

CHỦ ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1) Loại 1: Phương trình thuần nhất với $\sin(kx)$ và $\cos(kx)$

▪ Dạng phương trình: $a \sin(kx) + b \cos(kx) = c$.

▪ Cách giải: Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(kx) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(kx) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Do $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$ nên đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha \rightarrow \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha$.

Khi đó phương trình trở thành $\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Đây là phương trình sơ cấp đã biết cách giải.

▪ Điều kiện có nghiệm: $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$

2) Loại 2: Phương trình đẳng cấp bậc hai với $\sin x$ và $\cos x$

▪ Dạng phương trình: $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$

▪ Cách giải: Thực hiện 2 bước sau

- Bước 1: Kiểm tra $\cos x = 0$ có là nghiệm của phương trình hay không.

- Bước 2: Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta thu được phương trình

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0.$$

Đây là phương trình bậc hai đối với $\tan x$ mà ta đã biết cách giải.

⚡ Chú ý:

- Với phương trình dạng $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$ ta làm như sau:

Phương trình $\Leftrightarrow a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d.1$

$$\Leftrightarrow a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow (a - d) \sin^2 x + b \sin x \cos x + (c - d) \cos^2 x = 0.$$

- Ngoài cách giải trên ta có thể áp dụng công thức góc nhân đôi và công thức hạ bậc đưa về phương trình đã xét ở loại 1.

$$\text{Cụ thể, } a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow a \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{2} b \sin 2x + c \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} = 0$$

3) Loại 3: Phương trình đẳng cấp bậc ba với $\sin x$ và $\cos x$

▪ Dạng phương trình: $a \sin^3 x + b \sin^2 x \cos x + c \sin x \cos^2 x + d \cos^3 x = 0$

▪ Cách giải: Thực hiện 2 bước sau

- Bước 1: Kiểm tra $\cos x = 0$ có là nghiệm của phương trình hay không.
- Bước 2: Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta thu được phương trình

$$a.\tan^3 x + b.\tan^2 x + c.\tan x + d = 0.$$

⚡ Chú ý:

Với phương trình đẳng cấp bậc ba khuyết hệ số chẵn (bậc 3-1) thì cách giải hoàn toàn tương tự.

$$a.\sin^3 x + b.\sin x + c.\cos x + d.\cos^3 x = 0 \Leftrightarrow a.\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + b.\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 x} + c.\frac{1}{\cos^2 x} + d = 0$$

$$\Leftrightarrow a.\tan^3 x + b.\tan x.(1 + \tan^2 x) + c.(1 + \tan^2 x) + d = 0.$$

4) Loại 4: Phương trình có chứa $\sin x \pm \cos x$

▪ Dạng phương trình: $a.(\sin x \pm \cos x) + b.\sin x.\cos x + c = 0$

▪ Cách giải: Đặt $t = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

Lại có $t^2 = 1 \pm 2\sin x.\cos x \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$ hoặc $\sin x.\cos x = \frac{1 - t^2}{2}$.

Thay vào phương trình ta dễ dàng tìm được t, suy ra $\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{t}{\sqrt{2}} \rightarrow x$

5) Loại 5: Phương trình có chứa $\tan x \pm \cot x$

▪ Dạng phương trình: $a(\tan^2 x + \cot^2 x) + b(\tan x \pm \cot x) + c = 0$.

▪ Cách giải: Đặt $t = \tan x \pm \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} \pm \frac{\cos x}{\sin x} = \begin{cases} \frac{1}{\sin x.\cos x} = \frac{2}{\sin 2x} \\ \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x.\cos x} = -\frac{\cos 2x}{\sin 2x} \end{cases}$

Lại có $t^2 = \tan^2 x + \cot^2 x \pm 2 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 \mp 2$

Thay vào phương trình ẩn t, tìm được t rồi suy ra x.

6) Loại 6: Một số các phương trình đối xứng tương tự

▪ Dạng phương trình: $a(\sin^4 x + \cos^4 x) + b\sin 2x + c = 0$

▪ Dạng phương trình: $a(\sin^4 x + \cos^4 x) + b\cos 2x + c = 0$

▪ Dạng phương trình: $a(\sin^6 x + \cos^6 x) + b\sin 2x + c = 0$

▪ Dạng phương trình: $a(\sin^6 x + \cos^6 x) + b\cos 2x + c = 0$

▪ Dạng phương trình: $a\sin^4 x + b\cos^4 x + c.\cos 2x + d = 0$

II. HỆ THỐNG VÍ DỤ MINH HỌA

⚡ Dạng 1: Phương trình thuần nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$

b) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Lời giải:

a) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{3} \cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2}$

b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x$

Lời giải:

a) $\sqrt{3} \cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3x + \frac{1}{2} \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \sin 5x \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 5x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 5x = \pi - x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{24} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau

a) $(\sqrt{3} - 1) \sin x - (\sqrt{3} + 1) \cos x + \sqrt{3} - 1 = 0$

b) $\sqrt{3} \sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = 1$

Lời giải:

a) $(\sqrt{3} - 1) \sin x - (\sqrt{3} + 1) \cos x + \sqrt{3} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) + \sqrt{3} - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{6} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{12} = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$, $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

$$b) \sqrt{3} \sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$)

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau

$$a) 3 \sin 3x - \sqrt{3} \cos 9x = 1 + 4 \sin^3 3x$$

$$b) \sin^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

Lời giải:

$$a) 3 \sin 3x - \sqrt{3} \cos 9x = 1 + 4 \sin^3 3x \Leftrightarrow \sqrt{3} \cos 9x - (3 \sin 3x - 4 \sin^3 3x) = -1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cos 9x - \sin 9x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(9x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 9x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{54} + k\frac{2\pi}{9} \\ x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{9} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{54} + k\frac{2\pi}{9}$, $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{9}$, ($k \in \mathbb{Z}$)

$$b) \text{Ta có } \sin^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^4 x + \frac{1}{4}(\cos x - \sin x)^4 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x (1 - \cos^2 x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(1 - 2 \sin x \cos x)^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x (1 - \cos^2 x) = \frac{1}{4} \cdot 2 \sin x \cos x (2 - 2 \sin x \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x = \sin x \cos x (1 - \sin x \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \sin x \cos x \Leftrightarrow \sin x (\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$)

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau

a) $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$ b) $\tan x - 3 \cot x = 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x)$

Lời giải:

a) $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x) \Leftrightarrow \cos 7x + \sqrt{3} \sin 7x = \sqrt{3} \cos 5x + \sin 5x$

$$\Leftrightarrow 2 \cos\left(7x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 5x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 7x = -5x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{72} + k\frac{\pi}{6} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{72} + k\frac{\pi}{6}$, ($k \in \mathbb{Z}$)

b) Điều kiện: $\sin x, \cos x \neq 0$

PT $\Leftrightarrow \tan x - 3 \cot x = 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - 3 \frac{\cos x}{\sin x} - 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x - 3 \cos^2 x}{\sin x \cos x} - 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \sqrt{3} \cos x) \left(\frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\sin x \cos x} - 4 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \frac{2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 4 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin 2x \right]}{\sin x \cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x = x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \pi - x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ (thỏa mãn)} \\ x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau

a) $\frac{\sqrt{3}(1 - \cos 2x)}{2 \sin x} = \cos x$ b) $\sin 2x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$

Lời giải:

a) Điều kiện: $\sin x \neq 0$

PT $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}(1 - \cos 2x)}{2 \sin x} = \cos x \Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin x \cos x \Leftrightarrow \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = k\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$)

$$b) \sin 2x + \sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}\cos 2x \Leftrightarrow -\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2x + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos(2x + \alpha) = 0 \Leftrightarrow 2x + \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + k\frac{\pi}{2}$$

$$(\text{ Với } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}). \text{ Vậy phương trình có nghiệm } x = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 7. Giải các phương trình sau

$$a) \cos x + \sqrt{3} \sin x = \frac{1}{\cos x}$$

$$b) \cos 7x - \sqrt{3} \sin 7x + \sqrt{2} = 0, x \in \left(\frac{2\pi}{5}; \frac{6\pi}{7} \right)$$

Lời giải:

$$a) \text{ ĐKXĐ: } \cos x \neq 0$$

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos^2 x - 1 + \sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x (\sqrt{3} - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm $k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$)

$$b) \cos 7x - \sqrt{3} \sin 7x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{13\pi}{12} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Do } x \in \left(\frac{2\pi}{5}; \frac{6\pi}{7} \right) \Rightarrow x \in \left\{ \frac{5\pi}{12} \right\}. \text{ Vậy } x = \frac{5\pi}{12} \text{ là nghiệm cần tìm.}$$

Ví dụ 8. Giải các phương trình sau

$$a) 2 \sin 15x + \sqrt{3} \cos 5x + \sin 5x = 0$$

$$b) \sin x + \sqrt{3} \cos x + \frac{6}{\sin x + \sqrt{3} \cos x + 1} = 4$$

Lời giải:

$$a) \text{ PT } \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5x + \frac{1}{2} \sin 5x = -\sin 15x \Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{3} + 5x \right) = \sin(-15x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 5x = -15x + k2\pi \\ \frac{\pi}{3} + 5x = \pi + 15x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{60} + \frac{k\pi}{10} \\ x = \frac{-\pi}{15} - \frac{k\pi}{5} \end{cases}$$

$$\text{Vậy nghiệm của PT là: } x = \frac{-\pi}{60} + \frac{k\pi}{10}, x = \frac{-\pi}{15} - \frac{k\pi}{5}, (k \in \mathbb{Z})$$

b) Đặt $t = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($t \in [-2; 2], t \neq -1$) ta có

$$PT \Leftrightarrow t + \frac{6}{t+1} = 4 \Leftrightarrow t^2 + t + 6 = 4t + 4 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \text{ (tm)}$$

$$+ \text{ Với } t = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = 2 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

