (không thứ tự) dẫn đến tính sai về ý không gian mẫu. Còn chưa xác định rõ được cụm từ “ít nhất” để xác định đầy đủ các trường hợp cần tính.

[THPTQG – MH – 2015] (0,5 điểm) Hai thí sinh A và B tham gia một buổi thi vấn đáp. Cán bộ coi thi đưa cho mỗi thí sinh một bộ câu hỏi thi gồm 10 câu hỏi khác nhau, được đựng trong 10 phong bì dán kín, có hình thức giống hết nhau, mỗi phong bì đựng 1 câu hỏi; thí sinh chọn 3 phong bì trong số đó để xác định câu hỏi của mình. Biết rằng bộ 10 câu hỏi thi dành cho các thí sinh là như nhau, tính xác suất để bộ 3 câu hỏi A chọn và bộ 3 câu hỏi B chọn là giống nhau.

Nhận xét: Ở câu hỏi này, nếu học sinh chưa kỹ về kiến thức thì rất khó để nhận ra không gian mẫu ở đây là gì? Ta cứ theo quy tắc, muốn biết không gian mẫu thì hãy xem phép thử ở đây là gì? Phép thử có thể hình dung lại như sau: “Học sinh A chọn ngẫu nhiên 3 câu và học sinh B chọn ngẫu nhiên 3 câu”. Chú ý, cách chọn của từng học sinh không ảnh hưởng nhau và mỗi học sinh đều chọn 3 trong 10 câu hỏi trong 10 phong bì.

Số phần tử trong không gian mẫu được tính theo quy tắc nhân là lấy số cách chọn của học sinh A nhân với số cách chọn của học sinh B. Mỗi học sinh đều chọn 3 trong 10 câu hỏi, không tính thứ tự của 3 câu hỏi đó nên theo định nghĩa thì số cách chọn là tổ hợp chập 3 của 10: C_{10}^3 cách. Vậy $n(\Omega) = C_{10}^3 \cdot C_{10}^3$ cách.

Biến cố E: “bộ 3 câu hỏi A chọn và bộ 3 câu hỏi B chọn là giống nhau” thì ta cần chỉ ra được nhận xét rằng: Với mỗi bộ 3 câu hỏi của A thì chỉ có duy nhất một bộ 3 câu hỏi của B là giống A.

Từ đây ta suy ra số trường hợp bộ 3 câu hỏi A chọn và bộ 3 câu hỏi B chọn là giống nhau chính là số bộ 3 câu hỏi mà A có thể chọn, đó là $n(E) = C_{10}^3$.

Xác suất cần tính là: $P = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{1}{120}$.

Lưu ý: Ở bài này, nhiều thí sinh chưa định hướng được không gian mẫu nên khó tìm ra số lượng phần tử theo quy tắc nhân. Ngoài ra còn một số bạn chưa đưa ra được nhận xét để tính số phần tử của biến cố.

[THPTQG – DB – 2015] (0,5 điểm) Trong kỳ thi Trung học phổ thông Quốc gia 2015 có 4 môn thi trắc nghiệm và 4 môn thi tự luận. Một giáo viên được bốc thăm ngẫu nhiên để phụ trách coi thi 5 môn. Tính xác suất để giáo viên đó phụ trách coi thi ít nhất 2 môn thi trắc nghiệm.

Nhận xét: Phép thử ở đây là bốc thăm ngẫu nhiên 5 môn thi trong tất cả là 8 môn thi, không kể thứ tự các môn thi. Vậy theo định nghĩa thì số phần tử trong không gian mẫu sẽ là tổ hợp chập 5 của 8 phần tử: $n(\Omega) = C_8^5$.

Gọi E là biến cố “giáo viên phụ trách coi thi ít nhất 2 môn thi trắc nghiệm”. Học sinh cần hiểu đúng từ ít nhất và đưa ra ba trường hợp sau:

TH1: Giáo viên coi thi 2 môn trắc nghiệm và 3 môn tự luận có: $C_4^2 C_4^3$ cách chọn.

TH2: Giáo viên coi thi 3 môn trắc nghiệm và 2 môn tự luận có: $C_4^3 C_4^2$ cách chọn.

TH3: Giáo viên coi thi 4 môn trắc nghiệm và 1 môn tự luận có: $C_4^4 C_4^1$ cách chọn.

Dùng quy tắc cộng thu được: $n(E) = C_4^2 C_4^3 + C_4^3 C_4^2 + C_4^4 C_4^1$.

Rồi tính xác suất: $P = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{13}{14}$.

Lưu ý: Bài này khá tương đồng với bài ở đề **[THPTQG – 2015]**.

[ĐH – A, A₁ – 2014] (0,5 điểm) Từ một hộp chứa 16 thẻ được đánh số từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất 4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn.

Nhận xét: Phép thử là chọn ngẫu nhiên 4 thẻ trong 16 thẻ nên số phần tử trong không gian mẫu được tính theo tổ hợp chập 4 của 16 phần tử: $n(\Omega) = C_{16}^4$.

Biến cố E “4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn”. Để dễ dàng thì học sinh cần phải hiểu là số kết quả thuận lợi cho biến cố này là chọn 4 thẻ trong 8 thẻ mang số chẵn $\{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16\}$. Vậy số phần tử của biến cố là: $n(E) = C_8^4$.

Từ đây ta suy ra xác suất là: $P = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{1}{26}$.

Lưu ý: Đây là một bài liên quan đến các con số, nhưng học sinh cần phân biệt với chọn số và thành lập số, nhiều em hiểu nhầm và tính sai không gian mẫu bằng chỉnh hợp.

[ĐH – B – 2014] (0,5 điểm) Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ một công ty sữa, người ta gửi đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 hộp sữa dâu, 3 hộp sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm chọn ngẫu nhiên 3 hộp sữa để phân tích mẫu. Tính xác suất để 3 hộp sữa được chọn có cả 3 loại.

Nhận xét: Tương tự như câu trên, số phần tử trong không gian mẫu là chọn 3 trong tổng số 12 hộp sữa: $n(\Omega) = C_{12}^3$.

Biến cố E “3 hộp sữa được chọn có cả 3 loại” nghĩa là mỗi loại ta chọn 1 hộp. Có 5 cách chọn sữa cam, 4 cách chọn sữa dâu, 3 cách chọn sữa nho, theo quy tắc nhân thì ta có: $n(E) = 5.4.3$.

Xác suất là: $P = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{3}{11}$.

[ĐH – D – 2014] (0,5 điểm) Cho một đa giác đều n đỉnh, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Tìm n biết đa giác đã cho có 27 đường chéo.

Nhận xét: Chúng ta cần thiết lập được công thức tính số đường chéo của một đa giác lồi n đỉnh (đa giác đều cũng là đa giác lồi). Dựa vào định nghĩa đường chéo là đường nối hai đỉnh không kề nhau.

Có hai cách đếm rõ ràng như sau:

Cách 1: Sử dụng quy tắc đếm: Chọn đỉnh thứ nhất của đường chéo thì có n cách chọn, chọn đỉnh thứ hai của đường chéo thì có $(n-3)$ cách chọn vì trừ đi 1 đỉnh đã chọn và hai đỉnh kề đỉnh đã chọn. Nhưng vì hai đỉnh của đường chéo là không kể đến thứ tự (AC là đường chéo thì CA cũng là đường chéo) nên số đường chéo là: $\frac{n(n-3)}{2}$.

Cách 2: Sử dụng tổ hợp: Chọn hai đỉnh trong n đỉnh là có C_n^2 cách chọn. Nhưng trong cách chọn này thì có chứa luôn n cạnh của đa giác đó. Vậy số đường chéo là: $C_n^2 - n = \frac{n(n-3)}{2}$

Dựa vào giả thiết 27 đường chéo ta có: $\frac{n(n-3)}{2} = 27 \Leftrightarrow \begin{cases} n=9 \\ n=-6 \end{cases}$.

Theo điều kiện thì loại đi $n = -6$.

Lưu ý: Câu này tuy ngắn gọn nhưng học sinh cần đếm và loại đi những trường hợp trùng, phải kiểm soát số phương án khi đếm ra có bị trùng hay không.

[ĐH – A, A1 – 2013] (1 điểm) Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 3 chữ số phân biệt được chọn từ các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Xác định số phần tử của S . Chọn ngẫu nhiên 1 số từ S , tính xác suất số được chọn là số chẵn.

Nhận xét: Xác định số phần tử của S ta có thể sử dụng phép đếm hoặc các định nghĩa của đại số tổ hợp. Để ý ở đây là bài toán thành lập số tự nhiên, có 3 chữ số phân biệt được chọn từ tập số cho trước (tập này không chứa số 0 thì càng đơn giản) nên số phần tử của S là $|S| = A_7^3$. Ta tính tất cả các số chẵn có trong S là $\overline{abc}$ ta theo dõi bảng sau:

	c	b	a
Số cách chọn	Có 3 cách chọn số chẵn	Có 6 cách chọn vì $b \neq c$	Có 5 cách chọn vì $\begin{cases} a \neq b \\ a \neq c \end{cases}$

Vậy có $3.6.5 = 90$ số chẵn có trong S .

Phép thử là chọn ngẫu nhiên 1 số từ S nên suy ra: $n(\Omega) = |S| = A_7^3$.

Biến cố E “số được chọn là số chẵn” thì ta cũng suy ra: $n(E) = 90$.

Xác suất là: $P = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{3}{7}$

[ĐH – B – 2013] (1 điểm) Có hai chiếc hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng, hộp thứ hai chứa 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 viên bi, tính xác suất để hai bi lấy ra có cùng màu.

Trường hợp 1	3	1	$C_{15}^3 \cdot C_{10}^1$
Tổng số cách			11075

Xác suất cần tính là: $P = \frac{443}{506}$.

Ôn tập các dấu hiệu chia hết (cấp THCS).

Dấu hiệu	Ví dụ
Dấu hiệu chia hết cho 2 là chữ số tận cùng là $\{0; 2; 4; 6; 8\}$	12, 100, 48, ...
Dấu hiệu chia hết cho 5 là chữ số tận cùng là $\{0; 5\}$	5, 10, 1000, ...
Dấu hiệu chia hết cho 10 là chữ số tận cùng là 0	10, 527630, 430, ...
Dấu hiệu chia hết cho 3 là tổng các chữ số chia hết cho 3	3, 9, 123, 267, ...
Dấu hiệu chia hết cho 9 là tổng các chữ số chia hết cho 9	9, 1233, 297, ...
Dấu hiệu chia hết cho 4 là hai chữ số tận cùng chia hết cho 4	4, 100, 312, 928, ...
Dấu hiệu chia hết cho 25 là hai chữ số tận cùng là $\{00; 25; 50; 75\}$	100, 350, 925, ...
Dấu hiệu chia hết cho 8 là ba chữ số tận cùng chia hết cho 8	1000, 2016, 13824, ...
Dấu hiệu chia hết cho 6 là cùng chia hết cho 2 và 3	4, 100, 312, 928, ...

Công thức	Ví dụ
$x^m . x^n = x^{m+n}$	$x^2 . x^5 = x^7$
$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	$\frac{x^4}{x^2} = x^2$
$(x^m)^n = x^{m.n}$	$(x^2)^5 = x^{10}$
$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$	$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$
$(ab)^m = a^m . b^m$	$(ab)^4 = a^4 . b^4$
$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$

Quy tắc nhân: Nếu một công việc G sẽ được hoàn thành nếu ta phải làm qua k công đoạn $G_1, G_2, \dots, G_k$. Trong đó có n_1 cách thực hiện công đoạn G_1 , n_2 cách thực hiện công đoạn $G_2, \dots$ và có n_k cách thực hiện phương án G_k . Khi đó số cách để hoàn thành công việc G là: $n_1 n_2 \dots n_k$.

Ví dụ 1: Giữa thành phố Hồ Chí Minh và Hà Nội có 3 loại phương tiện giao thông: đường bộ, đường sắt và đường hàng không. Hỏi có mấy cách chọn phương tiện giao thông để đi từ thành phố Hồ Chí Minh đến Hà Nội rồi quay về?

Giải: Có $3 \cdot 3 = 9$ cách.

Ví dụ 2: Một hội đồng nhân dân có 15 người, cần bầu ra 1 chủ tịch, 1 phó chủ tịch, 1 uỷ ban thư ký và không được bầu 1 người vào 2 hay 3 chức vụ. Hỏi có mấy cách?

Giải: Có 15 cách chọn chủ tịch. Với mỗi cách chọn chủ tịch, có 14 cách chọn phó chủ tịch. Với mỗi cách chọn chủ tịch và phó chủ tịch, có 13 cách chọn thư ký. Vậy có: $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$ cách chọn.

Dạng 1.1: Đếm số phương án thực hiện của một hành động nào đó

Ví dụ 1.1.1: Có 4 tuyến xe buýt giữa A và B. Có 3 tuyến xe buýt giữa B và C. Hỏi:

- Có mấy cách đi bằng xe buýt từ A đến C, qua B?
- Có mấy cách đi rồi về bằng xe buýt từ A đến C, qua B?
- Có mấy cách đi rồi về bằng xe buýt từ A đến C, qua B sao cho mỗi tuyến xe buýt không đi quá một lần?

