MỤC LỤC

BÀI 1. MỆNH ĐỀ

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Mỗi mệnh đề toán học phải hoặc đúng hoặc sai. Một mệnh đề toán học không thể vừa đúng, vừa sai.

> ! Khi không sợ nhầm lẫn, ta thường gọi tắt mệnh đề toán học là mệnh đề.

Ví dụ 1. Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề toán học?

① Hà Nội là Thủ đô của Việt Nam;

② Số π là một số hữu tỉ;

③ $x = 1$ có phải là nghiệm của phương trình $x^2 - 1 = 0$ không?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2. Tìm mệnh đề đúng trong những mệnh đề sau:
A: "Tam giác có ba cạnh";
B: "1 là số nguyên tố".

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3. Trong những câu sau, câu nào là mệnh đề chứa biến?

① 18 chia hết cho 9; ② $3n$ chia hết cho 9.

....
....
....
....
....
....
....

....
....
....

Định nghĩa 2. Cho mệnh đề P. Mệnh đề "Không phải P" được gọi là *mệnh đề phủ định* của mệnh đề P và kí hiệu là $\overline{P}$.

> **!** Mệnh đề $\overline{P}$ *đúng* khi P sai.
> Mệnh đề $\overline{P}$ *sai* khi P đúng.

Ví dụ 4. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó:
A: "16 là bình phương của một số nguyên";
B: "Số 25 không chia hết cho 5".

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

> **!** Để phủ định một mệnh đề (có dạng phát biểu như trên), ta chỉ thêm (hoặc bớt) từ "không"hoặc ("không phải") vào trước vị ngữ của mệnh đề đó.

Định nghĩa 3. Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là *mệnh đề kéo theo* và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.
Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai khi P đúng, Q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC. Xét hai mệnh đề:
P: "Tam giác ABC có hai góc bằng 60°";
Q: "Tam giác ABC đều".
Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Nhận xét. *Tùy theo nội dung cụ thể, đôi khi người ta còn phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là "P kéo theo Q " hay "P suy ra Q" hay "Vì P nên Q"....*

Nhận xét. *Các định lí toán học là những mệnh đề đúng và thường phát biểu ở dạng mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$.*
Khi ta nói P là giả thiết, Q là kết luận của định lí, hay
P là điều kiện đủ để có Q, hoặc Q là điều kiện cần để có P.

Định nghĩa 4. Ta có

① Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là *mệnh đề đảo* của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

② Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì ta nói P và Q là *hai mệnh đề tương đương*, kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$.

Nhận xét. *Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ có thể phát biểu ở những dạng sau:*

— *"P tương đương Q";*

— *"P là điều kiện cần và đủ để có Q";*

— *"P khi và chỉ khi Q";*

— *"P nếu và chỉ nêu Q".*

Định nghĩa 5. Cho mệnh đề $P(x), x \in X$.

— Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$" là mệnh đề "$\exists x \in X, \overline{P(x)}$".

— Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in X, P(x)$" là mệnh đề "$\forall x \in X, \overline{P(x)}$".

Ví dụ 6. Sử dụng kí hiệu "$\forall$" để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó đúng hay sai, giải thích vì sao?

① P: "Với mọi số thực x, $x^2 + 1 > 0$".

② Q: "Với mọi số tự nhiên $n, n^2 + n$ chia hết cho 6".

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 7. Sử dụng kí hiệu "$\forall$" để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó đúng hay sai, giải thích vì sao?

① M: "Tồn tại số thực x sao cho $x^3 = -8$".

② N: "Tồn tại số nguyên x sao cho $2x + 1 = 0$".

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

! Cách làm ở *Ví dụ 7*, *Ví dụ 8* lần lượt cho chúng ta phương pháp chứng minh một mệnh đề có kí hiệu "$\forall$", có kí hiệu "$\exists$", là đúng hoặc sai.

Ví dụ 8. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

① $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$.

② $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề toán học?

① Tích hai số thực trái dấu là một số thực âm.

② Mọi số tự nhiên đều là số dương.

③ Có sự sống ngoài Trái Đất.

④ Ngày 1 tháng 5 là ngày Quốc tế Lao động.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó.

① A: "$\dfrac{5}{1{,}2}$ là một phân số";

② B: "Phương trình $x^2 + 3x + 2 = 0$ có nghiệm";

③ C: "$2^2 + 2^3 = 2^{2+3}$";

④ D: "Số 2 025 chia hết cho 15".

....
....

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 3. Cho n là số tự nhiên. Xét các mệnh đề:
P: "là một số tự nhiên chia hết cho 16";
Q: "là một số tự nhiên chia hết cho 8".

① Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

② Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 4. Cho tam giác ABC. Xét các mệnh đề:
P: "Tam giác ABC cân ";
Q: "Tam giác ABC có hai đường cao bằng nhau".
Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng bốn cách.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 5. Dùng kí hiệu "$\forall$" hoặc "$\exists$" để viết các mệnh đề sau:

① Có một số nguyên không chia hết cho chính nó;

② Mọi số thực cộng với 0 đều bằng chính nó.

. . . .

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6. Phát biểu các mệnh đề sau:

① "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$";

② "$\exists x \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{x} > x$".

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó.

① $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2x - 2$;

② $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2x - 1$;

③ $\exists x \in \mathbb{R}, x + \dfrac{1}{x} \geq 2$;

④ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$.

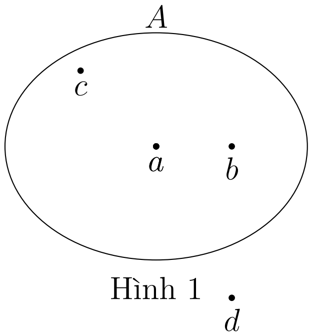
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI 2. TẬP HỢP VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

1. MỆNH ĐỀ

2. TẬP HỢP

Định nghĩa 1.
Người ta minh họa tập hợp bằng một vòng kín, mỗi phần tử của tập hợp được biểu diễn bởi một chấm bên trong vòng kín, còn phần tử không thuộc tập hợp đó được biểu diễn bởi một chấm bên ngoài vòng kín (Hình 1). Cách minh họa tập hợp như vậy được gọi là biểu đồ Ven.



Hình 1

1. Viết tập hợp A trong Hình 1 bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp đó. Hình 1
2. Nêu phần tử không thuộc tập hợp A.

Ví dụ 1. Cho tập hợp B gồm các số tự nhiên có một chữ số và chia hết cho 3.

1. Viết tập hợp B theo hai cách: liệt kê các phần tử của tập hợp; chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.
2. Minh họa tập hợp B bằng biểu đồ Ven.

Nhận xét. — *Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập hợp rỗng, kí hiệu là $\varnothing$.*

— *Một tập hợp có thể không có phần tử nào, cũng có thể có một phần tử, có nhiều phần tử, có vô số phần tử.*

⚠ *Khi tập hợp C là tập rỗng, ta viết $C = \varnothing$ và không được viết $C = \{\varnothing\}$.*

Ví dụ 2. Nêu số phần tử của mỗi tập hợp sau:
$G = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$ và $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \ldots\}$.

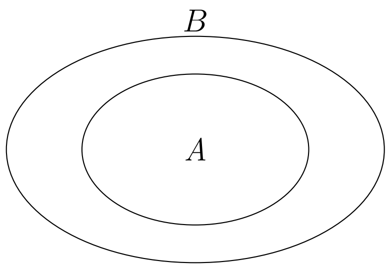
3. TẬP CON VÀ TẬP HỢP BẰNG NHAU

1. Tập con

Định nghĩa 2. Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B thì ta nói A là một **tập con** của tập hợp B và viết là $A \subset B$. Ta còn đọc là A chứa trong B.

Quy ước: Tập hợp rỗng $\varnothing$ được coi là tập con của mọi tập hợp.

$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$. Khi $A \subset B$, ta cũng viết $B \supset A$ (đọc là B chứa A) (Hình 3).
Nếu A không phải là tập con của B, ta viết $A \not\subset B$.



Hình 3

Ví dụ 3. Cho hai tập hợp:

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}, F = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}.$$

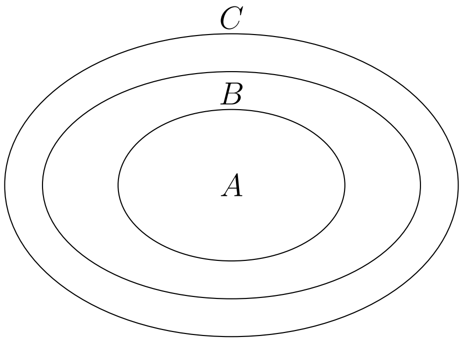
Chứng tỏ rằng $E \subset F$.

Bài 1. Cho hai tập hợp: $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ chia hết cho } 3\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ chia hết cho } 9\}$. Chứng tỏ rằng $B \subset A$.

Tính chất 1.
Ta có các tính chất sau:

— $A \subset A$ với mọi tập hợp A;

— Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$ (Hình 4).



Hình 4

2. Tập hợp bằng nhau

Định nghĩa 3. Khi $A \subset B$ và $B \subset A$ thì ta nói hai tập hợp A và B bằng nhau, viết là $A = B$.

Ví dụ 4. Cho tập hợp C gồm các tam giác có ba cạnh bằng nhau và tập hợp D gồm các tam giác có ba góc bằng nhau. Hai tập hợp C và D có bằng nhau hay không?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Cho hai tập hợp $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ chia hết cho 3 và 4$\}$ và $G = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ chia hết cho 12$\}$. Chứng tỏ rằng $E = G$.

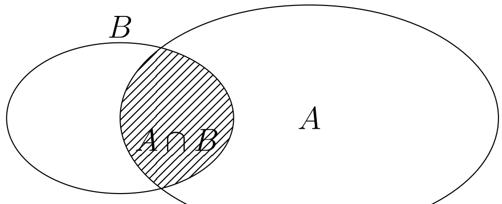
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4. GIAO CỦA HAI TẬP HỢP

Định nghĩa 4. Tập hợp gồm tất cả các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B được gọi là giao của A và B, kí hiệu $A \cap B$.

— $x \in A \cap B$ khi và chỉ khi $x \in A$ và $x \in B$.

Vậy $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$. Tập hợp $A \cap B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong Hình 5.



Hình 5

Ví dụ 5. Tìm giao của hai tập hợp trong mỗi trường hợp sau:

1. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 16\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 20\}$.

2. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của } 4\}, D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của } 5\}$.

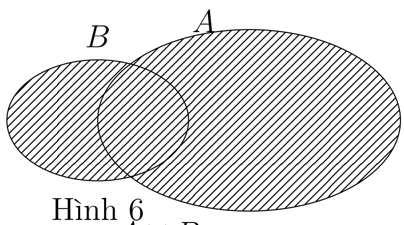
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

5. HỢP CỦA HAI TẬP HỢP

Định nghĩa 5. Tập hợp gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B được gọi là **hợp** của A và B, kí hiệu $A \cup B$.

— $x \in A \cup B$ khi và chỉ khi $x \in A$ hoặc $x \in B$.

Vậy $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$. Tập hợp $A \cup B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong Hình 6.



Hình 6

Ví dụ 6. Cho tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ và tập hợp I các số vô tỉ. Tìm $\mathbb{Q} \cap I, \mathbb{Q} \cup I$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3. Cho hai tập hợp:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

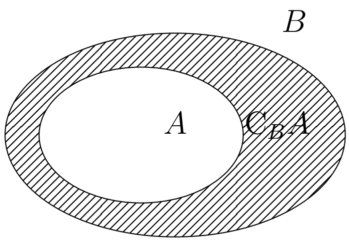
Tìm $A \cap B$, $A \cup B$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

6. PHẦN BÙ. HIỆU CỦA HAI TẬP HỢP

Định nghĩa 6. Cho tập hợp A là tập con của tập hợp B. Tập hợp những phần tử của B mà không phải là phần tử của A được gọi là phần bù của A trong B, kí hiệu $\mathrm{C}_B A$.

Tập hợp $\mathrm{C}_B A$ được mô tả bằng phần gạch chéo trong Hình 7.



Hình 7

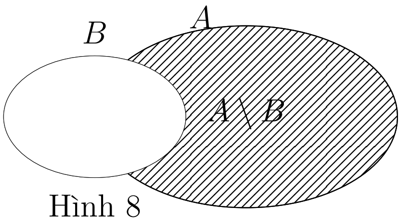
Ví dụ 7. Các học sinh của lớp 10A đăng kí đi tham quan ở một trong hai địa điểm: Hoàng thành Thăng Long và Văn Miếu - Quốc Tử Giám. Mỗi học sinh đều đăng kí đúng một địa điểm. Gọi A là tập hợp các học sinh đăng kí tham quan Hoàng thành Thăng Long, B là tập hợp các học sinh đăng kí tham quan Văn Miếu - Quốc Tử Giám, T là tập hợp các học sinh lớp 10A. Tìm phần bù của tập hợp A trong tập hợp T.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Định nghĩa 7. Tập hợp gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B được gọi là **hiệu** của A và B, kí hiệu $A \setminus B$.

— $x \in A \setminus B$ khi và chỉ khi $x \in A$ và $x \notin B$.

Vậy $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$.
Tập hợp $A \setminus B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong Hình 8.



Hình 8

Nếu $B \subset A$ thì $A \setminus B = C_A B$.

Ví dụ 8. Cho hai tập hợp: $A = \{3; 6; 9; 12\}$, $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$. Tìm $A \setminus B$, $B \setminus A$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 9. Cho hai tập hợp: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x - 11 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x^2 - 14x + 11 = 0\}$ Tìm $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4. Cho hai tập hợp:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\}$$
$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 = 0\right\}$$

Tìm $A \setminus B$ và $B \setminus A$.

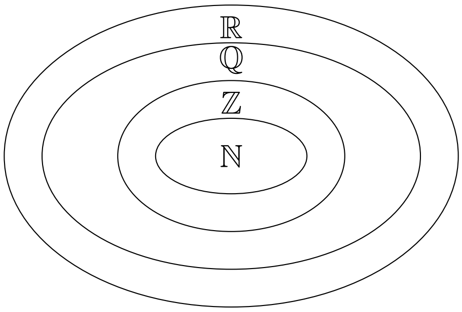
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

7. CÁC TẬP HỢP SỐ

1. Các tập hợp số đã học

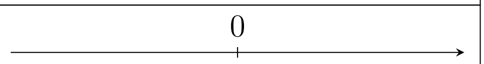
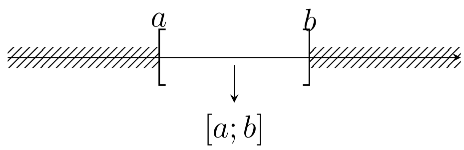
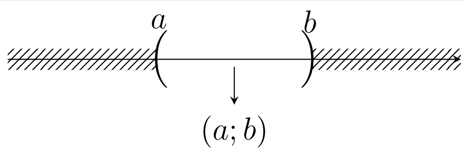
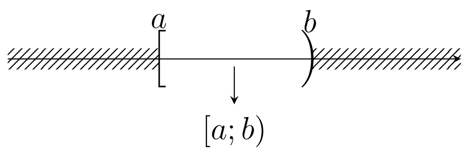
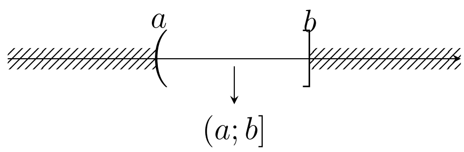
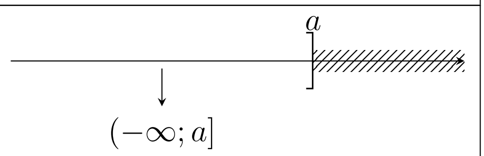
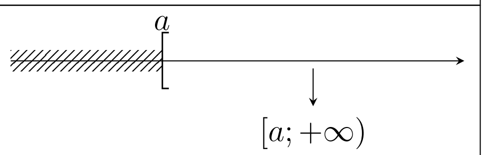
Nhận xét.
Ta đã biết $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ lần lượt là tập hợp số tự nhiên, tập hợp số nguyên, tập hợp số hữu tỉ, tập hợp số thực.
Ta có quan hệ sau:

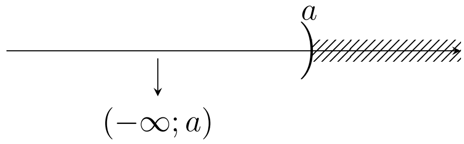
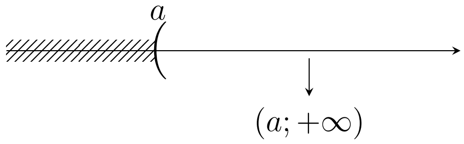
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \text{ (Hình 9).}$$



Hình 9

2. Một số tập con thường dùng của tập hợp số thực

Tên gọi	**Kí hiệu**	**Tập hợp**	**Biểu diễn trên trục số** *(Phần không bị gạch chéo)*
Tập số thực	$(-\infty; +\infty)$	$\mathbb{R}$	
Đoạn	$[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Khoảng	$(a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Nửa khoảng	$[a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
Nửa khoảng	$(a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
Nửa khoảng	$(-\infty; a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
Nửa khoảng	$[a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	

Khoảng	$(-\infty; a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
Khoảng	$(a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	

Kí hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực, kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực; a và b được gọi là đầu mút của các đoạn, khoảng, nửa khoảng.

Ví dụ 10. Hãy đọc tên, kí hiệu và biểu diễn mỗi tập hợp sau trên trục số:

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\}$;
2. $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$;
3. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 > 0\}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

8. BÀI TẬP

Bài 1. Cho tập hợp $X = \{a; b; c\}$. Viết tất cả các tập con của tập hợp X.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Sắp xếp các tập hợp sau theo quan hệ "$\subset$": $[2; 5]$, $(2; 5)$, $[2; 5)$, $(1; 5]$.

