

Câu 1. (5,0 điểm)

Cho dãy số dương (x_n) được xác định bởi $x_1 = \frac{5}{2}$ và

$$x_{n+1}^2 = x_n^3 - 12x_n + \frac{20n+21}{n+1}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 2. (5,0 điểm)

Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a^3 + b^4 \leq a^2 + b^3$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 \leq 2$.

Câu 3. (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A , nội tiếp đường tròn (O) và điểm M cố định nằm bên ngoài (O) . Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua M cắt (O) tại hai điểm phân biệt P, Q ; các đường thẳng AQ, AP cắt BC lần lượt tại R và S . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác RPQ .

1. Chứng minh bốn điểm P, Q, R, S nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh khi d thay đổi thì I thuộc một đường thẳng cố định.

Câu 4. (5,0 điểm)

Cho p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng

$$\left[(2 + \sqrt{5})^p \right] \equiv 4 \pmod{p}.$$

(Kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

----- HẾT -----

Câu 1. (6,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$xf(x+xy) = xf(x) + f(x^2)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 2. (7,0 điểm)

Một bảng $n \times n$, $n \geq 2$ được chia thành các hình vuông đơn vị. Mỗi hình vuông đơn vị đó được tô màu đỏ hoặc màu xanh. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu sao cho mỗi hình vuông 2×2 có đúng hai hình vuông được tô màu đỏ và hai hình vuông được tô màu xanh?

Câu 3. (7,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC cân tại A . Các điểm D, E lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $ED = EC$. Gọi M là trung điểm DB , N là giao điểm của EM và BC . Chứng minh rằng $\angle DNB = \angle DCA$.

2. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp (O) . Các tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại D . Gọi M là trung điểm của BC , E là giao điểm của đường thẳng AO và BC , F ($F \neq A$) là giao điểm thứ hai của (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác AME , N ($N \neq A$) là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM và (O) . Chứng minh rằng đường thẳng FN đi qua trung điểm của MD .

-----HẾT-----