

§ 3. PHƯƠNG TRÌNH LÔNG GIAC THƯỜNG GAP

Dạng toán 1. Phương trình bậc hai và bậc cao theo một hàm lượng giác

Quan sát và dùng các công thức biến đổi để đưa phương trình về cùng một hàm lượng giác (cùng sin hoặc cùng cos hoặc cùng tan hoặc cùng cot) với cùng góc giống nhau, chẳng hạn:

Dạng	Đặt ẩn phụ	Điều kiện
$a \sin^2 X + b \sin X + c = 0$	$t = \sin X$	$-1 \leq t \leq 1$
$a \cos^2 X + b \cos X + c = 0$	$t = \cos X$	$-1 \leq t \leq 1$
$a \tan^2 X + b \tan X + c = 0$	$t = \tan X$	$X \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$a \cot^2 X + b \cot X + c = 0$	$t = \cot X$	$X \neq k\pi$

Nếu đặt $t = \sin^2 X$, $\cos^2 X$ hoặc $t = |\sin X|$, $|\cos X|$ thì điều kiện là $0 \leq t \leq 1$.

Nhóm 1. Phương trình bậc hai cơ bản

1. Giải: $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.

Đặt $\sin x = t$ thì $t \in [-1; 1]$.

Phương trình trở thành $2t^2 - t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow t = 1 \text{ (nhận) hoặc } t = -\frac{1}{2} \text{ (nhận)}.$$

• Với $t = 1 \Rightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

• Với $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}.$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

➤ **Nhận xét.** Có thể trình bày nhanh như sau:

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \dots$$

2. Giải: $4 \sin^2 x + 12 \sin x - 7 = 0$.

Đáp số: $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

3. Giải: $2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$. Đáp số: $S = \{\pm\pi/3 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.	4. Giải: $\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$. Đáp số: $S = \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
5. Giải: $2 \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x - 3 = 0$. ĐS: $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.	6. Giải: $\tan^2 x + (1 - \sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} = 0$. Đáp số: $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
7. Giải: $\sqrt{3} \cot^2 x - (1 + \sqrt{3}) \cot x + 1 = 0$. Đáp số: $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.	8. Giải: $\sqrt{3} \cot^2 x + (1 - \sqrt{3}) \cot x - 1 = 0$. Đáp số: $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Nhóm 2. Sử dụng công thức $\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \end{cases}$

9. Giải: $6 \cos^2 x + 5 \sin x - 2 = 0$. Đáp số: $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{7\pi}{6} + k2\pi \right\}$.	10. Giải: $2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$. Đáp số: $S = \left\{ k2\pi; \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
11. Giải: $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$. Đáp số: $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.	12. Giải: $2 \sin^2 x + (\sqrt{3} + 4) \cos x = 2\sqrt{3} + 2$. Đáp số: $S = \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
13. Giải: $4 \sin^4 x + 12 \cos^2 x = 7$. PT $\Leftrightarrow 4(\sin^2 x)^2 + 12(1 - \sin^2 x) - 7 = 0$ Đặt $\sin^2 x = t$ thì $t \in [0;1]$ và phương trình trở thành $4t^2 - 12t + 5 = 0 \Leftrightarrow$ Đáp số: $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.	14. Giải: $3 \sin^2 x + 2 \cos^4 x - 2 = 0$. Đáp số: $S = \left\{ k\pi; \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Nhóm 3. Sử dụng công thức $\cos 2x = \begin{cases} 2\cos^2 x - 1 & (1) \\ 1 - 2\sin^2 x & (2) \end{cases}$ khi cung góc gấp đôi nhau.

15. Giải: $2\cos 2x - 8\cos x + 5 = 0$.

$$\text{PT} \Leftrightarrow 2(2\cos^2 x - 1) - 8\cos x + 5 = 0$$

$$\text{Đáp số: } S = \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

16. Giải: $\cos 2x + 5\sin x + 2 = 0$.

$$\text{PT} \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$$

$$\text{Đáp số: } S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

17. Giải: $\cos 2x + 9\cos x + 5 = 0$.

$$\text{Đáp số: } S = \left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

18. Giải: $\cos 4x + 9\sin 2x - 8 = 0$.

$$\text{PT} \Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 2x) + 9\sin 2x - 8 = 0$$

$$\text{Đáp số: } S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

19. Giải: $5\cos x - 2\sin \frac{x}{2} + 7 = 0$.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow 5\cos 2\frac{x}{2} - 2\sin \frac{x}{2} + 7 = 0$$

$$\text{Đáp số: } S = \{\pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

20. Giải: $\sin^2 x + \cos 2x + \cos x - 2 = 0$.

$$\text{Đáp số: } S = \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Nhóm 4. Vừa hạ bậc, vừa nhân đôi khi tồn tại cung góc gấp 4 lần nhau

• Hạ bậc: $\begin{cases} \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \end{cases}$	• Nhân đôi: $\begin{cases} \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \\ \cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1 \dots\dots \\ \cos 6x = 2 \cos^2 3x - 1 \end{cases}$
--	---

21. Giải: $\cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0$

Ta có: $\cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (2 \cos^2 2x - 1) + 12 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 2x - 1 - 6(1 - \cos 2x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 2x + 6 \cos 2x - 8 = 0$$

Đáp số: $S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

22. Giải: $1 + \cos 4x - 2 \sin^2 x = 0$.

Đáp số: $S = \{\pi/2 + k\pi; \pm \pi/6 + k\pi\}$.