....

. . . .

Bài 3. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số

1. $[-3;7] \cap (2;5)$;
2. $(-\infty;0] \cup (-1;2)$;
3. $\mathbb{R} \setminus (-\infty;3)$;
4. $(-3;2) \setminus [1;3)$.

. . . .

Bài 4. Gọi A là tập nghiệm của phương trình $x^2+x-2=0$, B là tập nghiệm của phương trình $2x^2+x-6=0$. Tìm $C=A\cap B$.

. . . .

Bài 5. Tìm $D=E\cap G$ biết E và G lần lượt là tập nghiệm của hai bất phương trình trong mỗi trường hợp sau

1. $2x+3\geq 0$ và $-x+5\geq 0$;
2. $x+2>0$ và $2x-9<0$.

. . . .

....
....
....
....
....
....
....

Bài 6. Gọi A là tập nghiệm của đa thức $P(x)$. Viết tập hợp các số thực x sao cho biểu thức $\frac{1}{P(x)}$ xác định.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7. Lớp $10B$ có 28 học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và 19 học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc. Biết rằng có 10 học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ trên.

1. Có bao nhiêu học sinh lớp $10B$ tham gia câu lạc bộ thể thao và không tham gia câu lạc bộ âm nhạc?
2. Có bao nhiêu học sinh lớp $10B$ tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên.
3. Biết lớp $10B$ có 40 học sinh. Có bao nhiêu học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao? Có bao nhiêu học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 8. Một nhóm có 12 học sinh chuẩn bị cho hội diễn văn nghệ. Trong danh sách đăng kí tham gia tiết mục múa và tiết mục hát của nhóm đó, có 5 học sinh tham gia tiết mục múa, 3 học sinh tham gia cả hai tiết mục. Hỏi có bao nhiêu học sinh trong nhóm tham gia tiết mục hát? Biết có 4 học sinh của nhóm không tham gia tiết mục nào.

....
....

9. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

Bài 9. Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề toán học?

a) Tích của ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 3.

b) Nếu $\widehat{AMB} = 90^\circ$ thì điểm M nằm trên đường tròn đường kính AB.

c) Ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Cộng hoà Xã hội chủ nghĩa Việt Nam.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 10. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.
A: "Đồ thị hàm số $y = x$ là một đường thẳng".
B: "Đồ thị hàm số $y = x^2$ đi qua điểm $A(3; 6)$"

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 11. Cho tứ giác $ABCD$. Lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của mệnh đề đó với:

a) P:"Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật", Q:"tứ giác $ABCD$ là hình bình hành".

b) P:"Tứ giác $ABCD$ là hình thoi", Q:"Tứ giác $ABCD$ là hình vuông".

....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 12. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau
A: "$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$";
B: "$\forall x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2$";
C: "$\exists x \in \mathbb{Z}, 2x^2 + 3x - 2 = 0$";
D: "$\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 < x$".

Bài 13. Dùng kí hiệu để viết mỗi tập hợp sau và biểu diễn mỗi tập hợp đó trên trục số:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < -1\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 0\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$.

d) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > -2\}$.

Bài 14. Giải Bóng đá vô địch thế giới World Cup 2018 được tổ chức ở Liên bang Nga gồm 32 đội. Sau vòng thi đấu bảng, Ban tổ chức chọn ra 16 đội chia làm 8 cặp đấu loại trực tiếp. Sau vòng đấu loại trực tiếp đó, Ban tổ chức tiếp tục chọn ra 8 đội chia làm 4 cặp đấu loại trực tiếp ở vòng tứ kết. Gọi A là tập hợp 32 đội tham gia World Cup 2018, B là tập hợp 16 đội sau vòng thi đấu bảng, C là tập hợp 8 đội thi đấu vòng tứ kết.

a) Sắp xếp các tập hợp A, B, C theo quan hệ "$\subset$".

b) So sánh hai tập hợp $A \cap C$ và $B \cap C$.

c) Tập hợp $A \setminus B$ gồm những đội bóng bị loại sau vòng đấu nào?

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 15. Cho hai tập hợp $A=[0;3]$, $B=(2;+\infty)$. Xác định $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $\mathbb{R}\setminus B$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 16. Gọi M là tập nghiệm của phương trình $x^2-2x-3=0$,
N là tập nghiệm của phương trình $(x+1)(2x-3)=0$. Tìm $P=M\cap N$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

BÀI 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Định nghĩa 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$$ax + by < c;\ ax + by > c;\ ax + by \leq c;\ ax + by \geq c,$$

trong đó a, b, c là những số cho trước với a, b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn.

Định nghĩa 2. Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by < c \qquad (*)$.
Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 < c$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình $(*)$.
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình $(*)$ được gọi là miền nghiệm của bất phương trình đó.

Nghiệm và miền nghiệm của các bất phương trình dạng $ax + by > c$, $ax + by \leq c$, $ax + by \geq c$ được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 1. Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $3x + 2y \geq -5$?

① $(2; -1)$; ② $(-2; 0)$; ③ $(-1; -1)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2. Tìm bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong các bất phương trình sau và chỉ ra một nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn đó

① $5x + 3y < 20$; ② $3x - \dfrac{5}{y} > 2$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

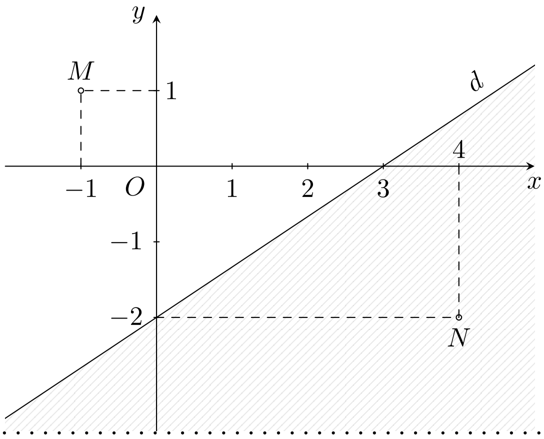
2. BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Mô tả miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường thẳng $d\colon ax+by=c$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng (không kể d) là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by<c$, nửa mặt phẳng còn lại (không kể d) là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by>c$.

! Đối với bất phương trình dạng $ax+by\le c$ hoặc $ax+by\ge c$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả đường thẳng d.

Ví dụ 3.
Nửa mặt phẳng không gạch trong hình bên (không kể d) biểu diễn miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Hỏi tọa độ hai điểm $M(-1;1)$, $N(4;-2)$ có là nghiệm của bất phương trình có không?



. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa 4. Các bước biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax+by<c$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy:

Bước 1. Vẽ đường thẳng $d\colon ax+by=c$. Đường thẳng d chia mặt phẳng tọa độ thành hai nửa mặt phẳng.

Bước 2. Lấy một điểm $M(x_0;y_0)$ không nằm trên d (ta thường lấy gốc tọa độ O nếu $c\neq 0$). Tính ax_0+by_0 và so sánh với c.

Bước 3. Kết luận

- Nếu $ax_0+by_0<c$ thì nửa mặt phẳng (không kể d) chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by<c$.
- Nếu $ax_0+by_0<c$ thì nửa mặt phẳng (không kể d) chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by<c$.

Ví dụ 4. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau $x + y > -1$; $x + y \geq -1$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

> ! Thông thường khi sử dụng phần mềm toán học để biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình hai ẩn, miền nghiệm của bất phương trình đó được tô màu.

Ví dụ 5. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau

① $x - 2y < 4$; ② $x + 3y \leq 6$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $2x - 3y < 3$?

① $(0; -1)$; ② $(2; 1)$; ③ $(3; 1)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

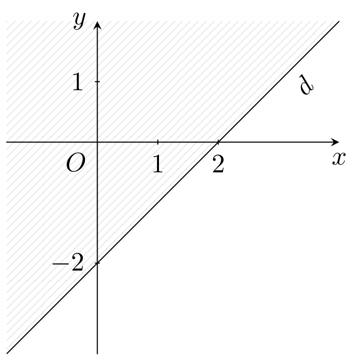
....

Bài 2. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau

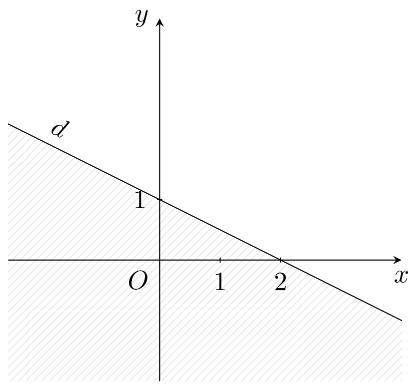
① $x + 2y < 3$; ② $3x - 4y \geq -3$;

③ $y \geq -2x + 4$; ④ $y < 1 - 2x$.

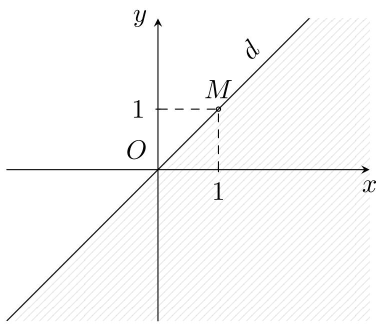
Bài 3. Phần không gạch (không kể d) ở mỗi hình a), b), c) là miền nghiệm của bất phương trình nào?



Hình a)



Hình b)



Hình c)

Bài 4. Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng 60 m^2. Diện tích để kê một chiếc ghế là 0,5 m^2, một chiếc bàn là 1,2 m^2. Gọi x là số chiếc ghế, y là số chiếc bàn được kê.

1. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là 12 m^2.
2. Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 5. Trong 1 lạng (100 g) thịt bò chứa khoảng 26 g protein, 1 lạng cá rô phi chứa khoảng 20 g protein. Trung bình trong một ngày, một người phụ nữ cần tối thiểu 46 g protein. Gọi x, y lần lượt là số lạng bò và số lạng cá rô phi mà một người phụ nữ nên ăn trong một ngày. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết cho một người phụ nữ trong một ngày và chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình đó.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

BÀI 4. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Định nghĩa 1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là một hệ gồm một số phương trình bậc nhất hai ẩn x, y. Mỗi nghiệm chung của các bất phương trình trong hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đó.

Ví dụ 1. Cho hệ bất phương trình sau

$$\begin{cases} 2x - 4y \leq 6 & (1) \\ x + y > 2. & (2) \end{cases}$$

Cặp số $(x; y)$ nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình trên?

$$(3; 1),\ (1; -2),\ (5; 3).$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Định nghĩa 2. Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta làm như sau:

— Trong cùng mặt phẳng tọa độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.

— Phần không bị gạch là miền nghiệm cần tìm.

Ví dụ 2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + y \leq 4 \\ x + y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$

....
....
....
....
....

....
....
....
....
....

Ví dụ 3. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình sau $\begin{cases} 3x - y > -3 \\ -2x + 3y < 6 \\ 2x + y > -4. \end{cases}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Ví dụ 4. Quảng cáo sản phẩm trên truyền hình là một hoạt động quan trọng trong kinh doanh của các doanh nghiệp.
Theo Thông báo số 10/2019, giá quảng cáo trên VTV1 là 30 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khoảng 20h30; là 6 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 – 17h00.
Một công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng để quảng cáo trên VTV1 với yêu cầu quảng cáo về số lần phát như sau: ít nhất 10 lần quảng cáo vào khoảng 20h30 và không quá 50 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 – 17h00. Gọi x, y lần lượt là số lần phát quảng cáo vào khoảng 20h30 và vào khung giờ 16h00 – 17h00.
Tìm x, y sao cho tổng số lần xuất hiện quảng cáo của công ty là nhiều nhất.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5. Người ta dự định dùng hai loại nguyên liêu để chiết khấu ít nhất 140 kg chất A và 9 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng, có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất? Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.

....
....
....
....

4. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Kiểm tra xem mỗi cặp số $(x; y)$ đã cho có là nghiệm của hệ bất phương trình tương ứng không.

① $\begin{cases} 3x + 2y \geq -6 \\ x + 4y > 4 \end{cases}$ $(0; 2)$, $(1; 0)$;

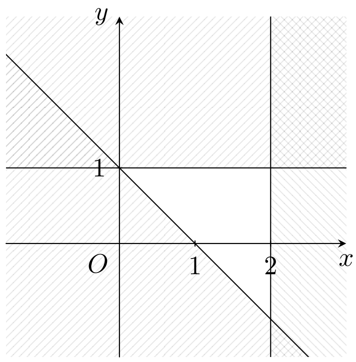
② $\begin{cases} 4x + y \leq -3 \\ -3x + 5y \geq -12 \end{cases}$ $(-1; -3)$, $(0; -3)$.

Bài 2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình

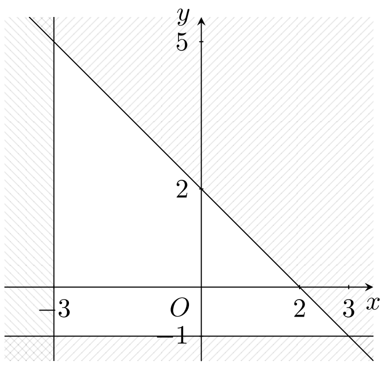
① $\begin{cases} x + 2y < -4 \\ y \geq x + 5; \end{cases}$

② $\begin{cases} 4x - 2y > 8 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0. \end{cases}$

Bài 3. Miền không bị gạch ở mỗi hình a, b là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào cho ở dưới đây?



Hình a)



Hình b)

① $\begin{cases} x+y<2 \\ x>-3 \\ y \geq -1; \end{cases}$ ② $\begin{cases} y<x \\ x \leq 0 \\ y>-3; \end{cases}$ ③ $\begin{cases} y>-x+1 \\ x \leq 2 \\ y<1. \end{cases}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4. Một phân xưởng sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất gấp hai lần thời gian làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai. Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc. Phân xưởng làm việc 8 tiếng mỗi ngày và thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một chiếc mũ kiểu thứ nhất là 24 nghìn đồng, một chiếc mũ kiểu thứ hai là 15 nghìn đồng. Tính số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai trong một ngày mà phân xưởng cần sản xuất để tiền lãi thu được là cao nhất.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI 5. ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình

a) $3x - y > 3$; b) $x + 2y \leq -4$; c) $y \geq 2x - 5$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình

a) $\begin{cases} 2x - 3y < 6 \\ 2x + y < 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x + 10y \leq 20 \\ x - y \leq 4 \\ x \geq -2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x - 2y \leq 5 \\ x + y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \leq 3. \end{cases}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3. Nhu cầu canxi tối thiểu cho một người đang độ tuổi trưởng thành trong một ngày là 1300 mg. Trong 1 lạng đậu nành có 165 mg canxi, 1 lạng thịt có 15mg canxi.

(Nguồn: `https://hongngochospital.vn`)

Gọi x, y lần lượt là số lạng đậu nành và số lạng thịt mà một người đang độ tuổi trưởng thành ăn trong một ngày.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng canxi cần thiết trong một ngày của một người trong độ tuổi trưởng thành.

b) Chỉ ra một nghiệm $(x_0; y_0)$ với $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ của bất phương trình đó.

....
....

....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4. Bác Ngọc thực hiện chế độ ăn kiêng với yêu cầu tối thiểu hằng ngày qua thức uống là 300 ca-lo, 36 đơn vị vitamin A và 90 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ nhất cung cấp 60 ca-lo, 12 đơn vị vitamin A và 10 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ hai cung cấp 60 ca-lo, 6 đơn vị vitamin A và 30 đơn vị vitamin C.

a) Viết hệ bất phương trình mô tả số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai mà bác Ngọc nên uống mỗi ngày để đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số ca-lo và số đơn vị vitamin hấp thụ.

b) Chỉ ra hai phương án mà bác Ngọc có thể chọn lựa số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai nhằm đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số ca-lo và số đơn vị vitamin hấp thụ.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5. Một chuỗi nhà hàng ăn nhanh bán đồ ăn từ 10h00 sáng đến 22h00 mỗi ngày. Nhân viên phục vụ của nhà hàng làm việc theo hai ca, mỗi ca 8 tiếng, ca I từ 10h00 đến 18h00 và ca II từ 14h00 đến 22h00.

Tiền lương của nhân viên được tính theo giờ (bảng bên).

Khoảng thời gian làm việc	Tiền lương/giờ
10h00 - 18h00	20 000 đồng
14h00 - 22h00	22 000 đồng

Để mỗi nhà hàng hoạt động được thì cần tối thiểu 6 nhân viên trong khoảng 10h00 - 18h00, tối thiểu 24 nhân viên trong thời gian cao điểm 14h00 - 18h00 và không quá 20 nhân viên trong khoảng 18h00 - 20h00. Do lượng khách trong khoảng 14h00 - 22h00 thường đông hơn nên nhà hàng cần số nhân viên ca II ít nhất phải gấp đôi số nhân viên ca I. Em hãy giúp chuỗi nhà hàng chỉ ra các huy động số lượng nhân viên cho mỗi ca sao cho chi phí tiền lương mỗi ngày là ít nhất.

....
....
....
....
....
....

....
....
....
....

BÀI 2. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Cho tập hợp khác rỗng $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$. Nếu với mỗi giá trị của x thuộc $\mathscr{D}$ có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một hàm số. Ta gọi x là biến số và y là hàm số của x. Tập hợp $\mathscr{D}$ được gọi là tập xác định của hàm số. Kí hiệu hàm số: $y = f(x), x \in \mathscr{D}$.

