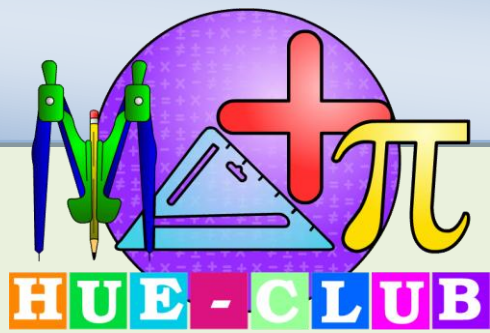




Giáo viên: **LÊ BÁ BẢO**_ Trường THPT Đặng Huy Trứ, Huế

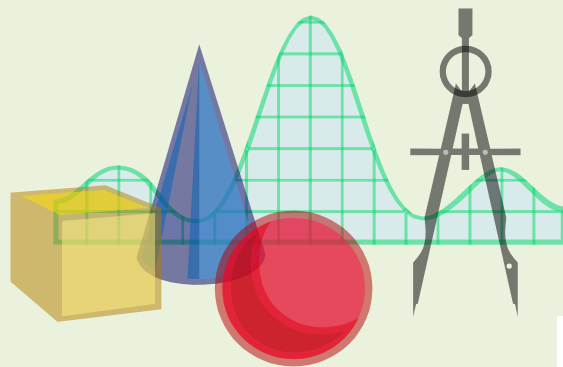
SĐT: **0935.785.115**

Đăng kí học theo địa chỉ: **116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế**
Hoặc Trung tâm Km 10 Hương Trà

Chuyên đề:

KHẢO SÁT HÀM SỐ

Chủ đề: **GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ**



Huế, tháng 8/2020



CHUYÊN ĐỀ: KHẢO SÁT HÀM SỐ

Chủ đề 3: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Trong quá trình sưu tầm, biên soạn lời giải, có sai sót gì kính mong quý thầy cô và các em học sinh góp ý để đề kiểm tra được hoàn chỉnh hơn! Xin chân thành cảm ơn!

NỘI DUNG ĐỀ BÀI

DẠNG TOÁN 1: GTLN - GTNN TRÊN KHOẢNG (NỬA KHOẢNG - ĐOẠN)

Câu 1: (GKI THPT NGHĨA HƯNG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số không có giá trị lớn nhất trên đoạn $[a; b]$.
- B. Hàm số luôn có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$.
- C. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$.
- D. Hàm số luôn có cực đại và cực tiểu trên đoạn $[a; b]$.

Câu 2: (THPT CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là 0. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}, \exists x_0, f(x_0) = 0$.
- B. $f(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$.
- C. $f(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}, \exists x_0, f(x_0) = 0$.
- D. $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 3: (THPT CẦU GIẤY HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a < b$, hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[a; b]$ bằng

- A. $f(b)$.
- B. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
- C. $f(a)$.
- D. $f(\sqrt{ab})$.

Câu 4: (CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH YÊN BÁI LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y	0	5	1	4		

- A. $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(0)$.
- B. $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(3)$.
- C. $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(2)$.
- D. $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(-1)$.

Câu 5: (THPT CỔ LOA HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Câu 6: (THPT NGUYỄN DU - ĐAK LAC - NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+		- 0 +	
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 .
 B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
 C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .
 D. Hàm số có đúng hai cực trị.

Câu 7: (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+		- 0 +	
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số có đúng một cực trị.
 B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1 .
 C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .
 D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 8: (Đề minh họa) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				5		$-\infty$

A. $y_{CD} = 5$.

B. $y_{CT} = 0$.

C. $\min_{\mathbb{R}} y = 4$.

D. $\max_{\mathbb{R}} y = 5$.

Câu 9: (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5;7]$ như sau:

x	-5	1	7
y'	-	0	+
y	6	2	9

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min_{[-5;7]} f(x) = 6$.

B. $\min_{[-5;7]} f(x) = 2$.

C. $\max_{[-5;7]} f(x) = 9$.

D. $\max_{[-5;7]} f(x) = 6$.

Câu 10: (SỞ GD&ĐT KIÊN GIANG NĂM 2018-2019) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	-4	0	8	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		$f(-4)$	9	$f(8)$	$+\infty$

Biết $f(-4) > f(8)$, khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\mathbb{R}$ bằng

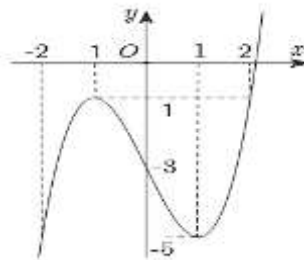
A. 9.

B. $f(-4)$.

C. $f(8)$.

D. -4.

Câu 11: (CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.



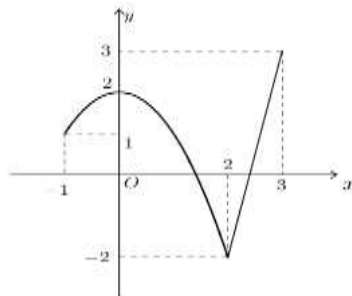
A. $m = -5; M = -1$.

B. $m = -2; M = 2$.

C. $m = -1; M = 0$.

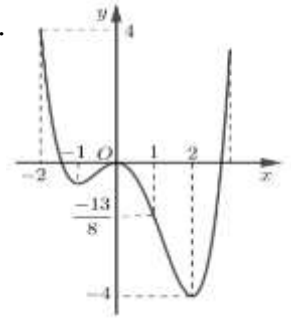
D. $m = -5; M = 0$.

Câu 12: (THPT THÁI PHIÊN HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(3\sin^2 x - 1)$ bằng



- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

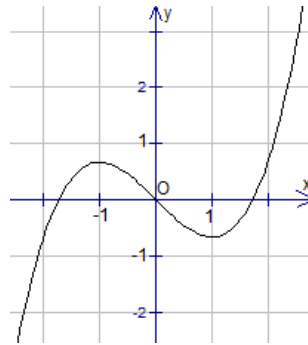
Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(-2x)$ trên $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$.



Giá trị $m + M$ bằng

- A. 0. B. 4.
C. $\frac{19}{8}$. D. -4.

Câu 14: (THPT HOÀNG VĂN THỤ - HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2}\right)$ trên đoạn $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ bằng

- A. $f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$. B. $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. C. $f(0)$. D. $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, đồng biến trên đoạn $[a; b]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đã cho có cực trị trên đoạn $[a; b]$.
B. Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(a; b)$.
C. Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $[a; b]$.
D. Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$.

Câu 16: (SỞ GD&ĐT ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	2	5	8	$+\infty$		
$f'(x)$	-		+	0	-		+
$f(x)$	$+\infty$			2			$+\infty$

Phát biểu nào sau đây đúng?

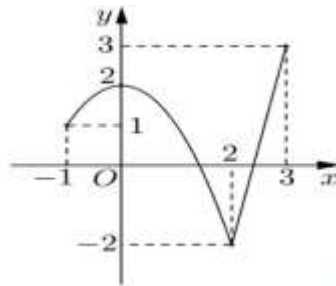
- A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 và giá trị lớn nhất bằng 2.

B. Hàm số nhận giá trị dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

C. Trên $[2;8]$ hàm số có giá trị lớn nhất là M , giá trị nhỏ nhất là m . Giá trị biểu thức $m - 3M = -6$.

D. Hàm số có đúng một cực trị.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $(-1;3)$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M - m$ bằng



A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 5.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\max_{x \in [-1;1]} f(x) = 2$.

B. $\max_{x \in [-1;1]} f(x) = 1$.

C. $\max_{x \in [-1;1]} f(x) = 0$.

D. $\max_{x \in [-1;1]} f(x) = -3$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\min_{x \in [-1;1]} f(x) = 2$.

B. $\min_{x \in [-1;1]} f(x) = 1$.

C. $\min_{x \in [-1;1]} f(x) = 0$.

D. $\min_{x \in [-1;1]} f(x) = -3$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\min_{x \in [0;1]} f(x) = -3$. B. $\min_{x \in [0;1]} f(x) = 2$. C. $\min_{x \in [0;1]} f(x) = 0$. D. $\min_{x \in [0;1]} f(x) = 1$.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\max_{x \in [5;15]} f(x) = f(5)$. B. $\max_{x \in [5;15]} f(x) = f(15)$. C. $\max_{x \in [5;15]} f(x) = 2$. D. $\max_{x \in [5;15]} f(x) = f(10)$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\max_{x \in [-15;-5]} f(x) = f(-5)$. B. $\max_{x \in [-15;-5]} f(x) = f(-15)$.
C. $\max_{x \in [-15;-5]} f(x) = 2$. D. $\max_{x \in [-15;-5]} f(x) = f(-10)$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $g(x) = 2f(x) + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\max_{x \in [-1;1]} g(x) = 2$. B. $\max_{x \in [-1;1]} g(x) = 5$. C. $\max_{x \in [-1;1]} g(x) = 1$. D. $\max_{x \in [-1;1]} g(x) = -5$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $g(x) = 3 - 4f(x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\min_{x \in [-1;1]} g(x) = 15$. B. $\min_{x \in [-1;1]} g(x) = -5$. C. $\min_{x \in [-1;1]} g(x) = -15$. D. $\max_{x \in [-1;1]} g(x) = -3$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	2	1	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\max_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 2$. B. $\max_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 1$. C. $\max_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 0$. D. $\max_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 3$.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	2	1	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\min_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 2$. B. $\min_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 1$. C. $\min_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 0$. D. $\min_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 3$.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	2	1	$+\infty$

Đặt $g(x) = f(\sin x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 2$. B. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 1$. C. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 3$. D. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 4$.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	2	1	$+\infty$

Đặt $g(x) = f(\cos x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = 1$. B. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = 2$. C. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = -3$. D. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = 0$.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	2	1	$+\infty$

Đặt $g(x) = [f(x)]^3 - 3[f(x)]^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\max_{[-1;1]} g(x) = -4$. B. $\max_{[-1;1]} g(x) = 4$. C. $\max_{[-1;1]} g(x) = 0$. D. $\max_{[-1;1]} g(x) = 2$.

Câu 30: (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = \frac{x}{x+3} \text{ trên đoạn } [-2;3] \text{ bằng}$$

- A. 3. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. -2.

Câu 31: (THPT CHUYÊN BẮC GIANG NAM 2018-2019 LẦN 01) Giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \text{ trên nửa khoảng } [2;+\infty) \text{ là}$$

- A. 2. B. $\frac{5}{2}$. C. 0. D. $\frac{7}{2}$.

Câu 32: (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

- A. $\min_{[2;4]} y = 6$. B. $\min_{[2;4]} y = -2$. C. $\min_{[2;4]} y = -3$. D. $\min_{[2;4]} y = \frac{19}{3}$.

Câu 33: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2;4]$.

- A. $\min_{[2;4]} y = \frac{13}{2}$. B. $\min_{[2;4]} y = \frac{25}{4}$. C. $\min_{[2;4]} y = 6$. D. $\min_{[2;4]} y = -6$.

Câu 34: (SỞ GD&ĐT BÀ RỊA VŨNG TÀU NĂM 2018-2019) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$ trên đoạn $[1;5]$.

- A. $\max_{[1;5]} f(x) = 3\sqrt{2}$. B. $\max_{[1;5]} f(x) = \sqrt{2}$. C. $\max_{[1;5]} f(x) = 2\sqrt{2}$. D. $\max_{[1;5]} f(x) = 2$.

Câu 35: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{7-x}$. Khi đó có bao nhiêu số nguyên dương nằm giữa m và M ?

- A. 1. B. 5. C. 7. D. 0.

Câu 36: (THPT THĂNG LONG HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 02) Hàm số $y = x + \frac{10^8}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[10^3;10^9]$ tại x bằng

- A. 10^4 . B. 10^3 . C. 10^5 . D. 10^6 .

Câu 37: (SỞ GD&ĐT BÌNH THUẬN NĂM 2018-2019) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2+5x}$ bằng

- A. 0. B. $\frac{5}{2}$. C. $\sqrt{6}$. D. 2.

Câu 38: (THPT CHUYÊN VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4 \sin x - 5$.

- A. -20. B. -8. C. -9. D. 0.

Câu 39: (THPT CHUYÊN VINH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2 \sin x + 3}{\sin x + 1}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là

- A. 5. B. 2. C. 3. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 40: (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x) = \sin^3 x - 3 \sin x + 2$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho. Khi đó $M + 2m$ là

- A. 0. B. 1. C. 4. D. 5.

Lời giải

Đặt $\sin x = t$ ($t \in [-1; 1]$). Ta có $f(t) = t^3 - 3t + 2$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t + 2$ với $t \in [-1; 1]$; $f'(t) = 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = 1$.

Ta có $f(-1) = 4$, $f(1) = 0$. Suy ra, giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số lần lượt là 4 và 0 hay $M = 4$; $m = 0$. Giá trị $M + 2m = 4 + 2 \cdot 0 = 4$.

Câu 41: (GKI THPT NGHĨA HƯNG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x) = \cos 2x - \cos x + 1$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là

- A. $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -\frac{1}{8}$. B. $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -\frac{1}{4}$. C. $\min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{8}$. D. $\min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{4}$.

Câu 42: (GKI THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2 \sin^2 x - \cos x$ là phân số tối giản có dạng với a, b là các số nguyên dương. Tìm $a - b$.

- A. 8. B. 9. C. 7. D. 10.

Câu 43: (GKI THPT VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 \cos 2x - 4 \sin x$ là

- A. 1. B. -7. C. -5. D. $\frac{11}{3}$.

Câu 44: (MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2016-2017) Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$.

- A. $M = 9$. B. $M = 8\sqrt{3}$. C. $M = 1$. D. $M = 6$.

Câu 45: (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

- A. 18. B. -18. C. -2. D. 2.

Câu 46: (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

- A. $m = \frac{17}{4}$. B. $m = 10$. C. $m = 5$. D. $m = 3$.

Câu 47: (THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019) Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x - 4\sqrt{6-x}$ trên $[-3;6]$. Tổng $M + m$ có giá trị là:

- A. -12 . B. -6 . C. 18 . D. -4 .

Câu 48: (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 4\sqrt{x^2 - 4x + 6} + 4x - x^2 + 1$. Tính tích các nghiệm của phương trình $f(x) = M$.

- A. 2 . B. 4 . C. -2 . D. -4 .

Câu 49: (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2016-2017) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2;3]$.

- A. $m = \frac{51}{4}$. B. $m = \frac{49}{4}$. C. $m = 13$. D. $m = \frac{51}{2}$.

Câu 50: (SỞ GD&ĐT LẠNG SƠN NĂM 2018-2019) Tìm x để hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $x = -2$. B. $x = 2\sqrt{2}$. C. $x = 1$. D. $x = \sqrt{2}$.

Câu 51: (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2016-2017) Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$. B. $\min_{(0;+\infty)} y = 7$. C. $\min_{(0;+\infty)} y = \frac{33}{5}$. D. $\min_{(0;+\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$.

Câu 52: (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02) Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x - \sqrt{x}$ trên đoạn $[0;3]$. Giá trị của biểu thức $M + 2m$ gần với số nào nhất trong các số dưới đây?

- A. $1,768$. B. $0,767$. C. $1,767$. D. $0,768$.

Câu 53:

(THPT SƠN TÂY HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 02) Giá trị nhỏ nhất của hàm số

Câu 54: $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 2019$ là

- A. 2017 . B. 2020 . C. 2018 . D. 2019 .

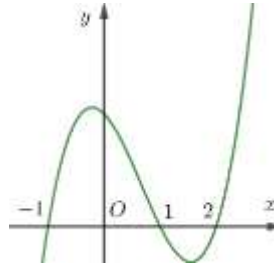
Câu 55: (SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tổng giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = (x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $[0;3]$ có dạng $a - b\sqrt{c}$ với a là số nguyên và b, c là các số nguyên dương. Tính $S = a + b + c$.

- A. 4 . B. -2 . C. -22 . D. 5 .

Câu 56: (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x(x-2)^2(x-3), \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;4]$ bằng

- A. $f(0)$. B. $f(2)$. C. $f(3)$. D. $f(4)$.

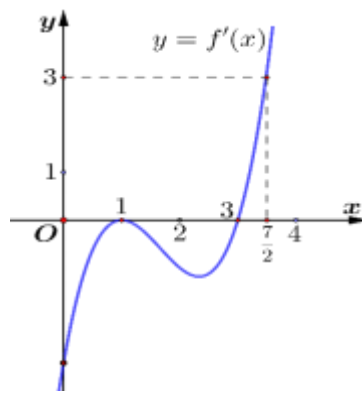
Câu 57: (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

- A. $f(1)$. B. $f(-1)$. C. $f(2)$. D. $f(0)$.

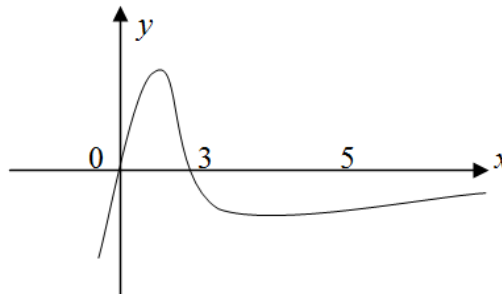
Câu 58: (THPT YÊN MÔ A-NINH BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?

