BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC-GTLN-GTNN CỦA BIỂU THỨC

1. Một số bất đẳng thức cơ bản thường sử dụng

1.1 Cho $a,b\geq 0$. Khi đó ta có $a+b\geq 2\sqrt{ab}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$. Bất đẳng thức này còn được viết dưới dạng khác tương đương là

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geq ab \quad ; (a+b)^2\geq 4ab;\ a^2+b^2\geq 2ab;\ a^2+b^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}$$

1.2 Cho $a,b,c\geq 0$. Khi đó ta có $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. Bất đẳng thức này còn có một số ứng dụng để chứng minh một số bất đẳng thức cơ bản khác khá phổ biến như sau:

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca \qquad a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

$$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca) \qquad a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq abc(a+b+c)$$

$$(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c) \qquad 3\left(a^3+b^3+c^3\right)^2\geq\left(a^2+b^2+c^2\right)^3$$

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)\leq\frac{9}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{(a+b+c)^2}{3} \qquad (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$$

1.4 Một số hằng đẳng thức đáng nhớ

$$(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=(x+y+z)^2+xy+yz+zx$$

$$(x+y)(y+z)(z+x)+xyz=(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$$

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(z+x)$$

1.5 Tuy nhiên biểu thức này làm ta nhớ đến bất đẳng thức phụ:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\geq\frac{2}{1+ab},\ \text{với } ab\geq 1.$$

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\leq\frac{2}{1+ab},\ \text{với } a,b>0 \text{ và } ab\leq 1.$$

$$(1+a)(1+b)\geq\left(1+\sqrt{ab}\right)^2, \forall a,b\geq 0$$

II. Bất đẳng thức đối xứng hai biến

Phương pháp giải

1) $x^2+y^2\geq 2xy$; đúng $\forall x;y$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y$;

2) $x^2+y^2=\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1}\geq\frac{(x+y)^2}{1+1}=\frac{(x+y)^2}{2}$; đúng $\forall x;y$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y$;

3) $xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}$; đúng $\forall x;y$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y$;

4) $(x+y)^2\geq 4xy$; đúng $\forall x;y$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Bài 1. Cho các số thực x, y thỏa điều kiện $2\left(x^2+y^2\right)=xy+1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^4+y^4}{2xy+1}$.

Lời giải

Đặt $t=xy$. Ta có: $xy+1=2\left((x+y)^2-2xy\right)\geq -4xy \Rightarrow xy\geq -\dfrac{1}{5}$

Và $xy+1=2\left((x-y)^2+2xy\right)\geq 4xy \Rightarrow xy\leq \dfrac{1}{3}$. ĐK: $-\dfrac{1}{5}\leq t\leq \dfrac{1}{3}$.

Suy ra : $P=\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2}{2xy+1}=\dfrac{-7t^2+2t+1}{4(2t+1)}$.

Do đó: $P'=\dfrac{7\left(-t^2-t\right)}{2(2t+1)^2}$, $P'=0\Leftrightarrow t=0, t=-1(L)$ $P\left(-\dfrac{1}{5}\right)=P\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{15}$ và $P(0)=\dfrac{1}{4}$.

Kết luận. $MaxP=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y=0; x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$ và $MinP=\dfrac{2}{15}\Leftrightarrow x=y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 2. Cho $x, y\geq 0$ thỏa mãn $x+y+xy=3$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức:

$P=\dfrac{x^2}{y+1}+\dfrac{y^2}{x+1}-\dfrac{1}{x+y+3}$.

Nhận xét

Trong bài toán này ta chỉ cần sử dụng phép biến đổi tương đương là xuất hiện ngay ẩn phụ. Cụ thể như sau:

Ta có: $P=\dfrac{x^2}{y+1}+\dfrac{y^2}{x+1}-\dfrac{1}{x+y+3}=\dfrac{(x+y)^3-3xy(x+y)+(x+y)^2-2xy}{xy+(x+y)+1}-\dfrac{1}{(x+y)+3}$

Đặt: $t=x+y \Rightarrow xy=3-t$. Khi đó: $P=f(t)=\dfrac{1}{4}t^3+t^2-\dfrac{7}{4}t-\dfrac{1}{t+3}-\dfrac{3}{2}$.

Bài 3. Cho hai số thực x, y thay đổi và thoả mãn $x^2+y^2=8$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+y^3-3xy$.

Lời giải

Ta có $P=(x+y)\left(x^2+y^2-xy\right)-3xy=(x+y)(8-xy)-3xy$.

Đặt $x+y=t$. Do $x^2+y^2=8$ nên $xy=\dfrac{t^2-8}{2}$. Suy ra

$$P=t\left(8-\dfrac{t^2-8}{2}\right)-3.\dfrac{t^2-8}{2}=-\dfrac{t^3}{2}-\dfrac{3}{2}t^2+12t+12$$

Do $(x+y)^2\geq 4xy$ nên $t^2\geq 2\left(t^2-8\right)\Leftrightarrow -4\leq t\leq 4$

Xét $f(t)=-\dfrac{t^3}{2}-\dfrac{3}{2}t^2+12t+12$ với $t\in[-4;4]$.

Ta có $f'(t)=-\frac{3}{2}t^2-3t+12;\quad f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-4\in[-4;4]\\ t=2\in[-4;4]\end{array}\right.$

$f(-4)=-28;\ f(2)=26;\ f(4)=4$.

Kết luận. $MaxP=26\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x=y=1;\ MinP=-28\Leftrightarrow t=-4\Leftrightarrow x=y=-2$.

Bài 4. Cho x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+xy=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=x^2y-xy^2$.

Lời giải

Ta có $S=xy(x-y)\Rightarrow S^2=(xy)^2(x^2+y^2-2xy)=(xy)^2(1-3xy)$

Đặt $t=xy$

$$x^2+y^2+xy=1\Leftrightarrow 1-3xy=(x-y)^2\geq 0\Rightarrow t\leq\frac{1}{3}$$

$$x^2+y^2+xy=1\Leftrightarrow (x+y)^2=1+xy\geq 0\Rightarrow t\geq -1$$

$$\Rightarrow S^2=f(t)=t^2(1-3t),t\in\left[-1;\frac{1}{3}\right].\ f'(t)=2t-9t^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=\frac{2}{9}\end{array}\right.$$

$$f(-1)=4,\ f(0)=f\left(\frac{1}{3}\right)=0,\ f\left(\frac{2}{9}\right)=\frac{4}{243}\Rightarrow S^2\leq 4\Leftrightarrow -2\leq S\leq 2$$

$$S=2\Leftrightarrow x=-1,y=1$$

$$S=-2\Leftrightarrow x=1,y=-1$$

Kết luận. $MaxS=2\Leftrightarrow x=-1,y=1;MinS=-2\Leftrightarrow x=1,y=-1$.

Bài 5. Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $3+\frac{3}{xy}=\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{x}+\frac{2}{x^2y^2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2y^2+\frac{16}{x^2+y^2+2}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có : $3xy+3=x^4+y^4+\frac{2}{xy}\geq 2x^2y^2+\frac{2}{xy}$

Đặt $t=xy,t>0$ ta có $3t+3\geq 2t^2+\frac{2}{t}\Leftrightarrow 2t^3-3t^2-3t+2\leq 0\Leftrightarrow t\in\left[\frac{1}{2};2\right]$

$$P=x^2y^2+\frac{16}{x^2+y^2+2}\leq x^2y^2+\frac{16}{2xy+2}=t^2+\frac{8}{t+1}$$

Xét hàm số $f(t)=t^2+\frac{8}{t+1},t\in\left[\frac{1}{2};2\right]$ ta có $\underset{\left[\frac{1}{2};2\right]}{Max}\,f(t)=\frac{20}{3}\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x=y=\sqrt{2}$

Kết luận. $\underset{\left[\frac{1}{2};2\right]}{Max}\,f(t)=\frac{20}{3}\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x=y=\sqrt{2}$.

Bài 6. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x+y+xy=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=4\left(\frac{x+1}{y}\right)^3+4\left(\frac{y+1}{x}\right)^3+\sqrt{x^2+y^2}$$

Lời giải

Từ giả thiết bài toán ta có

$$3=x+y+xy\le x+y+\frac{(x+y)^2}{4}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+y\ge 2\\ x+y\le -6\end{array}\right.\Rightarrow x+y\ge 2$$

Mặt khác $x, y>0$ nên $3=x+y+xy>x+y$

Vậy ta có $2\le x+y<3$.

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarzt ta chứng minh được $4\left(a^3+b^3\right)\ge(a+b)^3$

Ta có

$$P=4\left(\frac{x+1}{y}\right)^3+4\left(\frac{y+1}{x}\right)^3+\sqrt{x^2+y^2}\ge\left(\frac{x+1}{y}+\frac{y+1}{x}\right)^3+\frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

$$\ge\left(\frac{(x+y)^2+3(x+y)-6}{3-(x+y)}\right)^3+\frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

Đặt $t=x+y, t\in[2;3)$, ta có $f(t)=P=\left(\frac{t^2+3t-6}{3-t}\right)^3+\frac{t}{\sqrt{2}}; t\in[2;3)$

Kết luận. $\underset{[2;3)}{Min}\, f(t)=64+\sqrt{2}\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x=y=1$.

Bài 7. Cho $x^2+y^2-xy=1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=x^4+y^4-x^2y^2$.

Lời giải

Ta có: $x^2+y^2-xy=1\Rightarrow\begin{cases}1=x^2+y^2-xy\ge 2xy-xy=xy\\ 1=(x+y)^2-3xy\ge -3xy\end{cases}\Rightarrow\frac{-1}{3}\le xy\le 1$

Mặt khác, từ $x^2+y^2-xy=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1+xy$ nên $M=(x^2+y^2)-3x^2y^2=-2x^2y^2+2xy+1$

Đặt $t=xy \Rightarrow M=-2t^2+2t+1$.

Vậy cần tìm Min và Max của tam thức bậc hai: $f(t)=-2t^2+2t+1$ trên đoạn $\left[\frac{-1}{3};1\right]$.

Ta có: $Min_M=f(\frac{-1}{3})=\frac{1}{9}$. Đạt được khi $\begin{cases}x^2+y^2-xy=1\\ xy=\frac{-1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}\end{array}\right.$.

Ta có: $Max_M = f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$.Đạt được khi: $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 1 \\ xy = \frac{-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2} \end{cases}$

Bài 8. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$.Tìm giá trị lớn nhất; giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = x^6 + y^6 - 2x^2y^2 - xy$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 9. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2\left(x^3 + y^3\right) - 3xy$.

Bài 10. Cho $x > 0,\ y > 0$ và $x + y + xy = 3$. Tìm GTLN của $A = \frac{3x}{y+1} + \frac{3y}{x+1} - (x^2 + y^2)$.

Bài 11. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $3\left(x^2 + y^2\right) = 2\left(x + y\right)$. Tìm GTNN của biểu thức $P = \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{x}\right)^2$.

Bài 12.(B-2009) Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $\left(x + y\right)^3 + 4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 3\left(x^4 + y^4 + x^2y^2\right) - 2\left(x^2 + y^2\right) + 1$.

Bài 13.(D-2009) Cho các số thực không âm x, y thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \left(4x^2 + 3y\right)\left(4y^2 + 3x\right) + 25xy$.

Bài 14.(D-2012) Cho các số thực x, y thỏa mãn $\left(x - 4\right)^2 + \left(y - 4\right)^2 + 2xy \leq 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 3\left(xy - 1\right)\left(x + y - 2\right)$.

Bài 15.(A-2013) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\left(a + c\right)\left(b + c\right) = 4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{32a^3}{\left(b + 3c\right)^3} + \frac{32b^3}{\left(a + 3c\right)^3} - \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}$

Bài 16. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x^2y + xy^2 = x + y + 3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$P = x^2 + y^2 + \frac{\left(1 + 2xy\right)^2 - 3}{2xy}$.