Ví dụ 1.

a) Diện tích S của hình tròn bán kính r được tính theo công thức $S = \pi r^2$. Hỏi S có phải là hàm số của r hay không? Giải thích.

b) Cho công thức $y^2 = x$. Hỏi y có phải là hàm số của x hay không? Giải thích.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. CÁCH CHO HÀM SỐ

Hàm số cho bằng một công thức

Cùng với cách nói hàm số cho bằng công thức, ta cũng nói hàm số cho bằng biểu thức.
Định nghĩa 2. Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{x}$;

b) $y = \sqrt{x-1}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Hàm số cho bằng nhiều công thức

Một hàm số có thể được cho bằng nhiều công thức, chẳng hạn hàm số trong Ví dụ sau:

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ nếu } f(x) < 0 \\ 0 \text{ nếu } f(x) = 0 \\ 1 \text{ nếu } f(x) > 0. \end{cases}$

a) Tìm tập xác định của hàm số trên.

b) Tính giá trị của hàm số khi $x = -2; x = 0; x = 2021$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

! Chú ý: Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định là $\mathscr{D}$. Khi biến số x thay đổi trong tập $\mathscr{D}$ thì tập hợp các giá trị y tương ứng được gọi là tập giá trị của hàm số đã cho.

Chẳng hạn, trong Ví dụ trên, ta có: Ứng với các giá trị của x thì $f(x)$ chỉ nhận một trong ba giá trị $-1; 0; 1$ nên tập giá trị của hàm số đó là tập hợp $\{-1; 0; 1\}$.

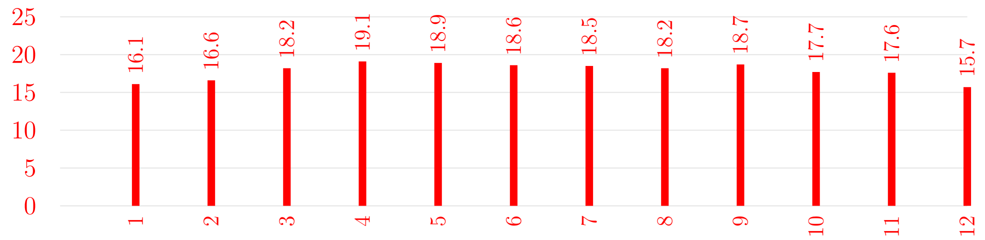
Hàm số không cho bằng công thức

Trong thực tiễn, có những tình huống dẫn tới những hàm số không thể cho bằng công thức (hoặc nhiều công thức). Chẳng hạn, trong ví dụ sau đây:

Ví dụ 4. Ví dụ Biểu đồ ở Hình 1 cho biết nhiệt độ trung bình ở Đà Lạt theo từng tháng trong năm.

a) Xác định tập hợp các tháng được nêu trong biểu đồ.

b) Tương ứng tháng với nhiệt độ trung bình của tháng đó có phải là hàm số không? Giải thích.



(Nguồn: http://vietnamtourism.com)

Hình 1

....
....
....
....

3. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Định nghĩa 3. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp $\mathscr{D}$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy với mọi x thuộc $\mathscr{D}$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = 2x + 4$.

a) Vẽ đồ thị hàm số trên.

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho bốn điểm: $A(-1; 2)$, $B(1; 6)$, $C(2020; 2021)$, $D(2030; 4064)$. Điểm nào thuộc đồ thị hàm số trên? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số trên?

!

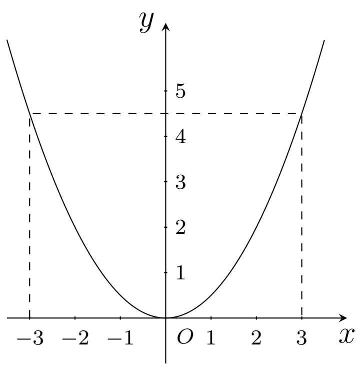
— Điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng toạ độ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x), x \in \mathscr{D}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a \in \mathscr{D} \\ b = f(a). \end{cases}$

— Để chứng tỏ điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng toạ độ không thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$, $x \in \mathscr{D}$, ta có thể kiểm tra một trong hai khả năng sau:
Khả năng 1: Chứng tỏ rằng $a \notin \mathscr{D}$.
Khả năng 2: Khi $a \in \mathscr{D}$ thì chứng tỏ rằng $b \neq f(a)$.

Ví dụ 6.
Cho hàm số $y = f(x)$ như Hình 3.

a) Trong các điểm có tọa độ $(-2; 2)$, $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(2; 2)$, $(1; 1)$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?

b) Quan sát đồ thị, tìm $f(3)$ và những điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $\dfrac{9}{2}$.



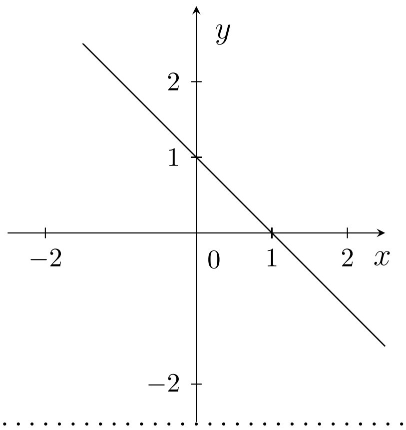
Hình 3

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 7.
Cho hàm số $y = f(x)$ như Hình 5.

a) Xác định toạ độ các giao điểm của đồ thị đó với hai trục tọa độ.

b) Hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi công thức nào?



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4. SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

1. Khái niệm

Định nghĩa 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$.

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Ví dụ 8. Chứng tỏ hàm số $y = 6x^2$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

....
....
....
....
....
....

....
....
....
....

Nhận xét. *Xét sự biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng hàm số đồng biến và các khoảng hàm số nghịch biến. Kết quả xét sự biến thiên được tổng kết trong một bảng biến thiên.*

Chẳng hạn, sau đây là bảng biến thiên của hàm số $y = 6x^2$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

① *Dấu mũi tên đi xuống (từ $+\infty$ đến 0) diễn tả hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.*

② *Dấu mũi tên đi lên (từ 0 đến $+\infty$) diễn tả hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.*

2. Mô tả hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến bằng đồ thị

Nhận xét.

① *Hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi lên " trên khoảng đó.*

② *Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi xuống" trên khoảng đó.*

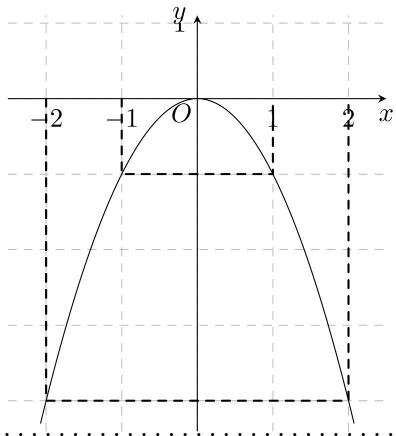
Khi nói đồ thị "đi lên " hay "đi xuống", ta luôn kể theo chiều tăng của biến số, nghĩa là kể từ trái qua phải.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Quan sát đồ thị và cho biết phát biểu nào sau đây là đúng?

① Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-2; -1)$.

② Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

③ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-1; 1)$.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

5. BÀI TẬP

Bài 1. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau

a) $y = -x^2$;

b) $y = \sqrt{2-3x}$;

c) $y = \dfrac{4}{x+1}$;

d) $y = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 2. Bảng dưới đây cho biết chỉ số $\mathrm{PM}_{2,5}$ (bụi mịn) ở Thành phố Hà Nội từ tháng 1 đến tháng 12 của năm 2019.

	Trung bình năm 2019	Tháng											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathrm{PM}_{2,5}$ (μ/m^3)	$46,9$	$59,3$	$36,0$	$50,2$	$40,3$	$45,8$	$36,5$	$30,4$	$33,1$	$48,3$	$43,2$	$66,3$	$72,7$

(*Nguồn: Báo cáo chất lượng không khí thế giới năm 2019*)

a) Nêu chỉ số $\mathrm{PM}_{2,5}$ trong tháng 2; tháng 5; tháng 10.

b) Chỉ số $\mathrm{PM}_{2,5}$ có phải là hàm số của tháng không? Tại sao?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 3. Theo quyết định số 2019/QĐ-BĐVN ngày 01/11/2018 của Tổng công ty Bưu điện Việt Nam, giá cước dịch vụ Bưu chính phổ cập đối với dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp trong nước có khối lượng đến 250g như trong bảng sau

a) Số tiền dịch vụ thư cơ bản phải trả y (đồng) có là hàm số của khối lượng thư cơ bản x (g) hay không? Nếu đúng, hãy xác định những công thức tính y.

Khối lượng đến 250 g	Mức cước (đồng)
Đến 20 g	4000
Trên 20 g đến 100 g	6000
Trên 100 g đến 250 g	8000

b) Tính số tiền phải trả khi bạn Dương gửi thư có khối lượng 150g, 200g.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 4. Cho hàm số $y = -2x^2$.

a) Điểm nào trong các điểm có tọa độ $(-1; -2)$, $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(2021; 1)$ thuộc đồ thị hàm số trên?

b) Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ lần lượt bằng -2, 3 và 10.

c) Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng -18.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

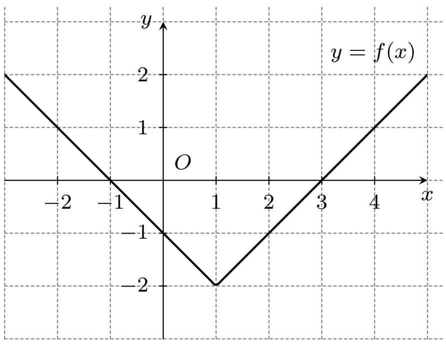
....

Bài 5.
Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình 8.

a) Trong các điểm có tọa độ $(1; -2)$; $(0; 0)$; $(2; -1)$ điểm nào thuộc đồ thị hàm số?

b) Xác định $f(0)$; $f(3)$.

c) Tìm điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng 0.



Hình 8

....

....

....

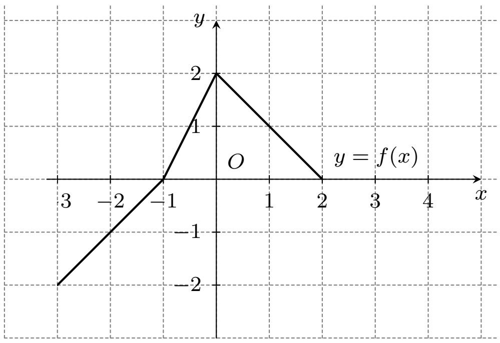
....

Bài 6. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{x}$. Chứng tỏ rằng hàm số đã cho:

a) Nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$;

b) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Bài 7.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình 9. Chỉ ra các khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.



Hình 9

Bài 8. Một lớp muốn thuê một chiếc xe khách cho chuyến tham quan với tổng đoạn đường cần di chuyển trong khoảng từ 550 km đến 600 km, có hai công ty được tiếp cận để tham khảo giá. Công ty A có giá khởi đầu là 3,75 triệu đồng cộng thêm 5000 đồng cho mỗi km chạy xe. Công ty

B có giá khởi đầu là 2,5 triệu đồng cộng thêm 7500 đồng cho mỗi km chạy xe. Lớp đó nên chọn công ty nào để chi phí là thấp nhất?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI 3. HÀM SỐ BẬC HAI. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Hàm số bậc hai là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y = ax^2 + bx + c$ trong đó a, b, c là những hằng số và a khác 0. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Định lí 1. Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ là một đường parabol có đỉnh là điểm với tọa độ $\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ và trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Nhận xét. *Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, ta có: $-\dfrac{\Delta}{4a} = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.*

Để vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, ta thực hiện các bước:

- *Xác định tọa độ của đỉnh $S\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$;*
- *Vẽ trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a}$;*
- *Xác định một số điểm đặc biệt, chẳng hạn: giao điểm của đồ thị với trục tung (điểm $A(0;c)$) và giao điểm với trục hoành (nếu có).*

  Xác định thêm điểm đối xứng với A qua trục đối xứng, là điểm $B\left(-\dfrac{b}{a}; c\right)$.
- *Vẽ đường Parabol đi qua các điểm đã xác định ta nhận được đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$.*

> **!**
> - Nếu $a > 0$ thì parabol có bề lõm quay lên trên.
> - Nếu $a < 0$ thì parabol có bề lõm quay xuống dưới.

Nhận xét. *Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$.*

- *Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$.*
- *Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$.*

Ta có bảng biến thiên của hàm số bậc hai như sau:

$a > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

Ví dụ 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai? Với những hàm số bậc hai đó, xác định a, b, c lần lượt là hệ số của x^2, hệ số của x và hệ số tự do.

① $y = 8x^2 - 6x + 1$;

② $y = 2x + 2021$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2. Vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = x^2 - 2x - 3$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3. Vẽ đồ thị mỗi hàm số bậc hai sau

① $y = x^2 - 4x - 3$; ② $y = x^2 + 2x + 1$; ③ $y = x^2 - 2$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4. Nêu khoảng đồng biến, nghịch biến của mỗi hàm số sau

① $y = 3x^2 + 5x - 2$; ② $y = -4x^2 + 6x + 3$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5. Lập bảng biến thiên của mỗi hàm số sau

① $y = x^2 - 3x + 4$; ② $y = -2x^2 + 5$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

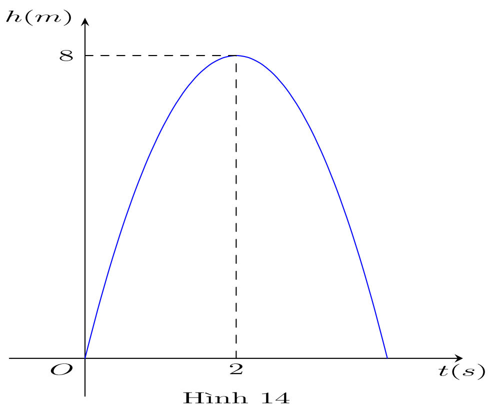
. . . .

. . . .

. . . .

Ví dụ 6.

Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Hình 14 minh hoạ quỹ đạo của quả bóng là một phần của cung parabol trong mặt phẳng toạ độ Oth, trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên và h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ mặt đất. Sau khoảng thời gian 2 s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8 m.



Hình 14

a) Tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống này.

b) Tính độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3 s.

c) Sau bao nhiêu giây thì quả bóng chạm đất kể từ khi đá lên?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai? Với những hàm số bậc hai đó, xác định a, b, c lần lượt là hệ số của x^2, hệ số của x và hệ số tự do.

① $y = -3x^2$; ② $y = 2x(x^2 - 6x + 1)$; ③ $y = 4x(2x - 5)$.

. . . .

. . . .

. . . .

Bài 2. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 4$ trong mỗi trường hợp sau

a) Đi qua điểm $M(1; 12)$ và $N(-3; 4)$;

b) Có đỉnh là $I(-3; -5)$.

. . . .

Bài 3. Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau

① $y = 2x^2 - 6x + 4$; ② $y = -3x^2 - 6x - 3$.

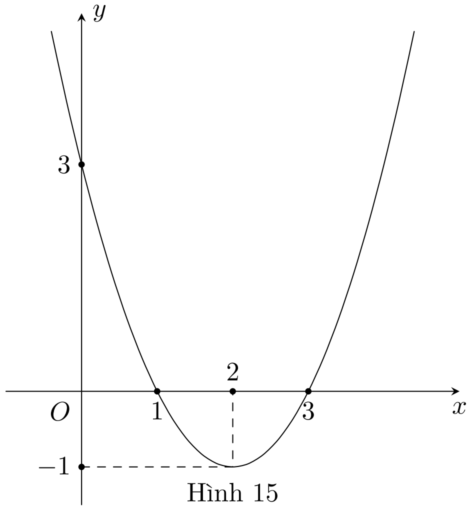
. . . .

Bài 4.

Cho đồ thị hàm số bậc hai ở Hình 15.

a) Xác định trục đối xứng, tọa độ đỉnh của đồ thị hàm số.

b) Xác định các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.



Hình 15

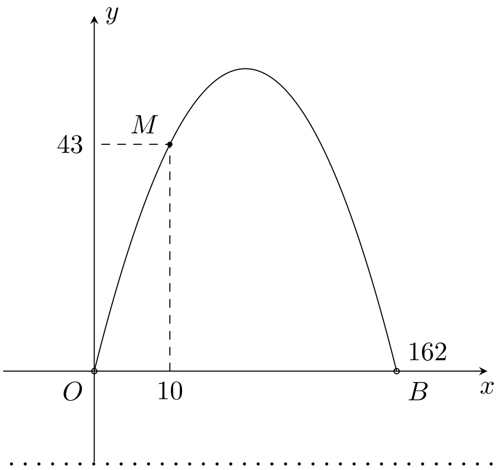
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5. Nêu khoảng đồng biến, nghịch biến của mỗi hàm số sau:

① $y = 5x^2 + 4x - 1$; ② $y = -2x^2 + 8x + 6$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6. Khi du lịch đến thành phố St. Louis (Mỹ), ta sẽ thấy một cái cổng lớn có hình parabol hướng bề lõm xuống dưới, đó là cổng Arch. Giả sử ta lập một hệ tọa độ Oxy sao cho chân cổng đi qua gốc O như hình 16 (x và y tính bằng mét), chân kia của cổng ở vị trí có tọa độ $(162;0)$. Biết một điểm M trên cổng có tọa độ là $(10;43)$. Tính chiều cao của cổng Arch (tính từ điểm cao nhất trên cổng xuống mặt đất), làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

BÀI 4. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

1. ĐỊNH LÍ

Định lí 1. Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

— Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

— Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$.

— Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$. Khi đó
$f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$.
$f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x thuộc khoảng $(x_1; x_2)$.

! Trong định lí, có thể thay biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ bằng biệt thức thu gọn $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b = 2b'$.