23. Giải: $\cos 4x - 2 \cos^2 x + 1 = 0$.

Đáp số: $S = \left\{k\pi; \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

24. Giải: $8 \cos^2 x - \cos 4x = 1$.

Đáp số: $S = \left\{\pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

25. Giải: $6 \cos^2 3x + \cos 12x = 7$. Phương trình $\Leftrightarrow 6 \cos^2 3x + \cos 4.3x = 7$ $\Leftrightarrow$ Đáp số: $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.	26. Giải: $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$. PT $\Leftrightarrow 5(1 + \cos x) = 2 + (\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2$ $\Leftrightarrow$ Đáp số: $S = \left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
27. Giải: $\cos 2x - 3 \cos x = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$. PT $\Leftrightarrow (2 \cos^2 x - 1) - 3 \cos x = 4 \cdot \frac{1 + \cos x}{2}$ Đáp số: $S = \left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.	28. Giải: $\cos 2x + 2 \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$. Đáp số: $S = \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Nhóm 5. Sử dụng công thức liên quan đến tan, cot đưa về phương trình bậc hai

$$\left| \begin{array}{l} \tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\cot x} \quad \& \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} \\ \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad \& \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \end{array} \right.$$

29. Giải: $\tan x + \cot x = 2$.

ĐK: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}.$

Ta có $\tan x + \cot x = 2 \Leftrightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = 2$

$\Leftrightarrow$

Đáp số: $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

30. Giải: $2 \tan x + 3 \cot x - 3 = 0$.

Đáp số: $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi \right\}.$

31. Giải: $5 \tan x - 2 \cot x - 3 = 0$.

Đáp số: $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \arctan\left(-\frac{2}{5}\right) + k\pi \right\}.$

32. Giải: $\sqrt{3} \tan x - 6 \cot x + 2\sqrt{3} - 3 = 0$.

Đáp số: $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi; \arctan(-2) + k\pi \right\}.$

33. Giải phương trình: $\frac{3}{\cos^2 x} = 3 + 2 \tan^2 x$.

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Phương trình $\Leftrightarrow 3(1 + \tan^2 x) = 3 + 2 \tan^2 x$

$\Leftrightarrow$

Đáp số: $S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

34. Giải phương trình: $\frac{4}{\cos^2 x} + \tan x = 7$.

Đáp số: $S = \{-\pi/4 + k\pi; \arctan 3/4 + k\pi\}$.

35. Giải phương trình: $\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} = 3 \cot x + \sqrt{3}$.

36. Giải phương trình: $\frac{1}{\sin^2 x} = \cot x + 3$.

Đáp số: $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Đáp số: $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi; \operatorname{arccot}(2) + k\pi \right\}$.

37. Giải: $9 - 13 \cos x + \frac{4}{1 + \tan^2 x} = 0$. Điều kiện: $\cos x \neq 0$. Áp dụng công thức: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x$ thì phương trình trở thành: $9 - 13 \cos x + 4 \cos^2 x = 0$ Đáp số: $S = \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.	38. Giải phương trình $2 \tan^2 x + 3 = \frac{3}{\cos x}$. Đáp số: $S = \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
39. Giải: $-\frac{1}{2} \tan^2 x + \frac{2}{\cos x} - \frac{5}{2} = 0$. Đáp số: $S = \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.	40. Giải: $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$. Hướng dẫn: Chia hai vế cho $\cos x \neq 0$. Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Đáp số: $S = \left\{ k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Nhóm 6. Phương trình quy về phương trình bậc hai (dạng nâng cao)

41. $4 \cos^2(6x - 2) + 16 \cos^2(1 - 3x) = 13.$

Ta có: $4 \cos^2(6x - 2) + 16 \cos^2(1 - 3x) = 13$

$\Leftrightarrow 4 [\cos 2 \cdot (3x - 1)]^2 + 16 [\cos(3x - 1)] = 13$

$\Leftrightarrow$

42. $\cos(2x + 150^\circ) + 3 \sin(15^\circ - x) - 1 = 0.$

43. Giải: $\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 4 \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 4.$

Nhận xét: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}.$

PT $\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 4 \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right] = 4$

$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 4 \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - 4 = 0$

$\Leftrightarrow$

44. Giải: $5 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 4 \sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) - 9.$

