

CHỦ ĐỀ 9: BÀI TOÁN TÌM ĐIỂM TRÊN ĐỒ THỊ

✎ Dạng 1: Tìm điểm M liên quan đến yếu tố độ dài, khoảng cách

Điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) \Rightarrow M(x_0; f(x_0))$.

▪ Khoảng cách từ điểm M đến trục Ox bằng: $d(M; Ox) = |f(x_0)|$.

▪ Khoảng cách từ điểm M đến trục Oy bằng: $d(M; Oy) = |x_0|$.

▪ Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ là: $d(M; \Delta) = \frac{|ax_0 + b.f(x_0) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

▪ Khoảng cách giữa hai điểm MN bằng $\sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}$.

Ví dụ 1: Cho hàm số: $y = \frac{x+2}{x-1}(C)$. Tìm điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -x$ bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi $M\left(a; \frac{a+2}{a-1}\right) \in (C), (a \neq 1)$.

Khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -x$ là: $d = \frac{\left|a + \frac{a+2}{a-1}\right|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |a^2 + 2| = 2|a - 1|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + 4 = 0 \\ a^2 + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow M(0; -2) \\ a = -2 \Rightarrow M(-2; 0) \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm M cần tìm là $M(0; -2)$ hoặc $M(-2; 0)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}(C)$. Gọi M là điểm nằm trên đồ thị (C) và H, K tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox và Oy . Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn tứ giác MHOK có diện tích bằng 2.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Gọi $M\left(a; \frac{2a+1}{a-1}\right) \in (C) (a \neq 1)$. Tứ giác MHOK là hình chữ nhật.

Ta có: $S_{MHOK} = MH \cdot MK = d(M; Ox) \cdot d(M; Oy)$

$$= |a| \cdot \left| \frac{2a+1}{a-1} \right| = \left| \frac{2a^2 + a}{a-1} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 + a = 2a - 2 \\ 2a^2 + a = -2a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - a + 2 = 0 \\ 2a^2 + 3a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = -2 \end{cases}$$

Vậy $M\left(\frac{1}{2}; 4\right)$ hoặc $M(-2; 1)$. **Chọn C.**

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{-x-1}{x-1}$ (C). Có bao nhiêu điểm $M \in (C)$ để khoảng cách từ M đến đường thẳng

$$\Delta: y = 2x - 1 \text{ bằng } \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

$$\text{Gọi } M\left(a; \frac{-a-1}{a-1}\right) \in (C) (a \neq 1). \text{ Ta có: } \Delta: 2x - y - 1 = 0 \Rightarrow d(M; \Delta) = \frac{\left|2a + \frac{a+1}{a-1} - 1\right|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow |2a^2 - 2a + 2| = 3|a - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 2a + 2 = 3a - 3 \\ 2a^2 - 2a + 2 = -3a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 5a + 5 = 0 \\ 2a^2 + a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = -1 \end{cases}$$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn C.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$. Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số sao cho khoảng cách từ M đến trục tung bằng 1.

A. $M(1; 0)$ hoặc $M(-1; 2)$.

B. $M(0; 1)$ hoặc $M(2; -1)$.

C. $M(1; 0)$.

D. $M(2; -1)$.

Lời giải

$$\text{Khoảng cách từ } M \text{ đến trục tung bằng } 1, \text{ suy ra } \begin{cases} x_M = 1 \Rightarrow y_M = 0 \\ x_M = -1 \Rightarrow y_M = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(1; 0) \\ M(-1; 2) \end{cases}$$

Chọn A.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) và điểm $K(1; -3)$. Biết điểm $M(x; y)$ trên (C) thỏa mãn $x_M \geq -1$ và độ dài KM nhỏ nhất. Tìm phương trình đường thẳng OM .

A. $y = 2x$.

B. $y = -x$.

C. $y = \sqrt{3}x$.

D. $y = -2x$.

Lời giải

Điểm $M(x; y) \in (C) \Rightarrow M(x; x^3 - 3x)$ với $x \geq -1$.

$$\text{Ta có } \overline{KM} = (x-1; x^3 - 3x + 3) \Rightarrow KM = \sqrt{(x-1)^2 + (x^3 - 3x + 3)^2}. \text{ Đặt } f(x) = (x-1)^2 + (x^3 - 3x + 3)^2.$$

Xét hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; +\infty)$, ta có $f'(x) = 2(x-1) + 6(x^2 - 1)(x^3 - 3x + 3); \forall x \geq -1$.

$$\text{Phương trình } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot \underbrace{[1 + 3(x+1)(x^3 - 3x + 3)]}_{g(x)} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ vì } g(x) \geq 0; \forall x \geq -1.$$

Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng 1. Dấu "=" xảy ra khi $x=1 \Rightarrow M(1;-2) \Rightarrow (OM): y=-2x$.

Chọn D.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}(C)$. Tổng khoảng cách từ một điểm M trên (C) đến hai đường tiệm cận đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $2\sqrt{3}$.

B. 2.

C. 4.

D. $4\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi điểm $M\left(a; \frac{2a-1}{a+1}\right) \in (C)$. Hai đường tiệm cận của (C) là $x=-1$ và $y=2$.

Suy ra khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng
$$\begin{cases} d_1 = d(M, x=-1) = |a+1| \\ d_2 = d(M, y=2) = \frac{3}{|a+1|} \end{cases}$$

Khi đó tổng khoảng cách sẽ bằng $d = d_1 + d_2 = |a+1| + \frac{3}{|a+1|} \geq 2\sqrt{|a+1| \cdot \frac{3}{|a+1|}} = 2\sqrt{3}$.

Chọn A.

Ví dụ 7: Tìm tất cả những điểm thuộc trục hoành cách đều hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

A. $M(-1;0)$.

B. $M(1;0)$.

C. $M(2;0)$.

D. $M(1;0)$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=2 \\ x=2 \Rightarrow y=-2 \end{cases} \Rightarrow A(0;2); B(2;-2)$. Gọi $M(t;0)$

Khi đó $MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow t^2 + 4 = (t-2)^2 + 4 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow M(1;0)$.

Chọn D.

Ví dụ 8: Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ mà khoảng cách từ M đến trục Oy bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục Ox ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Gọi $M\left(a; \frac{a+2}{a-1}\right) (a \neq 1) \in$ đồ thị hàm số đã cho.

Ta có: $d(M; Oy) = |a|; d(M; Ox) = \left| \frac{a+2}{a-1} \right|$

Theo giả thiết ta có: $\left| \frac{a+2}{a-1} \right| = 2|a| \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+2}{a-1} = 2a \\ \frac{a+2}{a-1} = -2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 3a - 2 = 0 \\ -2a^2 + a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2; a = -\frac{1}{2}$

Vậy có 2 điểm $A(2;4)$ và $B\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$. **Chọn C.**

Ví dụ 9: Tìm trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ những điểm M sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng ba lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của đồ thị.