Vậy PT có nghiệm là: $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Ví dụ 9. Giải các phương trình sau

$$a) \sqrt{3} \sin x + \cos x = \frac{3}{\sqrt{3} \sin x + \cos x + 1} \quad b) \frac{\cos x - 2 \sin x \cdot \cos x}{2 \cos^2 x + \sin x - 1} = \sqrt{3}$$

Lời giải:

a) Đặt $t = \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ($t \neq -1, t \in [-2; 2]$) ta có:

$$PT \Leftrightarrow t = \frac{3}{t+1} \Leftrightarrow t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \text{ (tm)} \\ t = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} < -2 \text{ (loại)} \end{cases} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1 + \sqrt{13}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \arcsin \frac{-1 + \sqrt{13}}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} - \arcsin \frac{-1 + \sqrt{13}}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$b) \text{ ĐK: } 2 \cos^2 x + \sin x - 1 = -2 \sin^2 x + \sin x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1 \\ \sin x \neq \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Với điều kiện trên

$$PT \Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3} (\cos 2x + \sin x) \Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3} \sin x = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{-\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3}$$

Kết hợp điều kiện: Vậy PT có nghiệm là: $x = \frac{-\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Ví dụ 10. Giải các phương trình sau

$$a) \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1} = \frac{2}{3} (3 - \sqrt{3} \sin x) \quad b) \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x - \sqrt{3} \sin x - \cos x + 4 = 0$$

Lời giải:

a) ĐK: $\cos x \neq -1, \cos x \neq \frac{1}{2}$. Với ĐK trên:

$$PT \Leftrightarrow \frac{(1 + \cos 2x) + (\cos x + \cos 3x)}{\cos 2x + \cos x} = \frac{2}{3}(3 - \sqrt{3} \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cos^2 x + 2 \cos 2x \cdot \cos x}{\cos 2x + \cos x} = \frac{2}{3}(3 - \sqrt{3} \sin x) \Leftrightarrow \frac{2 \cos x (\cos x + \cos 2x)}{\cos x + \cos 2x} = \frac{2}{3}(3 - \sqrt{3} \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của PT là $x = k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$b) PT \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Vậy $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Ví dụ 11. Giải các phương trình sau

a) $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$

b) $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3$

Lời giải:

$$a) PT \Leftrightarrow \sin 8x - \sqrt{3} \cos 8x = \sqrt{3} \sin 6x + \cos 6x \Leftrightarrow \sin\left(8x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(6x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x - \frac{\pi}{3} = 6x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 8x - \frac{\pi}{3} = \pi - 6x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{7} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của PT là: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{7}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$b) PT \Leftrightarrow (2 \sin^2 x - 1) + \sqrt{3} \sin 2x = 2 \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Vậy nghiệm của PT là: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Ví dụ 12. Giải các phương trình sau

a) $8 \cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$

b) $\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x + 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}$

Lời giải:

a) Đk: $\sin 2x \neq 0$. Khi đó: $PT \Leftrightarrow 8 \cos x \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin x + \sqrt{3} \cos x$

$$\Leftrightarrow 4 \cos x \cdot \sin 2x = \sin x + \sqrt{3} \cos x \Leftrightarrow 2(\sin 3x + \sin x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 3x = -\sin x + \sqrt{3} \cos x \Leftrightarrow \sin 3x = \sin \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \text{ (tm)}$$

Vậy nghiệm của PT là: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, ($k \in \mathbb{Z}$).

$$\text{b) PT} \Leftrightarrow 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) + 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 13. Giải các phương trình sau

$$\text{a) } \sqrt{3}(\sin 2x + \sin x) + \cos 2x - \cos x = 2$$

$$\text{b) } 8 \sin^2 2x \cdot \cos 2x = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x$$

Lời giải:

$$\text{a) PT} \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x + \sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \Leftrightarrow \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) + \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \\ \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \pi + k2\pi \end{cases}$$

Vậy PT có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$, $x = \pi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\text{b) PT} \Leftrightarrow 4 \sin 2x \sin 4x = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x \Leftrightarrow 2(\cos 2x - \cos 6x) = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos 6x \Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos 6x \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 2x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 6x = -2x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{-\pi}{24} + \frac{k\pi}{4} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của PT là: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $x = \frac{-\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Dạng 2: Phương trình đẳng cấp bậc hai, bậc ba

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $2\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0$

b) $2\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$

Lời giải:

a) PT $\Leftrightarrow (2\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x) + (3\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(\sin x - \cos x) + 3\cos x(\sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(2\sin x + 3\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos x \\ 2\sin x = -3\cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

b) PT $\Leftrightarrow (2\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x) - (\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(\sin x - \cos x) - \cos x(\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(2\sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos x \\ 2\sin x = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau

a) $\sin^2 x - 10\sin x \cdot \cos x + 21\cos^2 x = 0$

b) $2\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$

Lời giải:

a) PT $\Leftrightarrow (\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x) - (7\sin x \cdot \cos x - 21\cos^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(\sin x - 3\cos x) - 7\cos x(\sin x - 3\cos x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 3\cos x)(\sin x - 7\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 3\cos x \\ 2\sin x = 7\cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 3 \\ \tan x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arctan(3) + k\pi \\ x = \arctan(7) + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

b) PT $\Leftrightarrow (2\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x) - (3\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(\sin x - \cos x) - 3\cos x(\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(2\sin x - 3\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos x \\ 2\sin x = 3\cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau

a) $\sin^2 x + (1 - \sqrt{3})\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

b) $3\sin^2 x + 4\sin 2x + 4\cos^2 x = 0$

Lời giải:

a) PT $\Leftrightarrow (\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x) - (\sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x (\sin x + \cos x) - \sqrt{3} \cos x (\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x) (\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\cos x \\ \sin x = \sqrt{3} \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (\text{Do } \cos x = 0 \text{ không là nghiệm}).$$

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$3 \sin^2 x + 8 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow (3 \sin^2 x + 6 \sin x \cos x) + (2 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin x (\sin x + \cos x) + 2 \cos x (\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x) (3 \sin x + 2 \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\cos x \\ 3 \sin x = -2 \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{2}{3}\right) + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau

$$\text{a) } 3 \sin^2 x + 8 \sin x \cos x + (8\sqrt{3} - 9) \cos^2 x = 0 \quad \text{b) } 3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 2$$

Lời giải:

$$\text{a) PT } \Leftrightarrow (3 \sin^2 x - 9 \cos^2 x) + (8 \sin x \cos x + 8\sqrt{3} \cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 (\sin x + \sqrt{3} \cos x) (\sin x - \sqrt{3} \cos x) + 8 \cos x (\sin x + \sqrt{3} \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \sqrt{3} \cos x) (3 \sin x - (3\sqrt{3} - 8) \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\sqrt{3} \cos x \\ 3 \sin x = (3\sqrt{3} - 8) \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -\sqrt{3} \\ \tan x = \sqrt{3} - \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \arctan\left(\sqrt{3} - \frac{8}{3}\right) + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(Do $\cos x = 0$ không là nghiệm)

$$\text{b) PT } \Leftrightarrow 3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 2 (\sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x - \sin x \cos x) - (3 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x (\sin x - \cos x) + 3 \cos x (\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x) (\sin x + 3 \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos x \\ \sin x = -3 \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-3) + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau

$$\text{a) } 4 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 4 \quad \text{b) } \cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 + \sin^2 x$$

Lời giải:

$$\text{a) PT } \Leftrightarrow 4 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 4 (\sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sqrt{3} \sin x = 2 \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$b) \text{ PT } \Leftrightarrow \cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x \Leftrightarrow -\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x = \sin^2 x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -\sqrt{3} \cos x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ \tan x = -\sqrt{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau

$$a) 4 \sin x + 6 \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$b) 4 \sin x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4 \sin^2(x + \pi) + 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cos(\pi + x) = 1$$

Lời giải:

$$a) \text{ ĐK: } \cos x \neq 0$$

$$\text{PT } \Leftrightarrow 4 \sin x \cdot \cos x + 6 \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x - 5 \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin x - 5 \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(5) + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$b) \text{ PT } \Leftrightarrow 4 \sin^2 x + 4 \sin^2 x + 2(-\cos x)(-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow 7 \sin^2 x + \cos^2 x = 0 \text{ (VN)}$$

Ví dụ 7. Giải các phương trình sau

$$a) \sin x - 4 \sin^3 x + \cos x = 0$$

$$b) 2 \sin^3 x = \cos x$$

Lời giải:

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x) - 4 \sin^3 x = 0 \Leftrightarrow -3 \sin^3 x + \cos^3 x + \sin x \cdot \cos^2 x + \sin^2 x \cdot \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(3 \sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos x \\ 2 \sin^2 x + (\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + (\sin x + \cos x)^2 = 0 \text{ (L)}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$b) \text{ PT } \Leftrightarrow 2 \sin^3 x = \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow 2 \sin^3 x - \sin^2 x \cdot \cos x - \cos^3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(\text{Do } \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x > 0)$$