45. $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x - \sqrt{3} \sin x + 4 = \cos x.$ Có $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x - \sqrt{3} \sin x + 4 = \cos x$ $\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x + \sqrt{3} \sin x + \cos x = 4$ Đặt $t = \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$ Vì $\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [-2; 2].$ Khi đó $t^2 = (\sqrt{3} \sin x + \cos x)^2$ $\Leftrightarrow t^2 = 3 \sin^2 x + \cos^2 x + \sqrt{3} \sin 2x$ $\Leftrightarrow t^2 = \sqrt{3} \sin 2x + (2 \sin^2 x - 1) + 2$ $\Leftrightarrow t^2 - 2 = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x.$ Phương trình trở thành $t^2 + t - 6 = 0$ $\Leftrightarrow$	46. $\sqrt{3} \sin 2x + \sqrt{3} \sin x + \cos 2x - \cos x = 2.$
47. $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x + 4 = 4(\sqrt{3} \sin x + \cos x).$	48. $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x + 2\sqrt{3} \sin x + 2 \cos x = 2.$

49. $2\left(\cos^2 x + \frac{4}{\cos^2 x}\right) + 9\left(\frac{2}{\cos x} - \cos x\right) = 1.$

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Đặt $\frac{2}{\cos x} - \cos x = t \Rightarrow \left(\frac{2}{\cos x} - \cos x\right)^2 = t^2$

$\Leftrightarrow \frac{4}{\cos^2 x} - \frac{4}{\cos x} \cdot \cos x + \cos^2 x = t^2$

$\Leftrightarrow \cos^2 x + \frac{4}{\cos^2 x} = t^2 + 4.$ Khi đó phương

trình trở thành: $2(t^2 + 4) + 9t - 1 = 0$

ĐS: $S = \{\pi + k2\pi; \pm 2\pi/3 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

51. $\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + 2 = 2\cos x + \frac{2}{\cos x}.$

Đáp số: $S = \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

50. $4\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) + 4\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right) = 7.$

ĐS: $S = \{-\pi/6 + k2\pi; 7\pi/6 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

52. $9\left(\frac{2}{\cos x} + \cos x\right) + 2\left(\cos^2 x + \frac{4}{\cos^2 x}\right) = 1.$

Đáp số: $S = \{\pm 2\pi/3 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

[illegible]

57. $3 \cos 4x - 8 \cos^6 x + 2 \cos^2 x + 3 = 0.$

58. $4 + 3 \sin x + \sin^3 x = 3 \cos^2 x + \cos^6 x.$

59. $2 \cos^2 x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right) = \cos 2x - 3.$

60. $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} - \tan x - 2\sqrt{3} = \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right).$

Ta có: $1 + \tan x \tan \frac{x}{2} = 1 + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$

$$= \frac{\cos x \cos \frac{x}{2} + \sin x \sin \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2}} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos x}$$

Đề rèn luyện về nhà số 01

Giải các phương trình lượng giác sau:

- 1) $2\cos^2 x + (\sqrt{2} - 2)\cos x - \sqrt{2} = 0.$ **ĐS:** $S = \left\{ k2\pi; \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- 2) $-2\sin^3 x + \sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$ **ĐS:** $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- 3) $6 - 4\cos^2 x - 9\sin x = 0.$ **ĐS:** $S = \left\{ \arcsin \frac{1}{4} + k2\pi; \pi - \arcsin \frac{1}{4} + k2\pi \right\}.$
- 4) $4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7$ **ĐS:** $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- 5) $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0.$ **ĐS:** $S = \left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi; \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- 6) $4\cos 2x = 5\sin x + 1.$ **ĐS:** $\left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \arcsin \frac{3}{8} + k2\pi; \pi - \arcsin \frac{3}{8} + k2\pi \right\}.$
- 7) $5\tan x - 2\cot x - 3 = 0.$ **ĐS:** $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \arctan \left(-\frac{2}{5} \right) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- 8) $1 + \cos 4x - 2\sin^2 x = 0.$ **ĐS:** $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- 9) $\sin^2 8x + 3\sin 4x \cos 4x - \frac{5}{2} = 0.$ **ĐS:** $S = \left\{ \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Đề rèn luyện về nhà số 02

Giải các phương trình lượng giác sau:

- 1) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0.$ **ĐS:** $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi \right\}.$
- 2) $3\cot^2 x + 2\sqrt{3}\cot x + 1 = 0.$ **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
- 3) $4\sin x + 3 = 2(1 - \sin x)\tan^2 x.$ **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
- 4) $\cos 2x - 4\cos x + \frac{5}{2} = 0.$ **ĐS:** $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
- 5) $-\frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{2}{\cos x} - \frac{5}{2} = 0.$ **ĐS:** $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
- 6) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}.$ **ĐS:** $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
- 7) $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \frac{x}{2}.$ **ĐS:** $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
- 8) $\sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin^2 x - \frac{1}{\sin^2 x}.$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Biên soạn và giảng dạy: Ths. Lê Văn Đoàn – 0933.755.607 – 0929.031.789 ***Trang - 85 -***