A. $M\left(-4; \frac{7}{5}\right)$ hoặc $M(2;5)$.

B. $M(4;3)$ hoặc $M(-2;1)$.

C. $M(4;3)$ hoặc $M(2;5)$.

D. $M\left(-4; \frac{7}{5}\right)$ hoặc $M(-2;1)$.

Lời giải

Tiệm cận đứng: $x = 1$. Tiệm cận ngang $y = 2$. Gọi $M\left(a; \frac{2a+1}{a-1}\right)$

Khi đó: $d(M; TCN) = \left| \frac{2a+1}{a-1} - 2 \right| = \frac{3}{|a-1|}, d(M; TCD) = |a-1|.$

Theo bài ra ta có: $|a-1| = 3 \cdot \frac{3}{|a-1|} \Leftrightarrow (a-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \Rightarrow M(4;3) \\ a = -2 \Rightarrow M(-2;1) \end{cases}$

Chọn B.

Ví dụ 10: Giả sử đường thẳng $d: x = a, a > 0$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại một điểm duy nhất, biết khoảng cách từ điểm đó đến tiệm cận đứng của đồ thị hàm số bằng 1; ký hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0 .

A. $y_0 = -1$.

B. $y_0 = 5$.

C. $y_0 = 1$.

D. $y_0 = 2$.

Lời giải

Gọi $M\left(a; \frac{2a+1}{a-1}\right) (a > 0)$ là điểm cần tìm. TCD của đồ thị hàm số đã cho là: $x = 1$

Khi đó $d(M; x=1) = 1 \Leftrightarrow |a-1| = 1 \xrightarrow{a>0} a = 2 \Rightarrow y_0 = \frac{2a+1}{a-1} = 5.$

Chọn B.

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2} (C)$. Gọi M là điểm thuộc (C) sao cho tích khoảng cách từ điểm M đến trục Ox và đến đường tiệm cận ngang bằng 6. Tổng hoành độ các điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng

A. -1.

B. $\frac{9}{2}$.

C. 8.

D. 4.

Lời giải

Gọi $M\left(a; \frac{a+1}{a-2}\right)$ ($a \neq 2$). TCD: $x = 2$ và TCN: $y = 1$

a) Ta có: $d(M; Ox) = \left| \frac{a+1}{a-2} \right| = d_1$; $d(M; TCN: y = 1) = \left| \frac{a+1}{a-2} - 1 \right| = \frac{3}{|a-2|} = d_2$

Theo bài ra ta có: $d_1 d_2 = \left| \frac{3(a+1)}{(a-2)^2} \right| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+1}{(a-2)^2} = 2 \\ \frac{a+1}{(a-2)^2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 9a + 7 = 0 \\ 2a^2 - 7a + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow M(1; -2) \\ a = \frac{7}{2} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; 3\right) \end{cases}$

Vậy $M(1; -2)$ hoặc $M\left(\frac{7}{2}; 3\right)$ là các điểm cần tìm. **Chọn B.**

Dạng 2: Tìm 2 điểm liên quan đến yếu tố đối xứng, yếu tố khoảng cách.

☑ Tìm 2 điểm đối xứng:

Gọi $A(a; f(a))$ và $B(b; f(b))$ ($a \neq b$) là hai điểm thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$.

▪ Hai điểm A, B đối xứng qua $I(\alpha; \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2\alpha \\ f(a) + f(b) = 2\beta \end{cases}$

▪ Hai điểm A, B đối xứng qua trục tung $\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ f(a) = f(b) \end{cases}$

☑ Tìm 2 điểm A, B thuộc 2 nhánh của đồ thị sao cho độ dài AB ngắn nhất

Bài toán: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}(C)$. Tìm 2 điểm thuộc 2 nhánh của đồ thị (C) sao cho $AB_{\min}$.

Cách giải: Ta phân tích: $y = \frac{a}{c} + \frac{k}{cx+d}$ trong đó $y = \frac{-d}{c}$ là tiệm cận đứng của (C)

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ lần lượt là 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C) ta có: $x_1 < -\frac{d}{c} < x_2$

Đặt $x_1 = \frac{-d}{c} - \alpha, x_2 = \frac{-d}{c} + \beta$ ($\alpha, \beta > 0$) $\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{a}{c} - \frac{k}{c \cdot \alpha} \\ y_2 = \frac{a}{c} + \frac{k}{c \cdot \beta} \end{cases} \Rightarrow AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$= (\alpha + \beta)^2 + \frac{k^2}{c^2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right)^2 = (\alpha + \beta)^2 \left(1 + \frac{k^2}{c^2} \cdot \frac{1}{(\alpha \cdot \beta)^2} \right)$

Do $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$ và $1 + \frac{k^2}{c^2} \cdot \frac{1}{(\alpha \cdot \beta)^2} \geq 2 \sqrt{\frac{k^2}{c^2} \cdot \frac{1}{(\alpha \cdot \beta)^2}} = 2 \frac{|k|}{c} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot \beta}$

$$\text{Do đó } AB^2 \geq 4\alpha\beta \cdot 2 \frac{|k|}{c} \cdot \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{8|k|}{c}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \frac{|k|}{c} \cdot \frac{1}{\alpha\beta} = 1 \end{cases}$$

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 4x + 3$ (C).

- a) Tìm 2 điểm A và B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O .
b) Tìm tọa độ 2 điểm A và B đối xứng nhau qua trục Oy .

Lời giải

a) Gọi $A(a; b)$ và $B(-a; -b)$ là 2 điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ $O(0; 0)$.

$$\text{Vì } A, B \text{ đều thuộc đồ thị } (C) \text{ nên ta có: } \begin{cases} b = a^3 - 3a^2 - 4a + 3 \\ -b = (-a)^3 - 3(-a)^2 - 4(-a) + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a^3 - 3a^2 - 4a + 3 \\ -b = -a^3 - 3a^2 + 4a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^3 - 3a^2 - 4a + 3 \\ 0 = -6a^2 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1; b = -3 \\ a = -1; b = 3 \end{cases}$$

Vậy 2 điểm A, B cần tìm là: $A(1; -3); B(-1; 3)$ hoặc ngược lại.

b) Gọi $A(a; b)$ và $B(-a; b)$ là 2 điểm đối xứng nhau qua trục Oy .

$$\text{Vì } A, B \text{ đều thuộc đồ thị } (C) \text{ nên ta có: } \begin{cases} b = a^3 - 3a^2 - 4a + 3 \\ b = (-a)^3 - 3(-a)^2 - 4(-a) + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a^3 - 3a^2 - 4a + 3 \\ b = -a^3 - 3a^2 + 4a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^3 - 3a^2 - 4a + 3 \\ 0 = 2a^3 - 8a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \Rightarrow A \equiv B \text{ (loại)} \\ a = 2; b = -9 \\ a = -2; b = -9 \end{cases}$$

Vậy 2 điểm A, B cần tìm là: $A(2; -9); B(-2; -9)$ hoặc ngược lại.

Ví dụ 2: Tìm trên đồ thị hàm số hai điểm A, B thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{2x-2}$ sao cho AB ngắn nhất.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \frac{x-3}{2x-2} = \frac{\frac{1}{2}(2x-2)-2}{2x-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x-1}$$

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 1$.

