

ĐẢNG VIỆT ĐÔNG
TÍNH ĐƠN ĐIỀU
HÀM HỢP, HÀM LIÊN KẾT
(Mức độ VD-VDC)
ÔN THI TN THPT

TÍNH ĐƠN ĐIỀU HÀM HỢP – HÀM LIÊN KẾT (VD -VDC)

Dạng 1: Tính đơn điệu của hàm hợp $f(u(x))$ biết các BBT, BXD

Dạng 2: Tính đơn điệu của hàm hợp $f(u(x))$ biết các đồ thị

Dạng 3: Tính đơn điệu $f(x)$, $g(u)$,... liên quan biểu thức đạo hàm

Dạng 4: Tính đơn điệu của hàm liên kết $h(x) = f(u) + g(x)$ biết các BBT, BXD

Dạng 5: Tính đơn điệu của hàm liên kết $h(x) = f(u) + g(x)$ biết các đồ thị

Dạng 6: Tính đơn điệu của hàm số hợp, liên kết có chứa tham số

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1) Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

✪ **Định nghĩa:**

• Cho hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K (K có thể là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng).

-Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

-Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

✪ **Định lý:**

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên K .

a) Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K .

b) Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K .

✪ **Định lý mở rộng:**

a) Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số đồng biến trên K .

b) Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số nghịch biến trên K .

2) **Cực trị hàm $h(x) = f(u(x))$**

Ta có: $h'(x) = u'(x)f'(u(x))$

- Nếu $h'(x)$ đổi dấu qua điểm x_0 thuộc TXĐ từ đó ta suy ra các khoảng đồng biến của hàm số.

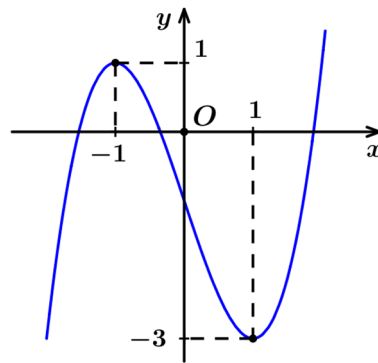
3) **Cực trị hàm liên kết $h(x) = f(u(x)) + g(x)$**

Ta có: $h'(x) = u'(x)f'(u(x)) + g'(x)$

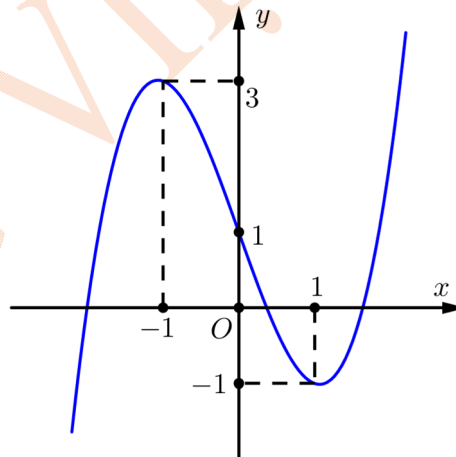
Hướng 1: Lập bảng xét dấu $h'(x)$ dựa vào sự tương giao các đồ thị hàm $y = u'(x)f'(u(x))$; $y = g'(x)$

Hướng 2: Đưa $u'(x)f'(u(x)) + g'(x)$ về dạng tích.

II. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Tính đơn điệu của hàm hợp khi biết các đồ thị**Câu 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽHàm số $y = 2019 - f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

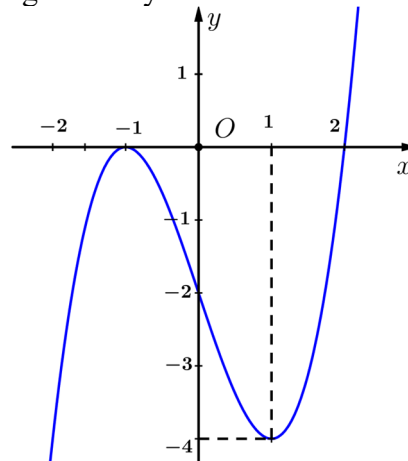
- A.** $(0;1)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(-3;0)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải**Chọn A**Ta có $y' = -f'(x)$ suy ra hai hàm số $y = f(x)$ và $y = 2019 - f(x)$ có tính đơn điệu trái ngược nhau.Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ suy ra hàm số $y = 2019 - f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$. Vậy chỉ có đáp án A thỏa mãn.**Câu 2:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(2-x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

- A.** $(1;+\infty)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải**Chọn D**Ta có $y' = (2-x)' \cdot f'(2-x) = -f'(2-x)$.Hàm số $y = f(2-x)$ nghịch biến khi $y' \leq 0 \Leftrightarrow -f'(2-x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(2-x) \geq 0$ Dựa vào đồ thị ta suy ra $\begin{cases} 2-x \leq -1 \\ 2-x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{cases}$.Mà $(-1;0) \subset (-\infty;1)$ nên hàm số $f(2-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(5-3x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây.

A. $(2;5)$.B. $(2;+\infty)$.C. $(-3;1)$.D. $(0;3)$.

Lời giải

Chọn C

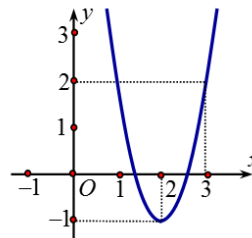
Ta có $y' = (5-3x)' f'(5-3x) = -3f'(5-3x)$.

Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow -3f'(5-3x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(5-3x) \geq 0$.

Quan sát đồ thị ta thấy $f'(5-3x) \geq 0 \Leftrightarrow 5-3x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Dựa vào các phương án ta chọn C.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$, biết rằng $y = f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-\infty;2)$.B. $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.C. $(2;+\infty)$.D. $(-1;1)$.

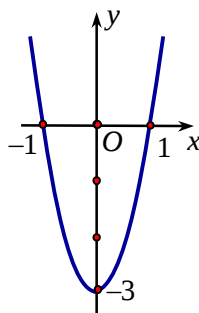
Lời giải

Chọn D

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = f'(x-2)+2$.

Tịnh tiến (C) xuống dưới 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số (C') : $y = f'(x-2)$.

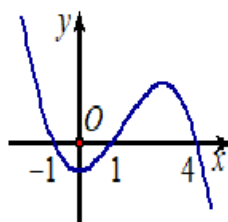
Tịnh tiến (C') sang trái 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = f'((x+2)-2)$ hay $y = f'(x)$ như hình vẽ:



$$\Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in (-1; 1).$$

Vậy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-1; 1)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

B. $(0; 2)$.

C. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

D. $(-2; -1)$.

Lời giải

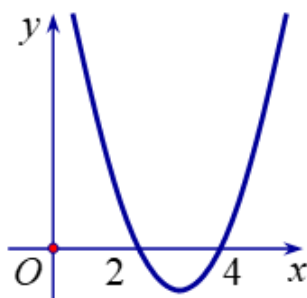
Chọn C

$$\left(f(x^2)\right)' = 2x \cdot f'(x^2). \text{ Ta có } \left(f(x^2)\right)' = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot f'(x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+	0	-
y							

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(1+x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(\sqrt{3}; +\infty)$.

B. $(-\sqrt{3}; -1)$.

C. $(1; \sqrt{3})$.

D. $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = [f(1+x^2)]' = 2x \cdot f'(1+x^2) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1+x^2=2 \\ 1+x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}.$$

Mặt khác ta có

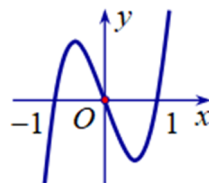
$$f'(1+x^2) < 0 \Leftrightarrow 2 < 1+x^2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} < x < -1 \\ 1 < x < \sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$2x$	-	-	-	0	+	+	+
$f'(1+x^2)$	+	0	-	0	+	0	+
y'	-	0	+	0	-	0	+

Vậy hàm số $y = f(1+x^2)$ nghịch biến trên khoảng $(1; \sqrt{3})$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(x^2 - 1)$ đồng biến trên khoảng



A. $(-\infty; -\sqrt{2})$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(1; \sqrt{2})$.

D. $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = [f(x^2 - 1)]' = 2x \cdot f'(x^2 - 1); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-1=-1 \\ x^2-1=0 \\ x^2-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

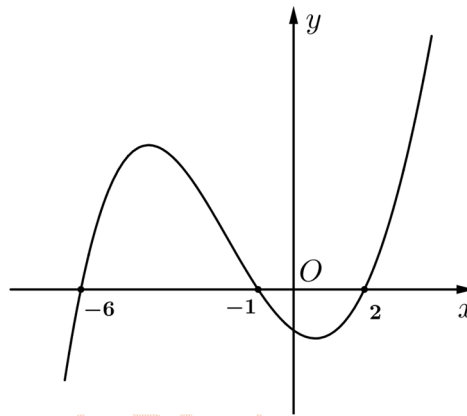
$$\text{Mặt khác ta có } f'(x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 1 \\ -1 < x^2 - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2} \\ -1 < x < 1 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x^2-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $y = f(x^2 - 1)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(3 - x^2)$ đồng biến trên khoảng?



A. $(2; 3)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-6	-1	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$

$$y' = -2xf'(3 - x^2)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ f'(3 - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

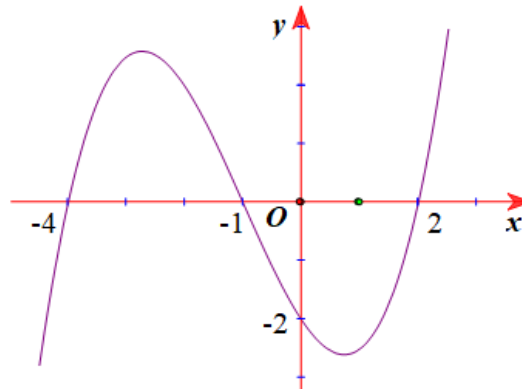
$$f'(3 - x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < 3 - x^2 < -1 \\ 2 < 3 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -2 \\ 2 < x < 3 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f'(3 - x^2)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$-2x$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

Từ BBT suy ra hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2 - 5)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1;0)$.B. $(-1;1)$.C. $(0;1)$.D. $(1;2)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = f(x^2 - 5)$

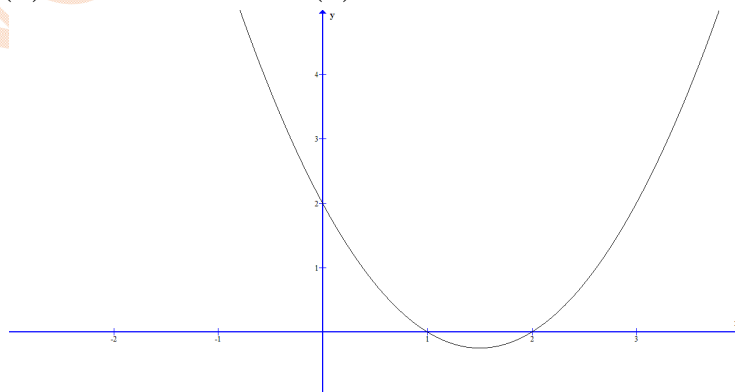
$$\text{Ta có } y' = 2x \cdot f'(x^2 - 5), y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 5 = -4 \\ x^2 - 5 = -1 \\ x^2 - 5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm \sqrt{7} \end{cases}.$$

Do $y'(3) = 6f'(4) > 0$ nên ta có bảng xét dấu y'

x	$-\infty$	$-\sqrt{7}$	-2	-1	0	1	2	$\sqrt{7}$	$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Từ bảng xét dấu ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số $y = f(2x - 3x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.C. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.D. $\left(-2; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = f(2x - 3x^2)$ ta có: $y' = (2 - 6x) \cdot f'(2x - 3x^2)$.

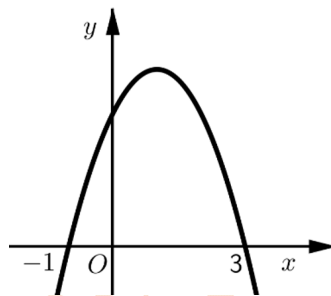
$$f'(2x - 3x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3x^2 < 1 \\ 2x - 3x^2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 > 0 \\ 3x^2 - 2x + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(2x - 3x^2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3x^2 > 1 \\ 2x - 3x^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 < 0 \\ 3x^2 - 2x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$\text{Do đó } (2 - 6x) \cdot f'(2x - 3x^2) > 0 \Leftrightarrow 2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}.$$

Vậy hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(2x^4 - 1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(1; +\infty)$.

B. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$. Xét $g'(x) = 8x^3 \cdot f'(2x^4 - 1)$.

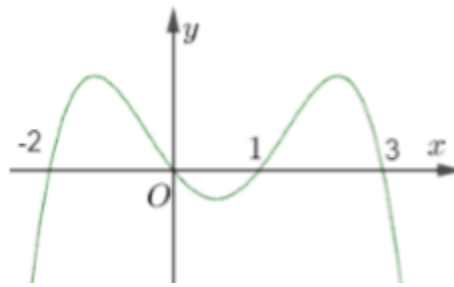
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ f'(2x^4 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ 2x^4 - 1 = -1 \\ 2x^4 - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \\ x = \pm\sqrt[4]{2} \end{cases}.$$

Vì $g'(2) = 64$, $f'(31) < 0$, tương tự ta có $g'(1) > 0$, $g'(-1) < 0$, $g'(-2) > 0$, dựa vào quy tắc mang một dấu ta có bảng xét dấu hàm số $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{2}$	0	$\sqrt[4]{2}$	$+\infty$			
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Hàm số $y = f(x^2 + 2x + 3)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; +\infty)$.

C. $(-2; 0)$.

D. $(-2; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = f(x^2 + 2x + 3) \Rightarrow g'(x) = 2(x+1)f'(x^2 + 2x + 3)$.

Do $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \geq 2$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có:

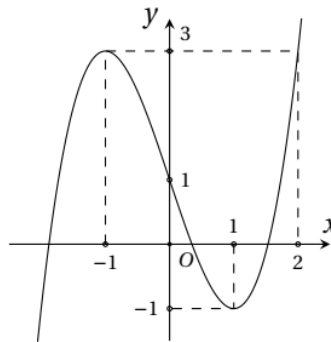
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'(x^2 + 2x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x + 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$		
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Suy ra hàm số $y = f(x^2 + 2x + 3)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2; -1)$ và $(0; +\infty)$ nên chọn

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng hai điểm cực trị $x = -1, x = 1$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; 1)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(2; +\infty)$.

D. $(-1; \frac{1}{2})$.

Lời giải

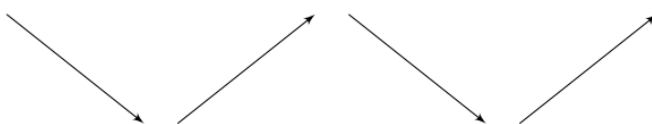
Chọn B

Do hàm số $y = f(x)$ có đúng hai điểm cực trị $x = -1, x = 1$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $x = -1, x = 1$.

Ta có $y' = (2x - 2)f'(x^2 - 2x + 1)$.

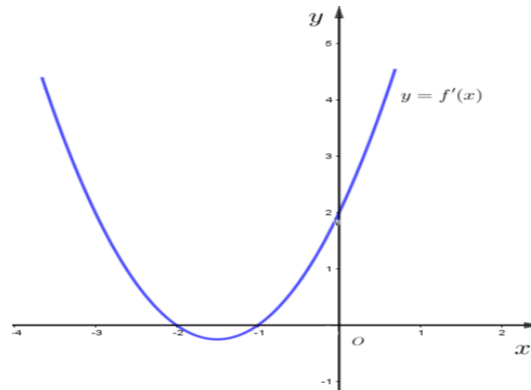
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = -1 \\ x^2 - 2x + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	0	+
y								

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2019$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; 2)$. Chọn phương án

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = g(x) = f(1 + 2x - x^2) + 2020$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 0)$. B. $(0; 1)$. C. $(2; 3)$. D. $(3; 5)$.

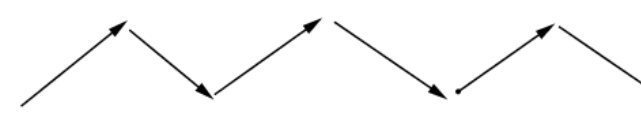
Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = (2 - 2x) \cdot f'(1 + 2x - x^2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ f'(1 + 2x - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 + 2x - x^2 = -2 \\ 1 + 2x - x^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \\ x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

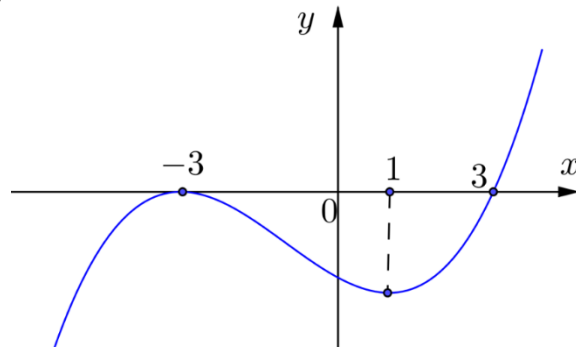
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$1 - \sqrt{3}$	1	$1 + \sqrt{3}$	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$							

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1-\sqrt{3}; 1)$ và $(1+\sqrt{3}; 3)$.

Mà $(0; 1) \subset (1-\sqrt{3}; 1)$ nên hàm số $y = g(x) = f(1+2x-x^2) + 2020$ đồng biến trên $(0; 1)$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty; 3)$.

B. $(1; 3)$.

C. $(3; +\infty)$.

D. $(-3; 1)$.

Lời giải

Chọn B

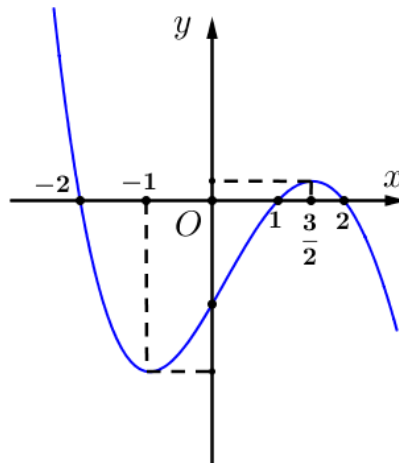
$$g'(x) = 2f'(x) \cdot f(x) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}, \text{ ta có bảng xét dấu}$$

x	$-\infty$	-3		1		3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	+
$f(x)$	-	0	-		-	0	+
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(1; 3)$.

=> **Chọn B**

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(2) = f(-2) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $y = (f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(-2; -1)$.

B. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị trên hình vẽ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(2) = f(-2) = 0$ như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	0		0	$-\infty$

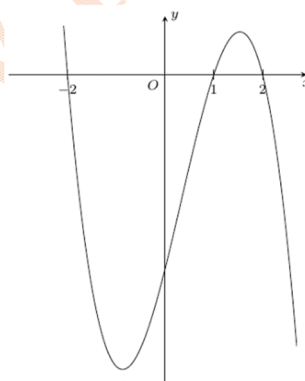
Hàm số $y = (f(x))^2$ có đạo hàm $y' = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$y' = 2f(x) \cdot f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Vậy hàm số $y = (f(x))^2$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(1; 2)$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên và $f(2) = f(-2) = 0$.



Hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến trong khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(1; 2)$.

B. $(2; 5)$.

C. $(5; +\infty)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = -2f(3-x)f'(3-x)$.

Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên:

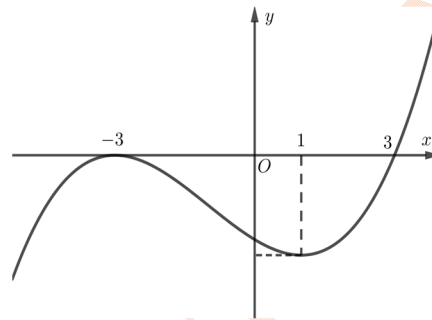
x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			0		0			
	$-\infty$							$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(3-x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến khi và chỉ khi

$$g'(x) = -2f(3-x)f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 3-x < 1 \\ 3-x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 5 \\ x < 1 \end{cases}.$$

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty; 3)$.

B. $(1; 3)$.

C. $(3; +\infty)$.

D. $(-3; 1)$.

Lời giải

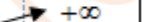
Chọn B

Cách 1:

$$\text{Ta có } g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3; x = -3 \text{ (nghiem kep)} \\ x = 1; x = -3 \end{cases}.$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x) \Rightarrow f(4) > 0$ và $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -3 \end{cases} \Rightarrow f'(4) > 0$. Do đó

$g'(4) = 2f(4) \cdot f'(4) > 0$. Ta có bảng biến thiên

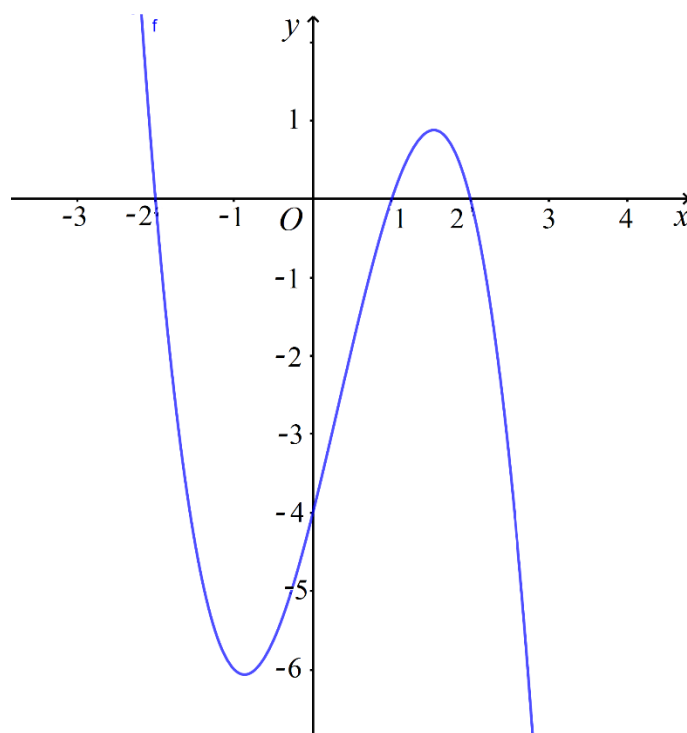
x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$								$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(1; 3)$.