Giải: a) Có 4 cách đi từ A đến B, có 3 cách đi từ B đến C. Do đó, theo quy tắc nhân, có $4 \times 3 = 12$ cách đi từ A đến C, qua B.

b) Có 12 cách đi từ A đến C, qua B và có 12 cách quay về. Vậy, có: $12 \times 12 = 144$ cách đi rồi về từ A đến C, qua B.

c) Có 4 cách đi từ A đến B, có 3 cách đi từ B đến C; để tránh đi lại đường cũ, chỉ có 2 cách từ C quay về B và 3 cách từ B quay về A. Vậy có: $4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$ cách.

Ví dụ 1.1.2: Một văn phòng cần chọn mua một tờ nhật báo mỗi ngày. Có 4 loại nhật báo. Hỏi có mấy cách chọn mua báo cho một tuần gồm 6 ngày làm việc?

Giải: Có 4 cách chọn cho mỗi ngày. Vậy, số cách chọn cho 6 ngày trong tuần là: $4^6 = 4096$ cách.

Bài tập 1.1:

- Giả sử bạn muốn mua áo sơ mi cỡ 39 hoặc cỡ 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi bạn có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu và cỡ áo)?
 - Có ba kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elip) và bốn kiểu dây (kim loại, da, vải và nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây?
 - Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ.
 - Nhà trường cần chọn một học sinh đi dự đại hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?
 - Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?
 - Cho tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một tập con khác rỗng của tập A.
 - Trong một tuần, Bảo định mỗi tối đi thăm 1 người bạn trong 12 người bạn của mình. Hỏi Bảo có thể lập được bao nhiêu kế hoạch đi thăm bạn nếu:
 - Có thể thăm 1 bạn nhiều lần?
 - Không đến thăm 1 bạn quá 1 lần?
- ĐS: a) 35831808. b) 3991680.

Bài giải: a) Đêm thứ nhất, chọn 1 trong 12 bạn để đến thăm : có 12 cách. Tương tự, cho đêm thứ hai, thứ ba, thứ tư, thứ năm, thứ sáu, thứ bảy. Vậy, có : $127 = 35831808$ cách.

b) Đêm thứ nhất, chọn 1 trong 12 bạn để đến thăm : có 12 cách. Đêm thứ hai, chọn 1 trong 11 bạn còn lại để đến thăm : có 11 cách. Đêm thứ ba : 10 cách. Đêm thứ tư : 9 cách. Đêm thứ năm : 8 cách. Đêm thứ sáu : 7 cách. Đêm thứ bảy : 6 cách. Vậy có : $12.11.10.9.8.7.6 = 3991680$ cách.

6. Một tuyến đường xe lửa có 10 nhà ga. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một cuộc hành trình bắt đầu ở 1 nhà ga và chấm dứt ở 1 nhà ga khác, biết rằng từ nhà ga nào cũng có thể đi tới bất kì nhà ga khác?

ĐS: 90 cách chọn.

Bài giải: Nhà ga đi : có 10 cách chọn. Nhà ga đến : có 9 cách chọn. Vậy có : $10.9 = 90$ cách chọn.

7. Có 3 nam và 3 nữ cần xếp ngồi vào một hàng ghế. Hỏi có mấy cách xếp sao cho :

a) Nam, nữ ngồi xen kẽ ?

b) Nam, nữ ngồi xen kẽ và có một người nam A, một người nữ B phải ngồi kề nhau ?

c) Nam, nữ ngồi xen kẽ và có một người nam C, một người nữ D không được ngồi kề nhau ?

Bài giải: a) Có 6 cách chọn một người tùy ý ngồi vào chỗ thứ nhất. Tiếp đến, có 3 cách chọn một người khác phái ngồi vào chỗ thứ 2. Lại có 2 cách chọn một người khác phái ngồi vào chỗ thứ 3, có 2 cách chọn vào chỗ thứ 4, có 1 cách chọn vào chỗ thứ 5, có 1 cách chọn vào chỗ thứ 6. Vậy có : $6.3.2.2.1.1 = 72$ cách.

b) Cho cặp nam nữ A, B đó ngồi vào chỗ thứ nhất và chỗ thứ hai, có 2 cách. Tiếp đến, chỗ thứ ba có 2 cách chọn, chỗ thứ tư có 2 cách chọn, chỗ thứ năm có 1 cách chọn, chỗ thứ sáu có 1 cách chọn.

Bây giờ, cho cặp nam nữ A, B đó ngồi vào chỗ thứ hai và chỗ thứ ba. Khi đó, chỗ thứ nhất có 2 cách chọn, chỗ thứ tư có 2 cách chọn, chỗ thứ năm có 1 cách chọn, chỗ thứ sáu có 1 cách chọn.

Tương tự khi cặp nam nữ A, B đó ngồi vào chỗ thứ ba và thứ tư, thứ tư và thứ năm, thứ năm và thứ sáu.

Vậy có : $5 (2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1) = 40$ cách.

c) Số cách chọn để cặp nam nữ đó không ngồi kề nhau bằng số cách chọn tùy ý trừ số cách chọn để cặp nam nữ đó ngồi kề nhau. Vậy có : $72 - 40 = 32$ cách.

Dạng 1.2: Đếm số số tự nhiên được thành lập thỏa mãn tính chất nào đó.

Ví dụ 1.2: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số:

a) Gồm 3 chữ số đôi một khác nhau.

b) Gồm 3 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 9

c) Gồm 3 chữ số đôi một khác nhau và không chia hết cho 9.

Giải: a) Gọi $\overline{abc}$ là số cần lập.

+ Ta có a được chọn từ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ và $a \neq 0$ nên có 5 cách chọn.

+ Ta có b được chọn từ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ và $b \neq a$ nên có 5 cách chọn.

+ Ta có c được chọn từ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ và $c \neq a, c \neq b$ nên có 4 cách chọn.

Vậy có $5.5.4 = 100$ số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau.

b) Trong các chữ số đã cho, bộ 3 chữ số có tổng chia hết cho 9 là $\{0, 4, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}$.

+ Với bộ $\{0, 4, 5\}$ thì ta có: $2.2.1 = 4$ số được thành lập (chú ý số 0 không được đứng đầu).

+ Với bộ $\{1, 3, 5\}$ thì ta có: $3! = 6$ số được thành lập.

+ Với bộ $\{2, 3, 4\}$ thì ta có: $3! = 6$ số được thành lập.

Vậy có 16 số có 3 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 9.

c) Từ a) và b) ta suy ra: có $100 - 16 = 84$ số có 3 chữ số đôi một khác nhau và không chia hết cho 9.

Bài tập 1.2:

1. Từ các chữ số 1, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên:

- a) Có 4 chữ số (không nhất thiết khác nhau).
b) Có 4 chữ số khác nhau.

2. Cho 6 chữ số 2, 3, 5, 6, 7, 9. Hỏi từ các chữ số đã cho, lập được mấy số đôi một khác nhau và :

- a) gồm 3 chữ số ?
b) gồm 3 chữ số và nhỏ hơn 400 ?
c) gồm 3 chữ số và chẵn ?
d) gồm 3 chữ số và chia hết cho 5 ?

Giải: Đặt số có 3 chữ số là $\overline{abc}$.

a) Có 6 cách chọn a, 5 cách chọn b ($b \neq a$), 4 cách chọn c ($c \neq a, c \neq b$). Vậy có : $6.5.4 = 120$ số.

b) Chọn a = 2 hay a = 3, có 2 cách. Sau đó, có 5 cách chọn b ($b \neq a$), 4 cách chọn c ($c \neq a, c \neq b$).

Vậy có : $2.5.4 = 40$ số nhỏ hơn 400.

c) Vì n chẵn, có 2 cách chọn c (c = 2 hay c = 6). Sau đó, có 5 cách chọn a ($a \neq c$), có 4 cách chọn b ($b \neq a, b \neq c$). Vậy có : $2.5.4 = 40$ số chẵn.

d) Vì n chia hết cho 5, có 1 cách chọn c (c = 5). Sau đó, có 5 cách chọn a ($a \neq c$), có 4 cách chọn b ($b \neq a, b \neq c$). Vậy có : $1.5.4 = 20$ số chia hết cho 5.

3. Có bao nhiêu số chẵn có 6 chữ số khác nhau đôi một, trong đó chữ số đầu tiên là số lẻ ?

4. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau và khác không, biết rằng tổng ba chữ số này bằng 8.

5. Có 100000 vé được đánh số từ 00000 đến 99999. Hỏi số vé gồm 5 chữ số khác nhau.

ĐS: 30240.

6. Có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau lấy từ 0, 2, 3, 6, 9.

ĐS: 60.

7. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số khác nhau và chia hết cho 5.

ĐS: 114240

8. Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số mà cả ba chữ số đó đều lẻ ?

9. Từ các chữ số 4, 5, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có các chữ số khác nhau ?

10. Có bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau mà tổng của các chữ số của mỗi số bằng 12 ?

11. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4 có thể lập bao nhiêu số tự nhiên gồm: a) Một chữ số b) Hai chữ số c) Hai chữ số khác nhau.

12. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên bé hơn 100 ?

13. Từ tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ có thể thành lập được:

- a) Bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số khác nhau đôi một.
b) Bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau chia hết cho 5.
c) Bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau chia hết cho 9.
d) Bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau mà số đó không chia hết cho 3.

ĐS: a) 156

b) 36

c) 16

d) 60

Bài 2: HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

Giai thừa: Với mỗi số nguyên dương n , ta định nghĩa n giai thừa, ký hiệu $n!$, là tích các số tự nhiên từ 1 đến n . Nghĩa là: $n! = 1.2.3...(n-1)n$. Quy ước: $0! = 1$.

Ví dụ: $5! = 1.2.3.4.5 = 120$; $\frac{n!}{(n-3)!} = (n-2)(n-1)n$

Hoán vị: Cho tập hợp A gồm n phần tử với $n \geq 1$. Khi ta **sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự** ta thu được một hoán vị n phần tử của tập A . Số các hoán vị của tập A được ký hiệu là P_n và $P_n = n!$.

Ví dụ 1. Từ 3 chữ số 1, 2, 3 có thể tạo được bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau ?

Giải: Mỗi số gồm 3 chữ số khác nhau tạo ra từ 1, 2, 3 là một hoán vị của 3 phần tử. Vậy có : $P_3 = 3! = 6$ số. (các số đó là : 123, 132, 213, 231, 312, 321).

Ví dụ 2: Trong một lớp học, thầy giáo phát phiếu thăm dò yêu cầu học sinh ghi thứ tự 3 môn Toán, Lý, Hóa đang học theo mức độ yêu thích giảm dần. Hỏi có bao nhiêu cách ghi khác nhau ?

Giải: Đây là hoán vị của 3 phần tử. Vậy có: $P_3 = 3! = 6$ cách, khi đó có 6 cách ghi là: (T,L,H), (T,H,L), (L,T,H), (L,H,T), (H,T,L), (H,L,T).

Ví dụ 3: Có 2 sách toán khác nhau, 3 sách lý khác nhau và 4 sách hóa khác nhau. Cần sắp xếp các sách thành một hàng sao cho các sách cùng môn đứng kế nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp ?

Giải: Trước tiên, ta sắp theo môn thì có $P_3 = 3! = 6$ cách. Tiếp đến, các sách từng môn đổi chỗ cho nhau, toán có $P_2 = 2! = 2$ cách, lý có $P_3 = 3! = 6$ cách, hóa có $P_4 = 4! = 24$ cách.

Vậy, theo qui tắc nhân, có : $6 \times 2 \times 6 \times 24 = 1728$ cách.

Chỉnh hợp: Cho tập hợp A gồm n phần tử với $n \geq 1$ và k là một số nguyên dương thỏa $1 \leq k \leq n$. Khi ta **lấy ra k phần tử từ tập A và sắp xếp k phần tử theo một thứ tự** ta thu được một chỉnh hợp chập k của n phần tử tập A . Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử tập A được ký hiệu là A_n^k và $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Ví dụ 1: Một nhà hàng có 5 món ăn chính, cần chọn 2 món ăn chính khác nhau cho mỗi ngày, một món buổi trưa và một món buổi chiều. Hỏi có mấy cách chọn ?

Giải: Đây là chỉnh hợp chập 2 của 5 phần tử, có : $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$ cách chọn.

(Giả sử 5 món ăn được đánh số 1, 2, 3, 4, 5; ta có các cách chọn sau đây : (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)).

Ví dụ 2: Trong một trường đại học, ngoài các môn học bắt buộc, có 3 môn tự chọn, sinh viên phải chọn ra 2 môn trong 3 môn đó, 1 môn chính và 1 môn phụ. Hỏi có mấy cách chọn ?

Giải: Đây là chỉnh hợp chập 2 của 3 phần tử. Vậy có : $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$ cách chọn.

(Giả sử 3 môn tự chọn là a, b, c thì 6 cách chọn theo yêu cầu là (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)).