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ lần lượt là 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C) ta có: $x_1 < 1 < x_2$

$$\text{Đặt } x_1 = 1 - a, x_2 = 1 + b \text{ (} a, b > 0 \text{)} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{a} \\ y_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$= (a+b)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = (a+b)^2 \left(1 + \frac{1}{(ab)^2}\right).$$

Ta có:
$$\begin{cases} (a+b)^2 \geq 4ab \\ 1 + \frac{1}{a^2b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2b^2}} = \frac{2}{ab} \Rightarrow AB^2 \geq 4ab \cdot \frac{2}{ab} = 8 \Rightarrow AB \geq 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ \frac{1}{ab}=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1 \Rightarrow A\left(0; \frac{3}{2}\right), B\left(2; -\frac{1}{2}\right).$

Ví dụ 3: Tìm trên đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ hai điểm mà chúng đối xứng nhau qua tâm $I(-1; 3)$.

A. $(0; 2)$ và $(-2; 4)$. **B.** $(-1; 0)$ và $(-1; 6)$. **C.** $(1; 4)$ và $(-3; 2)$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Gọi $A(a; -a^3 + 3a + 2); B(b; -b^3 + 3b + 2)$ ($a \neq b$) là 2 điểm thuộc đồ thị hàm số đã cho và đối xứng nhau qua điểm $I(-1; 3)$.

Ta có:
$$\begin{cases} a+b=2x_1=-2 \\ -a^3+3a+2-b^3+3b+2=2y_1=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ -(a^3+b^3)+3(a+b)=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ a^3+b^3=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ (a+b)^3-3ab(a+b)=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ ab=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0; b=-2 \\ a=-2; b=0 \end{cases}$$

Vậy $(0; 2)$ và $(-2; 4)$ là cặp điểm cần tìm. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Tìm trên đồ thị hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \frac{11}{3}$ hai điểm phân biệt mà chúng đối xứng nhau qua trục tung.

A. $\left(3; -\frac{16}{3}\right)$ hoặc $\left(-3; -\frac{16}{3}\right)$. **B.** $\left(3; \frac{16}{3}\right)$ hoặc $\left(-3; \frac{16}{3}\right)$.
C. $\left(\frac{16}{3}; 3\right)$ hoặc $\left(-\frac{16}{3}; 3\right)$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Gọi $A\left(a; -\frac{a^3}{3} + a^2 + 3a - \frac{11}{3}\right)$ và $B\left(b; -\frac{b^3}{3} + b^2 + 3b - \frac{11}{3}\right)$ ($a \neq b$) là 2 điểm thuộc đồ thị và chúng đối xứng nhau qua trục tung.

Khi đó:
$$\begin{cases} a=-b \\ -\frac{a^3}{3} + a^2 + 3a - \frac{11}{3} = \frac{-b^3}{3} + b^2 + 3b - \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ -\frac{a^3}{3} + a^2 + 3a - \frac{11}{3} = \frac{a^3}{3} + a^2 - 3a - \frac{11}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ \frac{-2a^3}{3} - 6a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = 0 \\ a = \pm 3 \end{cases}$$

Với $a = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow A \equiv B$ (loại).

Với $a = \pm 3 \Rightarrow b = \mp 3 \Rightarrow A\left(3; \frac{16}{3}\right); B\left(-3; \frac{16}{3}\right)$. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Tìm trên đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x + 2$ hai điểm phân biệt mà chúng đối xứng với nhau qua trục tung.

A. Không tồn tại.

B. $A(2; 2)$ và $B(-2; 2)$.

C. $A(-1; -1)$ và $B(1; -1)$.

D. $A(3; -13)$ và $B(-3; -13)$.

Lời giải

Gọi hai điểm thỏa mãn đề bài là $\begin{cases} A(x_A; y_A) \\ B(x_B; y_B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = -x_B \\ y_A = y_B \end{cases} \Rightarrow x_A \neq 0$.

Khi đó ta có $-x_A^2 + 4x_A + 2 = -(-x_A)^2 + 4(-x_A) + 2 \Leftrightarrow 4x_A = -4x_A \Leftrightarrow x_A = 0 (L)$.

Suy ra không tồn tại hai điểm thỏa mãn đề bài. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Tìm trên mỗi nhánh của đồ thị $(C): y = \frac{3x+6}{x+1}$ các điểm A, B để độ dài AB đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị nhỏ nhất đó bằng:

A. $2\sqrt{5}$.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $2\sqrt{6}$.

D. $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $y = \frac{3x+6}{x+1} = \frac{3(x+1)+3}{x+1} = 3 + \frac{3}{x+1}$

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -1$.

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ lần lượt là 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C) ta có: $x_1 < -1 < x_2$

$$\text{Đặt } x_1 = -1 - a, x_2 = -1 + b \ (a, b > 0) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 3 - \frac{3}{a} \\ y_2 = 3 + \frac{3}{b} \end{cases} \Rightarrow AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$= (a+b)^2 + 9\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = (a+b)^2 \left(1 + \frac{9}{(ab)^2}\right).$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (a+b)^2 \geq 4ab \\ 1 + \frac{9}{a^2b^2} \geq 2\sqrt{\frac{9}{a^2b^2}} = \frac{6}{ab} \end{cases} \Rightarrow AB^2 \geq 4ab \cdot \frac{6}{ab} = 24 \Rightarrow AB \geq 2\sqrt{6}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \frac{9}{ab} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 3. \text{ Chọn C.}$$

✎ Dạng 3: Bài toán tìm điểm kết hợp bài toán tương giao và tiếp tuyến

☑ **Bài toán 1:** Tìm hai điểm $A(a; f(a))$ và $B(b; f(b))$ ($a \neq b$) thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ (C) sao cho tiếp tuyến tại A và B của (C) song song với nhau và A, B thỏa mãn điều kiện K .

Cách giải: Giải hệ phương trình $f'(a) = f'(b)$ và điều kiện K .

☑ **Bài toán 2:** Tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ (C) sao cho $AB \perp \Delta$ (hoặc $AB // \Delta$) và A, B thỏa mãn điều kiện K .

Cách giải:

- Dựa vào giả thiết $AB \perp \Delta$ hoặc $AB // \Delta$ ta viết phương trình đường thẳng AB theo một tham số m nào đó.
- Viết phương trình hoành độ giao điểm của AB và đồ thị (C).
- Dựa vào điều kiện K để tìm giá trị của tham số m .

Ví dụ 1: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 4x^2 + 4x + 1$ tại điểm $A(-3; -2)$ cắt đồ thị tại điểm thứ hai là B . Điểm B có tọa độ

- A. $B(1; 10)$. B. $B(-2; 1)$. C. $B(2; 33)$. D. $B(-1; 0)$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 8x + 4 \Rightarrow y'(-3) = 7$

PTTT tại điểm $A(-3; -2)$ là: $y = 7(x + 3) - 2 = 7x + 19$ (d)

Phương trình hoành độ tiếp điểm của đồ thị và tiếp tuyến d là: $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 7x + 19$

$$\Leftrightarrow (x + 3)^2(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow y = -2 \\ x = 2 \Rightarrow y = 33 \end{cases}. \text{ Vậy } B(2; 33). \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 2: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x + 1$ tại điểm A cắt đồ thị tại điểm thứ hai là $B(-1; -2)$. Điểm A có tọa độ

- A. $A(2; 5)$. B. $A(-1; -4)$. C. $A(0; 1)$. D. $A(1; 2)$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 2x + 1$, gọi $A(a; a^3 - a^2 + a + 1)$