Bài 17. Cho $x,\ y$ là hai số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 5xy - 3y^2$.

Bài 18. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $x^4 + y^4 + 4 = \frac{6}{xy}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+1}{2x+1} + \frac{y+1}{2y+1} - \frac{\sqrt{xy}}{x^2 + y^2 - 1}$.

Bài 19. Cho các số thực $x, y > 0$ và thỏa mãn $x + y + 1 = 3xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$P = \frac{3x}{y\left(x + 1\right)} + \frac{3y}{x\left(y + 1\right)} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$.

Bài 20. Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $ab+a+b=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4a}{b+1}+\frac{4b}{a+1}+2ab-\sqrt{7-3ab}$.

Bài 21. Cho các số thực dương x,y thỏa mãn điều kiện $x\left(1-\frac{1}{y}\right)+y\left(1-\frac{1}{x}\right)=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=xy+\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}$.

Bài 22. Cho hai số thực dương *x, y* thỏa mãn: $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=(1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right)+(1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

II. Một số bài toán cần dùng bất đẳng thức phụ

Bổ đề: Cho $a,b>0$ ta luôn có:

1) $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}\ge\dfrac{2}{1+ab}$, với $ab\ge 1$.

2) $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\le\dfrac{2}{1+ab}$, *với và* $ab\le 1$.

Bài 1. (*Đề thi HSG 12 Bình Phước 2014*) Cho các số thực dương a,b thỏa $a+b=2ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q=\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{a^2+b^2+a+b+4}$.

Nhận xét

Trong bài toán này với giả thiết $a+b=2ab$ thì biểu thức dưới dấu căn khá nhẹ nhàng, nó có thể biểu diễn theo tổng hoặc tích. Do đó ẩn phụ của bài toán phụ thuộc hoàn toàn vào biểu thức còn lại là $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}$. Tuy nhiên biểu thức này làm ta nhớ đến bất đẳng thức phụ:

$\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}\ge\dfrac{2}{1+ab}$, với $ab\ge 1$.

Từ giả thiết ta có: $2ab=a+b\ge 2\sqrt{ab}\Rightarrow\sqrt{ab}\ge 1\Rightarrow ab\ge 1$. Đến đây ta có thể dự đoán ẩn phụ là một biểu thức theo tích của a và b.

Ta có

$$Q\ge\frac{2}{1+ab}+\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{a^2+b^2+a+b+4}=\frac{2}{1+ab}+\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{(a+b)^2+4}\ge\frac{2}{1+ab}+\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{4ab+4}$$

Đặt $t=\sqrt[3]{ab+1}$, ta có $Q\ge f(t)=\dfrac{2}{t^3}+3t$.

Bài 2. *Cho* $a,\ b>0:\ ab\ge 1$. *Tìm GTNN của* $T=\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}-\dfrac{32}{\sqrt{2a(1+a)+2b(1+b)+8}}$.

<u>Giải</u>

+) Ta có: $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\ge\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}},\quad ab\ge 1$.

Thật vậy: Quy đồng, chuyển vế, bđt trên tương đương với $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{ab}-1)\ge 0$ (Đúng).

Lại có: $\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}=\dfrac{2}{1+\sqrt{ab.1}}\ge\dfrac{2}{1+\dfrac{ab+1}{2}}=\dfrac{4}{ab+3}$. Suy ra: $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\ge\dfrac{4}{ab+3}$.

+) Ta có: $a(1+a)+b(1+b)=(a^2+b^2-2)+(a+b+2)\ge(2ab-2)+2\sqrt{ab}+2\ge 2\sqrt{ab}+2$.

Suy ra: $2a(1+a)+2b(1+b)+8\ge 4\sqrt{ab}+12$.

$$\frac{1}{\sqrt{2a(1+a)+2b(1+b)+8}}\le\frac{1}{\sqrt{4\sqrt{ab}+12}}\Rightarrow\frac{-32}{\sqrt{2a(1+a)+2b(1+b)+8}}\ge\frac{-32}{2\sqrt{\sqrt{ab}+3}}=\frac{-16}{\sqrt{\sqrt{ab}+3}}$$
.

$\Rightarrow T\ge\dfrac{4}{ab+3}-\dfrac{16}{\sqrt{\sqrt{ab}+3}}$.

+) Đặt $t=\sqrt{ab}\ge 1\Rightarrow T\ge\dfrac{4}{t^2+3}-\dfrac{16}{\sqrt{t+3}}=f(t)$.

$f'(t) = \dfrac{-8t}{(t^2+3)^2} + \dfrac{8}{(t+3)\sqrt{t+3}} = 8.\dfrac{(t^2+3)^2 - t(t+3)\sqrt{t+3}}{(t^2+3)^2(t+3)\sqrt{t+3}}$.

Xét $M = (t^2+3)^2 - t(t+3)\sqrt{t+3} > (t+3)\ \ t^2+3-t\sqrt{t+3}\ \ > 0$

$\Leftrightarrow t^2+3 > t\sqrt{t+3} \Leftrightarrow t^4+6t^2+9 > t^3+3t^2 \Leftrightarrow (t^4-t^3)+3t^2+9>0$ (Đúng $\forall t \geq 1$).

Suy ra $f'(t) > 0\ \forall t \geq 1 \Rightarrow f(t)$ đồng biến $\forall t \geq 1$.

Từ đó: $\underset{t\geq 1}{Min}T = f(1) = -7 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow a = b = 1$.

Bài 3. Cho các số thực $x, y > 0$ thỏa mãn $x^4+y^4+4 = \dfrac{6}{xy}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} + \frac{3-2xy}{5-x^2-y^2}.$$

⊕ Theo BĐT ***AM-GM*** ta có: $x^4+y^4+4 \geq 2x^2y^2+4$

Do đó: $\dfrac{6}{xy} = x^4+y^4+4 \geq 2x^2y^2+4 \Leftrightarrow 2x^3y^3+4xy-6 \leq 0$

$\Leftrightarrow 2(xy-1)(x^2y^2+xy+3) \leq 0 \Leftrightarrow xy \leq 1$

⊕ Ta luôn có bất đẳng thức phụ sau: $\dfrac{1}{1+2x} + \dfrac{1}{1+2y} \geq \dfrac{2}{2+xy}, \forall x, y > 0$.

Thật vậy ta có: $\dfrac{1}{1+2x} + \dfrac{1}{1+2y} \geq \dfrac{2}{2+xy}$

$\Leftrightarrow 2+xy+2(x+y)+xy(x+y) \geq 1+2x+2y+4xy \Leftrightarrow x^2y+y^2x+1 \geq 3xy$

(Điều này luôn đúng do $x^2y+y^2x+1 \geq 3\sqrt[3]{x^3y^3} = 3xy$).

Vậy $P = \dfrac{1}{1+2x} + \dfrac{1}{1+2y} + \dfrac{3-2xy}{5-x^2-y^2} \geq \dfrac{2}{2+xy} + \dfrac{3-2xy}{5-2xy}$ (theo ***AM-GM***).

⊕ Đặt $t = xy, t \in (0;1]$. Xét $f(t) = \dfrac{2}{2+t} + \dfrac{3-2t}{5-2t}, t \in (0;1]$

Ta có: $f'(t) = \dfrac{-2}{(2+t)^2} - \dfrac{4}{(5-2t)^2} < 0, \forall t \in (0;1]$

$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $(0;1]$ nên $P \geq f(t) \geq f(1) = 1$.

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y = y^2x \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$.

Bài 4. Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện: $x+y = 2\sqrt{x+2} + 3\sqrt{y-2014} + 2012$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $S = \ x-1\ ^2 + \ y-1\ ^2 + \dfrac{2015+2xy\sqrt{x+y+1}}{\sqrt{x+y+1}}$.

<u>Nhận xét</u>

Phép đặt ẩn phụ cho bài toán là: $t = \sqrt{x+y+1}$. Vấn đề đặt ra là với giả thiết có vẻ phức tạp kia làm sao chặn được ẩn phụ t.

Quan sát vế phải giả thiết ta thầy nếu dùng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta thu được tổng $x+y$ từ đó ta có một bất đẳng thức chứa ẩn là $x+y$. Giải bất phương trình này ta thu được giới hạn của $x+y$, từ đó thu được điều kiện cho ẩn phụ t.

Thật vậy:

$x+y=2\sqrt{x+2}+3\sqrt{y-2014}+2012\le\sqrt{2^2+3^2\quad x+2+y-2014}+2012=\sqrt{13\ \ x+y-2012}+2012$

$\Leftrightarrow x+y-2012\le\sqrt{13(x+y-2012)}\Leftrightarrow(x+y-2012)^2-13(x+y-2012)\le0\Leftrightarrow0\le x+y-2012\le13$

$\Leftrightarrow2012\le x+y\le2015\Leftrightarrow2013\le x+y+1\le2016$

Do đó $t\in\left[\sqrt{2013};\sqrt{2016}\right]$.

IV. Bất đẳng thức đối xứng ba biến

Phương pháp giải

Dồn về một trong các biến $t=x+y+z$; $t=xy+yz+zx; t=x^2+y^2+z^2$; $t=xyz$;

Tìm điều kiện chặt của biến t

Sử dụng đạo hàm để khảo sát hàm số biến t; tìm GTLN; GTNN của hàm số mới.

Chú ý: Đối với các bài toán về bất đẳng thức đối xứng ba biến chúng ta cần chú ý đến các đánh giá, phân tích thường sử dụng như sau:

1) $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$; đúng $\forall x;y;z$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$;

2) $x^2+y^2+z^2=\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{1}+\dfrac{z^2}{1}\ge\dfrac{(x+y+z)^2}{1+1+1}=\dfrac{(x+y+z)^2}{3}$; đúng $\forall x;y;z$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$;

3) $xyz\le\dfrac{(x+y+z)^3}{27}$; đúng $\forall x;y;z$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$;

4) $(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=(x+y+z)^2+xy+yz+zx$;

5) $(x+y)(y+z)(z+x)+xyz=(x+y+z)(xy+yz+zx)$;

6) $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$;

7) $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(z+x)$.

Bài 1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{7}{a^2+b^2+c^2}+\frac{121}{14(ab+bc+ca)}$$

<u>Nhận xét</u>

Trong bài toán này chỉ cần thế $a+b+c=1$ vào P sẽ làm xuất hiện ngay ẩn phụ. Thật vậy:

Ta có $1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow ab+bc+ca=\dfrac{1-(a^2+b^2+c^2)}{2}$.

Do đó $A=\dfrac{7}{a^2+b^2+c^2}-\dfrac{121}{7(1-(a^2+b^2+c^2))}$

Đặt $t=a^2+b^2+c^2$. Ta có $f(t)=\dfrac{7}{t}+\dfrac{121}{7(1-t)}$.

Bài 2. Cho các số thực dương x,y,z thoả mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xy+yz+zx+\dfrac{5}{x+y+z}$.

Phân tích tìm lời giải

❖ Đây là một bài toán về bất đẳng thức đối xứng ba biến. Do đó chúng ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau $x=y=z=1$. Quan sát giả thiết và yêu cầu bài toán ta dự đoán ẩn phụ là $t=x+y+z$. Từ giả thiết chúng ta cần lưu ý các đánh giá để đưa về $t=x+y+z$. Ta có

$$x^2+y^2+z^2\ge\frac{(x+y+z)^2}{3};\ xy+yz+zx\le\frac{1}{3}(x+y+z)^2.$$

❖ Chú ý rằng Bài toán tìm **giá trị lớn nhất** của biểu thức nên đánh giá P theo chiều $"\le"$. Ta có lời giải chi tiết cho bài toán như sau:

Lời giải

Ta có $3=x^2+y^2+z^2\Leftrightarrow 3+2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2$.