67. Giải: $\sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x = 2.$ Áp dụng công thức $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ thì phương trình đã cho trở thành: ĐS: $S = \left\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$	68. Giải: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \sqrt{3} \sin(\pi - 2x) = 1.$ Áp dụng công thức $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$ và $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ thì phương trình trở thành ĐS: $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi; k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$
69. Giải: $\sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}.$ Nhận xét: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ PT $\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}$ ĐS: $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$	70. Giải: $\sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 2.$ ĐS: $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

72. $2\sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos x + \sqrt{3} \sin x = 2\sqrt{3}$

DS: $S = \left\{ \frac{5\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

$$\underline{\text{DS}}: S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

74. $\cos 7x \cos 5x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 - \sin 7x \sin 5x.$

$$\Leftrightarrow \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{3}$$

$$\underline{\mathbf{DS}}: S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\underline{\mathbf{DS}} \ S = \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi; \ k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Nhóm 2. Dạng $\left\{ \begin{array}{l} \bullet a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\beta x + \gamma) \\ \bullet a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\beta x + \gamma) \end{array} \right., (a^2 + b^2 \neq 0)$

75. Giải: $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin \frac{\pi}{12}.$

Chia 2 vế cho $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$ phương trình trở thành $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = \sin \frac{\pi}{12}$

$\Leftrightarrow$

ĐS: $S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + k2\pi; \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

76. Giải: $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right).$

ĐS: $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

77. Giải: $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x.$

78. Giải: $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos 3x.$

Phương trình $\Leftrightarrow 2 \cos 3x = \cos x - \sqrt{3} \sin x$

ĐS: $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{4\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

ĐS: $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Nhóm 3. Dạng $a \sin(mx) + b \cos(mx) = c \sin(nx) + d \cos(nx)$

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \neq 0$$

79. $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{3} \sin x + \cos x.$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$$

ĐS: $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

80. $\sqrt{3}(\cos 2x + \sin 3x) = \sin 2x + \cos 3x.$

ĐS: $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}.$

81. $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x).$

PT $\Leftrightarrow \cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x = \sqrt{3} \cos x + \sin x$

ĐS: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$

82. $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x).$

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{7}, (k \in \mathbb{Z}).$

Đề rèn luyện về nhà số 03

Câu 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2.$

ĐS: $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

b) $\cos 7x - \sqrt{3} \sin 7x = -\sqrt{2}, \forall x \in \left(\frac{2\pi}{5}; \frac{6\pi}{7}\right).$

ĐS: $x = \frac{53\pi}{84} \vee x = \frac{5\pi}{12} \vee x = \frac{59\pi}{84}.$

c) $2 \cos 3x + \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0.$

ĐS: $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

d) $2 \sin 17x + \sqrt{3} \cos 5x + \sin 5x = 0.$

ĐS: $x = -\frac{\pi}{66} + \frac{k\pi}{11} \vee x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{6}.$

e) $(\sqrt{3} - 1) \sin x + (\sqrt{3} + 1) \cos x = 2\sqrt{2} \sin 2x.$

ĐS: $x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3}.$

f) $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x).$

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{7}.$

g) $\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x + 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}.$

ĐS: $x = \frac{5\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 2. Tìm tham số m để phương trình $m \cos 2x + (m + 1) \sin 2x = m + 2$ có nghiệm.

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2 \cos x - \sin x + 1}{2 + \sin x + \cos x}.$

Đề rèn luyện về nhà số 04

Câu 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \sqrt{3} \sin(\pi - 2x) = 1.$

ĐS: $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi.$

b) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$

ĐS: $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

c) $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x.$

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}.$

d) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cos\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) + \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

ĐS: $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$

e) $1 + \cot 2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}.$

ĐS: $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

f) $\sqrt{3} - 2 \cos^2 x (\sin 2x - \cos 2x \tan x) = \sqrt{3} \cos 2x.$

ĐS: $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

g) $4 \sin^3 x \cos 3x + 4 \cos^3 x \sin 3x + 3\sqrt{3} \cos 4x = 3.$

ĐS: $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}.$

Câu 2. Tìm tham số m để phương trình $\sin x - \sqrt{5} \cos x + 1 = m(2 + \sin x)$ có nghiệm.

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3 \cos x + 2 \sin x + 1}{2 + \sin x}.$

Dạng toán 3. Phương trình lượng giác đẳng cấp

Dạng tổng quát: $a \cdot \sin^2 X + b \cdot \sin X \cos X + c \cdot \cos^2 X = d$ (1) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Dấu hiệu nhận dạng: Đồng bậc hoặc lệch nhau hai bậc của hàm sin hoặc cosin (tan và cotan được xem là bậc 0).

Phương pháp giải:

- Bước 1.** Kiểm tra $X = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \begin{cases} \cos X = 0 \\ \sin^2 X = 1 \end{cases}$ có phải là nghiệm hay không?

- Bước 2.** Khi $X \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos X \neq 0 \\ \sin^2 X \neq 1 \end{cases}$. Chia hai vế (1) cho $\cos^2 X$:

$$(1) \Leftrightarrow a \frac{\sin^2 X}{\cos^2 X} + b \frac{\sin X \cos X}{\cos^2 X} + c \frac{\cos^2 X}{\cos^2 X} = \frac{d}{\cos^2 X}$$

$$\Leftrightarrow a \tan^2 X + b \tan X + c = d(1 + \tan^2 X)$$

- Bước 3.** Đặt $t = \tan X$ để đưa về phương trình bậc hai theo ẩn $t \Rightarrow x$.