Phương trình tiếp tuyến tại A là: $y = (3a^2 - 2a + 1)(x - a) + a^3 - a^2 + a + 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và tiếp tuyến là:

$$\begin{aligned}
x^3 - x^2 + x + 1 &= (3a^2 - 2a + 1)(x - a) + a^3 - a^2 + a + 1 \\
&\Leftrightarrow (x - a)(x^2 + xa + a^2) - (x - a)(x + a) + (x - a) = (3a^2 - 2a + 1)(x - a) \\
&\Leftrightarrow (x - a)(x^2 + xa + a^2 - x - a + 1 - 3a^2 + 2a - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - a)(x^2 + xa - 2a^2 - x + a) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \Rightarrow A \\ x = -2a + 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Do $x_B = -1 \Leftrightarrow -2a + 1 = -1 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow A(1; 2)$. **Chọn D.**

Ví dụ 3: Điểm M thuộc đồ thị hàm số $(C): y = -x^3 + 3x^2 + 2$ mà tiếp tuyến của (C) tại đó có hệ số góc lớn nhất, có tọa độ là

- A. $M(0; 2)$. B. $M(-1; 6)$. C. $M(1; 4)$. D. $M(2; 6)$.

Lời giải

Ta có: $k = y' = -3x^2 + 6x = -3(x - 1)^2 + 3 \leq 3$

Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc lớn nhất là 3 khi hoành độ tiếp điểm là $x = 1$

Khi đó $M(1; 4)$. **Chọn C.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}(C)$. Gọi A, B là 2 điểm phân biệt trên (C) sao cho tiếp tuyến tại A và B song song với nhau và $AB = 4\sqrt{2}$. Tính $T = OA + OB$.

- A. $T = 5$. B. $T = 6$. C. $T = 7$. D. $T = 8$.

Lời giải

Gọi $A\left(a; 2 + \frac{4}{a-1}\right), B\left(b; 2 + \frac{4}{b-1}\right) (a, b \neq 1, a \neq b)$. Do tiếp tuyến tại A, B song song với nhau nên ta có:

$$y'(a) = y'(b) \Leftrightarrow \frac{4}{(a-1)^2} = \frac{4}{(b-1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1 = b-1 \\ a-1 = 1-b \end{cases} \Rightarrow a+b=2.$$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } AB^2 &= (a-b)^2 + \frac{16(a-b)^2}{[(a-1)(b-1)]^2} = (a-b)^2 \left[1 + \frac{9}{(ab-a-b+1)^2} \right] = (a-b)^2 \left[1 + \frac{16}{(ab-1)^2} \right] \\
&= [(a+b)^2 - 4ab] \left[1 + \frac{16}{(ab-1)^2} \right] = 4(1-ab) \left[1 + \frac{16}{(ab-1)^2} \right].
\end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = 1 - ab \text{ ta có: } 4t \left(1 + \frac{16}{t^2} \right) = 32 \Leftrightarrow t + \frac{16}{t} = 8 \Leftrightarrow t = 4 \Rightarrow ab = -3 \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ ab=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow b = 3 \\ a = 3 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$$

Vậy $A(-1;0), B(3;4)$ hoặc ngược lại suy ra $T = OA + OB = 6$. **Chọn B.**

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}(C)$. Gọi A, B là 2 điểm phân biệt trên (C) sao cho tiếp tuyến tại A và B song song với nhau và tam giác OAB vuông tại O . Tính độ dài AB

A. $AB = 4$. B. $AB = 2$. C. $AB = 2\sqrt{2}$. D. $AB = \sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi $A\left(a; \frac{-a+2}{a-1}\right), B\left(b; \frac{-b+2}{b-1}\right)$. Do tiếp tuyến tại A, B song song với nhau nên ta có:

$$y'(a) = y'(b) \Leftrightarrow \frac{-1}{(a-1)^2} = \frac{-1}{(b-1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1 = b-1 \\ a-1 = 1-b \end{cases} \Rightarrow a+b=2$$

Mặt khác $\triangle OAB$ vuông tại O nên: $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = ab + \frac{(2-a)(2-b)}{(a-1)(b-1)} = 0$

$$\Leftrightarrow ab + \frac{4-2(a+b)+ab}{ab-(a+b)+1} = 0 \Leftrightarrow ab + \frac{ab}{ab-1} = 0 \Leftrightarrow ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0, b=2 \\ a=2, b=0 \end{cases}$$

Vậy 2 điểm cần tìm là $A(2;0), B(0;-2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = x^3 - 4x + 3(C)$. Gọi A, B là 2 điểm phân biệt trên (C) sao cho tiếp tuyến tại A và B có cùng hệ số góc và đường thẳng đi qua A, B vuông góc với đường thẳng $d: x + 5y - 7 = 0$. Tính độ dài AB

A. $AB = 8$. B. $AB = 12$. C. $AB = 6\sqrt{2}$. D. $AB = 6\sqrt{26}$.

Lời giải

Gọi $A(a; a^3 - 4a + 3), B(b; b^3 - 4b + 3) (a \neq b)$.

$$\text{Ta có: } y'(a) = y'(b) \Leftrightarrow 3a^2 = 3b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b(l) \\ a = -b \end{cases}$$

$$+) \text{ Ta có: } \overline{AB}(b-a; b^3-a^3-4(b-a)) = (b-a; (b-a)(b^2+ba+a^2-4)), \overline{u_d}(-5;1)$$

$$\text{Do đó chọn } \overline{u_{AB}} = (1; b^2+ab+a^2-4) \Rightarrow \overline{u_{AB}} \cdot \overline{u_d} = 0 \Leftrightarrow -5 + b^2 + ab + a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 - ab = 9$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, b = -3 \\ a = -3, b = 3 \end{cases}$$

Vậy $A(3;18), B(-3;-12)$ hoặc ngược lại suy ra $AB = 6\sqrt{26}$. **Chọn D.**

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) . Xét điểm M thuộc (C) . Tiếp tuyến của (C) tại M cắt

(C) tại điểm thứ hai $N (M \neq N)$ thỏa mãn $x_M + x_N = -3$. Hoành độ điểm M là

A. 3.

B. -1.

C. 1.

D. -3.

Lời giải

Vì $M \in (C) \Rightarrow M(m; m^3 - 3m)$. Ta có $y' = 3x^2 - 3 \longrightarrow y'(m) = 3m^2 - 3$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y - y(m) = y'(m) \cdot (x - m)$

$$\Leftrightarrow y - m^3 + 3m = (3m^2 - 3)(x - m) \Leftrightarrow y = (3m^2 - 3)(x - m) + m^3 - 3m \quad (d).$$

Hoành độ giao điểm của (d) và (C) là nghiệm phương trình $x^3 - 3x = (3m^2 - 3)(x - m) + m^3 - 3m$

$$\Leftrightarrow x^3 - m^3 - 3(x - m) = (3m^2 - 3)(x - m) \Leftrightarrow (x - m)(x^2 + mx + m^2) - 3(x - m) = (3m^2 - 3)(x - m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - m = 0 \\ x^2 + mx + m^2 - 3 = 3m^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 + mx - 2m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ (x - m)(x + 2m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -2m \end{cases}.$$

Suy ra $\begin{cases} x_M = m \\ x_N = -2m \end{cases} \longrightarrow x_M + x_N = m - 2m = -m = -3 \Leftrightarrow m = 3$.