Đặt $t=x+y+z$, ta có: $0\le xy+yz+zx=\dfrac{t^2-3}{2}\le x^2+y^2+z^2=3\Rightarrow\sqrt{3}\le t\le 3$.

Khi đó, ta có: $P=f(t)=\dfrac{t^2-3}{2}+\dfrac{5}{t},\ f'(t)=t-\dfrac{5}{t^2}=\dfrac{t^3-5}{t^2}>0,\forall t\ge\sqrt{3}$.

Vậy ta có: $P=f(t)\le f(3)=\dfrac{14}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$.

Kết luận. $\max P=\dfrac{14}{3}$ khi $x=y=z=1$.

Bài 3. Cho các số thực x,y,z không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=\dfrac{4}{3}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=2(xy+yz+zx)+\dfrac{3}{x+y+z}$.

Phân tích tìm lời giải

❖ Đây là một bài toán về bất đẳng thức đối xứng ba biến. Do đó chúng ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau; từ giả thiết ta dự đoán dấu $"="$ xảy ra khi $x=y=z=1$. Quan sát giả thiết và yêu cầu bài toán ta dự đoán ẩn phụ $t=x+y+z$. Từ giả thiết chúng ta cần lưu ý đánh giá:

$$x^2+y^2+z^2\ge\frac{(x+y+z)^2}{3};\ xy+yz+zx\le\frac{1}{3}(x+y+z)^2.$$

$$t^2=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\ge x^2+y^2+z^2=\frac{4}{3}$$

❖ Chú ý rằng Bài toán tìm **giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất** của biểu thức nên khi đánh giá biến t ta cần chặn cả hai phía. Ta có lời giải chi tiết cho bài toán như sau:

Lời giải

Đặt $x+y+z=t\ \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\le t\le 2\right)$. Ta có

$$xy+yz+zx=\frac{1}{2}\left[(x+y+z)^2-x^2-y^2-z^2\right]=\frac{1}{2}\left(t^2-\frac{4}{3}\right)\text{ nên } P=t^2+\frac{3}{t}-\frac{4}{3}$$

Xét hàm số $f(t)=t^2+\dfrac{3}{t}-\dfrac{4}{3}$ xác định trên $\left[\dfrac{2\sqrt{3}}{3};2\right]$

$$f'(t)=2t-\frac{3}{t^2}=0\Leftrightarrow t=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\text{ (loại). } f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2};\ f(2)=\frac{25}{6}$$

Kết luận. $MinP=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ khi $t=\frac{2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow$ 2 trong 3 số x,y,z bằng 0 số còn lại bằng $\frac{2\sqrt{3}}{3}$;

$MaxP=\frac{25}{6}$ khi $t=2\Leftrightarrow x=y=z=\frac{2}{3}$.

Bài 4. Cho *a, b, c* là ba số thực dương thỏa mãn $2\left(a^2+b^2+c^2\right)=ab+bc+ca+3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=a^2+b^2+c^2-\frac{1}{a+b+c+3}$.

Phân tích tìm lời giải

❖ Đây là một bài toán về bất đẳng thức đối xứng ba biến. Do đó chúng ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau $a=b=c=1$. Quan sát giả thiết và yêu cầu bài toán ta dự đoán ẩn phụ $t=a+b+c$. Từ giả thiết chúng ta cần lưu ý đánh giá để đưa về $t=a+b+c$. Ta có

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{(a+b+c)^2}{3};\ ab+bc+ca\leq\frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

❖ Chú ý rằng Bài toán tìm **giá trị lớn nhất** của biểu thức nên đánh giá P theo chiều $"\leq"$. Ta có lời giải chi tiết cho bài toán như sau:

Lời giải

Với *a, b, c* là các số dương ta có

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq\frac{(a+b+c)^2}{3};\ ab+bc+ca\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}$$

Bởi vậy $\frac{2(a+b+c)^2}{3}\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}+3\Leftrightarrow(a+b+c)^2\leq 9$

Từ đó $0<a+b+c\leq 3$

Ta có $2\left(a^2+b^2+c^2\right)=ab+bc+ca+3\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}+3$

Nên $\left(a^2+b^2+c^2\right)\leq\frac{(a+b+c)^2}{6}+\frac{3}{2}$

Bởi vậy

$$S=a^2+b^2+c^2-\frac{1}{a+b+c+3}\leq\frac{(a+b+c)^2}{6}-\frac{1}{a+b+c+3}+\frac{3}{2}=\frac{1}{6}t^2-\frac{1}{t+3}+\frac{3}{2}$$

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{6}t^2-\frac{1}{t+3}+\frac{3}{2}$ với $0<t\leq 3$

$f'(t)=\frac{1}{3}t+\frac{1}{(t+3)^2}>0,\forall t\in(0;3]$. Từ đó suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;3]$

Do đó $f(t)\leq f(3),\forall t\in(0;3]$ hay $f(t)\leq\frac{17}{6}$ Suy ra: $S\leq\frac{17}{6}$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$

Kết luận. $MaxS=\frac{17}{6}$ khi $a=b=c=1$.

Bài 5. Cho a,b,c là ba số dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}-\frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Phân tích tìm lời giải

❖ Đây là một bài toán về bất đẳng thức đối xứng ba biến. Do đó chúng ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau. Quan sát biểu thức trong P ta dự đoán ẩn phụ $t=a+b+c$.

❖ Chú ý rằng Bài toán tìm **giá trị lớn nhất** của biểu thức nên đánh giá P theo chiều "$\le$". Từ đó suy ra biểu thức $a^2+b^2+c^2+1$ cần đánh giá theo chiều "$\ge$"; biểu thức $(a+1)(b+1)(c+1)$ cần đánh giá theo chiều "$\le$" (vì phía trước biểu thức có thêm dấu "$-$"). Ta có

$$a^2+b^2+c^2+1^2\ge\frac{(a+b+c+1)^2}{4};\ (a+1)(b+1)(c+1)\le\frac{(a+b+c+3)^3}{27}.$$

Ta có lời giải chi tiết cho bài toán như sau:

Lời giải

Ta có: $a^2+b^2+c^2+1\ge\frac{1}{4}(a+b+c+1)^2;\ (a+1)(b+1)(c+1)\le\left(\frac{a+b+c+3}{3}\right)^3$

Vậy $P\le\frac{2}{a+b+c+1}-\frac{54}{(a+b+c+3)^3}$

$=\frac{2}{t}-\frac{54}{(t+2)^3}=f(t)$ với $t=a+b+c+1$ $(t>1)$

$f'(t)=-\frac{2}{t^2}+\frac{162}{(t+2)^4};\ f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\,(n)\\t=1\,(l)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	1		4		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Kết luận. $MaxP=\frac{1}{4}$ khi $\begin{cases}a+b+c=3\\a=b=c\\c=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực dương và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{3+ab+bc+ca}+\sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

Phân tích tìm lời giải

❖ Đây là một bài toán về bất đẳng thức đối xứng ba biến. Do đó chúng ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau $a=b=c=1$. Quan sát biểu thức P ta dự đoán ẩn phụ $t=abc$.

❖ Chú ý rằng Bài toán tìm **giá trị lớn nhất** của biểu thức nên đánh giá P theo chiều $"\le"$. Từ đó suy ra biểu thức $ab+bc+ca$; $(1+a)(1+b)(1+c)$ cần đánh giá theo chiều $"\ge"$. Ta có lời giải chi tiết cho bài toán như sau:

Lời giải

Áp dụng Bất đẳng thức: $(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)$, $\forall x,y,z \in \Re$ ta có:
$(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c) = 9abc > 0 \Rightarrow ab+bc+ca \ge 3\sqrt{abc}$

Ta có: $(1+a)(1+b)(1+c) \ge (1+\sqrt[3]{abc})^3, \forall a,b,c > 0$.

Thật vậy

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc$$
$$\ge 1+3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{(abc)^2}+abc = (1+\sqrt[3]{abc})^3$$

Khi đó: $P \le \dfrac{2}{3(1+\sqrt{abc})} + \dfrac{\sqrt[3]{abc}}{1+\sqrt[3]{abc}} = Q$ (1).

Đặt $\sqrt[6]{abc} = t$; vì $a,b,c>0$ nên $0 < abc \le \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 = 1$

Xét hàm số $Q = \dfrac{2}{3(1+t^3)} + \dfrac{t^2}{1+t^2}, t \in (0;1] \Rightarrow Q'(t) = \dfrac{2t(t-1)(t^5-1)}{(1+t^3)^2(1+t^2)^2} \ge 0, \forall t \in (0;1]$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(0;1] \Rightarrow Q = Q(t) \le Q(1) = \dfrac{1}{6}$ (2). Từ (1) và (2): $P \le \dfrac{1}{6}$.

Kết luận. $MaxP = \dfrac{1}{6}$, đạt được khi và chỉ khi : $a=b=c=1$.

Bài 7. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a^2+1}{b} + \dfrac{b^2+1}{c} + \dfrac{c^2+1}{a} - \dfrac{1}{a+b+c}$.

Phân tích tìm lời giải

❖ Đây là một bài toán về bất đẳng thức đối xứng ba biến. Do đó chúng ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau $a=b=c=1$. Quan sát biểu thức P ta dự đoán ẩn phụ $t=a+b+c$.

❖ Chú ý rằng Bài toán tìm **giá trị nhỏ nhất** của biểu thức nên đánh giá P theo chiều $"\ge"$. Trong biểu thức P chứa $a^2;b^2;c^2$ ở tử số nên chúng ta nghĩ đến bất đẳng thức ***Cauchy-Schwarzt*** dạng cộng mẫu số $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a} \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{a+b+c} = a+b+c$; $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \ge \dfrac{9}{a+b+c}$. Ta có lời giải chi tiết cho bài toán như sau:

Lời giải

Theo giả thiết, ta có $3 = a^2+b^2+c^2 \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{3} \Rightarrow a+b+c \le 3$

Mặt khác

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \ge a^2+b^2+c^2 = 3 \Rightarrow a+b+c \ge \sqrt{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarzt ta có

$$P=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}+\frac{9}{a+b+c}-\frac{1}{a+b+c}$$
$$=a+b+c+\frac{8}{a+b+c}$$

Đặt $t=a+b+c;t\in\left[\sqrt{3};3\right]$, ta có $f(t)=t+\frac{8}{t};t\in\left[\sqrt{3};3\right]$

$$f'(t)=1-\frac{8}{t^2};f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{8}\ \ (n)\\ t=-\sqrt{8}\,(l)\end{array}\right.;\ f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{11\sqrt{3}}{3};f(3)=\frac{17}{3};f\left(\sqrt{8}\right)=4\sqrt{2}$$

Kết luận: $MinP=4\sqrt{2}\Leftrightarrow t=\sqrt{8}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Bài 8. Cho các số dương x, y, z thoả mãn: $x(x-1)+y(y-1)+z(z-1)\le 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}$.

Phân tích tìm lời giải

❖ Đây là một bài toán về bất đẳng thức đối xứng ba biến. Do đó chúng ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau $x=y=z$. Trước hết ta phân tích giải thiết bài toán:

$$x(x-1)+y(y-1)+z(z-1)\le 6\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-(x+y+z)\le 6$$
$$\Rightarrow 18\ge(x+y+z)^2-3(x+y+z)\Leftrightarrow -3\le x+y+z\le 6\Rightarrow 0<x+y+x\le 6$$

Do đó, ta dự đoán ẩn phụ là $t=x+y+z$

❖ Chú ý rằng Bài toán tìm **giá trị nhỏ nhất** của biểu thức nên đánh giá P theo chiều $"\ge"$. Quan sát biểu thức A ta có thể xử lý theo 2 cách: Sử dụng bất đẳng thức AM-GM hoặc bất đẳng thức Cauchy-Schwarzt dạng cộng mẫu số để đánh giá. Lời giải chi tiết cho bài toán như sau:

Lời giải

Ta có $x(x-1)+y(y-1)+z(z-1)\le 6\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-(x+y+z)\le 6$

$\Rightarrow 18\ge(x+y+z)^2-3(x+y+z)\Leftrightarrow -3\le x+y+z\le 6\Rightarrow 0<x+y+x\le 6$

Ta có: $\frac{1}{y+z+1}+\frac{y+z+1}{25}\ge\frac{2}{5}$; $\frac{1}{z+x+1}+\frac{z+x+1}{25}\ge\frac{2}{5}$;

$\frac{1}{x+y+1}+\frac{x+y+1}{25}\ge\frac{2}{5}$

$$\Rightarrow A+\frac{2(x+y+z)+3}{25}\ge\frac{6}{5}\Leftrightarrow A\ge\frac{6}{5}-\frac{2(x+y+z)+3}{25}\ge\frac{3}{5}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=2$.