Ví dụ 3: Từ 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể tạo ra bao nhiêu số gồm 2 chữ số khác nhau ?

Giải: Đây là chỉnh hợp chập 2 của 5 phần tử. Vậy có : $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$ số.

(Các số đó là : 12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54).

Tổ hợp: Cho tập hợp A gồm n phần tử với $n \geq 1$ và k là một số nguyên dương thỏa $1 \leq k \leq n$. Khi ta **lấy ra k phần tử từ tập A** ta thu được một tổ hợp chập k của n phần tử tập A . Số các tổ hợp chập k của n phần tử tập A được ký hiệu là C_n^k và $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Vậy số cách thỏa yêu cầu bài toán là : $2.(5!)^2 = 28800$ cách.

b) A, E ngồi hai đầu ghế.

b) Số cách xếp A, E ngồi hai đầu ghế là : $2!$. Số cách xếp 3 học sinh còn lại : $3!$. Vậy số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán : $2! \times 3! = 2 \times 6 = 12$.

b) Các học sinh nam ngồi 1 bàn, học sinh nữ ngồi 1 bàn.

b) Số cách xếp nam sinh ngồi 1 bàn : $5!$ Số cách nữ sinh ngồi 1 bàn : $5!$ Số cách xếp 2 bàn : $2!$ Số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán : $2! \times 5! \times 5! = 28800$.

Giải: Số cách sắp 4 sách Văn kề nhau : $4!$. Số cách sắp 2 sách Toán kề nhau : $2!$. Số cách sắp 6 sách Anh kề nhau : $6!$. Số cách sắp 3 loại sách Văn, Toán, Anh lên kệ : $3!$.

Số cách sắp thỏa yêu cầu bài toán : $4! \times 2! \times 6! \times 3! = 207360$.

Giai: Gọi $\overline{a_1 a_2 \dots a_6}$. Số các số có 6 chữ số được lập từ X : $6!$.

Đặt $a = \overline{16}$. Số các số tạo nên bởi hoán vị a và $2, 3, 4, 5$ là $5!$. Đặt $b = \overline{61}$. Số các số tạo nên bởi hoán vị b và $2, 3, 4, 5$ là $5!$.

Số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán : $6! - 2 \times 5! = 480$.

b) Các chữ số được xếp tùy ý.

b) Số các số có 9 chữ số được lấy từ 9 số trên : $9!$.

Do 5 chữ số 1 như nhau nên số lần sắp trùng lặp lại là $5!$. Số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán: $\frac{9!}{5!} = 3024$

Giải: Số các số có 7 chữ số khác nhau được lập từ 7 chữ số trên là 7!.

Trong các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9 chỉ có hai chữ số chẵn là 2 và 4. Gọi $a = \overline{24}$. Số hoán vị của a và 1, 3, 5, 7, 9 là 6!. Gọi $b = \overline{42}$. Số hoán vị của b và 1, 3, 5, 7, 9 là 6!.

Số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán : $7! - 2.6! = 3600$ số.

Do đó $S = 840(1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4) = 9333240$.

4. Trong một chương trình văn nghệ, cần chọn ra 7 bài hát trong 10 bài hát và 3 tiết mục múa trong 5 tiết mục múa rồi xếp thứ tự biểu diễn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau nếu các bài hát được xếp kế nhau và các tiết mục múa được xếp kế nhau ?

Giải: Xếp hát rồi đến múa hay múa rồi đến hát : có 2 cách . Trong mỗi trường hợp đó, chọn 7 trong 10 bài hát rồi xếp thứ tự, có A_{10}^7 cách. Tiếp đến chọn 3 trong 5 tiết mục múa rồi xếp thứ tự, có : A_5^3 cách.

Vậy có : $A_{10}^7 A_5^3$ cách.

5. Trong một cuộc đua ngựa gồm 10 con. Hỏi có mấy cách để 10 con ngựa này về đích nhất, nhì, ba.

Giải: Số các cách để trong 10 con ngựa này về đích nhất, nhì, ba là số các chỉnh hợp 10 chập 3 (do có thứ tự). Đó là : $A_{10}^3 = 720$ cách.

6. Xét các bảng số xe là dãy gồm 2 chữ cái đứng trước và 5 chữ số đứng sau. Các chữ cái được lấy từ 26 chữ cái A, B, ..., Z. Các chữ số được lấy từ 0, 1, ..., 9.

a) Có mấy biển số trong đó có ít nhất 1 chữ cái khác chữ O và các chữ số đôi một khác nhau.

b) Có mấy biển số có 2 chữ cái khác nhau đồng thời có đúng 1 chữ số lẻ.

Giải: a) Số cách chọn 2 chữ cái trong đó có ít nhất 1 chữ cái khác chữ O : $26^2 - 1 = 675$ (1 là số trường hợp mà 2 chữ cái đều là O). Số cách chọn 4 chữ số đôi một khác nhau : A_{10}^4 . Vậy có $675 \cdot A_{10}^4$ biển số.

b) Số cách chọn 2 chữ cái khác nhau : 26×25 . Chọn 1 trong 5 số lẻ có 5 cách. Chọn 3 trong 5 số chẵn có C_5^3 cách. Hoán vị 4 số được chọn có $4!$ cách. Vậy có : $26 \cdot 25 \cdot 5 \cdot C_5^3 4!$ biển số.

7. Có 30 học sinh dự thi học sinh giỏi toán toàn quốc. Có 6 giải thưởng xếp hạng từ 1 đến 6 và không ai được nhiều hơn 1 giải. Hỏi:

a) Có bao nhiêu danh sách học sinh đoạt giải có thể có ?

b) Nếu đã biết học sinh A chắc chắn đoạt giải, thì có bao nhiêu danh sách học sinh đoạt giải có thể có ?

Giải: a) Chọn 6 học sinh trong 30 học sinh, xếp vào 6 giải là chỉnh hợp chập 6 của 30 phần tử. Vậy có : A_{30}^6

b) Nếu học sinh A chắc chắn **không** đoạt giải, cần chọn 6 học sinh trong 29 học sinh, xếp vào 6 giải. Đây là chỉnh hợp chập 6 của 29 phần tử, có : A_{29}^6 cách. Suy ra số danh sách theo yêu cầu đề bài là : $A_{30}^6 - A_{29}^6$.

8. Một lớp học có 40 học sinh. Giáo viên chủ nhiệm lớp muốn chọn ra 1 lớp trưởng, 1 lớp phó học tập và 1 lớp phó lao động. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Giải: Đây là bài toán chỉnh hợp vì từ 40 học sinh chọn ra 3 em làm cán bộ lớp có theo thứ tự lớp trưởng, lớp phó học tập, lớp phó lao động. Vậy số cách chọn là : A_{40}^3 .

9. Có 6 người đi vào 1 thang máy của một chung cư có 10 tầng. Hỏi có bao nhiêu cách để :

a) Mỗi người đi vào 1 tầng khác nhau.

b) 6 người này, mỗi người đi vào 1 tầng bất kì nào đó.

Giải: a) Số cách đi vào 6 tầng khác nhau của 6 người này là số cách chọn 6 trong 10 số khác nhau (mỗi tầng được đánh 1 số từ 1 đến 10). Đó là số chỉnh hợp 10 chập 6 : A_{10}^6 .

b) Mỗi người có 10 cách lựa chọn từ tầng 1 đến 10. Mà có 6 người. Vậy số cách chọn là 10^6 .

10. Có 100000 chiếc vé số được đánh số từ 00000 đến 99999. Hỏi số các vé gồm 5 chữ số khác nhau là bao nhiêu.

Giải: Mỗi vé có 5 chữ số khác nhau chính là một chỉnh hợp 10 chập 5. Vậy số các vé gồm 5 chữ số khác nhau là : A_{10}^5 .

11. Từ $X = \{0, 1, 3, 5, 7\}$ có thể lập bao nhiêu số, mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5.

Giải: Gọi $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$.

Số số có 4 chữ số khác nhau được lập từ X là: $A_5^4 - A_4^3 = 96$ (A_4^3 là số chữ số có số 0 đứng đầu).

TH1: $a_4 = 0$ suy ra $\overline{a_1 a_2 a_3}$ chọn 3 trong 4 số còn lại có A_4^3 cách chọn.

TH2: $a_4 = 5$ suy ra a_1 có 3 cách chọn, $\overline{a_2 a_3}$ có A_3^2 cách chọn.

Vậy số số có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 5 là: $A_4^3 + 3A_3^2 = 42$.

Vậy số số có 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5 là: $96 - 42 = 54$.

12. Từ $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5.

Giải: Số các số gồm 5 chữ số bất kì : $A_7^5 - A_6^4 = 2160$.

Số các số gồm 5 chữ số mà không có mặt chữ số 5 là: $A_6^5 - A_5^4 = 600$.

Vậy số các số thỏa yêu cầu bài toán : $2160 - 600 = 1560$.

13. Từ 7 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau.

Giải: Gọi $\overline{a_1 a_2 \dots a_5}$ chẵn.

Trường hợp 1 : a_1 lẻ.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Số cách chọn	3	3	4	5	4

Trường hợp 2 : a_1 chẵn.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Số cách chọn	3	3	4	5	3

Vậy số các số n chẵn là : $3.3.4.5.4 + 3.3.4.5.3 = 720 + 540 = 1260$.

14. Từ 7 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau và có thể lập bao nhiêu số có 4 chữ số phân biệt trong đó có 2 chữ số 1, 2.

Giải: Gọi $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$

• Số các số n là : A_7^4

• Xét học có 4 ô trống. Đem chữ số 1 bỏ vào học có : 4 cách. Đem chữ số 2 bỏ vào học có : 3 cách. Còn lại 5 chữ số 3, 4, 5, 6, 7 bỏ vào 2 ô trống còn lại có: A_5^2 cách.

Vậy số các số thỏa yêu cầu bài toán : $4 \times 3 \times 20 = 240$ số.

Bài tập tổ hợp:

1. Đề thi trắc nghiệm có 10 câu hỏi, học sinh cần chọn trả lời 8 câu .

a) Hỏi có mấy cách chọn tùy ý ?

b) Hỏi có mấy cách chọn nếu 3 câu đầu là bắt buộc ?

c) Hỏi có mấy cách chọn 4 trong 5 câu đầu và 4 trong 5 câu sau ?

Giải a) Chọn tùy ý 8 trong 10 câu là tổ hợp chập 8 của 10 phần tử, có : C_{10}^8 cách.

b) Vì có 3 câu bắt buộc nên phải chọn thêm 5 câu trong 7 câu còn lại, đây là tổ hợp chập 5 của 7 phần tử, có : C_7^5 cách.

c) Chọn 4 trong 5 câu đầu, có C_5^4 cách. Tiếp theo, chọn 4 trong 5 câu sau, có C_5^4 cách.

Vậy, theo qui tắc nhân, có : $C_5^4.C_5^4 = 25$ cách.

2. Có 12 học sinh ưu tú. Cần chọn ra 4 học sinh để đi dự đại hội học sinh ưu tú toàn quốc. Có mấy cách chọn.

a) Tùy ý ?

HY LUYỆN THI THPT QUỐC GIA 2017 - 01666658231

Cuộc đời giống như cưỡi một chiếc xe đạp, để giữ thế cân bằng, bạn phải liên tục di chuyển – Albert Einstein

- b) Sao cho 2 học sinh A và B không cùng đi ?
 c) Sao cho 2 học sinh A và B cùng đi hoặc cùng không đi?

Giải: a) Chọn tùy ý 4 trong 12 học sinh, là tổ hợp chập 4 của 12 phần tử. Vậy, có : $C_{12}^4 = 495$ cách.

b) * Cách 1 : Nếu cả A, B cùng không đi, cần chọn 4 trong 10 học sinh còn lại. Đây là tổ hợp chập 4 của 10 phần tử, có : $C_{10}^4 = 210$.

Nếu A đi, B không đi, cần chọn thêm 3 trong 10 học sinh còn lại có : C_{10}^3 . Tương tự, nếu B đi, A không đi, có : C_{10}^3 cách. Vậy, số cách chọn theo yêu cầu là : $C_{10}^4 + C_{10}^3 + C_{10}^3 = 450$ cách.

* Cách 2 : Nếu A và B cùng đi, cần chọn thêm 2 trong 10 học sinh còn lại, có : C_{10}^2 . Suy ra, số cách chọn theo yêu cầu là: $495 - C_{10}^2 = 450$ cách.

c) A và B cùng đi, có 45 cách. A và B cùng không đi, có 210 cách. Vậy có theo quy tắc cộng : 255 cách.

3. Một tổ có 12 học sinh. Thầy giáo có 3 đề kiểm tra khác nhau. Cần chọn 4 học sinh cho mỗi đề kiểm tra. Hỏi có mấy cách chọn ?

Giải: Đầu tiên, chọn 4 trong 12 học sinh cho đề một, có C_{12}^4 cách. Tiếp đến, chọn 4 trong 8 học sinh còn lại cho đề hai, có C_8^4 cách. Các học sinh còn lại làm đề ba. Vậy, có : $C_{12}^4 C_8^4 = 34650$ cách.