Ví dụ 8. Giải các phương trình sau

$$a) 2 \cos^3 x = \sin 3x$$

$$b) 4 \cos^3 x + 2 \sin^3 x - 3 \sin x = 0$$

Lời giải:

$$a) \text{ Ta có } 2 \cos^3 x = \sin 3x \Leftrightarrow 2 \cos^3 x = \sin x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) + 2 \cos^2 x (\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x) (\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2 \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow -(\cos x - \sin x)^2 (\sin x + 2 \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \sin x + \frac{2}{\sqrt{5}} \cos x \right) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos(x - \alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \cos(x - \alpha) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + \alpha + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vậy phương trình có họ nghiệm: } x = \frac{\pi}{2} + \alpha + k\pi, \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$b) 4 \cos^3 x + 2 \sin^3 x - 3 \sin x = 0 \Leftrightarrow 4 \cos x - 4 \cos x \cdot \sin^2 x + 2 \sin x - 2 \sin x \cdot \cos^2 x - 3 \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos x - \sin x - 4 \cos x \cdot \sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x) - 4 \cos x \cdot \sin x (\sin x - \cos x) + 3 \cos x (1 - 2 \sin x \cdot \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x) (1 + \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow (\cos x - \sin x) (4 \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 9. Giải các phương trình sau

$$a) \sin x \cdot \sin 2x + \sin 3x = 6 \cos^3 x$$

$$b) \cos^3 x - \sin^3 x = \cos x + \sin x$$

Lời giải:

$$a) \sin x \cdot \sin 2x + \sin 3x = 6 \cos^3 x \Leftrightarrow 2 \sin^2 x \cos x + 3 \sin x - 4 \sin^3 x = 6 \cos x (1 - \sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 8 \sin^2 x \cdot \cos x - 6 \cos x - 4 \sin^3 x + 3 \sin x = 0 \Leftrightarrow (2 \cos x - \sin x) (4 \sin^2 x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{5}} \sin x \right) (-1 - 2 \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x + \alpha) (1 + 2 \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x + \alpha) = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ với } \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Vậy phương trình có họ nghiệm } x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k\pi, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$b) \cos^3 x - \sin^3 x = \cos x + \sin x \Leftrightarrow (\cos x - \sin x) (\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x) = \cos x + \sin x$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x) (1 + \sin x \cdot \cos x) = \cos x + \sin x \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos^2 x - \sin x (1 + \sin x \cdot \cos x) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x (2 + \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow \sin x (2 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 10. Giải các phương trình sau

a) $6 \sin x - 2 \cos^3 x = 5 \sin 2x \cdot \cos x$

b) $\cos^3 x + \sin x - 3 \sin^2 x \cdot \cos x = 0$

Lời giải:

a) $6 \sin x - 2 \cos^3 x = 5 \sin 2x \cdot \cos x \Leftrightarrow \cos^3 x + 5 \sin x \cdot \cos^2 x - 3 \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x (1 - \sin^2 x) + 5 \sin x \cdot \cos^2 x - 3 \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x - \cos x \cdot \sin^2 x + \sin x \cdot \cos^2 x + 4 \sin x \cdot \cos^2 x - 2 \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x) (1 + 3 \cos x \cdot \sin x + 2 \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow (\cos x - \sin x) (\cos^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x + 3 \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

b) $\cos^3 x + \sin x - 3 \sin^2 x \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x (-2 \sin x \cdot \cos x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x (\cos x - \sin x) (\cos x + \sin x) - \sin x (\cos x - \sin x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x) (\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 11. Giải các phương trình sau

a) $\cos^3 x - 4 \sin^3 x - 3 \cos x \cdot \sin^2 x + \sin x = 0$

b) $4 \sin^3 x + 3 \cos^3 x - 3 \sin x - \sin^2 x \cos x = 0$

Lời giải:

a) $\cos^3 x - 4 \sin^3 x - 3 \cos x \cdot \sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x - 3 \sin x + 4 \sin x \cdot \cos^2 x - 4 \sin^2 x \cdot \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow -3 \cos x - 3 \sin x + 4 \sin x \cdot \cos x (\sin x + \cos x) - 8 \sin^2 x \cdot \cos x + 4 \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) (-3 + 4 \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) (2 \cos 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

b) $4 \sin^3 x + 3 \cos^3 x - 3 \sin x - \sin^2 x \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 4 \sin x (1 - \cos^2 x) + 3 \cos x (1 - \sin^2 x) - 3 \sin x - \sin^2 x \cdot \cos x = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sin x - 4 \sin x \cdot \cos^2 x + 3 \cos x - 4 \sin^2 x \cdot \cos x = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sin x - \cos x) + 4 \sin x \cos x (\sin x - \cos x) - 8 \sin^2 x \cos x + 4 \cos x = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 - 4 \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)(2 \cos 2x + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Ví dụ 12. Giải các phương trình sau

$$a) \tan x \cdot \sin^2 x - 2 \sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cos x) \quad b) 2 \sin x + 2\sqrt{3} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$$

Lời giải:

a) Điều kiện: $\cos x \neq 0$

$$\tan x \cdot \sin^2 x - 2 \sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow \sin^3 x - 2 \sin^2 x \cdot \cos x - 3 \sin x \cdot \cos^2 x - 3 \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x + \sin^2 x \cdot \cos x - 3 \sin^2 x \cdot \cos x - 3 \sin x \cdot \cos^2 x - 3 \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - 3 \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)(2 \cos 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$)

$$b) 2 \sin x + 2\sqrt{3} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} \quad (\sin x, \cos x \neq 0)$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cdot \cos x (\sin x + \sqrt{3} \cos x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x \Leftrightarrow 2 \sin^2 x \cdot \cos x + 2\sqrt{3} \sin x \cdot \cos^2 x - \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2 \sin^2 x - 1) + \sqrt{3} \sin x (2 \cos^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x (-\cos x + \sqrt{3} \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$)

Ví dụ 13. Giải các phương trình sau

$$a) 4\sin^3 x \cdot \cos 3x + 4\cos^3 x \cdot \sin 3x + 3\sqrt{3} \cos 4x = 3 \quad b) \sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \sin^3 4x$$

Lời giải:

$$a) 4\sin^3 x \cdot \cos 3x + 4\cos^3 x \cdot \sin 3x + 3\sqrt{3} \cos 4x = 3$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 x \cdot \cos x (4\cos^2 x - 3) + 4\cos^3 x \cdot \sin x (3 - 4\sin^2 x) + 3\sqrt{3} \cos 4x = 3$$

$$\Leftrightarrow 12\sin x \cdot \cos x (-\sin^2 x + \cos^2 x) + 3\sqrt{3} \cos 4x = 3 \Leftrightarrow 2\sin 2x \cdot \cos 2x + \sqrt{3} \cos 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x + \sqrt{3} \cos 4x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vậy phương trình có họ nghiệm } x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

$$b) \text{ Ta có } \sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \sin^3 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x \cdot \cos x (4\cos^2 x - 3) + \cos^3 x \cdot \sin x (3 - 4\sin^2 x) = \sin^3 4x$$

$$\Leftrightarrow 3\sin x \cdot \cos x (-\sin^2 x + \cos^2 x) = 4\sin^3 4x \Leftrightarrow \frac{3}{2} \sin 4x = 4\sin^3 4x \Leftrightarrow 2\sin 4x \left(2\sin^2 x - \frac{3}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x \left(\frac{1}{4} - \cos 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{4} \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vậy phương trình có họ nghiệm } x = k\frac{\pi}{4}, x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

Dạng 3: Phương trình đối xứng

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

$$a) 2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$$

$$b) \sin x \cdot \cos x = 6(\sin x - \cos x - 1)$$

Lời giải:

$$a) 2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x) + 2\sin x \cdot \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x + 2) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot (\sin x + \cos x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin x + \cos x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \\ \sin x = \cos x = -1 \text{ (do } \sin x \geq -1, \cos x \geq -1) \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình có họ nghiệm } x = \frac{3\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$b) \sin x \cdot \cos x = 6(\sin x - \cos x - 1) \Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos x - 1 = 12(\sin x - \cos x) - 13$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)^2 - 12(\cos x - \sin x) - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = -1 \\ \cos x - \sin x = 13 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = -\pi + k2\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$)

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau

a) $\sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

b) $\tan x - 2\sqrt{2} \sin x = 1$

Lời giải:

a) $\sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)^2 - \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left(\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

b) ĐK: $\cos x \neq 0$

Ta có: $\tan x - 2\sqrt{2} \sin x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - 2\sqrt{2} \sin x = 1 \Rightarrow \sin x - 2\sqrt{2} \sin x \cdot \cos x - \cos x = 0$

$$\Rightarrow \sin x - \cos x + \sqrt{2} \left[(\sin x - \cos x)^2 - 1 \right] = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \left(\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \right) \left(2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{-11\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$, $x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi$, $x = \frac{-11\pi}{12} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau

a) $1 + \tan x = 2 \sin x + \frac{1}{\cos x}$

b) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\cot x}$

Lời giải:

a) ĐK: $\cos x \neq 0$

$$1 + \tan x = 2 \sin x + \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x - \sin x = 2 \sin x \cdot \cos x + 1$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)^2 - (\cos x - \sin x) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 2 \\ \cos x - \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \text{ (loại)} \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = -\pi + k2\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$)

b) ĐK: $\sin x, \cos x \neq 0$

$$\text{Ta có: } \sin x + \cos x = \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\cot x} \Rightarrow (\sin x + \cos x) \sin x \cdot \cos x = \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin x \cdot \cos x - \sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x \cdot \cos x - \sin x + \cos x = 0 \end{cases}$$

• Xét $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

• Xét $\sin x \cdot \cos x - \sin x + \cos x = 0$. Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Khi đó $t^2 = 1 - 2 \sin x \cdot \cos x \Rightarrow$ phương trình có dạng: $(1 - t^2) - 2t = 0 \Leftrightarrow t = -1 \pm \sqrt{2}$