Kết luận. $MinA=\frac{3}{5}\Leftrightarrow x=y=z=2$.

Cách khác: Đặt $t=x+y+z,\ t\in(0;6]$.

$$A=\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}\ge\frac{9}{2(x+y+z)+3}$$

Do đó $A \ge \dfrac{9}{2t+3}$. Xét $f(t) = \dfrac{9}{2t+3}$ trên (0;6], suy ra kết quả bài toán.

Bài 9. Cho ba số thực dương *x,y,z* thoả mãn $x+y+z \ge 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{yz+\sqrt{1+x^3}} + \frac{y^2}{zx+\sqrt{1+y^3}} + \frac{z^2}{xy+\sqrt{1+z^3}}.$$

Phân tích tìm lời giải

❖ Đây là một bài toán về bất đẳng thức đối xứng ba biến. Do đó chúng ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau $x=y=z=1$. Chú ý rằng Bài toán tìm **giá trị nhỏ nhất** của biểu thức nên đánh giá P theo chiều $"\ge"$. Quan sát biểu thức P chứa $x^2;y^2;z^2$ ở tử số nên chúng ta nghĩ đến bất đẳng thức ***Cauchy-Schwarzt*** dạng cộng mẫu số. Ta có lời giải chi tiết cho bài toán như sau:

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarzt$ ta có

Ta có $P \ge \dfrac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx+\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+y^3}+\sqrt{1+z^3}}$

Lại có $\sqrt{1+x^3} = \sqrt{(1+x)(1-x+x^2)} \le \dfrac{2+x^2}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=2$

Suy ra $P \ge 2.\dfrac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+zx)+x^2+y^2+z^2+6} = \dfrac{2.(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2+6}$

Đặt $t=(x+y+z)^2 (t \ge 36)$. Ta có $P \ge \dfrac{2t}{t+6}$

Với $t \ge 36$ xét hàm số $f(t) = \dfrac{t}{t+6}; f'(t) = \dfrac{6}{(t+6)^2} \ge 0$. Hàm số đồng biến $\Rightarrow f(t) \ge f(36) = \dfrac{6}{7}$.

Suy ra $P \ge \dfrac{12}{7}$.

Kết luận. $MinP = \dfrac{12}{7}$ khi $x=y=z=2$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 10. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh

$$\frac{3}{xy+yz+zx} + \frac{2}{x^2+y^2+z^2} \ge 14.$$

Bài 11.Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{x}{x+y} + \dfrac{y}{y+z} + \dfrac{z}{z+x} - 2\sqrt{xyz}$.

Bài 12. (B-2010) Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+3\left(ab+bc+ca\right)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Bài 13. Cho ba số thực dương a,b,c. Chứng minh $\dfrac{a^2}{(a+b)^2} + \dfrac{b^2}{(b+c)^2} + \dfrac{4c^3}{3(c+a)^3} \ge \dfrac{2}{3}$.

Bài 14. Cho $a,b,c > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt[3]{2\left(a^3+b^3+c^3+1\right)}}-\frac{2}{\left(\sqrt{ab}+1\right)\left(\sqrt{bc}+1\right)\left(\sqrt{ca}+1\right)}$$

Bài 15. Cho các số thực $x,y,z\geq 0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(x^3+y^3+z^3\right)+15xyz$.

Bài 16. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2}{x+y^2}+\frac{y^2}{y+z^2}+\frac{z^2}{z+x^2}$.

Bài 17. Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn ab + bc + ca = 3abc. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{b^4}{ab^4+2a^2}+\frac{c^4}{bc^4+2b^2}+\frac{a^4}{ca^4+2c^2}+8abc$.

Bài 18. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=\frac{1}{2}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)+a+c}}+\sqrt{\frac{(b+c)(a+c)}{(b+c)(a+c)+a+b}}+\sqrt{\frac{(a+c)(a+b)}{(a+c)(a+b)+b+c}}.$$

Bài 19. Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5-2a^3+a}{b^2+c^2}+\frac{b^5-2b^3+b}{c^2+a^2}+\frac{c^5-2c^3+c}{a^2+b^2}\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

II. Bất đẳng thức ba biến không đối xứng

Bài 1. Cho ba số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{24}{13a+12\sqrt{ab}+16\sqrt{bc}}-\frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$$

Phân tích tìm lời giải

❖ Đây là một bài toán về bất đẳng thức không đối xứng ba biến. Quan sát biểu thức trong P ta dự đoán ẩn phụ $t=a+b+c$.

❖ Chú ý rằng Bài toán tìm **giá trị nhỏ nhất** của biểu thức nên đánh giá P theo chiều $"\geq"$. Từ đó suy ra biểu thức $13a+12\sqrt{ab}+16\sqrt{bc}$ cần đánh giá theo chiều $"\leq"$ và cần có đánh giá biểu thức $13a+12\sqrt{ab}+16\sqrt{bc}\leq\alpha\left(a+b+c\right)$. Vấn đề ở đây là làm thế nào để xác định được α?

Giả sử ta có đánh giá

$$13a+12\sqrt{ab}+16\sqrt{bc}=13a+\frac{12}{\sqrt{m.n}}\sqrt{ma.nb}+\frac{16}{\sqrt{p.q}}\sqrt{pb.qc}$$

$$\leq 13a+\frac{6}{\sqrt{mn}}\left(ma+nb\right)+\frac{8}{\sqrt{p.q}}\left(pb+qc\right)$$

$$=\left(13+6\sqrt{\frac{m}{n}}\right)a+\left(6\sqrt{\frac{n}{m}}+8\sqrt{\frac{p}{q}}\right)b+\left(8\sqrt{\frac{q}{p}}\right)c=\alpha\left(a+b+c\right)$$

Do đó ta cần xác định m,n,p,q sao cho $13+6\sqrt{\frac{m}{n}}=6\sqrt{\frac{n}{m}}+8\sqrt{\frac{p}{q}}=8\sqrt{\frac{q}{p}}$. Để ý đến tính "chính phương" của các biểu thức trong căn ta xác định được $m=1;n=4;p=1;q=4$.

Ta có lời giải chi tiết cho bài toán như sau:

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$13a+12\sqrt{ab}+16\sqrt{bc}=13a+6\sqrt{a.4b}+8\sqrt{b.4c}$$

$$\le 13a+6.\frac{a+4b}{2}+8.\frac{b+4c}{2}=16(a+b+c)$$

$\Rightarrow 13a+12\sqrt{ab}+16\sqrt{bc}\le 16(a+b+c)$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a=4b=16c$.

Suy ra $P\ge \dfrac{3}{2(a+b+c)}-\dfrac{3}{\sqrt{a+b+c}}$.

Đặt $t=a+b+c,\ t>0$. Khi đó ta có: $P\ge \dfrac{3}{2t}-\dfrac{3}{\sqrt{t}}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{3}{2t}-\dfrac{3}{\sqrt{t}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\dfrac{3}{2t\sqrt{t}}-\dfrac{3}{2t^2}$.

$$f'(t)=0\Leftrightarrow \frac{3}{2t\sqrt{t}}-\frac{3}{2t^2}=0\Leftrightarrow t=1;\ \lim_{x\to 0^+} f(t)=+\infty\ ;\ \lim_{x\to+\infty} f(t)=0$$

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	↘	$-\dfrac{3}{2}$	↗	0

Vậy ta có $P\ge -\dfrac{3}{2}$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ a=4b=16c \end{cases} \Leftrightarrow a=\dfrac{16}{21};b=\dfrac{4}{21};c=\dfrac{1}{21}$.

Kết luận. $MinS=-\dfrac{3}{2}$ khi và chỉ khi $(a,b,c)=\left(\dfrac{16}{21},\dfrac{4}{21},\dfrac{1}{21}\right)$.

Bài 2. Cho *a, b, c là* các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$$

Phân tích tìm lời giải

❖ Đây là một bài toán về bất đẳng thức không đối xứng ba biến. Quan sát biểu thức trong P ta dự đoán ẩn phụ $t=a+b+c$.

❖ Chú ý rằng Bài toán tìm **giá trị lớn nhất** của biểu thức nên đánh giá P theo chiều "$\le$". Từ đó suy ra cần đánh giá biểu thức $a^2+b^2+c^2+2^2$ theo chiều "$\ge$". Điều này có được nhờ bất đẳng thức Cauchy-Schwarzt . Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarzt ta có

$$a^2+b^2+c^2+2^2=\frac{a^2}{1}+\frac{b^2}{1}+\frac{c^2}{1}+\frac{2^2}{1}\ge\frac{(a+b+c+2)^2}{4}$$

❖ Biểu thức $(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}$ cần có đánh giá chiều "$\le$" (vì phía trước có dấu "$-$"). Quan sát biểu thức trong dấu căn $(a+2c)(b+2c)$ nếu đánh giá từ tích sang tổng sẽ nhận được $a+b+4c$. Như vậy chúng ta cần thêm $3(a+b)$ nữa mới đảm bảo có nhân tử $(a+b+c)$, trong khi đó biểu thức ngoài dấu căn chỉ có $1.(a+b)$. Do đó ta cần nhân thêm hằng số 3 vào trước biểu thức. Ta có đánh giá quan trọng như sau:

$$3(a+b).\sqrt{(a+2c)(b+2c)} \le (3a+3b).\left(\frac{a+b+4c}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left[\frac{4(a+b+c)}{2}\right]^2 = 2(a+b+c)^2$$

Ta có lời giải chi tiết cho bài toán như sau:

Lời giải

Cách 1

$a+b+c+2 \le \sqrt{4(a^2+b^2+c^2+4)}$

$3(a+b).\sqrt{(a+2c)(b+2c)} \le (3a+3b).\left(\frac{a+b+4c}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left[\frac{4(a+b+c)}{2}\right]^2 = 2(a+b+c)^2$

Vậy $P \le \frac{8}{a+b+c+2} - \frac{27}{2(a+b+c)^2}$. Đặt $t=a+b+c,\ t>0$; $P \le \frac{8}{t+2} - \frac{27}{2t^2} = g(t)$

$g'(t) = -\frac{8}{(t+2)^2} + \frac{27}{t^3}$; $g'(t)=0 \Leftrightarrow 27(t+2)^2 - 8t^3 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{t}=6$

t	0		6		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{5}{8}$	$\searrow$	0

$\mathrm{P} \le \mathrm{g(t)} \le \frac{5}{8}$; $\mathrm{maxP} = \frac{5}{8}$ xảy ra khi $a=b=c=2$.

Kết luận. $MaxP = \frac{5}{8}$ xảy ra khi $a=b=c=2$.

Cách 2

$$a^2+b^2+c^2+4 \ge \frac{(a+b+c)^2}{3}+4;$$

$$(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)} \le (a+b)\frac{a+b+4c}{2}$$

$$\frac{1}{6}3(a+b)2\frac{a+b+4c}{2} \le \frac{1}{6}\frac{(3a+3b+a+b+4c)^2}{4} = \frac{16(a+b+c)^2}{24}$$

$$\Rightarrow P \le \frac{4}{\sqrt{\frac{x}{3}+4}} - \frac{27}{2x} \le \frac{5}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=2$.