4. Có 12 học sinh ưu tú của một trường trung học. Muốn chọn một đoàn đại biểu gồm 5 người (gồm một trưởng đoàn, một thư ký, và ba thành viên) đi dự trại quốc tế. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ? Có giải thích ?

Giải: Số cách chọn 1 trưởng đoàn : 12. Số cách chọn 1 thư ký : 11

Số cách chọn 3 thành viên : C_{10}^3 . Số cách chọn đoàn đại biểu : $12 \times 11 \times 120 = 15\,840$.

5. Một đoàn tàu có 3 toa chở khách; toa I, II, III. Trên sân ga có 4 hành khách chuẩn bị đi tàu. Biết rằng mỗi toa có ít nhất 4 chỗ trống. Hỏi :

a) Có bao nhiêu cách sắp 4 hành khách lên 3 toa.

b) Có bao nhiêu cách sắp 4 hành khách lên tàu để có 1 toa trong đó có 3 trong 4 vị khách.

Giải: a) Đoàn tàu có 3 toa ; hành khách lên 3 toa nghĩa là lên tàu. Mỗi khách có 3 cách lên toa I hoặc II hoặc III. Vậy số cách sắp 4 khách lên 3 toa là : $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ cách.

b) Số cách sắp 3 khách lên toa I : $C_4^3 = 4$. Số cách sắp 1 khách còn lại lên toa II hoặc III : 2.

Vậy nếu 3 khách ở toa I thì có : $4 \times 2 = 8$ cách. Lập luận tương tự nếu 3 khách ở toa II, hoặc III cũng là 8. Vậy số cách thỏa yêu cầu bài toán : $8 + 8 + 8 = 24$ cách.

6. Có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu khó, 10 câu trung bình và 15 câu dễ. Từ 30 câu đó có thể lập bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu khác nhau, sao cho mỗi đề phải có 3 loại (khó, trung bình, dễ) và số câu dễ không ít hơn 2 ?

Giải :

	Số câu dễ (15)	Số câu trung bình (10)	Số câu khó (5)	Số cách
TH1	2	2	1	$C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_5^1$
TH2	2	1	2	$C_{15}^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^2$
TH3	3	1	1	$C_{15}^3 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^1$
Tổng				56875

7. Một chi đoàn có 20 đoàn viên trong đó 10 nữ. Muốn chọn 1 tổ công tác có 5 người. Có bao nhiêu cách chọn nếu tổ cần ít nhất 1 nữ.

Giải: Số cách chọn 5 đoàn viên bất kì C_{20}^5 . Số cách chọn 5 đoàn viên toàn là nam C_{10}^5 .

Vậy số cách chọn có ít nhất 1 nữ là : $C_{20}^5 - C_{10}^5 = 15252$.

8. Một đội xây dựng gồm 10 công nhân, 3 kỹ sư. Để lập 1 tổ công tác cần chọn 1 kỹ sư là tổ trưởng, 1 công nhân làm tổ phó và 3 công nhân làm tổ viên. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác.

Giải: Số cách chọn 1 kỹ sư làm tổ trưởng : 3. Số cách chọn 1 công nhân làm tổ phó : 10. Số cách chọn 3 công nhân làm tổ viên : C_9^3 . Vậy có: $3.10.C_9^3 = 2520$.

9. Một đội văn nghệ gồm 10 học sinh nam và 9 học sinh nữ. Cô giáo muốn chọn ra 1 tốp ca gồm 5 em trong đó có ít nhất là 2 em nam và 2 em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Giải:

	Nam (10)	Nữ (9)	Số cách chọn
TH1	2	3	$C_{10}^2 C_9^3$
TH2	3	2	$C_{10}^3 C_9^2$
Tổng			8100

10. Một đội cảnh sát gồm có 9 người. Trong ngày cần 3 người làm nhiệm vụ tại địa điểm A, 2 người làm tại B còn lại 4 người trực đồn. Hỏi có bao nhiêu cách phân công ?

Giải: Số cách phân công 3 người tại A : C_9^3 . Số cách phân công 2 người tại B : C_6^2 . Số cách phân công 4 người còn lại : 1. Vậy số cách phân công là : $C_9^3 C_6^2 = 1260$.

11. Có 5 nhà Toán học nam, 3 nhà Toán học nữ và 4 nhà Vật lý nam. Muốn lập 1 đoàn công tác có 3 người gồm cả nam lẫn nữ, cần có cả nhà toán học lẫn vật lý. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Giải:

	Toán học		Vật lý, Nam (4)	Số cách
	Nam (5)	Nữ (3)		
TH1	1	1	1	$C_5^1 C_3^1 C_4^1$
TH2	0	1	2	$C_5^0 C_3^1 C_4^2$
TH3	0	2	1	$C_5^0 C_3^2 C_4^1$
Tổng				90

12. Một đội văn nghệ có 10 người trong đó có 6 nữ và 4 nam. Có bao nhiêu cách chia đội văn nghệ :

a) Thành 2 nhóm có số người bằng nhau và mỗi nhóm có số nữ bằng nhau.

b) Có bao nhiêu cách chọn 5 người trong đó không quá 1 nam.

Giải: a) Do mỗi nhóm có số người bằng nhau nên mỗi nhóm phải có 5 người. Do số nữ bằng nhau nên mỗi nhóm phải có 3 nữ. Vậy mỗi nhóm phải có 3 nữ và 2 nam. Số cách chọn là : $C_4^2 C_6^3 = 120$

b) Số cách chọn 5 người toàn nữ là : C_6^5 . Số cách chọn 4 nữ và 1 nam là : $C_6^4 C_4^1$.

Vậy số cách chọn 5 người mà không quá 1 nam : $C_6^5 + C_6^4 C_4^1 = 66$

13. Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư cũng khác nhau. Người ta muốn chọn từ đó ra 3 tem thư, 3 bì thư và dán 3 tem thư đó lên 3 bì thư đã chọn. Một bì thư chỉ dán 1 tem thư. Hỏi có bao nhiêu cách làm như vậy.

Giải: Số cách chọn 3 tem từ 5 tem là: C_5^3 . Số cách chọn 3 bì thư từ 6 bì thư là: C_6^3 .

Do các tem đều khác nhau, các bì thư cũng khác nhau, nên số cách dán 3 tem lên 3 bì thư là $3! = 6$.

Vậy số cách làm là : $C_5^3 C_6^3 . 3! = 1200$ cách.

Giải: Số cách chọn 1 lá cơ và 3 lá rô : $C_{13}^1 C_{13}^3$ cách.

Trường hợp 2 : Chọn tiếp 1 lá bích và 3 lá chuồn có : $C_{13}^1 C_{13}^3$ cách.

Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu đề toán : $C_{13}^1 C_{13}^3 (C_{13}^4 + C_{13}^1 C_{13}^3 + C_{13}^2 C_{13}^2) = 39\,102\,206$ cách.

Giải: Ta sẽ chọn 3 điểm để thành lập tam giác, có 2 trường hợp:

TH2: Hai đỉnh trên (a) và 1 đỉnh trên (b): $C_{15}^2 C_9^1$.

Vậy có: $C_{15}^1 C_9^2 + C_{15}^2 C_9^1 = 1485$.

PP: Sử dụng Sử dụng thành thạo các công thức P_n, A_n^k, C_n^k và chú ý $n! = (n-1)!n = (n-2)!(n-1)n = \dots$

$$VD = \frac{P_6}{m(m+1)} \cdot \frac{(m+1)!}{(m-1)!P_4} = \frac{6!(m+1)!}{4!(m-1)!m(m+1)} = \frac{6!(m-1)!m(m+1)}{4!(m-1)!m(m+1)} = 5.6 = 30$$
$$\text{a) } A = \frac{7!4!}{10!} \left(\frac{8!}{3!5!} - \frac{9!}{2!7!} \right)$$

b) $B = C_{25}^{23} - C_{15}^{13} - C_{10}^7$

$$\text{c) } C = \frac{A_9^7 + A_8^7}{P_7} \cdot \frac{P_4}{A_6^4 + A_5^4}$$

$$\text{d) } D = \frac{P_5}{m(m+1)} \frac{(m+1)! A_7^5}{(m-1) P_4}$$

$$\text{e) } E = \frac{A_{49}^{12} + A_{49}^{11}}{A_{49}^{10}} - \frac{A_{17}^{10} + A_{17}^9}{A_{17}^8}$$

f) $F = \frac{n!}{(n-3)!A_n^2} - \frac{P_{n+1}}{(n+2)!}$

$$\text{g) } G = \frac{A_5^3 - A_5^2}{P_2} - \frac{P_5}{P_2}$$

$$\text{h) } H = \frac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}$$

i) $I = C_5^3 C_4^2 + C_4^2 C_3^1 + C_3^1 C_3^0$

PP: Sử dụng thành thạo các công thức P_n, A_n^k, C_n^k và chú ý $n! = (n-1)!n = (n-2)!(n-1)n = \dots$

Giải: $P_{k+1} = (k+1)! = (k+1).k! = (k+1)P_k = kP_k + P_k \Leftrightarrow kP_k = P_{k+1} - P_k$

Ví dụ 2.3.2: Chứng minh rằng: $1 + P_1 + 2P_2 + \dots + (n-1)P_{n-1} = P_n$.

Giải: Sử dụng tính chất: $kP_k = P_{k+1} - P_k$ với k chạy từ 1 tới $n-1$ ta có:

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = P_2 - P_1 \\ 2P_2 = P_3 - P_2 \\ \dots \\ (n-1)P_{n-1} = P_n - P_{n-1} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + P_1 + 2P_2 + \dots + (n-1)P_{n-1} = P_n.$$

Ví dụ 2.3.3: Chứng minh rằng: $\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} = \frac{n^2}{n!}$.

Giải: Xét $VT = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} = \frac{n}{n!} + \frac{n(n-1)}{n!} = \frac{n+n^2-n}{n!} = \frac{n^2}{n!} = VP$

Ví dụ 2.3.4: Chứng minh rằng: $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ (tính chất tổ hợp).

Giải: $VP = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right)$
 $= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{n}{(n-k)k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k = VT.$

Bài tập 2.3: Chứng minh các đẳng thức hoặc bất đẳng thức sau:

a) $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$

b) $P_k A_{n+1}^2 A_{n+3}^2 A_{n+5}^2 = n.k! A_{n+5}^5$

c) $nC_n^k = (k+1)C_n^{k+1} + kC_n^k$

d) $A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1} = k^2 A_{n+k}^n$

e) $\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + \frac{1}{A_4^2} + \dots + \frac{1}{A_n^2} = \frac{n-1}{n}$

f) $\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \dots + \frac{1}{P_n} < 2$

g) $n! > 2^{n-1}, n \geq 3$

h) $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k$

Dạng 2.4: Giải phương trình hoặc bất phương trình có chứa P_n, A_n^k, C_n^k .

PP: Điều kiện của phương trình có chứa P_n, A_n^k, C_n^k là $0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 2.4.1: Giải phương trình sau: (ẩn độc lập): $P_2x^2 - P_3x - 8 = 0$.

Ta có: $P_2x^2 - P_3x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$.

Ví dụ 2.4.2: Giải phương trình sau (có điều kiện): $A_x^2 = 12$.

Giải: Điều kiện: $x \geq 2, x \in \mathbb{Z}$.

Phương trình đã cho tương đương với: $A_x^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-2)!} = 12 \Leftrightarrow x(x-1) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện ta loại $x = -3$. Vậy nghiệm là: $S = \{4\}$.

Ví dụ 2.4.3: Giải phương trình và bất phương trình sau:

a) $A_n^3 = 20n$

b) $A_n^5 \leq 18A_{n-2}^4$

Giải: a) Điều kiện: $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$.

22

Tam giác Pascal

$$\begin{array}{ccccccc}
 (a+b)^0 = 1 & & & & & & 1 \\
 (a+b)^1 = a+b & & & & & 1 & 1 \\
 (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 & & & & 1 & 2 & 1 \\
 (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 & 1 & ④ & + & ⑥ & 4 & 1 \\
 (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 & 1 & 5 & ⑩ & 10 & 5 & 1
 \end{array}$$

Tính chất của tam giác Pascal:

- Số hạng đầu cuối luôn là 1: $C_n^0 = C_n^n = 1$.
- Số hạng cách đều đầu và cuối thì bằng nhau: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Dạng 3.1: Khai triển trực tiếp nhị thức Newton

Sử dụng công thức: $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^n a^0 b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$.

Ví dụ 3.1.1: Khai triển: $(3x+5)^5$:

Giải: Công thức: $(3x+5)^5 = C_5^0 (3x)^5 5^0 + C_5^1 (3x)^4 5^1 + C_5^2 (3x)^3 5^2 + C_5^3 (3x)^2 5^3 + C_5^4 (3x) 5^4 + C_5^5 (3x)^0 5^5$.
 $= C_5^0 3^5 x^5 + C_5^1 3^4 \cdot 5 x^4 + C_5^2 3^3 \cdot 5^2 x^3 + C_5^3 3^2 \cdot 5^3 x^2 + C_5^4 3 \cdot 5^4 x + C_5^5 5^5$
 $= 243x^5 + 2025x^4 + 6750x^3 + 11250x^2 + 9375x + 3125$

Ví dụ 3.1.2: Khai triển: $(2x-3y)^4$

Giải: CT: $(2x-3y)^4 = C_4^0 (2x)^4 (-3y)^0 + C_4^1 (2x)^3 (-3y) + C_4^2 (2x)^2 (-3y)^2 + C_4^3 (2x)(-3y)^3 + C_4^4 (2x)^0 (-3y)^4$
 $= 16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4$.