Ví dụ 1. Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau

① $f(x) = 3x^2 - x + 1$; ② $y = 4x^2 + 4x + 1$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2. Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau

① $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$; ② $y = -x^2 + 6x - 9$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3. Lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

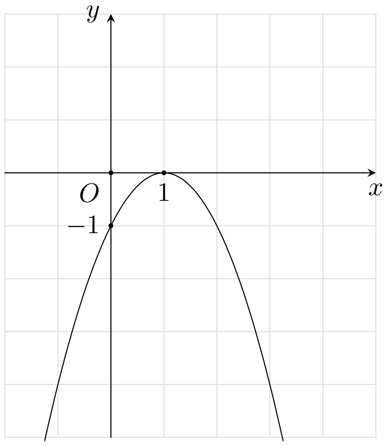
....
....
....
....
....

....
....
....
....
....

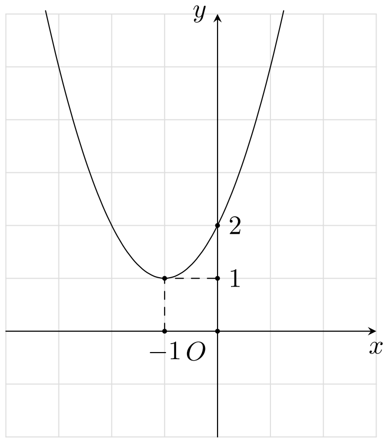
Ví dụ 4. Lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 - 2x + 8$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

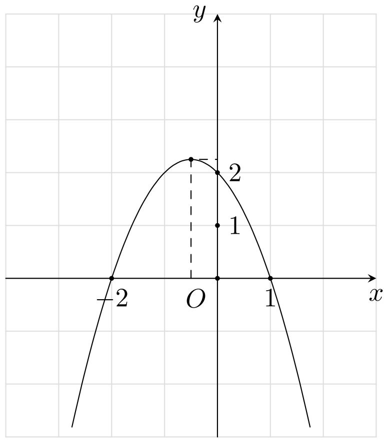
Ví dụ 5. Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ ứng với đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho ở mỗi hình sau.



a)



b)



c)

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6. Để xây dựng phương án kinh doanh cho một loại sản phẩm, doanh nghiệp tính toán lợi nhuận y (đồng) theo công thức sau $y = -200x^2 + 92000x - 8400000$, trong đó x là số sản phẩm được bán ra. Cho biết doanh nghiệp có lãi khi nào, bị lỗ khi nào.

....
....
....
....
....
....

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2. BÀI TẬP VẬN DỤNG

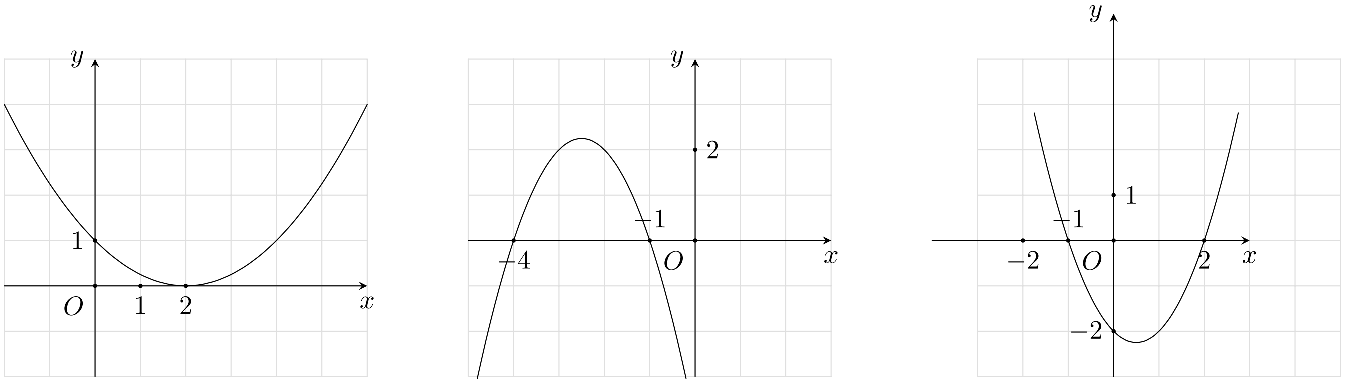
Bài 1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) $x^2 - 2x - 3 > 0$ khi và chỉ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

b) $x^2 - 2x - 3 < 0$ khi và chỉ khi $x \in [-1; 3]$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 2. Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ với đồ thị được cho ở mỗi hình



a) b) c)

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 3. Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau

① $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$; ② $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$; ③ $f(x) = 2x^2 - 3x + 10$;

④ $f(x) = -5x^2 + 2x + 3$; ⑤ $f(x) = -4x^2 + 8x - 4$; ⑥ $f(x) = -3x^2 + 3x - 1$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4. Một công ty du lịch thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau:
50 khách đầu tiên có giá là 300 000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 50 người đăng kí thì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 5 000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

a) Gọi x là số lượng khách từ người thứ 51 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x.

b) Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực sự cho chuyến đi là 15 080 000 đồng.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5. Bộ phận nghiên cứu thị trường của một xí nghiệp xác định tổng chi phí để sản xuất Q sản phẩm là $Q^2 + 180Q + 140000$ (nghìn đồng). Giả sử giá mỗi sản phẩm bán ra thị trường là 1200 nghìn đồng.

a) Xác định lợi nhuận xí nghiệp thu được sau khi bán hết Q sản phẩm đó, biết rằng lợi nhuận là hiệu của doanh thu trừ đi tổng chi phí để sản xuất.

b) Xí nghiệp sản xuất bao nhiêu sản phẩm thì hòa vốn?

c) Xí nghiệp cần sản xuất số sản phẩm là bao nhiêu để không bị lỗ?

....
....
....

BÀI 5. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1.

— Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$$ax^2 + bx + c < 0; ax^2 + bx + c \leq 0; ax^2 + bx + c > 0; ax^2 + bx + c \geq 0$$

trong đó a, b, c là các số thực đã cho, $a \neq 0$.

— Đối với bất phương trình bậc hai có dạng $ax^2+bx+c < 0$, mỗi số $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $ax_0^2+bx_0+c < 0$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình đó.
Tập hợp các nghiệm x_0 như thế còn được gọi là tập nghiệm của bất phương trình bậc hai đã cho.
Nghiệm và tập nghiệm của các dạng bất phương trình bậc hai ẩn x còn lại được định nghĩa tương tự.

Nhận xét. *Để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x) > 0$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$), ta chuyển việc giải bất phương trình đó về việc tìm tập hợp những giá trị của x sao cho $f(x)$ mang dấu "+". Cụ thể, ta làm như sau*

— ***Bước 1.*** *Xác định dấu của hệ số a và tìm nghiệm của $f(x)$ (nếu có).*

— ***Bước 2.*** *Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai để tìm tập hợp những giá trị của x sao cho $f(x)$ mang dấu "+".*

! *Các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x) < 0, f(x) \geq 0, f(x) \leq 0$ được giải bằng cách tương tự.*

Nhận xét.

— *Giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ là tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía trên trục hoành.*

— *Tương tự, giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$ là tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía dưới trục hoành.*
Như vậy, để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x) > 0$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$) bằng cách sử dụng đồ thị, ta có thể làm như sau: Dựa vào parabol $y = ax^2 + bx + c$, ta tìm tập hợp những giá trị của x ứng vối phần parabol đó nằm phía trên trục hoành. Đối vối các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x) < 0, f(x) \geq 0, f(x) \leq 0$, ta cũng làm tương tự.

Ví dụ 1. Cho bất phương trình bậc hai một ẩn $x^2 - 4x + 3 < 0$ (1). Trong các giá trị sau đây của x, giá trị nào là nghiệm của bất phương trình (1)?

① $x = 2$. ② $x = 0$. ③ $x = 3$.

....
....
....
....
....

....
....
....
....
....

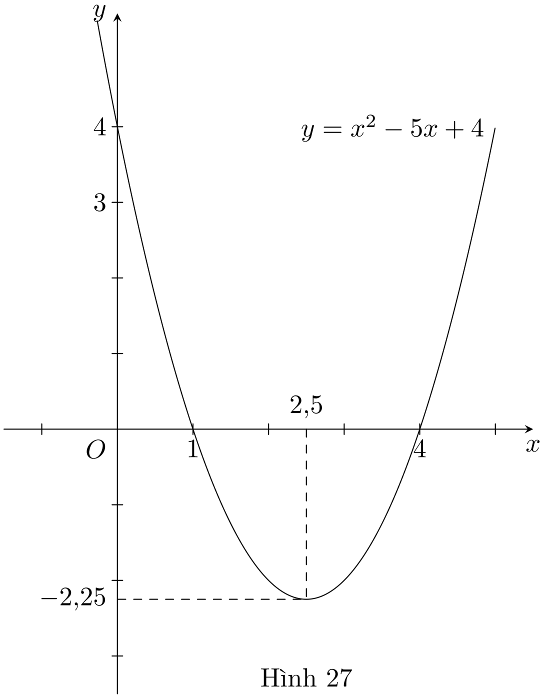
Ví dụ 2. Giải các bất phương trình bậc hai sau

① $2x^2 - 5x + 2$. ② $-x^2 - 2x + 8$.

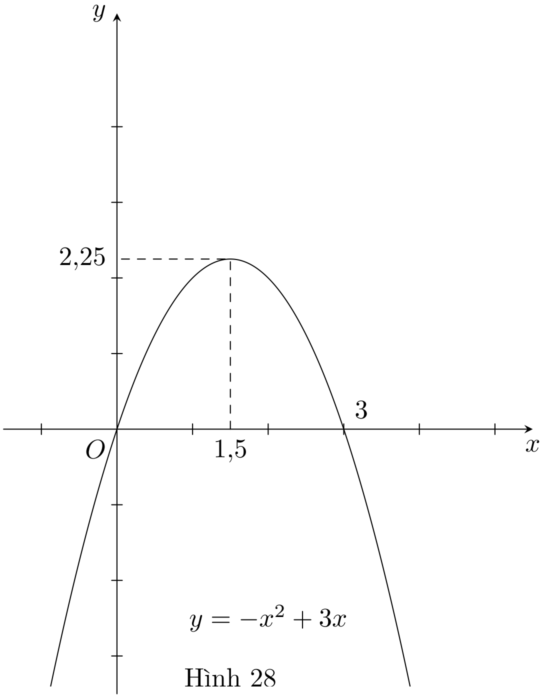
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3. Quan sát đồ thị ở *Hình 27*, *Hình 28* và giải các bất phương trình bậc hai sau

① $y = x^2 - 5x + 4$. ② $y = -x^2 + 3x$.



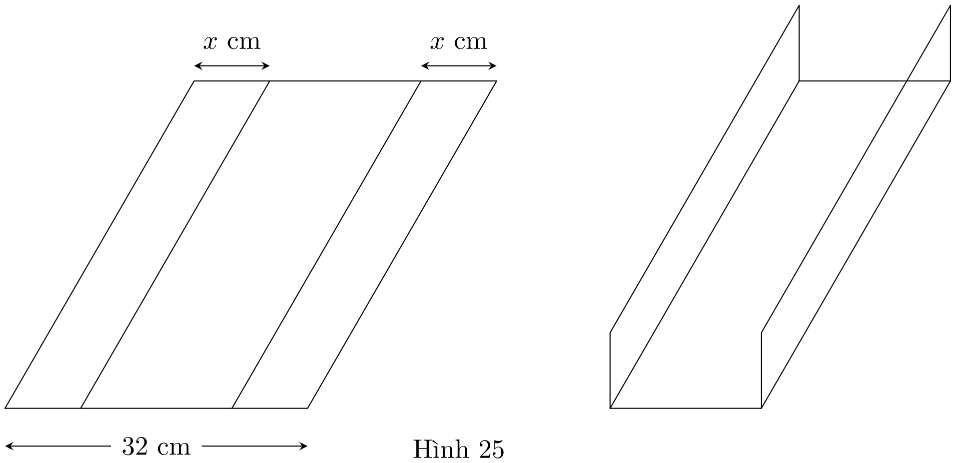
Hình 27



Hình 28

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4. Bác Dũng muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật với bề ngang 32 cm thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông (Hình 25). Để đảm bảo kĩ thuật, diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng 120 cm^2.



Hình 25

. . . .

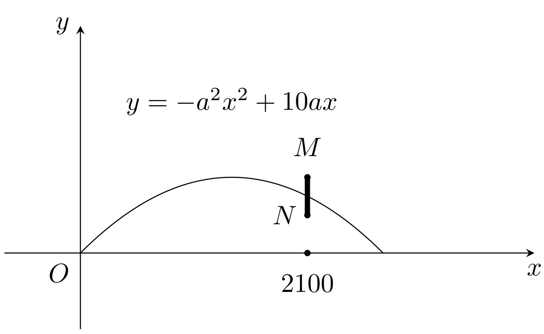
Ví dụ 5. Tìm giao các tập nghiệm của hai bất phương trình sau

$$x^2 + 2x - 8 < 0 \quad (3) \text{ và } x^2 - 9 < 0 \quad (4).$$

. . . .

Ví dụ 6.

Một tình huống trong huấn luyện pháo binh được mô tả như sau: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, khẩu đại bác được biểu thị bằng điểm $O(0;0)$ và bia mục tiêu được biểu thị bằng đoạn thẳng MN với $M(2100;25)$ và $N(2100;15)$ (Hình 29). Xạ thủ cần xác định parabol $y = -a^2x^2 + 10ax$ $(a > 0)$ mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn sao cho viên đạn bắn ra từ khẩu đại bác phải chạm vào bia mục tiêu. Tìm giá trị lớn nhất của a để xạ thủ đạt được mục đích trên.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 7. Tổng chi phí T (đơn vị tính: nghìn đồng) để sản xuất Q sản phẩm được cho bởi biểu thức $T = Q^2 + 30Q + 3300$; giá bán của 1 sản phẩm là 170 nghìn đồng. Số sản phẩm được sản xuất trong khoảng nào để đảm bảo không bị lỗ (giả thiết các sản phẩm được bán hết)?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

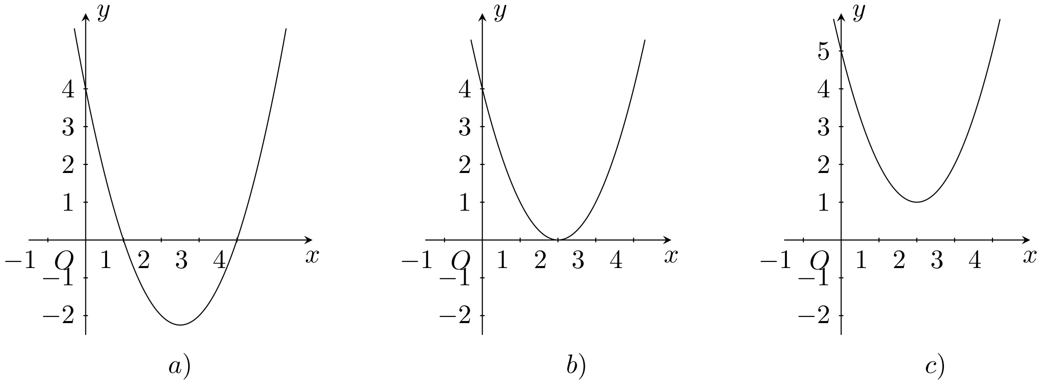
2. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc hai một ẩn? Vì sao?

① $-2x + 2 < 0$. ② $\frac{1}{2}y^2 - \sqrt{2}(y+1) \leq 0$. ③ $y^2 + x^2 - 2x \geq 0$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Dựa vào đồ thị hàm số bậc hai $y = f(x)$ trong mỗi Hình $a), b), c)$, hãy viết tập nghiệm của mỗi bất phương trình sau: $f(x) > 0$; $f(x) < 0$; $f(x) \geq 0$; $f(x) \leq 0$.



....

Bài 3. Giải các bất phương trình bậc hai sau

① $2x^2 - 5x + 3 > 0$.

② $-x^2 - 2x + 8 \leq 0$.

③ $4x^2 - 12x + 9 < 0$.

④ $-3x^2 + 7x - 4 \geq 0$.

....

Bài 4. Tìm m để phương trình $2x^2 + (m+1)x + m - 8 = 0$ có nghiệm.

....

....

Bài 5. Xét hệ toạ độ Oth trên mặt phẳng, trong đó trục Ot biểu thị thời gian t (tính bằng giây) và trục Oh biểu thị độ cao h (tính bằng mét). Một quả bóng được đá lên từ điểm $A(0;0{,}2)$ và chuyển động theo quỹ đạo là một cung parabol. Quả bóng đạt độ cao 8,5 m sau 1 giây và đạt độ cao 6 m sau 2 giây.

① Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị quỹ đạo chuyển động của quả bóng.

② Trong khoảng thời gian nào thì quả bóng vẫn chưa chạm đất?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6. Công ty An Bình thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau 10 khách đầu tiên có giá là 800000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 10 người đăng kí thì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 10000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

① Gọi x là số lượng khách từ người thứ 11 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x.

② Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực sự cho chuyến đi là 700000 đồng/người.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI 6. HAI DẠNG PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. ĐỊNH NGHĨA

Định lí 1. Để giải phương trình $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ **(I)**, ta làm như sau

— **Bước 1.** Bình phương hai vế của (I) dẫn đến phương trình $f(x) = g(x)$ rồi tìm nghiệm của phương trình này.

— **Bước 2.** Thay từng nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ vào bất phương trình $f(x) \geq 0$(hoặc $g(x) \geq 0$). Nghiệm nào thoả mãn bất phương trình đó thì giữ lại, nghiệm nào không thoả mãn thì loại đi.