Cách 2: Từ đồ thị suy ra $f(x) = a(x-3)(x+3)^2; a > 0$.

$$\text{Suy ra } g(x) = a^2(x-3)^2(x+3)^4 \Rightarrow g'(x) = 2a^2(x-3)(x+3)^4 + 4a^2(x-3)^2(x+3)^3$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2a^2(x-3)(x+3)^3(3x-3). \text{ Lập bảng biến thiên tương tự trên suy ra kết quả.}$$



Hàm số $g(x) = [2020 - f(x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-2; 2)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	2020 ↖ ↗ $f(2)$ ↖ ↗						

Từ bảng biến thiên và giả thiết ta thấy, với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $f(x) \leq f(-2) = 2020$

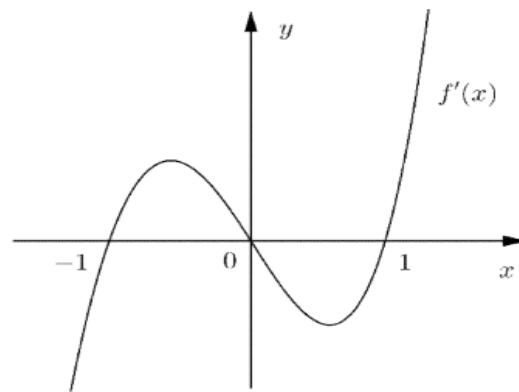
$\Rightarrow 2020 - f(x) \geq 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $g(x) = [2020 - f(x)]^2 \Rightarrow g'(x) = -2f'(x)[2020 - f(x)]$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến khi $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x)[2020 - f(x)] \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

Từ đó suy ra $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(1; 2)$.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(f'(x))$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(-\infty; -2)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Vì các điểm $(-1; 0), (0; 0), (1; 0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} -1 + a - b + c = 0 \\ c = 0 \\ 1 + a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = x^3 - x \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 1$$

Ta có: $g(x) = f(f'(x)) \Rightarrow g'(x) = f'(f'(x)) \cdot f''(x)$

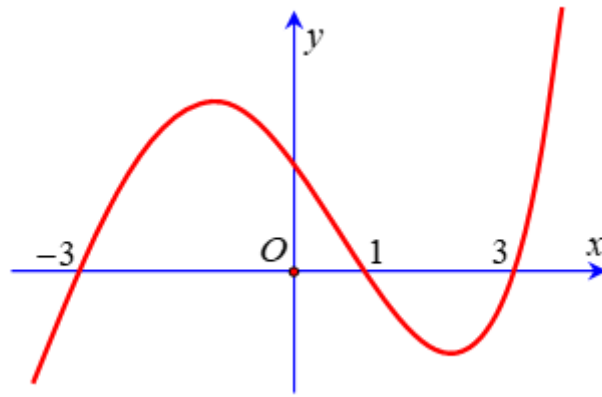
$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = f'(f'(x)) \cdot f''(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3 - x)(3x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x = 0 \\ x^3 - x = 1 \\ x^3 - x = -1 \\ 3x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 0 \\ x = x_1 (x_1 \approx 1,325) \\ x = x_2 (x_2 \approx -1,325) \\ x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-1,325$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$1,325$	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ cho đồ thị của hàm số $y = (f(-x - x^3))'$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-4; 2)$.B. $(9; +\infty)$.C. $(-12; -6)$.D. $(-2; 30)$.

Lời giải

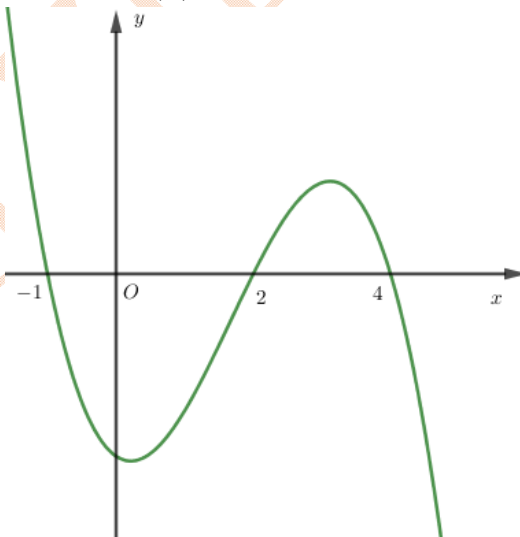
Chọn C

Ta nhận thấy: $y = (f(-x - x^3))' = -(3x^2 + 1) \cdot f'(-x - x^3)$.Dấu của $y = (f(-x - x^3))' = -(3x^2 + 1) \cdot f'(-x - x^3)$ ngược với dấu của $f'(-x - x^3)$.Để $f'(-x - x^3) > 0$ thì $y = (f(-x - x^3))' < 0$. Trên đồ thị ta suy ra được ngay khi đó:

$$\begin{cases} x < -3 \\ 1 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - x^3 > 30 \\ -30 < -x - x^3 < -2 \end{cases}$$

Tức là ta có: $f'(-x - x^3) = f'(t) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -x - x^3 > 30 \\ -30 < t = -x - x^3 < -2 \end{cases} \Rightarrow$ khoảng đồng biến của $f(x)$ là $x \in (30; +\infty)$; $x \in (-30; -2)$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ

Hàm số $y = f(10 - 2^x)$ đồng biến trên khoảngA. $(-\infty; 2)$.B. $(2; 4)$.C. $(\log_2 6; 4)$.D. $(\log_2 11; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

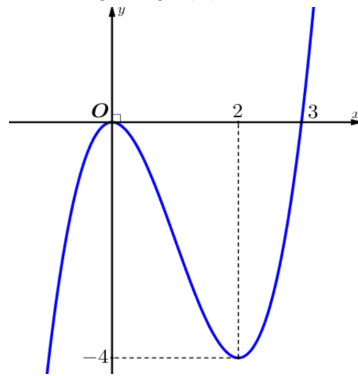
Ta có $y = f(10 - 2^x) \Rightarrow y' = -2^x \cdot \ln 2 \cdot f'(10 - 2^x)$.Hàm số $y = f(10 - 2^x)$ đồng biến $\Leftrightarrow -2^x \cdot \ln 2 \cdot f'(10 - 2^x) > 0$

$$\Leftrightarrow f'(10 - 2^x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 10 - 2^x < 2 \\ 10 - 2^x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 8 < x < \log_2 11 \\ x < \log_2 6 \end{cases}$$

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(3; \log_2 11)$ và $(-\infty; \log_2 6)$

Do đó hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = g(x) = f(e^x - 2) - 2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. **B.** $(-1; 2)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có $g'(x) = e^x \cdot f'(e^x - 2)$.

Hàm số $y = g(x) = f(e^x - 2) - 2020$ nghịch biến khi $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(e^x - 2) \leq 0$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta thấy:

$$f'(e^x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow e^x - 2 \leq 3 \Leftrightarrow e^x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \ln 5.$$

Do đó hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; \ln 5)$,

Lại do $\left(-1; \frac{3}{2}\right) \subset (-\infty; \ln 5)$, nên hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

Cách 2 :

Ta có $g'(x) = e^x \cdot f'(e^x - 2)$.

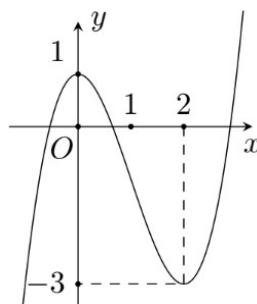
$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot f'(e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow f'(e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - 2 = 0 \\ e^x - 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 2 \\ x = \ln 5 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\ln 2$		$\ln 5$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	-	0	+

Do $\left(-1; \frac{3}{2}\right) \subset (-\infty; \ln 5)$ nên hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + 3bx^2 - 2cx + d$ (a, b, c, d là các hằng số, $a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ sau:



Hàm số $g(x) = \frac{a}{4}x^4 + (a+b)x^3 + (3b-c)x^2 + (d-2c)x + d - 2019$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$f(x) = ax^3 + 3bx^2 - 2cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 6bx - 2c$$

Dựa vào đồ thị ta có:

$$f(0) = 1 \Rightarrow d = 1.$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0.$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow b = -a$$

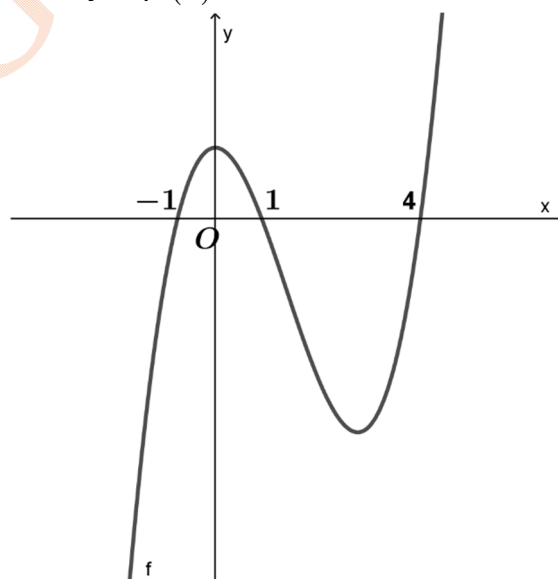
$$f(2) = -3 \Rightarrow 8a - 12a + 1 = -3 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{Ta được } g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + x - 2018, \quad g'(x) = x^3 - 6x + 1.$$

$$\text{Khi đó: } g'(x) = \underbrace{(x^3 - 3x^2 + 1)}_{f(x)} + 3x(x-2)$$

Ta thấy $\forall x \in (1; 2)$ thì $f(x) < 0$ và $3x(x-2) < 0$, suy ra $g'(x) < 0$ nên chọn đáp án

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Hàm số $y = f(2 - e^x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(2; +\infty)$.

B. $(-\infty; 1)$.

C. $(0; \ln 3)$.

D. $(1; 4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y = f(2 - e^x) \Rightarrow y' = -e^x \cdot f'(2 - e^x)$.

Hàm số $y = f(2 - e^x)$ đồng biến khi $y' = -e^x \cdot f'(2 - e^x) > 0 \Leftrightarrow f'(2 - e^x) < 0$ (do $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$).

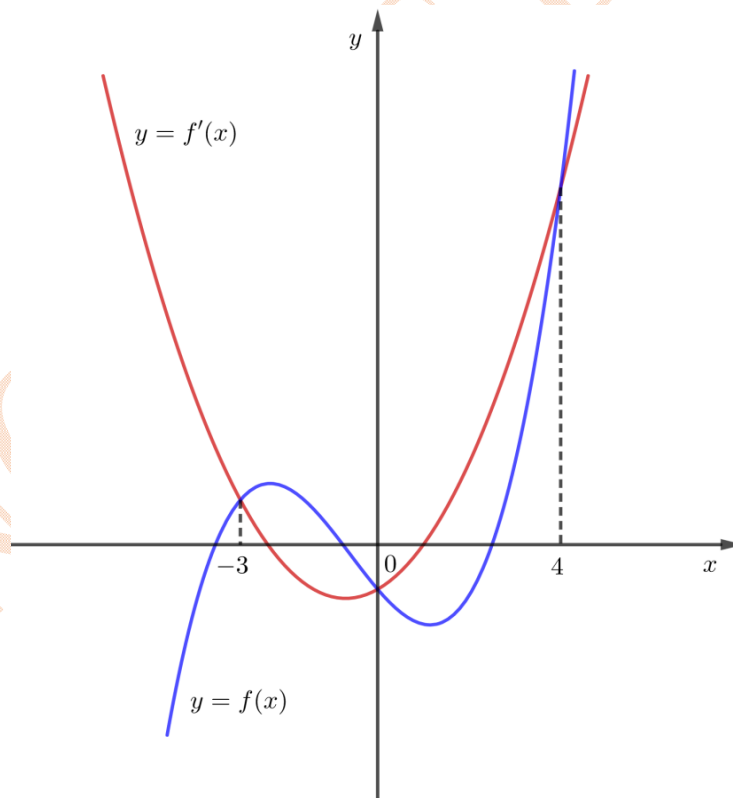
Mà $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $1 < x < 4$ nên

$$f'(2 - e^x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - e^x < -1 \\ 1 < 2 - e^x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x > 3 \\ -2 < e^x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \ln 3 \\ x < 0 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(\ln 3; +\infty)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các hằng số thực và $a \neq 0$). Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3; 0; 4$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = \frac{a}{4}x^4 + \frac{b-3a}{3}x^3 + \frac{c-2b}{2}x^2 + (d-c)x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-3; 0)$.

B. $(-3; 4)$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $(0; 4)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = ax^3 + (b-3a)x^2 + (c-2b)x + d - c$.

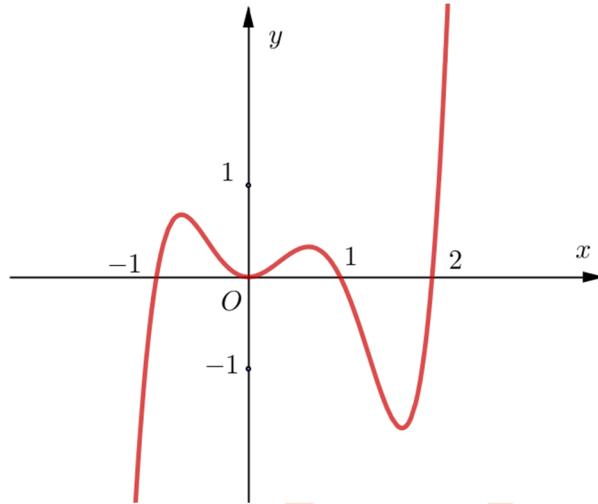
$$\Leftrightarrow g'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d - (3ax^2 + 2bx + c) = f(x) - f'(x)$$

Để hàm số $y = g(x)$ nghịch biến thì $f(x) - f'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f'(x)$.

Vì vậy dựa vào đồ thị đã cho ta sẽ nhận những khoảng mà hàm số $y = f'(x)$ nằm trên hẳn đồ thị $y = f(x)$.

Vậy các khoảng thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x \in (-\infty; -3) \cup (0; 4)$.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(\sqrt{x^2 + 1})$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty; -\sqrt{3}), (0; \sqrt{3})$.

B. $(-\infty; -\sqrt{3}), (\sqrt{3}; +\infty)$.

C. $(-\sqrt{3}; 0), (\sqrt{3}; +\infty)$.

D. $(-\infty; -\sqrt{3}), (0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = f(\sqrt{x^2 + 1}) \Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} f'(\sqrt{x^2 + 1})$.

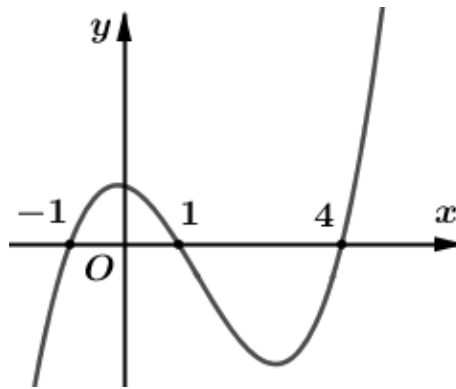
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(\sqrt{x^2 + 1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x^2 + 1} = -1 \\ \sqrt{x^2 + 1} = 0 \\ \sqrt{x^2 + 1} = 1 \\ \sqrt{x^2 + 1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x^2 + 1} = 1 \\ \sqrt{x^2 + 1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 1 = 1 \\ x^2 + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y					

Vậy hàm số $y = f(\sqrt{x^2 + 1})$ đồng biến trên các khoảng $(-\sqrt{3}; 0), (\sqrt{3}; +\infty)$.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 2)$.

C. $(2; 3)$.

D. $(4; 7)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$								$+\infty$

$$\text{Ta có } g(x) = f(|3-x|) = \begin{cases} f(3-x), & \text{Khi } x \leq 3 \\ f(x-3), & \text{Khi } x > 3 \end{cases}$$

□ Với $x \leq 3$ khi đó $g'(x) = -f'(3-x)$

Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x) > 0$

$$\Leftrightarrow -f'(3-x) > 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x < -1 \\ 1 < 3-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ -1 < x < 2 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $x \leq 3$, ta được $-1 < x < 2$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$.

□ Với $x > 3$ khi đó $g'(x) = f'(x-3)$

Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x) > 0$

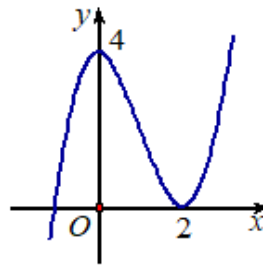
$$\Leftrightarrow f'(x-3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x-3 < 1 \\ x-3 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 4 \\ x > 7 \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp điều kiện } x > 3, \text{ ta được } \begin{cases} 3 < x < 4 \\ x > 7 \end{cases}.$$

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; 4)$ và $(7; +\infty)$

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Đặt $g(x) = f(\sqrt{x^2 + x + 2})$.

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau



- A. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
 B. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
 C. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-1}{2}; 0\right)$.
 D. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, có đồ thị như hình vẽ.

Do đó $x = 0 \Rightarrow d = 4$; $x = 2 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 0$; $f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0$;

$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$. Tìm được $a = 1; b = -3; c = 0; d = 4$ và hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

Ta có

$$g(x) = f(\sqrt{x^2 + x + 2}) = (\sqrt{x^2 + x + 2})^3 - 3(x^2 + x + 2) + 4$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{3}{2}(2x+1)\sqrt{x^2 + x + 2} - 3(2x+1) = 3(2x+1)\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + x + 2} - 1\right);$$

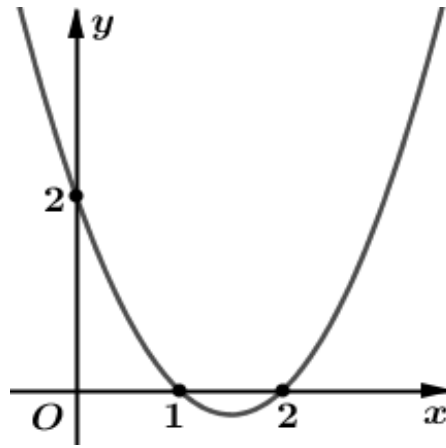
$$g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bảng xét dấu của $g(x)$:

x	$-\infty$	-2	$-1/2$	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		4	$\frac{7\sqrt{7}-10}{8}$	4		$+\infty$	

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-1}{2}; 0\right)$.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



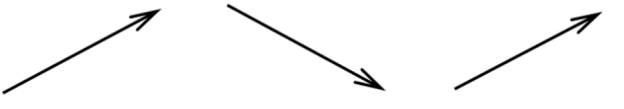
Hàm số $g(x) = f\left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)$ đồng biến trong khoảng nào sau đây

- A.** $(-\infty; -1)$. **B.** $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **D.** $(-1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$							$+\infty$
	$-\infty$						

Ta có $g(x) = f\left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)$

$$\Rightarrow g'(x) = (x+1) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \right) \cdot f'\left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right).$$

Để thấy $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. (1)

Đặt $u = u(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

Để thấy $\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2} > 0 \Leftrightarrow u(x) > 0$ (2)

Mặt khác $\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + 2} + \sqrt{(x+1)^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2} + 1} < 1$

$\Leftrightarrow u(x) < 1$ (3)

Từ (2), (3) $\Rightarrow 0 < u(x) < 1$

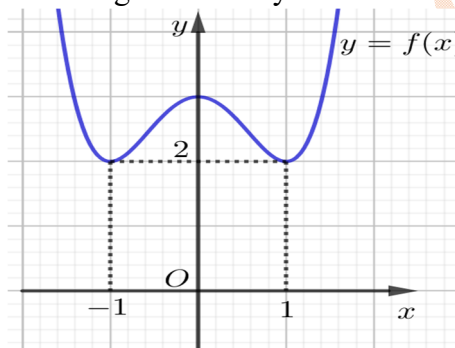
Kết hợp đồ thị ta suy ra $f'(u) > 0$, với $0 < u < 1$ (4)

Từ (1) và (4) $\Rightarrow g'(x)$ ngược dấu với dấu của nhị thức $h(x) = x+1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h(x)$		$-$	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$		$+\infty$

Câu 32: Dựa vào bảng biến thiên ta có $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Hàm số $g(x) = [f(\sqrt{x^2 + 1})]^3 - 3[f(\sqrt{x^2 + 1})]^2$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(0; +\infty)$.

B. $(-1; 0)$

C. $(-\infty; 0)$

D. $(-1; 1)$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } g'(x) &= 3[f(\sqrt{x^2 + 1})]^2 \cdot [f(\sqrt{x^2 + 1})]' - 6f(\sqrt{x^2 + 1}) \cdot [f(\sqrt{x^2 + 1})]' \\ &= 3f(\sqrt{x^2 + 1}) \cdot [f(\sqrt{x^2 + 1})]' \cdot [f(\sqrt{x^2 + 1}) - 2]. \end{aligned}$$

Dựa vào đồ thị (C) ta thấy $f(x) \geq 2 \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(\sqrt{x^2 + 1}) - 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(\sqrt{x^2 + 1}) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(\sqrt{x^2 + 1}) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

$$\text{Do đó } g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow [f(\sqrt{x^2 + 1})]' \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot f'(\sqrt{x^2 + 1}) \geq 0, (1).$$

Ta có $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dựa vào (C) suy ra $f'(\sqrt{x^2 + 1}) \geq 0$. Do đó (1) $\Leftrightarrow x \geq 0$. Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Dạng 2: Tính đơn điệu của hàm hợp $f(u(x))$ khi biết các BBT, BXD

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		3		$-\infty$

Hàm số $g(x) = f(2x - 2)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(0; 4)$.B. $(0; 3)$.C. $(1; 3)$.D. $(2; 4)$.

Lời giải

Chọn C

+ Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta thấy: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

+ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$

+ Hàm số $g'(x) = 2 \cdot f'(2x - 2)$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < 2x - 2 < 4 \Leftrightarrow 1 < x < 3$

Vậy hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y = f(3 - x)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			3		-1		$+\infty$

A. $(-\infty; 3)$.B. $(2; 4)$.C. $(-\infty; 4)$.D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = (f(3 - x))' = -f'(3 - x)$.

Hàm số $y = f(3 - x)$ đồng biến khi và chỉ khi $-f'(3 - x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3 - x) \leq 0$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra: $f'(3 - x) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq 3 - x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$.

Vậy hàm số $y = f(3 - x)$ đồng biến trên khoảng $(2; 4)$.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(5 - 2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; 3)$.B. $(3; 4)$.C. $(4; 5)$.D. $(-\infty; -3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = -2f'(5 - 2x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow f'(5 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2x = -3 \\ 5 - 2x = -1 \\ 5 - 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$			
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Suy ra hàm số $y = f(5-2x)$ đồng biến trên khoảng $(4;5)$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(0;1)$.

B. $(1;+\infty)$.

C. $(-1;0)$.

D. $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = 2xf'(x^2), y' < 0 \Leftrightarrow 2xf'(x^2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 0 \\ f'(x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < -1 \end{cases}.$$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
y'		$-$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$.

B. $(2;+\infty)$.

C. $(0;2)$.

D. $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } g'(x) = (x^2 - 2)' \cdot f'(x^2 - 2) = 2x \cdot f'(x^2 - 2).$$

Từ bảng xét dấu đạo hàm ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có số nghiệm hữu hạn nên phương trình $g'(x) = 0$ cũng có số nghiệm hữu hạn. Do đó, ta cần tìm x sao cho $g'(x) \leq 0$.

$$\text{Ta có: } g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow xf'(x^2 - 2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ f'(x^2 - 2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}.$$

Do đó hàm số nghịch biến trên mỗi tập: $[0;2]$, $(-\infty;-2]$.

Từ các đáp án của đề bài ta chọn hàm số nghịch biến trên $(0;2)$.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$

Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2; +\infty)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(-\infty; -2)$.

D. $(-2; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 2xf'(x^2 - 2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = -2 \\ x^2 - 2 = 0 \\ x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Do các nghiệm của phương trình $y' = 0$ đều là nghiệm bội lẻ, mà $y'(3) = 6f'(7) < 0$ nên ta có bảng xét dấu y'

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+	0	-

Vậy hàm số $y = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; 1)$.

B. $(-4; -3)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-2; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt: $y = g(x) = f(x^2 + 2x)$; $g'(x) = (f(x^2 + 2x))' = (2x + 2) \cdot f'(x^2 + 2x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x + 2) \cdot f'(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ f'(x^2 + 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = -2 \quad (1) \\ x^2 + 2x = 1 \\ x^2 + 2x = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 - \sqrt{2} \\ x = -1 + \sqrt{2} \\ x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Vì $x = -1 \pm \sqrt{2}$ là các nghiệm bội chẵn của phương trình $x^2 + 2x = 1$ và pt (1) vô nghiệm. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$													

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; -1)$.