🔗 **Lưu ý.** Giải tương tự đối với phương trình đẳng cấp bậc ba và bậc bốn.

Nhóm 1. Đẳng cấp bậc hai

83. Giải $2 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 4 \sin^2 x = 1$.

$$\text{Với } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases}$$

Phương trình trở thành $-4 = 1$: sai $\Rightarrow$ loại.

Với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, chia 2 vế cho $\cos^2 x \neq 0$

Phương trình trở thành:

$$2 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + 4 \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 4 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 2 + 4 \tan x - 4 \tan^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow 5 \tan^2 x - 4 \tan x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = -\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

84. $2 \cos^2 x - 3\sqrt{3} \sin 2x - 4 \sin^2 x = -4$.

Đáp số: $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Nhóm 2. Đăng cấp bậc ba, bậc bốn

89. Giải phương trình: $\cos x = 2 \sin^3 x$.

Với $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^3 x = 1 \end{cases}$ thì phương

trình đã cho trở thành $0 = 2.1^3$: sai.

Với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, chia 2 vế của phương trình cho $\cos^3 x \neq 0$ thì phương trình trở thành:

$$\frac{\cos x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 2 \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \tan^2 x = 2 \tan^3 x$$

$\Leftrightarrow$

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

90. Giải phương trình: $\sin x = 2 \cos^3 x$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

91. Giải: $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin x - \cos x$.

ĐS: $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

92. Giải: $7 \cos x = 4 \cos^3 x + 4 \sin 2x$.

ĐS: $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

94. $6 \sin x - 2 \cos^3 x = 5 \sin 2x \cos x.$

$$\underline{\text{DS:}} S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

96. $4 \sin^3 x + 3 \cos^3 x - 3 \sin x = \sin^2 x \cos x.$

$$\underline{\text{DS}}: S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}. \dots\dots\dots$$

98. $3 \cos^4 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x = 0.$

$$\underline{\text{DS:}} \ S = \left\{ \pm \frac{\pi}{4} + k\pi; \ -\frac{\pi}{3} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

ĐS: $S = \left\{ \pm \frac{\pi}{4} + k\pi; \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

99. $\tan x \sin^2 x - 2 \sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cos x).$

100. $\sin^2 x(\tan x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3.$

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Chia hai vế cho $\cos^2 x \neq 0$, ta được:

$$\tan x \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 3 \left[\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} \right]$$

$$\underline{\mathbf{DS}}: S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi; \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\underline{\mathbf{DS}}: S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi; \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Đề rèn luyện về nhà số 05

Câu 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $4\sqrt{3}\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 2\sin^2 x + \frac{5}{2}$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- b) $25\sin^2 x + 15\sin 2x + 9\cos^2 x = 25$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \arctan \frac{8}{15} + k\pi$.
- c) $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^2 x = 2$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.
- d) $7\cos x = 4\cos^3 x + 4\sin 2x$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$.
- e) $\cos^3 x + 2\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x = 0$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- f) $3\cos^4 x - 4\sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x = 0$. **ĐS:** $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 2. Tìm tham số m để phương trình $3\sin^2 x + m\sin 2x - 4\cos^2 x = 0$ có nghiệm.

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sin^2 x + 4\sin x \cos x - 5\cos^2 x + 2$.

Đề rèn luyện về nhà số 06

Câu 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $\sin^2 x + 2\cos^2 x = 3\sin x \cos x$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan 2 + k\pi$.
- b) $2\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \arctan(-3) + k\pi$.
- c) $\sin^2 x - 3\sin x \cos x = -1$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan \frac{1}{2} + k\pi$.
- d) $4\sin^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\sin x$. **ĐS:** $x = k\pi; x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- e) $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x \cos x$. **ĐS:** $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.
- f) $\cos^3 x + \sin x - 3\sin^2 x \cos x = 0$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi$.
- g) $4\sin^4 x + 4\cos^4 x + 5\sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x = 6$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; x = \frac{1}{2}\arctan \frac{1}{5} + \frac{k\pi}{2}$.
- h) $\sin^2 x(1 + \tan x) - 3 = 3\sin x(\cos x - \sin x)$. **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 2. Tìm m để phương trình $\sin^2 x + (2m - 2)\sin x \cos x - (1 + m)\cos^2 x = m$ có nghiệm.

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \left| \sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x + 3 \right|$.

① **Dạng 1.** $a \cdot (\sin x \pm \cos x) + b \cdot \sin x \cos x + c = 0$ (dạng tổng/hiệu - tích)

$\xrightarrow{PP}$ Đặt $t = \sin x \pm \cos x$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Rightarrow t^2 = \dots$ và viết $\sin x \cos x$ theo t .