Đổi chiếu điều kiện $|t| \leq \sqrt{2} \rightarrow t = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sin \alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \alpha + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \alpha + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} - \alpha + k2\pi \end{cases}$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau

a) $\sin x + \frac{1}{\sin x} + \cos x + \frac{1}{\cos x} = \frac{10}{3}$

b) $2 \sin x + \cot x = 2 \sin 2x + 1$

Lời giải:

a) ĐK: $\sin x \cdot \cos x \neq 0$

$$\sin x + \frac{1}{\sin x} + \cos x + \frac{1}{\cos x} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow (\sin x + \cos x) + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow 3(\sin x + \cos x)(\sin x \cdot \cos x + 1) - 10 \sin x \cdot \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(\sin x + \cos x)[(\sin x + \cos x)^2 + 1] - 5(\sin x + \cos x)^2 + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(\sin x + \cos x)^3 - 10(\sin x + \cos x)^2 + 3(\cos x + \sin x) + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x - 2)[3(\sin x + \cos x)^2 - 4(\sin x + \cos x) - 5] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 2 \text{ (loại do } \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}) \\ 3(\sin x + \cos x)^2 - 4(\sin x + \cos x) - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = \frac{2 + \sqrt{19}}{3} > 1 \\ \sin x + \cos x = \frac{2 - \sqrt{19}}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 + \sqrt{19}}{3\sqrt{2}} > 1 \text{ (loại)} \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 - \sqrt{19}}{3\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{2 - \sqrt{19}}{3\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{) (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = \pm \arccos \frac{2 - \sqrt{19}}{3\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}$

b) ĐK: $\sin x \neq 0$

$$2\sin x + \cot x = 2\sin 2x + 1 \Leftrightarrow 2\sin x + \frac{\cos x}{\sin x} - 4\sin x \cdot \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \cos x - 4\sin^2 x \cdot \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x - 2\sin x \cdot \cos x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)[1 - 2\sin x \cdot \cos x - (\cos x - \sin x) - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)[(\cos x - \sin x)^2 - (\cos x - \sin x) - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)\left[2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{4} > 1 \text{ (loại)} \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{10} + \sqrt{2}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pm \arccos \frac{-\sqrt{10} + \sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}$$

Vậy phương trình có họ nghiệm

$$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, x = \pm \arccos \frac{-\sqrt{10} + \sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}$$

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau

a) $\sin^3 x + \cos^3 x = 2\sin x \cdot \cos x + \sin x + \cos x$ b) $1 - \sin^3 x + \cos^3 x = \sin 2x$

Lời giải:

a) Phương trình đã cho tương đương với $\sin^3 x + \cos^3 x = 2\sin x \cdot \cos x + \sin x + \cos x$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cdot \cos x) = \sin x + \cos x + 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x (\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos x (\sin x + \cos x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \text{ (do } \sin x + \cos x \geq -\sqrt{2}) \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}$$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = k\frac{\pi}{2} \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}$

$$b) 1 - \sin^3 x + \cos^3 x = \sin 2x \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x) + 1 - 2 \sin x \cos x = 0$$

$$(\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x) + (\cos x - \sin x)^2 = 0 \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x + \cos x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)(1 + \sin x \cos x + \cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 & (1) \\ (1 + \sin x \cos x + \cos x - \sin x) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1)} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Giải (2)} \Leftrightarrow 3 - 1 + 2 \sin x \cos x + 2(\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow 3 - (\cos x - \sin x)^2 + 2(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 1 \\ \cos x - \sin x = -3 \text{ (loại do } \cos x - \sin x \geq -2) \end{cases} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vậy phương trình có họ nghiệm } x = k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau

$$a) \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x$$

$$b) (1 + \sin x)(1 + \cos x) = 2$$

Lời giải:

$$a) \text{ĐK: } \sin x \cos x \neq 0$$

$$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x \Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \sin x \cos x (\sin x + \cos x) = 1 \Leftrightarrow [(\sin x + \cos x)^2 - 1](\sin x + \cos x) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^3 - (\sin x + \cos x) - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x - \sqrt{2})[(\sin x + \cos x)^2 + \sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vậy phương trình có họ nghiệm } x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$b) (1 + \sin x)(1 + \cos x) = 2 \Leftrightarrow \sin x + \cos x + \sin x \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x) + 2 \sin x \cos x + 1 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} < 0 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = k2\pi$, $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Ví dụ 7. Giải các phương trình sau

a) $3(\cot x - \cos x) - 5(\tan x - \sin x) = 2$ b) $\sin x \cos x + |\sin x + \cos x| = 1$

Lời giải:

a) ĐK: $\sin x \cos x \neq 0$

$$3(\cot x - \cos x) - 5(\tan x - \sin x) = 2 \Leftrightarrow 3\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x\right) - 5\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x\right) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x + 1\right) - 5\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(\cos x - \sin x \cos x + \sin x)}{\sin x} - \frac{5(\sin x - \sin x \cos x + \cos x)}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x \cos x + \sin x) \left(\frac{3}{\sin x} - \frac{5}{\cos x} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x \cos x + \sin x = 0 & (1) \\ \frac{3}{\sin x} - \frac{5}{\cos x} = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải: (1) $\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow -2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)} \text{ (thỏa mãn)}$$

Giải: (2) $\Rightarrow \tan x = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \arctan \frac{3}{5} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = \pm \arccos \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} + k2\pi$, $x = \arctan \frac{3}{5} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

b) $\sin x \cos x + |\sin x + \cos x| = 1 \Leftrightarrow 2|\sin x + \cos x| + 2\sin x \cos x + 1 - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2|\sin x + \cos x| + |\sin x + \cos x|^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|^2 + 2\sqrt{2}\left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = -\frac{3\sqrt{2}}{2} < 0 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}$$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = k\pi$, $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Ví dụ 8. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{2} \sin 2x (\sin x + \cos x) = 2$ b) $|\sin x - \cos x| + 4 \sin 2x = 1$

Lời giải:

a) Ta có: $\sqrt{2} \sin 2x (\sin x + \cos x) = 2$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x (\sin x + \cos x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left[(\sin x + \cos x)^2 - 1 \right] (\sin x + \cos x) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^3 - (\sin x + \cos x) - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x - \sqrt{2}) \left[(\sin x + \cos x)^2 + \sqrt{2} (\sin x + \cos x) + 1 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

b) $|\sin x - \cos x| + 4 \sin 2x = 1 \Leftrightarrow |\sin x - \cos x| + 8 \sin x \cos x - 4 + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow -4|\sin x - \cos x|^2 + |\sin x - \cos x| + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |\sin x - \cos x| = 1 \\ |\sin x - \cos x| = -\frac{3}{4} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \left| \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = k\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 9. Giải các phương trình sau

a) $2 \sin 2x - 3\sqrt{3} |\sin x + \cos x| + 8 = 0$

b) $(\sin x - \cos x)^2 - (\sqrt{2} + 1)(\sin x - \cos x) + \sqrt{2} = 0$

Lời giải:

a) PT $\Leftrightarrow 2(1 + \sin 2x) - 3\sqrt{3} |\sin x + \cos x| + 6 = 0 \Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x)^2 - 3\sqrt{3} |\sin x + \cos x| + 6 = 0$

Đặt $t = |\sin x + \cos x| (0 \leq t \leq \sqrt{2})$ ta có: $2t^2 - 3\sqrt{3}t + 6 = 0$ (vn)

Vậy PT vô nghiệm

b) Đặt $t = (\sin x - \cos x) (|t| \leq \sqrt{2})$ ta có: $t^2 - (1 + \sqrt{2})t + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \sqrt{2} \end{cases}$

+ Với $t = 1$ ta có: $\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}$

+ Với $t = \sqrt{2}$ ta có: $\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$

Vậy nghiệm của PT là: $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 10. Giải các phương trình sau

a) $\tan x - 3 \cot x = 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x)$

b) $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$

Lời giải:

a) Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$

Khi đó PT $\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{3 \cos x}{\sin x} = 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x)$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)(\sin x - \sqrt{3} \cos x)}{\sin x \cos x} = 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin 2x & (1) \\ \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\bullet (1) \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \frac{4\pi}{3} - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \text{ (tm)}$$

$$\bullet (2) \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \text{ (tm)}$$

Vậy nghiệm của PT là: $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{4\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}$

b) PT $\Leftrightarrow \cos 2x + 5 = 4(\sin x - \cos x) + 2(\cos^2 x + \sin x \cos x)$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 4 = 4(\sin x - \cos x) + 2 \cos^2 x + \sin 2x \Leftrightarrow 4 + 4(\sin x - \cos x) = \sin 2x$$

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left(|t| \leq \sqrt{2}\right) \Rightarrow t^2 = 1 - \sin 2x$

$$\text{Khi đó PT} \Rightarrow 4 + 4t = 1 - t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \text{ (loại)} \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

Vậy nghiệm của PT là: $x = k2\pi, x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$

Ví dụ 11. Giải các phương trình sau

a) $2 \sin x + \cot x = 2 \sin 2x + 1$

b) $\cos 2x = \cos^3 x + \sin^3 x$

Lời giải:

a) Điều kiện; $\sin x \neq 0$

Khi đó PT $\Leftrightarrow 2 \sin x + \frac{\cos x}{\sin x} = 2 \sin 2x + 1 \Leftrightarrow (2 \sin x - 1) = \frac{\cos x}{\sin x} (4 \sin^2 x - 1)$

$$\Leftrightarrow (2 \sin x - 1) \left[1 - \frac{\cos x}{\sin x} (2 \sin x + 1) \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x - \sin 2x - \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ (\sin x - \cos x) - 2 \sin x \cos x = 0 \text{ (*)} \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow (\sin x - \cos x) + (\sin x - \cos x)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ \sin x - \cos x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{-3\pi}{4} \pm \arccos \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{2}} + k2\pi$$

$$\text{b) PT} \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = (\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - 1 + \sin x \cos x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)[\cos x(\sin x + 1) - (\sin x + 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin x + 1)(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm

Ví dụ 12. Giải các phương trình sau

$$\text{a) } 3(\tan x + \cot x) = 2(2 + \sin 2x)$$

$$\text{b) } \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{5}{2}(\tan x + \cot x) + 1 = 0$$

Lời giải:

$$\text{a) ĐK: } \sin 2x \neq 0$$

$$\text{Khi đó PT} \Leftrightarrow 3\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = 2(2 + \sin 2x) \Leftrightarrow \frac{3}{\sin x \cos x} = 2(2 + \sin 2x)$$

$$\text{+) Đặt } \sin 2x = t \text{ ta có } \frac{3}{t} = 2 + t \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{+) Với } t = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{b) ĐK: } \sin 2x \neq 0. \text{ Khi đó PT} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} + 1 = 0$$

$$\text{+) Đặt } t = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} \Rightarrow t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = 2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{+) Với } \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Vậy $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ là nghiệm của phương trình

Ví dụ 13. Giải các phương trình sau

$$\text{a) } \tan^2 x + \cot^2 x + 3(\tan x - \cot x) = 6$$

$$\text{b) } 2(1 - \sin x - \cos x) + \tan x + \cot x = 0$$

Lời giải:

a) ĐK: $\sin 2x \neq 0$. Khi đó PT $\Leftrightarrow (\tan x - \cot x)^2 + 2 + 3(\tan x - \cot x) = 6$

Đặt $t = \tan x - \cot x$ ta có $t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -4 \end{cases}$

+) Với $t = -1$ ta có: $\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = -2 \cot 2x = -1 \Leftrightarrow \cot 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\arctan 2 + k\pi}{2}$

+) Với $t = -4 \Rightarrow \tan 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\arctan \frac{1}{2} + k\pi}{2}$

b) ĐK: $\sin 2x \neq 0$. Khi đó PT $\Leftrightarrow 2 - 2(\sin x + \cos x) + \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = 0$

Đặt $t = \sin x + \cos x$ ($|t| \leq \sqrt{2}$) ta có: $\sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2} \Rightarrow 2 - 2t + \frac{2}{t^2 - 1} = 0$

$$\Leftrightarrow -2t^3 + 2t + 2t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{1 - \sqrt{5}}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{1 - \sqrt{5}}{4} + k2\pi \end{cases}$$

Ví dụ 14. Giải các phương trình sau

a) $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^3 - \sqrt{2} \sin x + \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} - 2\sqrt{2} = 0$

b) $\frac{1}{2}(\sin 3x + \cos 3x) + 1 + \frac{1}{2}\left(\tan 3x + \cot 3x + \frac{1}{\sin 3x} + \frac{1}{\cos 3x}\right) = 0$

Lời giải:

a) Ta có: $\sqrt{2} + \sqrt{2} \sin x = \sqrt{2}\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2$. Đặt $t = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = \sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ ($|t| \leq \sqrt{2}$)

Khi đó: PT $\Leftrightarrow t^3 - \sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (t^2 + 1)(t - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k4\pi$$

b) ĐK: $\sin 6x \neq 0$. Khi đó PT $\Leftrightarrow \sin 3x + \cos 3x + 2 + \frac{1}{\sin 3x \cdot \cos 3x} + \frac{\sin 3x + \cos 3x}{\sin 3x \cdot \cos 3x} = 0$

Đặt $t = \sin 3x + \cos 3x$ ($|t| \leq \sqrt{2}$) $\Rightarrow \sin 3x \cdot \cos 3x = \frac{t^2 - 1}{2}$

$$\text{PT} \Rightarrow t + 2 + \frac{2}{t^2 - 1} + \frac{2t}{t^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow (t + 2)(t - 1) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -1 \end{cases}$$

+) Với $t = 0 \Leftrightarrow \sin 3x + \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \tan 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{3}$

+) Với $t = -1 \Rightarrow \sin 3x \cdot \cos 3x = 0$ (loại)

Vậy nghiệm của PT là: $x = -\frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{3}$

Ví dụ 15. Giải các phương trình sau

a) $\frac{1}{\cos^2 2x} + 2 \tan 2x + \frac{1}{\sin^2 2x} + 2 \cot 2x - 8 = 0$ b) $\tan^4 x + \cot^4 x - 8(\tan x - \cot x)^2 + 9 = 0$

Lời giải:

a) ĐK: $\sin 4x \neq 0$. Khi đó PT $\Leftrightarrow \tan^2 2x + 2 \tan 2x + \cot^2 2x + 2 \cot 2x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow (\tan 2x + \cot 2x)^2 + 2(\tan 2x + \cot 2x) - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan 2x + \cot 2x = -4 \\ \tan 2x + \cot 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sin 2x \cdot \cos 2x} = -4 \\ \frac{1}{\sin 2x \cdot \cos 2x} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = -\frac{1}{2} \text{ (tm)} \\ \sin 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

b) Ta có: $\tan^4 x + \cot^4 x = (\tan^2 x + \cot^2 x)^2 - 2 = [(\tan x + \cot x)^2 - 2]^2 - 2$. ĐK: $\sin 2x \neq 0$

Đặt $t = (\tan x + \cot x)^2 \geq 4$. $\tan x \cdot \cot x = 1$, ta có $(t-2)^2 - 2 - 8t + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (loại)} \\ t = 11 \end{cases}$

+) Với $t = 11 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin x \cdot \cos x}\right)^2 = 11 \Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{4}{11} \Leftrightarrow \sin 2x = \pm \frac{2}{\sqrt{11}}$ (tm)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(\arcsin \frac{\pm 2}{\sqrt{11}} + k2\pi \right) \\ x = \frac{1}{2} \left(\pi - \arcsin \frac{\pm 2}{\sqrt{11}} + k2\pi \right) \end{cases} \text{ . Vậy PT có 4 họ nghiệm như trên.}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\cos 2x - \sin 2x = 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\frac{\pi}{4} \in S$ B. $\frac{\pi}{2} \in S$ C. $\frac{3\pi}{4} \in S$ D. $\frac{5\pi}{4} \in S$

Câu 2. Số nghiệm của phương trình $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{3}$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 3. Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \sin^2 x$ trên khoảng $(0; 2\pi)$.

- A. $T = \frac{7\pi}{8}$ B. $T = \frac{21\pi}{8}$ C. $T = \frac{11\pi}{4}$ D. $T = \frac{3\pi}{4}$

Câu 4. Tìm tập nghiệm dương nhỏ nhất của x_0 của phương trình $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$.

A. $x_0 = \frac{\pi}{2}$

B. $x_0 = \frac{\pi}{18}$

C. $x_0 = \frac{\pi}{24}$

D. $x_0 = \frac{\pi}{54}$

Câu 5. Số nghiệm của phương trình $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = 2\sin 7x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là?

A. 2

B. 1

C. 3

D. 4

Câu 6. Gọi x_0 là nghiệm âm lớn nhất của $\sin 9x + \sqrt{3}\cos 7x = \sin 7x + \sqrt{3}\cos 9x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{12}; 0\right)$

B. $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{12}\right]$

C. $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}\right]$

D. $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]$

Câu 7. Biến đổi phương trình $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$ về dạng $\sin(ax + b) = \sin(cx + d)$ với b, d thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Tính $b + d$

A. $b + d = \frac{\pi}{12}$

B. $b + d = \frac{\pi}{4}$

C. $b + d = -\frac{\pi}{3}$

D. $b + d = \frac{\pi}{2}$

Câu 8. Hàm số $y = \frac{2\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x - \cos 2x + 3}$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Câu 9. Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + \sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{12}\right)$

B. $x_0 \in \left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6}\right]$

C. $x_0 \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$

D. $x_0 \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$

Câu 10. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\left\{\frac{\pi}{3}; \pi\right\} \subset S$

B. $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right\} \subset S$

C. $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{12}\right\} \subset S$

D. $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right\} \subset S$

Câu 11. Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình $\sin^2 x + (\sqrt{3} + 1)\sin x \cdot \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = \sqrt{3}$.

A. $\sin x = 0$

B. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

C. $(\cos x - 1)\left(\tan x - \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}\right) = 0$

D. $(\tan x + 2 + \sqrt{3})(\cos^2 x - 1) = 0$

Câu 12. Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x = 1$?

A. $\cos x (\cot^2 x - 3) = 0$

B. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \left[\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 - \sqrt{3} \right] = 0$

C. $\left[\cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \right] (\tan x - \sqrt{3}) = 0$

D. $(\sin x - 1)(\cot x - \sqrt{3}) = 0$

Câu 13. Cho phương trình $\cos^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x + 1 = 0$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $x = k\pi$ không là nghiệm của phương trình.

B. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ thì ta được phương trình $\tan^2 x - 3 \tan x + 2 = 0$.

C. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\sin^2 x$ thì ta được phương trình $2 \cot^2 x + 3 \cot x + 1 = 0$.

D. Phương trình đã cho tương đương với $\cos 2x - 3 \sin 2x + 3 = 0$.

Câu 14. Số vị trí biểu diễn các nghiệm phương trình $\sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x + 4 \cos^2 x = 5$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

Câu 15. Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x + 2 \sin^2 x = 0$ trên $(-2\pi; 2\pi)$?

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

Câu 16. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $4 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x = 4$ là

A. $\frac{\pi}{12}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{3}$

Câu 17. Cho phương trình $(\sqrt{2} - 1) \sin^2 x + \sin 2x + (\sqrt{2} + 1) \cos^2 x - \sqrt{2} = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $x = \frac{7\pi}{8}$ là một nghiệm của phương trình.

B. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ thì ta được phương trình $\tan^2 x - 2 \tan x - 1 = 0$.

C. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\sin^2 x$ thì ta được phương trình $\cot^2 x + 2 \cot x - 1 = 0$.

D. Phương trình đã cho tương đương với $\cos 2x - \sin 2x = 1$.

Câu 18. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $2 \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cdot \cos x + (1 - \sqrt{3}) \cos^2 x = 1$ là

A. $-\frac{\pi}{6}$

B. $-\frac{\pi}{4}$

C. $-\frac{2\pi}{3}$

D. $-\frac{\pi}{12}$

Câu 19. Giải phương trình $\sin x \cdot \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Câu 20. Cho phương trình $3\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 2\sin 2x + 4 = 0$. Đặt $t = \sin x + \cos x$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $2t^2 + 3\sqrt{2}t + 2 = 0$

B. $4t^2 + 3\sqrt{2}t + 4 = 0$

C. $2t^2 + 3\sqrt{2}t - 2 = 0$

D. $4t^2 + 3\sqrt{2}t - 4 = 0$

Câu 21. Cho phương trình $5\sin 2x + \sin x + \cos x + 6 = 0$. Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình đã cho?

A. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\tan x = 1$

D. $1 + \tan^2 x = 0$

Câu 22. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\sin x + \cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$ là

A. $-\frac{\pi}{2}$

B. $-\pi$

C. $-\frac{3\pi}{2}$

D. -2π

Câu 23. Từ phương trình $5\sin 2x - 16(\sin x - \cos x) + 16 = 0$, ta tìm được $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ có giá trị bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. 1

D. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 24. Cho x thỏa mãn $6(\sin x - \cos x) + \sin x \cdot \cos x + 6 = 0$. Tính $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

A. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

B. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

C. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

D. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 25. Từ phương trình $(1 + \sqrt{3})(\cos x + \sin x) - 2\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3} - 1 = 0$, nếu ta đặt $t = \cos x + \sin x$ thì giá trị của t nhận được là

A. $t = 1$ hoặc $t = \sqrt{2}$

B. $t = 1$ hoặc $t = \sqrt{3}$

C. $t = 1$

D. $t = \sqrt{3}$

Câu 26. Nếu $(1 + \sqrt{5})(\sin x - \cos x) + \sin 2x - 1 - \sqrt{5} = 0$ thì $\sin x$ bằng bao nhiêu?

A. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sin x = -1$ hoặc $\sin x = 0$

D. $\sin x = 0$ hoặc $\sin x = 1$

Câu 27. Nếu $(1 + \sin x)(1 + \cos x) = 2$ thì $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ bằng bao nhiêu?

A. -1

B. 1

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 28. Từ phương trình $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x$, ta tìm được $\cos x$ có giá trị bằng

- A. 1 B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. -1

Câu 29. Từ phương trình $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$, ta tìm được $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ có giá trị bằng

- A. 1 B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 30. Tính tổng các nghiệm của phương trình $(2 \cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 3 = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$

- A. $\frac{11\pi}{6}$ B. 4π C. 5π D. $\frac{7\pi}{6}$

Câu 31. Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ trên khoảng $(0; 3\pi)$ bằng

- A. 4 B. 1 C. 3 D. 2

Câu 32. Số nghiệm của phương trình $\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2 \sin 7x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là

- A. 4 B. 1 C. 3 D. 2

Câu 33. Khi đặt $t = \tan x$ thì phương trình $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x - 2 \cos^2 x = 1$ trở thành phương trình nào sau đây?

- A. $2t^2 - 3t - 1 = 0$ B. $3t^2 - 3t - 1 = 0$ C. $2t^2 + 3t - 3 = 0$ D. $t^2 + 3t - 3 = 0$

Câu 34. Cho x thỏa mãn $2 \sin 2x - 3\sqrt{6}|\sin x + \cos x| + 8 = 0$. Tính $\sin 2x$

- A. $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ B. $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sin 2x = \frac{1}{2}$ D. $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 35. Hỏi trên đoạn $[0; 2018\pi]$, phương trình $|\sin x - \cos x| + 4 \sin 2x = 1$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 4037 B. 4036 C. 2018 D. 2019

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ có M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của y.

Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $M^2 - m^2 = -3$ B. $M^2 - m^2 = -\frac{3}{4}$ C. $M^2 - m^2 = 3$ D. $M^2 - m^2 = 2$

Câu 37. Phương trình $\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x = 1$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 3\pi]$?

- A. 7 B. 6 C. 4 D. 5

Câu 38. Gọi M và N là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{\cos x + 1}{2 \sin x + 4}$.

Giá trị $M + N$ bằng

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

Câu 39. Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $3\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$. Chọn khẳng định đúng?

A. $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

B. $x_0 \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

C. $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

D. $x_0 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

Câu 40. Cho x_0 là nghiệm của phương trình $\sin x \cdot \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$. Khi đó, giá trị của $P = 3 + \sin 2x_0$ là

A. $P = 3$

B. $P = 2$

C. $P = 0$

D. $P = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 41. Số nghiệm thuộc đoạn của phương trình $2(\sin 3x - \sqrt{3}\sin^2 2x + \sin x) = \sin 4x$ trên khoảng $(0; 2\pi)$ là

A. 6

B. 8

C. 7

D. 9

Câu 42. Số nghiệm của phương trình $\frac{\sin x \cdot \sin 2x + 2\sin x \cdot \cos^2 x + \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} \cos 2x$ trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là

A. 3

B. 2

C. 4

D. 5

Câu 43. Cho phương trình $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin 3x$. Gọi x_1, x_2 lần lượt là nghiệm lớn nhất và nghiệm nhỏ nhất của phương trình đã cho trong đoạn $[0; 2018\pi]$. Tính tổng $x_1 + x_2$

A. $\frac{12109\pi}{6}$

B. $\frac{12111\pi}{6}$

C. $\frac{12107\pi}{6}$

D. $\frac{12103\pi}{6}$

Câu 44. Cho phương trình $\frac{\cos 4x - \cos 2x + 2\sin^2 x}{\cos x + \sin x} = 0$. Tính diện tích đa giác có các đỉnh là các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

D. $\sqrt{2}$

Câu 45. Cho phương trình $3\sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$ (1). Gọi (H) là hình tạo bởi các điểm biểu diễn nghiệm của (1) trên đường tròn lượng giác. Tính diện tích hình (H)

A. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

C. $1+\sqrt{2}$

D. $\sqrt{2}(1+\sqrt{2})$

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2m$ vô nghiệm

A. 21

B. 20

C. 18

D. 9

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x + \sin x = \sqrt{2}(m^2 + 1)$ vô nghiệm

A. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ B. $m \in [-1; 1]$ C. $m \in (-\infty; +\infty)$ D. $m \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình $(m+1)\sin x - m\cos x = 1 - m$ có nghiệm

A. 21

B. 20

C. 18

D. 11

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình $(m+1)\sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$ có nghiệm.

A. 4037

B. 4036

C. 2019

D. 2020

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\tan x + m \cot x = 8$ có nghiệm

A. $m > 16$ B. $m < 16$ C. $m \geq 16$ D. $m \leq 16$

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1-C	2-C	3-C	4-B	5-D	6-A	7-D	8-A	9-B	10-B
11-D	12-B	13-C	14-C	15-D	16-B	17-D	18-B	19-B	20-A
21-D	22-C	23-D	24-C	25-C	26-D	27-C	28-B	29-D	30-B
31-C	32-A	33-D	34-C	35-A	36-A	37-B	38-C	39-C	40-A
41-C	42-B	43-A	44-D	45-C	46-C	47-D	48-C	49-D	50-D

Câu 1: $\cos 2x - \sin 2x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + \ell.\pi \end{cases}$$

Với $\ell = 1$ ta được $x = \frac{3\pi}{4}$ là nghiệm của phương trình. **Chọn C.**

Câu 2: $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \ell.\pi \end{cases}$$

Kết hợp $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta được $x = \frac{\pi}{6}$ là nghiệm duy nhất của phương trình trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. **Chọn A**

Câu 3: $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \sin^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi$$

Giải điều kiện: $0 < x < 2\pi \Leftrightarrow 0 < -\frac{\pi}{8} + k\pi < 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{8} < k < \frac{17}{8} \Rightarrow k = \{1; 2\}$

Suy ra phương trình có 2 nghiệm $x = \frac{7\pi}{8}$ và $x = \frac{15\pi}{8}$ trên khoảng $(0; 2\pi)$.