Vậy $x_M = 3$. **Chọn A.**

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x-1} (C)$. Gọi A, B là 2 điểm phân biệt trên (C) sao cho A, B đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x + 5y - 11 = 0$. Tính tổng tung độ $y_A + y_B$

A. $y_A + y_B = 3$.

B. $y_A + y_B = 2$.

C. $y_A + y_B = -4$.

D. $y_A + y_B = 4$.

Lời giải

Viết lại phương trình đường thẳng $d: y = -\frac{1}{5}x + \frac{11}{5}$

Vì $AB \perp (d)$ nên phương trình đường thẳng AB có dạng: $y = 5x + m$

Phương trình hoành độ giao điểm của AB và (C) là:

$$\frac{2x+3}{x-1} = 5x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ g(x) = 5x^2 + (m-7)x - m - 3 = 0 \end{cases}$$

Để AB cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác

$$I \Leftrightarrow \begin{cases} g(1) \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \neq 0 \\ (m-7)^2 + 12(m+3) > 0 \end{cases} \quad (*).$$

Khi đó gọi $A(x_1; 5x_1 + m), B(x_2; 5x_2 + m)$. Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{7-m}{5} \\ x_1 x_2 = \frac{-m-3}{5} \end{cases}$

Trung điểm I của AB : $I\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{5(x_1+x_2)}{2}+m\right)$ hay $I\left(\frac{7-m}{10}; \frac{m+7}{2}\right) \in (d)$

$$\Rightarrow \frac{7-m}{10} + \frac{5m+35}{2} = 11 \Leftrightarrow m = -3$$

Với $m = -3$ (tm) $\Rightarrow A(0; -3), B(2; 7) \Rightarrow y_A + y_B = 4$. **Chọn D.**

Ví dụ 10: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ (C) và 2 điểm C, D thuộc đường thẳng $d: y = x - 4$. Gọi 2 điểm A, B

là hai điểm phân biệt nằm trên (C) sao cho tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có đường chéo bằng $\frac{5}{\sqrt{2}}$. Độ dài AB khi đó thỏa mãn

- A. $AB < 1$. B. $1 < AB < \frac{3}{2}$. C. $\frac{3}{2} < AB < \frac{5}{2}$. D. $AB > \frac{5}{2}$.

Lời giải

Do $AB // CD$ nên phương trình đường thẳng $AB: y = x + m$ ($m \neq 4$)

PT hoành độ giao điểm của AB và (C) là: $\frac{x-1}{x+2} = x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ g(x) = x^2 + (m+1)x + 2m+1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(-2) \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \neq 0 \\ m^2 - 6m - 3 > 0 \end{cases}$$

Khi đó gọi $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$ ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m - 1 \\ x_1 x_2 = 2m + 1 \end{cases}$

Ta có: $AB^2 = 2(x_1 - x_2)^2 = 2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] = 2(m^2 - 6m - 3)$, $AD = d(AB; CD) = \frac{|m+4|}{\sqrt{2}}$

$$AB^2 + AD^2 = AC^2 = 2(x_1 - x_2)^2 = 2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] = 2(m^2 - 6m - 3) + \frac{m^2 + 8m + 16}{2}$$

$$= \frac{5}{2}m^2 - 8m + 2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{21}{5} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $m = -1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \Rightarrow A(1; 0), B(-1; -2) \\ x_1 = -1 \Rightarrow A(-1; -2), B(1; 0) \end{cases}$

Kết luận: Vậy 2 điểm thỏa mãn ycbt là: $(1; 0), (-1; -2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$. **Chọn D.**

Ví dụ 11: [Đề thi THPT Quốc gia 2018] Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của

hai tiệm cận của (C) . Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn thẳng AB có độ dài bằng

A. 2.

B. 4.

C. $2\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Giao điểm của 2 đường tiệm cận là $I(-2;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

Hàm số đã cho là hàm đồng biến, có 2 trục đối xứng là 2 đường phân giác của các đường tiệm cận có phương trình là $y = x$ và $y = -x$.

Do tính chất đối xứng nên $AB \perp d : y = -x \Rightarrow AB : y = x + m$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và AB là:

$$\frac{x-2}{x+2} = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ g(x) = x^2 + (m+1)x + 2m+2 = 0 \end{cases}$$

Điều kiện để AB cắt (C) tại 2 điểm phân biệt là: $\begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 4(2m+2) > 0 \\ g(-2) \neq 0 \end{cases}$

Khi đó gọi là $A(x_1; x_1 + m); B(x_2; x_2 + m)$, theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m-1 \\ x_1 x_2 = 2m+2 \end{cases}$

Tam giác ABC luôn cân tại I suy ra nó đều khi $IH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \Leftrightarrow d(I; AB) = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$

$$\Leftrightarrow \frac{|m-3|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} \Leftrightarrow (m-3)^2 = 3[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] = 3(m^2 + 2m + 1 - 8m - 8)$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 6m = 15 \Rightarrow AB = \sqrt{2(m^2 - 6m - 7)} = 4. \text{ Chọn B.}$$

Dạng 4: Tìm điểm cố định và điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số

☑ Tìm điểm cố định:

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đồ thị hàm số $y = f(x)$ luôn đi qua.

Khi đó $y_0 = f(x_0)$ biến đổi phương trình về dạng $m[g(x_0; y_0)] + h(x_0; y_0) = 0$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} g(x_0; y_0) = 0 \\ h(x_0; y_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Tọa độ điểm M.

☑ Tìm điểm có tọa độ nguyên:

Điểm $M(x; y) \in (C) : y = f(x)$ có tọa độ nguyên nếu tọa độ điểm $M(x; y)$ thỏa mãn $\begin{cases} y = f(x) \\ x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Ví dụ 1: Cho hàm số $(C): y = x^4 + mx^2 - m - 1$. Tọa độ các điểm cố định thuộc đồ thị (C) là

- A. $(-1;0)$ và $(1;0)$. B. $(1;0)$ và $(0;1)$. C. $(-2;1)$ và $(-2;3)$. D. $(2;1)$ và $(0;1)$.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm cố định của (C) ta có: $y_0 = x_0^4 + mx_0^2 - m - 1 (\forall m \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow m(x_0^2 - 1) + x_0^4 - y_0^2 - 1 = 0 (\forall m \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 1 = 0 \\ x_0^4 - y_0^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \pm 1 \\ y_0^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1; y_0 = 0 \\ x_0 = 1; y_0 = 0 \end{cases} \text{ Vậy tọa}$$

độ các điểm cố định thuộc đồ thị (C) là $(-1;0)$ và $(1;0)$. **Chọn A.**

Ví dụ 2: Gọi các điểm M, N là các điểm cố định mà đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3mx - 1 (C)$ luôn đi qua. Tính độ dài MN .