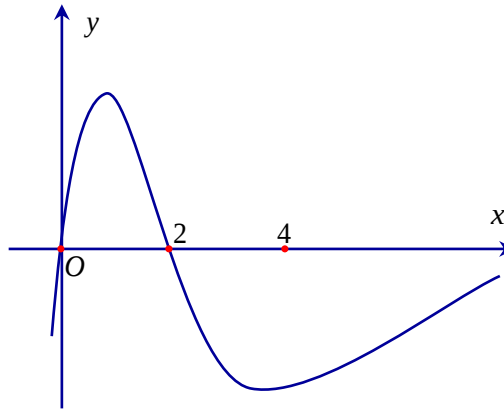
- A. $x_0 = 0$. B. $x_0 = \frac{7}{2}$. C. $x_0 = 3$. D. $x_0 = 1$.

Câu 59: (THPT THIỆU HÓA – THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(3) = f(5) - f(4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$.



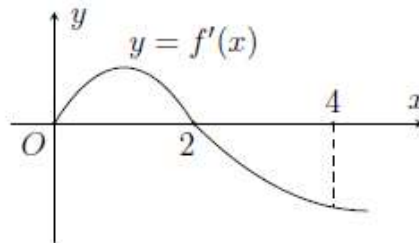
- A. $m = f(5), M = f(3)$. B. $m = f(5), M = f(1)$.
C. $m = f(0), M = f(3)$. D. $m = f(1), M = f(3)$.

Câu 60: (THPT LÝ NHÂN TÔNG LẦN 1 NĂM 2018-2019) Cho hàm số có $f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$.



- A. $m = f(4), M = f(2)$.
 B. $m = f(1), M = f(2)$.
 C. $m = f(4), M = f(1)$.
 D. $m = f(0), M = f(2)$.

Câu 61: (THPT NINH BÌNH BẠC LIÊU NĂM 2018-2019 LẦN 04) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Giá trị nhỏ nhất m , giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ là



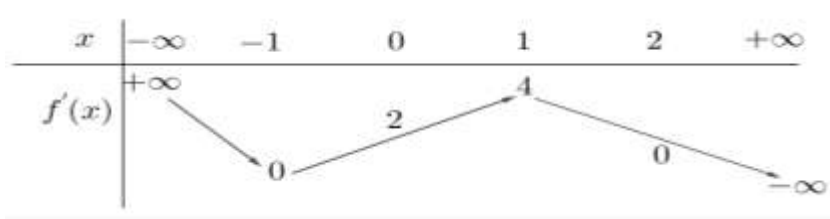
- A. $m = f(4), M = f(1)$.
 B. $m = f(4), M = f(2)$.
 C. $m = f(1), M = f(2)$.
 D. $m = f(0), M = f(2)$.

Câu 62: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH LẦN 1 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	-3	5	$-\infty$	

- A. 15.
 B. $\frac{25}{3}$.
 C. $\frac{19}{3}$.
 D. 12.

Câu 63: (THPT KINH MÔN HAI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có bảng biến thiên như sau:



Biết rằng $f(-1) = \frac{10}{3}$, $f(2) = 6$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A. $\frac{10}{3}$. B. $\frac{820}{27}$. C. $\frac{730}{27}$. D. 198.

DẠNG TOÁN 2: MAX MIN HÀM NHIỀU BIẾN

Câu 64: (THPT CHUYÊN BẮC GIANG NAM 2018-2019 LẦN 01) Cho $x^2 - xy + y^2 = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + xy + y^2$ bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 2.

Câu 65: (THPT MINH CHÂU HƯNG YÊN NĂM 2018 – 2019) Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$. Giá trị của $M + m$ bằng:

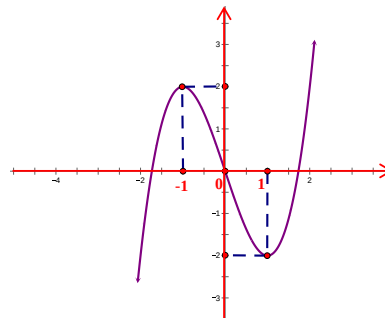
- A. -4. B. $-\frac{1}{2}$. C. -6. D. $1 - 4\sqrt{2}$.

Câu 66: (SỞ GD&ĐT NAM ĐỊNH 2018-2019) Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x + y \neq -1$ và $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{xy}{x + y + 1}$. Tính $M + m$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 67: (SỞ GD&ĐT ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019) Cho x, y thỏa mãn $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 16$ và hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

$P = f\left(\frac{x^2 + y^2 - 2}{x^2 - y^2 - 2xy + 4}\right)$. Tính $M^2 + m^2$



- A. $M^2 + m^2 = 4$. B. $M^2 + m^2 = 1$. C. $M^2 + m^2 = 25$. D. $M^2 + m^2 = 2$.

Câu 68: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA LẦN 2 NĂM 2018-2019) Cho các số thực x, y thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $3x^2 - 2xy - y^2 = 5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + xy + 2y^2$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(4;7)$. B. $(-2;1)$. C. $(1;4)$. D. $(7;10)$.

Câu 69: (THPT CHUYÊN BẮC GIANG NAM 2018-2019 LẦN 01) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$. Tính giá trị $M+m$

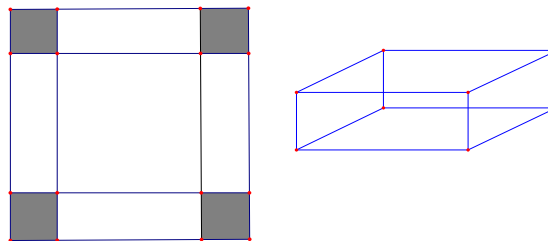
- A. 42. B. 41. C. 43. D. 44.

DẠNG TOÁN 3: BÀI TOÁN THỰC TẾ - TỐI ƯU

Câu 70: (ĐỀ THỬ NGHIỆM BGD&ĐT NĂM 2016-2017) Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 216 (m/s). B. 30 (m/s). C. 400 (m/s). D. 54 (m/s).

Câu 71: (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

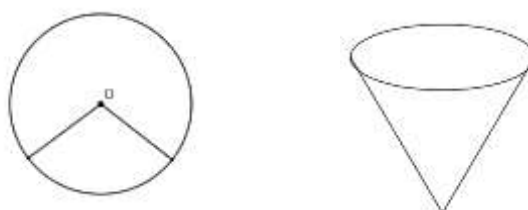


- A. $x=6$. B. $x=3$. C. $x=2$. D. $x=4$.

Câu 72: (MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Ông A dự định dùng hết $6,5m^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. $2,26 m^3$. B. $1,61 m^3$. C. $1,33 m^3$. D. $1,50 m^3$.

Câu 73: (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02) Bác Bình có một tấm thép mỏng hình tròn, tâm O , bán kính 4dm. Bác định cắt ra một hình quạt tròn tâm O , quăn rồi hàn ghép hai mép của hình quạt tròn lại để tạo thành một đồ vật dạng mặt nón tròn xoay (tham khảo hình vẽ). Dung tích lớn nhất có thể của đồ vật mà bác Bình tạo ra bằng bao nhiêu? (bỏ qua phần mối hàn và độ dày của tấm thép).



A. $\frac{128\pi\sqrt{3}}{27}\text{dm}^3$. B. $\frac{128\pi\sqrt{3}}{81}\text{dm}^3$. C. $\frac{16\pi\sqrt{3}}{27}\text{dm}^3$. D. $\frac{64\pi\sqrt{3}}{27}\text{dm}^3$.

Câu 74: (SỞ GD&ĐT BÀ RỊA VŨNG TÀU NĂM 2018-2019) Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 9t^2 + 21t + 9$ trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tính thời điểm $t(s)$ mà tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

A. $t = 4(s)$. B. $t = 5(s)$. C. $t = 3(s)$. D. $t = 7(s)$.

Câu 75: (SỞ GD&ĐT BÀ RỊA VŨNG TÀU NĂM 2018-2019) Một công ty bất động sản có 40 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 3.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng (theo qui định trong hợp đồng) thì sẽ có một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng?

A. 3.700.000 đồng. B. 3.500.000 đồng. C. 3.900.000 đồng. D. 4.000.000 đồng.

Câu 76: (SỞ GD QUẢNG NAM 2019) Cho nửa đường tròn đường kính AB và hai điểm C, D thay đổi trên nửa đường tròn đó sao cho $ABCD$ là hình thang. Diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ C. 1 D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Câu 77: (SỞ GD&ĐT CÀ MAU NĂM 2018-2019) Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V = 18(m^3)$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Hỏi cần xây bể có chiều cao h bằng bao nhiêu mét để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất (biết nguyên vật liệu xây dựng các mặt là như nhau)?

A. $2(m)$. B. $\frac{5}{2}(m)$. C. $1(m)$. D. $\frac{3}{2}(m)$.

Câu 78: (CỤM 1 SỞ GD&ĐT BẠC LIÊU NĂM 2018-2019 LẦN 01) Người ta muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích $200m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là 300.000 đồng/ m^2 . Chi phí thuê công nhân thấp nhất là

A. 51 triệu đồng. B. 75 triệu đồng. C. 46 triệu đồng. D. 36 triệu đồng.

DẠNG TOÁN 4: PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH

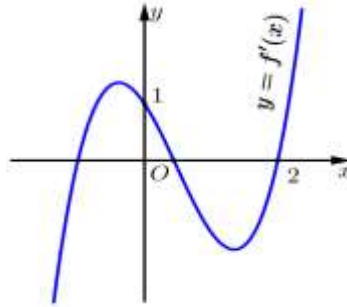
Câu 79: (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$				
y'		+	0	-	0	+		
y				3		-4		$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f(\sqrt{x+1}+1) \leq m$ có nghiệm?

A. $m \geq -4$. B. $m \geq 1$. C. $m \geq 2$. D. $m > -5$.

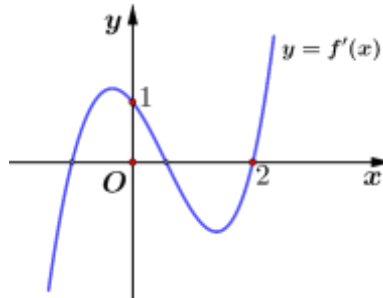
Câu 80: (MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq f(2) - 2$. B. $m \geq f(0)$. C. $m > f(2) - 2$. D. $m > f(0)$.

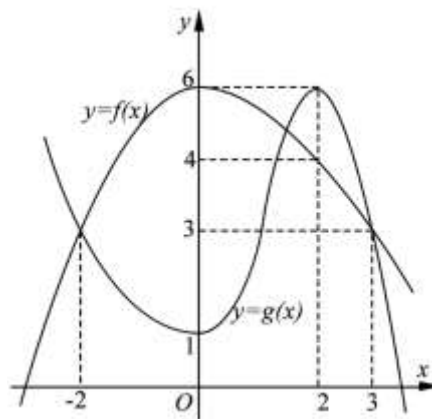
Câu 81: (MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Bất phương trình $f(x) > x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A. $m \leq f(2) - 2$. B. $m < f(2) - 2$. C. $m \leq f(0)$. D. $m < f(0)$.

Câu 82: (THPT NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 04) Cho hàm số $y = f(x)$ và hàm số $y = g(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:

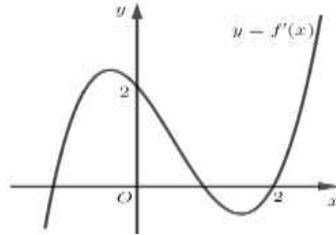


Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\frac{f(x)}{g(x)} = m$ có nghiệm thuộc

$[-2; 3]$?

- A. 4. B. 5. C. 7. D. 6.

Câu 83: (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Bất phương trình $f(x) < 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A. $m > f(0)$. B. $m > f(2) - 4$. C. $m \geq f(0)$. D. $m \geq f(2) - 4$.

Câu 84: (SỞ GD&ĐT ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
y'	$+\infty$	-2	0	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) < x^3 + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

- A. $m > f(x) + 1$. B. $m \geq f(-1) - 1$. C. $m \geq f(-1) + 1$. D. $m > f(1) - 1$.

Câu 85: (SỞ GD&ĐT NAM ĐỊNH 2018-2019) Số các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để phương trình $x^2 + (m+2)x + 4 = (m-1)\sqrt{x^3 + 4x}$ có nghiệm là

- A. 2011. B. 2012. C. 2013. D. 2014.

Câu 86: (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị tham số m để bất phương trình $6x + \sqrt{(2+x)(8-x)} \leq x^2 + m - 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 8]$.

- A. $m \geq 16$. B. $m \geq 15$. C. $m \geq 8$. D. $-2 \leq m \leq 16$.

Câu 87: (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Số giá trị nguyên của tham số m nằm trong khoảng $(0; 2020)$ để phương trình $\|x-1\| - |2019-x| = 2020-m$ có nghiệm là

- A. 2020. B. 2021. C. 2019. D. 2018.

Câu 88: (SỞ GD&ĐT ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019) Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $(x+1)^4 + x^2 - 4x - 5 \geq m^4 + m^2 - 6m$ thỏa mãn với mọi giá trị của $x \in \mathbb{R}$. Tính tổng các giá trị của S .

- A. 1. B. -3. C. 5. D. 2.

Câu 89: (SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH NĂM 2018-2019) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình sau $x^6 + 3x^4 - m^3x^3 + 4x^2 - mx + 2 \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng:

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

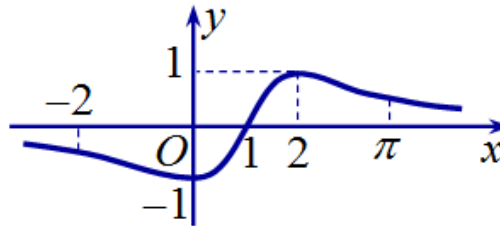
Câu 90: (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^3 + x^2 - m}{x+1}$ trên $[0; 2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là

- A. -5. B. 1. C. -3. D. -8.

Câu 91: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Gọi s là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 2019]$ để bất phương trình $x^2 - m + \sqrt{(1-x^2)^3} \leq 0$ đúng với mọi $x \in [-1; 1]$. Số phần tử của tập s bằng

- A. 1. B. 2020. C. 2019. D. 2.

Câu 92: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH LẦN 03 NĂM 2018 - 2019) Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Bất phương trình $f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$ khi và chỉ khi

- A. $m < f(0)$. B. $m < f(1) - 1$. C. $m < f(-1) + 1$. D. $m < f(2)$.

Câu 93: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ LẦN 3 2018-2019) Cho phương trình $m(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1) - x^2 + 2x = 0$ (m là tham số). Biết rằng tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1 + 2\sqrt{2}]$ là đoạn $[a; b]$. Tính giá trị của biểu thức $T = 2b - a$.

- A. $T = 4$. B. $T = \frac{7}{2}$. C. $T = 3$. D. $T = \frac{1}{2}$.

Câu 94: (THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 04) Tổng các giá trị nguyên dương của m để tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{\frac{m}{72}}x^2 + 1 < \sqrt{x}$ có chứa đúng hai số nguyên là

- A. 27. B. 29. C. 28. D. 30.

DẠNG TOÁN 5: BÀI TOÁN THAM SỐ

Câu 95: (THPT NGÔ GIA TỰ VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - m$. Trên $[-1; 1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1 . Tính m .

- A. $m = -6$. B. $m = -3$. C. $m = -4$. D. $m = -5$.

Câu 96: (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Nếu hàm số $y = x + m + \sqrt{1-x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ thì giá trị của m là

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $-\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2}$. D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 97: (CỤM LIÊN TRƯỜNG HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x^2 + m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0; 1]$. Khi đó mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$. B. $2m_0 - 1 < 0$. C. $6m_0 - m_0^2 < 0$. D. $2m_0 + 1 < 0$.

Câu 98: (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x - m^2 - 2}{x - m}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1 .

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 99: Cho hàm số $f(x) = \frac{x - m^2}{x + 8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 3]$ bằng -3 . Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A. $(20; 25)$. B. $(5; 6)$. C. $(6; 9)$. D. $(2; 5)$.

Câu 100: (MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2016-2017) Cho hàm số $y = \frac{x + m}{x - 1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2; 4]} y = 3$. Khẳng định nào sau dưới đây đúng?

A. $m < -1$. B. $3 < m \leq 4$. C. $m > 4$. D. $1 \leq m < 3$.

Câu 101: (MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2016-2017) Cho hàm số $y = \frac{x + m}{x + 1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn

$\min_{[1; 2]} y + \max_{[1; 2]} y = \frac{16}{3}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $m \leq 0$ B. $m > 4$ C. $0 < m \leq 2$ D. $2 < m \leq 4$

Câu 102: (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x + m}{x + 1}$ trên $[1; 2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m > 10$. B. $8 < m < 10$. C. $0 < m < 4$. D. $4 < m < 8$.