Lưu ý, khi đặt $t = |\sin x \pm \cos x|$ thì điều kiện là: $0 \leq t \leq \sqrt{2}$.

② **Dạng 2.** $a \cdot (\tan^2 x + \cot^2 x) + b \cdot (\tan x \pm \cot x) + c = 0$

—^{PP}→ Đặt $t = \tan x \pm \cot x$, $|t| \geq 2 \Rightarrow t^2 = \dots$ và biểu diễn $\tan^2 x + \cot^2 x$ theo t và

lúc này thường sử dụng: $\tan x \cot x = 1$, $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$.

102. Giải: $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$.

$$\Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = t^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin 2x = t^2 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 - t^2.$$

Phương trình trở thành: $t + 2(1 - t^2) + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow -2t^2 + t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (N)} \\ t = 1,5 \text{ (L)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\longleftrightarrow$

DS: $x = k2\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

104. Giải: $\sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 5$.

DS: $x = k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

DS: $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

106. Giải: $\sin x \cos x = 6(\sin x - \cos x - 1)$.

$$\underline{\text{DS}}: S = \left\{ k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\underline{\text{DS:}} \ S = \left\{ \pi + k2\pi; \ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

108. Giải: $|\cos x - \sin x| + 3 \sin 2x = 1.$

Đặt $|\sin x + \cos x| = t$ thì $t \in [0; \sqrt{2}]$.

$$\text{Suy ra } |\sin x + \cos x|^2 = t^2$$

 $\Leftrightarrow$

$$\underline{\text{DS}}: S = \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\underline{\mathbf{DS}}: S = \left\{ k2\pi; \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi; -\pi + k2\pi \right\}.$$

109. Giải phương trình: $\tan^2 x + \cot^2 x - (\tan x - \cot x) - 2 = 0$.

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \sin x \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Đặt $\tan x - \cot x = t$ thì $|t| \geq \sqrt{2}$. Suy ra: $(\tan x - \cot x)^2 = t^2$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x - 2 \tan x \cot x + \cot^2 x = t^2 \Leftrightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 + 2.$$

Khi đó phương trình trở thành $t^2 + 2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$.

Với $t = 0 \Rightarrow \tan x - \cot x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Với $t = 1 \Rightarrow \tan x - \cot x = 1 \Leftrightarrow \tan x - \frac{1}{\tan x} = 1 \Leftrightarrow \tan^2 x - \tan x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \arctan\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$.

110. Giải phương trình: $3 \tan^2 x + 4 \tan x + 4 \cot x + 3 \cot^2 x + 2 = 0$.

Đáp số: $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$.

111. Giải phương trình: $\tan^2 x + \cot^2 x + 2(\tan x + \cot x) - 6 = 0$.

Đáp số: $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; -\frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

112. Giải phương trình: $2\tan^2 x + 3\tan x + 2\cot^2 x + 3\cot x + 2 = 0$.

Đáp số: $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

113. Giải phương trình: $\frac{2}{\sin^2 x} + 2 \tan^2 x + 5 \tan x + 5 \cot x + 4 = 0$.

Áp dụng công thức $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$ thì phương trình trở thành:

$$2(1 + \cot^2 x) + 2 \tan^2 x + 5(\tan x + \cot x) + 4 = 0$$

Đáp số: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

114. Giải phương trình: $\frac{1}{\cos^2 x} + \cot^2 x + \frac{5}{2}(\tan x + \cot x) + 2 = 0$.

Đáp số: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

115. Giải phương trình: $\frac{1}{\cos^2 x} + 2 \tan x + \frac{1}{\sin^2 x} + 2 \cot x - 8 = 0.$

Đáp số: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \arctan(-2 \pm \sqrt{3}) + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

116. Giải phương trình: $\tan x + \tan^2 x + \tan^3 x + \cot x + \cot^2 x + \cot^3 x = 6.$

Đáp số: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Đề rèn luyện về nhà số 07

Giải các phương trình lượng giác sau:

- 1) $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 1 = \sin x \cos x.$ **ĐS:** $x = k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- 2) $4 \sin x \cos x + 1 = \cos x - \sin x.$ **ĐS:** $x = k2\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- 3) $|\cos x - \sin x| + 6 \sin x \cos x = 1.$ **ĐS:** $x = k2\pi; \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = -\pi + k2\pi.$
- 4) $\cos x \sin x + |\cos x + \sin x| = 1.$ **ĐS:** $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$
- 5) $\tan^2 x + \cot^2 x + 2 \tan x + 2 \cot x = 6.$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = -\frac{\pi}{12} + k\pi; x = \frac{7\pi}{12} + k\pi.$
- 6) $\frac{2}{\cos^2 x} + 2 \cot^2 x + 5(\tan x + \cot x) + 4 = 0.$ **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- 7) $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin x + \cos x) - 1.$ **ĐS:** $x = k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- 8) $3(\tan x + \cot x) = 2(2 + \sin 2x).$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
- 9) $2 \sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0.$ **ĐS:** $x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Đề rèn luyện về nhà số 08