- A. $MN = 1$. B. $MN = \sqrt{2}$. C. $MN = 2$. D. $MN = 4$.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm cố định thuộc (C) ta có: $y_0 = x_0^3 - 3mx_0^2 + 3mx_0 - 1 (\forall m \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow 3m(x_0^2 - x_0) + y_0 + 1 - x_0^3 = 0 (\forall m \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - x_0 = 0 \\ y_0 + 1 = x_0^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1; y_0 = 0 \\ x_0 = 0; y_0 = -1 \end{cases}$$

Vậy $M(1;0), N(0;-1) \Rightarrow MN = \sqrt{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + 2(m-1)x + 2 (C)$. Phương trình đường thẳng đi qua các điểm cố định của đồ thị hàm số đã cho là

- A. $y = -2x + 2$. B. $y = 2x + 2$. C. $y = -2x - 2$. D. $y = -2x - 1$.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm cố định thuộc (C) ta có: $y_0 = mx_0^3 - 3mx_0^2 + 2(m-1)x_0 + 2 (\forall m \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow m(x_0^3 - 3x_0^2 + 2x_0) - 2x_0 + 2 - y_0 = 0 (\forall m \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 - 3x_0^2 + 2x_0 = 0 (*) \\ y_0 = -2x_0 + 2 \end{cases}$$

Như vậy đồ thị hàm số luôn đi qua 3 điểm cố định là nghiệm của hệ phương trình $(*)$ và 3 điểm này đều thuộc đường thẳng $y = -2x + 2$. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^4 + mx^2 - m - 1$ luôn đi qua hai điểm cố định A và B. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

- A. $AB = 2\sqrt{2}$. B. $AB = 2$. C. $AB = 1$. D. $AB = 4$.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm cố định thuộc (C) ta có: $y_0 = x_0^4 + mx_0^2 - m - 1 (\forall m \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow m(x_0^2 - 1) + x_0^4 - 1 - y_0 = 0 \quad (\forall m \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 1 = 0 \\ x_0^4 - 1 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1, y_0 = 0 \\ x_0 = -1, y_0 = 0 \end{cases}$$

Khi đó $A(1;0), B(-1;0) \Rightarrow AB = 2$. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Có bao nhiêu thuộc đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x-2}{x+1}$ mà tọa độ là số nguyên?

A. 2. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải

Ta có: $y = \frac{2x-2}{x+1} = \frac{2(x+1)-4}{x+1} = 2 - \frac{4}{x+1}$

Điểm có tọa độ nguyên khi $x \in \mathbb{Z}$ và $x+1 = U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

Khi đó có 6 điểm có tọa độ nguyên thuộc $(C): y = \frac{2x-2}{x+1}$. **Chọn D.**

Ví dụ 6: Gọi M, N là hai điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{3x+2}{x+1} (C)$ sao cho tọa độ của chúng là những số nguyên. Tính độ dài MN

A. $MN = 2\sqrt{2}$. B. $MN = \sqrt{2}$. C. $MN = 2$. D. $MN = 4$.

Lời giải

Ta có: $y = \frac{3x+2}{x+1} = \frac{3(x+1)-1}{x+1} = 3 - \frac{1}{x+1}$

Điểm có tọa độ nguyên khi $x \in \mathbb{Z}$ và $x+1 = U(1) = \{\pm 1\} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = -1 \\ x+1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$

Khi đó có 2 điểm có tọa độ nguyên thuộc $(C): y = \frac{2x-2}{x+1}$ là $M(-2;4), N(0;2)$

Khi đó $MN = 2\sqrt{2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 7: Có bao nhiêu thuộc đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x^2+5x+15}{x+3}$ mà tọa độ là số nguyên?

A. 6. B. 7. C. 5. D. 8.

Lời giải

Ta có: $y = \frac{x^2+5x+15}{x+3} = \frac{x^2+3x+2x+6+9}{x+3} = x+2 + \frac{9}{x+3}$

$$\text{Điểm có tọa độ nguyên khi } x \in \mathbb{Z} \text{ và } x+3 = U(9) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 9\} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -6 \\ x = -2 \\ x = 0 \\ x = -12 \\ x = 6 \end{cases}$$

Từ đó suy ra có 6 điểm có tọa độ là số nguyên thuộc (C). **Chọn A.**

Ví dụ 8: Có bao nhiêu thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{3x+7}{2x-1}$ mà tọa độ là số nguyên?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \frac{3x+7}{2x-1} \Rightarrow 2y = \frac{6x+14}{2x-1} = \frac{3(2x-1)+17}{2x-1} = 3 + \frac{17}{2x-1}$$

Điểm có tọa độ nguyên khi $x \in \mathbb{Z}$ và $2x-1 = U(17) = \{\pm 1; \pm 17\}$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} 2x-1 = -17 \\ 2x-1 = -1 \\ 2x-1 = 1 \\ 2x-1 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \Rightarrow y = 1 \\ x = 0 \Rightarrow y = -7 \\ x = 1 \Rightarrow y = 10 \\ x = 9 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Có 4 điểm có tọa độ là số nguyên. **Chọn D.**}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Biết $A(0; y), B(x; 1)$ thuộc đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 - 1$ khi đó giá trị $x + y$ là

- A. -1. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 2: Điểm nào sau đây không thuộc đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$?

- A. $(-1; 2)$. B. $(2; 7)$. C. $(0; -1)$. D. $(1; -2)$.

Câu 3: Đồ thị hàm số $y = x^2 + 2mx - m + 1$ (m là tham số) luôn đi qua điểm M cố định có tọa độ là

- A. $M\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. B. $M(-1; 0)$. C. $M\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$. D. $M(0; 1)$.

Câu 4: Tâm đối xứng của đồ thị hàm số nào sau đây cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất?

- A. $y = \frac{2x-1}{x+3}$. B. $y = \frac{1-x}{1+x}$. C. $y = 2x^3 - 3x^2 - 2$. D. $y = -x^3 + 3x - 2$

Câu 5: Trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{3x+4}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 4.

Câu 6: Trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x-5}{3x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ là các số nguyên?

- A. 4. B. Vô số. C. 2. D. 0.

Câu 7: Trên đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+10}{x+1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên?

- A. 4. B. 2. C. 10. D. 6.

Câu 8: Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + m$ (m là tham số) luôn đi qua một điểm M cố định có tọa độ là

- A. $M(-1; -4)$. B. $M(1; -4)$. C. $M(-1; 2)$. D. $M(1; -2)$.

Câu 9: Tìm tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ sao cho khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M(1; -3)$. B. $M(3; 5)$. C. $M(0; -1)$. D. $M(4; 3)$.

Câu 10: Số điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + 10}{x + 2}$ là:

- A. 16. B. 12. C. 10. D. 8.

Câu 11: Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^4 - mx^2 + m + 2018$ luôn luôn đi qua hai điểm M và N cố định khi m thay đổi. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là

- A. $I(1; 2018)$. B. $I(0; 1)$. C. $I(0; 2018)$. D. $I(0; 2019)$.

Câu 20: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C) . Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn thẳng AB có độ dài bằng

- A. $2\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\sqrt{6}$.

Câu 21: Điểm thuộc đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$ cách đều hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ là:

- A. $(1; 0)$. B. $(2; 1)$. C. $(-1; 2)$. D. $(0; -1)$.

Câu 22: Họ parabol $(P_m): y = mx^2 - 2(m-3)x + m - 2$ ($m \neq 0$) luôn tiếp xúc với đường thẳng d cố định khi m thay đổi. Đường thẳng d đó đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $(0; -2)$. B. $(0; 2)$. C. $(1; 8)$. D. $(1; -8)$.