— **Bước 3.** Trên cơ sở những nghiệm giữ lại ở Bước 2, ta kết luận nghiệm của phương trình (I).

!

— Trong hai bất phương trình $f(x) \geq 0$ và $g(x) \geq 0$, ta thường chọn bất phương trình có dạng đơn giản hơn để thực hiện *Bước 2*.

— Người ta chứng minh được rằng tập hợp (số thực) giữ lại ở *Bước 2* chính là tập nghiệm của phương trình **(I)**.

Định lí 2. Để giải phương trình $\sqrt{f(x)} = g(x)$ **(II)**, ta làm như sau

— **Bước 1.** Giải bất phương trình $g(x) \geq 0$ để tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

— **Bước 2.** Bình phương hai vế của (II) dẫn đến phương trình $f(x) = [g(x)]^2$ rồi tìm nghiệm của phương trình đó.

— **Bước 3.** Trong những nghiệm của phương trình $f(x) = [g(x)]^2$, ta chỉ giữ lại những nghiệm thuộc tập nghiệm của bất phương trình $g(x) \geq 0$. Tập nghiệm giữ lại đó chính là tập nghiệm của phương trình (II).

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 6x - 4} = \sqrt{x - 4}$. (1)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 3x + 1} = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$. (3)

....

....

....

....

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2-6x+6}=2x-1. \tag{5}$$

Ví dụ 4. Trong bài toán ở phần mở đầu, hãy giải thích vì sao thời gian x (giờ) để hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km thoả mãn phương trình $\sqrt{(8-40x)^2+(7-40x)^2}=5$. Sau đó, hãy giải phương trình trên.

2. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải các phương trình sau:

① $\sqrt{2x^2-3x-1}=\sqrt{2x+3}$.

② $\sqrt{4x^2-6x-6}=\sqrt{x^2-6}$.

③ $\sqrt{x+9}=2x-3$.

④ $\sqrt{-x^2+4x-2}=2-x$.

. . . .
. . . .

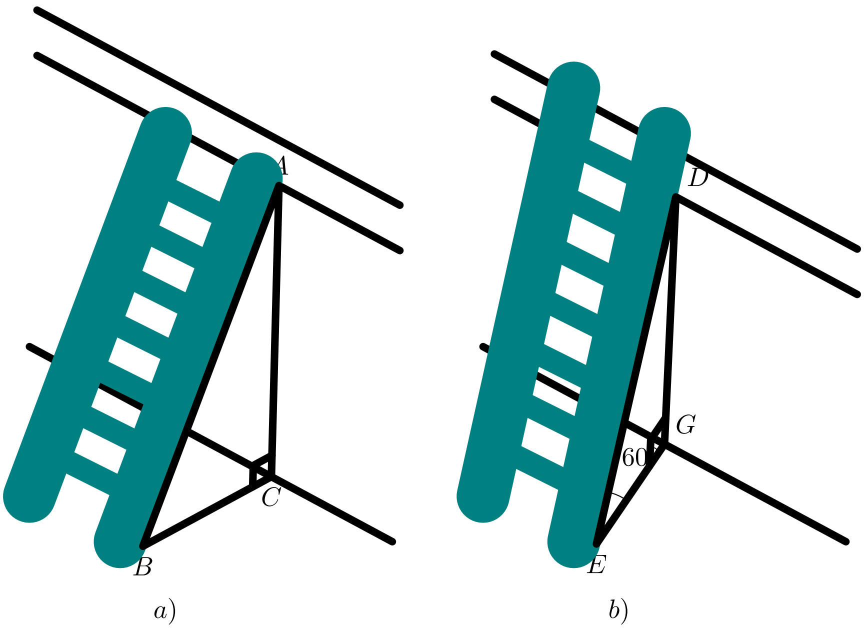
Bài 2. Giải các phương trình sau:

① $\sqrt{2-x}+2x=3$

② $\sqrt{-x^2+7x-6}+x=4$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 3. Để leo lên một bức tường, bác Nam dùng một chiếc thang có chiều dài cao hơn bức tường đó 1 m. Ban đầu, bác Nam đặt chiếc thang mà đầu trên của chiếc thang đó vừa chạm đúng vào mép trên bức tường (Hình 33a). Sau đó, bác Nam dịch chuyển chân thang vào gần chân tường thêm $0,5$ m thì bác Nam nhận thấy thang tạo với mặt đất một góc $60°$ (Hình 33b). Bức tường cao bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

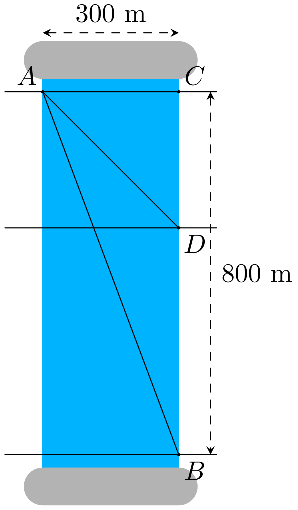


Hình 33

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

. . . .
. . . .

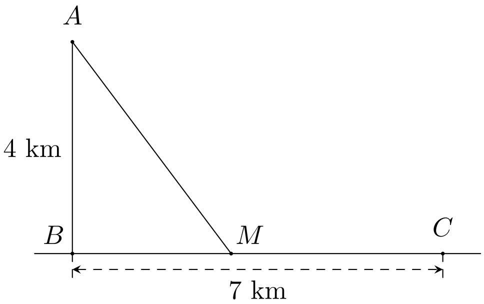
Bài 4.
Một người đứng ở điểm A trên một bờ sông rộng 300 m, chèo thuyền đến vị trí D, sau đó chạy bộ đến vị trí B cách C một khoảng 800 m như Hình 34. Vận tốc chèo thuyền là 6 km/h, vận tốc chạy bộ là 10 km/h và giả sử vận tốc dòng nước không đáng kể. Tính khoảng cách từ vị trí C đến D, biết tổng thời gian người đó chèo thuyền và chạy bộ từ A đến B là 7,2 phút.



Hình 34

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 5.
Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng cách $AB = 4$ km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 3 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 5 km/h như Hình 35 . Tính khoảng cách từ vị trí B đến M, biết thời gian người đó đi từ A đến C là 148 phút.



Hình 35

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

BÀI 7. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

Bài 1. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau

① $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$; ② $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$; ③ $y = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

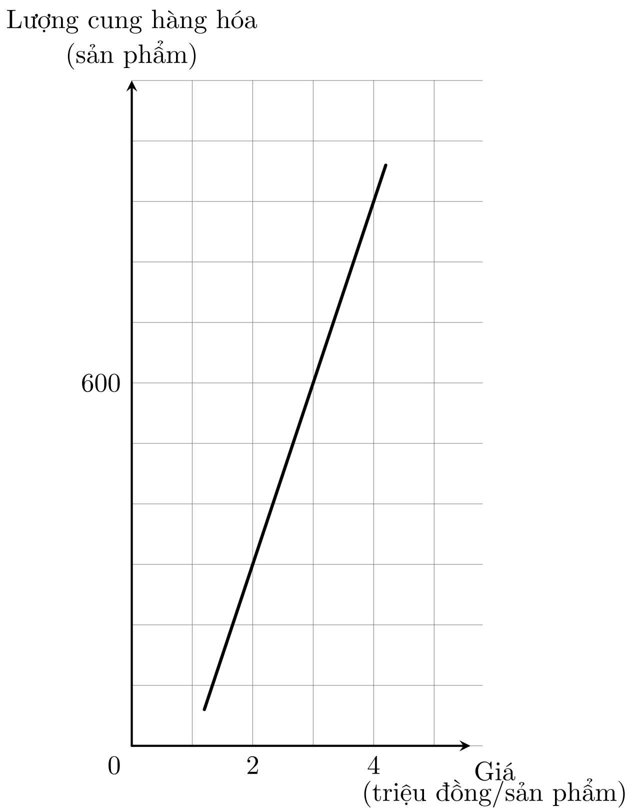
. . . .

. . . .

Bài 2.
Đồ thị ở hình 36 cho thấy sự phụ thuộc của lượng hàng hóa được sản xuất (cung) (đơn vị: sản phẩm) bởi giá bán (đơn vị: triệu đồng/sản phẩm) đối với một loại hàng hóa.

① Xác định lượng hàng hóa được sản xuất khi mức giá bán 1 sản phẩm là 2 triệu đồng; 4 triệu đồng.

② Biết nhu cầu thị trường đang cần là 600 sản phẩm. Hỏi với mức giá bán là bao nhiêu thì thị trường cân bằng (thị trường cân bằng khi sản lượng cung bằng sản lượng cầu)?



Hình 36

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .
. . . .

Bài 3. Một nhà cung cấp dịch vụ Internet đưa ra hai gói khuyến mãi cho người dùng như sau:
Gói A: Giá cước 190000 đồng/tháng.
Nếu trả tiền cước ngay 6 tháng thì được tặng thêm 1 tháng.
Nếu trả tiền cước ngay 12 tháng thì được tặng thêm 2 tháng.
Gói B: Giá cước 189000 đồng/tháng.
Nếu trả tiền cước ngay 7 tháng thì số tiền phải trả cho 7 tháng đó là 1134000 đồng.
Nếu trả tiền cước ngay 15 tháng thì số tiền phải trả cho 15 tháng đó là 2268000 đồng.
Giả sử số tháng sử dụng Internet là x (x nguyên dương).

① Hãy lập các hàm số thể hiện số tiền phải trả ít nhất theo mỗi gói A, B nếu thời gian dùng không quá 15 tháng.

② Nếu gia đình bạn Minh dùng 15 tháng thì nên chọn gói nào?

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 4. Quan sát đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ở hình *37a* và hình *37b* rồi nêu:

① Dấu của hệ số a;

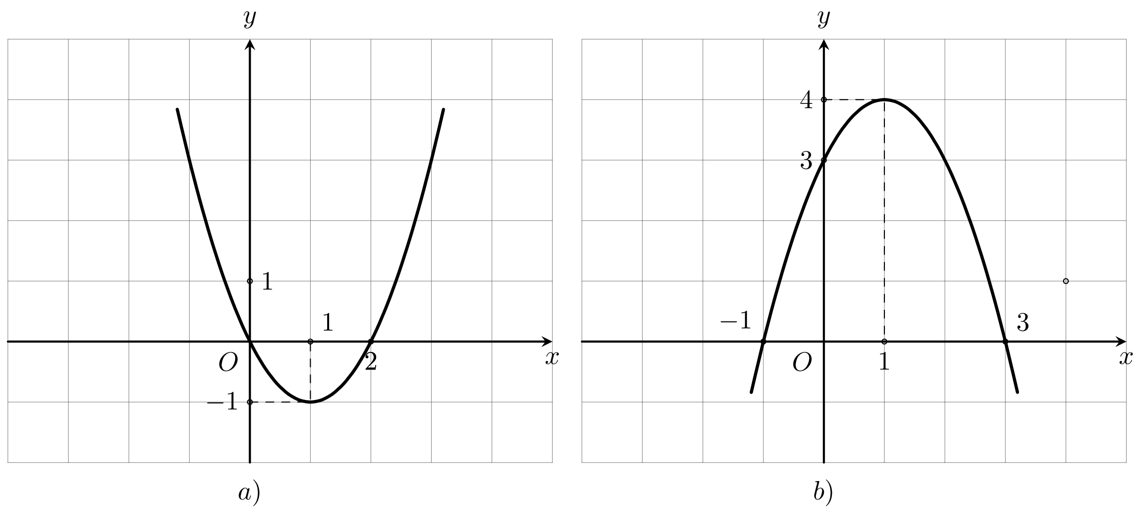
② Tọa độ đỉnh và trục đối xứng;

③ Khoảng đồng biến;

④ Khoảng nghịch biến;

⑤ Khoảng giá trị x mà $y > 0$;

⑥ Khoảng giá trị x mà $y \leq 0$.



. . . .

Bài 5. Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau

① $y = x^2 - 3x - 4$; ② $y = x^2 + 2x + 1$; ③ $y = -x^2 + 2x - 2$.

. . . .

Bài 6. Lập bảng xét dấu mỗi tam thức bậc hai sau

① $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$; ② $f(x) = x^2 - x - 12$; ③ $f(x) = 16x^2 + 24x + 9$.

. . . .

Bài 7. Giải các bất phương trình bậc hai sau

① $2x^2 + 3x + 1 \geq 0$; ② $-3x^2 + x + 1 > 0$; ③ $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$;

④ $-16x^2 + 8x - 1 < 0$; ⑤ $2x^2 + x + 3 < 0$; ⑥ $-3x^2 + 4x - 5 < 0$.

. . . .

....

....

....

....

....

....

Bài 8. Giải các phương trình

① $\sqrt{x+2} = x$;

② $\sqrt{2x^2+3x-2} = \sqrt{x^2+x+6}$;

③ $\sqrt{2x^2+3x-1} = x+3$.

....

....

....

....

....

....

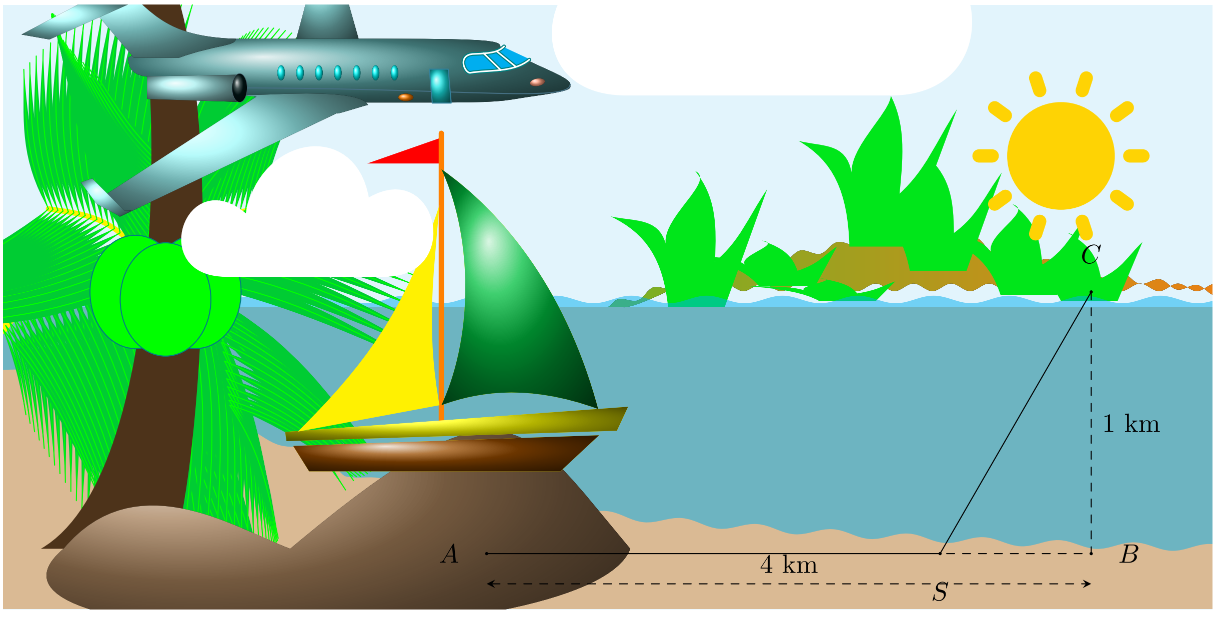
....

....

....

....

Bài 9. Một kĩ sư thiết kế đường dây điện từ vị trí A đến vị trí S và từ vị trí S đến vị trí C trên cù lao như *Hình 38*. Tiền công thiết kế mỗi ki-lô-mét đường dây từ A đến S và từ S đến C lần lượt là 3 triệu đồng và 5 triệu đồng. Biết tổng số tiền công là 16 triệu đồng. Tính tổng số ki-lô-mét đường dây đã thiết kế.



....

....

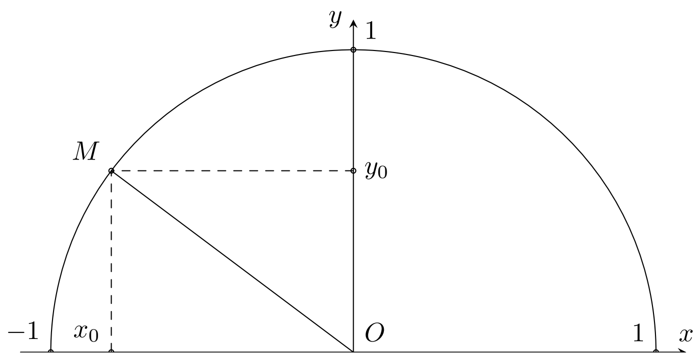
....

....
....
....
....
....
....
....

BÀI 8. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ $0°$ ĐẾN $180°$. ĐỊNH LÝ CÔSIN VÀ ĐỊNH LÝ SIN TRONG TAM GIÁC

1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ $0°$ ĐẾN $180°$

Trong mặt phẳng Oxy, nửa đường tròn tâm O, nằm phía trên trục hoành, bán kính $R = 1$ được gọi là *nửa đường tròn đơn vị*. Với mỗi góc α $(0° \leq \alpha \leq 180°)$, ta xác định một điểm $M(x_0; y_0)$ duy nhất sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Từ đó ta có định nghĩa sau đây.



Định nghĩa 1.

- sin của góc α, kí hiệu là $\sin\alpha$, được xác định bởi: $\sin\alpha = y_0$;
- côsin của góc α, kí hiệu là $\cos\alpha$, được xác định bởi: $\cos\alpha = x_0$;
- tang của góc α, kí hiệu là $\tan\alpha$, được xác định bởi $\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}$ $(x_0 \neq 0)$;
- côtang của góc α, kí hiệu là $\cot\alpha$, được xác định bởi $\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}$ $(y_0 \neq 0)$.