Kết luận. $MaxP = \frac{5}{8}$ xảy ra khi $a=b=c=2$.

Bài 3. Cho các số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2a+b+\sqrt{8bc}} - \frac{8}{\sqrt{2b^2+2(a+c)^2}+3}$$

Phân tích tìm lời giải

❖ Đây là một bài toán về bất đẳng thức không đối xứng ba biến. Quan sát biểu thức trong P chúng ta dự đoán ẩn phụ $t = a+b+c$.

❖ Chú ý rằng Bài toán tìm **giá trị nhỏ nhất** của biểu thức nên đánh giá P theo chiều $"\geq"$. Từ đó suy ra cần đánh giá biểu thức $2a+b+\sqrt{8bc}$ theo chiều $"\leq"$ và biểu thức $\sqrt{2b^2+2(a+c)^2}+3$ cần có đánh giá theo chiều $"\geq"$ (vì phía trước có dấu ."$-$".).

❖ Để đưa bài toán về ẩn phụ $t = a+b+c$ thì ta cần có đánh giá $2a+b+\sqrt{8bc} \leq \alpha(a+b+c)$. Quan sát hai vế ta suy ra được $\alpha = 2$. Do đó

$2a+b+\sqrt{8bc} = 2a+b+2\sqrt{b.2c} \leq 2a+b+b+2c = 2(a+b+c)$

❖ Đối với biểu thức $\sqrt{2b^2+2(a+c)^2}+3$, quan sát biểu thức trong dấu căn ta lưu ý đánh giá sau: $\sqrt{2b^2+2(a+c)^2}+3 = \sqrt{2\left[b^2+(a+c)^2\right]}+3 \geq \sqrt{(a+b+c)^2}+3 = a+b+c+3$. Từ đó ta có lời giải chi tiết cho bài toán như sau:

Lời giải

Ta có $2a+b+\sqrt{8bc} = 2a+b+2\sqrt{b.2c} \leq 2a+b+b+2c = 2(a+b+c)$. Suy ra $\dfrac{1}{2a+b+\sqrt{8bc}} \geq \dfrac{1}{2(a+b+c)}$.

Mặt khác $\sqrt{2(a+c)^2+2b^2} \geq (a+c)+b$. Suy ra $\dfrac{-8}{3+\sqrt{2(a+c)^2+2b^2}} \geq \dfrac{-8}{3+a+b+c}$.

Do đó $P \geq \dfrac{1}{2(a+b+c)} - \dfrac{8}{3+a+b+c}$. (1)

Đặt $a+b+c = t, t > 0$. Xét hàm số $f(t) = \dfrac{1}{2t} - \dfrac{8}{3+t}, t > 0$.

Ta có $f'(t) = -\dfrac{1}{2t^2} + \dfrac{8}{(3+t)^2} = \dfrac{3(t-1)(5t+3)}{2t^2(3+t)^2}, t > 0$. Suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq f(1) = -\dfrac{3}{2}, \forall t > 0$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $P \geq -\frac{3}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a+b+c=1 \\ b=2c \\ b=a+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c=\frac{1}{4} \\ b=\frac{1}{2}. \end{cases}$

Kết luận. $MinP = -\frac{3}{2}$, đạt được khi $a=c=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{2}$.

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $a\left(b^2+c^2\right)=b+c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)}$

Phân tích tìm lời giải

❖ Đây là một bài toán về bất đẳng thức không đối xứng ba biến, tuy nhiên ta thấy biểu thức P và giả thiết đã cho là đối xứng với hai biến $b \,\&\, c$. Từ đó ta có thể dự đoán dấu đẳng thức xảy ra sẽ có $b=c$. Sử dụng giả thiết đã cho; ta được

$b+c=a\left(b^2+c^2\right) \geq \frac{a(b+c)^2}{2} \Rightarrow a(b+c) \leq 2$. Vì vậy, ta tìm cách đánh giá biểu thức P để đưa về hai biến a và $(b+c)$.

❖ Chú ý bài toán tìm giá trị nhỏ nhất nên đánh giá biểu thức P theo chiều $"\geq"$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có đánh giá quan trọng $\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2} \geq \frac{2}{(1+b)(1+c)}$; cũng theo AM-GM ta có $(1+b)(1+c) \leq \frac{(2+b+c)^2}{4} \leq \frac{1}{4}\left(2+\frac{2}{a}\right)^2 = \frac{(1+a)^2}{a^2}$. Từ đó suy ra

$$P \geq \frac{2a^2+1}{(a+1)^2}+\frac{4a^2}{(1+a)^3}=\frac{2a^3+6a^2+a+1}{(a+1)^3}$$

Xét hàm số $f(a)=\frac{2a^3+6a^2+a+1}{(a+1)^3}; a>0$; $f'(a)=\frac{2(5a-1)}{(a+4)^2}=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{5}$

Lập bảng biến thiên; ta có $P \geq f(a) \geq f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{91}{108}$.

Kết luận. $MinP=\frac{91}{108} \Leftrightarrow a=\frac{1}{5}; b=c=5$.

Bài 5. Cho các số thực $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-2bc+ab-2ca=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{c^2}{(a+b-c)^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$

Phân tích tìm lời giải

❖ Đây là một bài toán về bất đẳng thức không đối xứng ba biến, khi quan sát biểu thức P nhiều người cảm thấy "ái ngại" bởi sự xuất hiện của biểu thức $a+b-c$. Thông thường khi làm việc với bài toán bất đẳng thức thì hầu như quen với các số không âm nhiều hơn. Tuy nhiên, để ý kỹ giả thiết bài toán ta có ngay $a^2+b^2+c^2-2bc+ab-2ca=0 \Leftrightarrow (a+b-c)^2=ab$. Do đó, ta nghĩ đến thay thế biểu thức $(a+b-c)^2$ bởi ab là một điều hết sức tự nhiên. Hơn nữa, từ đẳng thức $(a+b-c)^2=ab$ ta cũng có thể dự đoán được dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi

$a=b=c$. Khi đó $P=\frac{c^2}{ab}+\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$. Để ý đến mẫu số của số hạng cuối có xuất hiện $a+b$ nên hai số hạng đầu ta cũng nghĩ đến đánh giá như thế nào để xuất hiện $(a+b)$. Chú ý dấu $"="$ xảy ra khi $a=b=c$ nên ta cần phải phân tích

$\frac{c^2}{ab}+\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}=\frac{c^2}{2ab}+\frac{c^2}{2ab}+\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$. Áp dụng Cauchy-Schwarzt cho .

$\frac{c^2}{2ab}+\frac{c^2}{a^2+b^2}$. ta được $\frac{c^2}{2ab}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\ge\frac{4c^2}{(a+b)^2}=\left(\frac{2c}{a+b}\right)^2$. Tuy nhiên trong P lại còn dư

$\frac{c^2}{2ab}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$. Khéo léo sử dụng AM-GM ta có được kết quả như ý:

$\frac{c^2}{2ab}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}=\frac{c^2}{2ab}+\frac{ab}{\sqrt{ab}(a+b)}\ge\frac{c^2}{2ab}+\frac{2ab}{(a+b)^2}\ge 2\sqrt{\frac{c^2}{2ab}.\frac{2ab}{(a+b)^2}}=\frac{2c}{a+b}$. Tóm lại ta có đánh giá sau:

$$P=\frac{c^2}{ab}+\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}=\frac{c^2}{2ab}+\left(\frac{c^2}{2ab}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$$

$$\ge\left(\frac{2c}{a+b}\right)^2+\left(\frac{2c}{a+b}\right)=t^2+t=f(t);t=\frac{2c}{a+b}>0$$

Theo giả thiết ta có

$$(a+b-c)^2=ab\le\frac{(a+b)^2}{4}\Rightarrow\left(\frac{a+b-c}{a+b}\right)^2\le\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\left(1-\frac{c}{a+b}\right)^2\le\frac{1}{4}\Rightarrow-\frac{1}{2}\le 1-\frac{c}{a+b}\le\frac{1}{2}\Rightarrow 1\le t\le 3$$

Xét hàm số $f(t)=t^2+t;1\le t\le 3;M\inf(t)=2\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 6. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{3c}{\sqrt{1+c^2}}$

Phân tích tìm lời giải

❖ Đây là một bài toán về bất đẳng thức không đối xứng ba biến, tuy nhiên đối xứng với hai biến a,b nên ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

❖ Phân thức cuối cùng khác biệt với hai phân thức đầu nên ý tưởng của ta sẽ đánh giá hai phân thức đầu về biến c;

❖ Đây là bài toán tìm giá trị lớn nhất nên ta nghĩ đến đánh giá bất đẳng thức theo chiều $"\le"$.

❖ Trong các phân thức đầu có lũy thừa 2 và lũy thừa 0 nên cần đưa về đồng bậc 2 bằng cách sử dụng giả thiết $ab+bc+ca=1$.

❖ Lưu ý đánh giá $\sqrt{ab}+c=\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{c}\sqrt{c}\le\sqrt{(a+c)(b+c)}$

Lời giải

$$P=\frac{a}{ab+bc+ca+a^2}+\frac{b}{ab+bc+ca+b^2}+\frac{3c}{\sqrt{1+c^2}}$$

$$=\frac{a}{(a+c)(a+b)}+\frac{b}{(a+b)(b+c)}+\frac{3c}{\sqrt{1+c^2}}$$

$$=\frac{a(b+c)+b(a+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}+\frac{3c}{\sqrt{1+c^2}}=\frac{2ab+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}+\frac{3c}{\sqrt{1+c^2}}$$

$$\le\frac{\sqrt{ab}(a+b)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}+\frac{3c}{\sqrt{1+c^2}}$$

$$\le\frac{(\sqrt{ab}+c)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}+\frac{3c}{\sqrt{1+c^2}}=\frac{(\sqrt{ab}+c)}{(b+c)(c+a)}+\frac{3c}{\sqrt{1+c^2}}$$

$$\le\frac{\sqrt{(a+c)(b+c)}}{(a+c)(b+c)}+\frac{3c}{\sqrt{1+c^2}}=\frac{1}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}+\frac{3c}{\sqrt{1+c^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}+\frac{3c}{\sqrt{1+c^2}}=\frac{1+3c}{\sqrt{1+c^2}}=f(c)$$

Ta có $f'(c)=\dfrac{3-c}{(1+c^2)\sqrt{1+c^2}}; f'(c)=0\Leftrightarrow c=3$

Bảng biến thiên

c	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(c)$		$+$	0	$-$	
$f(c)$	-3	$\nearrow$	$\sqrt{10}$	$\searrow$	3

Kết luận: $MaxP=\sqrt{10}\Leftrightarrow c=3;a=b=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$.

Bài 7. Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2\le 3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{(y+2)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}$$

Phân tích tìm lời giải

❖ Đây là một bài toán về bất đẳng thức không đối xứng ba biến và cũng không đối xứng với hai biến nào cả. Do đó chúng ta chưa thể dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra khi nào. Vì vậy ta nghĩ đến phân tích giả thiết bài toán trước. Ta có

Ta có $2x+4y+2z\le(x^2+1)+(y^2+4)+(z^2+1)=x^2+y^2+z^2+6\le 3y+6$.

Suy ra $2x+y+2z\le 6$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=\dfrac{y}{2}=z=1$. Thông thường đến đây ta thấy $x;\dfrac{y}{2};z$ có vai trò như nhau nên chúng ta nghĩ đến phép đặt ẩn phụ $a=x;b=\dfrac{y}{2};c=z$. Khi đó $P=\dfrac{1}{(a+1)^2}+\dfrac{1}{(b+1)^2}+\dfrac{8}{(c+3)^2}$. Bây giờ trở lại yêu cầu bài toán là **tìm giá trị nhỏ nhất** của biểu thức nên chúng ta nghĩ đến đánh giá biểu thức P theo chiều "$\geq$". Quan sát P ta thấy ở tử số của các số hạng đều là hằng số. Vì vậy, chúng ta nghĩ đến bất đẳng thức $Cauchy-Schwarzt$ dạng cộng mẫu số.