Câu 103: (THPT HUỖNH MÃN ĐẠT NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = \frac{2\sin x - m\cos x}{\sin x + \cos x}$ đạt giá

trị lớn nhất trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ bằng 1. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m \in [-1; 0)$. B. $m \in [0; 1)$. C. $m \in [1; 2)$. D. $m \in [2; 3)$.

Câu 104: (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Gọi A, B lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x + m^2 + m}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 3]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A + B = \frac{13}{2}$.

A. $m = 1; m = -2$. B. $m = -2$. C. $m = \pm 2$. D. $m = -1; m = 2$.

Câu 105: (CHUYÊN HƯNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03) Gọi T là tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx + 1}{x + m^2}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[2; 3]$ bằng $\frac{5}{6}$. Tính tổng của các phần tử trong T .

A. $\frac{17}{5}$. B. $\frac{16}{5}$. C. 2. D. 6.

Câu 106: (THPT CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$.

Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 là

- A. 1. B. -4. C. 0. D. 4.

Câu 107: (GKI THPT VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin x - m}{\sin x + 1}$. Tìm giá trị

của m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ bằng -2.

- A. $m = 5$. B. $\begin{cases} m = 5 \\ m = 2 \end{cases}$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Câu 108: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x + m^2}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng 14?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 4.

Câu 109: (SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VINH PHÚC NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 5.

- A. -1. B. 2. C. -2. D. 1.

Câu 110: (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 6.

Câu 111: (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 2]$ tại một điểm $x_0 \in (0; 2)$.

- A. $0 < m < 1$. B. $m > 1$. C. $m > 2$. D. $-1 < m < 1$.

Câu 112: (THPT Phú Dục - Thái Bình - 2019) Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ đạt giá trị lớn nhất bằng 50 trên $[-2; 4]$. Tổng các phần tử thuộc S là

- A. 4. B. 36. C. 140. D. 0.

Câu 113: (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right|$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A. $-\frac{8}{3}$. B. 5. C. $\frac{5}{3}$. D. -1.

Câu 114: (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 4x + m + 3| - 4x$ bằng -5.

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

_____HẾT_____HUẾ...16h00 Ngày 08 tháng 8 năm 2020



CHUYÊN ĐỀ: KHẢO SÁT HÀM SỐ

Chủ đề 3: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

LỜI GIẢI CHI TIẾT

DẠNG TOÁN 1: GTLN - GTNN TRÊN KHOẢNG (NỬA KHOẢNG - ĐOẠN)

Câu 1: (GKI THPT NGHĨA HƯNG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số không có giá trị lớn nhất trên đoạn $[a; b]$.
- B. Hàm số luôn có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$.
- C. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$.
- D. Hàm số luôn có cực đại và cực tiểu trên đoạn $[a; b]$.

Lời giải

Theo định lý về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn.

Câu 2: (THPT CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là 0. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}, \exists x_0, f(x_0) = 0$.
- B. $f(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$.
- C. $f(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}, \exists x_0, f(x_0) = 0$.
- D. $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có định nghĩa giá trị nhỏ nhất của hàm số: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Câu 3: (THPT CẦU GIẤY HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a < b$, hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[a; b]$ bằng

- A. $f(b)$.
- B. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
- C. $f(a)$.
- D. $f(\sqrt{ab})$.

Lời giải

Hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) < 0 \forall x \in (a; b)$ nên hàm số nghịch biến trên $(a; b)$.

Do đó $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$.

Câu 4: (CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH YÊN BÁI LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y			5		4	
	0			1		

- A. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$. B. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(3)$. C. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(2)$. D. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$.

Câu 5: (THPT CỔ LOA HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$		3		$+\infty$
	$-\infty$		0	

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên đoạn $[0;2]$ giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ bằng 3.

Câu 6: (THPT NGUYỄN DU - ĐAK LAC - NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+		- 0 +	
y		0		$+\infty$
	$-\infty$		-1	

Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1.
 B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
 C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.
 D. Hàm số có đúng hai cực trị.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta dễ thấy ý A, B, D đúng.

Do $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 7: (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+		-	0	+
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số có đúng một cực trị.
- B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.
- D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Lời giải

Đáp án A sai vì hàm số có 2 điểm cực trị.

Đáp án B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu $y=-1$ khi $x=0$.

Đáp án C sai vì hàm số không có GTLN và GTNN trên $\mathbb{R}$.

Đáp án D đúng vì hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 8: (Đề minh họa) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$			5		$-\infty$

A. $y_{CD}=5$.

B. $y_{CT}=0$.

C. $\min_{\mathbb{R}} y=4$.

D. $\max_{\mathbb{R}} y=5$.

Lời giải

Từ BBT suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=1$, giá trị cực đại $y_{CD}=y(1)=5$.

Câu 9: (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5;7]$ như sau:

x	-5	1	7
y'	-	0	+
y	6	2	9

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min_{[-5;7]} f(x)=6$.

B. $\min_{[-5;7]} f(x)=2$.

C. $\max_{[-5;7]} f(x)=9$.

D. $\max_{[-5;7]} f(x)=6$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên trên $[-5;7]$, ta có: $\min_{[-5;7]} f(x)=f(1)=2$.

Câu 10: (SỞ GD&ĐT KIÊN GIANG NĂM 2018-2019) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	-4	0	8	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		$f(-4)$	9		$f(8)$		$+\infty$

Biết $f(-4) > f(8)$, khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\mathbb{R}$ bằng

- A. 9. B. $f(-4)$. C. $f(8)$. D. -4 .

Lời giải

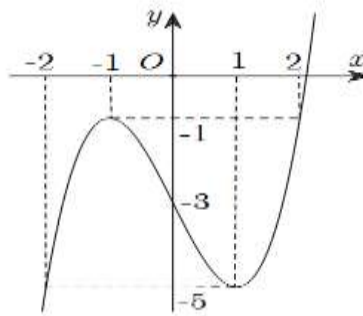
Từ bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-4	0	8	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		$f(-4)$	9		$f(8)$		$+\infty$

Ta có: $f(x) \geq f(-4), \forall x \in (-\infty; 0]$; $f(x) \geq f(8), \forall x \in (0; +\infty)$.

Mặt khác: $f(-4) > f(8)$ suy ra: $\forall x \in (-\infty; +\infty): f(x) \geq f(8)$. Vậy $\min_{\mathbb{R}} f(x) = f(8)$.

Câu 11: (CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$.



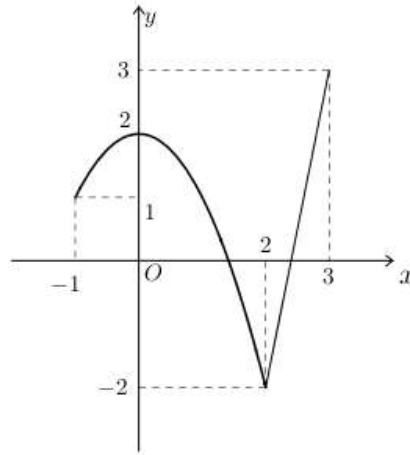
- A. $m = -5; M = -1$. B. $m = -2; M = 2$. C. $m = -1; M = 0$. D. $m = -5; M = 0$.

Lời giải

Nhìn vào đồ thị ta thấy:

$M = \max_{[-2; 2]} f(x) = -1$ khi $x = -1$ hoặc $x = 2$; $m = \min_{[-2; 2]} f(x) = -5$ khi $x = -2$ hoặc $x = 1$.

Câu 12: (THPT THÁI PHIÊN HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(3\sin^2 x - 1)$ bằng



A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Đặt $t = 3\sin^2 x - 1 \Rightarrow t \in [-1; 2]$

Nhận xét: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(3\sin^2 x - 1)$ là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(t)$ trên $[-1; 2]$. Dựa vào đồ thị ta có: $\max_{\mathbb{R}} y = \max_{[-1; 2]} f(t) = 2$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(-2x)$ trên $[-1; \frac{1}{2}]$.

Giá trị $m + M$ bằng

A. 0.

B. 4.

C. $\frac{19}{8}$.

D. -4.

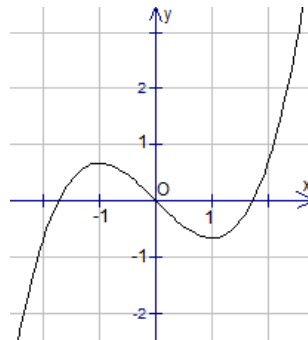
Lời giải

Đặt $t = -2x$, vì $x \in [-1; \frac{1}{2}] \Rightarrow t \in [-1; 2]$.

Khi đó cần tìm GTNN, GTLN của hàm số $y = f(t)$, $t \in [-1; 2]$.

Với $t \in [-1; 2] \Rightarrow \begin{cases} m = \min_{[-1; 2]} f(t) = -4 \text{ khi } t = 2 \\ M = \max_{[-1; 2]} f(t) = 0 \text{ khi } t = 0 \end{cases}$. Suy ra $m + M = -4$.

Câu 14: (THPT HOÀNG VĂN THỤ - HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2}\right)$ trên đoạn $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ bằng

- A. $f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$. B. $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. C. $f(0)$. D. $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải

Đặt $t = \frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Vì $x \in \left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow x + \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên

t	-1	0	1
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$

Ta có: $\max_{\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]} f\left(\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2}\right) = \max_{[-1; 1]} f(t) \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3}$.

Vậy $\max_{\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]} f\left(\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, đồng biến trên đoạn $[a; b]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đã cho có cực trị trên đoạn $[a; b]$.
 B. Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(a; b)$.
 C. Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $[a; b]$.
 D. Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$.

Lời giải

Vì hàm số $y = f(x)$ liên tục, đồng biến trên đoạn $[a; b]$ nên $\min_{[a; b]} f(x) = f(a); \max_{[a; b]} f(x) = f(b)$

Vậy hàm số đã cho có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$.

Câu 16: (SỞ GD&ĐT ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	2	5	8	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	0	-	+
$f(x)$	$+\infty$	0	2	0	$+\infty$

Phát biểu nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 và giá trị lớn nhất bằng 2.

B. Hàm số nhận giá trị dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

C. Trên $[2;8]$ hàm số có giá trị lớn nhất là M , giá trị nhỏ nhất là m . Giá trị biểu thức $m - 3M = -6$.

D. Hàm số có đúng một cực trị.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

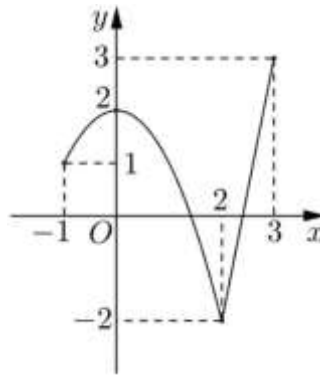
Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 và không có giá trị lớn nhất nên loại phương án **A**.

Hàm số nhận giá trị không âm với mọi $x \in \mathbb{R}$ ($f(2) = 0$) nên loại phương án **B**.

Hàm số có 3 cực trị nên loại phương án **D**.

Hàm số có giá trị lớn nhất trên $[2;8]$ là $M = 2$ và giá trị nhỏ nhất trên $[2;8]$ là $m = 0$. Giá trị biểu thức $m - 3M = 0 - 3 \cdot 2 = -6$. Vậy phát biểu đúng là **C**.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $(-1;3)$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M - m$ bằng



A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Căn cứ vào đồ thị ta có $M = \max_{x \in [-1;3]} y = 3$, $m = \min_{x \in [-1;3]} y = -2$. Vậy $M - m = 5$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	2	1	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\max_{x \in [-1;1]} f(x) = 2$.

B. $\max_{x \in [-1;1]} f(x) = 1$.

C. $\max_{x \in [-1;1]} f(x) = 0$.

D. $\max_{x \in [-1;1]} f(x) = -3$.

Lời giải

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$f(x)$	$+\infty$	-3	2	1	$+\infty$
	$\swarrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\min_{x \in [-1;1]} f(x) = 2$. B. $\min_{x \in [-1;1]} f(x) = 1$. C. $\min_{x \in [-1;1]} f(x) = 0$. D. $\min_{x \in [-1;1]} f(x) = -3$.

Lời giải

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\min_{x \in [0;1]} f(x) = -3$. B. $\min_{x \in [0;1]} f(x) = 2$. C. $\min_{x \in [0;1]} f(x) = 0$. D. $\min_{x \in [0;1]} f(x) = 1$.

Lời giải

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\max_{x \in [5;15]} f(x) = f(5)$. B. $\max_{x \in [5;15]} f(x) = f(15)$. C. $\max_{x \in [5;15]} f(x) = 2$. D. $\max_{x \in [5;15]} f(x) = f(10)$.

Lời giải

Dựa vào BBT ta thấy $f(x)$ đồng biến trên $[5;15] \Rightarrow \max_{x \in [5;15]} f(x) = f(15)$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\max_{x \in [-15;-5]} f(x) = f(-5)$. B. $\max_{x \in [-15;-5]} f(x) = f(-15)$.
C. $\max_{x \in [-15;-5]} f(x) = 2$. D. $\max_{x \in [-15;-5]} f(x) = f(-10)$.

Lời giải

Dựa vào BBT ta thấy $f(x)$ nghịch biến trên $[-15;-5] \Rightarrow \max_{x \in [-15;-5]} f(x) = f(-15)$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-3		2		1		$+\infty$

Đặt $g(x) = 2f(x) + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\max_{x \in [-1;1]} g(x) = 2$. B. $\max_{x \in [-1;1]} g(x) = 5$. C. $\max_{x \in [-1;1]} g(x) = 1$. D. $\max_{x \in [-1;1]} g(x) = -5$.

Lời giải

Dựa vào BBT, ta có: $\forall x \in [-1;1]: -3 \leq f(x) \leq 2 \Leftrightarrow -6 \leq 2f(x) \leq 4 \Leftrightarrow -5 \leq 2f(x) + 1 \leq 5$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-3		2		1		$+\infty$

Đặt $g(x) = 3 - 4f(x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\min_{x \in [-1;1]} g(x) = 15$. B. $\min_{x \in [-1;1]} g(x) = -5$. C. $\min_{x \in [-1;1]} g(x) = -15$. D. $\max_{x \in [-1;1]} g(x) = -3$.

Lời giải

Dựa vào BBT, ta có: $\forall x \in [-1;1]: -3 \leq f(x) \leq 2 \Leftrightarrow -8 \leq -4f(x) \leq 12 \Leftrightarrow -5 \leq 3 - 4f(x) \leq 15$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-3		2		1		$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\max_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 2$. B. $\max_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 1$. C. $\max_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 0$. D. $\max_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 3$.

Lời giải

BBT:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x)$	$+\infty \searrow -3 \nearrow 2 \searrow 1 \nearrow +\infty$
$ f(x) $	$\searrow 0 \nearrow 3 \searrow 0 \nearrow 2 \searrow 1 \nearrow$

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\min_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 2.$

B. $\min_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 1.$

C. $\min_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 0.$

D. $\min_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 3.$

Lời giải

BBT:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$						
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$		
$ f(x) $	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $g(x) = f(\sin x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 2.$

B. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 1.$

C. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 3.$

D. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 4.$

Lời giải:

Đặt $t = \sin x; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in [-1;1].$

Ta có: $\max_{\mathbb{R}} g(x) = \max_{[-1;1]} f(t) = 2$ đạt được khi $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$

Đặt $g(x) = f(\cos x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = 1$. B. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = 2$. C. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = -3$. D. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = 0$.

Lời giải

Đặt $t = \cos x; \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$.

Ta có: $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = \min_{[0; 1]} f(t) = 1$ đạt được khi $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$								$+\infty$

Đặt $g(x) = [f(x)]^3 - 3[f(x)]^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\max_{[-1; 1]} g(x) = -4$. B. $\max_{[-1; 1]} g(x) = 4$. C. $\max_{[-1; 1]} g(x) = 0$. D. $\max_{[-1; 1]} g(x) = 2$.

Lời giải

Ta có: $\forall x \in [-1; 1] \Rightarrow f(x) \in [-3; 2]$. Đặt $t = f(x) \in [-3; 2]$.

Xét hàm số $h(t) = t^3 - 3t^2, t \in [-3; 2] \Rightarrow h'(t) = 3t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in [-3; 2] \\ t = 2 \in [-3; 2] \end{cases}$.

Ta có: $h(0) = 0; h(2) = -4; h(-3) = -54$.

Câu 30: (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Giá trị lớn nhất của hàm số

$f(x) = \frac{x}{x+3}$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

- A. 3. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. -2.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \frac{3}{(x+3)^2} > 0, \forall x \in [-2; 3]$

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[-2; 3]$. Suy ra: $\max_{[-2; 3]} f(x) = f(3) = \frac{1}{2}$.

Câu 31: (THPT CHUYÊN BẮC GIANG NAM 2018-2019 LẦN 01) Giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $[2; +\infty)$ là

- A. 2. B. $\frac{5}{2}$. C. 0. D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được: $f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{3x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{x} \geq \frac{3.2}{4} + 2\sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{5}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2$.