Các số $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là các *giá trị lượng giác* của góc α.

Ví dụ 1. Tính các giá trị lượng giác của góc $0°$, $90°$, $180°$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Từ định nghĩa, ta suy ra

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $(\alpha \neq 90^\circ)$;
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$;
- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ $(0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$;
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ $(0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$;
- $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha$ $(0^\circ < \alpha \leq 90^\circ)$;
- $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha$ $(0^\circ \leq \alpha < 90^\circ)$.

Với $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, ta có

- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$;
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$;
- $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$ $(\alpha \neq 90^\circ)$;
- $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$ $(\alpha \neq 0^\circ,\ \alpha \neq 180^\circ)$.

Ví dụ 2. Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức

$$T = \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \cos 55^\circ + \cos 165^\circ - \cos 180^\circ.$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3. Viết giá trị lượng giác của góc 120°.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

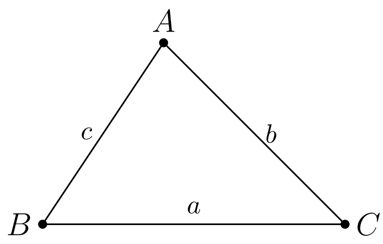
Bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\parallel$

2. ĐỊNH LÝ CÔSIN

Định lí 1 (Định lý côsin).
Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Khi đó

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$



Hệ quả 1.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 5$ và $\widehat{A} = 120^\circ$.

1. Tính $\cos A$;
2. Tính độ dài cạnh BC.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

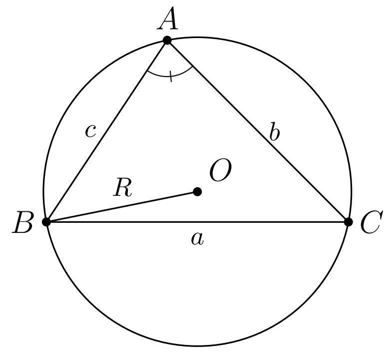
Ví dụ 5. Hai máy bay cùng xuất phát từ một sân bay A và bay theo hai hướng khác nhau, tạo với nhau một góc 60°. Máy bay thứ nhất bay với vận tốc 650 km/h, máy bay thứ hai bay với vận tốc 900 km/h. Sau hai giờ, hai máy bay cách nhau bao nhiêu ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết rằng hai máy bay bay theo đường thẳng và sau hai giờ cả hai máy bay chưa đều hạ cánh.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

3. ĐỊNH LÝ SIN

Định lí 2 (Định lý sin).
Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp R. Khi đó

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$



Từ định lý sin, ta rút ra hệ quả sau đây
Hệ quả 2.

$$\begin{aligned} a &= 2R \cdot \sin A; \\ b &= 2R \cdot \sin B; \\ c &= 2R \cdot \sin C. \end{aligned}$$

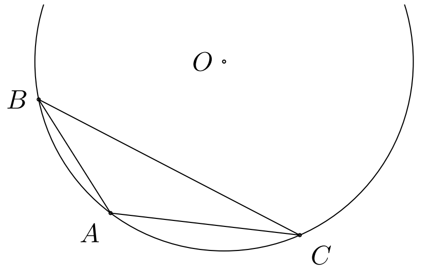
> ! Định lý sin cho ta mối tương quan (tỉ lệ thuận) giữa độ dài cạnh và độ lớn của góc đối diện trong một tam giác.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$ và $CA = 20$. Tính

1. $\sin A$;
2. Độ dài cạnh BC và bán kính đường tròn ngoại tiếp R của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Ví dụ 7.
Các nhà khảo cổ học tìm được một mảnh chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ. Để xác định đường kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy ba điểm trên vành đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như sau $BC = 28{,}5$ cm, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính đường kính của chiếc đĩa theo xăng-ti-mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



. . . .

4. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC có $AB = 3{,}5$; $AC = 7{,}5$; $\widehat{A} = 135^\circ$. Tính độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

. . . .

Bài 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 75^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$ và $BC = 50$. Tính độ dài cạnh AB.

. . . .

Bài 3. Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $AC = 7$, $BC = 8$. Tính $\cos A$, $\sin A$ và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

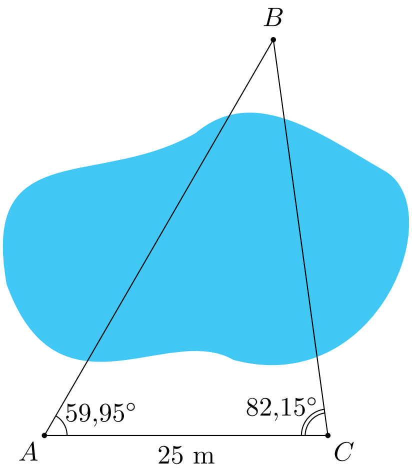
Bài 4. Tính giá trị đúng của các biểu thức sau (không dùng máy tính cầm tay).

1. $A = \cos 0^\circ + \cos 40^\circ + \cos 120^\circ + \cos 140^\circ$;
2. $B = \sin 5^\circ + \sin 150^\circ - \sin 175^\circ + \sin 180^\circ$;
3. $C = \cos 15^\circ + \cos 35^\circ - \sin 75^\circ - \sin 55^\circ$;
4. $D = \tan 25^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 115^\circ$;
5. $E = \cot 10^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \cot 100^\circ$.

Bài 5. Cho tam giác ABC. Chứng minh

1. $\sin \dfrac{A}{2} = \cos \dfrac{B+C}{2}$;
2. $\tan \dfrac{B+C}{2} = \cot \dfrac{A}{2}$.

Bài 6.
Để đo khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B ở hai bên bờ một cái ao, bạn An đi dọc bờ ao từ vị trí A đến vị trí C và tiến hành đo các góc BAC, BCA. Biết $AC = 25$ m, $\widehat{BAC} = 59{,}95^\circ$, $\widehat{BCA} = 82{,}15^\circ$ (hình vẽ bên). Hỏi khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



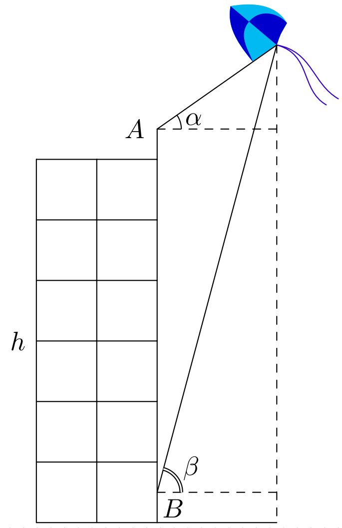
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7. Hai tàu đánh cá cùng xuất phát từ bến A và đi thẳng đều về hai vùng biển khác nhau, theo hai hướng tạo với nhau góc 75°. Tàu thứ nhất chạy với vận tốc 8 hải lí một giờ và tàu thứ hai chạy với tốc độ 12 hải lí một giờ. Sau 2,5 giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là bao nhiêu hải lí (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 8.

Bạn A đứng ở đỉnh của tòa nhà và quan sát chiếc diều, nhận thấy góc nâng (góc nghiêng giữa phương từ mắt của bạn A tới chiếc diều và phương nằm ngang) là $\alpha = 35^\circ$; khoảng cách từ đỉnh tòa nhà tới mắt bạn A là 1,5 m. Cùng lúc đó ở dưới chân tòa nhà, bạn B cũng quan sát chiếc diều và thấy góc nâng là $\beta = 75^\circ$; khoảng cách từ mặt đất tới mắt bạn B cũng là 1,5 m. Biết chiều cao của tòa nhà là $h = 20$ m (minh họa ở hình bên). Chiếc diều bay cao bao nhiêu mét so với mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI 9. GIẢI TAM GIÁC

1. TÍNH CÁC CẠNH VÀ GÓC CỦA TAM GIÁC DỰA TRÊN MỘT SỐ ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Một tam giác hoàn toàn xác định nếu biết một trong những dữ kiện sau:

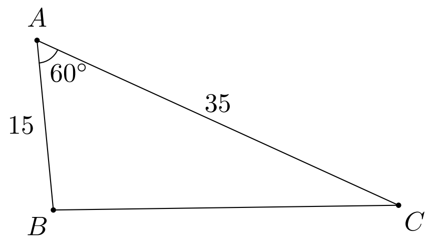
— Biết độ dài hai cạnh và độ lớn góc xen giữa hai cạnh đó;

— Biết độ dài ba cạnh;

— Biết độ dài một cạnh và độ lớn hai góc kề với cạnh đó.

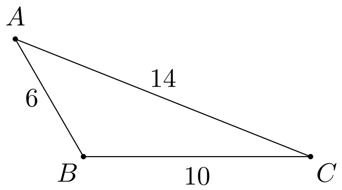
Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên những dữ kiện cho trước.

Ví dụ 1.
Cho tam giác ABC có $AB = 15$, $AC = 35$, $\widehat{A} = 60^\circ$ (hình bên). Tính cạnh BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) và góc B (làm tròn kết quả đến độ).



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

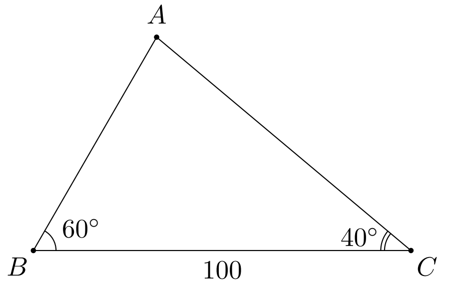
Ví dụ 2.
Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $BC = 10$, $CA = 14$ (hình bên). Tính số đo góc B.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.

Cho tam giác ABC có $BC = 100$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$ (hình bên). Tính góc A và các cạnh AB, AC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) của tam giác đó.



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

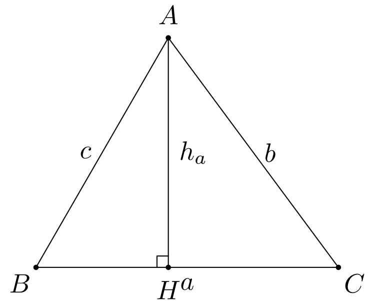
. . . .

. . . .

. . . .

2. TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Kí hiệu h_a, h_b, h_c là các đường cao của tam giác ABC lần lượt vẽ từ các đỉnh A, B, C. Khi đó, diện tích S của tam giác ABC là

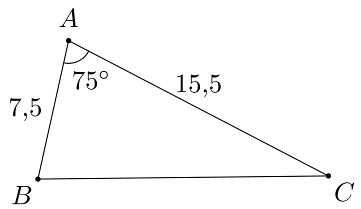


— $S = \dfrac{1}{2}a \cdot h_a = \dfrac{1}{2}b \cdot h_b = \dfrac{1}{2}c \cdot h_c$

— $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C$.

— $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Ví dụ 4.
Cho tam giác ABC có $AB = 7{,}5$; $AC = 15{,}5$; $\widehat{A} = 75^\circ$ (hình bên). Tính diện tích S của tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

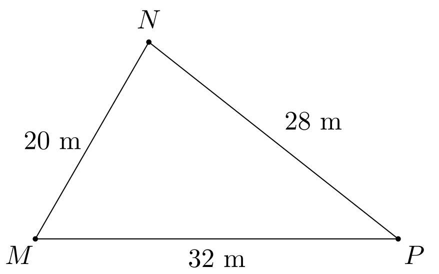
Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có $AB = 12$; $\widehat{B} = 60^\circ$; $\widehat{C} = 45^\circ$. Tính diện tích của tam giác ABC.

. . . .

. . . .

. . . .

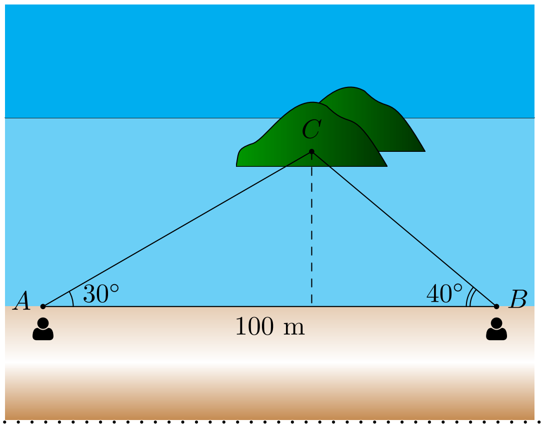
Ví dụ 6.
Mảnh vườn hình tam giác của gia đình bạn Nam có chiều dài các cạnh là $MN = 20$ m, $NP = 28$ m, $MP = 32$ m (hình bên). Hỏi diện tích mảnh vườn của gia đình bạn Nam là bao nhiêu mét vuông (làm tròn đến hàng phần mười)?



. . . .

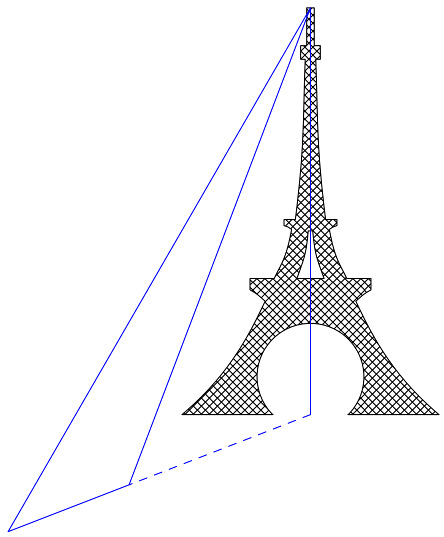
3. ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN THỰC TIỄN

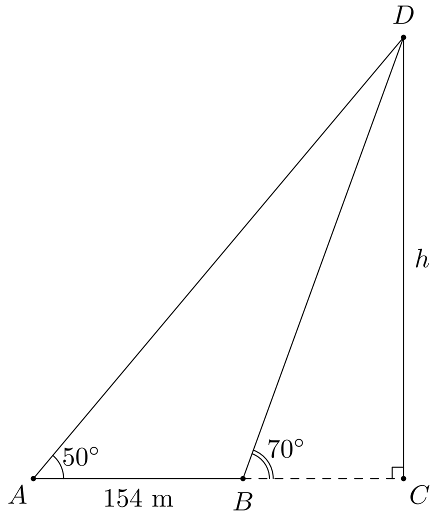
Ví dụ 7.
Đứng ở vị trí A trên bờ biển, bạn Minh đo được góc nghiêng so với bờ biển tới một vị trí C trên đảo là 30°. Sau đó di chuyển dọc bờ biển đến vị trí B cách A một khoảng 100 m và đo được góc nghiêng so với bờ biển tới vị trí C đã chọn là 40°. Tính khoảng cách từ vị trí C trên đảo tới bờ biển theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



. . . .

Ví dụ 8. Trong lần đến tham quan tháp Eiffel (ở Thủ đô Paris, Pháp), bạn Phương muốn ước tính độ cao của tháp. Sau khi quan sát, bạn Phương đã minh họa lại kết quả đo đạc ở *Hình 27*. Em hãy giúp bạn Phương tính độ cao h của tháp Eiffel (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



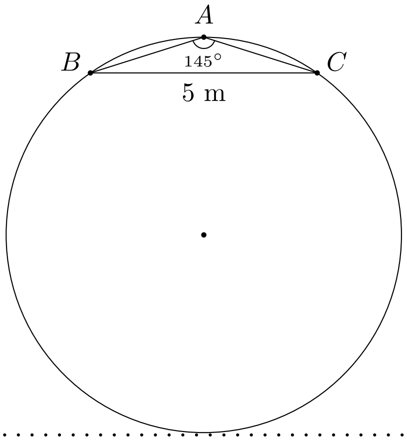


Hình 27

Ví dụ 9. Từ trên nóc nhà của một tòa nhà cao 18,5 m, bạn Nam quan sát một cái cây cách tòa nhà 30 m và dùng giác kế đo được góc lệch giữa phương quan sát gốc cây và phương nằm ngang là 34°, góc lệch giữa phương quan sát ngọn cây và phương nằm ngang là 24°. Biết chiều cao của thân giác kế là 1,5 m. Chiều cao của cái cây là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Ví dụ 10.

Để tính đường kính và diện tích của một miệng giếng nước cổ có dạng hình tròn, người ta tiến hành đo đạc tại ba vị trí A, B, C trên thành giếng. Kết quả đo được là $BC = 5$ m, $\widehat{BAC} = 145°$. Diện tích của miệng giếng là bao nhiêu mét vuông (lấy $\pi \approx 3{,}14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC có $BC = 12$, $CA = 15$, $\widehat{C} = 120°$. Tính

1. Độ dài cạnh AB.
2. Số đo các góc A, B.
3. Diện tích tam giác ABC.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 7$, $\widehat{A} = 120°$. Tính độ dài cạnh AC.

....

....

....

....

....

....

....
....
....
....

Bài 3. Cho tam giác ABC có $AB = 100$, $\widehat{B} = 100^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$. Tính

① Độ dài các cạnh AC, BC.

② Diện tích tam giác ABC.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

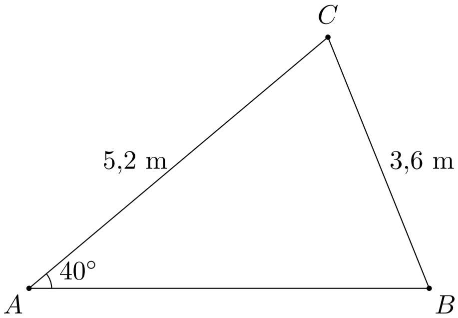
Bài 4. Cho tam giác ABC có $AB = 12$, $AC = 15$, $BC = 20$. Tính

① Số đo các góc A, B, C.