❖ Phân thức cuối cùng khác biệt với hai phân thức đầu nên ý tưởng của ta sẽ đánh giá hai phân thức đầu về biến c.

Lời giải

Ta có $2x+4y+2z \leq (x^2+1)+(y^2+4)+(z^2+1) = x^2+y^2+z^2+6 \leq 3y+6$.

Suy ra $2x+y+2z \leq 6$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=\dfrac{y}{2}=z=1$.

Đặt $a=x; b=\dfrac{y}{2}; c=z$ ta có $a+b+c\leq 3$. Khi đó $P=\dfrac{1}{(a+1)^2}+\dfrac{1}{(b+1)^2}+\dfrac{8}{(c+3)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}\geq \frac{8}{(a+b+2)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}\geq \frac{64}{(a+b+c+5)^2}=1$$

Áp dụng (*) ta được $P=\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(\frac{y}{2}+1)^2}+\dfrac{8}{(z+3)^2} \geq \dfrac{8}{(x+1+\frac{y}{2}+1)^2}+\dfrac{8}{(z+3)^2}$

$$\geq \frac{64}{(x+\frac{y}{2}+2+z+3)^2}=\frac{64.4}{(2x+y+2z+10)^2} \geq \frac{64.4}{(6+10)^2}=1.$$

Kết luận. $MinP=1$ khi $x=1, y=2, z=1$

Bài 8. Cho ba số thực dương x,y,z thỏa điều kiện $x\geq z$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}+\sqrt{\dfrac{z}{z+x}}$

Phân tích tìm lời giải

❖ Đây là một bài toán về bất đẳng thức không đối xứng ba biến nên chưa thể dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi nào. Phân thức cuối cùng khác biệt với hai phân thức đầu nên ý tưởng của ta là sẽ đánh giá hai phân thức đầu theo phân thức thứ ba. Tuy nhiên, phân thức thứ ba vẫn còn 2 biến, nếu dồn biến thì có một cách là chia cả tử và mẫu cho z ta được $\sqrt{\dfrac{z}{z+x}}=\sqrt{\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{z}\right)}}$.

Trong hai số dạng đầu cũng có biến đổi tương tự. Ta có

$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{z}{y}\right)^2}}$. Khi đó $P=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{z}{y}\right)^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{x}{z}}}$.

Bây giờ hai số hạng đầu vẫn còn khác biệt với số hạng thứ ba. Quan sát kỹ ta thấy $\dfrac{y}{x}.\dfrac{z}{y}=\dfrac{z}{x}$.

Do đó ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức phụ sau đây để dồn biến.

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}} \text{ ; với } a,b>0,\ ab\leq 1$$

Đến đây bài toán xem như đã được giải. Ta có lời giải chi tiết cho bài toán như sau:

Lời giải

Ta có $P=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{z}{y}\right)^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{x}{z}}}$

Trước hết ta chứng minh BĐT $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}\le\dfrac{2}{\sqrt{1+ab}}$ (*) ; với $a,b>0,\ ab\le1$

Ta có $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}\le\sqrt{2\left(\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\right)}$

Mặt khác $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\le\dfrac{2}{1+ab}\Leftrightarrow(a-b)^2(ab-1)\le0$ luôn đúng với $a,b>0,\ ab\le1$

Suy ra Bất đẳng thức (*) đúng. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

Áp dụng Bất đẳng thức (*) ta có: $P\le\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{z}{x}}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{z}{x}}}$

Đạt $t=\dfrac{z}{x},\ 0<t\le1$, $P\le\dfrac{2}{\sqrt{1+t}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{t}}}=\dfrac{\sqrt{t}+2}{\sqrt{t+1}}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{\sqrt{t}+2}{\sqrt{t+1}};\ 0<t\le1,\ f'(t)=\dfrac{1-2\sqrt{t}}{2\sqrt{t}\sqrt{(t+1)^3}},\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{4}$

t	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	2	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	1

Kết luận. $MaxP=\sqrt{5}$ khi $\begin{cases}\dfrac{y}{x}=\dfrac{z}{y}\\ t=\dfrac{1}{4}=\dfrac{z}{x}\end{cases}\Leftrightarrow x=2y=4z$.

Bài 9. Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn: $5(a^2+b^2+c^2)=6(ab+bc+ca)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M=\sqrt{2(a+b+c)}-(a^2+b^2)$.

Phân tích tìm lời giải

❖ Đây là một bài toán về bất đẳng thức không đối xứng ba biến a,b,c nhưng lại đối xứng với hai biến a,b nên ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

❖ Yêu cầu bài toán tìm giá trị lớn nhất của biểu thức nên ta phải đánh giá biểu thức P theo chiều "$\le$". Do đó biểu thức (a^2+b^2) đánh giá theo chiều "$\ge$".

Lời giải

Ta có $\frac{5}{2}(a+b)^2+5c^2\le 5(a^2+b^2)+5c^2=6(ab+bc+ca)\le \frac{6}{4}(a+b)^2+6c(a+b)$

$$\Rightarrow 5c^2-6c(a+b)+(a+b)^2\le 0\Leftrightarrow \frac{a+b}{5}\le c\le a+b\Rightarrow a+b+c\le 2(a+b)$$

Khi đó : $M=\sqrt{2(a+b+c)}-(a^2+b^2)\le \sqrt{2(a+b+c)}-\frac{1}{2}(a+b)^2\le \sqrt{4(a+b)}-\frac{1}{2}(a+b)^2$

Đặt $t=\sqrt{a+b}\Rightarrow t\ge 0$ và $M\le 2t-\frac{1}{2}t^4$

Xét hàm số: $f(t)=2t-\frac{1}{2}t^4$ với $t\ge 0$, có $f'(t)=2-2t^3\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=1.$

Lập bảng biến thiên :

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Từ BBT suy ra $f(t)\le \frac{3}{2},\forall t\ge 0$, dấu "=" $t=1\Rightarrow M\le \frac{3}{2},\forall a,b,c\ge 0$

Kết luận: $M_{\max}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \begin{cases} c=a+b\\ a=b\\ a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\frac{1}{2}\\ c=1\end{cases}$

Bài 10. Cho x,y là các số thực dương, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+y^2)}}-\frac{2x}{(x+y)^2+(xy+1)(x+y)}$$

Lời giải

$$P=\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2y^2+x^2+y^2}}-\frac{2x}{(xy+x+y+1)(x+y)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}-\frac{2}{(x+1)(y+1)(1+\frac{y}{x})}$$

Đặt $z=\frac{y}{x}$ ta có $P=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}-\frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $x^2+y^2+z^2+1\ge \frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(z+1)^2\ge \frac{1}{4}(x+y+z+1)^2$

$$(x+1)(y+1)(z+1)\le \left(\frac{x+y+z+3}{3}\right)^3$$

Suy ra $P\le \frac{2}{x+y+z+1}-\frac{54}{(x+y+z+3)^3}$.Đặt $t=x+y+z+1>1$ ta có : $P\le \frac{2}{t}-\frac{54}{(t+2)^3}$

Xét hàm $f(t)=\frac{2}{t}-\frac{54}{(t+2)^3}$ trên $(1;+\infty)$ ta có : $f'(t)=-\frac{2}{t^2}+\frac{162}{(t+2)^4}; f'(t)=0\Leftrightarrow t=1;t=4$

Lập bảng biến thiên ta có $\underset{t\in(1;+\infty)}{\mathrm{Max}} f(t)=f(4)=\frac{1}{4}$.

Kết luận. $MaxP = \frac{1}{4}$ khi $x = y = 1$.

Bài 11. Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} - \frac{x^3y^3 + y^3z^3}{24x^3z^3}$

Phân tích tìm lời giải

❖ Đây là một bài toán về bất đẳng thức không đối xứng ba biến, tuy nhiên đối xứng với hai biến x, y nên ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

❖ Đây là bài toán tìm giá trị lớn nhất nên ta nghĩ đến đánh giá bất đẳng thức theo chiều $"\leq"$. Lưu phân thức cuối đồng bậc 1 nên ta có thể đồng bậc hóa hai phân thức đầu về bậc 1 bằng cách thay số 1 từ giải thiết. và hai phân thức đầu đánh giá theo chiều $"\leq"$ còn phân thức thứ ba đánh giá theo chiều $"\geq"$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} = \frac{xy}{\left(z^2+x^2\right)+\left(z^2+y^2\right)} + \frac{yz}{\left(x^2+y^2\right)+\left(x^2+z^2\right)}$$

$$\leq \frac{xy}{2\sqrt{\left(z^2+x^2\right)\left(z^2+y^2\right)}} + \frac{yz}{2\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+z^2\right)}} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{z^2+x^2} + \frac{y^2}{z^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{z^2}{x^2+z^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{y^2}{z^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}\right) \leq \frac{1}{4}\left(1 + \frac{y^2}{2yz} + \frac{y^2}{2xy}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{y}{2z} + \frac{y}{2x}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x}\right).$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarzt, ta có $x^3y^3 + y^3z^3 \geq \frac{1}{4}(xy+yz)^3$ nên

$$\frac{x^3y^3 + y^3z^3}{z^3x^3} \geq \frac{(xy+yz)^3}{4z^3x^3} = \frac{1}{4}\left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x}\right)^3.$$

Suy ra $P \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x}\right) - \frac{1}{96}\left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x}\right)^3$.

Đặt $t = \frac{y}{z} + \frac{y}{x}$, khi đó $t > 0$ và $P \leq -\frac{1}{96}t^3 + \frac{1}{8}t + \frac{1}{4}$.

Xét hàm số $f(t) = -\frac{1}{96}t^3 + \frac{1}{8}t + \frac{1}{4}$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = -\frac{1}{32}t^2 + \frac{1}{8}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$, vì $t > 0$.

Suy ra bảng biến thiên

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0		
$f(t)$		↗	$\frac{5}{12}$	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P \le \frac{5}{12}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 2$ hay $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Kết luận. $MaxP = \frac{5}{12}$, đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 12. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x^3 + y^3 + z\left(x^2 + y^2\right) = 3xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{2z}{x+y}$

Phân tích tìm lời giải

❖ Đây là một bài toán về bất đẳng thức không đối xứng ba biến, tuy nhiên đối xứng với hai biến x, y nên ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

❖ Đây là bài toán tìm giá trị nhỏ nhất nên ta nghĩ đến đánh giá bất đẳng thức theo chiều $"\ge"$. Lưu phân thức thứ ba khác biệt so với hai phân thức đầu nên ta nghĩ đến đánh giá hai phân thức đầu theo phân thức cuối. Lưu ý đến bất đẳng thức $Cauchy - Schwarzt$ dạng cộng mẫu số. Ta có lời giải chi tiết cho bài toán như sau:

Lời giải

Áp dụng Bất đẳng thức AM-GM và Bất đẳng thức $Cauchy - Schwarzt$ ta có

$$3z.\frac{(x+y)^2}{4} \ge 3z.(xy) = x^3 + y^3 + z\left(x^2 + y^2\right) \ge \frac{(x+y)^3}{4} + z.\frac{(x+y)^2}{2}$$

$$\Rightarrow z.\frac{(x+y)^2}{4} \ge \frac{(x+y)^3}{4} \Rightarrow z \ge x + y \Rightarrow \frac{2z}{x+y} \ge 2$$

Ta có

$$P \ge \frac{(x+y)^2}{2xy + z(x+y)} + \frac{2z}{x+y} \ge \frac{(x+y)^2}{\frac{(x+y)^2}{2} + z(x+y)} + \frac{2z}{x+y}$$

$$\ge \frac{2(x+y)}{x+y+2z} + \frac{2z}{x+y} = 2.\frac{1}{1+\frac{2z}{x+y}} + \frac{2z}{x+y}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y; z = x + y$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2}{1+t} + t;\quad t \ge 2$ ta có

$f'(t) = -\frac{2}{(t+1)^2} + 1 \ge 0, \forall t \ge 2$, do đó $f(t)$ là hàm đồng biến khi $t \ge 2$. Vậy

$Min f(t) = f(2) = \frac{8}{3}$ khi $t = 2$ hay $MinP = \frac{8}{3}$ khi $x = y; z = 2x = 2y$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 13. Cho ba số thực $a, b, c \in [1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4(ab+bc+ca)}$.