Câu 32: (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$.

- A. $\min_{[2;4]} y = 6$. B. $\min_{[2;4]} y = -2$. C. $\min_{[2;4]} y = -3$. D. $\min_{[2;4]} y = \frac{19}{3}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[2; 4]$

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -1$ (loại)

Suy ra $y(2) = 7$; $y(3) = 6$; $y(4) = \frac{19}{3}$. Vậy $\min_{[2;4]} y = 6$ tại $x = 3$.

Câu 33: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$.

- A. $\min_{[2;4]} y = \frac{13}{2}$. B. $\min_{[2;4]} y = \frac{25}{4}$. C. $\min_{[2;4]} y = 6$. D. $\min_{[2;4]} y = -6$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$; $y' = 1 - \frac{9}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \notin (2; 4) \end{cases}$

Ta có: $y(2) = \frac{13}{2}$; $y(3) = 6$; $y(4) = \frac{25}{4}$. Vậy $\min_{[2;4]} y = 6$ khi $x = 3$.

Câu 34: (SỞ GD&ĐT BÀ RỊA VŨNG TÀU NĂM 2018-2019) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$ trên đoạn $[1; 5]$.

- A. $\max_{[1;5]} f(x) = 3\sqrt{2}$. B. $\max_{[1;5]} f(x) = \sqrt{2}$. C. $\max_{[1;5]} f(x) = 2\sqrt{2}$. D. $\max_{[1;5]} f(x) = 2$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$y = f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)(x-1 + 5-x)} = 2\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{\sqrt{x-1}}{1} = \frac{\sqrt{5-x}}{1} \Leftrightarrow x = 3 \in [1; 5]$. Vậy $\max_{[1;5]} f(x) = 2\sqrt{2}$.

Câu 35: Gọi m , M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{7-x}$. Khi đó có bao nhiêu số nguyên dương nằm giữa m và M ?

A. 1.

B. 5.

C. 7.

D. 0.

Lời giải

Tập xác định $D=[1;7]$. Ta có: $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{7-x}}$; $y'=0 \Rightarrow x=4$.

Khi đó $y(1)=y(7)=\sqrt{6}$, $y(4)=2\sqrt{3}$. Suy ra $\sqrt{6} \leq k \leq 2\sqrt{3} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k=3$.

Vậy có duy nhất một số nguyên dương thỏa mãn.

Câu 36: (THPT THĂNG LONG HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 02) Hàm số $y=x+\frac{10^8}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[10^3;10^9]$ tại x bằng

A. 10^4 .

B. 10^3 .

C. 10^5 .

D. 10^6 .

Lời giải

Cách 1: Hàm số $y=x+\frac{10^8}{x}$ liên tục trên $[10^3;10^9]$. Ta có $y'=1-\frac{10^8}{x^2}$.

$$y'=0 \Rightarrow x^2=10^8 \Leftrightarrow \begin{cases} x=10^4 \in [10^3;10^9] \\ x=-10^4 \notin [10^3;10^9] \end{cases}$$

$y(10^3)=10^3+10^5$, $y(10^4)=2 \cdot 10^4$, $y(10^9)=10^9+10^{-1}$. Vậy $\min_{[10^3;10^9]} y=2 \cdot 10^4$ khi $x=10^4$.

Cách 2: Vì $x>0$ nên theo bất đẳng thức Côsi ta có $y=x+\frac{10^8}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{10^8}{x}}=2 \cdot 10^4$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac{10^8}{x} \Leftrightarrow x=10^4 \in [10^3;10^9]$. Vậy $\min_{[10^3;10^9]} y=2 \cdot 10^4$ khi $x=10^4$.

Câu 37: (SỞ GD&ĐT BÌNH THUẬN NĂM 2018-2019) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{-x^2+5x}$ bằng

A. 0.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\sqrt{6}$.

D. 2.

Lời giải

TXĐ: $D=[0;5]$. Ta có: $y'=\frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x}}$; $y'=0 \Leftrightarrow -2x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2} \in [0;5]$.

Ta có: $y(0)=y(5)=0$; $y\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}$. Vậy $\max y=y\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}$.

Câu 38: (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x-5$.

A. -20.

B. -8.

C. -9.

D. 0.

Lời giải

Xét hàm số: $y=\sin^2 x-4\sin x-5$

Txđ: $D=\mathbb{R}$. Đặt $t=\sin x$, $-1 \leq t \leq 1$. Ta có: $y(t)=t^2-4t-5$, hàm số liên tục trên $[-1;1]$

$y'(t)=2t-4$, $y'(t)=0 \Leftrightarrow t=2$; $y(1)=-8$, $y(-1)=0$. Vậy $\min y=y(1)=-8$.

Câu 39: (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{2\sin x + 3}{\sin x + 1} \text{ trên đoạn } \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ là}$$

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Đặt $t = \sin x$. Với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $0 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$. Khi đó: $y = f(t) = \frac{2t+3}{t+1}$, với $t \in [0; 1]$.

Có $f'(t) = \frac{-1}{(t+1)^2} < 0, \forall t \in [0; 1]$ nên hàm số $f(t)$ nghịch biến trên đoạn $[0; 1]$.

Suy ra $\min_{[0; 1]} f(t) = f(1) = \frac{5}{2}$. Vậy $\min y = \frac{5}{2}$.

Câu 40: (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số

$f(x) = \sin^3 x - 3\sin x + 2$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho.

Khi đó $M + 2m$ là

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Đặt $\sin x = t$ ($t \in [-1; 1]$). Ta có $f(t) = t^3 - 3t + 2$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t + 2$ với $t \in [-1; 1]$; $f'(t) = 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = 1$.

Ta có $f(-1) = 4, f(1) = 0$. Suy ra, giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số lần lượt là 4 và 0 hay

$M = 4; m = 0$. Giá trị $M + 2m = 4 + 2 \cdot 0 = 4$.

Câu 41: (GKI THPT NGHĨA HƯNG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019) Cho hàm số

$f(x) = \cos 2x - \cos x + 1$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là

A. $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -\frac{1}{8}$.

B. $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -\frac{1}{4}$.

C. $\min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{8}$.

D. $\min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Hàm số được viết lại $f(x) = 2\cos^2 x - \cos x$. Đặt $t = \cos x$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$ suy ra $t \in [-1; 1]$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(t) = 2t^2 - t$ trên $[-1; 1]$.

Ta có $g'(t) = 4t - 1$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$; $g(-1) = 3$; $g(1) = 1$; $g\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$. Vậy $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -\frac{1}{8}$.

Câu 42: (GKI THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Giá trị lớn nhất của hàm số

$y = 2\sin^2 x - \cos x$ là phân số tối giản có dạng với a, b là các số nguyên dương. Tìm $a - b$.

A. 8.

B. 9.

C. 7.

D. 10.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y = 2\sin^2 x - \cos x = 2(1 - \cos^2 x) - \cos x = -2\cos^2 x - \cos x + 2$

Đặt: $t = \cos x$, với $-1 \leq t \leq 1$

Như vậy ta đi tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = -2t^2 - t + 2$ trên đoạn $[-1; 1]$

Ta có: $y' = -4t - 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{4} \in [-1; 1]$; $y(-1) = 1$; $y\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{17}{8}$; $y(1) = -1$

Vậy: Giá trị lớn nhất của hàm số là $y\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{17}{8}$ suy ra $a - b = 9$

Câu 43: (GKI THPT VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3\cos 2x - 4\sin x$ là

A. 1.

B. -7.

C. -5.

D. $\frac{11}{3}$.

Lời giải

Ta có $y = 3(1 - 2\sin^2 x) - 4\sin x \Leftrightarrow y = -6\sin^2 x - 4\sin x + 3$. Đặt $t = \sin x$, $-1 \leq t \leq 1$.

Khi đó $y = -6t^2 - 4t + 3$ với $t \in [-1; 1]$.

$$y' = -12t - 4, y' = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \text{ và } y(-1) = 1, y(1) = -7, y\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -7 đạt được khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Câu 44: (MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2016-2017) Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$.

A. $M = 9$.

B. $M = 8\sqrt{3}$.

C. $M = 1$.

D. $M = 6$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1); y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1(l) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } y(0) = 3; y(1) = 2; y(\sqrt{3}) = 6.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$ là $M = y(\sqrt{3}) = 6$

Câu 45: (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

A. 18.

B. -18.

C. -2.

D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = 3x^2 - 3. \text{ Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-3; 3] \\ x = 1 \in [-3; 3] \end{cases}$$

Mặt khác: $f(-3) = -18; f(3) = 18; f(-1) = 2; f(1) = -2$. Vậy $\min_{[-3; 3]} f(x) = f(-3) = -18$.

Câu 46: (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

A. $m = \frac{17}{4}$.

B. $m = 10$.

C. $m = 5$.

D. $m = 3$.

Lời giải

$$\text{Đặt } y = f(x) = x^2 + \frac{2}{x}. \text{ Ta có } y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}, y' = 0 \Rightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$$

Khi đó $f(1)=3, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{4}, f(2)=5$. Vậy $m=\min_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f(x)=f(1)=3$.

- Câu 47: (THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019)** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2x-4\sqrt{6-x}$ trên $[-3;6]$. Tổng $M+m$ có giá trị là:
A. -12. B. -6. C. 18. D. -4.

Lời giải

Hàm số xác định liên tục trên $[-3;6]$.

Ta có $f'(x)=2+\frac{2}{\sqrt{6-x}}>0 \forall x \in (-3;6)$, hàm số đồng biến trên $(-3;6)$

$$M=\max_{[-3;6]} y=f(6)=12; m=\min_{[-3;6]} y=f(-3)=-6; M+m=-6.$$

- Câu 48: (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03)** Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=4\sqrt{x^2-4x+6}+4x-x^2+1$. Tính tích các nghiệm của phương trình $f(x)=M$.
A. 2. B. 4. C. -2. D. -4.

Lời giải

$$\text{Đặt } t=\sqrt{x^2-4x+6}=\sqrt{(x-2)^2+2}\geq\sqrt{2}.$$

$$\text{Khi đó, } M=\max f(x)=\max_{[\sqrt{2};+\infty)} g(t), \text{ với } g(t)=-t^2+4t+7 \text{ trên } [\sqrt{2};+\infty).$$

Ta có: $g(t)=-t^2+4t+7=11-(t-2)^2\leq 11$, dấu đẳng thức xảy ra khi

$$t=2\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4x+6}=2\Leftrightarrow x^2-4x+2=0\Leftrightarrow\begin{cases} x=2+\sqrt{2} \\ x=2-\sqrt{2} \end{cases}.$$

Như vậy, $M=\max f(x)=\max_{[\sqrt{2};+\infty)} g(t)=11\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{2}$, suy ra nghiệm của phương trình $f(x)=M$

là $x=2\pm\sqrt{2}$. Vậy tích các nghiệm của phương trình $f(x)=M$ bằng 2.

- Câu 49: (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2016-2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^4-x^2+13$ trên đoạn $[-2;3]$.

$$\text{A. } m=\frac{51}{4}. \quad \text{B. } m=\frac{49}{4}. \quad \text{C. } m=13. \quad \text{D. } m=\frac{51}{2}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } y'=4x^3-2x. \quad y'=0\Leftrightarrow\begin{cases} x=0 \\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}; y(0)=13, y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{51}{4}, y(-2)=25, y(3)=85.$$

$$\text{Vậy } m=\frac{51}{4}.$$

- Câu 50: (SỞ GD&ĐT LẠNG SƠN NĂM 2018-2019)** Tìm x để hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}$ đạt giá trị lớn nhất.
A. $x=-2$. B. $x=2\sqrt{2}$. C. $x=1$. D. $x=\sqrt{2}$.

Lời giải

Tập xác định $D = [-2; 2]$. Ta có: $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \sqrt{2}(n) \\ x = -\sqrt{2}(l) \end{cases}$$

Ta có: $f(-2) = -2$; $f(2) = 2$; $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$. Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất là $2\sqrt{2}$ khi $x = \sqrt{2}$

Câu 51: (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2016-2017) Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $\min_{(0; +\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$.

B. $\min_{(0; +\infty)} y = 7$.

C. $\min_{(0; +\infty)} y = \frac{33}{5}$.

D. $\min_{(0; +\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$.

Lời giải

Cách 1: $y = 3x + \frac{4}{x^2} = \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{4}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \frac{4}{x^2}} = 3\sqrt[3]{9}$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{3x}{2} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$. Vậy $\min_{(0; +\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$

Cách 2: Xét hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Ta có $y = 3x + \frac{4}{x^2} \Rightarrow y' = 3 - \frac{8}{x^3}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} = 3 \Leftrightarrow x^3 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$

x	0	$\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$	$+\infty$
y'		-	0
y			+

$3\sqrt[3]{9}$

$\Rightarrow \min_{(0; +\infty)} y = y\left(\sqrt[3]{\frac{8}{3}}\right) = 3\sqrt[3]{9}$.

Lưu ý: Các em nếu có sử dụng MTCT thì bấm cẩn thận nhé!

Câu 52: (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02) Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x - \sqrt{x}$ trên đoạn $[0; 3]$. Giá trị của biểu thức $M + 2m$ gần với số nào nhất trong các số dưới đây?

A. 1,768.

B. 0,767.

C. 1,767.

D. 0,768.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \in (0; 3)$.

$f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$, $f(3) = 3 - \sqrt{3}$.

Suy ra, $M = 3 - \sqrt{3}$, $m = \frac{-1}{4} \Rightarrow M + 2m = \frac{5 - 2\sqrt{3}}{2} \approx 0,7679491924...$

Câu 53:

(THPT SƠN TÂY HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 02) Giá trị nhỏ nhất của hàm số

Câu 54: $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 2019$ là

A. 2017.

B. 2020.

C. 2018.

D. 2019.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Biến đổi: $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 2019 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 2019$.

Đặt $t = x^2 + 5x + 4 \Rightarrow t = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow t \geq -\frac{9}{4} \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số đã cho trở thành $f(t) = t^2 + 2t + 2019 = (t+1)^2 + 2018 \geq 2018 \forall t \geq -\frac{9}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng 2018 tại $t = -1 \in \left[-\frac{9}{4}; +\infty\right)$.

Câu 55: (SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tổng giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = (x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $[0;3]$ có dạng $a - b\sqrt{c}$ với a là số nguyên và b, c là các số nguyên dương. Tính $S = a + b + c$.

A. 4.

B. -2.

C. -22.

D. 5.

Lời giải

Hàm số $f(x) = (x-6)\sqrt{x^2+4}$ xác định và liên tục trên đoạn $[0;3]$.

$$f'(x) = \sqrt{x^2+4} + (x-6) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^2+4+(x-6)x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{2x^2-6x+4}{\sqrt{x^2+4}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \in [0;3] \\ x=2 \in [0;3] \end{cases}$$

$$f(0) = -12; f(3) = -3\sqrt{13}; f(1) = -5\sqrt{5}; f(2) = -8\sqrt{2}$$

Suy ra $\max_{[0;3]} y = M = -3\sqrt{13}$ và $\min_{[0;3]} y = m = -12$

$M + m = -12 - 3\sqrt{13} = a - b\sqrt{c}$ với a là số nguyên và b, c là các số nguyên dương nên $a = -12; b = 3; c = 13$. Do đó $S = a + b + c = 4$.

Câu 56: (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x(x-2)^2(x-3), \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;4]$ bằng

A. $f(0)$.

B. $f(2)$.

C. $f(3)$.

D. $f(4)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = -x(x-2)^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

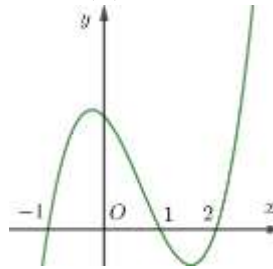
Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0;4]$

x	0	2	3	4		
$f'(x)$	0	+	0	+	0	-

$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$
--------	--------	--------	--------	--------

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ là $f(3)$.

Câu 57: (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ là

A. $f(1)$.

B. $f(-1)$.

C. $f(2)$.

D. $f(0)$.

Lời giải

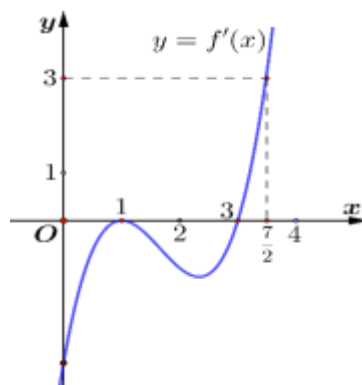
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		$f(-1)$	$f(1)$	$f(2)$		$+\infty$		

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;2]$ là $f(1)$.

Câu 58: (THPT YÊN MÔ A-NINH BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?