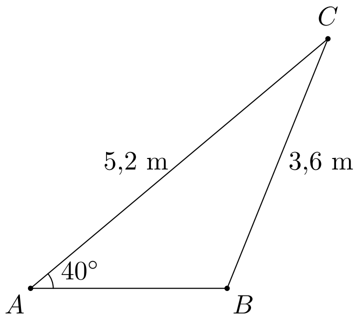
② Diện tích tam giác ABC.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5. Tính độ dài cạnh AB trong mỗi trường hợp sau:



Hình 29

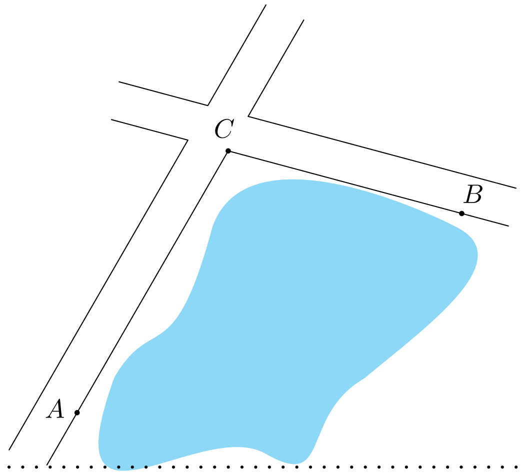


Hình 30

....
....
....
....

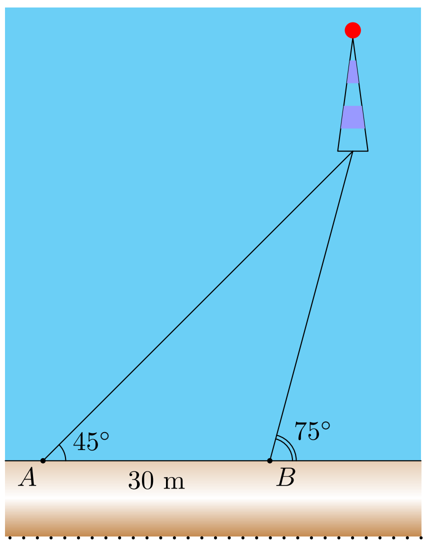
Bài 6.

Để tính khoảng cách giữa hai địa điểm A và B mà ta không thể đi trực tiếp từ A đến B (hai địa điểm nằm ở hai bên bờ một hồ nước, một đầm lầy,...), người ta tiến hành như sau: Chọn một địa điểm C sao cho ta đo được các khoảng cách AC, CB và góc ACB. Sau khi đó, ta nhận được $AC = 1$ km, $CB = 800$ m và $\widehat{ACB} = 105^\circ$ (minh họa ở hình bên). Tính khoảng cách AB (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị mét).



Bài 7.

Một người đi dọc bờ biển từ vị trí A đến vị trí B và quan sát một ngọn hải đăng. Góc nghiêng của phương quan sát từ các vị trí A, B tới ngọn hải đăng với đường đi của người quan sát là 45° và 75°. Biết khoảng cách giữa hai vị trí A, B là 30 m. Ngọn hải đăng cách bờ biển bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



....
....
....
....
....

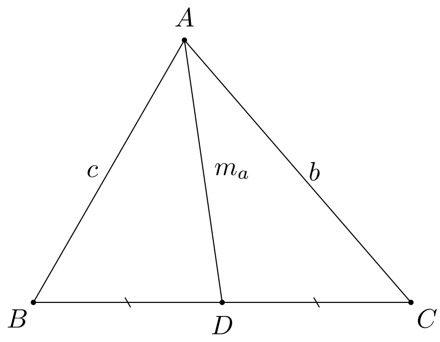
5. TÌM HIỂU THÊM

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$.

1. Công thức tính độ dài đường trung tuyến

Gọi m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến lần lượt xuất phát từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Ta có

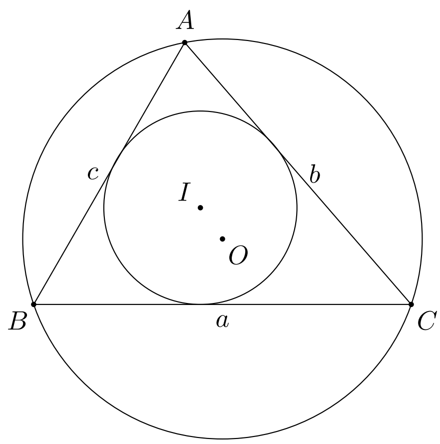
$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$
$$m_b^2 = \frac{c^2+a^2}{2} - \frac{b^2}{4}.$$
$$m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$



2. Công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

— Bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC là $r = \dfrac{S}{p}$.

— Bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC là $R = \dfrac{abc}{4S}$.



BÀI 10. KHÁI NIỆM VÉC-TƠ

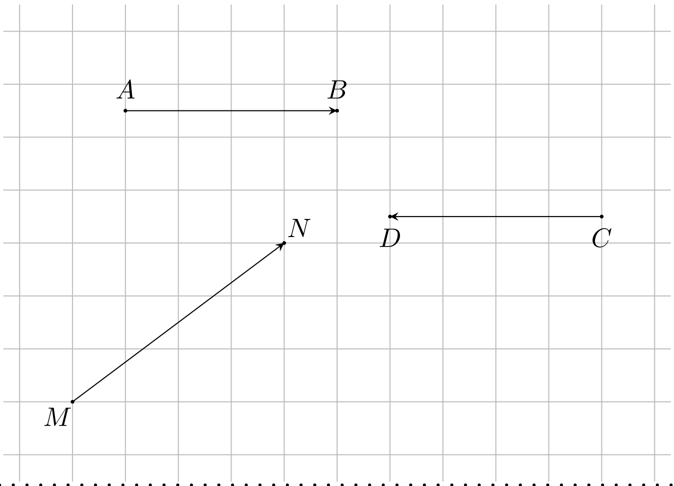
1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Véc-tơ là đoạn thẳng có hướng.
Véc-tơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "véc-tơ AB".
Đường thẳng d đi qua hai điểm A và B là giá của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.
Độ dài đoạn thẳng AB là độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Ví dụ 1. Cho hai điểm phân biệt H, K. Viết hai véc-tơ mà điểm đầu và điểm cuối là H hoặc K.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.
Tính độ dài của các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{MN}$ ở hình, biết rằng độ dài cạnh của ô vuông bằng 1 cm.



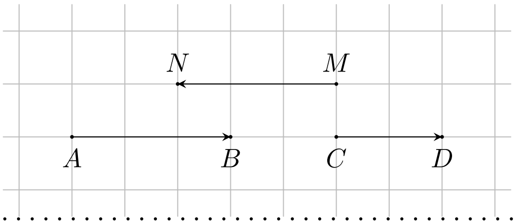
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Định nghĩa 2. Véc-tơ cùng phương. Véc-tơ cùng hướng.
Hai véc-tơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

> ! Nếu hai véc-tơ cùng phương thì hoặc chúng cùng hướng hoặc chúng ngược hướng.

Ví dụ 3.

Trong hình bên, tìm véc-tơ cùng hướng với véc-tơ $\overrightarrow{AB}$; ngược hướng với véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.



Định nghĩa 3. Hai véc-tơ bằng nhau.

Định nghĩa 3. Hai véc-tơ bằng nhau.

Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ, véc-tơ còn được kí hiệu là $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, ...

Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{a}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{a}|$.

— Hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$.

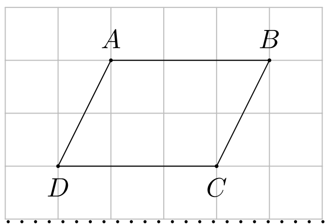
— Khi cho trước véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và điểm O, thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$.

Ví dụ 4.

Cho hình bình hành $ABCD$.

① Véc-tơ nào bằng véc-tơ $\overrightarrow{AB}$?

② Véc-tơ nào bằng véc-tơ $\overrightarrow{AD}$?



Định nghĩa 4. Véc-tơ-không là véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\overrightarrow{0}$.

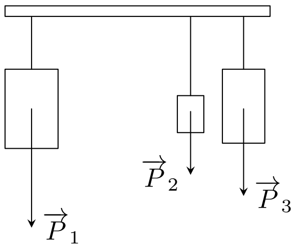
Với các điểm bất kì A, B, C ta có $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC}$.

Véc-tơ $\overrightarrow{AA}$ nằm trên mọi đường thẳng đi qua A. Ta quy ước $\overrightarrow{0}$ (véc-tơ-không) cùng phương và cùng hướng với mọi véc-tơ; $\left|\overrightarrow{0}\right| = 0$.

Hai điểm A, B trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.

Định nghĩa 5. Biểu thị một số đại lượng có hướng bằng véc-tơ.

Ví dụ 5.
Khi treo ba vật, mỗi vật sẽ tác dụng vào thanh treo một lực (trọng lực) như ở hình. Nhận xét đặc điểm về phương, hướng của ba véc-tơ biểu thị trọng lực.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho A, B, C là ba điểm thẳng hàng, B nằm giữa A và C. Viết các cặp véc-tơ cùng hướng, ngược hướng trong những véc-tơ sau $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Cho đoạn thẳng MN có trung điểm là I.

① Viết các véc-tơ khác véc-tơ-không có điểm đầu, điểm cuối là một trong ba điểm M, N, I.

② Véc-tơ nào bằng $\overrightarrow{MI}$? Bằng $\overrightarrow{NI}$?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD. Tìm véc-tơ

① Cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$.

② Ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$.

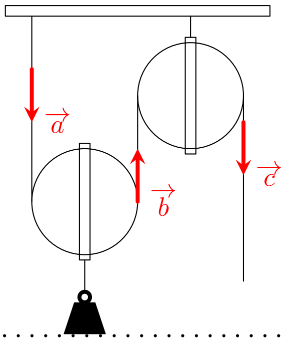
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 3 cm. Tính độ dài của các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5.

Quan sát ròng rọc hoạt động khi dùng lực để kéo một đầu của ròng rọc. Chuyển động của các đoạn dây được mô tả bằng các véc-tơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.



① Hãy chỉ ra các cặp véc-tơ cùng phương.

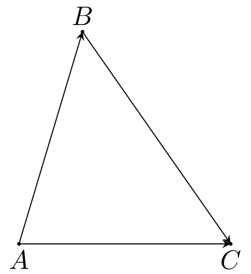
② Trong các cặp véc-tơ đó, cho biết chúng cùng hướng hay ngược hướng.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI 11. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VÉC-TƠ

1. ĐỊNH NGHĨA

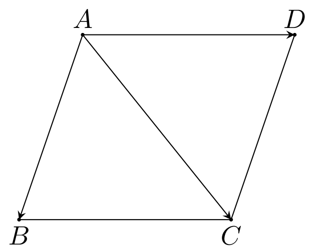
Định nghĩa 1. Tổng của hai véc-tơ.
Với ba điểm bất kì A, B, C, véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$, kí hiệu là $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$.
Lấy một điểm A tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$.
Véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$, kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.
Phép lấy tổng của hai véc-tơ còn được gọi là phép cộng véc-tơ.



Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Định nghĩa 2. Quy tắc hình bình hành.
Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



Ví dụ 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Chứng minh $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right|$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Tính chất 1. Với ba véc-tơ tuỳ ý $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ ta có

— $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ (tính chất giao hoán);

— $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$ (tính chất kết hợp);

— $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ (tính chất của véc-tơ-không).

> **!** Tổng ba véc-tơ $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ được xác định theo một trong hai cách $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c}$ hoặc $\overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$.

Ví dụ 3. Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Định nghĩa 3. Hai véc-tơ đối nhau.
Véc-tơ có cùng độ dài và ngược hướng với véc-tơ $\overrightarrow{a}$ được gọi là véc-tơ đối của véc-tơ $\overrightarrow{a}$, kí hiệu là $-\overrightarrow{a}$.
Hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $-\overrightarrow{a}$ được gọi là hai véc-tơ đối nhau.
Quy ước: Véc-tơ đối của véc-tơ $\overrightarrow{0}$ là véc-tơ $\overrightarrow{0}$.

> **!**
> — $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = (-\overrightarrow{a}) + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.
>
> — Hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ là hai véc-tơ đối nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$.
>
> — Với hai điểm A, B, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$.
>
> — Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$.

Ví dụ 4. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng tỏ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ là hai véc-tơ đối nhau. Viết đẳng thức liên hệ giữa hai véc-tơ đó.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M là trung điểm của BC và D là điểm đối xứng với G qua M. Chứng minh

① $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$.

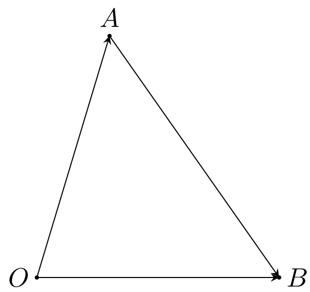
② $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

....
....

> ! G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

Định nghĩa 4. Hiệu của hai véc-tơ.
Hiệu của véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và véc-tơ $\overrightarrow{b}$ là tổng của véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và véc-tơ đối của véc-tơ $\overrightarrow{b}$, kí hiệu là $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$.
Phép lấy hiệu của hai véc-tơ còn được gọi là phép trừ véc-tơ.

Ví dụ 6.
Cho ba điểm A, B, O. Véc-tơ $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ là véc-tơ nào?



> ! Với ba điểm bất kì A, B, O ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

Ví dụ 7. Cho bốn điểm bất kì A, B, C, D. Chứng minh $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0}$.

2. BÀI TẬP

Bài 1. Cho ba điểm M, N, P. Véc-tơ $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN}$ bằng véc-tơ nào sau đây?

A. $\overrightarrow{PN}$. **B.** $\overrightarrow{PM}$. **C.** $\overrightarrow{MP}$. **D.** $\overrightarrow{NM}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Cho ba điểm D, E, G. Véc-tơ $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{DE} + \left(-\overrightarrow{DG}\right)$ bằng véc-tơ nào sau đây?

A. $\overrightarrow{EG}$. **B.** $\overrightarrow{GE}$. **C.** $\overrightarrow{GD}$. **D.** $\overrightarrow{ED}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3. Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$;
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{0}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD. Các khẳng định sau đúng hay sai?

① $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AC}|$;

② $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}$;

③ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5. Cho đường tròn tâm O. Giả sử A, B là hai điểm nằm trên đường tròn. Tìm điều kiện cần và đủ để véc-tơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ đối nhau.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6. Cho $ABCD$ là hình bình hành. Chứng minh $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}$ với mỗi điểm M trong mặt phẳng.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Tính độ dài của các véc-tơ sau

① $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$.

② $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.

3) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ với O là giao điểm của AC và BD.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 8. Cho ba lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{OC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm O và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều là 120 N và $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Tìm cường độ và hướng của lực $\overrightarrow{F_3}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 9. Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc là 10 km/h. Một chiếc ca nô chuyển động từ phía đông sang phía tây với vận tốc 40 km/h so với mặt nước. Tìm vận tốc của ca nô so với bờ sông.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

BÀI 12. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Tích của số k với vectơ $\overrightarrow{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\overrightarrow{a}$, được xác định như sau:

— Cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{a}$ nếu $k < 0$.

— Có độ dài bằng $|k| \cdot |\overrightarrow{a}|$.

Quy ước: $0\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, $k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.
Phép lấy tích của một số với một vectơ gọi là *phép nhân số với vectơ.*
Ví dụ 1. Cho B là trung điểm của đoạn thẳng AC. Tìm số k trong mỗi trường hợp sau:

1. $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{CB}$;
2. $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{AB}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2. Vật thứ nhất chuyển động thẳng đều từ A đến B với tốc độ là 9 m/s và vật thứ hai chuyển động thẳng đều từ B đến A với tốc độ là 6 m/s. Gọi $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ lần lượt là các vectơ vận tốc của vật thứ nhất và vật thứ hai. Có hay không số thực k thỏa mãn $\overrightarrow{v}_1 = k\overrightarrow{v}_2$?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. TÍNH CHẤT

Với hai vectơ bất kì $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và hai số thực h, k, ta có

— $k\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$; $k\left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) = k\overrightarrow{a} - k\overrightarrow{b}$;

— $(h + k)\overrightarrow{a} = h\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{a}$;

— $h(k\overrightarrow{a}) = (hk)\overrightarrow{a}$;

— $1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$; $(-1)\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}$.

Nhận xét. *$k\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.*

Ví dụ 3. Cho ba điểm A, B, C. Chứng minh

① $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$;

② $3\left(5\overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

1. Trung điểm của đoạn thẳng

Tính chất 1. Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ với điểm M bất kì.

2. Trọng tâm của tam giác

Tính chất 2. Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với điểm M bất kì.

Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN. Chứng minh $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

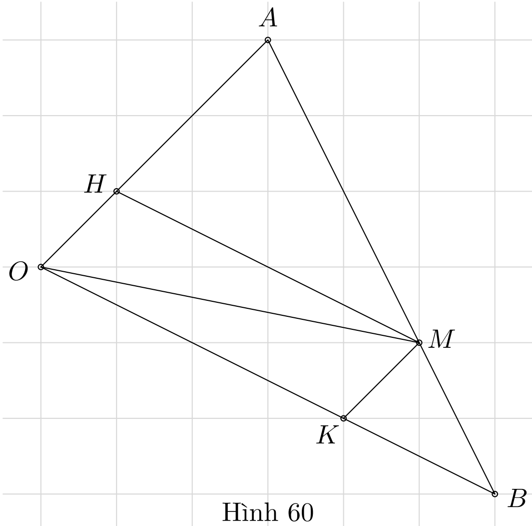
3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương. Điều kiện để ba điểm thẳng hàng

Tính chất 3. Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ ($\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$) cùng phương là có một số thực k để $\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{b}$.