Chú ý: Cách xét dấu $g'(x)$:

Chọn giá trị $x = 0 \in (-1; -1+\sqrt{2}) \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow g'(0) = f'(0) > 0$ (dựa theo bảng xét dấu của hàm $f'(x)$). Suy ra $g'(x) > 0, \forall x \in (-1; -1+\sqrt{2})$. Sử dụng quy tắc xét dấu đa thức “lẻ đổi, chẵn không” suy ra dấu của $g'(x)$ trên các khoảng còn lại.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			4		-2		$+\infty$

Hàm số $g(x) = f\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(-1; \frac{1}{4}\right)$.

B. $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$.

C. $\left(1; \frac{5}{4}\right)$.

D. $\left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

$$g(x) = f\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow g'(x) = \left(4x - \frac{5}{2}\right) f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right).$$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{5}{2} = 0 \\ 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = -2 \\ 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{8} \\ x = \frac{1}{4} \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \geq -2 \\ 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{4} \vee x \geq 1 \\ -1 \leq x \leq \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{1}{4} \vee 1 \leq x \leq \frac{9}{4}.$$

Bảng xét dấu $g'(x) = \left(4x - \frac{5}{2}\right) f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	1	$\frac{9}{4}$	$+\infty$
$4x - \frac{5}{2}$		-	-	- 0 +	+	+	
$f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$		+	0	- 0 +	+	0	- 0 +
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $g(x) = f\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $\left(\frac{1}{4}; \frac{5}{8}\right)$ và $\left(1; \frac{9}{4}\right)$.

Vì $\left(1; \frac{5}{8}\right) \subset \left(1; \frac{9}{4}\right)$ nên hàm số nghịch biến trên $\left(1; \frac{5}{8}\right)$.

Vậy chọn đáp án **C**

Câu 41: Cho hàm số $y = f(2-x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = f(2-x)$. Vì bài toán đúng với mọi hàm số có bảng biến thiên như trên nên ta xét hàm số có đạo hàm

$$g'(x) = -f'(2-x) = (x+3)(x+1)(x-1).$$

$$\Rightarrow f'(2-x) = -(x+3)(x+1)(x-1).$$

$$\Rightarrow f'(x) = -(2-x+3)(2-x+1)(2-x-1) = -(5-x)(3-x)(1-x).$$

$$\text{Đặt } h(x) = f(x^2 - 2) \Rightarrow h'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 2) = -2x(7-x^2)(5-x^2)(3-x^2).$$

$$\Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 7-x^2=0 \\ 5-x^2=0 \\ 3-x^2=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{7} \\ x=\pm\sqrt{5} \\ x=\pm\sqrt{3} \\ x=0 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu của $h'(x)$:

x	$-\infty$	$-\sqrt{7}$	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = f(x^2 - 2)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Câu 42: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG TRỊ 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như ở bảng sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hỏi hàm số $f\left(x + \frac{1}{x}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. **C.** $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Từ gt ta có BBT của $g(x) = f\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$$g'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) f'\left(x + \frac{1}{x}\right). \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) f'\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \\ f'\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

BXD của $g'(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0

Hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$. **Chọn A**

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên. Hàm số $y = e^{3f(2-x)+1} + 3^{f(2-x)}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

- A.** $(1; +\infty)$. **B.** $(-1; 3)$. **C.** $(-\infty; -2)$. **D.** $(-2; 1)$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = -3f'(2-x) \cdot e^{3f(2-x)+1} - f'(2-x) \cdot 3^{f(2-x)} \ln 3 = -f'(2-x) [3e^{3f(2-x)+1} + 3^{f(2-x)} \ln 3].$$

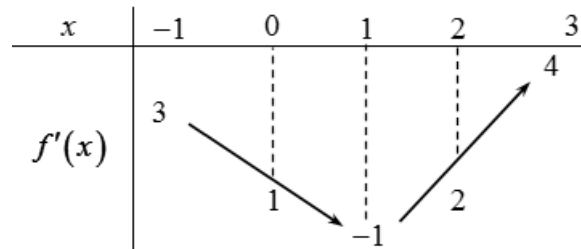
Yêu cầu bài toán: $y' \geq 0 \Leftrightarrow -f'(2-x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(2-x) \leq 0$

(Vì $3e^{3f(2-x)+1} + 3^{f(2-x)} \ln 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

$$\text{Có } f'(2-x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \leq -1 \\ 1 \leq 2-x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Vậy hàm số $y = e^{3f(2-x)+1} + 3^{f(2-x)}$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $y = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên khoảng



A. $(2; 4)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(-2; 0)$.

D. $(-4; -2)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } g(x) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x \text{ thì } g'(x) = -\frac{1}{2} f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 1.$$

$$\text{Ta có } g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) > 2$$

•TH1: $f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) > 2 \Leftrightarrow 2 < 1 - \frac{x}{2} < 3 \Leftrightarrow -4 < x < -2$. Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-4; -2)$.

•TH2: $f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) > 2 \Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{x}{2} < a < 0 \Leftrightarrow 2 < 2 - 2a < x < 4$ nên hàm số chỉ nghịch biến trên khoảng $(2 - 2a; 4)$, chứ không nghịch biến trên toàn khoảng $(2; 4)$.

Vậy hàm số $y = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên $(-4; -2)$.

⚠ **Chú ý:** Từ trường hợp 1 ta có thể chọn đáp án D nhưng cứ xét tiếp trường hợp 2 xem thử.

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	0	$y(1)$	0	$-\infty$

Hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-2; 5)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(2; 5)$.

D. $(5; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(3-x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } g'(x) = -2f'(3-x) \cdot f(3-x).$$

$$\text{Xét } g'(x) < 0 \Leftrightarrow -2f'(3-x) \cdot f(3-x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 3-x < 1 \\ 3-x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 5 \\ x < 1 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(2; 5)$.

Câu 46: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x) = f(3-2^x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

A. $(3; +\infty)$.

B. $(-\infty; -5)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(2; 7)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = -2^x \ln 2 \cdot f'(3-2^x)$.

Để $g(x) = f(3-2^x)$ đồng biến thì

$$g'(x) = -2^x \ln 2 \cdot f'(3-2^x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3-2^x) \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq 3-2^x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3.$$

Vậy hàm số đồng biến trên $(1; 2)$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm trên khoảng $(-5; 6)$ và có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình dưới. Khi đó hàm số $g(x) = f(f'(x)+1)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

x	-5	-2	0	3	6		
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	1						5

Diagram illustrating the relationship between $f''(x)$ and $f'(x)$ at critical points:

- At $x = -5$, $f''(x) = -$ and $f'(x) = 1$. A purple arrow points from 1 down to -1 .
- At $x = -2$, $f''(x) = 0$ and $f'(x)$ is unknown. A purple arrow points from the unknown $f'(x)$ up to 0 .
- At $x = 0$, $f''(x) = +$ and $f'(x) = 0$. A purple arrow points from 0 down to -1 .
- At $x = 3$, $f''(x) = 0$ and $f'(x)$ is unknown. A purple arrow points from the unknown $f'(x)$ up to 5 .
- At $x = 6$, $f''(x) = -$ and $f'(x) = 5$. A purple arrow points from 5 down to -1 .

A. $(-5; 3)$.

B. $(0; 3)$.

C. $(-2; 0)$.

D. $(3; 6)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x) = f(f'(x)+1) \Rightarrow g'(x) = f''(x) \cdot f'(f'(x)+1)$

$$f'(f'(x)+1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)+1 < x_1, x_1 \in (-5; -2) \\ f'(x)+1 > x_1, x_2 \in (3; 6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) < x_1 - 1 \in (-6; -3) \\ f'(x) > x_2 - 1 \in (2; 5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > x_3 \in (3; 6) \text{ (} x_3 \text{ là nghiệm của phương trình } f'(x) = x_2 - 1 \text{)}$$

$$\text{Do đó } f'(f'(x)+1) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq x_3.$$

$$\text{Vậy } g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) \geq 0 \\ f'(f'(x)+1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2; 0] \cup [3; 6] \\ x \in [x_3; 6] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [x_3; 6] \\ x \in [0; 3] \\ x \in (-5; -2] \end{cases} \text{ (} x_3 > 3 \text{)}.$$

Chọn phương án B

Câu 48: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 3$ và hàm số $g(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-6	6	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$				$+\infty$

Hàm số $y = g(f(x))$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-1;1)$.

B. $(0;2)$.

C. $(-2;0)$.

D. $(0;4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$; $f'(x) = 3(x-1)^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$y' = [g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow g'(f(x)) < 0 \Leftrightarrow -6 < f(x) < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 5x + 9 > 0 \\ x^3 - 3x^2 + 5x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x^2 - 4x + 9) > 0 \\ (x-1)(x^2 - 2x + 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	0	$y(1)$	0	$-\infty$

Hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-2;5)$.

B. $(1;2)$.

C. $(2;5)$.

D. $(5;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(3-x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = -2f'(3-x) \cdot f(3-x)$.

$$\text{Xét } g'(x) < 0 \Leftrightarrow -2f'(3-x) \cdot f(3-x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 3-x < 1 \\ 3-x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 5 \\ x < 1 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;5)$.

Câu 50: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x^3 + 1)$ như sau

x	$-\infty$	-2	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x^3+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;2)$.

B. $(2;5)$.

C. $(5;10)$.

D. $(10;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(\sqrt[3]{x-1} + 1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < \sqrt[3]{x-1} < 0 \\ 1 < \sqrt[3]{x-1} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 < x < 1 \\ 2 < x < 9 \end{cases}$$

Vậy $f(x)$ nghịch biến trên $(2; 9)$ nên nghịch biến trên $(2; 5)$.

Câu 51: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$		3				2				$+\infty$
	$-\infty$			1				0		

Hàm số $y = (f(x))^3 - 3.(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; 2)$.

B. $(3; 4)$.

C. $(-\infty; 1)$.

D. $(2; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3.(f(x))^2 . f'(x) - 6.f(x).f'(x)$

$$= 3f(x).f'(x).[f(x) - 2]$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{x_1, 4 \mid x_1 < 1\} \\ f(x) = 2 \Leftrightarrow x \in \{x_2, x_3, 3, x_4 \mid x_1 < x_2 < 1 < x_3 < 2; 4 < x_4\} \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 2, 3, 4\} \end{cases}$$

Lập bảng xét dấu ta có

x	$-\infty$	x_1	x_2	1	x_3	2	3	4	x_4	$+\infty$			
f(x)	-	0	+	+	+	+	+	+	0	+	+		
f(x) - 2	-	-	0	+	+	0	-	-	0	-	+		
f'(x)	+	+	+	0	-	-	0	+	0	-	0	+	
y'	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Do đó ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$.

Câu 52: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn:

x	$-\infty$	-2	0	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(3-x) - x - \sqrt{x^2 + 2}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(3; 5)$.

B. $(-\infty; 1)$.

C. $(2; 6)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -f'(3-x) - 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow y' \leq 0 \Leftrightarrow f'(3-x) + 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \geq 0$.

Vì $\sqrt{x^2+2} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x \forall x$ nên $\frac{|x|}{\sqrt{x^2+2}} < 1$ hay $1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} > 0 \forall x$.

Xét đáp án A, với $3 < x < 5$ thì $-2 < 3-x < 0$ suy ra $f'(3-x) > 0$. Vậy đúng.

Chọn đáp án **A**.

Câu 53: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'(x)$ như bảng dưới đây.

x	$-\infty$	-2	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $y = g(x) = \frac{f(x^2 - 2x)}{f(x^2 - 2x) + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 1)$.

B. $\left(-2; \frac{5}{2}\right)$.

C. $(1; 3)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$g'(x) = \frac{(x^2 - 2x)' \cdot f'(x^2 - 2x)}{(f(x^2 - 2x) + 1)^2} = \frac{(2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x)}{(f(x^2 - 2x) + 1)^2}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; 3)$.

Câu 54: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau.

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$			
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0	+	0	-

Hàm số $y = 2^{f(12x+1)+12x^3+6x^2-24x}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(\frac{-1}{12}; 0\right)$.

B. $\left(\frac{1}{6}; \frac{2}{3}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right)$.

D. $\left(-1; \frac{-1}{12}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $y = 2^{f(12x+1)+12x^3+6x^2-24x} = g(x)$.

Ta có:

$$g'(x) = 2^{f(12x+1)+12x^3+6x^2-24x} (12f'(12x+1) + 12.3x^2 + 12x - 24) \cdot \ln 2$$

$$= 12.2^{f(12x+1)+12x^3+6x^2-24x} (f'(12x+1) + 3x^2 + x - 2) \cdot \ln 2$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow f'(12x+1) + 3x^2 + x - 2 \leq 0, \forall x \in (a; b).$$

Ta có:

$$f'(12x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 12x+1=1 \\ 12x+1=2 \\ 12x+1=3 \\ 12x+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{12} \\ x=\frac{1}{6} \\ x=\frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$3x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(12x+1)$		+	0	-	0	+	0	-
$3x^2+x-2$		+	0	-	-	-	0	+

Từ bảng xét dấu ta thấy $y = 2^{f(12x+1)+12x^3+6x^2-24x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right)$.

Dạng 3: Tính đơn điệu hàm hợp liên quan biểu thức đạo hàm

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = (x-2)(x+5)(x+1)$. Hàm số $f(x^2)$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; -1)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-2; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = (x-2)(x+5)(x+1) \Rightarrow f'(x^2) = (x^2-2)(x^2+5)(x^2+1)$.

Đặt $g(x) = f(x^2) \Rightarrow g'(x) = 2x \cdot f'(x^2) = 2x(x^2-2)(x^2+5)(x^2+1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2-2)(x^2+5)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(x^2)$:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$								

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $g(x) = f(x^2)$ ta thấy hàm số đồng biến khi $x \in (-\sqrt{2}; 0)$ và $x > \sqrt{2}$

Vậy, hàm số $f(x^2)$ đồng biến trong khoảng $(-1; 0)$.

Câu 56: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-4).u(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $u(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1; 2)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2)$.

Theo giả thiết $f'(x) = x^2(x-1)(x-4).u(x) \Rightarrow f'(x^2) = x^4(x^2-1)(x^2-4).u(x^2)$.

Từ đó suy ra $g'(x) = 2x^5(x^2-1)(x^2-4).u(x^2)$.

Mà $u(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow u(x^2) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên dấu của $g'(x)$ cùng dấu với $2x^5(x^2-1)(x^2-4)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g							

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với đáp án ta **Chọn C**

Câu 57: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 9x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 8x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-1; 0)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(0; 4)$.

D. $(8; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = (2x-8)f'(x^2-8x) = (2x-8)(x^2-8x)(x^2-8x-9)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \\ x = 8 \\ x = -1 \\ x = 9 \end{cases}.$$

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow g'(x) > 0 \Leftrightarrow (2x-8)(x^2-8x)(x^2-8x-9) > 0$.

Xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	-1	0	4	8	9	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy dựa vào bảng xét dấu hàm số $g'(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Câu 58: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x - 2)$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $(-1; 1)$. B. $(0; 2)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Ta có $g'(x) = (1 - 2x)f'(x - x^2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (1 - 2x)f'(x - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 0 \\ f'(x - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x - x^2 = -1 \\ x - x^2 = 1 \\ x - x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 59: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = g(x) = f'(2x + 3) + 2$ có đồ thị là một parabol với tọa độ đỉnh $I(2; -1)$ và đi qua điểm $A(1; 2)$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(5; 9)$. B. $(1; 2)$. C. $(-\infty; 9)$. D. $(1; 3)$.

Lời giải

Chọn A

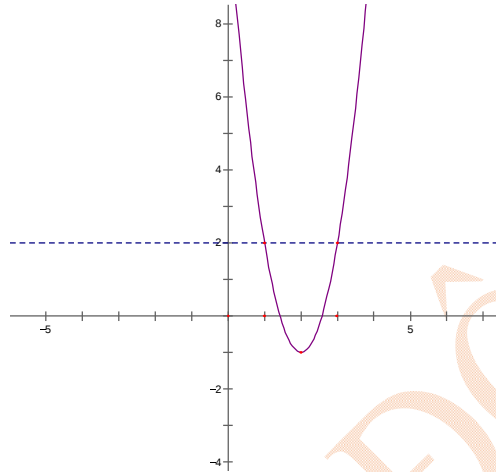
Xét hàm số $g(x) = f'(2x + 3) + 2$ có đồ thị là một Parabol nên có phương trình dạng:
 $y = g(x) = ax^2 + bx + c \quad (P)$

$$\text{Vì } (P) \text{ có đỉnh } I(2; -1) \text{ nên } \begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ g(2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b = 4a \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 0 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases}.$$

(P) đi qua điểm $A(1; 2)$ nên $g(1) = 2 \Leftrightarrow a + b + c = 2$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 4a + b = 0 \\ 4a + 2b + c = -1 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -12 \\ c = 11 \end{cases}$ nên $g(x) = 3x^2 - 12x + 11$.

Đồ thị của hàm $y = g(x)$ là



Theo đồ thị ta thấy $f'(2x+3) \leq 0 \Leftrightarrow f'(2x+3) + 2 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$.

Đặt $t = 2x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{t-3}{2}$ khi đó $f'(t) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{t-3}{2} \leq 3 \Leftrightarrow 5 \leq t \leq 9$.

Vậy $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(5; 9)$.

- Câu 60:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + x.f'(x) = x(x-1)(x-2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = x.f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?
- A.** $(-\infty; 0)$. **B.** $(1; 2)$. **C.** $(2; +\infty)$. **D.** $(0; 2)$.

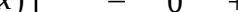
Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x) = [x.f(x)]' = f(x) + x.f'(x) = x(x-1)(x-2)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$							

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

- Câu 61:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn hệ thức $(f(x^2 + 1))' = x^3(x^2 - 1)$ với $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?
- A.** $(1; 2)$. **B.** $(1; 3)$. **C.** $(-1; 0)$. **D.** $(2; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(f(x^2 + 1))' = 2x \cdot f'(x^2 + 1) = x^3(x^2 - 1) = 2x \cdot \left[\frac{1}{2}x^2(x^2 - 1)\right], x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f'(x^2 + 1) = \frac{1}{2}x^2(x^2 - 1)$

Đặt $u = x^2 + 1 \Rightarrow f'(u) = \frac{1}{2}(u - 1)(u - 2)$. Ta cũng suy ra được $f'(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2)$

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 62: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn
 $f'(x) = (1-x)(x+2)g(x) + 2018$ với $g(x) < 0; \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số
 $y = f(1-x) + 2018x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(0; 3)$.

C. $(-\infty; 3)$.

D. $(3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$y' = -f'(1-x) + 2018 = -[1-(1-x)][(1-x)+2]g(1-x) - 2018 + 2018 = -x(3-x)g(1-x).$$

$$\text{Suy ra } y'(x) < 0 \Leftrightarrow x(3-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 3 \end{cases} \text{ (do } g(1-x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{)}$$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Câu 63: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn

$f'(x) = (1-x)(x+2)g(x) + 2018$ với $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(1-x) + 2018x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(0; 3)$.

C. $(-\infty; 3)$.

D. $(4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt: $y = h(x) = f(1-x) + 2018x + 2019$.

Ta có: $h'(x) = -f'(1-x) + 2018 = -x(3-x)g(1-x)$.

Xét $h'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x(3-x) \leq 0$

$$x(3-x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 3 \end{cases}.$$

$$\text{Xét } h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Vậy hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và $(3; +\infty)$ nên đáp án đúng là đáp án D

Câu 64: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm thỏa mãn $f'(x) = (4-x^2)g(x) + 2019$ với $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(1-x) + 2019x + 2020$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1; +\infty)$.

B. $(-\infty; 3)$.

C. $(3; +\infty)$.

D. $(-1; 3)$

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$y' = -f'(1-x) + 2019 = -[4-(1-x)^2]g(1-x) + 2019 = (x^2 - 2x - 3)g(1-x)$$

$$y' \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 3)g(1-x) \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 3 \end{cases};$$

$$(g(1-x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} : (\text{hữu hạn})$$

Suy ra hàm số $y = f(1-x) + 2019x + 2020$ nghịch biến trên nửa khoảng $[3; +\infty)$

Vậy hàm số $y = f(1-x) + 2019x + 2020$ nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$

Câu 65: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (1-x)(2+x)(\sin x + 2) + 2019$. Hàm số $y = f(1-x) + 2019x - 2018$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; 3)$. B. $(3; +\infty)$. **C. $(0; 3)$.** D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 1 - x$. Ta có $\begin{cases} y = g(t) = f(t) + 2019(1-t) - 2018 \\ f'(t) = (1-t)(t+2)(\sin t + 2) + 2019 \end{cases}$

$$g'(t) = f'(t) - 2019 = (1-t)(t+2)(\sin t + 2)$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases} \quad (\text{vì } \sin t + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R})$$

Hàm số $y = f(1-x) + 2019x - 2018$ nghịch biến khi và chỉ khi hàm số $y = g(t)$ đồng biến

Ta thấy $g'(t) > 0 \Leftrightarrow -2 < t < 1$. Vậy hàm $y = g(t)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$.

Suy ra hàm số $y = f(1-x) + 2019x - 2018$ nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.

Câu 66: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 4x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $(-\infty; -6)$. B. $(-6; 6)$. C. $(-6\sqrt{2}; 6\sqrt{2})$. D. $(-6\sqrt{2}; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = -\frac{1}{2}f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 4$. Hàm số $g(x)$ đồng biến khi $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) < 8$.

$$\text{Xét } f'(x) < 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 4.$$

$$\text{Suy ra } f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) < 8 \text{ khi và chỉ khi } -2 < 1 - \frac{x}{2} < 4 \Leftrightarrow -6 < x < 6.$$

Như vậy $g(x)$ nghịch biến trên $(-6; 6)$.

Câu 67: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (1-x)(2+x)(\sin x + 2) + 2019$. Hàm số $y = f(1-x) + 2019x - 2018$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(3; +\infty)$. **B. $(0; 3)$.** C. $(-\infty; 3)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = f(1-x) + 2019x - 2018$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = -f'(1-x) + 2019$

$$= -[1 - (1-x)] \cdot (2 + 1-x) [\sin(1-x) + 2] - 2019 + 2019$$

$$= -x(3-x) [\sin(1-x) + 2].$$

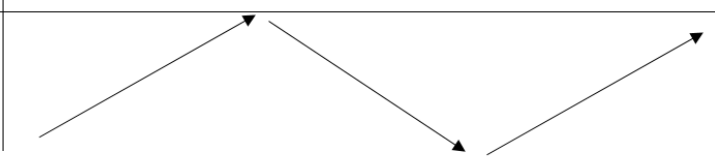
Mặt khác $\sin(1-x) + 2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } y' = 0 \Leftrightarrow -x(3-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Dấu của y' là dấu của biểu thức $-x(3-x)$.

Ta có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y							



Câu 68: Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(1-x) + 2019x - 2018$ nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty; -2)$.