A. $x_0 = 0$.

B. $x_0 = \frac{7}{2}$.

C. $x_0 = 3$.

D. $x_0 = 1$.

Lời giải

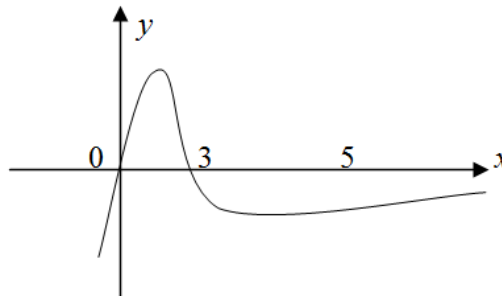
Xét hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$. Dựa vào đồ thị ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	0	1	3	$\frac{7}{2}$			
y'		-	0	-	0	+	
y	$f(0)$			$f(3)$			$f(\frac{7}{2})$

Nhìn bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm $x_0 = 3$.

Câu 59: (THPT THIỆU HÓA – THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(3) = f(5) - f(4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$.



A. $m = f(5), M = f(3)$.

B. $m = f(5), M = f(1)$.

C. $m = f(0), M = f(3)$.

D. $m = f(1), M = f(3)$.

Lời giải

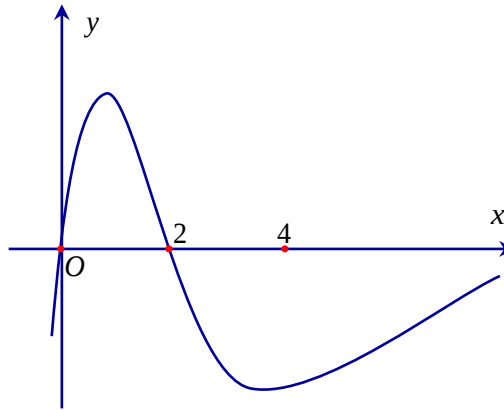
Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$

x	0	3	5	
$f'(x)$	0	+	0	-
$f(x)$	$f(0)$	$f(3)$	$f(5)$	

$\Rightarrow M = f(3)$ và $f(1) < f(3), f(4) < f(3)$

$f(5) - f(0) = f(1) - f(3) + f(4) - f(3) < 0 \Rightarrow f(5) < f(0) \Rightarrow m = f(5)$.

Câu 60: (THPT LÝ NHÂN TÔNG LẦN 1 NĂM 2018-2019) Cho hàm số có $f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$.



A. $m = f(4), M = f(2)$.

B. $m = f(1), M = f(2)$.

C. $m = f(4), M = f(1)$.

D. $m = f(0), M = f(2)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị của hàm $f'(x)$ ta có bảng biến thiên:

x	0	2	4	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(4)$	

Vậy giá trị lớn nhất $M = f(2)$.

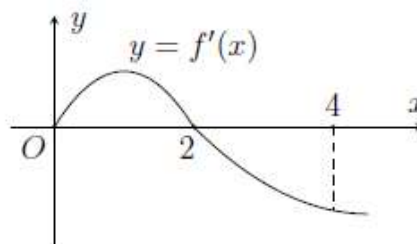
Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ nên $f(2) > f(1) \Rightarrow f(2) - f(1) > 0$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;4)$ nên $f(2) > f(3) \Rightarrow f(2) - f(3) > 0$.

Theo giả thuyết: $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$

$\Leftrightarrow f(0) - f(4) = f(2) - f(1) + f(2) - f(3) > 0 \Rightarrow f(0) > f(4)$. Vậy giá trị nhỏ nhất $m = f(4)$.

Câu 61: (THPT NINH BÌNH BẠC LIÊU NĂM 2018-2019 LẦN 04) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Giá trị nhỏ nhất m , giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ là



A. $m = f(4), M = f(1)$.

B. $m = f(4), M = f(2)$.

C. $m = f(1), M = f(2)$.

D. $m = f(0), M = f(2)$.

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[0;4]$ ta có bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[0;4]$ như sau:

x	0	2	4	
$f'(x)$	0	+	0	-
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(4)$	

Từ bảng biến thiên ta có $M = \max_{[0;4]} f(x) = f(2)$.

Mặt khác $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$

$\Leftrightarrow f(0) - f(4) = [f(2) - f(1)] + [f(2) - f(3)] > 0$ (do $f(2) > f(1); f(2) > f(3)$)

Suy ra $f(0) > f(4) \Rightarrow m = \min_{[0;4]} f(x) = f(4)$.

Câu 62: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH LẦN 1 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	-3	5	$-\infty$	

A. 15.

B. $\frac{25}{3}$.

C. $\frac{19}{3}$.

D. 12.

Lời giải

$g'(x) = (4 - 2x)f'(4x - x^2) + x^2 - 6x + 8 = (2 - x)[2f'(4x - x^2) + 4 - x]$.

Với $x \in [1;3]$ thì $4 - x > 0$; $3 \leq 4x - x^2 \leq 4$ nên $f'(4x - x^2) > 0$.

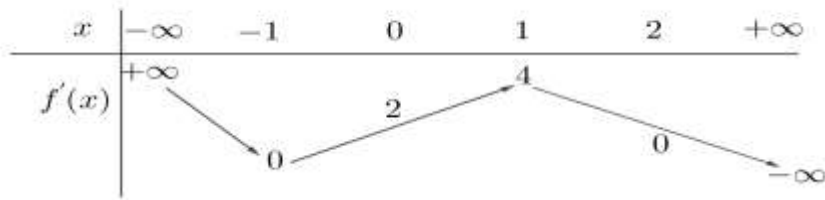
Suy ra $2f'(4x - x^2) + 4 - x > 0, \forall x \in [1;3]$.

Bảng biến thiên:

x	1	2	3
g'	+	0	-
g	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$

Suy ra $\max_{[1;3]} g(x) = g(2) = f(4) + 7 = 12$.

Câu 63: (THPT KINH MÔN HAI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập số thực và có bảng biến thiên như sau:



Biết rằng $f(-1) = \frac{10}{3}$, $f(2) = 6$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A. $\frac{10}{3}$. B. $\frac{820}{27}$. C. $\frac{730}{27}$. D. 198.

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$

$$g'(x) = 3[f^2(x) - 1] \cdot f'(x), \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f^2(x) = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên, ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-1; 2] \\ x = 2 \in [-1; 2] \end{cases}$

Và $f'(x) \geq 0, \forall x \in [-1; 2]$ nên $f(x)$ đồng biến trên $[-1; 2] \Rightarrow f(x) \geq f(-1) = \frac{10}{3}$

$\Rightarrow f(x) > 1 \Rightarrow f^2(x) > 1, \forall x \in [-1; 2]$ nên (2) vô nghiệm.

Do đó, $g'(x) = 0$ chỉ có 2 nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

Ta có $g(-1) = f^3(-1) - 3f(-1) = \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{730}{27}$; $g(2) = f^3(2) - 3f(2) = 6^3 - 3(6) = 198$.

Vậy $\min_{[-1; 2]} g(x) = g(-1) = \frac{730}{27}$.

DẠNG TOÁN 2: MAX MIN HÀM NHIỀU BIẾN

Câu 64: (THPT CHUYÊN BẮC GIANG NAM 2018-2019 LẦN 01) Cho $x^2 - xy + y^2 = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + xy + y^2$ bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 2.

Lời giải

$$\text{Xét } \frac{P}{2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$$

+ Nếu $y = 0$ thì $x^2 = 2$. Do đó $P = x^2 = 2$ suy ra $\min P = 2$

$$+ \text{ Nếu } y \neq 0 \text{ ta chia tử mẫu cho } y^2 \text{ ta được: } \frac{P}{2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{1 + \left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

Đặt $t = \frac{x}{y}$, khi đó $\frac{P}{2} = \frac{1+t+t^2}{1-t+t^2}$. Xét $f(t) = \frac{1+t+t^2}{1-t+t^2} \Rightarrow f'(t) = \frac{-2t^2+2}{(1-t+t^2)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-1 \end{cases}$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	1	$\frac{1}{3}$	3		

Khi đó $\min \frac{P}{2} = \frac{1}{3}$ do đó $\min P = \frac{2}{3}$.

Câu 65: (THPT MINH CHÂU HƯNG YÊN NĂM 2018 – 2019) Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$. Giá trị của $M + m$ bằng:

A. -4.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. -6.

D. $1 - 4\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy = 2\left[(x+y)^3 - 3xy(x+y)\right] - 3xy$

Từ $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow (x+y)^2 - 2xy = 2 \Rightarrow xy = \frac{(x+y)^2}{2} - 1$, đặt $x+y = t$ và thay vào P ta được

$$P = 2\left[t^3 - 3t\left(\frac{t^2}{2} - 1\right)\right] - 3\left(\frac{t^2}{2} - 1\right) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$$

$$\text{Mặt khác } 2 = (x+y)^2 - 2xy \geq (x+y)^2 - \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow (x+y)^2 - 4 \leq 0$$

$$-2 \leq x+y \leq 2 \Rightarrow t \in [-2; 2]$$

Khảo sát hàm số $P = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$ trên $t \in [-2; 2]$ ta được $m = \min_{[-2; 2]} P = -7$; $M = \max_{[-2; 2]} P = \frac{13}{2}$

$$\text{Vậy } M + m = -\frac{1}{2}.$$

Câu 66: (SỞ GD&ĐT NAM ĐỊNH 2018-2019) Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x+y \neq -1$ và $x^2 + y^2 + xy = x+y+1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{xy}{x+y+1}. \text{ Tính } M + m.$$

A. $\frac{1}{3}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Cách 1: Với điều kiện $x+y \neq -1$; $x^2 + y^2 + xy = x+y+1$ ta có $P = \frac{xy}{x^2 + y^2 + xy}$.

Nếu $y=0$ thì $\begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Khi đó $P=0$.

Nếu $y \neq 0$ thì $P = \frac{\frac{x}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1}$. Đặt $t = \frac{x}{y}$. Ta có $P = \frac{t}{t^2 + t + 1}$, $t \in \mathbb{R}$.

Xét $f(t) = \frac{t}{t^2 + t + 1}$, $t \in \mathbb{R}$. $f'(t) = \frac{-t^2 + 1}{(t^2 + t + 1)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$

t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$-\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên:

$$M = \frac{1}{3} \text{ tại } \begin{cases} \frac{x}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$m = -1 \text{ tại } \begin{cases} \frac{x}{y} = -1 \\ x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } M + m = -\frac{2}{3}.$$

Cách 2: Với điều kiện $x + y \neq -1$; $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$ ta có $P = \frac{xy}{x^2 + y^2 + xy}$.

$$\Rightarrow Px^2 + xy(P-1) + Py^2 = 0 \quad (*)$$

+) Nếu $P = 0$ thì $x = 0$ hoặc $y = 0$.

$$\text{+) Nếu } P \neq 0 \text{ thì } \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}.$$

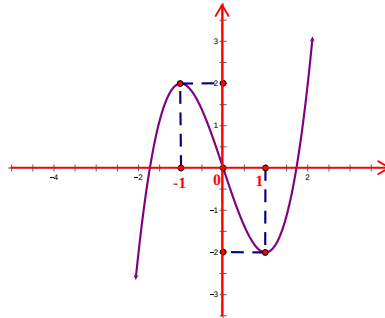
Để phương trình (*) có nghiệm x thì $\Delta_x = -y^2(P+1)(3P-1) \geq 0 \Rightarrow -1 \leq P \leq \frac{1}{3}$.

$$\text{Ta có: } M = \frac{1}{3} \text{ tại } \begin{cases} x = \frac{-y(P-1)}{2P} = y \\ x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$m = -1 \text{ tại } \begin{cases} x = \frac{-y(P-1)}{2P} = -y \\ x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Do đó $M = \frac{1}{3}; m = -1$. Vậy $M + m = -\frac{2}{3}$.

Câu 67: (SỞ GD&ĐT ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019) Cho x, y thỏa mãn $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 16$ và hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = f\left(\frac{x^2 + y^2 - 2}{x^2 - y^2 - 2xy + 4}\right)$. Tính $M^2 + m^2$



A. $M^2 + m^2 = 4$.

B. $M^2 + m^2 = 1$.

C. $M^2 + m^2 = 25$.

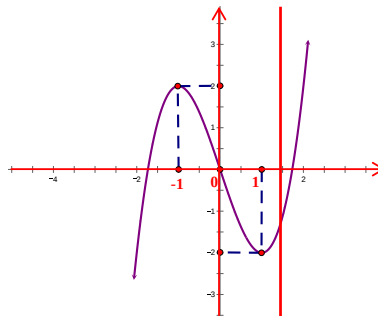
D. $M^2 + m^2 = 2$.

Lời giải

Đặt $t = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x^2 - y^2 - 2xy + 4} \Rightarrow P = f(t)$. Vì $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 16$

nên $t = \frac{x^2 + y^2 - \frac{1}{8}(5x^2 + 6xy + 5y^2)}{x^2 - y^2 - 2xy + \frac{1}{4}(5x^2 + 6xy + 5y^2)} = \frac{3(x^2 + y^2) - 6xy}{18x^2 + 2y^2 - 4xy} = \frac{3(x - y)^2}{2(x - y)^2 + 16x^2}$.

Do đó $0 \leq t \leq \frac{3}{2} \Rightarrow P = f(t)$ với $t \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$.



Dựa vào đồ thị, ta có $M = \max_{t \in [0; \frac{3}{2}]} P = f(0) = 0$; $m = \min_{t \in [0; \frac{3}{2}]} P = f(1) = -2$. Suy ra $M^2 + m^2 = 4$.

Câu 68: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA LẦN 2 NĂM 2018-2019) Cho các số thực x, y thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $3x^2 - 2xy - y^2 = 5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + xy + 2y^2$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(4; 7)$.

B. $(-2; 1)$.

C. $(1; 4)$.

D. $(7; 10)$.

Lời giải

Xét $y=0 \Rightarrow P=\frac{5}{3}$ loại phương án A và D.

Xét $y \neq 0 \Rightarrow P=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{7y^2}{4}>0$ khi đó ta có biểu thức $\frac{5}{P}=\frac{3x^2-2xy-y^2}{x^2+xy+2y^2}$

Chia cả tử và mẫu của vế phải cho y^2 ta được $\frac{5}{P}=\frac{3\left(\frac{x}{y}\right)^2-2\frac{x}{y}-1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+2}$.

Đặt $\frac{x}{y}=t (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow \frac{5}{P}=\frac{3t^2-2t-1}{t^2+t+2}=f(t) \Rightarrow f'(t)=\frac{5t^2+14t-3}{(t^2+t+2)^2}, f'(t)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-3 \\ t=\frac{1}{5} \end{cases}$

Bảng biến thiên hàm số $f(t)$.

t	$-\infty$	-3	$\frac{1}{5}$	$+\infty$			
$f'(t)$		+	0	-	0	+	
$f(t)$			4		$-\frac{4}{7}$		3

Từ bảng biến thiên ta có $f(t) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{5}{P} \leq 4 \Leftrightarrow P \geq \frac{5}{4}$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{5}{4}$, dấu bằng xảy ra khi $t=-3 \Leftrightarrow x=-3y$.

- Câu 69:** (THPT CHUYÊN BẮC GIANG NAM 2018-2019 LẦN 01) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}$. Tính giá trị $M+m$
- A. 42. B. 41. C. 43. D. 44.

Lời giải

$$(x+y)^2=(\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2})^2 \leq 3(x+y) \Leftrightarrow 0 \leq x+y \leq 3$$

$$P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}=(x+y)^2+2(x+y)+2+8\sqrt{4-(x+y)}$$

Đặt $t=\sqrt{4-(x+y)}, t \in [1;2]$. Ta có: $f(t)=(4-t^2)^2+2(4-t^2)+2+8t=t^4-10t^2+8t+26$.

$$f'(t)=4t^3-20t+8; f'(t)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t^2+2t-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \in [1;2] \\ t=-1+\sqrt{2} \notin [1;2]; f(1)=25; f(2)=18. \\ t=-1-\sqrt{2} \notin [1;2] \end{cases}$$

Suy ra $m=\min_{[1;2]} f(t)=f(2)=18; M=\max_{[1;2]} f(t)=f(1)=25$. Vậy $M+m=43$.

DẠNG TOÁN 3: BÀI TOÁN THỰC TẾ - TỐI ƯU

Câu 70: (ĐỀ THỬ NGHIỆM BGD&ĐT NĂM 2016-2017) Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 216 (m/s). B. 30 (m/s). C. 400 (m/s). **D. 54 (m/s).**

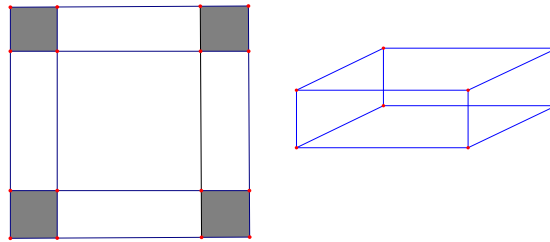
Lời giải

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t$ với $t \in [0; 10]$.

Ta có: $v'(t) = -3t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Suy ra: $v(0) = 0; v(10) = 30; v(6) = 54$. Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 54 (m/s)

Câu 71: (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



- A. $x = 6$. B. $x = 3$. **C. $x = 2$.** D. $x = 4$.

Lời giải

Ta có: $h = x$ (cm), $x > 0$ là đường cao hình hộp.