Tính chất 4. Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là có số thực k để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 5.
Cho tam giác OAB. Điểm M thuộc cạnh AB sao cho $AM = \dfrac{2}{3}AB$. Kẻ $MH \parallel OB$, $MK \parallel OA$ (Hình 60). Giả sử $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$.

1. Biểu thị $\overrightarrow{OH}$ theo $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{OK}$ theo $\overrightarrow{b}$.
2. Biểu thị $\overrightarrow{OM}$ theo $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$.



Hình 60

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Nhận xét. *Trong mặt phẳng, cho hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ không cùng phương. Với mỗi vectơ $\overrightarrow{c}$ có duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\overrightarrow{c} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$.*

4. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình thang $MNPQ$, $MN \parallel PQ$, $MN = 2PQ$. Phát biểu nào sau đây là **đúng**?

A. $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{PQ}$. **B.** $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{NP}$. **C.** $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{PQ}$. **D.** $\overrightarrow{MQ} = -2\overrightarrow{NP}$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 2. Cho đoạn thẳng $AB = 6$ cm.

1. Xác định điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

② Xác định điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 3. Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh

① $\overrightarrow{AP} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN}$.

② $\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BA}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 4. Cho tam giác ABC. Các điểm D, E thuộc cạnh BC thỏa mãn $BD = DE = EC$. Giả sử $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{b}$. Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ theo $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 5. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN, E là trọng tâm tam giác BCD. Chứng minh:

① $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = 4\overrightarrow{EG}$;

② $\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{EG}$;

③ Điểm G thuộc đoạn thẳng AE và $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AE}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Biểu thị các vec-tơ $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{CG}$ theo hai vec-tơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 7. Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, H thỏa mãn

$$\overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

① Biểu thị mỗi vec-tơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{HE}$ theo hai vec-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

② Chứng minh D, E, H thẳng hàng.

....

....

....

....

....

....

....

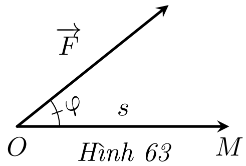
....

....

....

BÀI 13. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC-TƠ

Trong vật lí, nếu có một lực $\overrightarrow{F}$ tác động lên một vật tại điểm O và làm cho vật đó di chuyển một quãng đường $s = OM$ *(Hình 63)* thì công A của lực $\overrightarrow{F}$ được tính theo công thức $A = \left|\overrightarrow{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OM}\right| \cdot \cos\varphi$ trong đó $\left|\overrightarrow{F}\right|$ được gọi là cường độ của lực $\overrightarrow{F}$ tính bằng Newton (N), $\left|\overrightarrow{OM}\right|$ là độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ tính bằng mét (m), φ là góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{F}$, còn công A tính bằng Jun (J).



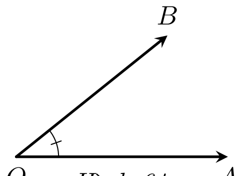
Hình 63

Trong Toán học, giá trị của biểu thức $A = \left|\overrightarrow{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OM}\right| \cdot \cos\varphi$ (không kể đơn vị) được gọi là gì?

1. ĐỊNH NGHĨA

1. Tích vô hướng của hai véc-tơ có cùng điểm đầu

Định nghĩa 1.
Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ khác $\overrightarrow{0}$ trong mặt phẳng *(Hình 64)*.



Hình 64

— Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ là góc giữa hai tia OA, OB và được kí hiệu là $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

— Tích vô hướng của hai véc-tơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là một số, kí hiệu $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, được xác định bởi công thức $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = 4$cm.

a) Tính độ dài cạnh huyền BC.

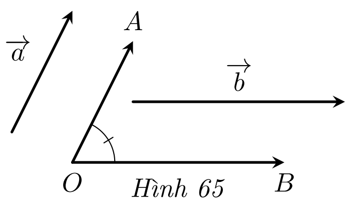
b) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

⚠ *Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30°$, $AB = 3cm$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.*

2. Tích vô hướng của hai véc-tơ tuỳ ý

Định nghĩa 2.
Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ khác $\overrightarrow{0}$. Lấy một điểm O và vẽ véc-tơ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ *(Hình 65)*.



Hình 65

— Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, kí hiệu là $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$, là góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$.

— Tích vô hướng của hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$, kí hiệu $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$, là tích vô hướng của hai véc-tơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$. Như vậy tích vô hướng của hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là một số thực được xác định bởi công thức $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$.

Quy ước: Tích vô hướng của một véc-tơ bất kì với véc-tơ $\overrightarrow{0}$ là số 0.

!

— $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right)$.

— Nếu $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = 90^\circ$ thì ta nói hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ hoặc $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}$. Khi đó $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos 90^\circ = 0$.

— Tích vô hướng của hai véc-tơ cùng hướng bằng tích hai độ dài của chúng.

— Tích vô hướng của hai véc-tơ ngược hướng bằng số đối của tích hai độ dài của chúng.

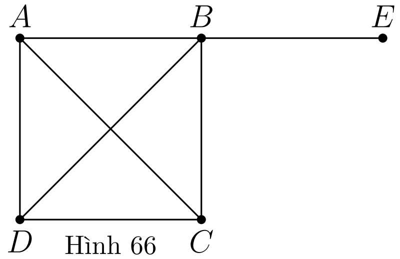
Ta có thể chứng minh chú ý thứ ba như sau:
Nếu $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ là hai véc-tơ (khác $\overrightarrow{0}$) cùng hướng thì $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = 0^\circ$. Do đó, $\cos\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = 1$. Vì vậy, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|$.
Nếu một trong hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ là véc-tơ $\overrightarrow{0}$ thì $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ và $|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| = 0$ nên $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|$.
Chú ý thứ tư được chứng minh tương tự như trên.

Ví dụ 2.
Cho hình vuông $ABCD$ tâm O có độ dài cạnh bằng a. Tính

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$



Hình 66

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

⚠ *Cho tam giác ABC đều cạnh a, AH là đường cao. Tính*

a) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA}$.

b) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$.

2. TÍNH CHẤT

Tính chất 1. Với hai véc-tơ bất kì $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và số thực k tùy ý, ta có:

— $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$ (tính chất giao hoán);

— $\overrightarrow{a}\cdot\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$ (tính chất phân phối);

— $(k\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}=k\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)=\overrightarrow{a}\cdot\left(k\overrightarrow{b}\right)$;

— $\overrightarrow{a}^2\geq 0$, $\overrightarrow{a}^2=0\Leftrightarrow\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$.

Trong đó, kí hiệu $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}^2$ và biểu thức này được gọi là bình phương vô hướng của véc-tơ $\overrightarrow{a}$.

Ví dụ 3. Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có

a) $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IB}=0$;

b) $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2\right)$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

⚠ *Chứng minh rằng với hai véc-tơ bất kỳ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ ta có*

— $\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)^2=\overrightarrow{a}^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}^2$;

— $\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)^2=\overrightarrow{a}^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}^2$;

— $\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=\overrightarrow{a}^2-\overrightarrow{b}^2$.

3. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

1. Tính độ dài của đoạn thẳng

Nhận xét. *Với hai điểm A, B phân biệt ta có: $\overrightarrow{AB}^2=|\overrightarrow{AB}|^2$. Do đó độ dài đoạn thẳng AB được tính như sau: $AB=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.*

Ví dụ 5. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

⚠ *Sử dụng tích vô hướng, chứng minh định lý Pythagore: Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $BC^2 = AB^2 + AC^2$.*

4. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Nếu hai điểm M, N thoả mãn $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -4$ thì độ dài đoạn thẳng MN bằng bao nhiêu?

A. $MN = 4$. **B.** $MN = 2$. **C.** $MN = 16$. **D.** $MN = 256$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Bài 2. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ khác $\overrightarrow{0}$ và $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) < 90^\circ$ thì $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} < 0$.

B. Nếu $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ khác $\overrightarrow{0}$ và $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) > 90^\circ$ thì $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} > 0$.

C. Nếu $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ khác $\overrightarrow{0}$ và $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) < 90^\circ$ thì $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} > 0$.

D. Nếu $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ khác $\overrightarrow{0}$ và $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \neq 90^\circ$ thì $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} < 0$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Bài 3. Tính $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ trong mỗi trường hợp sau

1. $|\overrightarrow{a}| = 3, \left|\overrightarrow{b}\right| = 4, \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = 30^\circ$;
2. $|\overrightarrow{a}| = 5, \left|\overrightarrow{b}\right| = 6, \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = 120^\circ$;
3. $|\overrightarrow{a}| = 2, \left|\overrightarrow{b}\right| = 3$, $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng hướng;
4. $|\overrightarrow{a}| = 2, \left|\overrightarrow{b}\right| = 3$, $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ ngược hướng.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính các tích vô hướng sau:

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;
2. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5. Cho tam giác ABC. Chứng minh $AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

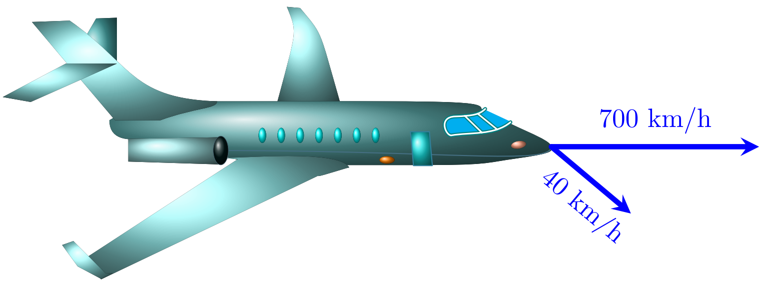
. . . .

Bài 6. Cho tam giác nhọn ABC, kẻ đường cao AH. Chứng minh rằng:

① $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$; ② $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

. . . .

Bài 7.
Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 700 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 40 km/h. Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tính tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị km/h).



. . . .

Bài 8. Cho tam giác ABC, có $AB = 2$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = \dfrac{7}{12}\overrightarrow{AC}$.

① $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; ② Biểu diễn $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$;

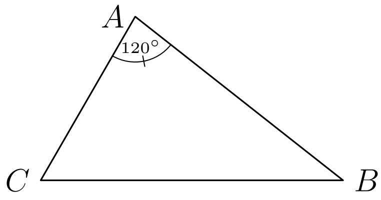
③ Chứng minh $AM \perp BD$.

. . . .

....
....
....
....

BÀI 14. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

Bài 1. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):



a) Độ dài cạnh BC và độ lớn góc B;

b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp;

c) Diện tích tam giác;

d) Độ dài đường cao xuất phát từ A;

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$ với M là trung điểm của BC (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

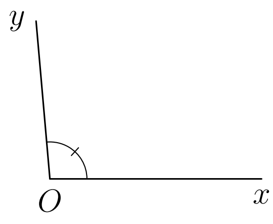
Bài 3. Không dùng mát tính cầm tay, hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $A = (\sin 20^\circ + \sin 70^\circ)^2 + (\cos 20^\circ + \cos 110^\circ)^2$.
2. $B = \tan 20^\circ + \cot 20^\circ + \tan 110^\circ + \cot 110^\circ$.

Bài 4. Không dùng thước đo góc, làm thế nào để biết số đo góc đó.
Bạn Hoài vẽ góc xOy và đố bạn Đông làm thế nào có thể biết được số đo của góc này khi không có thước đo góc. Bạn đông làm như sau

— Chọn các điểm A, B lần lượt thuộc các tia Ox và tia Oy sao cho $OA = OB = 2\text{cm}$;

— Đo độ dài đoạn thẳng AB được $AB = 3{,}1\text{cm}$.

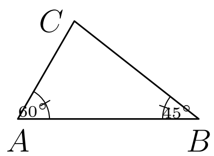


Từ các dữ kiện trên bạn Đông tính được $\cos\widehat{xOy}$, từ đó suy ra độ lớn góc $\widehat{xOy}$.
Em hãy cho biết góc $\widehat{xOy}$ ở hình bên bằng bao nhiêu độ (làm tròn đến hàng đơn vị)

Bài 5. Có hai trạm quan sát A, B ven hồ và một trạm quan sát C ở giữa hồ. Để tính khoảng cách từ A và B đến C, người ta làm như sau:

— Đo 2 góc có số đo là $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $\widehat{ABC} = 45^\circ$;

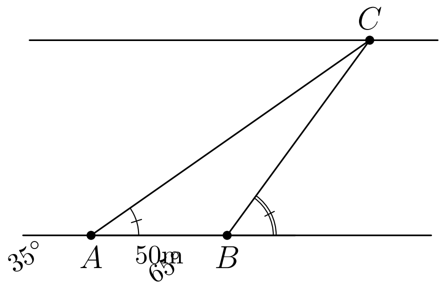
— Đo khoảng cách AB được 1200m.



Khoảng cách từ trạm C đến các trạm A và B bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Bài 6.

Một người đứng ở bờ sông, muốn đo độ rộng của khúc sông chảy qua vị trí đang đứng (khúc sông tương đối thẳng, có thể xem hai bờ song song với nhau). Từ vị trí đang đứng A, người đó đo được góc nghiêng $\alpha = 35°$ so với bờ sông tới một vị trí C quan sát được ở phía bờ bên kia. Sau đó di chuyển dọc bờ sông đến vị trí B cách A một khoảng $d = 50$ m và tiếp tục đo được góc nghiêng $\beta = 65°$ so với bờ bên kia tới vị trí C đã chọn. Hỏi độ rộng của khúc sông chảy qua vị trí người đó đang đứng là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



....

....

....

....

....

....

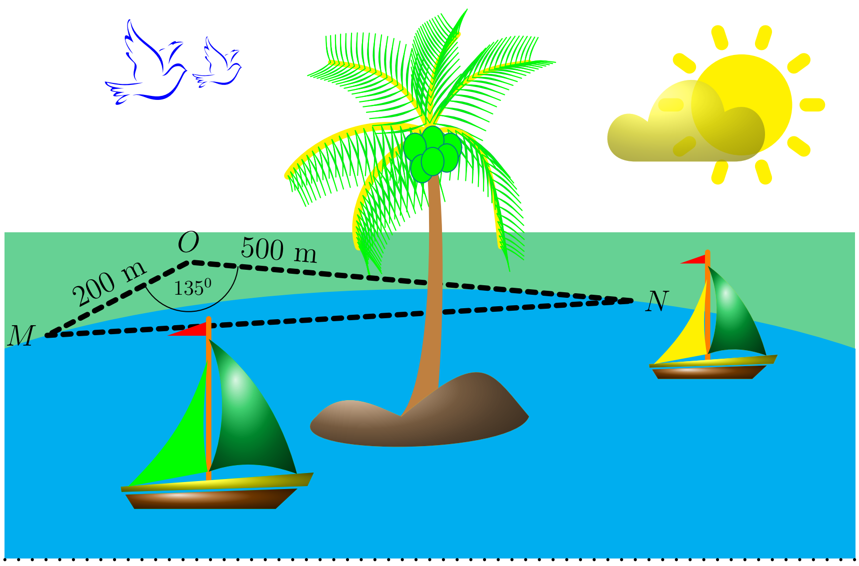
....

....

....

....

Bài 7.
Để đo khoảng cách giữa hai vị trí M, N ở hai phía ốc đảo, người ta chọn vị trí O bên ngoài ốc đảo sao cho: O không thuộc đường thẳng MN; các khoảng cách OM, ON và góc MON là đo được. Sau khi đo, ta có $OM = 200$ m, $ON = 500$ m, $\widehat{MON} = 135°$. Khoảng cách giữa hai vị trí M, N là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 8. Chứng minh:

a) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$ với E là điểm bất kì;

b) Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{IN}=2\overrightarrow{MN}$ với M, N là hai điểm bất kì;

c) Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{NG}$ với M, N là hai điểm bất kì.

....

....

....

....

....

....

....

....

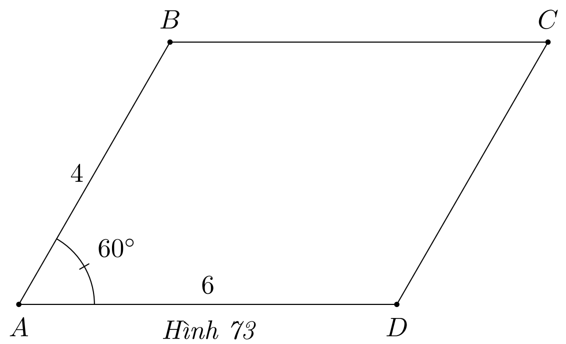
....

....

Bài 9.

Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=4$, $AD=6$, $\widehat{BAD}=60^\circ$ *(Hình 73)*.

1. Biểu thị các véc-tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.
2. Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}$.
3. Tính độ dài các đường chéo $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$.



Hình 73

....

....

....

....

....

....

....

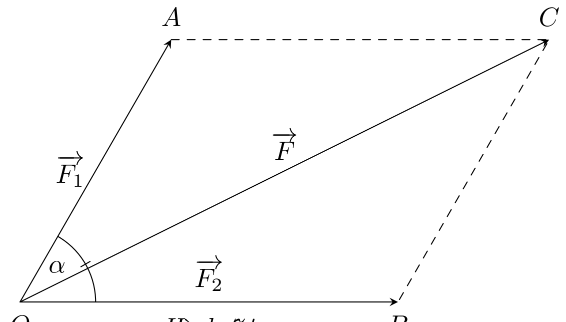
....

....

....

Bài 10.

Hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ cho trước cùng tác dụng lên một vật tại điểm O và tạo với nhau một góc $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\right) = \alpha$ làm cho vật di chuyển theo hướng từ O đến C *(Hình 74)*. Lập công thức tính cường độ của hợp lực $\overrightarrow{F}$ làm cho vật di chuyển theo hướng từ O đến C (giả sử chỉ có đúng hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ làm cho vật di chuyển).



Hình 74

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....