B. $(-2; 1)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(2; 4)$.

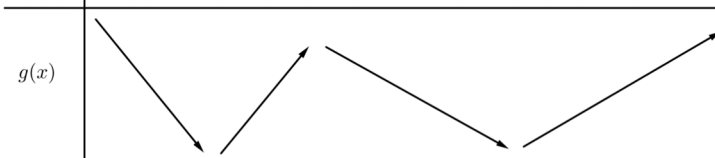
Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } g'(x) = f'\left(\frac{5x}{x^2+4}\right) \cdot \frac{5(-x^2+4)}{(x^2+4)^2}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{5x}{x^2+4}\right) \cdot \frac{5(-x^2+4)}{(x^2+4)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x}{x^2+4} = 0 \\ \frac{5x}{x^2+4} = 1 \\ \frac{5x}{x^2+4} = 2 \\ \frac{5(-x^2+4)}{(x^2+4)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 4 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	1	2	4	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$							

Vậy hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 69: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(f(f(x)))$. Hàm số $g(x) = F(x) - 3x$ nghịch biến trong khoảng nào sau đây?

A. $(-2\sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$.

B. $(-2; 1 + \sqrt{2})$.

C. $(2\sqrt{2}; 4)$.

D. $(0; 1 + \sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = f(f(f(x))) - 3$.

Trước hết ta tìm các nghiệm của phương trình $f(f(f(x))) - 3 = 0$.

Đặt $a = f(f(x))$, phương trình trở thành: $f(a) = 3 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases}$

Với $a = 3$: Suy ra $f(f(x)) = 3$. Ta đặt

$$b = f(x) \Rightarrow f(b) = 3 \Rightarrow b^2 - 2b = 3 \Leftrightarrow b^2 - 2b - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 3 \\ f(x) = -1 \end{cases}$$

Với $a = -1$ Suy ra $f(f(x)) = -1$. Ta cũng đặt $b = f(x)$.

$$\Rightarrow f(b) = -1 \Leftrightarrow b^2 - 2b = -1 \Leftrightarrow (b-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (f(x)-1)^2 = 0.$$

Vậy ta được:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f(f(f(x))) - 3 = (f(x) - 3)(f(x) + 1)(f(x) - 1)^2 \\ &= (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x - 1)^2 \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	-1	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 3)$.

Cách 2:

Ta có $g'(x) = f(f(f(x))) - 3$.

$$g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(f(f(x))) \leq 3.$$

Theo đề ra ta có $f(x) = x^2 - 2x \Rightarrow f(x) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Vậy $f(f(f(x))) \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq f(f(x)) \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$

Bên cạnh đó $g'(x)$ là hàm đa thức nên $g'(x) = 0$ tại hữu hạn điểm.

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 3)$.

Câu 70: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2(x-5)^3$. Hàm số $g(x) = f(10-5x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 1)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(2; +\infty)$.

D. $(1; 3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = (10-5x)' \cdot f'(10-5x) = -5 \cdot f'(10-5x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(10-5x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 10-5x=0 \\ 10-5x=-2 \\ 10-5x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{12}{5} \\ x=1 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	1	2	$\frac{12}{5}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 71: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x) = g(x) \cdot (x-2)(x^2-9) + 2020$ trong đó $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y = f(1-x) + 2020x - 1$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-4; -1)$.

B. $(-1; 4)$.

C. $(3; 5)$.

D. $(5; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = -f'(1-x) + 2020$

$$y' \leq 0 \Leftrightarrow -f'(1-x) + 2020 \leq 0 \Leftrightarrow -g(1-x)(1-x-2)((1-x)^2-9) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x-2)((1-x)^2-9) \leq 0 \Leftrightarrow (-x-1)(x^2-2x-8) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq -1 \\ x \geq 4 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số $y = f(1-x) + 2020x - 1$ nghịch biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

Câu 72: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ và hàm số $y = g(x) = -2019f(12-x) + e^{2020}$. Chọn đáp án đúng?

A. $g(18) > g(20)$.

B. $g(12) < g(14)$.

C. $g(10) < g(12)$.

D. $g(2019) > g(2020)$.

Lời giải

Chọn B

+ Ta có bảng biến thiên của hàm số: $f'(x) = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f(x)'$	+	0	-	0	+
$f(x)$					$+\infty$
	$-\infty$				

Từ đó ta thấy: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \\ x \in (2; +\infty) \end{cases}$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2)$.

+ Lại có: $g'(x) = 2019 f'(12 - x)$

Do đó: $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2019 f'(12 - x) > 0 \Leftrightarrow f'(12 - x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - x < 0 \\ 12 - x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 12 \\ x < 10 \end{cases}$

và $g'(x) < 0 \Leftrightarrow 2019 f'(12 - x) < 0 \Leftrightarrow f'(12 - x) < 0 \Leftrightarrow 0 < 12 - x < 2 \Leftrightarrow 10 < x < 12$

hay hàm số $y = g(x) = -2019 f(12 - x) + e^{2020}$ đồng biến trên $(-\infty; 10)$ và $(12; +\infty)$; nghịch biến trên $(10; 12)$. Vậy,

- ☐ $g(18) < g(20)$ suy ra loại A.
- ☐ $g(12) < g(14)$ suy ra B đúng.
- ☐ $g(10) > g(12)$ suy ra loại C.
- ☐ $g(2019) < g(2020)$ suy ra loại D.

Câu 73: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(1 - x) = x^2 + 2x$. Hàm số $y = f(\sqrt{x^2 - 2x + 2})$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 1)$.

B. $(-3; -2)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(1; 3)$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \diamond f'(1 - x) &= x^2 + 2x = (1 - x)^2 + 2x - 1 + 2x \\ &= (1 - x)^2 - 4(1 - x) + 4 - 1 = (1 - x)^2 - 4(1 - x) + 3. \\ \Rightarrow f'(x) &= x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(1)$	$f(3)$	$+\infty$	

$\diamond$ Đặt: $g(x) = f(\sqrt{x^2 - 2x + 2})$.

+) Ta có:

$$g'(x) = (\sqrt{x^2 - 2x + 2})' [f(\sqrt{x^2 - 2x + 2})]' = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}} \cdot f'(\sqrt{x^2 - 2x + 2}) \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ f'(\sqrt{x^2 - 2x + 2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 1 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (x - 1)^2 = 0 \\ x^2 - 2x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 + 2\sqrt{2} \\ x = 1 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } x = 4 \Rightarrow g'(4) = \frac{2.4-2}{2\sqrt{4^2-2.4+2}} \cdot f'(\sqrt{4^2 - 2.4 + 2}) = \frac{3\sqrt{10}}{10} \cdot f'(\sqrt{10}) > 0.$$

Bảng biến thiên $y = g(x)$:

x	$-\infty$	$1-2\sqrt{2}$	1	$1+2\sqrt{2}$	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$			$g(1)$		$+\infty$
		$g(1-2\sqrt{2})$		$g(1+2\sqrt{2})$		

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Dạng 4: Tính đơn điệu của hàm liên kết $h(x) = f(u) + g(x)$ biết các BBT, BXD**Câu 74:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'(x)$ như sau :

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x) + 2020$ có bao nhiêu điểm **cực tiểu** ?**A.** 1.**B.** 2.**C.** 3.**D.** 4.**Lời giải****Chọn A**Ta có $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo BBT } f'(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

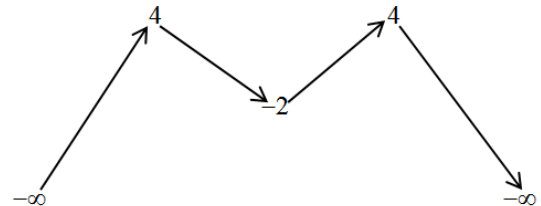
x	$-\infty$	-1	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	3	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
g							

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **Chọn A**Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(3; +\infty)$

$$\bullet x \in (3; +\infty) \rightarrow 2x - 2 > 0. \quad (1)$$

$$\bullet x \in (3; +\infty) \rightarrow x^2 - 2x > 3 \xrightarrow{\text{theo BBT } f'(x)} f'(x^2 - 2x) < 0. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x) < 0$ trên khoảng $(3; +\infty)$ nên $g'(x)$ mang dấu $-$.Nhận thấy các nghiệm $x = \pm 1$ và $x = 3$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.**Câu 75:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên.

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y								

Khi đó hàm số $y = \frac{1}{f(x) + 3}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?**A.** $(-3; 0)$ và $(2; +\infty)$.**B.** $(1; +\infty)$.**C.** $(-3; 0)$.**D.** $(0; 3)$.**Lời giải****Chọn C**Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra $f(x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$ (với $a < -3$ và $b > 3$).Do đó hàm số $y = \frac{1}{f(x) + 3}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{a; b\}$.

$$\text{Đạo hàm } y' = -\frac{[f(x)+3]'}{[f(x)+3]^2} = -\frac{f'(x)}{[f(x)+3]^2}.$$

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Suy ra bảng biến thiên:

x	$-\infty$	a	-3	0	3	b	$+\infty$
y'			$-$	0	$+$	0	$-$
y			$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $y = \frac{1}{f(x)+3}$ đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$.

Câu 76: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình. Hỏi hàm số $y = f(x) - \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 2023$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$	-5	-2	2	7	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

A. $(-2; 2)$

B. $(-1; 1)$

C. $(2; 4)$

D. $(5; +\infty)$

Lời giải

Chọn B

Để thấy hàm số $y = f(x) - \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 2023$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Và $y' = f'(x) - x^2 + 4x + 5$. (*)

Ta có $-x^2 + 4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5$.

Hàm số $y = f(x) - \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 2023$ đồng biến khi và chỉ khi $y' \geq 0$.

Từ (*) ta thấy nếu $f'(x) \geq 0$ thì suy ra $y' \geq 0$, còn nếu $f'(x) \leq 0$ hoặc $-x^2 + 4x + 5 \leq 0$ thì chưa kết luận được y' luôn không âm.

Dựa vào bảng xét dấu ta có $\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ -x^2 + 4x + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$.

Vậy hàm số $y = f(x) - \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 2023$ luôn đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$.

Câu 77: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Hàm số $y = f(x-3) - \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 2019$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; 1)$.

B. $(5; +\infty)$.

C. $(2; 4)$.

D. $(1; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x) = f(x-3) - \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 2019$.

Ta có $g'(x) = f'(x-3) - x^2 + 4x$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến thì $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x-3) > x^2 - 4x$.

Bất phương trình trên không thể giải trực tiếp được, do vậy ta sẽ chọn điều kiện để

$$\begin{cases} f'(x-3) > 0 \\ x^2 - 4x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x-3 < 1 \\ x-3 > 3 \\ 0 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 4 \\ x > 6 \\ 0 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 4.$$

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; 4)$.

Câu 78: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau.

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$			
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	0	+

Hàm số $y = 3f(2x+1) - 4x^3 + 9x^2 - 6x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; 3)$. B. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. D. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 6f'(2x+1) - 12x^2 + 18x - 6 = 6(f'(2x+1) - (2x-1)(x-1))$

Từ bảng dấu của $f'(x)$, ta suy ra được dấu của $f'(2x+1)$ và $-(2x-1)(x-1)$ như sau:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$				
$f'(2x+1)$	-	0	+	0	+	0	-	0	+	
$-(2x-1)(x-1)$		-		0	+	0		-		
y'	-	$kh\hat{o}ng\,XĐ^0$					+	0	-	$kh\hat{o}ng\,XĐ$

Từ bảng xét dấu suy ra, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Câu 79: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	5	$+\infty$			
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hỏi hàm số $y = f(2-x) + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 2021$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(1; 3)$. B. $(-1; 1)$. C. $(-3; -2)$. D. $(-\infty; -3)$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} y &= f(2-x) + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 2021 \Rightarrow y' = f'(2-x)(2-x)' + x^2 - 4x - 5 \\ &= -f'(2-x) + x^2 - 4x - 5 \end{aligned}$$

Xét khoảng $(1; 3) \Rightarrow \begin{cases} 2-x \in (-1; 1) \Rightarrow -f'(2-x) < 0 \\ x^2 - 4x - 5 \in (-9; -8) \end{cases} \Rightarrow y' < 0$ hàm số nghịch biến

□ Xét khoảng $(-1; 1) \Rightarrow \begin{cases} 2-x \in (1; 3) \Rightarrow -f'(2-x) > 0 \\ x^2 - 4x - 5 \in (-8; 0) \end{cases}$

□ Xét khoảng $(-3; -2) \Rightarrow \begin{cases} 2-x \in (4; 5) \Rightarrow -f'(2-x) > 0 \\ x^2 - 4x - 5 \in (7; 16) \end{cases} \Rightarrow y' > 0$ hàm số đồng biến

□ Xét khoảng $(-\infty; -3) \Rightarrow \begin{cases} 2-x \in (5; +\infty) \Rightarrow -f'(2-x) < 0 \\ x^2 - 4x - 5 \in (0; +\infty) \end{cases}$.

Câu 80: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$			
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	0	+

Hàm số $y = 3f(x+2) - 3x^2 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(1; +\infty)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1

Ta có $y' = 3f'(x+2) - 6x + 3 = 3f'(x+2) - 6(x+2) + 15$.

Hàm số $y = 3f(x+2) - 3x^2 + 3x$ đồng biến trên D $\Leftrightarrow 3f'(x+2) - 6(x+2) + 15 \geq 0 \quad \forall x \in D$

$\Leftrightarrow f'(x+2) - 2(x+2) + 5 \geq 0 \quad \forall x \in D \Leftrightarrow f'(t) \geq 2t - 5 \quad \forall t \in D_1 (*)$, $t = x+2$.

+ Với $t \in (-\infty; 1)$

$\Rightarrow \begin{cases} f'(t) < 0 \\ 2t - 5 < 0 \end{cases} \Rightarrow$ Chưa kết luận được tính đúng-sai cho (*) (loại).

+ Với $t \in (1; 2)$

$\Rightarrow \begin{cases} f'(t) > 0 \\ 2t - 5 < 0 \end{cases} \Rightarrow (*)$ luôn đúng $\Rightarrow 1 < t < 2 \Leftrightarrow 1 < x+2 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch

biến trên $(-1; 0) \Rightarrow$ đáp án C đúng.

+ Với $t \in (2; 3) \Rightarrow \begin{cases} f'(t) > 0 \\ 2t - 5 < 0 \text{ vôùi } t \in \left(2; \frac{5}{2}\right] \\ 2t - 5 > 0 \text{ vôùi } t \in \left(\frac{5}{2}; 3\right) \end{cases} \Rightarrow$ chưa kết luận tính đúng sai cho (*) (loại)

+ Với $t \in (3; 4) \Rightarrow \begin{cases} f'(t) < 0 \\ 2t - 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow (*)$ sai (loại).

+ Với $t \in (4; +\infty) \Rightarrow \begin{cases} f'(t) > 0 \\ 2t - 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ chưa kết luận tính đúng sai cho (*) (loại).

Cách 2:

Ta có $g(x) = f'(x) = 3f'(x+2) + (-6x+3)$.

$f'(x+2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 < 1 \\ 3 < x+2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$.

$$* f'(x+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=1 \\ x+2=2 \\ x+2=3 \\ x+2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases}.$$

$$* -6x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$				
$3f'(x+2)$	$-$	0	$+$	0	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$-6x+3$	$+$	9	$+$	3	$+$	0	$-$	-3	$-$	-9	$-$
$g(x)$	<i>chưa xác định</i>	9	$+$	3	$+$	<i>chưa xác định</i>	-3	$-$	-9	<i>chưa xác định</i>	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Cách 3: Trắc nghiệm

Xét $y = 3f(x+2) - 3x^2 + 3x$.

$$y' = 3[f'(x+2) - 2x + 1].$$

Ta có $y'(2) = 3[f'(4) - 3] < 0$ nên loại đáp án A

$y'(-3) = 3[f'(-1) - 3] < 0$ nên loại đáp án B

$y'(1) = 3[f'(3) - 3] < 0$ nên loại đáp án D

Vậy ta chọn đáp án C

Câu 81: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3	0	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Biết: $1 < f(x) < 5, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó, hàm số $g(x) = f(f(x)-1) + x^3 + 3x^2 + 2020$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây:

A. $(-2;0)$.

B. $(0;5)$.

C. $(-2;5)$.

D. $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x)-1) + 3x^2 + 6x$.

Vì $1 < f(x) < 5, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 < f(x)-1 < 4$.

Từ bảng xét dấu của $f'(x) \Rightarrow 0 < f'(f(x)-1) < 0$.

Từ đó, ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	0	5	$+\infty$		
$f'(x) \cdot f'(f(x)-1)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$3x^2+6x$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

Do đó, hàm $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 82: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$			
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Gọi $g(x) = 2f(1-x) + \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - 5$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$. **B.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$. **D.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Xét $g'(x) = -2f'(1-x) + x^3 - 3x^2 + 2x = -2f'(1-x) - (1-x)^3 + 1 - x$

Đặt $1-x = t$, khi đó $g'(x)$ trở thành $h(t) = -2f'(t) - t^3 + t$

Bảng xét dấu

t	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$			
$-2f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$t^3 - t$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$-$
$h(t)$	Không xác định		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Từ bảng xét dấu ta suy ra $h(t)$ nhận giá trị dương trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(0; 1)$, nhận giá trị âm trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

$\Rightarrow$ hàm số $g'(x)$ nhận giá trị dương trên $(2; 3)$ và $(0; 1)$, nhận giá trị âm trên $(1; 2)$ và $(-\infty; 0)$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 83: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = g(x) = f(x^2) + \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} - 6x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-2; -1)$. **B.** $(1; 2)$. **C.** $(-6; -5)$. **D.** $(-4; -3)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có $y' = g'(x) = 2xf'(x^2) + 2x^3 + 2x^2 - 12x$.

Đặt $h(x) = 2x^3 + 2x^2 - 12x$.

Bảng xét dấu $h(x)$:

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$			
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Đối với dạng toán này ta thay từng phương án vào để tìm ra khoảng đồng biến của $g(x)$.

$$\text{Với } x \in (-2; -1) \Rightarrow \begin{cases} x^2 \in (1; 4) \Rightarrow f'(x^2) < 0 \\ x < 0 \\ h(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xf'(x^2) > 0 \\ h(x) > 0 \end{cases}.$$

$\Rightarrow 2xf'(x^2) + 2x^3 + 2x^2 - 12x > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$. Vậy $g(x)$ đồng biến trong khoảng $(-2; -1)$.

$$\text{Với } x \in (1; 2) \Rightarrow \begin{cases} x^2 \in (1; 4) \Rightarrow f'(x^2) < 0 \\ x > 0 \\ h(x) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xf'(x^2) < 0 \\ h(x) \leq 0 \end{cases}.$$

$\Rightarrow 2xf'(x^2) + 2x^3 + 2x^2 - 12x < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$. Vậy $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(1; 2)$.

Kết quả tương tự với $x \in (-6; -5)$ và $x \in (-4; -3)$.

Cách 2:

Ta có $g'(x) = 2x[f'(x^2) + x^2 + x - 6]$.

Bảng xét dấu của $g'(x)$ trên các khoảng $(-6; -5)$, $(-4; -3)$, $(-2; -1)$, $(1; 2)$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2
$2x$	$-$		$-$		$-$		$+$	
$x^2 + x - 6$	$+$		$+$		$-$		$-$	
$f'(x^2)$	$+$		$+$		$-$		$-$	
$g'(x)$	$-$		$-$		$+$		$-$	

Từ bảng xét dấu ta chọn hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$

Câu 84: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y = g(x) = 2f(1-x) - \frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{4}x^4 - 3x^3$.

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(2; 3)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Coi $f'(x) = (x+2)(x+1)x(x-1)$ có bảng xét dấu như trên.

$$g'(x) = -2f'(1-x) - x^4 + 5x^3 - 6x^2$$

Ta đi xét dấu $g'(x) = P + Q$. Với:

$$P = -2f'(1-x) = -2(3-x)(2-x)(1-x)(-x) = 2x(3-x)(2-x)(1-x)$$

Bảng xét dấu của P

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
P		-	0	+	0	-

$$Q = -x^4 + 5x^3 - 6x^2 = -x^2(x-2)(x-3)$$

Bảng xét dấu của Q

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$		
Q	-	0	-	0	+	0	-

Từ hai BXD của P, Q . Ta có $P > 0, Q > 0$ với $\forall x \in (2; 3)$ nên $g'(x) = P + Q > 0$ với $\forall x \in (2; 3)$.

Câu 85: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$		
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Biết $f(x) > 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x) = f(3 - 2f(x)) - x^3 + 3x^2 - 2020$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; 4)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x) = -2f'(x)f'(3 - 2f(x)) - 3x^2 + 6x$.

Vì $f(x) > 2, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $3 - 2f(x) < -1 \forall x \in \mathbb{R}$

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ suy ra $f'(3 - 2f(x)) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Từ đó ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	4	$+\infty$
$-f'(x)f'(3 - 2f(x))$	-	0	+	+	0	-	+
$-3x^2 + 6x$	-	-	0	+	0	-	-

Từ bảng xét dấu trên, loại trừ đáp án suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$.

Câu 86: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0) < 0$ và $[f(x) - 4x]f(x) = 9x^4 + 2x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x) + 4x + 2020$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-1; +\infty)$.

B. $(1; +\infty)$.

C. $(-\infty; 1)$.

D. $(-1; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $[f(x) - 4x]f(x) = 9x^4 + 2x^2 + 1$

$$\Leftrightarrow [f(x)]^2 - 4x.f(x) + 4x^2 = 9x^4 + 6x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow [f(x) - 2x]^2 = (3x^2 + 1)^2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 2x = 3x^2 + 1 \\ f(x) - 2x = -3x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 3x^2 + 2x + 1 \\ f(x) = -3x^2 + 2x - 1 \end{cases}$$

Theo giả thiết $f(0) < 0$ nên chọn $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$

Khi đó $g(x) = f(x) + 4x + 2020 = -3x^2 + 6x + 2019, x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = -6x + 6; g'(x) < 0 \Leftrightarrow -6x + 6 < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 87: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn:

x	$-\infty$	-2	0	2	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(3-x) - x - \sqrt{x^2 + 2}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(3; 5)$.

B. $(-\infty; 1)$.

C. $(2; 6)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = -f'(3-x) - 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} \Leftrightarrow y' = -\left(f'(3-x) + 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}\right).$$

$$\text{Ta thấy } f'(3-x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 3-x < 0 \\ 3-x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 5 \\ x < 0 \end{cases};$$

Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(3; 5)$ thì $1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$ đều có giá trị dương.

Suy ra trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(3; 5)$ thì: $f'(3-x) + 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} > 0 \Rightarrow y' < 0$

Vậy hàm số $y = f(3-x) - x - \sqrt{x^2 + 2}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(3; 5)$.

Câu 88: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = -[f(x)]^3 + 2[f(x)]^2 - 2f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; 0)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(2; 3)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = -3[f(x)]^2 f'(x) + 4[f(x)]f'(x) - 2f'(x)$$

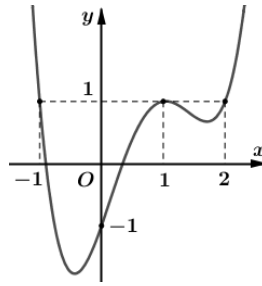
Hàm số $y = -[f(x)]^3 + 2[f(x)]^2 - 2f(x)$ nghịch biến

$$\Leftrightarrow -3[f(x)]^2 f'(x) + 4[f(x)]f'(x) - 2f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x)[-3[f(x)]^2 + 4[f(x)] - 2] < 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) > 0 \text{ (vì } -3[f(x)]^2 + 4[f(x)] - 2 < 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x > 2 \end{cases}.$$

Dạng 5: Tính đơn điệu của hàm liên kết $h(x) = f(u) + g(x)$ biết các đồ thị

Câu 89: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Đặt $g(x) = f(x) - x$, khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $g(2) < g(-1) < g(1)$.