Vì tấm nhôm được gập lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $12 - 2x$ (cm)

Vậy diện tích đáy hình hộp $S = (12 - 2x)^2$ (cm²). Ta có: $\begin{cases} x > 0 \\ 12 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 6)$

Thể tích của hình hộp là: $V = S \cdot h = x \cdot (12 - 2x)^2$. Xét hàm số: $y = x \cdot (12 - 2x)^2 \forall x \in (0; 6)$

Ta có: $y' = (12 - 2x)^2 - 4x(12 - 2x) = (12 - 2x)(12 - 6x)$;

$y' = 0 \Leftrightarrow (12 - 2x) \cdot (12 - 6x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 6$ (loại).

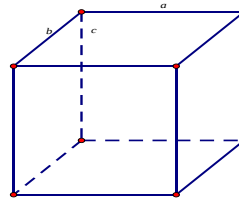
x	0	2	6
y'		+	-
y			

Suy ra với $x = 2$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất đó là $y(2) = 128$

Câu 72: (MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Ông A dự định dùng hết $6,5m^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. $2,26 m^3$. B. $1,61 m^3$. C. $1,33 m^3$. **D. $1,50 m^3$.**

Lời giải



Giả sử hình hộp chữ nhật có kích thước như hình vẽ. Ta có dung tích của bể cá: $V = abc$

Mặt khác theo giả thiết ta có:
$$\begin{cases} ab + 2bc + 2ac = 6,5 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + 6bc = 6,5 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{6,5 - 2b^2}{6b} \\ a = 2b \end{cases}$$

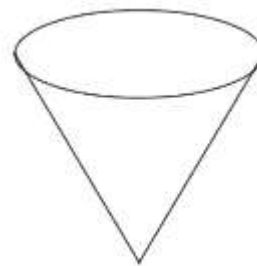
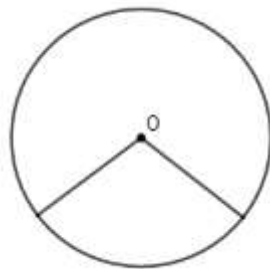
Khi đó $V = 2b^2 \cdot \frac{6,5 - 2b^2}{6b} \Leftrightarrow V = \frac{6,5b - 2b^3}{3}$. Xét hàm số: $f(b) = \frac{6,5b - 2b^3}{3}$.

BBT:

b	0	$\frac{\sqrt{39}}{6}$	$+\infty$
$f'(b)$	+	0	-
$f(b)$	0	$f\left(\frac{\sqrt{39}}{6}\right)$	$-\infty$

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất là: $f\left(\frac{\sqrt{39}}{6}\right) = 1,50 m^3$.

Câu 73: (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02) Bác Bính có một tấm thép mỏng hình tròn, tâm O, bán kính 4dm. Bác định cắt ra một hình quạt tròn tâm O, quăn rồi hàn ghép hai mép của hình quạt tròn lại để tạo thành một đồ vật dạng mặt nón tròn xoay (tham khảo hình vẽ). Dung tích lớn nhất có thể của đồ vật mà bác Bính tạo ra bằng bao nhiêu? (bỏ qua phần mối hàn và độ dày của tấm thép).



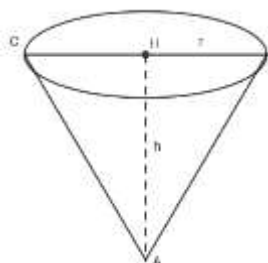
A. $\frac{128\pi\sqrt{3}}{27} dm^3$.

B. $\frac{128\pi\sqrt{3}}{81} dm^3$.

C. $\frac{16\pi\sqrt{3}}{27} dm^3$.

D. $\frac{64\pi\sqrt{3}}{27} dm^3$.

Lời giải



Khi hàn hai mép của hình quạt tròn, độ dài đường sinh của hình nón bằng bán kính của hình quạt tròn, tức là $AB=4$.

Thể tích của hình nón: $V = \frac{1}{3}\pi.r^2.h = \frac{1}{3}\pi.(16-h^2).h$ với $(0 < h < 4)$.

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(16-3h^2) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

h	0	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	4
$V'(h)$	+	0	-
$V(h)$	0	$\frac{128\pi\sqrt{3}}{27}$	0

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra thể tích lớn nhất của hình nón là $\frac{128\pi\sqrt{3}}{27}\text{dm}^3$.

- Câu 74: (SỞ GD&ĐT BÀ RỊA VŨNG TÀU NĂM 2018-2019)** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 9t^2 + 21t + 9$ trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tính thời điểm $t(s)$ mà tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.
- A. $t = 4(s)$. B. $t = 5(s)$. C. $t = 3(s)$. D. $t = 7(s)$.

Lời giải

Ta có: $S' = V = -3t^2 + 18t + 21 = -3(t-3)^2 + 48 \leq 48 \Rightarrow \max V = 48$ khi $t = 3$.

Vận tốc chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi $t = 3(s)$.

- Câu 75: (SỞ GD&ĐT BÀ RỊA VŨNG TÀU NĂM 2018-2019)** Một công ty bất động sản có 40 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 3.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng (theo qui định trong hợp đồng) thì sẽ có một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng?
- A. 3.700.000 đồng. B. 3.500.000 đồng. C. 3.900.000 đồng. D. 4.000.000 đồng.

Lời giải

Theo bài cứ tăng thêm 100.000 đồng trên một căn thì có 1 căn trống.

Do đó nếu tăng x đồng trên một căn thì có $\frac{x}{100.000}$ căn trống.

Số tiền thu nhập một tháng khi cho thuê căn hộ là

$$(3000.000 + x)(40 - \frac{x}{100.000}) = \frac{-x^2}{100.000} + 10x + 120.000.000 = f(x)$$

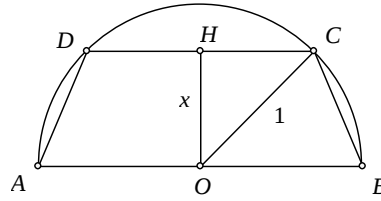
Do $f(x)$ là một hàm bậc hai với hệ số số $a < 0$ nên $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 500.000$ đ.

Vậy khi đó giá thuê mỗi căn là 3.500.000 đồng.

- Câu 76: (SỞ GD QUẢNG NAM 2019)** Cho nửa đường tròn đường kính AB và hai điểm C, D thay đổi trên nửa đường tròn đó sao cho $ABCD$ là hình thang. Diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ C. 1 D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Lời giải



Gọi H là trung điểm của CD . Đặt $OH = x$ ($0 < x < 1$). Ta có $CD = 2CH = 2\sqrt{1-x^2}$.

Diện tích hình thang $ABCD$ là: $S = \frac{(AB+CD).OH}{2} = x^2 + x\sqrt{1-x^2}$.

Xét hàm số $f(x) = x + x\sqrt{1-x^2}$, với $x \in (0;1)$.

Ta có $f'(x) = 1 + \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 2x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$f'(x)$	+	0	-
$S = f(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	1

Vậy diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ là $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 77: (SỞ GD&ĐT CÀ MAU NĂM 2018-2019) Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V = 18(m^3)$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Hỏi cần xây bể có chiều cao h bằng bao nhiêu mét để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất (biết nguyên vật liệu xây dựng các mặt là như nhau)?

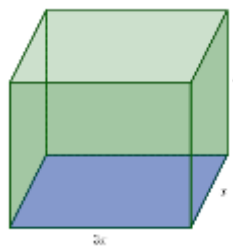
A. $2(m)$.

B. $\frac{5}{2}(m)$.

C. $1(m)$.

D. $\frac{3}{2}(m)$.

Lời giải



Gọi x ($x > 0$) là chiều rộng hình chữ nhật đáy bể, suy ra chiều dài hình chữ nhật đáy bể là $3x$.

$$V = h.x.3x = h.3x^2 = 18 \quad (x > 0) \Rightarrow h = \frac{18}{3x^2} = \frac{6}{x^2},$$

Gọi P là diện tích xung quanh cộng với diện tích một đáy bể của hình hộp chữ nhật. Nguyên vật liệu ít nhất khi P nhỏ nhất.

$$P = 2hx + 2.h.3x + 3x^2 = 2.\frac{6}{x^2}.x + 2.\frac{6}{x^2}.3x + 3x^2 = \frac{48}{x} + 3x^2.$$

Đặt $f(x) = \frac{48}{x} + 3x^2$, ($x > 0$). Ta có $f'(x) = \frac{-48}{x^2} + 6x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-48}{x^2} + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		36	

Suy ra vật liệu ít nhất khi $h = \frac{6}{x^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}(m)$.

Câu 78: (CỤM 1 SỞ GD&ĐT BẠC LIÊU NĂM 2018-2019 LẦN 01) Người ta muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích $200m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là 300.000 đồng/ m^2 . Chi phí thuê công nhân **thấp nhất** là

A. 51 triệu đồng. B. 75 triệu đồng. C. 46 triệu đồng. D. 36 triệu đồng.

Lời giải

Gọi chiều rộng, chiều dài của đáy lần lượt là x và $2x$, chiều cao là y

Diện tích các mặt bên và mặt đáy là $S = 6xy + 2x^2$

Thể tích là $V = 2x^2y = 200 \Rightarrow xy = \frac{100}{x}$; $S = \frac{600}{x} + 2x^2 = \frac{300}{x} + \frac{300}{x} + 2x^2 \geq 3\sqrt{\frac{300}{x} \cdot \frac{300}{x} \cdot 2x^2} = 30\sqrt{180}$

Vậy chi phí thấp nhất là $T = 30\sqrt{180} \cdot 300000d = 51$ triệu

DẠNG TOÁN 4: PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Câu 79: (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y						
		</				

Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f(\sqrt{x+1}+1) \leq m$ có nghiệm?

A. $m \geq -4$. B. $m \geq 1$. C. $m \geq 2$. D. $m > -5$.

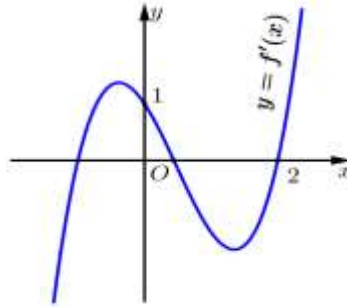
Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x+1}+1 \Rightarrow t \geq 1$. Khi đó BPT $f(\sqrt{x+1}+1) \leq m$ trở thành $f(t) \leq m(1)$

Khi đó BPT $f(\sqrt{x+1}+1) \leq m$ có nghiệm khi và chỉ khi BPT $f(t) \leq m(1)$ có nghiệm

$t \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \min_{t \geq 1} f(t) \Leftrightarrow m \geq -4$.

Câu 80: (MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq f(2) - 2$. B. $m \geq f(0)$. C. $m > f(2) - 2$. D. $m > f(0)$.

Lời giải

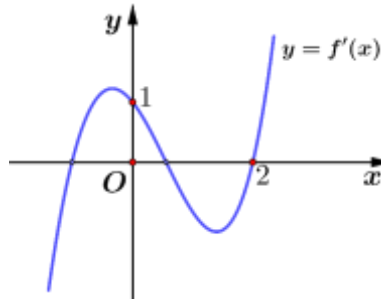
Ta có $f(x) < x + m, \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow m > f(x) - x, \forall x \in (0; 2)$ (*).

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có với $x \in (0; 2)$ thì $f'(x) < 1$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ trên khoảng $(0; 2)$; $g'(x) = f'(x) - 1 < 0, \forall x \in (0; 2)$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$. Do đó (*) $\Leftrightarrow m \geq g(0) = f(0)$.

Câu 81: (MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Bất phương trình $f(x) > x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A. $m \leq f(2) - 2$. B. $m < f(2) - 2$. C. $m \leq f(0)$. D. $m < f(0)$.

Lời giải

Bất phương trình $f(x) > x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$

$\Leftrightarrow m < f(x) - x$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ (1)

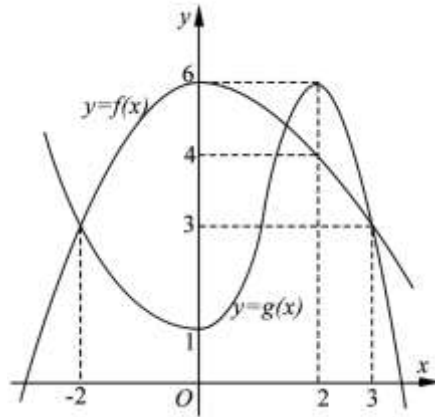
Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ trên khoảng $(0; 2)$, có $g'(x) = f'(x) - 1 < 0, \forall x \in (0; 2)$

Bảng biến thiên:

x	0	2
$g'(x)$		-
$g(x)$	$g(0)$	$g(2)$

Vậy (1) $\Leftrightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq f(2) - 2$.

Câu 82: (THPT NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 04) Cho hàm số $y = f(x)$ và hàm số $y = g(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\frac{f(x)}{g(x)} = m$ có nghiệm thuộc $[-2; 3]$?

A. 4.

B. 5.

C. 7.

D. 6.

Lời giải

Xét hàm số $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Dựa vào đồ thị, ta thấy các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[-2; 3]$, do đó $h(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[-2; 3]$.

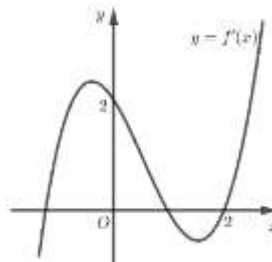
Ngoài ra với $x \in [-2; 3]$, dễ thấy $f(x) \leq 6$, $g(x) \geq 1$ nên $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \leq 6$, mà $h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{6}{1} = 6$ nên $\max_{[-2; 3]} h(x) = 6$ (1).

Lại có $h(x) > 0$ với mọi $x \in [-2; 3]$ và $h(-2) = 1$ nên $0 < \min_{[-2; 3]} h(x) \leq 1$ (2).

Phương trình $\frac{f(x)}{g(x)} = m$ có nghiệm trên $[-2; 3]$ khi và chỉ khi $\min_{[-2; 3]} h(x) \leq m \leq \max_{[-2; 3]} h(x)$ (3).

Từ (1), (2) và (3), kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$, ta có $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Chọn D.

Câu 83: (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Bất phương trình $f(x) < 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

A. $m > f(0)$.

B. $m > f(2) - 4$.

C. $m \geq f(0)$.

D. $m \geq f(2) - 4$.

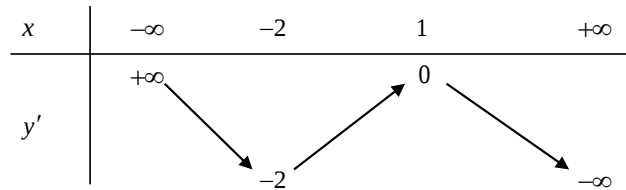
Lời giải

Ta có $f(x) < 2x + m \Leftrightarrow m > f(x) - 2x$ (*). Xét hàm số $g(x) = f(x) - 2x$ trên $(0; 2)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2 < 0 \quad \forall x \in (0; 2)$ nên hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.

Do đó $m > f(x) - 2x$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi $m \geq g(0) = f(0)$.

Câu 84: (SỞ GD&ĐT ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Bất phương trình $f(x) < x^3 + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

A. $m > f(x) + 1$.

B. $m \geq f(-1) - 1$.

C. $m \geq f(-1) + 1$.

D. $m > f(1) - 1$.

Lời giải

$f(x) < x^3 + m \Leftrightarrow m > f(x) - x^3$ (1). Xét $g(x) = f(x) - x^3$.

$$g'(x) = f'(x) - 3x^2 < 0, \forall x \in (-1; 1) \text{ vì } \begin{cases} f'(x) < f'(1) = 0, \forall x \in (-1; 1) \\ -3x^2 \leq 0, \forall x \in (-1; 1) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 1) \Rightarrow g(1) < g(x) < g(-1), \forall x \in (-1; 1)$.

(1) đúng với mọi $x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m \geq g(-1) = f(-1) + 1$.

Câu 85: (SỞ GD&ĐT NAM ĐỊNH 2018-2019) Số các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để phương trình $x^2 + (m+2)x + 4 = (m-1)\sqrt{x^3 + 4x}$ có nghiệm là

A. 2011.

B. 2012.

C. 2013.

D. 2014.

Lời giải

Điều kiện: $x^3 + 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

*) Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

*) Với $x > 0$ chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt{x^3 + 4x}$ ta được:

$$\sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}} + (m+2)\sqrt{\frac{x}{x^2 + 4}} = m-1. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}} = \sqrt{x + \frac{4}{x}} \geq \sqrt{2 \cdot x \cdot \frac{4}{x}} = 2. \text{ Vậy } t \geq 2 \text{ với } \forall x > 0.$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } t^2 - (m-1)t + m+2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + t + 2}{t-1} \Leftrightarrow m = t + 2 + \frac{4}{t-1} \quad (t \geq 2) \quad (2).$$

Xét hàm số $f(t) = t + 2 + \frac{4}{t-1}$ trên $[2; +\infty)$.

$$f'(t) = 1 - \frac{4}{(t-1)^2} = \frac{t^2 - 2t - 3}{(t-1)^2}; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \in [2; +\infty) \\ t = -1 \notin [2; +\infty) \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$:

t	2	3	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	8	7	$+\infty$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [2; +\infty)$.