Giải các phương trình lượng giác sau:

- 1) $\sin x + \cos x + \sin x \cos x - 1 = 0.$ **ĐS:** $x = k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- 2) $5 \sin 2x + 12 = 12(\sin x - \cos x).$ **ĐS:** $x = k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- 3) $|\sin x - \cos x| + 8 \sin x \cos x = 1.$ **ĐS:** $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$
- 4) $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{3}{2}(\tan x + \cot x) = 1.$ **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- 5) $(1 + \cos x)(1 + \sin x) = 2.$ **ĐS:** $x = k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- 6) $(1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x = 1 + \sin 2x.$ **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$
- 7) $2 \cos 2x + \sin^2 x \cos x + \sin x \cos^2 x = 2(\sin x + \cos x).$ **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = k2\pi; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$
- 8) $\cos^3 x - \sin^3 x = 1.$ **ĐS:** $x = k2\pi \vee x = -\pi/2 + k2\pi.$
- 9) $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x.$ **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = k2\pi; x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi.$

Dạng toán 5. Một số dạng khác

Nhóm 1. Phương trình dạng: $m.\sin 2x + n.\cos 2x + p.\sin x + q.\cos x + r = 0$

- Ta luôn viết $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, còn: $\cos 2x = \begin{cases} = \cos^2 x - \sin^2 x & (1) \\ = 2 \cos^2 x - 1 & (2) \\ = 1 - 2 \sin^2 x & (3) \end{cases}$
- Nếu thiếu $\sin 2x$, ta sẽ biến đổi $\cos 2x$ theo (1) và lúc này thường sẽ đưa được về dạng: $A^2 = B^2 \Leftrightarrow (A - B)(A + B) = 0$.
- Nếu theo (2) được: $\sin x.(2m.\cos x + p) + \underbrace{(2n.\cos^2 x + q.\cos x + r - n)}_{(i)} = 0$ và theo (3) được: $\cos x(2m.\sin x + q) + \underbrace{(-2n.\sin^2 x + p.\sin x + r + n)}_{(ii)} = 0$. Khi đó ta sẽ phân tích (i), (ii) thành nhân tử dựa vào: $at^2 + bt + c = a(t - t_1)(t - t_2)$ với t_1, t_2 là hai nghiệm của $at^2 + bt + c = 0$ để xác định lượng nhân tử chung.

117. Giải: $\cos 2x + 3 \cos x - \sin x + 2 = 0$.

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 3 \cos x - \sin x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x + 2\frac{3}{2}\cos x + \frac{9}{4} = \sin^2 x + 2\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \frac{3}{2} = \sin x + \frac{1}{2} \\ \cos x + \frac{3}{2} = -\sin x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = -1 \\ \cos x + \sin x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

ĐS: $x = \pi/2 + k2\pi, x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

118. Giải: $5 + \cos 2x = 2 \cos x.(3 + 2 \tan x)$.

ĐS: $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

119. $3 \sin x - \cos x + 2 - \cos 2x = \sin 2x.$

Nếu sử dụng $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ thì sẽ nhóm bậc hai theo $\cos$ và ghép $\sin x$ với $\sin 2x$, có:

$$\begin{cases} -2 \cos^2 x - \cos x + 3 = (1 - \cos x)(2 \cos x + 3) \\ 3 \sin x - \sin 2x = \sin x(3 - 2 \cos x) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Không có nhân tử nên sử dụng công thức $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ và có lời giải:

Phương trình đã cho tương đương

$$3 \sin x - \cos x + 2 - (1 - 2 \sin^2 x) = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1) = \cos x + 2 \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(2 \sin x + 1) = \cos x(1 + 2 \sin x)$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin x + 1)(\sin x - \cos x + 1) = 0$$

ĐS: $\left\{ -\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{7\pi}{6} + k2\pi; k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi \right\}.$

120. $\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x = 1.$

ĐS: $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

121. $\sin 2x + 2 \cos 2x = 1 + \sin x - 4 \cos x.$

ĐS: $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

122. $2 \sin 2x - \cos 2x = 7 \sin x + 2 \cos x - 4.$

ĐS: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

124. $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x + \sqrt{3}(\sin x - 3) = 7 \cos x.$

DS: $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

126. $\sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + 3 \cos x - 2.$

DS: $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Nhóm 2: Phương trình có chứa $R(\dots, \tan X, \cot X, \sin 2X, \cos 2X, \tan 2X, \dots)$, sao cho cung của $\sin$, $\cos$ gấp đôi cung của $\tan$ hoặc $\cot$. Lúc đó đặt $t = \tan X$ và sẽ biến đổi:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sin 2X &= 2 \sin X \cos X = 2 \cdot \frac{\sin X}{\cos X} \cdot \cos^2 X = \frac{2 \tan X}{1 + \tan^2 X} = \frac{2t}{1 + t^2}. \\ \bullet \quad \cos 2X &= 2 \cos^2 X - 1 = 2 \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 X} - 1 = \frac{1 - \tan^2 X}{1 + \tan^2 X} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \\ \bullet \quad \tan 2X &= \frac{\sin 2X}{\cos 2X} = \frac{2t}{1 - t^2} \text{ và } \cot 2X = \frac{1 - t^2}{2t}. \end{aligned}$$

Từ đó thu được phương trình bậc 2 hoặc bậc cao theo t , giải ra sẽ tìm được $t \Rightarrow x$.