B. $g(1) < g(-1) < g(2)$.

C. $g(-1) > g(1) > g(2)$.

D. $g(-1) < g(1) < g(2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1; x = 2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $g'(x) = f'(x) - 1 \leq 0, \forall x \in [-1; 2]$ và chỉ bằng không tại ba điểm $x = \pm 1; x = 2$. Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-1; 2]$.

Vậy $g(-1) > g(1) > g(2)$.

Câu 90: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt $y = g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$. **B.** Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị.

C. Hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$. **D.** Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Lời giải

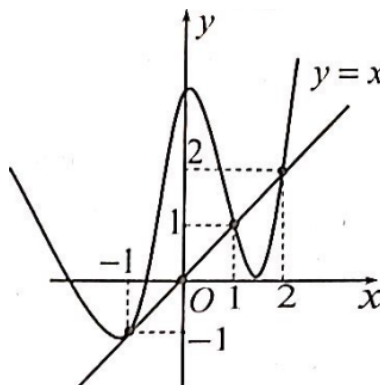
Chọn D

Ta có: $g'(x) = f'(x) - x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x (*)$.

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x$.

Dựa vào hình bên ta thấy giao tại 3 điểm $(-1; -1); (1; 1); (2; 2)$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$



Bảng xét dấu $g'(x)$:

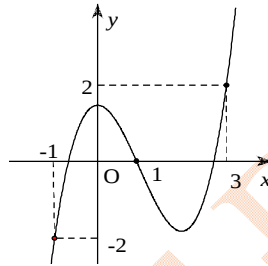
x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$		
$g'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy hàm số $y = g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$.

Đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 91: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 2020$.



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(1; 3)$.

B. Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị đại.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1; 1)$.

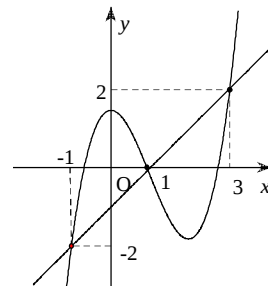
D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2x + 2 = 2[f'(x) - (x-1)]$.

Dựa vào hình vẽ ta thấy đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại 3 điểm: $(-1; -2)$, $(1; 0)$, $(3; 2)$.



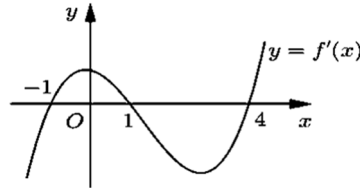
Dựa vào đồ thị ta có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2[f'(x) - (x-1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2[f'(x) - (x-1)] > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 3 < x \end{cases}$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow 2[f'(x) - (x-1)] < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 3 \end{cases}$$

Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(3-2x) + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1; 2)$.B. $(2; +\infty)$.C. $(-\infty; 1)$.D. $(-1; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = f(3-2x) + 2019 \Rightarrow g'(x) = -2f'(3-2x)$.

Cách 1: Hàm số nghịch biến khi $g'(x) = -2f'(3-2x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 3-2x < 1 \\ 3-2x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ . Chọn đáp án A}$$

Cách 2: Lập bảng xét dấu

$$g'(x) = -2f'(3-2x) = 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x = -1 \\ 3-2x = 1 \\ 3-2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

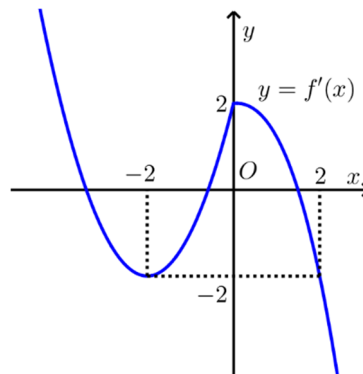
Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$		
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Lưu ý : cách xác định dấu của $g'(x)$. Ta lấy $3 \in (2; +\infty)$, $g'(3) = -2 \cdot f'(3-2 \cdot 3) = -2f'(-3) > 0$ (vì theo đồ thị thì $f'(-3)$ nằm dưới trục Ox nên $f'(-3) < 0$)

Dựa vào bảng xét dấu, ta chọn đáp án A

Câu 93: Cho hàm số $f(x)$ có mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = f(x-1) + x^2 - 2x$ đồng biến trên khoảng

A. $(1; 2)$.B. $(-1; 0)$.C. $(0; 1)$.D. $(-2; -1)$.

Lời giải

Chọn A

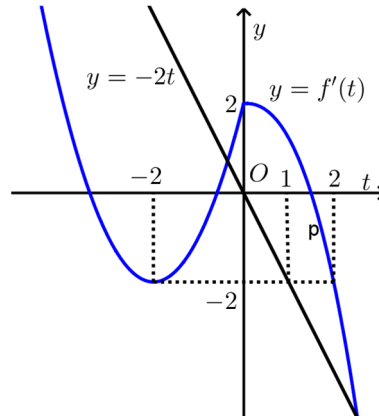
Ta có $y = f(x-1) + x^2 - 2x$

Khi đó $y'(x) = f'(x-1) + 2x - 2$. Hàm số đồng biến khi

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow f'(x-1) + 2(x-1) \geq 0 \quad (1)$$

Đặt $t = x-1$ thì (1) trở thành $f'(t) + 2t \geq 0 \Leftrightarrow f'(t) \geq -2t$.

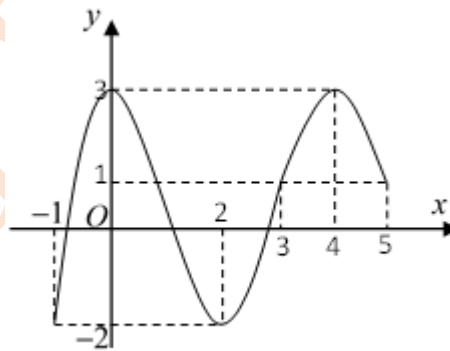
Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -2t$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Khi đó ta thấy với $t \in (0;1)$ thì đồ thị hàm số $y = f'(t)$ luôn nằm trên đường thẳng $y = -2t$.

Suy ra $f'(t) + 2t > 0, \forall t \in (0;1)$. Do đó $\forall x \in (1;2)$ thì hàm số $y = f(x-1) + x^2 - 2x$ đồng biến.

Câu 94: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ được cho như hình bên dưới. Hàm số $y = -2f(2-x) + x^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?



A. $(-1;0)$.

B. $(0;2)$.

C. $(-3;-2)$.

D. $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = -2f(2-x) + x^2$ trên $[-3;2]$ có

$$y' = 2f'(2-x) + 2x; y' = 0 \Leftrightarrow f'(2-x) = -x \quad (*)$$

Đặt $2-x = t \Rightarrow t \in [0;5] \Rightarrow (*)$ có dạng $f'(t) = t-2$

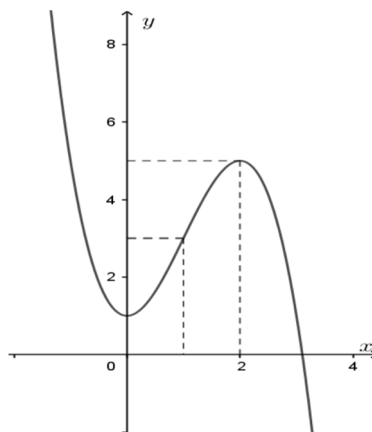
$$\text{Dựa vào đồ thị suy ra } f'(t) = t-2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = t_0 \in (4;5) \\ t = t_1 \in (0;2) \end{cases} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 - t_0 = x_0 \in (-3;-2) \\ x = 2 - t_1 = x_1 \in (0;2) \end{cases}$$

BBT

x	-3	x_0	-2	-1	0	x_1	2
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	$y(-3)$	$y(x_0)$		$y(-1)$		$y(x_1)$	$y(2)$

Từ BBT suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Câu 95: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn, có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(5-2x) + 4x^2 - 10x$ đồng biến trên các khoảng nào sau đây?



- A. $(3; 4)$. **B. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.** C. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. D. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

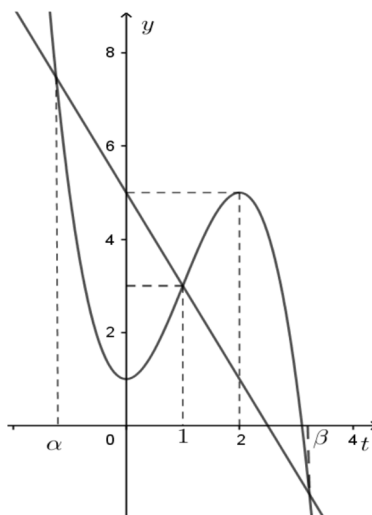
Chọn B

$$\text{Đặt } g(x) = f(5-2x) + 4x^2 - 10x \Rightarrow g'(x) = -2f'(5-2x) + 8x - 10.$$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2f'(5-2x) + 8x - 10 = 0 \Leftrightarrow f'(5-2x) = 4x - 5.$$

$$\text{Đặt } t = 5-2x \text{ ta có phương trình } f'(t) = -2t + 5$$

Vẽ đồ thị hai hàm số $y = f'(t)$ và $y = -2t + 5$ trên cùng một hệ trục tọa độ.



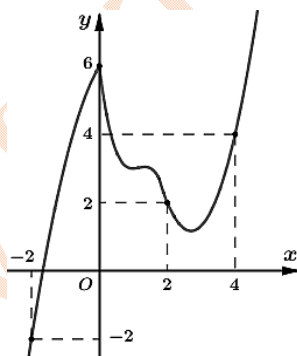
Ta có hoành độ các giao điểm:
$$\begin{cases} t = \alpha, \alpha < 0 \\ t = 1 \\ t = \beta, \beta > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in \left(\frac{5}{2}; +\infty\right) \\ x = 2 \\ x = x_2 \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right) \end{cases}.$$

Do đó $g(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	x_2	2	x_1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y								

Căn cứ vào bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 96: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(3-4x) - 8x^2 + 12x + 2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

B. $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

C. $\left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

D. $\left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn A

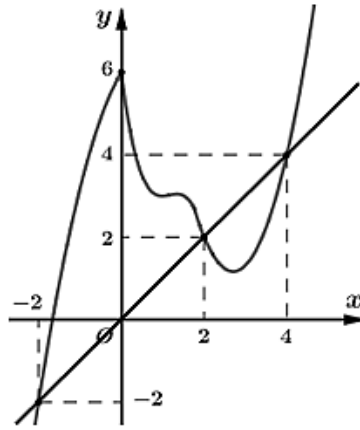
Ta có $g'(x) = -4f'(3-4x) - 16x + 12$

Để $g(x) = f(3-4x) - 8x^2 + 12x + 2020$ nghịch biến thì $g'(x) = -4f'(3-4x) - 16x + 12 < 0$.

$$\Rightarrow -4f'(3-4x) < 16x - 12 \Rightarrow f'(3-4x) > -4x + 3.$$

Đặt $3-4x = t$.

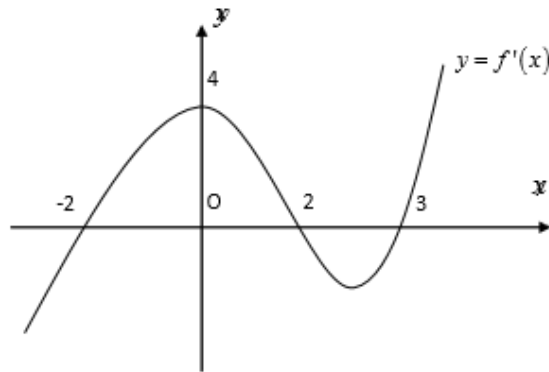
Khi đó ta có $f'(t) > t$ (Vẽ thêm đường thẳng $y = x$).



Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $\begin{cases} -2 < t < 2 \\ t > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < 3-4x < 2 \\ 3-4x > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} < x < \frac{5}{4} \\ x < \frac{-1}{4} \end{cases}$.

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{-1}{4}\right)$ và $\left(\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

Câu 97: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = 3f(x-2) - x^3 + 2019$ tăng trên đoạn $[a; b]$ với $a, b \in \mathbb{R}, b < 12$. Giá trị $T = \min a + \max b$ là

A. 3.

B. -5.

C. 2.

D. 4.

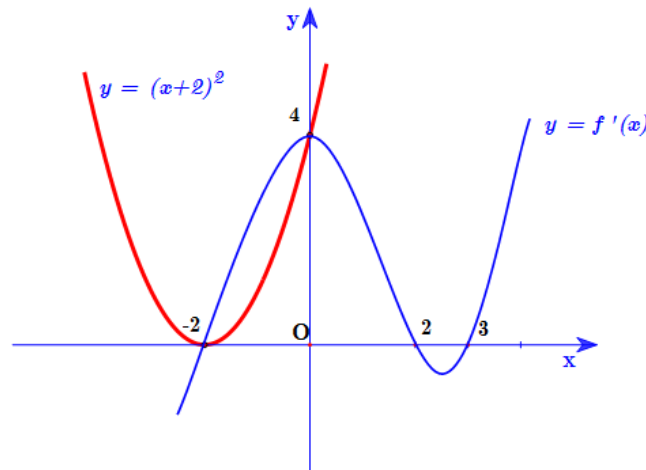
Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x) = 3f(x-2) - x^3 + 2019 \Rightarrow g'(x) = 3[f'(x-2) - x^2]$.

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x-2) > x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} X = x-2 \\ f'(X) > (X+2)^2 \end{cases}$$

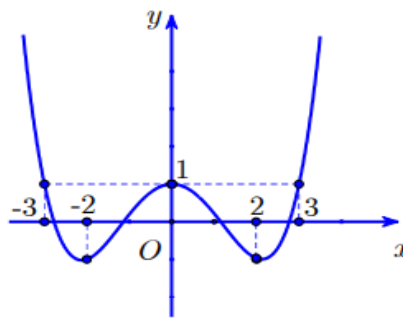
Vẽ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = (x+2)^2$ trên cùng hệ tọa độ ta được



Dựa vào hình vẽ ta có: $\begin{cases} X = x - 2 \\ f'(X) > (X + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - 2 \\ -2 < X < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x - 2 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$

$\Rightarrow y = g(x)$ đồng biến trên $(0; 2)$, mà $g(x) = 3f(x-2) - x^3 + 2019$ liên tục trên $[0; 2]$ nên nó đồng biến trên đoạn $[0; 2] \Rightarrow y = g(x)$ đồng biến trên mọi $[a; b] \subset [0; 2]$ nên $\min a = 0, \max b = 2 \Rightarrow T = 2$

Câu 98: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Hàm số $y = f(2x-1) + \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-6; -3)$.

B. $(3; 6)$.

C. $(6; +\infty)$.

D. $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 2f'(2x-1) + x^2 + 2x - 2 = 2f'(2x-1) + (x+1)^2 - 3$

Nhận xét: Hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$ và $f'(x) \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -3 \end{cases}$

Do đó ta xét các trường hợp:

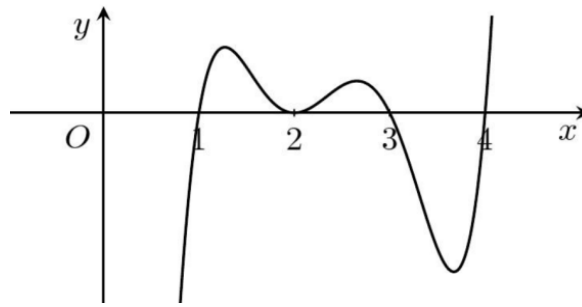
Với $-6 < x < -3 \Rightarrow -13 < 2x-1 < -7$ suy ra $y' > 0$ hàm số đồng biến (loại)

Với $3 < x < 6 \Rightarrow 5 < 2x-1 < 11$ suy ra $y' > 0$ hàm số đồng biến (loại)

Với $x > 6 \Rightarrow 2x-1 > 11$ suy ra $y' > 0$ hàm số đồng biến (loại)

Với $-1 < x < 0 \Rightarrow -3 < 2x-1 < -1$ nên $2f'(2x-1) \leq 2$ và $-3 < (x+1)^2 - 3 < -2$ suy ra $y' < 0$ hàm số nghịch biến (nhận).

Câu 99: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x^2 - 2) - \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 4\right)$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -\sqrt{3})$. B. $(-3; 0)$. **C. $(1; \sqrt{3})$.** D. $(-\sqrt{3}; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Chọn $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)(x-4)$

Đặt $y = g(x) = f(x^2 - 2) - \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 4\right)$.

Khi đó $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 2) - (x^2 + 2x - 3)$.

$$= 2x \cdot (x^2 - 2 - 1)(x^2 - 2 - 2)^2(x^2 - 2 - 3)(x^2 - 2 - 4) - (x^2 + 2x - 3)$$

$$= 2x \cdot (x^2 - 3)(x^2 - 4)^2(x^2 - 5)(x^2 - 6) - (x^2 + 2x - 3)$$

$$g'(-2) = 3 > 0$$

$$g'(3) = 10788 > 0$$

Cách 2: (TV phản biện)

Ta có $y' = g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 2) - (x^2 + 2x - 3)$

$$\text{Từ đồ thị ta có } f'(x^2 - 2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 < 1 \\ 3 < x^2 - 2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \\ x \in (-\sqrt{6}; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; \sqrt{6}) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 2xf'(x^2 - 2) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (-\sqrt{5}; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{5}; \sqrt{6})$$

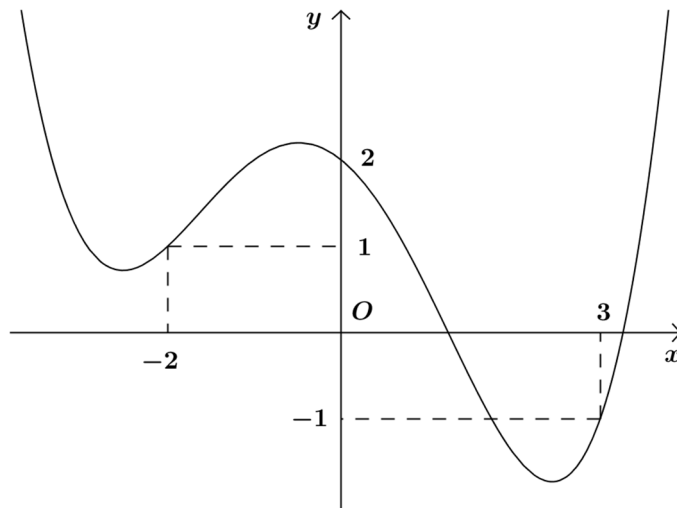
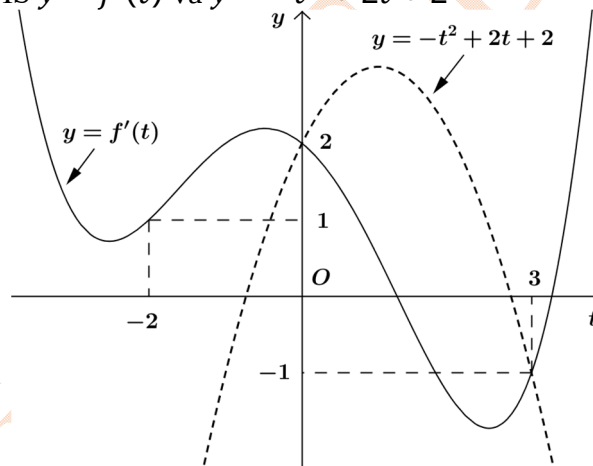
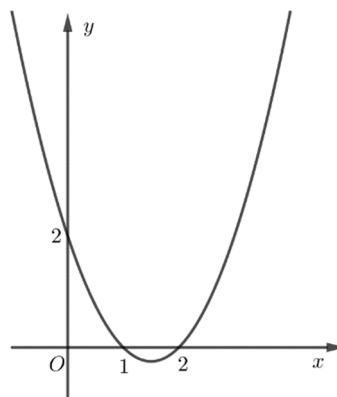
Nên ta lập được bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-3	$-\sqrt{6}$	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{3}$	0	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$+\infty$
$2xf'(x^2 - 2)$	-	-	0	+	0	-	0	+	0	-	+
$-x^2 - 2x + 3$	-	0	+	+	+	+	+	-	-	-	-
y'	-	0	0	+	0	0	+	0	0	-	-

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$, $(1; \sqrt{3})$ và $(\sqrt{5}; \sqrt{6})$.

Vậy đáp án đúng là đáp án

Câu 100: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(x + 1) + \frac{x^3}{3} - 3x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-1; 2)$.**B.** $(-2; 0)$.**C.** $(0; 4)$.**D.** $(1; 5)$.**Lời giải****Chọn A**Ta có $g'(x) = f'(x+1) + x^2 - 3 = f'(x+1) + (x+1)^2 - 2(x+1) - 2$.Khi đó $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x+1) \leq -(x+1)^2 + 2(x+1) + 2$ (1)Đặt $t = x+1$. BPT (1) trở thành $f'(t) \leq -t^2 + 2t + 2$ (2)Xét tương giao của ĐTHS $y = f'(t)$ và $y = -t^2 + 2t + 2$ ta có nghiệm của BPT là $0 \leq t \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x+1 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$.Suy ra hàm số $g(x) = f(x+1) + \frac{x^3}{3} - 3x$ nghịch biến trên $(-1; 2)$.**Câu 101:** Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường parabol như hình vẽ. Hàm số $y = f(1-x^2) + 6x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?**A.** $(-\infty; -1)$.**B.** $(\sqrt{2}; +\infty)$.**C.** $(-\sqrt{2}; 0)$.**D.** $(1; \sqrt{2})$.**Lời giải****Chọn D**

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua 3 điểm $(2; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 2)$ nên hàm số $y = f'(x)$ có dạng $y = f'(x) = x^2 - 3x + 2$.

Xét hàm số $y' = [f(1 - x^2) + 6x^2]' = -2xf'(1 - x^2) + 12x$

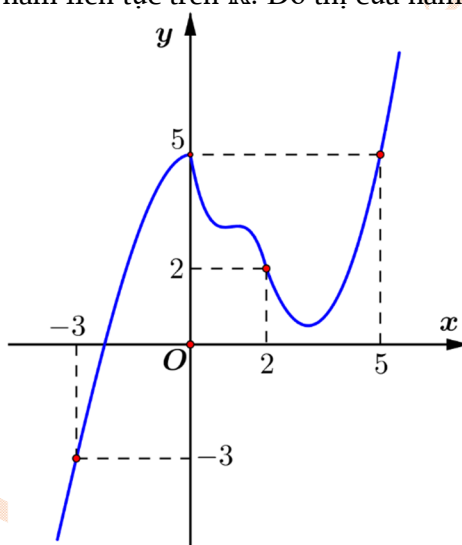
$= -2x[(1 - x^2)^2 - 3(1 - x^2) + 2] + 12x = -2x(x^4 + x^2 - 6) = -2x(x^2 - 2)(x^2 + 3)$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(1 - x^2) + 6x^2$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y									
	$-\infty$								$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(0; \sqrt{2}) \Rightarrow$ hàm số $y = f(1 - x^2) + 6x^2$ đồng biến trên khoảng $(1; \sqrt{2})$.