Từ bảng biến thiên ta thấy $m \geq 7$. Kết hợp $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-2019; 2019]$ suy ra có 2013 giá trị m .

Câu 86: (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị tham số m để bất phương trình $6x + \sqrt{(2+x)(8-x)} \leq x^2 + m - 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 8]$.

A. $m \geq 16$.

B. $m \geq 15$.

C. $m \geq 8$.

D. $-2 \leq m \leq 16$.

Lời giải

Xét bất phương trình: $6x + \sqrt{(2+x)(8-x)} \leq x^2 + m - 1$ (1), điều kiện $x \in [-2; 8]$.

Đặt $t = \sqrt{(2+x)(8-x)}$, $x \in [-2; 8]$. Ta có: $t' = \frac{3-x}{\sqrt{(2+x)(8-x)}}$, $t' = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Bảng biến thiên:

x	-2	3	8	
t'		+	0	-
t	0	5	0	

Suy ra $t \in [0; 5]$. Khi đó (1) trở thành: $t^2 + t - 15 \leq m$ (2). Xét hàm số $f(t) = t^2 + t - 15$,

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 8]$ khi và chỉ khi (2) nghiệm đúng với mọi

$t \in [0; 5] \Leftrightarrow \max_{[0; 5]} f(t) \leq m \Leftrightarrow m \geq 15$.

Câu 87: (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Số giá trị nguyên của tham số m nằm trong khoảng $(0; 2020)$ để phương trình $\|x-1\| - |2019-x| = 2020-m$ có nghiệm là

A. 2020.

B. 2021.

C. 2019.

D. 2018.

Lời giải

Ta có $f(x) = \|x-1\| - |2019-x| = \begin{cases} 2018, & x \notin [1; 2019] \\ |2x-2020|, & x \in [1; 2019] \end{cases}$.

Vì hàm số $h(x) = 2x - 2020$ là hàm số đồng biến trên đoạn $[1; 2019]$ nên ta có

$$\max_{[1; 2019]} h(x) = \max \{h(1), h(2019)\} = 2018, \min_{[1; 2019]} h(x) = \min \{h(1), h(2019)\} = -2018$$

Suy ra: $\min_{[1; 2019]} f(x) = 0$ và $\max_{[1; 2019]} f(x) = 2018$. Do đó, ta có: $\min_{\mathbb{R}} f(x) = 0$ và $\max_{\mathbb{R}} f(x) = 2018$.

Vì vậy, phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi: $0 \leq 2020 - m \leq 2018 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 2020$.

Suy ra có 2018 giá trị nguyên của m nằm trong khoảng $(0; 2020)$.

Câu 88: (SỞ GD&ĐT ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019) Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $(x+1)^4 + x^2 - 4x - 5 \geq m^4 + m^2 - 6m$ thỏa mãn với mọi giá trị của $x \in \mathbb{R}$. Tính tổng các giá trị của S .

A. 1.

B. -3.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Đặt $f(x) = (x+1)^4 + x^2 - 4x - 5$.

$$\Rightarrow f'(x) = 4(x+1)^3 + 2x - 4 = 4x^3 + 12x^2 + 14x = x[(2x+3)^2 + 3], f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	-4	$+\infty$

Xét $f(m) = m^4 + m^2 - 6m \Rightarrow f'(m) = 4m^3 + 2m - 6 = 2(m-1)(2m^2 - 2m + 3) \Rightarrow f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

m	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(m)$		- 0 +	
$f(m)$	$+\infty$	-4	$+\infty$

Ycbt $\Leftrightarrow \min_{\mathbb{R}} f(x) \geq m^4 + m^2 - 6m \Leftrightarrow m^4 + m^2 - 6m \leq -4 \Leftrightarrow m = 1$. Vậy tổng các giá trị của S là 1.

Câu 89: (SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH NĂM 2018-2019) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình sau $x^6 + 3x^4 - m^3x^3 + 4x^2 - mx + 2 \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng:

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Ta có: $x^6 + 3x^4 - m^3x^3 + 4x^2 - mx + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^6 + 3x^4 + 4x^2 + 2 \geq m^3x^3 + mx$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^3 + (x^2 + 1) \geq (mx)^3 + mx \quad (1)$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$

$$(1) \Leftrightarrow f(x^2 + 1) \geq f(mx) \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq mx$$

Bài toán trở thành tìm m để bất phương trình $x^2 + 1 \geq mx$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$

$$x^2 + 1 \geq mx \Leftrightarrow m \leq \frac{x^2 + 1}{x} = g(x), \forall x \in [1; 3]; g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \geq 0 \forall x \in [1; 3] \Rightarrow \min_{x \in [1; 3]} g(x) = g(1) = 2$$

Vậy để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$ thì $m \leq 2$

Vì m nguyên dương nên $S = \{1; 2\}$ có 2 phần tử. Tổng các phần tử bằng 3.

Câu 90: (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Giá trị lớn nhất của hàm

số $y = \frac{x^3 + x^2 - m}{x + 1}$ trên $[0; 2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là

A. -5.

B. 1.

C. -3.

D. -8.

Lời giải

Đặt $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - m}{x+1}$.

Giá trị lớn nhất của $y = f(x)$ trên $[0; 2]$ bằng 5 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 5, \forall x \in [0; 2] \\ \exists x_0 \in [0; 2] \mid f(x_0) = 5 \end{cases}$.

* $f(x) \leq 5, \forall x \in [0; 2] \Leftrightarrow \frac{x^3 + x^2 - m}{x+1} \leq 5, \forall x \in [0; 2]$

$\Leftrightarrow m \geq x^3 + x^2 - 5x - 5, \forall x \in [0; 2] \Leftrightarrow m \geq \max_{[0; 2]} h(x),$ với $h(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$.

+ Ta có: $h'(x) = 3x^2 + 2x - 5, h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases} (L)$.

Ta có: $h(0) = -5, h(2) = -3, h(1) = -8$. Suy ra $\max_{[0; 2]} h(x) = -3, \min_{[0; 2]} h(x) = -8$.

Vậy $m \geq -3. (1)$

* $\exists x_0 \in [0; 2] \mid f(x_0) = 5 \Leftrightarrow \frac{x^3 + x^2 - m}{x+1} = 5$ có nghiệm trên $[0; 2]$.

$\Leftrightarrow m = x^3 + x^2 - 5x - 5$ có nghiệm trên $[0; 2]$.

Theo phần trên, ta suy ra $-8 \leq m \leq -3. (2)$. Từ (1) và (2) suy ra $m = -3$.

Cách dùng casio: Kiểm tra từng giá trị của m từ các đáp án A, B, C, D như sau

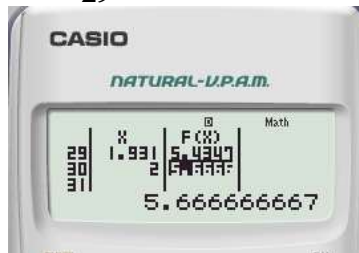
Trường hợp 1: $m = -5$ thì $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5}{x+1}$.

Trước khi làm thì tắt hàm $g(x)$ bằng lệnh "SHIFT + MODE + $\downarrow$ + 5 + 1".

Bước 1: Vào môi trường TABLE bằng lệnh "Mode + 7".

Bước 2: Nhập hàm $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5}{x+1}$.

Bước 3: Nhập $Start = 0; End = 2; Step = \frac{2-0}{29}$.



Quan sát bên cột $f(x)$ có giá trị $f(x) \approx 5,67$ nên loại $m = -5$. Ba trường hợp còn lại làm tương tự như trên chỉ có $m = -3$ thỏa mãn giá trị lớn nhất của $f(x)$ là 5.

Câu 91: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Gọi s là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 2019]$ để bất phương trình $x^2 - m + \sqrt{(1-x^2)^3} \leq 0$ đúng với mọi $x \in [-1; 1]$. Số phần tử của tập s bằng

A. 1.

B. 2020.

C. 2019.

D. 2.

Lời giải

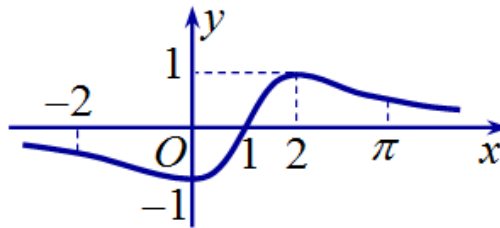
Đặt $t = \sqrt{1-x^2}$, với $x \in [-1;1] \Rightarrow t \in [0;1]$. Bất phương trình $x^2 - m + \sqrt{(1-x^2)^3} \leq 0$ (1) trở thành $t^3 - t^2 + 1 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq t^3 - t^2 + 1$ (2)

Bất phương trình (1) đúng với mọi $x \in [-1;1]$ khi và chỉ khi bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t \in [0;1]$. Hay $m \geq \max_{[0;1]}(t^3 - t^2 + 1) \Leftrightarrow m \geq 1$.

Mặt khác, m là số nguyên thuộc $[0;2019]$ nên $m \in \{1;2;3;\dots;2019\}$

Vậy có 2019 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 92: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH LẦN 03 NĂM 2018 - 2019) Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Bất phương trình $f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;3]$ khi và chỉ khi

A. $m < f(0)$.

B. $m < f(1) - 1$.

C. $m < f(-1) + 1$.

D. $m < f(2)$.

Lời giải

Cách 1: Xét $g(x) = f(x) - \sin \frac{\pi x}{2} \Rightarrow g'(x) = f'(x) - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$

• Với $x \in [-1;1] \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos \frac{\pi x}{2} > 0$ (1)

Đồng thời dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta thấy $f'(x) < 0, \forall x \in [-1;1]$ (2)

Từ (1), (2) ta suy ra $g'(x) < 0, \forall x \in [-1;1]$.

• Với $x \in (1;3] \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos \frac{\pi x}{2} < 0$ (3)

Đồng thời dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x) > 0, \forall x \in (1;3]$ (4)

Từ (3), (4) ta suy ra $g'(x) > 0, \forall x \in (1;3]$.

Tại $x=1$: $\begin{cases} f'(1)=0 \\ \cos \frac{\pi}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow g'(1)=0$. Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	-1	1	3
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

$\nearrow$
 $g(1)$

Để bất phương trình $\underbrace{f(x) - \sin \frac{\pi x}{2}}_{g(x)} > m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$

$$\Rightarrow m < \min_{[-1; 3]} g(x) \Rightarrow m < g(1) = f(1) - 1.$$

Cách 2: Xét bất phương trình $f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m$ (1) với $x \in [-1; 3]$, ta có:

$$f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m \Leftrightarrow f(x) - \sin \frac{\pi x}{2} > m \quad (2). \text{ Xét } f(x) - \sin \frac{\pi x}{2} \text{ với } x \in [-1; 3]$$

+ Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ đã cho ta suy ra BBT của $f(x)$ như sau:

x		-1	1	3	
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$f(-1)$	$f(1)$	$f(3)$	

Từ BBT ta suy ra: $f(x) \geq f(1), \forall x \in [-1; 3]$ (*)

$$+ \text{ Do } x \in [-1; 3] \text{ nên: } -1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi x}{2} \leq \frac{3\pi}{2}. \text{ Suy ra: } -1 \leq \sin \frac{\pi x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sin \frac{\pi x}{2} \leq 1 \quad (**)$$

$$+ \text{ Từ (*) và (**) cho ta: } f(x) - \sin \frac{\pi x}{2} \geq f(1) - 1, \forall x \in [-1; 3]. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } x = 1$$

$$\text{Do đó: Bất phương trình } f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in [-1; 3] \Leftrightarrow m < f(1) - 1.$$

Câu 93: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ LẦN 3 2018-2019) Cho phương trình $m(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1) - x^2 + 2x = 0$ (m là tham số). Biết rằng tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1 + 2\sqrt{2}]$ là đoạn $[a; b]$. Tính giá trị của biểu thức $T = 2b - a$.

A. $T = 4$.

B. $T = \frac{7}{2}$.

C. $T = 3$.

D. $T = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$. Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ trên đoạn $[0; 1 + 2\sqrt{2}]$.

$$g'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1; g(0) = \sqrt{2}, g(1) = 1, g(1 + 2\sqrt{2}) = 3 \Rightarrow t \in [1; 3].$$

$$\text{Khi đó phương trình trở thành } m(t+1) = t^2 - 2 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 2}{t+1}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 2}{t+1}$ trên đoạn $[1; 3]$.

$$f'(t) = \frac{2t(t+1) - t^2 + 2}{(t+1)^2} = \frac{t^2 + 2t + 2}{(t+1)^2} > 0 \quad \forall t \in [1; 3]; f(1) = -\frac{1}{2}; f(3) = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Để phương trình có nghiệm thì } \min_{x \in [1; 3]} f(t) \leq m \leq \max_{x \in [1; 3]} f(t) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{7}{4}. \text{ Vậy } a = -\frac{1}{2}; b = \frac{7}{4} \Rightarrow T = 4.$$

Câu 94: (THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 04) Tổng các giá trị nguyên dương của m để tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{\frac{m}{72}x^2 + 1} < \sqrt{x}$ có chứa đúng hai số nguyên là

- A. 27. B. 29. C. 28. D. 30.

Lời giải

ĐK: $x \geq 0$. Do m dương nên $\frac{m}{72}x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\sqrt{\frac{m}{72}x^2 + 1} < \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{m}{72}x^2 + 1 < x \Leftrightarrow mx^2 < 72(x-1)$ (1)

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của (1) nên (1) $\Leftrightarrow m < \frac{72(x-1)}{x^2}$

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{72(x-1)}{x^2}$ với $x > 0$; $y' = f'(x) = \frac{72(-x+2)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên của $f(x)$ với $x > 0$:

x	0	1	2	3	4	$+\infty$
y'		+	0	-		
y	$-\infty$	0	18	16	$\frac{27}{2}$	0

Từ bảng biến thiên ta có $f(2) > f(3) > f(4) = \frac{27}{2} > f(x), \forall x \in \mathbb{N} \setminus \{2, 3, 4\}$, nên để tập nghiệm của bất phương trình $m < \frac{72(x-1)}{x^2}$ có chứa đúng hai số nguyên thì $f(4) = \frac{27}{2} < m < f(3) = 16$. (tập nghiệm chứa $x=2, x=3$)

Với $m \in \mathbb{N}^*$ thì $m \in \{14, 15\}$. Do vậy, tổng các giá trị nguyên dương của m là $14 + 15 = 29$.

DẠNG TOÁN 5: BÀI TOÁN THAM SỐ

Câu 95: (THPT NGÔ GIA TỰ VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - m$.

Trên $[-1; 1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1 . Tính m .

- A. $m = -6$. B. $m = -3$. C. $m = -4$. D. $m = -5$.

Lời giải

Xét $[-1; 1]$ có $y' = 6x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = 1 \in [-1; 1] \end{cases}$.

Khi đó: $y(-1) = -5 - m$; $y(0) = -m$; $y(1) = -1 - m$

Ta thấy $-5 - m < -1 - m < -m$ nên $\min_{[-1; 1]} y = -5 - m$.

Theo bài ra ta có $\min_{[-1; 1]} y = -1$ nên $-5 - m = -1 \Leftrightarrow m = -4$.

Câu 96: (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Nếu hàm số $y = x + m + \sqrt{1 - x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ thì giá trị của m là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $-\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x + m + \sqrt{1-x^2}$. Tập xác định: $D = [-1; 1]$. Ta có: $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = x \\ 1-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ \sqrt{1-x^2} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ta có: $y(-1) = -1 + m$, $y(1) = 1 + m$, $y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + m$.

Do hàm số $y = x + m + \sqrt{1-x^2}$ liên tục trên $[-1; 1]$ nên $\max_{[-1; 1]} y = m + \sqrt{2}$.

Theo bài ra thì $\max_{[-1; 1]} y = 2\sqrt{2}$, suy ra $m + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$.

Câu 97: (CỤM LIÊN TRƯỜNG HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x^2 + m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0; 1]$. Khi đó mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$.

B. $2m_0 - 1 < 0$.

C. $6m_0 - m_0^2 < 0$.

D. $2m_0 + 1 < 0$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 2(m^2 + 1)x > 0, \forall x \in [0; 1]$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $[0; 1]$.

Suy ra $\min_{[0; 1]} y = y(0) = m + 1 = 5 \Rightarrow m_0 = 4 \Rightarrow 2018m_0 - m_0^2 \geq 0$

Câu 98: (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1 .

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Điều kiện: $x \neq m$.