☞ **Lưu ý.** Trong một số trường hợp, ta có thể giải bằng cách đưa về phương trình tích số.

127. Giải $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$.

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $\tan x = t \Rightarrow \sin 2x = \frac{2t}{1 + t^2}$.

Phương trình đã cho trở thành:

$$(1 - t) \left(1 + \frac{2t}{1 + t^2} \right) = 1 + t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \end{cases}.$$

128. Giải phương trình: $\sin 2x + 2 \tan x = 3$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

129. Giải phương trình $\cos 2x + \tan x = 1$.

ĐS: $x = k\pi \vee x = \pi/4 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

130. Giải phương trình $1 + 3 \tan x = 2 \sin 2x$.

ĐS: $x = -\pi/4 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

131. Giải phương trình: $\cos x + \tan \frac{x}{2} = 1$. Điều kiện: $\cos \frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi$. Đặt $\tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Phương trình trở thành: ĐS: $x = k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.	132. Giải phương trình: $1 + \cos x = \tan \frac{x}{2}$. ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
133. Giải: $\cot x - \tan x + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$. ĐS: $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.	134. Giải $2 \tan x + \cot 2x = 2 \sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}$ ĐS: $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Nhóm 3: Áp dụng
$$\begin{cases} \tan(x+a)\tan(b-x)=1 \text{ khi } a+b=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ \cot(x+a)\cot(b-x)=1 \text{ khi } a+b=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases} \text{ hay } \tan(a\pm b)=\frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$$

135. Giải phương trình: $\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sin 3x = \sin x + \sin 2x$.

Điều kiện:
$$\begin{cases} \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \\ \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \\ x-\frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6}+k\pi \\ x \neq \frac{2\pi}{3}+k\pi \end{cases} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Có: $\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \tan\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right]\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = -1$.

Khi đó phương trình trở thành $-\sin 3x = \sin x + \sin 2x \Leftrightarrow (\sin 3x + \sin x) + \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $x = \frac{k\pi}{2}, x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

136. Giải phương trình: $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8} \cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

Đáp số: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

137. Giải phương trình: $\sin^3 x - \cos^3 x = \cos 2x \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

Đáp số: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

138. Giải phương trình: $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \cos^4 4x \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$

Đáp số: $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Nhóm 4. Đặt số đo cung phức tạp để đưa về phương trình quen thuộc

139. Giải phương trình: $\tan^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan x - 1$.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Đặt $t = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{4}$ và áp dụng công thức $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \cdot \tan b}$ thì

$$\text{phương trình trở thành } \tan^3 t = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \Leftrightarrow \tan^3 t = \frac{\tan t + 1}{1 - \tan t} - 1$$

$$\Leftrightarrow \tan^4 t - \tan^3 t + 2\tan t = 0 \Leftrightarrow \tan t \cdot (\tan^3 t - \tan^2 t + 2) = 0$$

$\Leftrightarrow$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

140. Giải phương trình: $8 \cos^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x$.

Đáp số: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Đề rèn luyện về nhà số 09

Giải các phương trình lượng giác sau:

- 1) $\sin 2x + \cos 2x = 3 \sin x + \cos x + 2.$ ĐS: $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \pi + k2\pi.$
- 2) $(1 + \tan x)(1 - \sin 2x) = 1 - \tan x.$ ĐS: $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- 3) $\frac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \cos^4 4x.$ ĐS: $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$
- 4) $\sqrt{2} \sin^3\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin x.$ ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- 5) $\frac{\sin 3x}{3} = \frac{\sin 5x}{5}.$ ĐS: $x = k\pi \vee x = \pm \arccos \frac{2}{3} + k2\pi.$
- 6) $4 \cos^2 x + 3 \tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x + 4 = 4\sqrt{3} \cos x.$ ĐS: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- 7) $\sin^2 2x + 2 \sin 2x + \frac{1}{\cos^2 x} + 2 \tan x + 1 = 0.$ ĐS: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Đề rèn luyện về nhà số 10

Giải các phương trình lượng giác sau:

- 1) $\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0.$ ĐS: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$
- 2) $2 \tan x + \cot x = 2 \sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}.$ ĐS: $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- 3) $\frac{\sin^3 x \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x}{\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{8}.$ ĐS: $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- 4) $\sin^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin x.$ ĐS: $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- 5) $2\sqrt{2} \cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3 \cos x - \sin x = 0.$ ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$
- 6) $2 \sin^2 x + 3 \tan^2 x - 6 \tan x + 4 = 2\sqrt{2} \sin x.$ ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- 7) $8 \cos 4x \cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0.$ ĐS: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$