Câu 102: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(-2x + 1) + (x + 1)(-2x + 4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; -\frac{1}{2})$.

B. $(-\infty; -2)$.

C. $(-\frac{1}{2}; +\infty)$.

D. $(-\frac{1}{2}; 2)$.

Lời giải

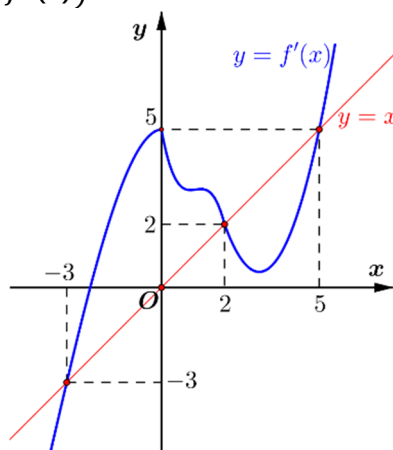
Chọn A

Xét $g(x) = f(-2x + 1) + (x + 1)(-2x + 4) = f(-2x + 1) - 2x^2 + 2x + 4$.

$g'(x) = -2f'(-2x + 1) - 4x + 2$.

Đặt $t = -2x + 1 \Rightarrow -2x = t - 1$. Khi đó $g'(x) = -2f'(-2x + 1) - 4x + 2$ trở thành

$g'(t) = -2f'(t) + 2t = 2(t - f'(t))$.

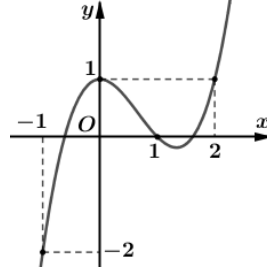


Ta có $g'(t) = 2(t - f'(t)) > 0 \Leftrightarrow t > f'(t)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t < -3 \\ 2 < t < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 1 < -3 \\ 2 < -2x + 1 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -2 < x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hàm số $g(x) = f(-2x + 1) + (x + 1)(-2x + 4)$ đồng biến trên các khoảng $(-2; -\frac{1}{2})$; $(2; +\infty)$.

Câu 103: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x) = f(3x - 1) - 9x^3 + 18x^2 - 12x + 2021$ nghịch biến trên khoảng.

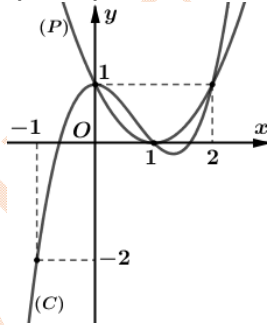
- A. $(-\infty; 1)$. B. $(1; 2)$. C. $(-3; 1)$. D. $(\frac{2}{3}; 1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = 3f'(3x - 1) - 3(9x^2 - 12x + 4)$; $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(3x - 1) \leq (3x - 2)^2$. (1)

Đặt $t = 3x - 1$ khi đó (1) $\Rightarrow f'(t) \leq (t - 1)^2$.

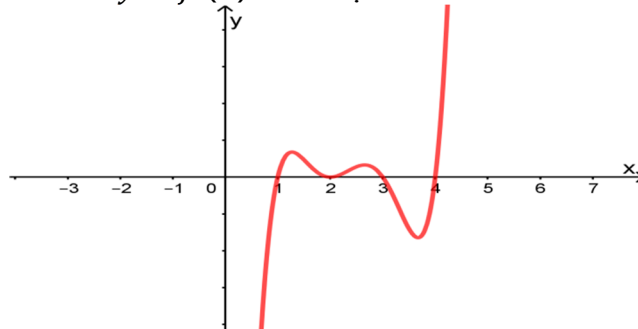


Dựa vào đồ thị ta suy ra $f'(t) \leq (t - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0 \\ 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$. (vì phần đồ thị của $f'(t)$ nằm phía dưới đồ thị hàm số $y = (t - 1)^2$).

Như vậy $f'(3x - 1) \leq (3x - 2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 \leq 0 \\ 1 \leq 3x - 1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$.

Vậy hàm số $g(x) = f(3x - 1) - 9x^3 + 18x^2 - 12x + 2021$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; \frac{1}{3})$ và $(\frac{2}{3}; 1)$.

Câu 104: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như sau



Hàm số $y = f(x^2 - 2) - (\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 4)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; \sqrt{3})$. B. $(-3; 0)$. C. $(1; \sqrt{3})$. D. $(-\sqrt{3}; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C**Cách 1**

Ta có $y' = 2xf'(x^2 - 2) - (x^2 + 2x - 3)$

Xét $y' < 0 \Leftrightarrow 2xf'(x^2 - 2) < (x^2 + 2x - 3)$.

Bất phương trình trên khó giải trực tiếp nên ta chọn x thỏa mãn: $\begin{cases} 2xf'(x^2 - 2) < 0 \\ x^2 + 2x - 3 > 0 \end{cases} \quad (I)$

+) Xét $x > 0$ thì $\begin{cases} f'(x^2 - 2) < 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 < 1 \\ 3 < x^2 - 2 < 4 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < \sqrt{3} \\ \sqrt{5} < x < \sqrt{6} \end{cases}$

+) Xét $x < 0$ thì $\begin{cases} f'(x^2 - 2) > 0 \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x^2 - 2 < 2 \\ 2 < x^2 - 2 < 3 \\ x^2 - 2 > 4 \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow x < -3.$

Đối chiếu với các phương án ta chọn C.

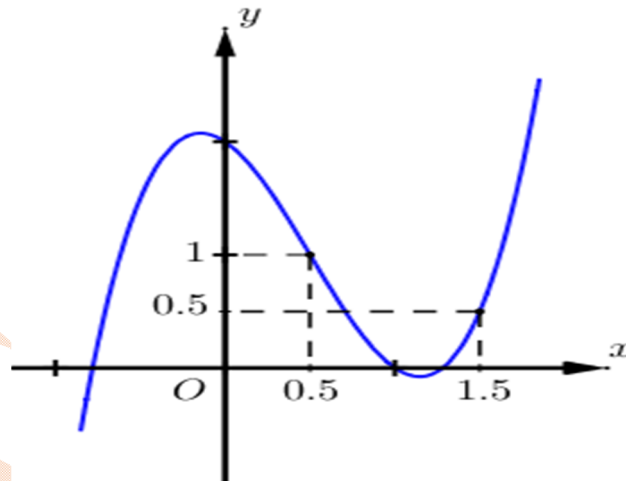
Cách 2

Ta có $y' = 2xf'(x^2 - 2) - (x^2 + 2x - 3)$

+) Cho $x = -2 \Rightarrow y'(-2) = -4f'(2) - (-3) = 3 > 0$ nên loại phương án A, B.

+) Cho $x = 0 \Rightarrow y'(-2) = 0 \cdot f'(2) - (-3) = 3 > 0$ nên loại phương án D.

Câu 105: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) - 2 \ln x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-\infty; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

B. $\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$.

D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D_g = (0; +\infty)$.

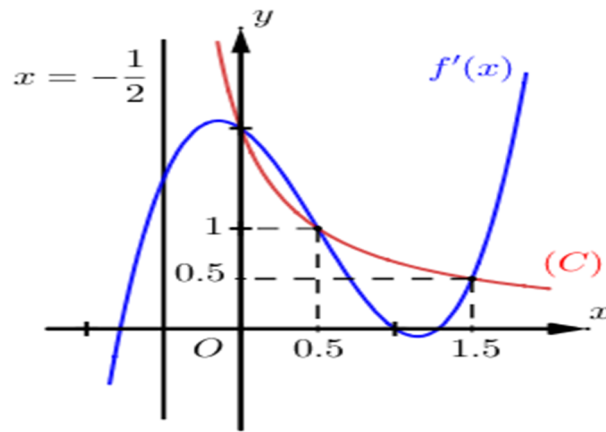
Ta có $g'(x) = 2x \cdot f'\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{x}$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Rightarrow g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{x^2}$ (vì $x > 0$). (1)

Đặt $t = x^2 - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ thì $x^2 = t + \frac{1}{2}$.

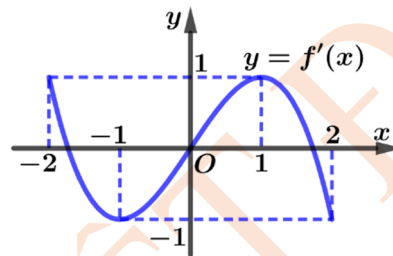
(1) trở thành $f'(t) \leq \frac{1}{t + \frac{1}{2}}$ hay $f'(t) \leq \frac{2}{2t + 1}$. (2)

Vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2}{2x+1}$ với $x > -\frac{1}{2}$. (Đồ thị (C) có TĐĐ là $x = -\frac{1}{2}$)



Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(t) \leq \frac{2}{2t+1} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,5 < t \leq 0 \\ 0,5 \leq t \leq 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x^2 \leq \frac{1}{2} \\ 1 \leq x^2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$.

Câu 106: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(\cos x) + x^2 - x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. (1; 2).

B. (-1; 0).

C. (0; 1).

D. (-2; -1).

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -\sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1$.

Vì $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq f'(\cos x) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sin x \cdot f'(\cos x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét $x < 0$, ta có $y' \leq 1 + 2x - 1 < 0, \forall x < 0$. Suy ra loại B và D.

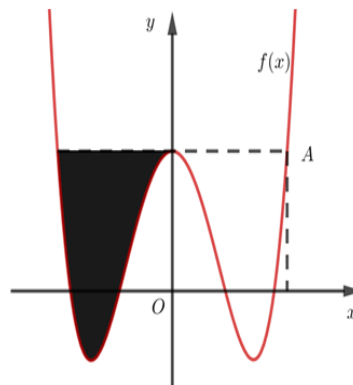
Xét $0 < x < \frac{1}{2}$, ta có $0 < \cos x < 1 \Rightarrow 0 < f'(\cos x) < 1 \Rightarrow -\sin x \cdot f'(\cos x) < 0$ và $2x - 1 < 0$.

Suy ra $y' < 0, \forall x \in (0; \frac{1}{2})$. Suy ra y nghịch biến trên $(0; \frac{1}{2})$. Suy ra loại C.

$$y' = -\sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1 > -1 + 2 \cdot 1 - 1 = 0, \forall x \in (1; 2)$$

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng (1; 2). Vậy chọn A.

Câu 107: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng miền tô đậm (như hình vẽ) có diện tích bằng $\frac{32}{15}$ và điểm $A(2; c)$.



Hàm số $y = f(2x - 1) - 4x^2 - 4x$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(2; +\infty)$.**B.** $(-\infty; 1)$.**C.** $(-1; 2)$.**D.** $(-1; +\infty)$.**Lời giải****Chọn A**Do $A(2; c) \in f(x)$ nên ta có $16a + 4b + c = c \Leftrightarrow 16a + 4b = 0 \Leftrightarrow b = -4a(1)$. $\Rightarrow f(x) = ax^4 - 4ax^2 + c$. Mặt khác

$$\int_{-2}^0 (c - (ax^4 - 4ax^2 + c))dx = \frac{32}{15}$$

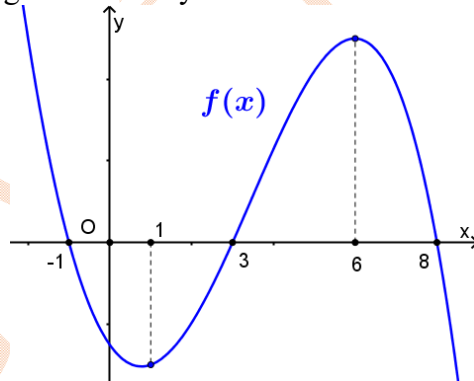
$$\Leftrightarrow \int_{-2}^0 (-ax^4 + 4ax^2)dx = \frac{32}{15}$$

$$\Leftrightarrow a \int_{-2}^0 (-x^4 + 4x^2)dx = \frac{32}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{64}{15}a = \frac{32}{15} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

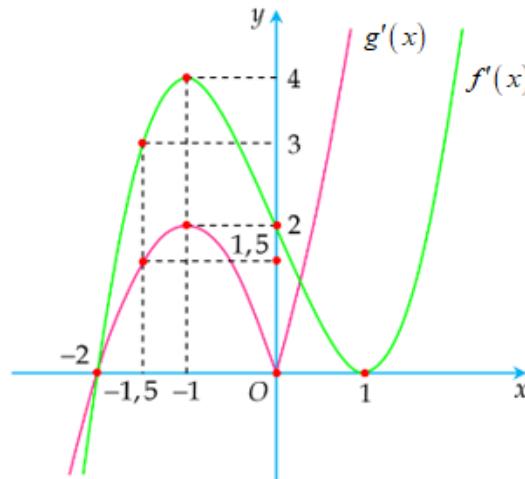
 $\Rightarrow b = -2$. Do đó hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + c \Rightarrow f'(x) = 2x^3 - 4x$.Ta có $y = f(2x - 1) - 4x^2 - 4x \Rightarrow y' = 2f'(2x - 1) - 8x - 4$. $\Rightarrow y' = 2[2(2x - 1)^3 - 4(2x - 1)] - 8x - 4 = 2(16x^3 - 24x^2 + 12x - 2 - 8x + 4) - 8x - 4$.

$$\Leftrightarrow y' = 32x^3 - 48x^2 = 32x^2 \left(x - \frac{3}{2}\right).$$

Để hàm số đồng biến thì $y' \geq 0 \Leftrightarrow 32x^2 \left(x - \frac{3}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x - \frac{3}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$.**Câu 108:** Vậy chọn phương án C. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó $y = [f(x)]^4 + 2021$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?**A.** $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.**B.** $\left(\frac{11}{2}; 8\right)$.**C.** $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.**D.** $(-1; 1)$.**Lời giải****Chọn A**Đặt $g(x) = [f(x)]^4 + 2021 \Rightarrow g'(x) = 4[f(x)]^3 \cdot f'(x)$

Để hàm số nghịch biến thì: $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 4[f(x)]^3 \cdot f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 6 \leq x \leq 8 \end{cases}$

Câu 109: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị các đạo hàm cho như hình vẽ với $f'(x)$ và $g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hỏi hàm số $h(x) = f(x-1) - g(2x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A.** $(-1; 0)$. **B.** $(0; \frac{1}{2})$. **C.** $(-1; -\frac{1}{2})$. **D.** $(2; \frac{5}{2})$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $h(x) = f(x-1) - g(2x) \Rightarrow h'(x) = f'(x-1) - 2g'(2x)$.

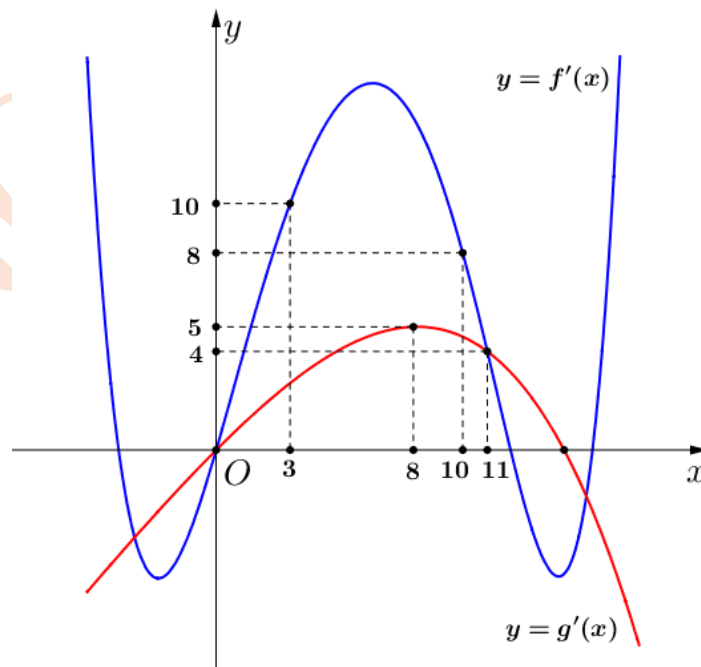
Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x) - 2g'(2x) \geq 0$ khi $x \in [-2; 0]$.

$\Rightarrow h'(x) = f'(x-1) - 2g'(2x) \geq 0$ thì $\begin{cases} (x-1) \in [-2; 0] \\ 2x \in [-2; 0] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; 0]$.

$\Rightarrow$ Hàm số $h(x) = f(x-1) - g(2x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Câu 110: Cho hàm số $y = f(x), y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Hàm số $h(x) = f(x+4) - g\left(2x - \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A.** $\left(\frac{9}{4}; 3\right)$. **B.** $\left(5; \frac{31}{5}\right)$. **C.** $\left(6; \frac{25}{4}\right)$. **D.** $\left(\frac{31}{5}; +\infty\right)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right)$.

Dựa vào đồ thị ta có $\forall x \in \left(\frac{9}{4}; 3\right)$ ta có $\frac{25}{4} < x+4 < 7 \Rightarrow f'(x+4) > f'(3) = 10$ và

$$3 < 2x - \frac{3}{2} < \frac{9}{2} \Rightarrow g'\left(2x - \frac{3}{2}\right) < f'(8) = 5.$$

Do đó $h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right) > 0, \forall x \in \left(\frac{9}{4}; 3\right)$.

Vậy hàm số đồng biến trên $\left(\frac{9}{4}; 3\right)$.

Câu 111: Cho hàm số $y = f(x), y = g(x), y = h(x)$ có đồ thị $y = f'(x), y = g'(x), y = h'(x)$ như hình vẽ dưới, trong đó đường đậm hơn là của đồ thị hàm số $y = f'(x)$. Hàm số $k(x) = f(x+7) + g(5x+1) - h\left(4x + \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $\left(-\frac{15}{4}; 0\right)$.

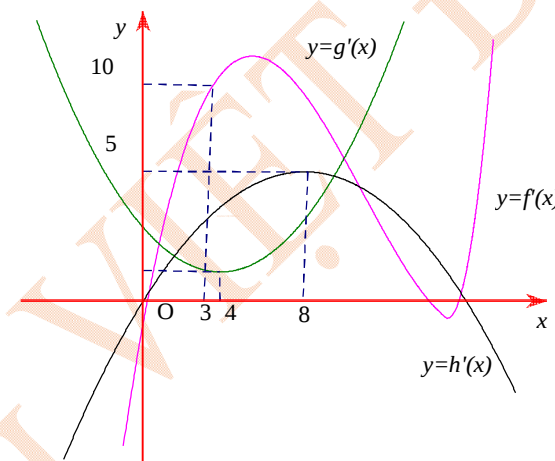
B. $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.

C. $\left(\frac{3}{8}; 1\right)$.

D. $\left(\frac{3}{8}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1.

$$k'(x) = f'(x+7) + 5g'(5x+1) - 4h'\left(4x + \frac{3}{2}\right)$$

Từ đồ thị hàm số ta thấy

$$+) g'(x) \geq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g'(5x+1) \geq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 5g'(5x+1) \geq 10$$

$$+) h'(x) \leq 5, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow h'\left(4x + \frac{3}{2}\right) \leq 5, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -4h'\left(4x + \frac{3}{2}\right) \geq -20$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$5g'(5x+1) - 4h'\left(4x + \frac{3}{2}\right) \geq -10$$

$$+) \text{ Xét } f'(x+7) \geq 10$$

$$\text{Từ đồ thị hàm số ta thấy } f'(x) \geq 10 \Rightarrow 3 < x < 8$$

$$\Rightarrow f'(x+7) \geq 10 \Rightarrow 3 < x+7 < 8 \Rightarrow -4 < x < 1$$

$$\text{Từ đó suy ra } k'(x) > 0, \forall x \in \left(-\frac{15}{4}; 1\right).$$

Có 2 đáp án A, C đều đúng.

Cách 2.

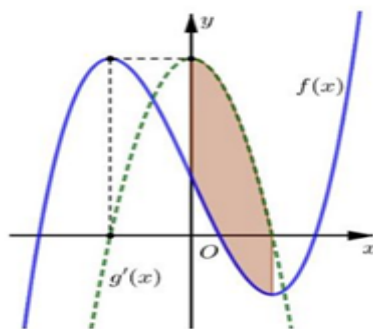
Xét từng đáp án

$$+) \text{ Xét } x \in \left(-\frac{15}{4}; 0\right)$$

$$\begin{cases} x+7 \in \left(\frac{13}{4}; 7\right) \Rightarrow f'(x+7) > 10 \\ 5x+1 \in (-17,75; 1) \Rightarrow g'(5x+1) > 2 \Rightarrow 5g'(5x+1) > 10 \\ 4x+3 \in \left(-13,5; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow h'\left(4x+\frac{3}{2}\right) < 5 \Rightarrow -4h'\left(4x+\frac{3}{2}\right) > -20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = f'(x+7) + 5g'(5x+1) - 4h'\left(4x+\frac{3}{2}\right) > 0, \forall x \in \left(-\frac{15}{4}; 0\right).$$

Câu 112: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ và hàm số $g(x)$ có đạo hàm $g'(x) = dx^2 + e$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ cắt đồ thị hàm số $g'(x)$ tại ba điểm phân biệt có tích các hoành độ bằng 2 và diện tích hình phẳng S được cho như hình vẽ bằng $\frac{9}{4}$. Hỏi hàm số $y = f(2x-1) - 3g(x+1)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $\frac{7}{4}$.

B. $\frac{9}{4}$.

C. $\frac{11}{4}$.

D. $\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f'(x) = kg'(x) \Rightarrow \begin{cases} 3a = kd > 0 \\ b = 0 \\ c = ke < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < 0 \\ e > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) \text{ có hai nghiệm} \Rightarrow ac < 0 \Rightarrow de < 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{c}{3a}}$$

$$\text{Đường thẳng qua hai điểm cực trị: } y = \frac{2}{3}cx + 1 \Rightarrow -\frac{2}{3}c\sqrt{-\frac{c}{3a}} + 1 = e$$

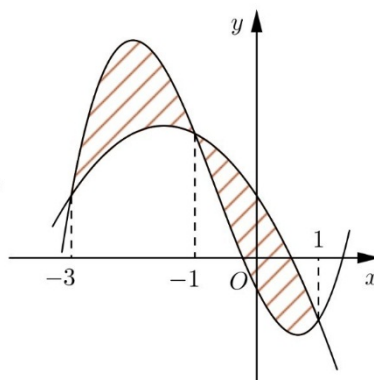
$$ax^3 - dx^2 + cx + 1 - e = 0 \text{ có 3 nghiệm } x_1; x_2; x_3 \text{ và } x_1x_2x_3 = \frac{e-1}{a} = 2.$$

$$\Rightarrow e - 1 = 2a \Leftrightarrow (-c)\sqrt{-c} = 3\sqrt{3} \cdot a\sqrt{a} \Rightarrow -c = \sqrt{3}a \Leftrightarrow -ke = \sqrt{3}kd \Rightarrow e = -\sqrt{3}d.$$

$$\Rightarrow f(x) = ax^3 - \sqrt{3}ax + 1; \quad g'(x) = dx^2 - \sqrt{3}d.$$

$$S = \int_0^{\sqrt[4]{\frac{1}{3}}} g'(x) dx - \int_0^{\sqrt[4]{\frac{1}{3}}} f(x) dx = \frac{9}{4} \Leftrightarrow d\frac{x_0^3}{3} - \sqrt{3}dx_0 - \left(a\frac{x_0^4}{4} - \sqrt{3}\frac{ax_0^2}{2} + x_0\right) = \frac{9}{4}.$$

Câu 113: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}; a, d \neq 0$). Biết rằng đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ). Hàm số $h(x) = f(x) - g(x) - \frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3; 2)$.B. $(-3; 3)$.C. $(-3; -1)$.D. $(-1; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $f(x) = g(x) \Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} = 0$

Ta có: $f(x) - g(x) = a(x+3)(x+1)(x-1)$

Suy ra $a(x+3)(x+1)(x-1) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2}$

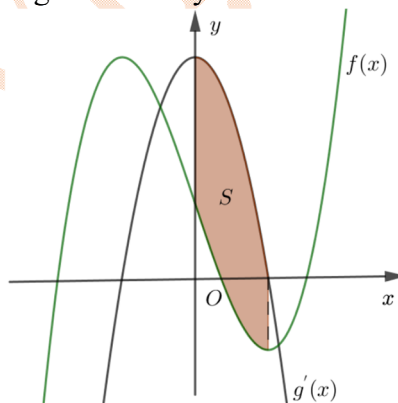
Xét hệ số tự do suy ra: $-3a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Do đó $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)$. Vậy $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x$.