Bài tập 3.1: Khai triển các nhị thức sau:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } (3x-4)^5 & \text{b) } (x-2y)^6 & \text{c) } \left(x + \frac{1}{x}\right)^7 & \text{d) } \left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^8 \\
 \text{e) } (\sqrt{3}-\sqrt{15})^6 & \text{f) } (a-\sqrt{2})^6 & \text{g) } (a+2b)^5 & \text{h) } \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^4
 \end{array}$$

Dạng 3.2: Tìm hệ số hoặc số hạng chứa x^h trong khai triển nhị thức.

PP: Sử dụng CT số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$. Trong đó a, b chứa x , rút gọn các lũy thừa của x ta thu được dạng: $T_{k+1} = HS \cdot x^{f(k)}$ (HS là phần không chứa x gọi là hệ số).

Khi đó ta cho $f(k) = h$ giải phương trình này tìm được k , với điều kiện $0 \leq k \leq n$.

Chú ý: 1. Nếu đề bài hỏi hệ số thì chỉ trả lời **hệ số**: HS. Còn nếu hỏi **số hạng** thì trả lời $HS \cdot x^h$.

2. Nếu đề bài hỏi tìm số hạng không chứa x thì tức là x^0 .

Ví dụ 3.2.1: Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển: $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^6$.

Giải: Ta có số hạng tổng quát là: $T_{k+1} = C_6^k x^{6-k} \left(\frac{2}{x^2}\right)^k = C_6^k 2^k \frac{x^{6-k}}{x^{2k}} = C_6^k 2^k x^{6-3k}$.

$ycbt \Leftrightarrow 6-3k=3 \Leftrightarrow k=1$. Vậy số hạng chứa x^3 là: $T_2 = C_6^1 2^1 x^3 = 12x^3$

(chú ý: nếu người ta hỏi hệ số thì chỉ trả lời là 12 thôi).

Ví dụ 3.2.2: Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển: $(2x-3y)^{200}$.

Giải: Ta có số hạng tổng quát là: $T_{k+1} = C_{200}^k (2x)^{200-k} (-3y)^k = C_{200}^k 2^{200-k} (-3)^k x^{200-k} y^k$.

$ycbt \Leftrightarrow \begin{cases} 200-k=101 \\ k=99 \end{cases} \Leftrightarrow k=99$. Vậy hệ số của $x^{101}y^{99}$ là: $C_{200}^{99} 2^{200-99} (-3)^{99} = -C_{200}^{99} 2^{101} 3^{99}$.

Ví dụ 3.2.3: Tìm số hạng không chứa x (độc lập với x) trong khai triển: $\left(2x + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{18}$.

Giải: Ta có số hạng tổng quát là: $T_{k+1} = C_{18}^k (2x)^{18-k} \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^k = C_{18}^k 2^{18-k} \frac{x^{18-k}}{x^{\frac{k}{5}}} = C_{18}^k 2^{18-k} x^{18-k-\frac{k}{5}}$.

$ycbt \Leftrightarrow 18-k-\frac{k}{5}=0 \Leftrightarrow k=15$. Vậy số hạng chứa x^3 là: $T_{16} = C_{18}^{15} 2^{18-15} = 6528$.

Bài tập 3.2:

1. Tìm số hạng độc lập với x trong các khai triển sau:

a) $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^{12}$

b) $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^5$

c) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$

d) $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$

ĐS: a) 495

b) -10

c) 24310

d) 35

2. Tìm hệ số của x^h trong khai triển sau:

a) $(1-3x)^{11}, h=6$

b) $(3x-x^2)^{12}, h=15$

c) $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}, h=31$

d) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + x\right)^7, h=2$

ĐS: a) $3^6 C_{11}^6$

b) $-3^9 C_{12}^3$

c) C_{40}^3

d) 35

3. Tìm số hạng thứ n trong khai triển sau:

a) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^5, n=4$

b) $(3-x)^{15}, n=13$

c) $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^{15}, n=6$

d) $(2-3x)^{25}, n=21$

ĐS: a) 120

b) 12285

c) C_{15}^5

d) $2^5 3^{20} C_{25}^{20}$

4. Tìm n :

a) Biết hệ số của x^2 trong khai triển của $(1-3x)^n$ là 90.

b) Biết hệ số của x^{n-2} trong khai triển của $\left(x - \frac{1}{4}\right)^n$ là 31.

Dạng 3.3: Tìm hệ số hoặc số hạng chứa x^h trong khai triển tam thức.

PP: Sử dụng CT **nhị thức Newton mở rộng**: $(a+b+c)^n = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k C_n^k C_k^i a^{n-k} b^{k-i} c^i$. Suy ra số hạng tổng quát

d) Ta lấy $S_1 + S_3 = 2C_{10}^0 + 2C_{10}^2 + \dots + 2C_{10}^{10} \Rightarrow S_4 = C_{10}^0 + C_{10}^2 + \dots + C_{10}^{10} = \frac{S_1 + S_3}{2} = \frac{2^{10} + 0}{2} = 2^9$.

e) Ta lấy $S_1 - S_3 = 2C_{10}^1 + 2C_{10}^3 + \dots + 2C_{10}^9 \Rightarrow S_5 = C_{10}^1 + C_{10}^3 + \dots + C_{10}^9 = \frac{S_1 - S_3}{2} = \frac{2^{10} - 0}{2} = 2^9$.

Ví dụ 3.3.2: Tính tổng:

a) $S_1 = 3^{10}C_{10}^0 + 3^9C_{10}^1 + \dots + C_{10}^{10}$

b) $S_2 = 2^{10}C_{10}^0 + 2^9 \cdot 5C_{10}^1 + 2^8 \cdot 5^2C_{10}^2 + \dots + 5^{10}C_{10}^{10}$

c) $S_3 = 3^{10}C_{10}^0 - 3^9 \cdot 2C_{10}^1 + 3^8 \cdot 2^2C_{10}^2 + \dots + 2^{10}C_{10}^{10}$

Giải: Xét nhị thức: $(a+b)^{10} = a^{10}C_{10}^0 + a^9bC_{10}^1 + a^8b^2C_{10}^2 + \dots + b^{10}C_{10}^{10}$ (*).

a) Chọn $a=3, b=1$ thay vào biểu thức (*) ta thu được: $(3+1)^{10} = 3^{10}C_{10}^0 + 3^9C_{10}^1 + \dots + C_{10}^{10}$.

Từ đó suy ra: $S_1 = 3^{10}C_{10}^0 + 3^9C_{10}^1 + \dots + C_{10}^{10} = 4^{10}$.

b) Chọn $a=2, b=5$ thay vào biểu thức (*) ta thu được: $(2+5)^{10} = 2^{10}C_{10}^0 + 2^9 \cdot 5C_{10}^1 + 2^8 \cdot 5^2C_{10}^2 + \dots + 5^{10}C_{10}^{10}$.

Từ đó suy ra: $S_2 = 2^{10}C_{10}^0 + 2^9 \cdot 5C_{10}^1 + 2^8 \cdot 5^2C_{10}^2 + \dots + 5^{10}C_{10}^{10} = 7^{10}$.

c) Chọn $a=3, b=-2$ thay vào (*) ta thu được: $(3-2)^{10} = 3^{10}C_{10}^0 + 3^9 \cdot (-2)C_{10}^1 + 3^8 \cdot (-2)^2C_{10}^2 + \dots + (-2)^{10}C_{10}^{10}$.

Từ đó suy ra: $S_3 = 3^{10}C_{10}^0 - 3^9 \cdot 2C_{10}^1 + 3^8 \cdot 2^2C_{10}^2 + \dots + 2^{10}C_{10}^{10} = 1^{10} = 1$.

Ví dụ 3.3.3: Chứng minh:

a) $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{2n}$

b) $C_{4n+2}^0 + C_{4n+2}^2 + \dots + C_{4n+2}^{2n} = 2^{4n}$

Giải: a) Xét nhị thức: $(1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + xC_{2n+1}^1 + x^2C_{2n+1}^2 + \dots + x^{2n+1}C_{2n+1}^{2n+1}$ (*).

Chọn $x=1$ thay vào (*) ta có: $(1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$.

Theo tính chất của tổ hợp, cũng như nhận xét của tam giác Pascal thì: $C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k}$.

Cho k chạy từ $0 \rightarrow n$ ta có:

k	0	1	2	...	n
	$C_{2n+1}^0 = C_{2n+1}^{2n+1}$	$C_{2n+1}^1 = C_{2n+1}^{2n}$	$C_{2n+1}^2 = C_{2n+1}^{2n-1}$	...	$C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1}$

Vậy nên ta có: $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n + C_{2n+1}^n + \dots + C_{2n+1}^0 = 2(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n)$.

Ta suy ra: $2(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n) = 2^{2n+1} \Leftrightarrow C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{2n}$

b) Xét nhị thức: $(1+x)^{4n+2} = C_{4n+2}^0 + xC_{4n+2}^1 + x^2C_{4n+2}^2 + \dots + x^{4n+2}C_{4n+2}^{4n+2}$ (*).

Chọn $x=1$ thay vào (*) ta có: $(1+1)^{4n+2} = C_{4n+2}^0 + C_{4n+2}^1 + C_{4n+2}^2 + \dots + C_{4n+2}^{4n+2}$.

Chọn $x=-1$ thay vào (*) ta có: $(1-1)^{4n+2} = C_{4n+2}^0 - C_{4n+2}^1 + C_{4n+2}^2 - \dots + C_{4n+2}^{4n+2}$.

Cộng hai vế ta có: $2^{4n+2} = 2C_{4n+2}^0 + 2C_{4n+2}^2 + 2C_{4n+2}^4 + \dots + 2C_{4n+2}^{4n+2} \Leftrightarrow 2^{4n+1} = C_{4n+2}^0 + C_{4n+2}^2 + C_{4n+2}^4 + \dots + C_{4n+2}^{4n+2}$

Theo tính chất của tổ hợp, cũng như nhận xét của tam giác Pascal thì: $C_{4n+2}^k = C_{4n+2}^{4n+2-k}$.

Cho k chạy từ $0, 2, 4, \dots, 2n$ ta có:

k	0	2	4	...	2n
	$C_{4n+2}^0 = C_{4n+2}^{4n+2}$	$C_{4n+2}^2 = C_{4n+2}^{4n}$	$C_{4n+2}^4 = C_{4n+2}^{4n-2}$	...	$C_{4n+2}^{2n} = C_{4n+2}^{2n+2}$

Vậy nên ta có: $C_{4n+2}^0 + C_{4n+2}^2 + C_{4n+2}^4 + \dots + C_{4n+2}^{2n} + C_{4n+2}^{2n} + \dots + C_{4n+2}^0 = 2(C_{4n+2}^0 + C_{4n+2}^2 + C_{4n+2}^4 + \dots + C_{4n+2}^{2n})$.

Ta suy ra: $2(C_{4n+2}^0 + C_{4n+2}^2 + C_{4n+2}^4 + \dots + C_{4n+2}^{2n}) = 2^{4n+1} \Leftrightarrow C_{4n+2}^0 + C_{4n+2}^2 + C_{4n+2}^4 + \dots + C_{4n+2}^{2n} = 2^{4n}$

Bài tập 3.3:**1. Tính tổng:**

a) $A = C_7^0 + 2C_7^1 + 4C_7^2 + \dots + 128C_7^7$ b) $B = 3^{11}C_{11}^0 + 3^{10}C_{11}^1 + \dots + C_{11}^{11}$ c) $C = C_{13}^0 - C_{13}^1 + \dots - C_{13}^{13}$
 d) $D = 2^{20}C_{20}^0 + 2^{19} \cdot 3C_{20}^1 + 2^{18} \cdot 3^2 C_{20}^2 + \dots + 3^{20}C_{20}^{20}$ e) $E = C_{15}^0 - 5C_{15}^1 + 5^2C_{15}^2 - \dots + 5^{15}C_{15}^{15}$

2. Tính tổng:

a) $S_1 = 2^n C_n^0 + 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-2}C_n^2 + \dots + C_n^n$ b) $S_2 = 3^n C_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - \dots + C_n^n$
 c) $S_3 = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n}$ d) $S_4 = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1}$
 e) $S_5 = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 + \dots + C_{2n+1}^{2n}$ f) $S_6 = C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$

3. Tìm n:

a) Biết tổng các hệ số trong khai triển $\left(x - \frac{3}{x}\right)^n$ là 512.
 b) Biết tổng các hệ số trong khai triển $(x^2 + 1)^n$ là 1024.
 c) Biết tổng các hệ số trong khai triển $(4x - \sqrt{x})^n$ là 59049.

4. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1}$.
 b) $1 - 2C_n^1 + 2^2C_n^2 - 2^3C_n^3 + \dots + (-1)^n 2^n C_n^n = (-1)^n$
 c) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

5. Chứng minh các mệnh đề sau:

a) $11^{10} - 1$ chia hết cho 100.
 b) $101^{100} - 1$ chia hết cho 10 000.
 c) $\sqrt{10} \left[(1 + \sqrt{10})^{100} - (1 - \sqrt{10})^{100} \right]$ là số nguyên

6. Tìm số nguyên dương n sao cho:

a) $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 4095$ b) $3^n C_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 2048$
 c) $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n} = 512$ d) $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$
 e) $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 1024$ f) $C_{2014}^2 + C_{2014}^4 + C_{2014}^6 + \dots + C_{2014}^{1006} = 2^{503n} - 1$

Dạng 3.4: Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức

Đặt: $a_k = T_{k+1}(1) = C_n^k a^{n-k} b^k$, $0 \leq k \leq n$ (nghĩa là a_k chỉ là hệ số của T_{k+1} , bỏ đi x^m).

Khi đó: Hệ số lớn nhất trong khai triển sẽ có k là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases}$.

Tìm được nghiệm $k_0 \Rightarrow a_{k_0} = T_{k_0+1}(1)$ là hệ số lớn nhất.

Ví dụ 3.4: Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển: $\left(\frac{1}{3} + 2x\right)^{11}$.

Giải: Ta có: $T_{k+1} = C_{11}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{11-k} (2x)^k = \frac{C_{11}^k 2^k}{3^{11-k}} x^k$. Suy ra: $a_k = \frac{C_{11}^k 2^k}{3^{11-k}}$.

Hệ số lớn nhất trong khai triển có tính chất:

Việc tìm hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức là một bài toán khó, đòi hỏi người học phải nắm vững kiến thức và kỹ năng tính toán.

Cuộc đời giống như cưỡi một chiếc xe đạp, để giữ thế cân bằng, bạn phải liên tục di chuyển – Albert Einstein

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{C_{11}^k 2^k}{3^{11-k}} \geq \frac{C_{11}^{k+1} 2^{k+1}}{3^{11-(k+1)}} \\ \frac{C_{11}^k 2^k}{3^{11-k}} \geq \frac{C_{11}^{k-1} 2^{k-1}}{3^{11-(k-1)}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{C_{11}^k}{3} \geq 2C_{11}^{k+1} \\ 2C_{11}^k \geq \frac{C_{11}^{k-1}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{11}^k \geq 6C_{11}^{k+1} \\ 6C_{11}^k \geq C_{11}^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11!}{k!(11-k)!} \geq 6 \frac{11!}{(k+1)!(11-k-1)!} \\ 6 \frac{11!}{k!(11-k)!} \geq \frac{11!}{(k-1)!(11-k+1)!} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{11-k} \geq \frac{6}{k+1} \\ \frac{6}{k} \geq \frac{1}{11-k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{11-k} - \frac{6}{k+1} \geq 0 \\ \frac{6}{k} - \frac{1}{12-k} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7k-65}{(11-k)(k+1)} \geq 0 \\ \frac{72-7k}{k(12-k)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7k-65 \geq 0 \\ 72k-7k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 65 \leq k \leq \frac{72}{7} \Rightarrow k=10 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ số cao nhất là: $a_{10} = \frac{C_{11}^{10} 2^{10}}{3^{11-10}} = \frac{11 \cdot 2^{10}}{3}$

Bài tập 3.4: Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển sau:

a) $\left(\frac{1}{3} + \frac{2x}{3}\right)^{11}$ b) $(1+2x)^{12}$

ĐS:

Dạng 3.5: Tìm số hạng là số hữu tỷ trong khai triển

PP: Số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = HS \alpha^{f(k)} \beta^{g(k)}$, $0 \leq k \leq n$. Trong đó HS không chứa căn thức. α, β là các số hữu tỷ.

Khi đó: Số hạng là số hữu tỷ trong khai triển sẽ có k là nghiệm của hệ: $\begin{cases} f(k) \in \mathbb{Z} \\ g(k) \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Tìm được k_0 thay vào $T_{k_0+1} = HS \alpha^{f(k_0)} \beta^{g(k_0)}$.

Ví dụ 3.5: Tìm số hạng hữu tỷ trong khai triển nhị thức $(\sqrt[3]{16} + \sqrt{3})^{17}$.

Giải: Số hạng tổng quát là: $T_{k+1} = C_{17}^k (\sqrt[3]{16})^{17-k} (\sqrt{3})^k = C_{17}^k 16^{\frac{17-k}{3}} 3^{\frac{k}{2}}$.

Số hạng hữu tỷ trong khai triển có tính chất: $\begin{cases} \frac{17-k}{3} \in \mathbb{Z} \\ \frac{k}{2} \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq k \leq 17, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2i, i \in \mathbb{Z} \\ \frac{17-2i}{3} \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq 2i \leq 17 \end{cases}$.

Cho i chạy từ $0 \leq i \leq 8$, ta có: $i = 1; 4; 7 \Rightarrow k = 2; 8; 14$.

Vậy có 3 số hạng hữu tỷ là: $T_3 = C_{17}^2 16^5 \cdot 3$, $T_9 = C_{17}^8 16^3 \cdot 3^4$, $T_{15} = C_{17}^{14} 16 \cdot 3^7$.

Bài tập 3.5:

1. Tìm số hạng nguyên trong khai triển nhị thức $(\sqrt[3]{2} + \sqrt{3})^9$. ĐS: $C_9^3 3^3 \cdot 2$, 2^3

2. Tìm số hạng hữu tỷ trong khai triển nhị thức $\left(\sqrt[3]{5} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{31}$. ĐS: $\frac{C_{10}^6 2^3 5^2}{32}$, $\frac{1}{32}$

3. Trong khai triển sau đây có bao nhiêu số hạng hữu tỉ $(\sqrt{3} - \sqrt[4]{5})^{124}$. ĐS: 32 số.

Bài 4: ÔN TẬP PHẦN TỔ HỢP

“Cuộc đời giống như cưỡi một chiếc xe đạp, để giữ thế cân bằng, bạn phải liên tục di chuyển” – Albert Einstein

Dạng 4.1: Dùng cách thích hợp để đếm số phương án**Bài tập 4.1:**

1. Trong một ban chấp hành đoàn gồm 7 người, cần chọn 3 người vào ban thường vụ.

- a) Nếu không có sự phân biệt về chức vụ của 3 người trong ban thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn ?
 b) Nếu cần chọn 3 người vào ban thường vụ với các chức vụ: Bí thư, Phó bí thư, Ủy viên thường trực thì có bao nhiêu cách chọn ? ĐS: a) 35 b) 210

2. Một lớp có 20 học sinh trong đó có 2 cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 người đi dự hội nghị của trường sao cho trong đó có ít nhất 1 cán bộ lớp.

Giải: Có hai trường hợp:

TH1: Số cách chọn 3 người trong đó có 1 cán bộ lớp là: $C_2^1 C_{18}^2$.

TH2: Số cách chọn 3 người trong đó có 2 cán bộ lớp là: $C_2^2 C_{18}^1$.

Vậy số cách thỏa yêu cầu là: $C_2^1 C_{18}^2 + C_2^2 C_{18}^1 = 324$.

3. Từ 10 chữ số 0, 1, 2, ..., 7, 8, 9 có thể lập bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau sao cho các số đó đều phải có mặt 0 và 1.

Giải: Xét hộc có 6 ô trống. Do $a_1 \neq 0$ nên có 5 cách đưa số 0 bỏ vào hộc. Còn lại 5 ô trống nên có 5 cách đưa số 1 vào. Còn 8 chữ số 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 mà có 4 hộc trống nên có: A_8^4 cách.

Do đó số các số cần tìm : $5 \times 5 \times 1680 = 42\,000$.

4. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau (chữ số đầu tiên khác 0) trong đó có một chữ số 0 nhưng không có mặt chữ số 1.

Giải Gọi $X = \{0, 1, 2, \dots, 7, 8, 9\}$. Xét hộc có 6 ô trống. Lấy chữ số 0 bỏ vào hộc có 5 cách (do $a_1 \neq 0$).

Từ $X \setminus \{0, 1\}$ còn 8 chữ số chọn 5 chữ số bỏ vào 5 hộc còn lại có A_8^5 cách. Vậy số các số thỏa yêu cầu bài toán : $5 \cdot A_8^5 = 33600$.

5. Một tổ sinh viên có 20 em. Trong đó chỉ có 8 em biết nói tiếng Anh, 7 em biết tiếng Pháp và 5 em chỉ biết tiếng Đức. Cần chọn 1 nhóm đi thực tế gồm 3 em biết tiếng Anh, 4 em biết tiếng Pháp và 2 em biết tiếng Đức. Hỏi có bao nhiêu cách lập nhóm.

Giải: Số cách lập nhóm sinh viên biết tiếng Anh : C_8^3 . Số cách lập nhóm sinh viên biết tiếng Pháp: C_7^4 .

Số cách lập nhóm sinh viên biết tiếng Đức : C_5^2 .

Vậy số cách lập thỏa yêu cầu bài toán là : $C_8^3 \cdot C_7^4 \cdot C_5^2 = 1960$.

6. Trong 1 hộp có 7 quả cầu xanh, 5 quả cầu đỏ và 4 quả cầu vàng, các quả cầu đều khác nhau. Chọn ngẫu nhiên 4 quả cầu trong hộp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho trong 4 quả cầu chọn ra có đủ 3 màu.

Giải: ĐS: 910.

7. Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa xem như đôi một khác nhau). Người ta muốn chọn ra 1 bông hoa gồm 7 bông. Có bao nhiêu cách chọn 1 bó hoa trong đó :

a) Có đúng 1 bông hồng đỏ.

b) Có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ

Giải: a) Số cách chọn 1 bông hồng đỏ : 4. Số cách chọn 6 bông còn lại (vàng hay trắng) : C_8^6 . Vậy số cách chọn đúng 1 bông đỏ : $4 \cdot C_8^6 = 112$.

b) Số cách chọn 3 bông vàng, 3 bông đỏ, 1 bông trắng : $C_4^3 C_5^3 C_3^1 = 120$.

Số cách chọn 4 bông vàng và 3 bông đỏ : $C_4^3 C_5^4$.

Số cách chọn 3 bông vàng và 4 bông đỏ : $C_4^4 C_5^3$.

Vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là : 150 cách.

8. Tính tổng các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ 1, 3, 4, 5, 7, 8.

Giải Gọi $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_5}$. Số các số n là $A_6^5 = 720$.

Xét các chữ số hàng đơn vị, mỗi chữ số 1, 3, 4, 5, 7, 8 xuất hiện như nhau nên: $\frac{720}{6} = 120$ lần. Vậy tổng

các chữ số hàng đơn vị là : $120(1+3+4+5+7+8) = 120.28 = 3360$.

Tương tự tổng chữ số hàng chục là : 3360×10 . Tổng chữ số hàng trăm là : 3360.10^2 .

Tổng chữ số hàng nghìn là : 3360.10^3 . Tổng chữ số hàng vạn là : 3360.10^4 .

Do đó $S = 3360(1+10+100+1000+10000) = 37332960$.

9. Một hộp đựng 4 bi đỏ, 5 bi trắng và 6 bi vàng. Người ta chọn 4 bi từ hộp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để số bi lấy ra không đủ 3 màu.

Giải: Số cách chọn 4 bi bất kì trong 15 bi trên là : C_{15}^4 .

Số cách chọn 2 bi đỏ, 1 bi trắng, 1 bi vàng : $C_4^2 C_5^1 C_6^1$. Số cách chọn 1 bi đỏ, 2 bi trắng, 1 bi vàng:

$$C_4^1 C_5^2 C_6^1$$

Số cách chọn 1 bi đỏ, 1 bi trắng, 2 bi vàng : $C_4^1 C_5^1 C_6^2$.

Vậy số cách chọn bi đủ 3 màu là : $180 + 240 + 300 = 720$.

Do đó số cách chọn bi không đủ 3 màu : $1365 - 720 = 645$.

10. Một lớp học có 40 học sinh trong đó 25 nam và 15 nữ. Thầy giáo chủ nhiệm muốn chọn ra 3 em để tham gia đội văn nghệ nhà trường nhân ngày Nhà giáo Việt Nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn, nếu:

a) Chọn ra 3 học sinh trong lớp ?

b) Chọn 3 học sinh trong đó có 2 nam và một nữ ?

c) Chọn 3 học sinh trong đó phải có ít nhất một nam ? ĐS: a) 9880 b) 4500 c) 9425.

11. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập các số tự nhiên gồm sáu chữ số khác nhau. Hỏi:

a) Có tất cả bao nhiêu số ?

b) Có bao nhiêu số chẵn, bao nhiêu số lẻ ?

c) Có bao nhiêu số bé hơn 432 000 ? ĐS: a) $6!$ b) $3 \times 5!$ c) 12

12. Cho tập con gồm 10 phần tử khác nhau. Tìm số tập con khác rỗng chứa 1 số chẵn các phần tử.

Giải: Số tập con của X có 2 phần tử là: C_{10}^2 . Số tập con của X có 4 phần tử là: C_{10}^4 .

Số tập con của X có 6 phần tử là: C_{10}^6 . Số tập con của X có 8 phần tử là: C_{10}^8 .

Số tập con của X có 10 phần tử là: C_{10}^{10} . Vậy số tập con thỏa yêu cầu bài toán là: 511.

13. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho mười người khách vào mười ghế kê thành một dãy dài ? ĐS: $10!$

14. Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa vào 5 lọ khác nhau (mỗi lọ cắm không quá một bông) nếu:

a) Các bông hoa khác nhau ?

b) Các bông hoa như nhau ? ĐS: a) 60 b) 10

15. Trong mặt phẳng, cho sáu điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập điểm đã cho ? ĐS: 20

16. Trong mặt phẳng có bao nhiêu hình chữ nhật được tạo thành từ bốn đường thẳng song song với nhau và năm đường thẳng vuông góc với bốn đường thẳng song song đó ? ĐS: 60.

17. Có bao nhiêu khả năng có thể xảy ra đối với thứ tự giữa các đội trong một giải bóng đá có 5 đội bóng ? (Giả sử không có hai đội nào có điểm trùng nhau). ĐS:120

18. Giả sử có 8 vận động viên tham gia chạy thi. Nếu không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng một lúc thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí thứ nhất, thứ nhì và thứ ba ? ĐS:336

19. Một hộp chứa 6 bi trắng và 5 bi đen. Hỏi có mấy cách lấy ra 4 bi : a) màu tùy ý ? b) gồm 2 bi trắng và 2 bi đen ?

Giải: a) ĐS: 330 cách. b) ĐS: 150 cách.

20. Có 9 viên bi xanh, 5 đỏ, 4 vàng có kích thước đôi một khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn ra :

a) 6 viên bi trong đó có đúng 2 viên bi đỏ,

b) 6 viên bi trong đó số bi xanh bằng số bi đỏ.

Giải: a) ĐS: 7150. ĐS: 3045.

21. Trong mặt phẳng cho một tập hợp P gồm n điểm. Hỏi:

a) Có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai đầu mút thuộc P ?

b) Có bao nhiêu vectơ mà hai đầu mút thuộc P ? ĐS: a) $n(n-1)/2$ b) $n(n-1)$

22. Một bài trắc nghiệm khách quan gồm 10 câu. Mỗi câu có 4 phương án trả lời. Hỏi bài thi đó có bao nhiêu phương án trả lời ? ĐS: 1 048 576

23. Một cuộc thi có 15 người tham dự, giả thiết rằng không có hai người nào có điểm bằng nhau.

a) Nếu kết quả của cuộc thi là việc chọn ra 4 người điểm cao nhất thì có bao nhiêu kết quả có thể ?

b) Nếu kết quả của cuộc thi là việc chọn ra các giải nhất, nhì, ba thì có bao nhiêu kết quả có thể ? ĐS:

a)1365 b) 2730

24. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số và chia hết cho 5 ? ĐS:180 000

25. Trong một hội chợ cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có bốn giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi:

a) Có bao nhiêu kết quả có thể có ?

b) Có bao nhiêu kết quả có thể, biết rằng người giữ vé số 47 được giải nhất ?

c) Có bao nhiêu kết quả có thể, nếu biết rằng người giữ vé số 47 trúng 1 trong 4 giải ?

ĐS:a) 94 109 400 b) 941 094 c) 3 764 376

26. Một lớp học có 30 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Có 6 học sinh được chọn để lập 1 tổ ca. Hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau và phải có ít nhất 2 nữ.

Giải: Số cách chọn 6 học sinh bất kì nam hay nữ: C_{30}^6 .

Số cách chọn 6 học sinh toàn nam C_{15}^6 . Số cách chọn 5 nam và 1 nữ : $C_{15}^5 C_{15}^1$.

Vậy có số cách chọn 6 học sinh trong đó phải có ít nhất 2 nữ: $C_{30}^6 - C_{15}^6 C_{15}^1 = 548730$ cách.

27. Một tổ có 8 em nam và 2 em nữ. Người ta cần chọn ra 5 em trong tổ tham dự cuộc thi học sinh thanh lịch của trường. Yêu cầu trong các em được chọn phải có ít nhất một em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ? ĐS:196

28. Một nhóm học sinh gồm 7 em nam và 3 em nữ. Người ta cần chọn ra 5 em trong nhóm tham gia đồng diễn thể dục. Trong 5 em được chọn, yêu cầu không có quá một em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

ĐS:126

29. Giả sử có bảy bông hoa màu khác nhau và ba lọ khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách cắm ba bông hoa vào ba lọ đã cho (mỗi lọ cắm một bông) ? ĐS: 210

30. Có bao nhiêu cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn khác nhau ? ĐS: 360

Dạng 4.2: Kết hợp giải phương trình để giải các dạng đã học**Bài tập 4.2:**

1. Cho số nguyên dương n thỏa mãn $C_n^3 = 5C_n^1$. Tìm số hạng không chứa x của khai triển:

$$\left(\frac{2}{n-5} \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)^n \quad \text{ĐS: 35.}$$

2. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $\left(\frac{2}{x} - x^3 \right)^n$, biết n thỏa hệ thức: $C_{n-4}^{n-6} + nA_n^2 = 454$ ĐS: -1792.

3. Tìm số hạng độc lập với x trong khai triển $\left(x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^{28}}} \right)^n$, biết n thỏa hệ thức: $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$
ĐS: 792.

4. Cho số nguyên dương n thỏa mãn $3C_n^2 + 2A_n^2 = 3n^2 + 15$. Tìm số hạng chứa x^{10} của khai triển:

$$\left(2x^3 - \frac{3}{x^2} \right)^n \quad \text{ĐS: } C_{10}^4 2^6 \cdot 3^4 x^{10}.$$

5. Cho số nguyên dương n thỏa mãn $C_n^3 + 2n = A_{n+1}^2$. Tìm số hạng không phụ thuộc vào x của khai triển:

$$\left(\frac{1}{x} - x - x^2 \right)^n \quad \text{ĐS: -98.}$$

6. Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $(x+2)^{3n}$, biết n thỏa hệ thức: $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$ ĐS: 2956096.

7. Biết tổng các hệ số trong khai triển $(1+x^2)^n$ là 1024. Tìm hệ số của x^{12} . ĐS: 210.

8. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\frac{1}{x} + x^3 \right)^n$ biết tổng hệ số trong khai triển là 1024. ĐS: 210.

9. Tìm số hạng chứa của x^8 trong khai triển $\left(\frac{2}{x^3} + \sqrt{x^5} \right)^n$ biết n thỏa mãn hệ thức:

$$C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 4095. \quad \text{ĐS: 7920.}$$

10. Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $(2+x)^n$, biết n là số nguyên thỏa:

$$3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 2048 \quad \text{ĐS: 22.}$$

11. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $(\sqrt{x} - 3x^2)^n$ biết tổng hệ số trong khai triển là -2048. ĐS: -4455.

12. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $(1+x+2x^2)^n$, biết n là số nguyên thỏa:

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n} = 512 \quad \text{ĐS: 105.}$$

Bài 5: BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Không gian xác suất gồm 2 thành phần:

1. Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà:

- Có thể lặp đi lặp lại nhiều lần trong các điều kiện giống nhau.
- Kết quả của nó không dự đoán trước được.
- Có thể xác định tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.

Biến cố:

- Một biến cố A liên quan tới phép thử T được thử đó. Biến cố A xảy ra khi và chỉ khi kết quả của phép thử T thuộc tập A. Mỗi phần tử của A được gọi là một kết quả thuận lợi cho A.
- Biến cố chắc chắn là biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử T. Biến cố chắc chắn mô tả bởi tập Ω .
- Biến cố không thể là biến cố không bao giờ xảy ra khi phép thử T được thực hiện. Biến cố không được mô tả bởi tập $\emptyset$.

Xác suất của biến cố

cho A thì xác suất của A là một số. Kí hiệu : $P(A)$ và $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Một cách tổng quát: Cho k biến cố $A_1, A_2, \dots, A_k$ cùng liên quan đến một phép thử T . Biến cố “Có ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2, \dots, A_k$ xảy ra”, kí hiệu là: $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$, được gọi là hợp của k biến cố đó.

Định lý 1.1 (Định lý xung khắc): Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến một phép thử T. Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra. Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

Biến cố đối: Cho biến cố A, khi đó biến cố “không xảy ra A”, kí hiệu là $\bar{A}$ được gọi là biến cố đối của A.
 Chú ý: Hai biến cố đối nhau thì xung khắc, ngược lại không đúng.

Định lí: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

Biến cố giao: Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến một phép thử T. Biến cố “cả A và B cùng xảy ra”, kí hiệu là AB hoặc $A \cap B$, được gọi là giao của hai biến cố A và B.

Nếu gọi: A là tập hợp mô tả các kết quả thuận lợi cho A .

B là tập hợp mô tả các kết quả thuận lợi cho B.

Thì tập các kết quả thuận lợi cho AB là $A \cap B$.

Biến cố độc lập: Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến một phép thử T. Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố kia.

Hai qui tắc tính xác suất:

Quy tắc cộng xác suất: Nếu hai biến cố A và B xung khắc thì xác suất để A hoặc B xảy ra là:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Qui tắc nhân xác suất: Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì xác suất để A và B xảy ra là:

$$P(AB) = P(A).P(B).$$

Dạng 5.1: Mô tả không gian mẫu, liệt kê số phần tử không gian mẫu

PP: + Yêu cầu được chuyển thành đếm số phần tử của tập hợp, từ đó mô tả tập hợp này bằng cách liệt kê.

+ Dựa vào định nghĩa về không gian mẫu.

+ Nhớ chắc các kiến thức về hoán vị - chỉnh hợp – tổ hợp để áp dụng tính số phần tử của không gian mẫu.

Ví dụ 5.1.1: Chọn một số nguyên dương không lớn hơn 10. Hãy mô tả không gian mẫu và tìm số phần tử của không gian mẫu đó.

Ví dụ 5.1.2: Gieo hai con súc sắc cân đối. Hãy mô tả không gian mẫu và tính số phần tử của không gian mẫu đó.

Bài tập 5.1:

1. Trong tổ 1 của lớp 10A có 6 bạn nữ, Lan, Hoa, Hồng, Huệ, Hằng. Cô giáo chủ nhiệm lớp thử ghép 2 bạn bất kì trong tổ 1 để hát song ca nữ chào mừng ngày Nhà giáo Việt Nam. Hãy mô tả không gian mẫu, tính số phần tử của không gian mẫu đó.

2. Một hộp có chứa 16 viên bi, trong đó có 7 viên bi trắng, 6 viên bi đen và 3 viên bi đỏ. Xác định và tính số phần tử của không gian mẫu khi thực hiện các phép thử sau:

- Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi.
- Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi.
- Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi để cho ba đứa trẻ con.

3. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau:

A: “Số chấm trên mặt xuất hiện là số lẻ”.

B: “Xuất hiện mặt có số chấm lớn hơn 4”.

C: “Xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 3”.

4. Hãy mô tả không gian mẫu khi:

a) Tung ba đồng xu.

b) Lấy ngẫu nhiên từng quả cầu trong hộp kín có 3 quả cầu (đã được đánh số thứ tự 1, 2, 3) ra và xếp thành một hàng ngang để được một số có 3 chữ số.

Dạng 5.2: Xác định tập hợp các kết quả thuận lợi cho một biến cố. Tính số phần tử của tập hợp này

PP: + Nhớ được khái niệm về biến cố liên quan đến phép thử T.

- + Sử dụng định nghĩa một kết quả thuận lợi cho biến cố A. Tập hợp tất cả các kết quả thuận lợi của A.
- + Vận dụng kiến thức về đại số tổ hợp để tính số phần tử của A.

Ví dụ 5.2.1: Gieo hai con súc sắc cân đối.

Gọi A là biến cố: “Tổng số chấm xuất hiện của hai con súc sắc nhỏ hơn hoặc bằng 7”;

B là biến cố: “Ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm” ;

C là biến cố: “Có đúng một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm”.

Hãy liệt kê các kết quả thuận lợi của A, B, C. Tính $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$.

Ví dụ 5.2.2: Có 3 cái hộp, mỗi cái hộp đựng 3 thẻ được đánh số. Hộp thứ nhất đánh số các thẻ là 1, 2, 3. Hộp thứ hai đánh số các thẻ là 4, 5, 6. Hộp thứ ba đánh số các thẻ là 7, 8, 9. Rút ngẫu nhiên mỗi hộp một thẻ. Gọi A là biến cố: “Tổng các số ghi trên 3 tấm thẻ rút ra bằng 15”. Gọi B là biến cố: “Tổng các số ghi trên 3 tấm thẻ rút ra không nhỏ hơn 17”. Hãy xác định các tập hợp A, B và chỉ ra số phần tử của chúng.