Tổng các nghiệm của phương trình trên khoảng $(0; 2\pi)$ là $T = \frac{11\pi}{4}$. **Chọn C.**

Câu 4: Phương trình $\Leftrightarrow 3\sin 3x - 4\sin^3 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1$

$$\Leftrightarrow \sin 9x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 \Leftrightarrow 2\sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{54} + \frac{k2\pi}{9} \end{cases}$$

Do đó nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $x_0 = \frac{\pi}{18}$. **Chọn B.**

Câu 5: Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin 7x \Leftrightarrow \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 7x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + \frac{\pi}{3} = 7x + k2\pi \\ 5x + \frac{\pi}{3} = \pi - 7x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{6} \end{cases}$$

Kết hợp $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta được các nghiệm $x = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{18}; \frac{2\pi}{9}; \frac{7\pi}{18}\right\}$. **Chọn D.**

Câu 6: $\sin 9x + \sqrt{3}\cos 7x = \sin 7x + \sqrt{3}\cos 9x \Leftrightarrow \sin 9x - \sqrt{3}\cos 9x = \sin 7x - \sqrt{3}\cos 7x$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(7x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} 9x - \frac{\pi}{3} = 7x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 9x - \frac{\pi}{3} = \pi - 7x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{5\pi}{48} + \frac{\ell\pi}{8} \end{cases}$$

Nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $\frac{5\pi}{48} - \frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{48}$ khi $\ell = -1$. **Chọn A**

Câu 7: $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x) \Leftrightarrow \cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x = \sin x + \sqrt{3}\cos x$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó $b = \frac{\pi}{6}$, $d = \frac{\pi}{3} \Rightarrow b + d = \frac{\pi}{2}$. **Chọn D**

Câu 8: Dễ thấy $\sin 2x - \cos 2x + 3 > 0 \ (\forall x \in \mathbb{R})$

Ta có: $y = \frac{2 \sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x - \cos 2x + 3} \Leftrightarrow y \cdot \sin 2x - y \cdot \cos 2x + 3 \cdot y = 2 \sin 2x + \cos 2x$

$$\Leftrightarrow (y-2) \sin 2x + (-y-1) \cos 2x = -3y (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow (y-2)^2 + (y+1)^2 \geq 9y^2 \Leftrightarrow 8y^2 + 2y - 5 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{41}}{8} \leq y \leq \frac{-1+\sqrt{41}}{8}$$

Kết hợp $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = \{0\}$. Vậy hàm số đã cho có 1 giá trị nguyên là $y = 0$. **Chọn A**

Câu 9: PT $\Leftrightarrow 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) + 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 2 \Leftrightarrow 2 \left[1 - 2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right] + 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 2$

$$\Leftrightarrow -4 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \\ \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = k\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}$$

Vậy nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $x_0 = \frac{\pi}{6}$. **Chọn B.**

Câu 10: PT $\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3 \cos x (\sqrt{3} \sin x - \cos x) = 0$$

$$\blacksquare \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{k=0} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\blacksquare \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{k=0} x = \frac{\pi}{6}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình chứa các nghiệm $\frac{\pi}{6}$ và $\frac{\pi}{2}$. **Chọn B.**

Câu 11: Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 x - (\sqrt{3} + 1) \sin x \cdot \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = \sqrt{3}(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$$\Leftrightarrow (1 - \sqrt{3}) \sin^2 x - (\sqrt{3} + 1) \sin x \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x \left[(1 - \sqrt{3}) \sin x - (\sqrt{3} + 1) \cos x \right] = 0$$

$$\blacksquare \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x - 1 = 0$$

$$\blacksquare (1 - \sqrt{3})\sin x - (\sqrt{3} + 1)\cos x = 0 \Leftrightarrow (1 - \sqrt{3})\sin x = (\sqrt{3} + 1)\cos x$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = -2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x + 2 + \sqrt{3} = 0$$

Vậy phương trình đã cho tương đương với $(\tan x + 2 + \sqrt{3})(\cos^2 x - 1) = 0$. **Chọn D.**

Câu 12: Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x (\sqrt{3} \sin x - \cos x) = 0$$

$$\blacksquare \text{ Với } \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\blacksquare \text{ Với } \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Ta có } \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1} = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 - \sqrt{3} = 0$$

Vậy phương trình đã cho tương đương với $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left[\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 - \sqrt{3}\right] = 0$. **Chọn B**

Câu 13: Ta kiểm từng đáp án:

$$\blacksquare \text{ Với } x = k\pi \rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

Thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy A đúng.

$$\blacksquare \text{ Phương trình } \Leftrightarrow \cos^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x + 2 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x - 3 \tan x + 2 = 0. \text{ Vậy B đúng.}$$

$$\blacksquare \text{ Phương trình } \Leftrightarrow \cos^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x \Leftrightarrow 2 \cot^2 x - 3 \cot x + 1 = 0. \text{ Vậy C sai. Chọn C.}$$

$$\blacksquare \text{ Phương trình } \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} - 3 \cdot \frac{\sin 2x}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x - 3 \sin 2x + 3 = 0. \text{ Vậy D đúng.}$$

Câu 14: Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x + 4 \cos^2 x = 5(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$$\Leftrightarrow -4 \sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow (2 \sin x + \cos x)^2 \Leftrightarrow 2 \sin x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = -\frac{1}{2} \rightarrow \text{có 2 vị trí biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giá. Chọn C.}$$

Câu 15: Phương trình $\Leftrightarrow 1 - 3 \tan x + 2 \tan^2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan \frac{1}{2} + k\pi \end{cases}$

▪ Với $x \in (-2\pi; 2\pi) \rightarrow -2\pi < \frac{\pi}{4} + k\pi < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < k < \frac{7}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{-2; -1; 0; 1\}$

▪ Vì $x \in (-2\pi; 2\pi) \rightarrow -2\pi < \arctan \frac{1}{2} + k\pi < 2\pi$

$\xrightarrow[\text{xấp xỉ}]{\text{CASIO}} -28,565 < k < -24,565 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{-28; -27; -26; -25\}$

Vậy có tất cả 8 nghiệm. **Chọn D.**

Câu 16: Phương trình $\Leftrightarrow 4 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{3} \sin 2x - 6 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 6 \cos x (\sqrt{3} \sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \xrightarrow{\text{Chọn } > 0} \begin{cases} \frac{\pi}{2} + k\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{2} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\min} = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{6} + k\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{6} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\min} = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \end{cases}$

So sánh hai nghiệm ta được $x = \frac{\pi}{6}$ là nghiệm dương nhỏ nhất. **Chọn B.**

Câu 17: Chọn D.

Câu 18: Phương trình $\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cdot \cos x + (1 - \sqrt{3}) \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cdot \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \tan^2 x + (1 - \sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{Chọn } < 0} \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + k\pi < 0 \Leftrightarrow k < \frac{1}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\max} = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{3} + k\pi < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{1}{3} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\max} = -1 \rightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \end{cases}$

So sánh hai nghiệm ta được $x = -\frac{\pi}{4}$ là nghiệm âm lớn nhất. **Chọn B.**

Câu 19: Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Vì $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

Ta có $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

Khi đó, phương trình đã cho trở thành $\frac{t^2-1}{2}+2t=2 \Leftrightarrow t^2+4t-5=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-5 \end{cases}$

Với $t=1$, ta được $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 20: Đặt $t = \sin x + \cos x \rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$

Phương trình đã cho trở thành $3\sqrt{2}t + 2(t^2 - 1) + 4 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 3\sqrt{2}t + 2 = 0$. **Chọn A**

Câu 21: Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

Ta có $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$

Khi đó, phương trình đã cho trở thành $5(t^2 - 1) + t + 6 = 0 \Leftrightarrow 5t^2 + t + 1 = 0$: vô nghiệm.

Nhận thấy trong các đáp án A, B, C, D thì phương trình ở đáp án D vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho tương đương với phương trình $1 + \tan^2 x = 0$ **Chọn D**

Câu 22: Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

Ta có $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$

Phương trình đã cho trở thành $t = 1 - \frac{t^2-1}{2} \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-3 \end{cases}$

Với $t=1$, ta được $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

▪ TH1: Với $x = k2\pi < 0 \Leftrightarrow k < 0 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\max} = -1 \rightarrow x = -2\pi$

▪ TH2: Với $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{1}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\max} = -1 \rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}$.

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x = -\frac{3\pi}{2}$. **Chọn C.**

Câu 23: Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Ta có $t^2 = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$

Phương trình đã cho trở thành $5(1-t^2)-16t+16=0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-\frac{21}{5} \end{cases}$

Với $t=1 \Rightarrow \sin x - \cos x = 1$ (*)

Mặt khác $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$, kết hợp với (*) suy ra

$(\sin x + \cos x)^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \pm 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn D.**

Câu 24: Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Ta có $t^2 = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cdot \cos x \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{1-t^2}{2}$

Phương trình đã cho trở thành $6t + \frac{1-t^2}{2} + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=13 \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **Chọn C.**

Câu 25: Đặt $t = \sin x - \cos x$ ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$) $\rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{1-t^2}{2}$.

Phương trình trở thành $(1+\sqrt{3})t - (t^2-1) - \sqrt{3} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - (1+\sqrt{3})t + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow t=1$. **Chọn C**

Câu 26: Đặt $t = \sin x - \cos x$ ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$) $\rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{1-t^2}{2}$.

Phương trình trở thành $(1+\sqrt{5})t + 1 - t^2 - 1 - \sqrt{5} = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - (1+\sqrt{5})t + \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \sin x - 1$

Mặt khác $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + (\sin x - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 27: Ta có $(1+\sin x)(1+\cos x) = 2 \Leftrightarrow 1 + \sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x = 2$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x = 1 \Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x) + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2$ (*)

Đặt $t = \sin x + \cos x$ ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$) $\rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{t^2-1}{2}$

Khi đó (*) trở thành $2t + t^2 - 1 = 2 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases} \Rightarrow \sin x + \cos x = 1$

Ta có $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn C**

Câu 28: Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} \quad (*)$$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ nên $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

Suy ra $\sin x \cdot \cos x = \frac{1-t^2}{2}$ nên (*) trở thành $\sqrt{2}t = \frac{2}{1-t^2} \Leftrightarrow t = -\sqrt{2}$

Do đó $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{4}$

Vậy $\cos x = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 29: Phương trình $\Leftrightarrow 1 + (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cdot \cos x) = 3 \sin x \cdot \cos x \quad (*)$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ nên $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

Suy ra $\sin x \cdot \cos x = \frac{1-t^2}{2}$ nên (*) trở thành: $1 + t \cdot \left(1 - \frac{1-t^2}{2}\right) = 3 \cdot \frac{1-t^2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 - \sqrt{2} \\ t = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$