Bài 14. Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{2c}{2(a+b)+c} \ge \frac{4}{3}$

Bài 15. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2+2xy=3(x+y+z)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z+\frac{23}{\sqrt{x+z}}+\frac{23}{\sqrt{y+2}}$.

Bài 16. Cho a,b,c là ba số dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{9}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}}-\frac{16}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}$$

Bài 17. Cho a,b,c là ba số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{6\sqrt{ab}+7c+8\sqrt{ca}}-\frac{1}{9\sqrt{a+b+c}}$$

Bài 18. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2\le 2(y+1)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{2xy}+\sqrt{2yz}+\frac{1}{x+y+z+1}.$$

Bài 19. Cho a,b,c là ba số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{5}{\sqrt{a^2+2b^2+5c^2+3}+1}-\frac{4}{ab+bc+ca+1}$$

Bài 20. Cho $a,b,c>0$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}-\frac{1}{\sqrt{a+b+c}}$

Bài 21. Cho $a\ge b; a\ge c\ \&\ a,b,c\in[1;4]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{2a+3b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$$

HD: Khảo sát lần lượt các biến c,b,a.

Bài 22. Cho $x,y,z>0: x+y+z=1$. Tìm $Max\ P=\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}-\frac{1}{z+1}$

Bài 23. Cho a,b,c dương thỏa $a^2+b^2+c^2+2ab=3(a+b+c)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=6(a+b)+c^2+\frac{2014}{\sqrt{a+c}}+\frac{2014}{\sqrt{b+2}}$.

Bài 24. Cho a,b,c dương thỏa $a^2+b^2+c^2+2ab\le 2(a+b+c)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+2c+\frac{40}{\sqrt{b+c+1}}+\frac{40}{\sqrt{a+3}}$.

Bài 25. Cho $x;y;z>0$ thoả mãn $xy\ge 1; z\ge 1$. Tìm $Min\,P=\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}+\frac{z^3+2}{3(xy+1)}$

HD: $P\ge\frac{(x+y)^2}{2xy+x+y}+\frac{1}{xy+1}$

Bài 26. Cho $x,y,z>0.$ Tìm Min $P=\frac{y+2x^2}{2x+1}+\frac{z+2y^2}{2y+1}+\frac{x+2z^2}{2z+1}+\frac{8}{x+y+z}$

Bài 27. Cho các số thực dương x,y,z thoả điều kiện $x^4+(y^2-1)^2+z^4\le 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{2}y(x+z)+\frac{1}{x^2+y^2+z^2+1}$.

Bài 28. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=5(a+b+c)-2ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=a+b+c+48\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{a+10}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{b+c}}\right)$.

Bài 29. Cho các số thực $x,y,z\in[1;3]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{25(y+z)^2}{12x^2+2012(xy+yz+zx)}$$

Bài 30. Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+2bc+3ca=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(a+b)(b+c)(c+a)+4a+b+c$

Bài 31. Cho 2 số thực a, b $\in(0;1)$ thỏa mãn $(a^3+b^3)(a+b)-ab(a-1)(b-1)=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau F = $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+ab-(a+b)^2$.

Bài 32. Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $x^4+y^4+\dfrac{1}{xy}=xy+2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{2}{1+y^2}-\dfrac{3}{1+2xy}$.

Bài 33. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc}+\frac{b^2}{(c+a)^2+5ca}-\frac{3}{4}(a+b)^2$$

Bài 34. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt[3]{abc}}+\dfrac{1}{a+2b}+\dfrac{1}{b+2c}+\dfrac{1}{c+2a}$.

Bài 35. Cho các số thực dương $a,b\in\left[\dfrac{1}{4};1\right]$. Tìm GTNN của $P=\dfrac{1}{2+3a}+\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+1}$

Bài 36. Cho $a,b,c>0$ thoả mãn điều kiện $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{2c^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Bài 37. Cho ba số thực dương a,b,c. Tìm Min $P=\dfrac{b^3}{a(b^2+c^2)}+\dfrac{ca^2}{b(a^2+b^2)}+\dfrac{ca}{(a+c)^2}-\dfrac{6\sqrt{ca}}{c+a}$

HD: $P=\dfrac{b}{a\left(1+\dfrac{c^2}{b^2}\right)}+\dfrac{c}{b\left(1+\dfrac{b^2}{a^2}\right)}+\dfrac{5\dfrac{a}{c}}{\left(1+\dfrac{a}{c}\right)^2}-\dfrac{6\sqrt{\dfrac{a}{c}}}{1+\dfrac{a}{c}}$. Đặt $x=\dfrac{b}{a};y=\dfrac{c}{b};z=\dfrac{a}{c}\rightarrow xyz=1$ Khi đó

$$P=\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+x^2}+\frac{5z}{(1+z)^2}-\frac{6\sqrt{z}}{1+z}\geq\frac{(x+y)^2}{(x+y+xy)(x+y)}+\frac{5z}{(1+z)^2}-\frac{6\sqrt{z}}{1+z}$$

$$=\frac{x+y}{1+xy}+\frac{5z}{(1+z)^2}-\frac{6\sqrt{z}}{1+z}\geq\frac{2\sqrt{xy}}{1+xy}+\frac{5z}{(1+z)^2}-\frac{6\sqrt{z}}{1+z}$$

$$=\frac{2\sqrt{\frac{1}{z}}}{1+\frac{1}{z}}+\frac{5z}{(1+z)^2}-\frac{6\sqrt{z}}{1+z}=\frac{5z}{(1+z)^2}-\frac{4\sqrt{z}}{1+z}$$

Bài 38. **<u>Ví dụ 1</u>** ***(Đề dự bị kỳ thi THPT Quốc gia 2015, sử dụng cho 29 thí sinh gặp sự cố tại Đà lạt)***

Cho các số thực a,b thỏa mãn $a,b\in\left[\frac{1}{2};1\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=a^5b+ab^5+\frac{6}{a^2+b^2}-3(a+b)$$

<u>Nhận xét</u>

Trong bài toán này phép đặt ẩn phụ phù hợp nhất sẽ là $t=a+b$.

Vì $a,b\in\left[\frac{1}{2};1\right]\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\leq a\leq 1\\ \frac{1}{2}\leq b\leq 1\end{cases}\Rightarrow 1\leq a+b\leq 2.$ Do đó điều kiện của ẩn phụ t là $t\in[1;2]$.

Bằng một số đánh giá ta thu được $P\geq f(t)=\frac{1}{8}(t-1)t^4+\frac{6}{t^2-2(t-1)}-3t$

Công việc còn lại chỉ là khảo sát hàm số $f(t)=\frac{1}{8}(t-1)t^4+\frac{6}{t^2-2(t-1)}-3t$, $t\in[1;2]$.

Bài 39. Cho các số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $5(x^2+y^2+z^2)=9(xy+2yz+zx)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{y^2+z^2}-\dfrac{1}{(x+y+z)^3}$.

<u>Phân tích bài toán:</u>

❖ Chiều đánh giá của bài toán là: $P\leq f(t)$.

❖ Xác định ẩn phụ:

Bí mật của bài toán chính là đánh giá $P\leq\dfrac{2(y+z)}{\frac{1}{2}(y+z)^2}-\dfrac{1}{(2(y+z)+y+z)^3}=\dfrac{4}{y+z}-\dfrac{1}{27(y+z)^3}$

Do đó ta có ẩn phụ cho bài toán là: $t=y+z>0$.

<u>Trình bày lời giải chi tiết:</u>

Theo giả thiết ta có:

$$5(x^2+y^2+z^2)=9(xy+2yz+zx)\Leftrightarrow 5(x+y+z)^2=9(xy+2yz+zx)+10(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow 5(x+y+z)^2=19x(y+z)+28yz\leq 19x(y+z)+7(y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{x}{y+z}+1\right)\leq\frac{19x}{y+z}+7\Leftrightarrow\frac{x}{y+z}\leq 2\Leftrightarrow x\leq 2(y+z)$$

Mặt khác ta có $(y+z)^2\leq 2(y^2+z^2)\Leftrightarrow y^2+z^2\geq\frac{1}{2}(y+z)^2$

Vì vậy $P \le \dfrac{2(y+z)}{\frac{1}{2}(y+z)^2} - \dfrac{1}{{2(y+z)+y+z}^{\;3}} = \dfrac{4}{y+z} - \dfrac{1}{27(y+z)^3}$

Đặt $t = y + z > 0 \Rightarrow P \le \dfrac{4}{t} - \dfrac{1}{27t^3} = -\dfrac{(6t-1)^2(2t+1)}{27t^3} + 16 \le 16$

Vậy $\min P = 16$; dấu bằng đạt tại $\begin{cases} x = 2(y+z) \\ y = z \\ y + z = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = z = \dfrac{1}{12} \end{cases}$

BẤT ĐẲNG THỨC-LÊ HOÀNH PHÒ

Bài 1. Cho các số thực *x*, *y* thỏa mãn $(x+y)^3+4xy\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=3\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)-2\left(x^2+y^2\right)+1.$

Hướng dẫn giải

Kết hợp $(x+y)^3+4xy\ge 2$ với $(x+y)^2\ge 4xy$ suy ra:

$$(x+y)^3+(x+y)^2\ge 2\Rightarrow x+y\ge 1.$$

$$A=3\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)-2\left(x^2+y^2\right)+1$$

$$=\frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)^2+\frac{3}{2}\left(x^4+y^4\right)-2\left(x^2+y^2\right)+1$$

$$\ge\frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)^2+\frac{3}{4}\left(x^2+y^2\right)^2-2\left(x^2+y^2\right)+1$$

$\Rightarrow A\ge\frac{9}{4}\left(x^2+y^2\right)^2-2\left(x^2+y^2\right)+1$. Đặt $t=x^2+y^2$, ta có

$x^2+y^2\ge\frac{(x+y)^2}{2}\ge\frac{1}{2}\Rightarrow t\ge\frac{1}{2}$, do đó $A\ge\frac{9}{4}t^2-2t+1$

Xét $f(t)=\frac{9}{4}t^2-2t+1;\ f'(t)=\frac{9}{2}t-2>0$ với mọi $t\ge\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \min\limits_{t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)} f(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{16}$. Do đó $A\ge\frac{9}{16}$ dấu = xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của *A* bằng $\frac{9}{16}$.

Bài 2. Cho $x>0$ và *y* tùy ý. Tìm GTLN, GTNN của

$$M=\frac{xy^2}{\left(x^2+3y^2\right)\left(x+\sqrt{x^2+12y^2}\right)}$$

Hướng dẫn giải

Xét $y=0$ thì $M=0$. Xét $y\ne 0$ thì:

$$M=\frac{xy^2\left(\sqrt{x^2+12y^2}-x\right)}{\left(x^2+3y^2\right).12y^2}=\frac{\sqrt{1+\frac{12y^2}{x^2}}-1}{3\left(4+\frac{12y^2}{x^2}\right)}$$

Đặt $t=\frac{12y^2}{x^2}, t>0$ thì $M=f(t)=\frac{\sqrt{1+t}-1}{3(t+4)}$

Ta có $f'(t)=\dfrac{2-t+2\sqrt{1+t}}{6(t+4)^2.\sqrt{1+t}}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=8$.