Câu 23: Gọi M, N là hai điểm di động trên đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - x + 4$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M và N luôn song song với nhau. Khi đó đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây?

- A. $(-1; 5)$. B. $(1; -5)$. C. $(-1; -5)$. D. $(1; 5)$.

Câu 24: Hai điểm $M; N$ lần lượt thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng:

- A. $8\sqrt{2}$. B. 2017. C. 8. D. 4.

Câu 25: A, B là hai điểm di động và thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị $y = \frac{2x-1}{x+2}$. Khi đó khoảng cách AB bé nhất là?

- A. $\sqrt{10}$. B. $2\sqrt{10}$. C. $\sqrt{5}$. D. $2\sqrt{5}$.

Câu 26: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C) . Gọi $M(x_M; y_M)$ là một điểm bất kỳ trên (C) . Khi tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất, tính tổng $x_M + y_M$.

- A. $2\sqrt{2} - 1$. B. 1. C. $2 - 2\sqrt{2}$. D. $2 - \sqrt{2}$.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Ta có $\begin{cases} y = -1 \\ 1 = x^3 + x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow x + y = 0$. **Chọn B.**

Câu 2: Ta có $(2; 7) \notin (C)$. **Chọn B.**

Câu 3: Ta có $y = x^2 + 2mx - m + 1 = x^2 + 1 + m(2x - 1) \Rightarrow$ điểm cố định là $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$. **Chọn C.**

Câu 4: Hàm số $y = \frac{2x-1}{x+3}$ có tâm đối xứng là $(-3; 2) \Rightarrow d = \sqrt{13}$

Hàm số $y = \frac{1-x}{1+x}$ có tâm đối xứng là $(-1; -1) \Rightarrow d = \sqrt{2}$

Hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 2$ có $y' = 6x^2 - 6x \Rightarrow y'' = 12x - 6; y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{5}{2}$ nên có tâm đối xứng là

$$\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow d = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

Hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có $y' = -3x^2 + 3 \Rightarrow y'' = -6x; y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow d = \sqrt{5}$. **chọn A.**

Câu 5: $y = \frac{2x-1}{3x+4} = \frac{\frac{2}{3}(3x+4) - \frac{11}{3}}{3x+4} = \frac{1}{3} \left(2 - \frac{11}{3x+4} \right) \Rightarrow \begin{cases} 3x+4 = -11 \\ 3x+4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \Rightarrow y = 1 \\ x = -1 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$

Chọn B.

Câu 6: $y = \frac{2x-5}{3x-1} = \frac{\frac{2}{3}(3x-1) - \frac{13}{3}}{3x-1} = \frac{1}{3} \left(2 - \frac{13}{3x-1} \right) \Rightarrow \begin{cases} 3x-1 = -1 \\ 3x-1 = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 5 \\ x = -4 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$

Chọn C.

Câu 7: $y = \frac{x+10}{x+1} = 1 + \frac{9}{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \pm 1 \\ x+1 = \pm 3 \\ x+1 = \pm 9 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 8: $y = x^3 - 3x^2 + mx + m = x^3 - 3x^2 + m(x+1) \Rightarrow$ điểm cố định là $(-1; -4)$. **Chọn A.**

Câu 9: Tiệm cận đứng $d_1: x = 2$, tiệm cận ngang $d_2: y = 1$. Giả sử $M\left(a; \frac{a+2}{a-2}\right)$

$$\text{Ta có } d(M, d_1) + d(M, d_2) = |a-2| + \frac{4}{|a-2|} \geq 2\sqrt{|a-2| \cdot \frac{4}{|a-2|}} = 4$$

Xảy ra khi $|a-2| = \frac{4}{|a-2|} \Leftrightarrow (a-2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0(l) \\ a = 4 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 10: Ta có $y = \frac{2x^2 + 3x + 10}{x + 2} = 2x - 1 + \frac{12}{x + 2} \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = \pm 1 \\ x + 2 = \pm 2 \\ x + 2 = \pm 3 \\ x + 2 = \pm 4 \\ x + 2 = \pm 6 \\ x + 2 = \pm 12 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 11: $y = x^4 - mx^2 + m + 2018 = x^4 + 2018 - m(x^2 - 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2019 \\ x = -1 \Rightarrow y = 2019 \end{cases} \Rightarrow I(0; 2019)$. **Chọn D.**

Câu 12: $y = x^3 + (m - 3)x^2 - (2m - 1)x - 3m - 3 = x^3 - 3x^2 + x - 3 + m(x^2 - 2x - 3)$

Điểm cố định khi $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 13: Với hàm số $y = 2x^3 - 6x^2 + x + 1$ ta có $y' = 6x^2 - 12x + 1 \Rightarrow y'' = 12x - 12$

Ta có $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow I(1; -2)$ là tâm đối xứng. **chọn B.**

Câu 14: Tiệm cận đứng $d_1 : x = 3$, tiệm cận ngang $d_2 : y = 3$. Giả sử $M\left(a; \frac{1 - 3a}{3 - a}\right)$

Ta có $d(M, d_1) = |a - 3|, d(M, d_2) = \frac{8}{|a - 3|}$

Mà $d(M, d_1) = 2d(M, d_2) \Leftrightarrow |a - 3| = \frac{16}{|a - 3|} \Leftrightarrow (a - 3)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \Rightarrow M(7; 5) \\ a = -1 \Rightarrow M(-1; 1) \end{cases}$

Tâm đối xứng là $(3; 3) \Rightarrow d = 2\sqrt{5}$. **Chọn B.**

Câu 15: Ta có $y = \frac{2x + 1}{x - 1} = 2 + \frac{3}{x - 1} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = \pm 1 \\ x - 1 = \pm 3 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 16: Gọi $M\left(a; \frac{2a + 2}{a - 1}\right) (a \neq 1)$ thuộc đồ thị (C) .

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang $y = 2$.

Ta có: $d(M; x = 1) = |a - 1|, d(M; y = 2) = \left| \frac{2a + 2}{a - 1} - 2 \right| = \frac{4}{|a - 1|}$

Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là: $d = |a - 1| + \frac{4}{|a - 1|} \geq 2\sqrt{|a - 1| \cdot \frac{4}{|a - 1|}} = 4$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow |a - 1| = \frac{4}{|a - 1|} \Leftrightarrow (a - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(3; 4) \\ M(-1; 0) \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 17: Gọi $M\left(a; \frac{2a + 1}{a + 2}\right) (a \neq -2)$ thuộc đồ thị (C) .