Hàm số đã cho xác định trên $[0; 4]$ khi $m \notin [0; 4]$ (*).

$$\text{Ta có } y' = \frac{m^2 - m + 2}{(x-m)^2} = \frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}{(x-m)^2} > 0 \text{ với } \forall x \in [0; 4].$$

Hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 4]$ nên $\max_{[0; 4]} y = y(4) = \frac{2-m^2}{4-m}$.

$$\max_{[0; 4]} y = -1 \Leftrightarrow \frac{2-m^2}{4-m} = -1 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $m = -3$. Do đó có một giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 99: Cho hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3 . Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

- A. $(20;25)$. B. $(5;6)$. C. $(6;9)$. **D. $(2;5)$.**

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$ trên đoạn $[0;3]$.

Ta có: $y' = \frac{8+m^2}{(x+8)^2} > 0, \forall x \in [0;3] \Rightarrow$ hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$ đồng biến trên đoạn $[0;3]$

$$\Rightarrow \min_{[0;3]} f(x) = f(0) = \frac{-m^2}{8}.$$

Theo giả thiết, ta có: $\min_{[0;3]} f(x) = -3 \Leftrightarrow \frac{-m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow m^2 = 24 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{6} \\ m = -2\sqrt{6} \end{cases}$.

Mà $m > 0, m \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 2\sqrt{6} \approx 4,9 \in (2;5)$.

Câu 100: (MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2016-2017) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Khẳng định nào sau dưới đây đúng?

- A. $m < -1$. B. $3 < m \leq 4$. **C. $m > 4$.** D. $1 \leq m < 3$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$.

+) Nếu $-1-m = 0 \Leftrightarrow m = -1 \Rightarrow y = 1, \forall x \neq 1 \Rightarrow \min_{[2;4]} f(x) = 1 \neq 3$ (loại).

+) Nếu $-1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1$ thì $\min_{[2;4]} y = y(2) \Leftrightarrow 2+m = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (loại).

+) Nếu $-1-m < 0 \Leftrightarrow m > -1$ thì $\min_{[2;4]} y = y(4) \Leftrightarrow \frac{4+m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5$ (nhận)

Câu 101: (MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2016-2017) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn

$\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $m \leq 0$ **B. $m > 4$** C. $0 < m \leq 2$ D. $2 < m \leq 4$

Lời giải

Ta có $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

☑ Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 1, \forall x \neq -1$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

☑ Nếu $m < 1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[1;2]$.

Khi đó: $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3} \Leftrightarrow y(1) + y(2) = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5$ (loại).

☑ Nếu $m > 1 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$.

$$\text{Khi đó: } \min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3} \Leftrightarrow y(2) + y(1) = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{2+m}{3} + \frac{1+m}{2} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5 \text{ (t/m).}$$

Câu 102: (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm

số $y = \frac{x+m}{x+1}$ trên $[1; 2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m > 10$. B. $8 < m < 10$. C. $0 < m < 4$. D. $4 < m < 8$.

Lời giải

Nếu $m = 1$ thì $y = 1$ (không thỏa mãn tổng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất bằng 8)

Nếu $m \neq 1$ thì hàm số đã cho liên tục trên $[1; 2]$ và $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

Khi đó đạo hàm của hàm số không đổi dấu trên đoạn $[1; 2]$.

$$\text{Do vậy } \min_{x \in [1;2]} y + \max_{x \in [1;2]} y = y(1) + y(2) = \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = 8 \Leftrightarrow m = \frac{41}{5}.$$

Câu 103: (THPT HUỖNH MÃN ĐẠT NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = \frac{2\sin x - m\cos x}{\sin x + \cos x}$ đạt giá

trị lớn nhất trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ bằng 1. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m \in [-1; 0)$. B. $m \in [0; 1)$. C. $m \in [1; 2)$. D. $m \in [2; 3)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = \frac{2+m}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

$$\text{TH1: } y' = \frac{2+m}{(\sin x + \cos x)^2} > 0 \Leftrightarrow m > -2 \text{ hàm số luôn đồng biến trên } \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\text{Khi đó } \max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2-m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH2: } y' = \frac{2+m}{(\sin x + \cos x)^2} < 0 \Leftrightarrow m < -2 \text{ hàm số luôn nghịch biến trên } \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\text{Khi đó } \max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} y = y(0) = -m = 1 \Leftrightarrow m = -1 \text{ (loại)}$$

$$\text{TH3: } y' = \frac{2+m}{(\sin x + \cos x)^2} = 0 \Leftrightarrow m = -2 \Rightarrow y = 2, \text{ khi đó } \max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} y = 2 \text{ (loại)}$$

Câu 104: (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Gọi A, B lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị

lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2; 3]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m

$$\text{để } A+B = \frac{13}{2}.$$

- A. $m = 1; m = -2$. B. $m = -2$. C. $m = \pm 2$. D. $m = -1; m = 2$.

Lời giải

Xét hàm số $y = \frac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$.

$$y' = \frac{-m^2-m-1}{(x-1)^2} < 0 \quad \forall x \in [2;3] \Rightarrow A = f(3) = \frac{m^2+m+3}{2}, B = f(2) = \frac{m^2+m+2}{1}.$$

$$A+B = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \frac{m^2+m+3}{2} + \frac{m^2+m+2}{1} = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-2 \end{cases}.$$

Câu 105: (CHUYÊN HƯNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03) Gọi T là tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[2;3]$ bằng $\frac{5}{6}$. Tính tổng của các phần tử trong T .

A. $\frac{17}{5}$.

B. $\frac{16}{5}$.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

Ta có: $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$. Điều kiện $x \neq -m^2$. Ta có: $y = \frac{mx+1}{x+m^2} \Rightarrow y' = \frac{m^3-1}{(x+m^2)^2}$.

- Nếu $m=1$ thì $y = \frac{x+1}{x+1}$. Khi đó $\max_{[2;3]} y = 1$, suy ra $m=1$ không thỏa mãn.

- Nếu $m^3-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $y' > 0$. Suy ra hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$ đồng biến trên đoạn $[2;3]$.

$$\text{Khi đó } \max_{[2;3]} y = y(3) = \frac{3m+1}{3+m^2} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 5m^2-18m+9=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=\frac{3}{5} \end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện $m > 1$, ta có $m=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $m^3-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì $y' < 0$. Suy ra hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$ nghịch biến trên đoạn $[2;3]$.

$$\text{Khi đó } \max_{[2;3]} y = y(2) = \frac{2m+1}{2+m^2} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 5m^2-12m+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=\frac{2}{5} \end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện $m < 1$, ta có $m = \frac{2}{5}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $T = \left\{ 3; \frac{2}{5} \right\}$. Do đó tổng các phần tử của T là $3 + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$.

Câu 106: (THPT CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

A. 1.

B. -4.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$.

Để GTNN của hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 thì $\min_{[-1; 1]} f(x) = 1$ hoặc

$\max_{[-1; 1]} f(x) = -1$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$.

Suy ra $\max_{[-1; 1]} f(x) = f(-1) = 2 + m$ và $\min_{[-1; 1]} f(x) = f(1) = -2 + m$.

Trường hợp 1: $\min_{[-1; 1]} f(x) = 1 \Leftrightarrow -2 + m = 1 \Leftrightarrow m = 3$.

Trường hợp 2: $\max_{[-1; 1]} f(x) = -1 \Leftrightarrow 2 + m = -1 \Leftrightarrow m = -3$.

Vậy tổng các giá trị của tham số m là 0.

Câu 107: (GKI THPT VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin x - m}{\sin x + 1}$. Tìm giá trị

của m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ bằng -2 .

A. $m = 5$.

B. $\begin{cases} m = 5 \\ m = 2 \end{cases}$.

C. $m = 2$.

D. $m = 3$.

Lời giải

Đặt $t = \sin x, x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$. Ta có hàm số $g(t) = \frac{t - m}{t + 1}, t \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$. Ta có $g'(t) = \frac{1 + m}{(t + 1)^2}$

+) Với $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$. Ta có $g'(t) > 0$.

Suy ra $\max_{[0; 1]} g(t) = -2 \Leftrightarrow g(1) = -2 \Leftrightarrow \frac{1 - m}{2} = -2 \Leftrightarrow m = 5$ (thỏa điều kiện)

+) Với $m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$. Ta có $g'(t) > 0$.

Suy ra $\max_{[0; 1]} g(t) = -2 \Leftrightarrow g(0) = -2 \Leftrightarrow -m = -2 \Leftrightarrow m = 2$ (không thỏa điều kiện). Vậy $m = 5$

Câu 108: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x + m^2}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng 14?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có $y' = \frac{-1 - m^2}{(x - 1)^2} < 0, \forall x \in D$.

Do đó hàm số nghịch biến trên đoạn $[2; 3]$. Suy ra $\min_{[2; 3]} y = y(3) = \frac{3 + m^2}{3 - 1} = 14 \Leftrightarrow m = \pm 5$.

Vậy có 1 giá trị nguyên dương của m .

Câu 109: (SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VINH PHÚC NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 5.

A. -1 .

B. 2 .

C. -2 .

D. 1 .

Lời giải

Ta có $y' = \frac{2x-2}{x^2-2x+m}$, $y' = 0 \Rightarrow x = 1$. Do đó yêu cầu bài toán tương đương

$$\max\{y(-1), y(2), y(1)\} = 5 \Leftrightarrow \max\{|3+m|, |m|, |m-1|\} = 5.$$

+ Trường hợp $m \geq -1$, ta có $\max\{|3+m|, |m|, |m-1|\} = 5 \Leftrightarrow |3+m| = 5 \Rightarrow m = 2$.

+ Trường hợp $m < -1$ ta có $\max\{|3+m|, |m|, |m-1|\} = 5 \Leftrightarrow |m-1| = 5 \Rightarrow m = -4$.

Vậy tổng các giá trị m bằng -2 .

Câu 110: (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 6.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$, ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	m	$-2+m$	$2+m$

TH 1: $2+m < 0 \Leftrightarrow m < -2$. Khi đó $\max_{[0;2]} |f(x)| = -(-2+m) = 2-m$

$2-m = 3 \Leftrightarrow m = -1$ (loại).

TH 2: $\begin{cases} 2+m > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0$. Khi đó: $|m-2| = 2-m > 2 > 2+m \Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| = -(-2+m) = 2-m$

$2-m = 3 \Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn).

TH 3: $\begin{cases} m > 0 \\ -2+m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2$. Khi đó: $|m-2| = 2-m < 2 < 2+m \Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| = 2+m$

$2+m = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn).

TH 4: $-2+m > 0 \Leftrightarrow m > 2$. Khi đó $\max_{[0;2]} |f(x)| = 2+m$

$2+m = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (loại).

Câu 111: (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 2]$ tại một điểm $x_0 \in (0; 2)$.

A. $0 < m < 1$.

B. $m > 1$.

C. $m > 2$.

D. $-1 < m < 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Hàm số liên tục trên $[0; 2] \Leftrightarrow \begin{cases} -m < 0 \\ -m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases}$

Ta có $y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2} = \frac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -m-1 \\ x_2 = -m+1 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	$-m$	0	x_2	2	$+\infty$	
y'	+		0	-	-		0	+
y				$+\infty$				$+\infty$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 \in (0;2)$ nên $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

So với điều kiện hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$. Ta có $0 < m < 1$.

CÓ THỂ GIẢI NHƯ SAU:

Điều kiện xác định $x \neq -m$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$ nên $-m \notin [0;2] \Rightarrow \begin{cases} -m < 0 \\ -m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases} (*)$

$y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2} = \frac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}$; $y' = 0$ có hai nghiệm là $\begin{cases} x_1 = -m+1 \\ x_2 = -m-1 \end{cases}$

$x_1 - x_2 = 2$ nên chỉ có nhiều nhất một nghiệm thuộc $(0;2)$

Ta thấy $-m+1 > -m-1, \forall m$ và do đó để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0 \in (0;2)$ thì $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1 (**)$. Từ $(*)$, $(**)$ ta có $0 < m < 1$.

Câu 112: (THPT Phú Dục - Thái Bình - 2019) Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ đạt giá trị lớn nhất bằng 50 trên $[-2;4]$. Tổng các phần tử thuộc S là

A. 4.

B. 36.

C. 140.

D. 0.

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 + m$ có $g'(x) = 3x^2 - 6x$. Xét $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ trên $[-2;4]$ là:

$\max_{x \in [-2;4]} y = \max\{y(0); y(-2); y(2); y(4)\} = \max\{|m|; |m-4|; |m-20|; |m+16|\}.$

Trường hợp 1: Giả sử $\max y = |m| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 50 \\ m = -50 \end{cases}$.

Với $m = 50$ thì $|m+16| = 66 > 50$ (loại).

Với $m = -50$ thì $|m-20| = 70 > 50$ (loại).

Trường hợp 2: Giả sử $\max y = |m-4| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 54 \\ m = -46 \end{cases}$.

Với $m = 54 \Rightarrow |m| = 54 > 50$ (loại).

Với $m = -46$ thì $|m - 20| = 66 > 50$ (loại).

Trường hợp 3: Giả sử $\max y = |m - 20| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 70 \\ m = -30 \end{cases}$

Với $m = 70$ thì $|m + 16| = 86 > 50$ (loại).

Với $m = -30$ thì $|m + 16| = 14 < 50$, $|m| = 30 < 50$; $|m - 4| = 34 < 50$ (thỏa mãn).

Trường hợp 4: Giả sử $\max y = |m + 16| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 34 \\ m = -66 \end{cases}$.

Với $m = 34$ thì $|m| = 34 < 50$, $|m - 4| = 30 < 50$, $|m - 20| = 14 < 50$ (thỏa mãn).

Với $m = -66$ thì $|m| = 66 > 50$ (loại).

Vậy $S \in \{-30; 34\}$. Do đó tổng các phần tử của S là: $-30 + 34 = 4$.

Câu 113: (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right|$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. $-\frac{8}{3}$.

B. 5.

C. $\frac{5}{3}$.

D. -1.

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2}$ trên $[-1; 1]$ có $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x - 2)^2}$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \notin [-1; 1] \end{cases}; f(-1) = \frac{3m+1}{-3}; f(0) = -m; f(1) = \frac{m+1}{-1}.$$

Bảng biến thiên:

x	-1	0	1
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$

Trường hợp 1. $f(0) \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$. Khi đó

$$3 = \max_{[-1; 1]} |f(x)| = \max \{ |f(-1)|; |f(1)| \} \Leftrightarrow 3 = \max \left\{ \frac{3m+1}{3}; m+1 \right\} \Leftrightarrow m+1 = 3 \Leftrightarrow m = 2.$$

Trường hợp 2. $f(0) > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

$$\text{Khả năng 1. } \begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1. \text{ Khi đó } 3 = \max_{[-1; 1]} |f(x)| = f(0) \Leftrightarrow m = -3.$$

$$\text{Khả năng 2. } -1 < m \leq -\frac{1}{3}. \text{ Khi đó } \begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f(1) < 0 \end{cases}. 3 = \max_{[-1; 1]} |f(x)| = \max \{ f(0); |f(1)| \}$$

$$\Leftrightarrow 3 = \max \{ -m; m+1 \}: \text{ Trường hợp này vô nghiệm.}$$

Khả năng 3. $-\frac{1}{3} < m < 0$. Khi đó $3 = \max_{[-1;1]} |f(x)| = \max\{|f(0)|; |f(1)|; |f(-1)|\}$: Vô nghiệm.

Vậy có hai giá trị thỏa mãn là $m_1 = -3, m_2 = 2$. Do đó tổng tất cả các phần tử của S là -1 .

Câu 114: (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 4x + m + 3| - 4x$ bằng -5 .

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Xét $f(x) = x^2 - 4x + m + 3$ có $\Delta' = 1 - m$.

TH1. $m \geq 1$: $f(x) \geq 0 \forall x \Leftrightarrow y = x^2 - 8x + m + 3$.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
y	$+\infty$	$m-13$	$+\infty$

$\min y = -5 \Leftrightarrow m = 8$ (TM).

TH2. $m < 1$: $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 2 - \sqrt{1-m}$; $x_2 = 2 + \sqrt{1-m}$.

□ Nếu $x \in (x_1; x_2)$: $y = -x^2 - 3 - m$.

$y(x_1) = -8 + 4\sqrt{1-m}$; $y(x_2) = -8 - 4\sqrt{1-m} \Rightarrow y(x_1) < y(x_2) \Rightarrow \min_{(x_1; x_2)} y = -8 - 4\sqrt{1-m} < -8$ (Không

TM).

□ Nếu $x \notin (x_1; x_2)$: $y = x^2 - 8x + 3 + m$.

+) $x_2 < 4 \Leftrightarrow 1 > m > -3$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	4	$+\infty$
y	$+\infty$			$m-13$	$+\infty$

$\min y = m - 13 = -5 \Leftrightarrow m = 8$ (Loại).

+) $x_2 \geq 4 \Leftrightarrow m \leq -3$:

x	$-\infty$	x_1	4	x_2	$+\infty$
y	$+\infty$	$-8 + 4\sqrt{1-m}$		$-8 - 4\sqrt{1-m}$	$+\infty$

$\Rightarrow \min y = -8 - 4\sqrt{1-m} < -8$ (Không TM). Vậy có 1 giá trị của m .

HẾT

HUẾ ... 16h00 Ngày 08 tháng 8 năm 2020