BBT

x	0		1		$+\infty$
f'		+	0	+	
f	0	$\nearrow$	1/18	$\searrow$	0

Do đó: $0<M\le\dfrac{1}{18}$. Kết hợp thì $0\le M\le\dfrac{1}{18}$.

Vậy $\max M=\dfrac{1}{18}$ khi $2x^2=3y^2$, $\min M=0$ khi $y=0$.

Bài 3. Cho các số thực *x, y, z* không âm thỏa mãn điều kiện: $x^3+y^3+z^3=2+3xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+2y^2+3z^2$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết $x^3+y^3+z^3=2+3xyz$

$\Leftrightarrow(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)=2$

$\Leftrightarrow(x+y+z)\left[\dfrac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)-\dfrac{1}{2}(x+y+z)^2\right]=2$

Đặt $t=x+y+z$. Khi đó $t>0$ và $x^2+y^2+z^2=\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{4}{3t}$

Xét hàm $f(t)=\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{4}{3t}$ trên $(0;+\infty)$

Ta có $f'(t)=\dfrac{2}{3}t-\dfrac{4}{3t^2}=\dfrac{2\left(t^3-2\right)4}{3t^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\sqrt[3]{2}$

Lập BBT thì $\min\limits_{t\in(0;+\infty)} f(t)=f\left(\sqrt[3]{2}\right)=\sqrt[3]{4}$, đạt được khi $t=\sqrt[3]{2}$

Ta có $P\ge x^2+y^2+z^2\ge\sqrt[3]{4}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\sqrt[3]{2}, y=z=0$.

Vậy $\min P=\sqrt[3]{4}$, đạt được khi $x=\sqrt[3]{2}, y=z=0$.

Bài 4. Cho các số thực *x, y* thỏa mãn điều kiện: $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x\ge y\ge 1$. Suy ra $x+y\ge 0$.

Áp dụng bất đẳng thức $(au+bv)^2 \le (a^2+b^2)(u^2+v^2)$ ta có:

$$(x+y)^2 = \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}\right)^2 = \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}.\sqrt{y+1}\right)^2 \le 3(x+y)$$

Suy ra $0 \le x+y \le 3$. Đặt $t = x+y$ thì $t \in [0;3]$

$$P = (x+y)^2 + 2(x+y) + 8\sqrt{4-(x+y)} + 2 = t^2 + 2t + 8\sqrt{4-t} + 2$$

Xét hàm $f(t) = t^2 + 2t + 8\sqrt{4-t} + 2$ trên $[0;3]$

$$f'(t) = 2t + 2 - \frac{4}{\sqrt{4-t}};\ f''(t) = 2 - \frac{2}{\left(\sqrt{4-t}\right)^3} > 0 \text{ với mọi } t \in [0;3]$$

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $[0;3]$

Do đó $f'(t) > f'(0) = 0$ với mọi $t \in [0;3]$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0;3]$

Vậy $\max P = \max\limits_{[0;3]} f(t) = f(3) = 25$, đạt khi $t = 3 \Leftrightarrow x = 2, y = 1$

$\min P = \min\limits_{[0;3]} f(t) = f(0) = 18$, đạt khi $t = 0 \Leftrightarrow x = 1, y = 1$

Bài 5. Cho các số thực *x, y, z* không âm thỏa mãn: $x\sqrt{2-y^2} + y\sqrt{2-x^2} = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x+y)^3 + 12(x+y) - 12xy - 12 + \sqrt{xy}$

Hướng dẫn giải

Ta có $(a-b)^2 \ge 0 \Rightarrow ab \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$ với mọi *a, b*. Áp dụng:

$$x\sqrt{2-y^2} \le \frac{x^2+2-y^2}{2},\ y\sqrt{2-x^2} \le \frac{y^2+2-x^2}{2}$$

Suy ra $2 = x\sqrt{2-y^2} + y\sqrt{2-x^2} \le 2$.

Do đó dấu đẳng thức xảy ra nên $x = \sqrt{2-y^2}$ và $y = \sqrt{2-x^2}$.

Suy ra $x, y \ge 0$ và $x^2 + y^2 = 2$

Đặt $t = x+y$. Khi đó $0 \le t \le \sqrt{2(x^2+y^2)} = 2$

Đặt $t = x+y$. Khi đó $t \le \sqrt{2(x^2+y^2)} = 2$

Mặt khác $t^2 = (x+y)^2 \ge x^2 + y^2 = 2$. Suy ra $t \ge \sqrt{2}$

Do đó $t \in \left[\sqrt{2};2\right]$. Ta có $xy = \dfrac{(x+y)^2 - (x^2+y^2)}{2} = \dfrac{t^2}{2} - 1$

Suy ra $P=(x+y)^3+12(x+y)-12xy-12+\sqrt{xy}$

$$=(x+y)^3+12(x+y)-12\left(\frac{t^2}{2}-1\right)-12+\sqrt{\frac{t^2}{2}-1}$$

$$=t^3-6t^2+12t+\sqrt{\frac{t^2}{2}-1}$$

Xét hàm $f(t)=t^3-6t^2+12t+\sqrt{\frac{t^2}{2}-1}$ trên $\left[\sqrt{2};2\right]$. Ta có:

$f'(t)=3t^2-12t+12+\dfrac{t}{2\sqrt{\left(\frac{t^2}{2}-1\right)^3}}>0$, với mọi $t\in\left[\sqrt{2};2\right]$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{2};2\right]$

Vậy $\max\limits_{\left[\sqrt{2};2\right]} f(t)=f(2)=9$; $\min\limits_{\left[\sqrt{2};2\right]} f(t)=f\left(\sqrt{2}\right)=14\sqrt{2}-12$.

Bài 6. Cho các số thực dương *a, b, c*. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{9}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}}-\frac{16}{\sqrt{1+a^2+b^2+c^2}}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $1+a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{2}(1+a)^2+\frac{1}{2}(b+c)^2\ge\frac{1}{4}(1+a+b+c)^2$

Suy ra: $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2+c^2}}\le\dfrac{2}{1+a+b+c}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}\le\frac{a+b}{2}.\frac{a+2c+b+2c}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(a+b)(a+b+4c)=\frac{1}{12}.3(a+b)(a+b+4c)$$

$$\le\frac{1}{12}\frac{\left[3(a+b)+(a+b+4c)\right]^2}{4}=\frac{(a+b+c)^2}{3}$$

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}}\ge\dfrac{3}{(a+b+c)^2}$

nên $P\ge\dfrac{27}{(a+b+c)^2}-\dfrac{32}{1+a+b+c}$

Đặt $t=a+b+c$ thì $t>0$ và $P\ge\dfrac{27}{t^2}-\dfrac{32}{t+1}$

Xét hàm $f(t)=\frac{27}{t^2}-\frac{32}{t+1}$ trên $(0;+\infty)$, $f'(t)=-\frac{54}{t^3}+\frac{32}{(t+1)^2}$

$f'(t)=0\Leftrightarrow (t-3)(16t^2+21t+9)=0\Leftrightarrow t=3$.

Lập BBT thì $\min\limits_{(0;+\infty)} f(t)=f(3)=-5$

Do đó $P\ge -5$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -5, đạt khi $a=b=c=1$.

Bài 7. Cho các số thực không âm *a, b, c* thỏa mãn điều kiện: $3(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca=12$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}+ab+bc+ca$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết *a, b, c* không âm thỏa mãn:

$3(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca=12$ ta có $a+b+c=\sqrt{24-5(a^2+b^2+c^2)}$

Và $12\ge 3(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow a^2+b^2+c^2\le 4$

$12\le 3(a^2+b^2+c^2)+a^2+b^2+c^2\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge 3$

Suy ra $a^2+b^2+c^2\in[3;4]$

Đặt $t=\sqrt{24-5(a^2+b^2+c^2)}$ thì $t\in[2;3]$

Do đó $P=\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{24-5(a^2+b^2+c^2)}}+12-3(a^2+b^2+c^2)$

$$=\frac{\frac{1}{5}(24-t^2)}{t}+12-3\frac{24-t^2}{5}=\frac{1}{5}\left(3t^2-t+\frac{24}{t}\right)-\frac{12}{5}$$

Xét hàm $f(t)=3t^2-t+\frac{24}{t}$ trên $[2;3]$.

$$f'(t)=6t-1-\frac{24}{t^2}=(t-1)+\left(5t-\frac{24}{t^2}\right)>0 \text{ với mọi } t\in[2;3]$$

nên *f* đồng biến trên đoạn $[2;3]$.

Do đó $\max\limits_{[2;3]} f(t)=f(3)=32; \min\limits_{[2;3]} f(t)=f(2)=22$ nên $2\le P\le 4$.

Vậy $\max P=4$, đạt khi $a=b=c=1$.

$\text{Min } P=2$, đạt khi $a=2, b=c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 8. Cho các số thực dương *x, y, z* thỏa mãn điều kiện:

$4(x+y+z)=3xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{2+x+yz}+\frac{1}{2+y+zx}+\frac{1}{2+z+xy}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $3xyz=4(x+y+z)\geq 4.3\sqrt{xyz}$ nên $xyz\geq 8$

Và: $2+x+yz\geq 2\sqrt{2\sqrt{2x}}+yz\geq 2\sqrt{2\sqrt{2x}.yz}=2\sqrt{2\sqrt{2xyz}.\sqrt{yz}}\geq 4\sqrt{2}.\sqrt[4]{yz}$

Suy ra $\frac{1}{2+x+yz}\leq\frac{1}{4\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt[4]{yz}}\leq\frac{1}{4}.\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)$

$$\leq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{yz}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{yz}\right)$$

Tương tự: $\frac{1}{2+x+yz}\leq\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{zx}\right),\frac{1}{2+x+yz}\leq\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{xy}\right)$

Do đó $P\leq\frac{1}{8}\left(\frac{9}{4}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{8}$

Vậy $\max P=\frac{3}{8}$, khi $x=y=z=2$.

Bài 9. Cho các số thực dương *a, b, c* thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$$

Ta có $(a+c)(b+c)=4c^2\Leftrightarrow\left(\frac{a}{c}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)=4$

Đặt $x=\frac{a}{c};y=\frac{b}{c}$ thì $(x+1)(y+1)=4$

$\Leftrightarrow S+P=3\Leftrightarrow P=3-S$. Do đó

$$P=32\left[\left(\frac{x}{y+3}\right)^3+\left(\frac{y}{x+3}\right)^3\right]-\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\geq 8\left(\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}\right)^3-\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=8\left[\frac{S^2+3S-2P}{3S+P+9}\right]^3-\frac{S}{\sqrt{2}}=8\left[\frac{S^2+3S-2(3-S)}{3S+(3-S)+9}\right]^3-\frac{S}{\sqrt{2}}$$

$$=8\left(\frac{S^2+5S-6}{2S+12}\right)^3-\frac{S}{\sqrt{2}}=8\left(\frac{S-1}{2}\right)^3-\frac{S}{\sqrt{2}}$$

$$=(S-1)^3-\frac{S}{\sqrt{2}}, S\geq 2$$

$$P'=3(S-1)^2-\frac{1}{\sqrt{2}}0, \forall S\geq 2$$

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn khi $x=y=1$.

Vậy $\min P=P(2)=1-\sqrt{2}$.

Bài 10. Cho các số thực không âm *x, y* thay đổi và thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=(4x^3+3y)(4y^2+3x)+25xy$

Hướng dẫn

$$S=16x^2y^2+12(x^3+y^3)+9xy+25xy$$

$$=16x^2y^2+12\left[(x+y)^3-3xy(x+y)\right]+34xy=16x^2y^2-2xy+12$$

Đặt $t=xy$, ta được $S=16t^2-2t+12$

$$0\leq xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$$

Xét hàm $f(t)=16t^2-2t+12$ trên đoạn $\left[0;\frac{1}{4}\right]$

Kết quả $\max S=\frac{25}{2}$, $\min S=\frac{191}{16}$