Khoảng cách từ M đến $d: y = 3x + 6$ là: $d(M; d: 3x - y + 6 = 0) = \frac{\left| 3a - \frac{2a+1}{a+2} + 6 \right|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \left| 3a + 6 - \frac{2a+1}{a+2} \right| = \frac{1}{\sqrt{10}} \left| 3(a+2) + \frac{3}{a+2} - 2 \right|$$

Ta có: $\left[3(a+2) + \frac{3}{a+2} \right]^2 \geq 4 \cdot 3(a+2) \cdot \frac{3}{a+2} = 36$ (Bất đẳng thức $(x+y)^2 \geq 4xy$)

Do đó $\left| 3(a+2) + \frac{3}{a+2} \right| \geq 6 \Rightarrow \begin{cases} 3(a+2) + \frac{3}{a+2} \geq 6 \\ 3(a+2) + \frac{3}{a+2} \leq -6 \end{cases}$

Suy ra $\left| 3(a+2) + \frac{3}{a+2} - 2 \right| \geq 4 \Rightarrow d_{\min} = \frac{4}{\sqrt{10}}.$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a+2 = \frac{1}{a+2} \Leftrightarrow (a+2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \Rightarrow b = 5 \\ a = -1 \Rightarrow b = 1 \end{cases} \Rightarrow a+b = 2. \text{ Chọn B.}$

Câu 18: Ta có: $y = \frac{x}{x-2} = \frac{(x-2)+2}{x-2} = 1 + \frac{2}{x-2}$

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 2$.

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ lần lượt là 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C) ta có: $x_1 < 2 < x_2$

Đặt $x_1 = 2 - a, x_2 = 2 + b \ (a, b > 0) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 - \frac{2}{a} \\ y_2 = 1 + \frac{2}{b} \end{cases} \Rightarrow AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$$= (a+b)^2 + 4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 = (a+b)^2 \left(1 + \frac{4}{(ab)^2} \right).$$

Ta có: $\begin{cases} (a+b)^2 \geq 4ab \\ 1 + \frac{4}{a^2b^2} \geq 2\sqrt{\frac{4}{a^2b^2}} = \frac{4}{ab} \end{cases} \Rightarrow AB^2 \geq 4ab \cdot \frac{4}{ab} = 16 \Rightarrow AB \geq 4.$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \frac{2}{ab} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{2}. \text{ Chọn C.}$

Câu 19: Gọi $M \left(a; \frac{3a+1}{a-1} \right) \ (a \neq 1)$ thuộc đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $\Delta : x = 1$.

Ta có: $d(M; \Delta) = |a - 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2; 7) \\ M(0; 1) \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 20: Giao điểm của 2 đường tiệm cận là $I(-1; 1)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

Hàm số đã cho là hàm đồng biến, có 2 trục đối xứng là 2 đường phân giác của các đường tiệm cận có phương trình là $y = x$ và $y = -x$.

Do tính chất đối xứng nên $AB \perp d : y = -x \Rightarrow AB : y = x + m$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và AB là: $\frac{x-2}{x+1} = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ g(x) = x^2 + mx + m + 2 = 0 \end{cases}$

Điều kiện để AB cắt (C) tại 2 điểm phân biệt là: $\begin{cases} \Delta = m^2 - 4(m+2) > 0 \\ g(-1) = 3 \neq 0 \end{cases} (*)$

Khi đó gọi $A(x_1; x_1 + m); B(x_2; x_2 + m)$, theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = m + 2 \end{cases}$

Tam giác ABC luôn cân tại I suy ra nó đều khi $IH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \Leftrightarrow d(I; AB) = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$

$\Leftrightarrow \frac{|m-2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} \Leftrightarrow (m-2)^2 = 3[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] = 3(m^2 - 4m - 8)$

$\Leftrightarrow m^2 - 4m = 14 \Rightarrow AB = \sqrt{2(m^2 - 4m - 8)} = 2\sqrt{3}$. **Chọn A.**

Câu 21: Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ ta có: $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0; 2) \\ B(2; -2) \end{cases}$ là hai điểm cực trị

của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$

Gọi $M(t; t-1) \in d \Rightarrow \begin{cases} MA = \sqrt{t^2 + (t-3)^2} \\ MB = \sqrt{(t-2)^2 + (t+1)^2} \end{cases} \Rightarrow MA = MB \Leftrightarrow 2t^2 - 6t + 9 = 2t^2 - 2t + 5$

$\Leftrightarrow 4t = 4 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(1; 0)$. **Chọn A.**

Câu 22: Giả sử $(P_m): y = mx^2 - 2(m-3)x + m - 2$ ($m \neq 0$) luôn tiếp xúc với đường thẳng $d : y = ax + b$

Khi đó hệ phương trình $\begin{cases} mx^2 - 2(m-3)x + m - 2 = ax + b \\ 2mx - 2(m-3) = a \end{cases}$ đúng với mọi m .

Xét phương trình $2mx - 2m + 6 = a \Leftrightarrow m(2x - 2) + 6 = a$ đúng với mọi $m \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ a = 6 \end{cases}$.

Thế vào phương trình đầu của hệ ta được: $m - 2(m - 3) + m - 2 = 6 + b \Rightarrow b = -2$.

Vậy họ parabol đã cho luôn tiếp xúc với đường thẳng $d: y = 6x - 2$ tại điểm $(1; 4)$.

Khi đó d đi qua điểm $(0; -2)$. **Chọn A.**

Câu 23: Gọi $M(a; -a^3 + 3a^2 - a + 4), N(b; -b^3 + 3b^2 - b + 4) (a \neq b)$.

Tiếp tuyến tại M và N song song với nhau khi

$$y'(a) = y'(b) (a \neq b) \Leftrightarrow -3a^2 + 6a - 1 = 3b^2 + 6b - 1$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 3b^2 - 6(a - b) = 0 \Leftrightarrow 3(a - b)(a + b) - 6(a - b) = 0 \Leftrightarrow 3(a - b)(a + b - 2) = 0 (*)$$

$$\text{Do } a \neq b \Rightarrow (*) \Leftrightarrow a + b = 2$$

$$\text{Suy ra } y_M + y_N = -(a^3 + b^3) + 3(a^2 + b^2) - (a + b) + 8$$

$$= -(a + b)(a^2 - ab + b^2) + 3(a^2 + b^2) - 2 + 8 = -2(a^2 - ab + b^2) + 3(a^2 + b^2) + 6 = (a + b)^2 + 6 = 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M + x_N = 2 = 2x_U \\ y_M + y_N = 10 = 2y_U \end{cases} \Rightarrow U(1; 5) \text{ luôn là trung điểm của } MN.$$

Tính chất: Gọi M, N là hai điểm di động trên đồ thị (C) của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M và N luôn song song với nhau thì MN luôn đi qua điểm uốn. **Chọn D.**

Câu 24: Ta có: $y = \frac{3x - 1}{x - 3} = \frac{3(x - 3) + 8}{x - 3} = 3 + \frac{8}{x - 3}$

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 3$.

$$\text{Đặt } x_1 = 3 - a, x_2 = 3 + b (a, b > 0) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 3 - \frac{8}{a} \\ y_2 = 3 + \frac{8}{b} \end{cases} \Rightarrow MN^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$= (a + b)^2 + 64 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 = (a + b)^2 \left(1 + \frac{64}{(ab)^2} \right).$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (a + b)^2 \geq 4ab \\ 1 + \frac{64}{a^2 b^2} \geq 2\sqrt{\frac{64}{a^2 b^2}} = \frac{16}{ab} \end{cases} \Rightarrow AB^2 \geq 4ab \cdot \frac{16}{ab} = 64 \Rightarrow AB \geq 8.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \frac{8}{ab} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2\sqrt{2} .$ **Chọn C.**

Câu 25: $y = \frac{2x-1}{x+2} = \frac{2(x+2)-5}{x+2} = 2 - \frac{5}{x+2}$

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 2$.