Ta có: $h'(x) = x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -4$

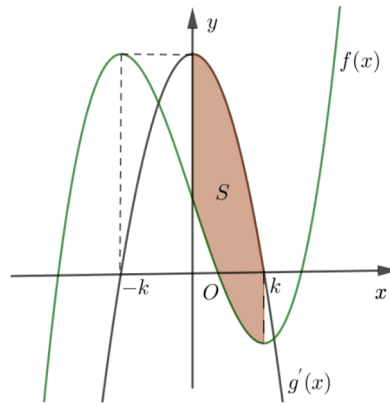
Suy ra: $h'(x) < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 1$. Vậy hàm số $h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -1)$.

Câu 114: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ và hàm số $g(x)$ có đạo hàm $g'(x) = dx^2 + e$ có đồ thị như hình vẽ. Biết đồ thị hàm số $f(x)$ cắt đồ thị hàm số $g'(x)$ tại ba điểm phân biệt có tích các hoành độ bằng 2 và diện tích S được cho như hình vẽ bằng $\frac{9}{4}$. Hỏi hàm số $y = f(2x-1) - 3g(x+1)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(0; \frac{2}{11})$.B. $(0; 1)$.C. $(-\infty; 0)$.D. $(\frac{2}{11}; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $g'(x)$ với trục hoành lần lượt là $x_1 = k, x_2 = -k$ với $k > 0$.

Từ đồ thị ta suy ra:

+ Công thức hàm số $g'(x) = A(x^2 - k^2)$ với $A < 0$.

+ Công thức hàm số $f'(x) = B(x^2 - k^2)$ với $B > 0$.

Khi đó ta có $f(x) = B\left(\frac{x^3}{3} - k^2x\right) + 1$ (do $f(0) = 1$).

Ta có $f(-k) = g'(0) \Leftrightarrow B \cdot \frac{2k^3}{3} + 1 = -Ak^2(1)$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g'(x)$:

$$B\left(\frac{x^3}{3} - k^2x\right) + 1 = A(x^2 - k^2) \Leftrightarrow \frac{B}{3}x^3 - Ax^2 - Bk^2x + 1 + Ak^2 = 0.$$

Theo đề bài ta có tích các hoành độ giao điểm bằng 2 nên ta có: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 2 \Leftrightarrow \frac{-3(Ak^2+1)}{B} = 2 \Leftrightarrow Ak^2 + 1 = -\frac{2}{3}B(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $-\frac{2}{3}B = -\frac{2}{3}Bk^3 \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow A + 1 = -\frac{2}{3}B$ (3)

Mặt khác diện tích hình phẳng S bằng $\frac{9}{4}$ nên ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (g'(x) - f(x))dx &= \frac{9}{4} \Leftrightarrow \int_0^1 \left(A(x^2 - 1) - B\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) - 1 \right) dx = \frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow \left[A\left(\frac{x^3}{3} - x\right) - B\left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right) - x \right]_0^1 &= \frac{9}{4} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}A + \frac{5}{12}B - 1 = \frac{9}{4} \quad (4) \end{aligned}$$

Từ (3) và (4) suy ra $\begin{cases} A = -3 \\ B = 3 \end{cases}$.

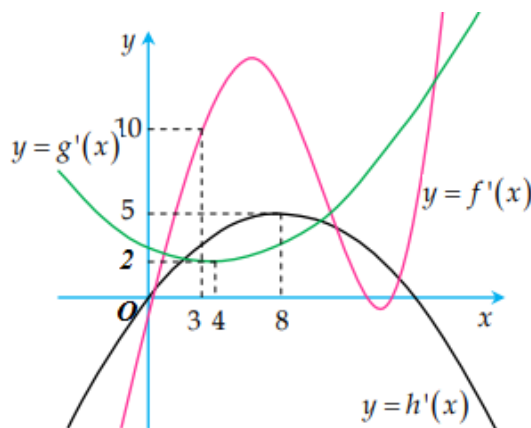
Suy ra $f(x) = x^3 - 3x + 1$ và $g'(x) = -3x^2 + 3$.

Xét hàm số $y = f(2x - 1) - 3g(x + 1)$

Ta có $y' = 2 \cdot f'(2x - 1) - 3 \cdot g'(x + 1) = 6[(2x - 1)^2 - 1] + 9[(x + 1)^2 - 1] = 33x^2 - 6x$

Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow 33x^2 - 6x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{2}{11}$.

Câu 115: Cho ba hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ có đồ thị ba hàm số $y = f'(x)$, $y = g'(x)$, $y = h'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Hàm số $k(x) = f(x + 7) + g(5x + 1) - h\left(4x + \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\frac{15}{4}; 0\right)$.

B. $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.

C. $\left(\frac{3}{8}; 2\right)$.

D. $\left(\frac{3}{8}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $k'(x) = f'(x + 7) + 5g'(5x + 1) - 4h'\left(4x + \frac{3}{2}\right)$

Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x) > 10 \forall x \in (3; 8)$, $g'(x) \geq 2$, $h'(x) \leq 5$, $\forall x \in \mathbb{R}$ do đó

$$k'(x) = f'(x + 7) + 5g'(5x + 1) - 4h'\left(4x + \frac{3}{2}\right) > 10 + 5 \cdot 2 - 4 \cdot 5 = 0 \text{ với mọi } x \text{ thỏa mãn}$$

$$3 < x + 7 < 8 \Leftrightarrow -4 < x < 1$$

Dạng 6: Tính đơn điệu của hàm số hợp, hàm liên kết có tham số

Câu 116: Cho hàm số $f(x) = x^4 + (4 - m^2)x + 1$ và $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = g(f(x))$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. 3.**B. Vô số.****C. 5.****D. 1.****Lời giải****Chọn C**

Ta có yêu cầu bài toán $y' \geq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot g'(f(x)) \geq 0, \forall x > 0 (*)$.

Do $g'(x) = 3x^2 - 6x + 5 > 0, \forall x \Rightarrow g'(f(x)) > 0, \forall x$.

Vì vậy: $(*) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow h(x) = 4x^3 + 4 - m^2 \geq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow h(x) \geq 0, \forall x \geq 0$

$\Leftrightarrow \min_{[0; +\infty)} h(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

Vậy có **5** số nguyên thỏa mãn.

Câu 117: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Có bao nhiêu số nguyên $m \in (0; 2020)$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$?

A. 2018.**B. 2017.****C. 2016.****D. 2015.****Lời giải****Chọn C**

Hàm số $g(x) = f(x^2 - x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$

$\Leftrightarrow g'(x) = (2x - 1) \cdot f'(x^2 - x + m) \leq 0 \quad \forall x \in (-1; 0)$

$\Leftrightarrow f'(x^2 - x + m) \geq 0 \quad \forall x \in (-1; 0)$ (do $2x - 1 < 0 \quad \forall x \in (-1; 0)$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + m \leq 1 \\ x^2 - x + m \geq 4 \end{cases} \quad \forall x \in (-1; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \leq -x^2 + x \\ m - 4 \geq -x^2 + x \end{cases} \quad \forall x \in (-1; 0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \leq \min_{[-1; 0]} (h(x) = -x^2 + x) = h(-1) = -2 \\ m - 4 \geq \max_{[-1; 0]} (h(x) = -x^2 + x) = h(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 4 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện $m \in (0; 2020)$, suy ra: $m \in [4; 2020)$.

Vậy có 2016 giá trị m nguyên thỏa đề.

Câu 118: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ bên.

x	$-\infty$	-10	-2	3	8	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = f(x^2 + 4x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$?

A. 3.**B. 1.****C. 0.****D. 2.****Lời giải****Chọn A**

Vì bài toán đúng với mọi hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ nên ta chọn hàm số có

$$f'(x) = (x+10)^2(x+2)(x-3)^2(x-8)$$

Ta có: $y = f(x^2 + 4x + m) \Rightarrow y' = (2x+4)f'(x^2 + 4x + m)$. $x \in (-1;1) \Rightarrow 2x+4 > 0$.

Đặt $t = x^2 + 4x + m$, vì $x \in (-1;1) \Rightarrow t \in (m-3; m+5)$. Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow f'(t) \leq 0 \Leftrightarrow (t+10)^2(t+2)(t-3)^2(t-8) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -10 \\ t \in [-2; 8] \end{cases}$$

Hàm số $y = f(x^2 + 4x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1) \Leftrightarrow$

$$(m-3; m+5) \subset [-2; 8] \cup \{-10\} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 \geq -2 \\ m+5 \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m .

Câu 119: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$		

Có bao nhiêu số nguyên $m < 2019$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x + m)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 2016.

B. 2015.

C. 2017.

D. 2018.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = (x^2 - 2x + m)' f'(x^2 - 2x + m) = 2(x-1)f'(x^2 - 2x + m)$.

Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$ và

$$g'(x) = 0 \text{ tại hữu hạn điểm} \Leftrightarrow 2(x-1)f'(x^2 - 2x + m) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow f'(x^2 - 2x + m) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m \geq 2, \forall x \in (1; +\infty) \\ x^2 - 2x + m \leq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Xét hàm số $y = x^2 - 2x + m$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	$m-1$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$\text{TH1: } x^2 - 2x + m \geq 2, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow m-1 \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 3.$$

$$\text{TH2: } x^2 - 2x + m \leq 0, \forall x \in (1; +\infty): \text{ Không có giá trị } m \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy có 2016 số nguyên $m < 2019$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 120: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = f(3x-1) + x^3 - 3mx$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$?

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$				4		$+\infty$
		0		0		0	
			-4				

A. 8.

B. 6.

C. 7.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Để hàm số $y = f(3x-1) + x^3 - 3mx$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (-2; 1)$$

$$\Leftrightarrow 3f'(3x-1) + 3x^2 - 3m \geq 0, \forall x \in (-2; 1)$$

$$\Leftrightarrow m \leq f'(3x-1) + x^2, \forall x \in (-2; 1) (*)$$

Đặt $k(x) = f'(3x-1)$, $h(x) = x^2$ và $g(x) = f'(3x-1) + x^2 = k(x) + h(x)$

Ta có $\min_{(-2;1)} h(x) = h(0) = 0$

Từ bảng biến thiên suy ra: $\min f'(x) = f'(-1) = -4$.

Do đó ta có: $\min_{(-2;1)} f'(3x-1) = f'(-1) = -4$ khi $3x-1 = -1 \Leftrightarrow x = 0$

$$\Rightarrow \min_{(-2;1)} k(x) = k(0) = -4$$

Do đó $\min_{(-2;1)} g(x) = g(0) = k(0) + h(0) = 0 - 4 = -4$

Từ (*) ta có $m \leq f'(3x-1) + x^2, \forall x \in (-2; 1) \Leftrightarrow m \leq \min_{(-2;1)} g(x) \Leftrightarrow m \leq -4$

Mà $m \in (-10; 10) \Rightarrow m \in \{-9, \dots, -4\}$

Vậy có tất cả 6 số nguyên thỏa mãn.

Câu 121: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ kèm theo. Tìm tập hợp tất cả các tham số m sao cho hàm số $g(x) = m[f(x)]^2 - f(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	2		3
		1	

A. $\left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right]$.B. $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$.C. $\mathbb{R}$.D. $\emptyset$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có ngay những điều như sau:

+ $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$.

+ $f'(x) \leq 0, \forall x \in (0; 1); f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$ và không có khoảng K nào để $f'(x) = 0, \forall x \in K$ (*).

Do $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ nên $g(x)$ cũng liên tục trên $(0; +\infty)$. Điều này chứng tỏ $g(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 1)$ và trên $(1; +\infty)$.

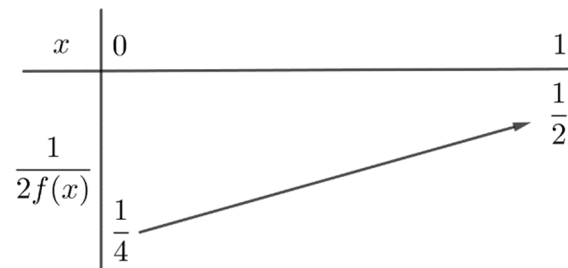
Ta có $g'(x) = f'(x)[2m \cdot f(x) - 1]$.

+) Xét trên $(0; 1)$:

Kết hợp với (*) ta thấy không có khoảng H nào để $g'(x) = 0, \forall x \in H$. Từ đây, ta có

$$g(x) \text{ nghịch biến trên } (0; 1) \Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2 \cdot f(x)}, \forall x \in (0; 1).$$

Lại có



Do vậy, $m \geq \frac{1}{2}$.

+) Xét trên $(1; +\infty)$:

Lập luận tương tự như trên ta được $m \leq \frac{1}{2 \cdot f(x)}, \forall x \in (1; +\infty)$. Từ đó ta có $m \leq \frac{1}{6}$.

Kết hợp $m \geq \frac{1}{2}, m \leq \frac{1}{6}$, suy ra không có kết quả nào của m thỏa mãn đề.

Câu 122: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	2	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) \geq \sqrt{x^2 + e} + m$ đúng với mọi $x \in (-3; 0)$ khi và chỉ khi

A. $m \leq f(-3) - \sqrt{e+9}$.

B. $m \leq f(0) - \sqrt{e}$.

C. $m < f(-3) - \sqrt{e+9}$.

D. $m < f(0) - \sqrt{e}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) \geq \sqrt{x^2 + e} + m, \forall x \in (-3; 0) \Leftrightarrow f(x) - \sqrt{x^2 + e} \geq m, \forall x \in (-3; 0)$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - \sqrt{x^2 + e}$ trên $(-3; 0)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + e}}$.

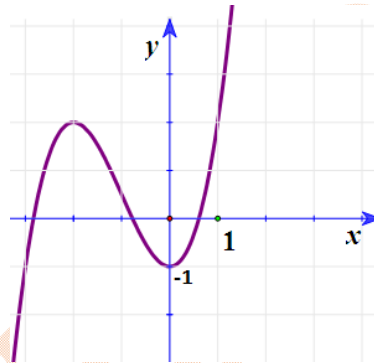
$\forall x \in (-3; 0)$ ta thấy: $f'(x) > 0$; $-\frac{x}{\sqrt{x^2 + e}} > 0$. Do đó: $g'(x) > 0$, $\forall x \in (-3; 0)$.

Bảng biến thiên:

x	-3	0
$g'(x)$		+
$g(x)$	$g(-3)$	$g(0)$

Từ bảng biến thiên ta có: $m < g(-3) \Leftrightarrow m < f(-3) - \sqrt{9 + e}$.

Câu 123: Cho hàm số $f(x)$, hàm số $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tìm m để hàm số $y = f(x) + (m-2)x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

A. $m \geq 3$.

B. $m \leq -3$.

C. $m \geq -3$.

D. $m \geq 5$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = f'(x) + m - 2.$$

Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi $y' \geq 0 \forall x \in (0; +\infty)$

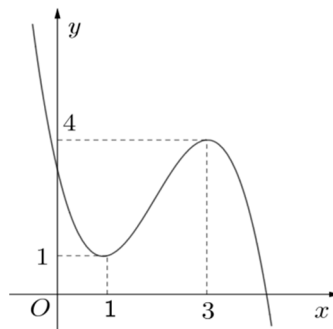
$$\Leftrightarrow f'(x) + m - 2 \geq 0 \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow -m \leq f'(x) - 2 \forall x \in (0; +\infty) (*)$$

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy trên khoảng $(0; +\infty)$, $f'(x) > -1 \Leftrightarrow f'(x) - 2 > -3$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow -m \leq -3 \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Câu 124: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d; a \neq 0$ là các số thực, có đồ thị như hình bên.



Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-2020; 2020)$ để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + m)$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 2020.

B. 2013.

C. 4040.

D. 4038.

Lời giải:

Chọn B

Ta có $g'(x) = (3x^2 - 6x)f'(x^3 - 3x^2 + m)$.

Với mọi $x \in (2; +\infty)$ ta có $3x^2 - 6x > 0$ nên hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + m)$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty) \Leftrightarrow f'(x^3 - 3x^2 + m) \leq 0, \forall x \in (2; +\infty)$.

Dựa vào đồ thị ta có hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$ nên $f'(x) \leq 0$ với $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

Do

đó:

$$f'(x^3 - 3x^2 + m) \leq 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + m \leq 1, \forall x \in (2; +\infty) \\ x^3 - 3x^2 + m \geq 3, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -x^3 + 3x^2 + 1, \forall x \in (2; +\infty) \\ m \geq -x^3 + 3x^2 + 3, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases}$$

Nhận thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3x^2 + 1) = -\infty$ nên trường hợp $m \leq -x^3 + 3x^2 + 1, \forall x \in (2; +\infty)$ không xảy ra.

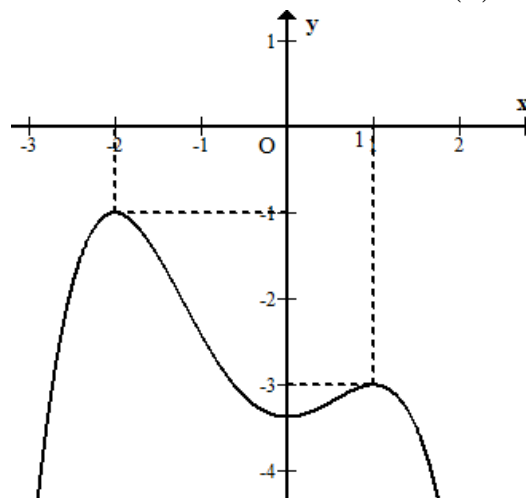
Trường hợp: $m \geq -x^3 + 3x^2 + 3, \forall x \in (2; +\infty)$. Ta có hàm số $h(x) = -x^3 + 3x^2 + 3$ liên tục trên $[2; +\infty)$ và $h'(x) = -3x^2 + 6x < 0, \forall x \in (2; +\infty)$ nên $h(x)$ nghịch biến trên $[2; +\infty)$ suy ra $\max_{[2; +\infty)} h(x) = h(2)$.

Do đó $m \geq -x^3 + 3x^2 + 3, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow m \geq \max_{[2; +\infty)} h(x) = h(2) \Leftrightarrow m \geq 7$.

Do m nguyên thuộc khoảng $(-2020; 2020)$ nên $m \in \{7; 8; 9; \dots; 2019\}$.

Vậy có 2013 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 125: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m , $m \in \mathbb{Z}$, $-2020 < m < 2020$ để hàm số $g(x) = f(x^2) + mx^2 \left(x^2 + \frac{8}{3}x - 6 \right)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$

A. 2021.

B. 2020.

C. 2019.

D. 2022.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2) + 4mx(x^2 + 2x - 3)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$ suy ra $g'(x) \geq 0, \forall x \in (-3; 0)$.

$$\square 2xf'(x^2) + 4mx(x^2 + 2x - 3) \geq 0, \forall x \in (-3; 0) \Leftrightarrow f'(x^2) - 2m(-x^2 - 2x + 3) \leq 0, \forall x \in (-3; 0)$$

$$\Leftrightarrow f'(x^2) \leq 2m(-x^2 - 2x + 3), \forall x \in (-3; 0) \Leftrightarrow m \geq \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)}, \forall x \in (-3; 0)$$

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{(-3; 0)} \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)}.$$

$$\square \text{Ta có } -3 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 9 \Rightarrow f'(x^2) \leq -3 \text{ dấu "=" khi } x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1.$$

$$\square -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4 \Rightarrow 0 < -x^2 - 2x + 3 \leq 4, \forall x \in (-3; 0)$$

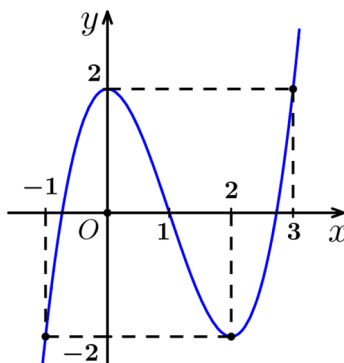
$$\Leftrightarrow \frac{1}{-x^2 - 2x + 3} \geq \frac{1}{4}, \text{ dấu "=" khi } x = -1.$$

$$\text{Suy ra } \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)} \leq \frac{-3}{2 \cdot 4} = \frac{-3}{8}, \forall x \in (-3; 0), \text{ dấu "=" khi } x = -1.$$

$$\Rightarrow \max_{(-3; 0)} \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)} = -\frac{3}{8}.$$

Vậy $m \geq -\frac{3}{8}$, mà $m \in \mathbb{Z}$, $-2020 < m < 2020$ nên có 2020 giá trị của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 126: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như sau:



Đặt $g(x) = f\left(x - \frac{m}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{m}{3} - 1\right)^2 + m + 1$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(7; 8)$. Tổng của tất cả các phần tử trong tập hợp S bằng

A. 186.

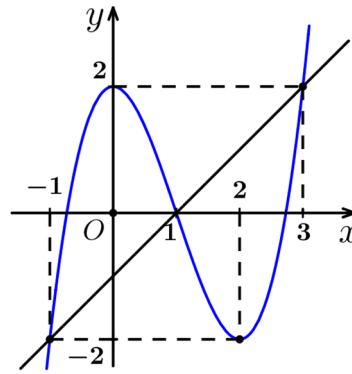
B. 816.

C. 168.

D. 618.

Lời giải

Chọn C



$$g'(x) = f'\left(x - \frac{m}{3}\right) - \left(x - \frac{m}{3} - 1\right)$$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Rightarrow f'\left(x - \frac{m}{3}\right) = \left(x - \frac{m}{3} - 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{m}{3} = -1 \\ x - \frac{m}{3} = 1 \\ x - \frac{m}{3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m}{3} - 1 \\ x = \frac{m}{3} + 1 \\ x = \frac{m}{3} + 3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

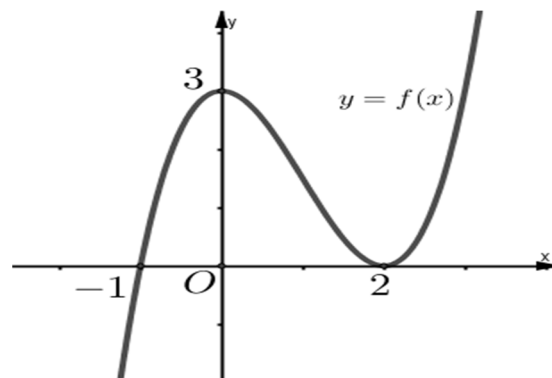
x	$-\infty$	$\frac{m}{3}-1$	$\frac{m}{3}+1$	$\frac{m}{3}+3$	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{Để hàm số } y = g(x) \text{ đồng biến trên khoảng } (7; 8) \text{ thì } \begin{cases} \frac{m}{3} + 3 \leq 7 \\ \frac{m}{3} - 1 \leq 7 \\ \frac{m}{3} + 1 \geq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 12 \\ 21 \leq m \leq 24 \end{cases}.$$

Vì $m \in \mathbb{N}^*$ nên $m \in \{1; 2; \dots; 12\} \cup \{21; 22; 23; 24\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên dương thỏa điều kiện bài toán là: 168.