1. Gieo một đồng tiền ba lần.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố: A: “Lần đầu xuất hiện mặt sấp” B: “Mặt sấp xảy ra đúng một lần” C: “Mặt ngửa xảy ra ít nhất một lần”

2. Một hộp chứa bốn cái thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố: A: “Tổng các số trên hai thẻ là số chẵn” B: “Tích các số trên hai thẻ là số chẵn”

Dạng 5.3: Tính xác suất của một biến cố.

PP: B1: Xác định không gian mẫu và tính số phần tử của không gian mẫu (5.1)

B2: Xác định số phần tử của biến cố (5.2)

B3: Sử dụng công thức: $P = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Ví dụ 5.3.1: Danh sách lớp của An được đánh số từ 1 đến 30. An có số thứ tự 12. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp.

a) Tính xác suất để An được chọn.

b) Tính xác suất để An không được chọn.

c) Tính xác suất để 1 bạn có số thứ tự nhỏ hơn số thứ tự của An được chọn.

Ví dụ 5.3.2: Gieo con súc sắc cân đối ba lần. Hãy tính xác suất sao cho mặt 1 chấm xuất hiện ít nhất một lần.

Ví dụ 5.3.3: Một hộp có chứa 16 viên bi, trong đó có 7 viên bi trắng, 6 viên bi đen và 3 viên bi đỏ. Xác định là tính số phần tử của không gian mẫu khi thực hiện các phép thử sau:

a) Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để:

Cuộc đời giống như cưỡi một chiếc xe đạp, để giữ thế cân bằng, bạn phải liên tục di chuyển – Albert Einstein

- i) Lấy được cả ba viên bi đỏ.
 ii) Lấy được cả ba viên bi không đỏ.
 iii) Lấy được 1 trắng, 1 đen và 1 đỏ.
 b) Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi. Tính xác suất để:
 i) Lấy được đúng một viên trắng.
 ii) Lấy được đúng hai viên trắng.
 c) Lấy ngẫu nhiên 10 viên bi. Tính xác suất để lấy được 5 trắng, 3 đen và 2 đỏ.

Bài tập 5.3:

- Gieo ngẫu nhiên một đồng tiền cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất của các biến cố sau:
 A: “Mặt sấp xuất hiện hai lần”;
 B: “Mặt sấp xuất hiện đúng một lần”;
 C: “Mặt sấp xuất hiện ít nhất một lần”.
- Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất của các biến cố sau:
 A: “Số chấm trong hai lần gieo bằng nhau”; B: “Tổng số chấm bằng 8”.
- Từ một hộp chứa 5 quả cầu gồm 3 trắng 2 đen. Lấy ngẫu nhiên ra 2 quả. Tính xác suất kết quả lấy ra được 2 quả:
 a) Khác màu;
 b) Cùng màu.
- Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần.
 a) Hãy mô tả không gian mẫu.
 b) Xác định các biến cố sau: A: “Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 10”; B: “Mặt năm chấm xuất hiện ít nhất một lần”.
 c) Tính $P(A)$, $P(B)$.
- Có 4 tấm bìa đánh số từ 1 đến 4. Rút ngẫu nhiên 3 tấm.
 a) Hãy mô tả không gian mẫu.
 b) Xác định biến cố sau: A: “Tổng các số trên ba tấm bìa bằng 8”; B: “Các số trên ba tấm bìa là các số tự nhiên liên tiếp”;
 c) Tính $P(A)$, $P(B)$.
- Hai bạn nam và hai bạn nữ được xếp ngồi ngẫu nhiên vào bốn ghế xếp thành hai dãy đối diện nhau. Tính xác suất sao cho:
 a) Nam, nữ ngồi đối diện nhau;
 b) Nữ ngồi đối diện nhau.
- Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 6 quả trắng, 4 quả đen. Hộp thứ hai chứa 4 quả trắng, 6 quả đen. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên một quả. Ký hiệu A là biến cố “Quả lấy từ hộp thứ nhất trắng”, B là

biến cố “Quả lấy từ hộp thứ hai trắng”.

- Xét xem A và B có độc lập không.
- Tính xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra cùng màu.
- Tính xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra khác màu.

Dạng 5.4: Tính xác suất dựa vào các quy tắc

- + Cho biến cố A, khi đó ta tìm xác suất của biến cố đối $\bar{A}$ thì $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- + Nếu hai biến cố A và B xung khắc thì xác suất để A hoặc B xảy ra là: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- + Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì xác suất để A và B xảy ra là: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Ví dụ 5.4.1: Có hai hòm đựng thẻ, mỗi hòm đựng 12 thẻ đánh số từ 1 đến 12. Từ mỗi hòm rút ngẫu nhiên một thẻ. Tính xác suất để trong hai thẻ rút ra:

- Có ít nhất một thẻ đánh số 12.
- Tổng hai số ghi trên hai thẻ khác 23.

Ví dụ 5.4.2: Có 2 bình, mỗi bình chứa 3 viên bi chỉ khác nhau về màu: 1 bi xanh, 1 bi vàng, 1 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên mỗi bình một viên bi. Tính xác suất để được hai viên bi khác màu.

Ví dụ 5.4.3: Trong một bài thi trắc nghiệm khách quan có 10 câu. Mỗi câu có 5 phương án trả lời, trong đó chỉ có đúng một phương án đúng. Một học sinh không học bài nên làm bài bằng cách với mỗi câu đều chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Tính xác suất để học sinh đó trả lời:

- Không đúng cả 10 câu (Tính chính xác đến phần vạn).
- Đúng cả 10 câu ?

Bài tập 5.4:

- Một hộp bóng đèn có 12 bóng, trong đó có 7 bóng tốt các bóng còn lại là bóng xấu (kém chất lượng). Lấy ngẫu nhiên 3 bóng đèn. Tính xác suất để lấy được ít nhất 2 bóng tốt.
- Gieo 10 đồng xu cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để có ít nhất một đồng xu sấp.
- Có 3 chiến sĩ công an cùng bắn vào một tấm bia, mỗi người được bắn 1 viên đạn. Xác suất bắn trúng bia của họ tương ứng bằng 0,8; 0,7; 0,6. Tìm xác suất để: a) Cả 3 viên đạn cùng trúng bia ? b) Có đúng 2 người bắn trúng bia ? c) Có đúng một viên đạn bắn trúng bia ?
- Một chiếc máy có 2 động cơ chạy độc lập nhau. Xác suất để động cơ I và II chạy tốt lần lượt là 0,8 và 0,7. Hãy tính xác suất để:
 - Cả hai động cơ đều chạy tốt;
 - Cả hai động cơ đều không chạy tốt;
 - Có ít nhất một động cơ chạy tốt.

Bài tập tổng hợp:

- Có bao nhiêu số chẵn có bốn chữ số được tạo thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sao cho;
 - Các chữ số có thể giống nhau ?
 - Các chữ số khác nhau ?
- Xếp ngẫu nhiên ba bạn nam và ba bạn nữ ngồi vào sáu ghế kê theo hàng ngang. Tìm xác suất sao cho:
 - Nam, nữ ngồi xen kẽ nhau;
 - Ba bạn nam ngồi cạnh nhau.
- Từ một hộp chứa sáu quả cầu trắng và bốn quả cầu đen, lấy ngẫu nhiên đồng thời bốn quả. Tính xác suất sao cho:
 - Bốn quả lấy ra cùng màu;
 - Có ít nhất một quả màu trắng.
- Cho một lục giác đều ABCDEF. Viết các chữ cái A, B, C, D, E, F vào sáu cái thẻ. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ. Tìm xác suất sao cho đoạn thẳng mà các đầu mút là các điểm được ghi trên hai thẻ đó là:
 - Cạnh của lục giác;
 - Đường chéo của lục giác;
 - Đường chéo nối hai đỉnh đối diện của lục giác.
- Gieo đồng thời hai con súc sắc. Tính xác suất sao cho:
 - Hai con súc sắc đều xuất hiện mặt chẵn;
 - Tích các số chấm trên hai con súc sắc là số lẻ.
- Trên giá sách có 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Lý và 2 quyển sách Hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển. Tính xác suất sao cho:
 - Ba quyển lấy ra thuộc ba môn khác nhau;
 - Cả ba quyển lấy ra đều là sách Toán;
 - Ít nhất lấy được một quyển sách Toán.
- Bình đựng 5 bi xanh, 3 bi vàng và 4 bi trắng chỉ khác nhau về màu. Lấy ngẫu nhiên 3 bi. Tính xác suất các biến cố sau:
 - Lấy được 3 bi xanh.
 - Lấy được ít nhất có một bi vàng.
 - Lấy được 3 bi cùng màu.
 ĐS : a) $1/22$ b) $34/55$ c) $3/44$
- Một hộp bi đựng 5 viên đen, 7 viên trắng.
 - Ngẫu nhiên lấy 1 lúc 3 viên bi. Tính xác suất để trong 3 viên bi có 2 viên bi trắng.
 - Lấy ngẫu nhiên mỗi lần 1 viên bi. Tính xác suất để viên bi thứ nhất trắng viên bi thứ hai đen.
 ĐS :a) $21/44$ b) $35/132$

“Cuộc đời giống như cưỡi một chiếc xe đạp, để giữ thế cân bằng, bạn phải liên tục di chuyển” – Albert Einstein

b) Tính xác suất để lấy bất kỳ 3 quả có ít nhất 1 quả đen.

b) Tìm xác suất để tổng số chấm là số lẻ hoặc chia hết cho 3.

b) Lấy ngẫu nhiên 1 bi rồi lấy ngẫu nhiên 1 bi nữa. Tính xác suất để được 1 bi xanh ở lần 1 và 1 bi đỏ ở lần 2.

b) Trong 3 bi lấy ra số bi đỏ bằng số bi trắng.

b) Cần chia tổ đó thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 người để đi làm công việc khác nhau, hỏi có bao nhiêu cách chia khác nhau? Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên ta được mỗi nhóm có đúng 1 nữ ?

c) Ít nhất 1 bóng tốt.

15. Có 9 thẻ, mỗi thẻ ghi 1 số, từ 1 đến 9. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 thẻ. Tìm xác suất để tích số trên hai thẻ là 1 số chẵn.

Cuộc đời giống như cưỡi một chiếc xe đạp, để giữ thế cân bằng, bạn phải liên tục di chuyển – Albert Einstein

DS : a) 28/55; b) 41/55

DS :1/6

DS :5135/12222

DS :0,4

DS : 15/56

ĐS : 0,82

DS : 0,94

ĐS : a) 56 b) 0,125

DS: 2/7

ĐS : 0,44

26. Một bình đựng 7 viên bi trong đó có 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tìm xác suất để được:

a) 2 viên đỏ và 1 viên xanh.

b) Cả 3 viên màu xanh.

ĐS :a) $12/35$ b) $4/35$

27. Chọn ngẫu nhiên một số có 3 chữ số. Tìm xác suất để số được chọn là số chẵn và các chữ số của nó đều khác nhau ? ĐS : $328/899$

28. Trong một hộp có 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh (các viên bi chỉ khác nhau về màu sắc). Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 3 viên bi cùng một lúc. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có đúng 2 viên màu đỏ.

ĐS : $18/35$

29. Chia hai hộp bi : hộp thứ nhất có 7 bi xanh và 3 bi đỏ, hộp thứ hai có 6 bi xanh và 4 bi đỏ. Từ mỗi hộp lấy ra 1 viên bi. Tính xác suất để :

a) được 1 bi xanh và 1 bi đỏ.

b) Được 2 bi đỏ.

c) Được ít nhất một bi đỏ.

ĐS : $23/50$; $3/25$; $29/50$

30. Một hộp đựng 10 viên bi, trong đó có 6 viên màu xanh và 4 viên màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 3 viên bi. Tính xác suất để:

a) Cả 3 viên bi lấy ra đều là màu xanh.

b) 3 viên bi lấy ra có ít nhất 1 viên bi màu xanh.

ĐS : $1/6$; $29/30$

31. Gieo một lần hai con xúc xắc. Tính xác suất của biến cố “tổng số chấm ở cả hai mặt bằng 9”

ĐS : $1/9$.

32. Cho tập $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Lấy ngẫu nhiên 2 phần tử của F . Tính xác suất để hai số lấy được đều chẵn, biết rằng tổng của chúng nhỏ hơn 7. ĐS : $1/3$

33. Một người gọi điện thoại, quên hai chữ số cuối cùng của số điện thoại cần gọi và chỉ nhớ rằng hai chữ số đó khác nhau. Tính xác suất để người đó quay số một lần được đúng số điện thoại cần gọi. ĐS: $1/90$.

34. Một lô hàng có 30 sản phẩm, trong đó có 3 phế phẩm, được chia ngẫu nhiên thành 3 phần bằng nhau, mỗi phần 10 sản phẩm. Tính xác suất để:

a) Có ít nhất một phần có đúng một phế phẩm.

b) Mỗi phần đều có một phế phẩm.

ĐS : $185/203$; $50/203$