Với $t = -1$, ta được $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}$

Vậy $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn D.**

Câu 30: Phương trình $\Leftrightarrow (2 \cos 2x + 5)(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow -\cos 2x(2 \cos 2x + 5) + 3 = 0 \Leftrightarrow -2 \cos^2 2x - 5 \cos 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \frac{1}{2} \\ \cos 2x = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \text{ mà } x \in (0; 2\pi) \rightarrow x = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 31: Phương trình $\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \sin^2 x \Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x = -\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \text{ mà } x \in (0; 3\pi) \Rightarrow 0 < -\frac{\pi}{8} + k\pi < 3\pi \Leftrightarrow \frac{1}{8} < k < \frac{25}{8}$$

Mà $k \in \mathbb{Z} \rightarrow k = \{1; 2; 3\}$ nên có tất cả 3 nghiệm cần tìm. **Chọn C**

Câu 32: Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 5x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5x = \sin 7x \Leftrightarrow \sin 5x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \cos 5x \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \sin 7x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 7x \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 5x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 7x = \pi - 5x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow x = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}; \frac{7\pi}{18}\right\}$. **Chọn A.**

Câu 33: Phương trình $\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x - 2 \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 + 3 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - 3 = 0 \quad (\cos x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x + 3 \tan x - 3 = 0 \xrightarrow{t = \tan x} t^2 + 3t - 3 = 0. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 34: Đặt $t = |\sin x + \cos x| = \sqrt{2} \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right| \in [0; \sqrt{2}]$

$$\text{Suy ra } t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \Leftrightarrow \sin 2x = t^2 - 1$$

$$\text{Do đó, phương trình trở thành: } 2t^2 - 2 - 3\sqrt{6}t + 8 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3\sqrt{6}t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Vậy } \sin 2x = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2}. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 35: Đặt $t = |\sin x - \cos x| = \sqrt{2} \left| \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right| \in [0; \sqrt{2}]$

$$\text{Suy ra } t^2 = (\sin x - \cos x)^2 \Leftrightarrow t^2 = 1 - \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x = 1 - t^2$$

$$\text{Do đó phương trình trở thành: } t + 4(1 - t^2) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{3}{4} (L) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1, \text{ ta được } \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \in [0; 2018\pi] \Leftrightarrow k \in [0; 4036]$$

Mà $k \in \mathbb{Z} \rightarrow$ có tất cả $4036 - 0 + 1 = 4037$ nghiệm cần tìm. **Chọn A**

Câu 36: Ta có $y \cdot \sin x + y \cdot \cos x + 2y = \sin x + 2 \cos x + 1 \Leftrightarrow (y - 1) \sin x + (y - 2) \cos x = 1 - 2y$

Phương trình có nghiệm khi: $(y-1)^2 + (y-2)^2 \geq (1-2y)^2 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1$

Do đó $M = 1$; $m = -2 \rightarrow M^2 - m^2 = 1^2 - (-2)^2 = -3$ **Chọn A**

Câu 37: Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$\Leftrightarrow \cos x (\sqrt{3} \sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

TH1: Với $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mà $x \in [0; 3\pi] \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \leq 3\pi \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{5}{2}$

$\rightarrow k = \{0; 1; 2\} \Rightarrow x = \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right\}$ (3 nghiệm)

TH2: Với $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ mà $x \in [0; 3\pi] \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{3} + k\pi \leq 3\pi \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{8}{3}$

$\rightarrow k = \{0; 1; 2\} \Rightarrow x = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} \right\}$ (3 nghiệm)

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm cần tìm. **Chọn B.**

Câu 38: Ta có $A = \frac{\cos x + 1}{2 \sin x + 4} \Leftrightarrow 2A \cdot \sin x + 4A = \cos x + 1 \Leftrightarrow 2A \cdot \sin x - \cos x = 1 - 4A$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm khi: $(2A)^2 + (-1)^2 \geq (1 - 4A)^2 \Leftrightarrow 3A^2 - 2A \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq A \leq \frac{2}{3}$

Do đó $M = \frac{2}{3}$; $N = 0 \rightarrow M + N = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$ **Chọn C**

Câu 39: Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1$

Do đó phương trình trở thành: $3 \cdot 1^2 = 0$ (vô lý) $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ không là nghiệm.

Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Phương trình trở thành: $3 \cdot \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3 \tan^2 x + 2 \tan x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \xrightarrow{x>0} x_{\min} = \frac{3\pi}{4} \\ x = \arctan \frac{1}{3} + k\pi \xrightarrow{x>0} x_{\min} = \arctan \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $x_{\min} = \arctan \frac{1}{3}$. **Chọn C.**

Câu 40: $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

$$\text{Suy ra } t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\text{Do đó phương trình trở thành: } \frac{t^2 - 1}{2} + 2t = 2 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

• Với $x = k2\pi \rightarrow x_0 = 0$ nên $P = 3 + \sin 0 = 3$

• Với $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2}$ nên $P = 3 + \sin \pi = 3$. **Chọn A**

Câu 41: Phương trình $\Leftrightarrow 2(\sin 3x + \sin x) - 2\sqrt{3} \sin^2 x = \sin 4x$

$$\Leftrightarrow 4 \sin 2x \cdot \cos x = 2 \sin 2x \cdot \cos 2x + 2\sqrt{3} \sin^2 2x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k\pi \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) (*) \end{cases}$$

$$\text{Giải (*) ta được } \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Với $x \in (0; 2\pi) \rightarrow$ phương trình có tất cả $3+3+1=7$ nghiệm. **Chọn C.**

Câu 42: Điều kiện: $\sin x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\text{Phương trình trở thành: } 2 \sin^2 x \cos x + 2 \sin x \cdot \cos^2 x + \sin x + \cos x = \sqrt{3} \cos 2x (\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos x (\sin x + \cos x) + \sin x + \cos x = \sqrt{3} \cos 2x (\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + 1 = \sqrt{3} \cos 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{3\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

Dựa vào đường tròn lượng giác trên $(-\pi; \pi) \Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm. **Chọn B**

Câu 43: Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \sin 3x \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 3x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = \pi - x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 4x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

TH1: Với $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ mà $x \in [0; 2018\pi] \Rightarrow \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{1}{6} + 2018$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_{\min} = 1 \\ k_{\max} = 2018 \end{cases} \rightarrow x_{\min} = \frac{5\pi}{6}; x_{\max} = -\frac{\pi}{6} + 2018\pi = \frac{12107\pi}{6}$$

TH2: Với $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$ mà $x \in [0; 2018\pi] \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq k \leq -\frac{2}{3} + 4036$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_{\min} = 0 \\ k_{\max} = 4036 \end{cases} \rightarrow x_{\min} = \frac{\pi}{3}; x_{\max} = \frac{\pi}{3} + 2018\pi = \frac{6055\pi}{3}$$

So sánh hai TH, ta được $x_1 = \frac{12107\pi}{6}; x_2 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{12109\pi}{6}$. **Chọn A.**

Câu 44: Điều kiện: $\sin x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Phương trình trở thành: $\cos 4x - \cos 2x + 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 - \cos 2x + 1 - \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x = k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Dựa vào điều kiện và đường tròn lượng giác, đa giác cần tìm là ABCD

Với $A(1; 0), B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), C(-1; 0), D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}d[B; AC].AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = 2.S_{\triangle ABC} = \sqrt{2}$. **Chọn D.**

Câu 45: Phương trình $\Leftrightarrow 3\sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x = \sin x$

$$\Leftrightarrow 3\sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x = \sin x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^3 x = 2\sin x \cdot \cos^2 x \Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

Với nghiệm $x = k\pi$ ta lấy hai điểm $A(1; 0)$ và $B(-1; 0)$

Với nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ta lấy bốn điểm (dựa vào đường tròn lượng giác):

$$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), N\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Để thấy đa giác cần tìm là AMNB PQ $\Rightarrow S_{AMNB PQ} = 2.S_{AMNB}$

Với AMNB là hình thang cân $\Rightarrow S_{AMNB} = \frac{1}{2} d[M; AB] \cdot (AB + MN) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$

Vậy diện tích đa giác cần tính là $S = 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$. **Chọn C**

Câu 46: Phương trình đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow 1^2 + (-\sqrt{3})^2 < (2m)^2 \Leftrightarrow 4m^2 > 4 \Leftrightarrow m^2 > 1$

Kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10; 10] \end{cases} \Rightarrow m = \{-10; -9, \dots, -2, 2, 3, \dots, 10\}$

Vậy có 18 giá trị của tham số m. **Chọn C.**

Câu 47: PT $\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(m^2 + 1) \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = m^2 + 1$

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 1 > 1 \\ m^2 + 1 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. **Chọn D.**

Câu 48: Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (m+1)^2 + m^2 \geq (1-m)^2 \Leftrightarrow m^2 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -4 \end{cases}$

Kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10; 10] \end{cases} \Rightarrow m = \{-10; -9, \dots, -4, 0, 1, 2, \dots, 10\}$ suy ra có 18 giá trị của tham số m. **Chọn C.**

Câu 49: PT $\Leftrightarrow (m+1) \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - \sin 2x + \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow m+1 - m \cos 2x - \cos 2x - 2 \sin 2x + 2 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow (m-1) \cos 2x + 2 \sin 2x = m+1$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (m-1)^2 + 2^2 \geq (m+1)^2 \Leftrightarrow 4m \leq 4 \Leftrightarrow m \leq 1$

Kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-2018; 2018] \end{cases} \Rightarrow$ có 2020 giá trị của tham số m. **Chọn D**

Câu 50: $\tan x + m \cot x = 8 \Leftrightarrow \tan x + \frac{m}{\tan x} = 8 \Leftrightarrow \tan^2 x - 8 \tan x + m = 0$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow t \in \mathbb{R}$ suy ra $t^2 - 8t + m = 0$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 16 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 16$. **Chọn D.**