Câu 127: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $y = f(\cos x + 2x + m)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$?

A. 2019.

B. 2020.

C. 4038.

D. 4040.

Lời giải:

Chọn A

Ta có $y' = (-\sin x + 2) \cdot f'(\cos x + 2x + m)$

Hàm số $y = f(\cos x + 2x + m)$ liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, suy ra:

Hàm số $y = f(\cos x + 2x + m)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$ khi và chỉ khi $(-\sin x + 2) \cdot f'(\cos x + 2x + m) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ (1)

Do $-\sin x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên (1) $\Leftrightarrow f'(\cos x + 2x + m) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ (2)

Dựa vào đồ thị ta có

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + 2x + m \geq 2, \forall x \in (0; +\infty) \\ \cos x + 2x + m \leq 0, \forall x \in (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + 2x \geq 2 - m, \forall x \in (0; +\infty) & (3a) \\ \cos x + 2x \leq -m, \forall x \in (0; +\infty) & (3b) \end{cases}$$

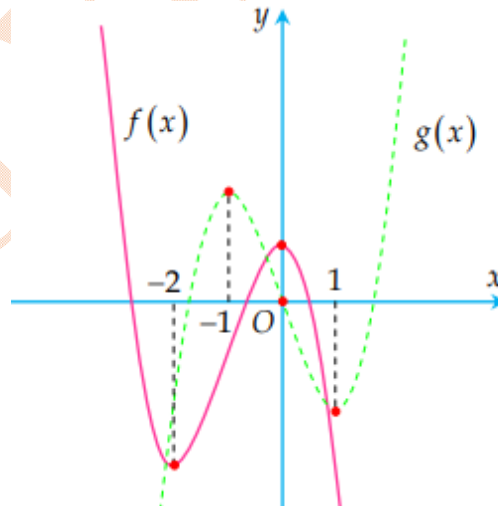
Xét hàm $g(x) = \cos x + 2x$ trên $[0; +\infty)$ có $g'(x) = -\sin x + 2 > 0, \forall x \in (0; +\infty)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ đồng thời $g(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ suy ra $\min_{[0; +\infty)} g(x) = g(0) = 1$ và

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Do đó, không có giá trị m thỏa (3b);

$$(3a) \Leftrightarrow \min_{[0; +\infty)} g(x) \geq 2 - m \Leftrightarrow 1 \geq 2 - m \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Vậy có tất cả 2019 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 128: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Biết rằng hai hàm số $y = 3f(3x - 1)$ và $y = 2g(ax + b)$ có cùng khoảng đồng biến. Giá trị biểu thức $2a + b$ là

A. 5.

B. 2.

C. 4.

D. -6.

Lời giải

Chọn D

Ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-2; 0)$.

Hàm số $y = 3f(3x - 1)$ đồng biến khi $[3f(3x - 1)]' > 0 \Leftrightarrow 9 \cdot f'(3x - 1) > 0 \Leftrightarrow f'(3x - 1) > 0$

$$\Leftrightarrow -2 < 3x - 1 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}.$$

Suy ra hàm số $y = 3f(3x - 1)$ đồng biến trong khoảng $(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

Xét hàm số $y = 2g(ax + b)$, $y' = 2 \cdot a \cdot g'(ax + b)$.

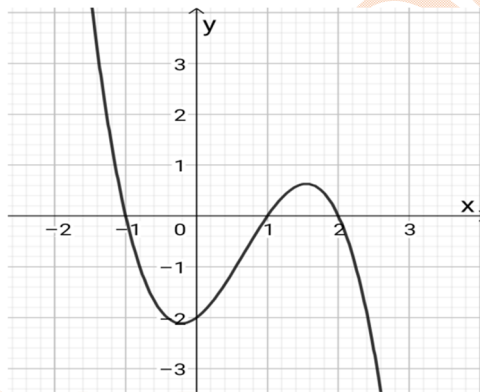
$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ g'(ax + b) < 0 \\ a > 0 \\ g'(ax + b) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ -1 < ax + b < 1 \\ a > 0 \\ ax + b < -1 \\ ax + b > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \frac{1-b}{a} < x < \frac{-1-b}{a} \\ a > 0 \\ x < \frac{-1-b}{a} \\ x > \frac{1-b}{a} \end{cases}.$$

Để hàm số $y = 3g(ax + b)$ đồng biến trong khoảng $(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ thì

$$\begin{cases} a < 0 \\ \frac{-1-b}{a} = \frac{1}{3} \\ \frac{1-b}{a} = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ 3 + 3b = -a \\ 3 - 3b = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Vậy $2a + b = -6$.

Câu 129: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x) = f(\sqrt{5}mx - \sin 5x - m \sin x + 3x - m^2 + 2m)$ ($m \in \mathbb{R}$) đồng biến trên nửa khoảng $-\infty; 0$ khi và chỉ khi $m \geq a + b\sqrt{c}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$ và c là số nguyên tố). Tính $a + b + c$.

A. 6

B. 3

C. 4.

D. 5

Lời giải:

Chọn C

Đặt $u(x) = \sqrt{5}mx - \sin 5x - m \sin x + 3x - m^2 + 2m$ ($x \leq 0$) ; $u'(x) = \sqrt{5}m - 5 \cos 5x - m \cos x + 3$

$u'(x) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-3+5 \cos 5x}{\sqrt{5}-\cos x}$. Đặt $h(x) = \frac{-3+5 \cos 5x}{\sqrt{5}-\cos x}$

Do $\begin{cases} -8 \leq -3 + 5 \cos 5x \leq 2 \\ \sqrt{5} - 1 \leq \sqrt{5} - \cos x \leq \sqrt{5} + 1 \end{cases} \forall x \leq 0 \Rightarrow \frac{-8}{\sqrt{5}-1} < h(x) \leq \frac{2}{\sqrt{5}-1} \forall x \leq 0$ (do biểu thức $h(x)$ không có GTNN trên nửa khoảng $-\infty; 0$).

Ta có hàm số $g(x)$ liên tục trên nửa khoảng $-\infty; 0$ Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $-\infty; 0 \Leftrightarrow g'(x) \geq 0 \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow u'(x) \cdot f'[u(x)] \geq 0 \forall x \in (-\infty; 0)$

Dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc khoảng $(-\infty; 0)$.

Ta có: $u'(x) \geq 0 \forall x < 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{-3+5 \cos 5x}{\sqrt{5}-\cos x} \forall x < 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{\sqrt{5}-1}$;

$$u'(x) \leq 0 \forall x < 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{-3+5 \cos 5x}{\sqrt{5}-\cos x} \forall x < 0 \Leftrightarrow m < \frac{-8}{\sqrt{5}-1}$$

Nhận xét:

Với $\begin{cases} m \geq \frac{2}{\sqrt{5}-1} \\ m < \frac{-8}{\sqrt{5}-1} \end{cases}$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$) nên dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có:

Yêu cầu bài ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u(x) \geq 2 \\ u'(x) \leq 0 \end{cases} \forall x < 0 & (I) \\ \begin{cases} u(x) \leq -1 \\ u'(x) \geq 0 \end{cases} \forall x < 0 & (II) \end{cases}$; $u'(x) = 0$ xảy ra tại rời rạc điểm thuộc

khoảng $(-\infty; 0)$.

Xét(I): Ta có $u(x) = \sqrt{5}mx - \sin 5x - m \sin x + 3x - m^2 + 2m$ liên tục trên nửa khoảng $-\infty; 0$ và $u(0) = -m^2 + 2m \leq 1 \forall m \in \mathbb{R}$ nên (I) không xảy ra.

Xét(II): (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} u(0) \leq -1 \\ m \geq \frac{2}{\sqrt{5}-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 1 \geq 0 \\ m \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1 + \sqrt{2}.$

Vậy $a = 1; b = 1; c = 2$ suy ra **Chọn C**

Lưu ý: Bài toán cũng có thể giải theo điều kiện cần và đủ theo gợi ý sau:

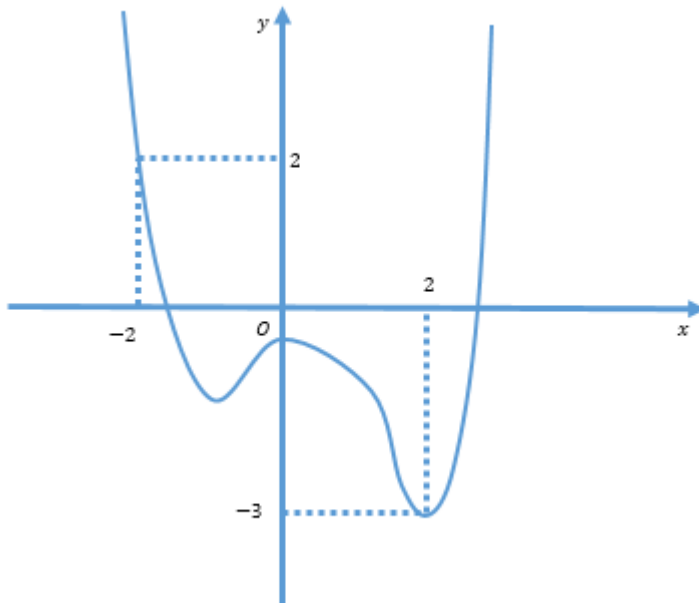
Điều kiện cần:

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $-\infty; 0 \Rightarrow g'(0) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'(0) \geq 0 \\ f'[u(0)] \geq 0 \\ u'(0) \leq 0 \\ f'[u(0)] \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} m \geq 1 + \sqrt{2} \\ m = 1 \end{cases}$

Điều kiện đủ: Thử lại loại $m = 1$

Câu 130: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của $m \in (-20; 20)$ để hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^3}{4}\right) - \frac{m(x^2+4)^2}{20}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. 6.

B. 7.

C. 17.

D. 18.

Lời giải

Chọn C

ĐK: $g'(x) \geq 0, \forall x > 0$

$g'(x) = \frac{3}{4}x^2 \cdot f'\left(\frac{x^3}{4}\right) - \frac{mx(x^2+4)}{5} \geq 0, \forall x > 0$

$\Leftrightarrow m \leq h(x) = \frac{15x}{4(x^2+4)} \cdot f'\left(\frac{x^3}{4}\right), \forall x > 0$

Ta có :

$$\left. \begin{aligned} 0 < \frac{15x}{4(x^2+4)} \leq \frac{15}{16}, \quad \forall x > 0 \\ -3 < f'\left(\frac{x^3}{4}\right) < 0 \\ f'\left(\frac{x^3}{4}\right) \geq 0 \end{aligned} \right\} (*)$$

* Nếu $f'\left(\frac{x^3}{4}\right) \geq 0$ thì $h(x) \geq 0$

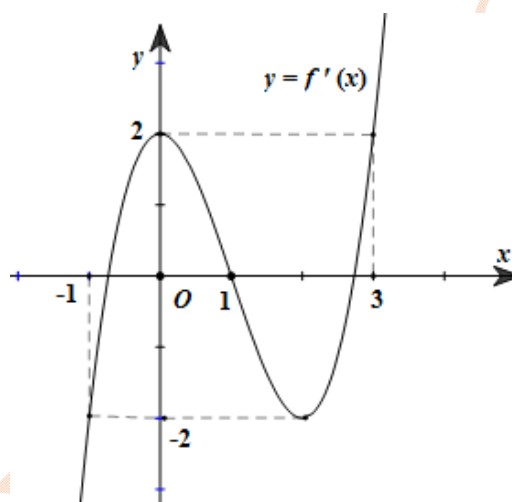
* Xét $f'\left(\frac{x^3}{4}\right) < 0$, từ (*) $\Rightarrow h(x) \geq \frac{45}{16}$

$\Rightarrow \min_{x>0} h(x) = -\frac{45}{16}$ (tại $x = 2$)

Vậy $m \leq -\frac{45}{16}$ mà $m \in (-20; 20)$, m nguyên âm.

Nên $m \in \{-19; -18; \dots; -3\}$.

Câu 131: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$ với m là tham số thực. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$. Tổng các phần tử của S bằng:

A. 4.

B. 11.

C. 14.

D. 20.

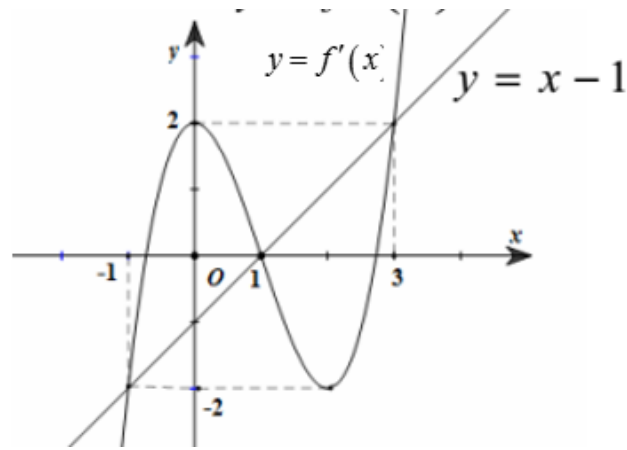
Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$

Đặt $h(x) = f'(x) - (x-1)$. Từ đồ thị $y = f'(x)$ và đồ thị $y = x-1$ trên hình vẽ ta suy ra

$$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$



Ta có $g'(x) = h(x-m) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x-m \leq 1 \\ x-m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq x \leq m+1 \\ x \geq m+3 \end{cases}$

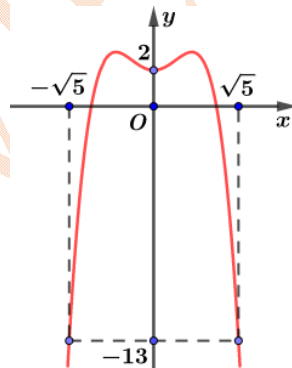
Do đó hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(m-1; m+1)$ và $(m+3; +\infty)$

Do vậy, hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq 5 \\ m+1 \geq 6 \\ m+3 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq m \leq 6 \\ m \leq 2 \end{cases}$

Do m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 5; 6\}$, tức $S = \{1; 2; 5; 6\}$

Tổng các phần tử của S bằng 14.

Câu 132: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



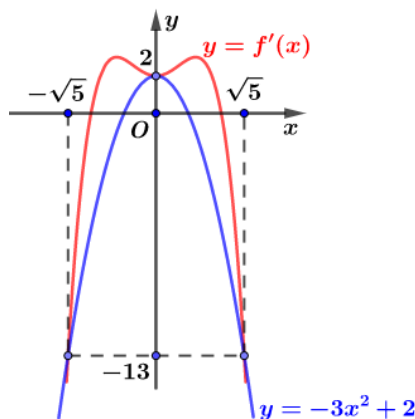
Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ với m là tham số thực. Điều kiện cần và đủ để $g(x) \leq 0$ với mọi $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ là

A. $m \geq \frac{2}{3} f(\sqrt{5})$. **B.** $m \geq \frac{2}{3} f(0)$. **C.** $m \geq \frac{2}{3} f(-\sqrt{5})$. **D.**

$m \leq \frac{2}{3} f(\sqrt{5})$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $g(x) \leq 0$ với mọi $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \Leftrightarrow 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5} \leq 0$ với mọi $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \Leftrightarrow 2f(x) + 2x^3 - 4x - 6\sqrt{5} \leq 3m$ với mọi $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$
 $\Leftrightarrow \max_{[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} (2f(x) + 2x^3 - 4x - 6\sqrt{5}) \leq 3m$ với mọi $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ (*).

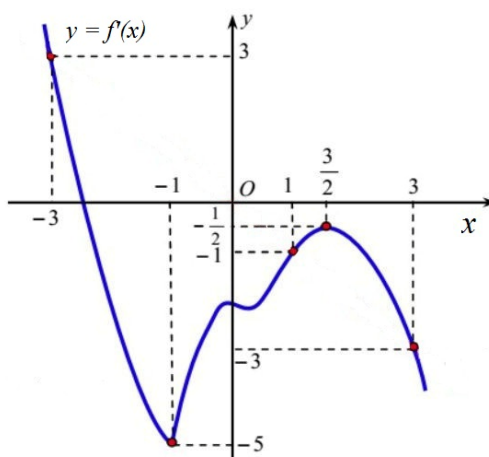
Đặt $h(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 6\sqrt{5}$.

Ta có $h'(x) = 2f'(x) + 6x^2 - 4$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3x^2 + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{5} \\ x = \sqrt{5} \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x) \geq -3x^2 + 2$ với mọi $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \Rightarrow h(x)$ luôn đồng biến trên $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \Rightarrow \max_{[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} h(x) = h(\sqrt{5}) = 2f(\sqrt{5})$.

Vậy (*) $\Leftrightarrow 2f(\sqrt{5}) \leq 3m \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$.

Câu 133: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x - 2m) + \frac{1}{2}(2m - x)^2 + 2020$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3; 4)$. Hỏi số phần tử của S bằng bao nhiêu?

A. 4. B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

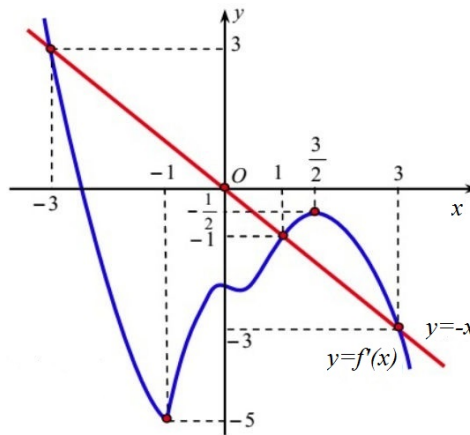
Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = f'(x-2m) - (2m-x)$.

Đặt $h(x) = f'(x) - (-x)$. Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = -x$ trên hình vẽ

$$\text{suy ra: } h(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq -x \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}.$$



$$\text{Ta có } g'(x) = h(x-2m) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-2m \leq 1 \\ x-2m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 \leq x \leq 2m+1 \\ x \geq 2m+3 \end{cases}.$$

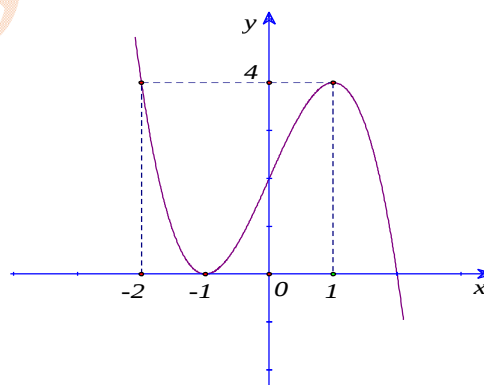
Suy ra hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(2m-3; 2m+1)$ và $(2m+3; +\infty)$.

$$\text{Do đó hàm số } y = g(x) \text{ nghịch biến trên khoảng } (3; 4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 \leq 3 \\ 2m+1 \geq 4 \\ 2m+3 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} \leq m \leq 3 \\ m \leq 0 \end{cases}.$$

Mặt khác, do m nguyên dương nên $m \in \{2; 3\} \Rightarrow S = \{2; 3\}$.

Vậy số phần tử của S bằng 2.

Câu 134: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-2020; 2020)$ để hàm số $g(x) = f(2x-3) - \ln(1+x^2) - 2mx$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$?



A. 2020.

B. 2019.

C. 2021.

D. 2018.

Lời giải

Chọn B

$$+ \text{ Ta có } g'(x) = 2f'(2x-3) - \frac{2x}{1+x^2} - 2m.$$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ khi và chỉ khi

$$g'(x) \geq 0, \forall x \in \left(-1; 2\right) \Leftrightarrow m \leq f'(2x-3) - \frac{x}{1+x^2}, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)} \left[f'(2x-3) - \frac{x}{1+x^2} \right] \quad (1)$$

+ Đặt $t = 2x-3$, khi đó $x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \Leftrightarrow t \in (-2; 1)$.

Từ đồ thị hàm $f'(x)$ suy ra $f'(t) \geq 0, \forall t \in (-2; 1)$ và $f'(t) = 0$ khi $t = -1$.

Tức là $f'(2x-3) \geq 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \Rightarrow \min_{x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)} f'(2x-3) = 0$ khi $x = 1$. (2)

+ Xét hàm số $h(x) = -\frac{x}{1+x^2}$ trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. Ta có $h'(x) = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$ và

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ trên $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ như sau:

x	$\frac{1}{2}$	1	2
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$			

$-\frac{1}{2}$

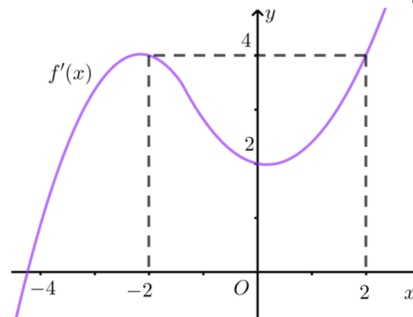
Từ bảng biến thiên suy ra $h(x) \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow \min_{x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)} h(x) = -\frac{1}{2}$ khi $x = 1$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $m \leq -\frac{1}{2}$.

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}, m \in (-2020; 2020)$ thì $m \in \{-2019; -2018; \dots; -2; -1\}$.

Vậy có tất cả 2019 giá trị m cần tìm.

Câu 135: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm bậc 4 và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = g(x) = 3f(-\sqrt{x-m}) + (x-m)\sqrt{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

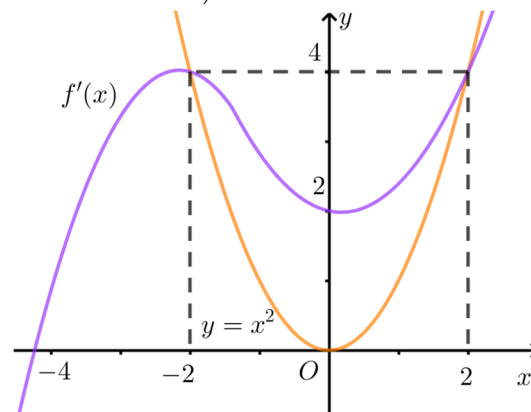
Đặt $t = -\sqrt{x-m}$; $t'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x-m}} < 0$ suy ra t nghịch biến và $t \leq 0$.

Ta có $x \in (0;3) \Rightarrow \forall t \in (-\sqrt{3-m}; -\sqrt{-m})$ với $m \leq 0$.

$$\Rightarrow g(x) = 3f(t) - t^3 = h(t).$$

Do biến t nghịch biến trên $(-\infty; 0]$ nên yêu cầu bài toán trở thành tìm m để hàm số $h(t)$ đồng biến trên khoảng $(-\sqrt{3-m}; -\sqrt{-m}) \Leftrightarrow h'(t) \geq 0, \forall t \in (-\sqrt{3-m}; -\sqrt{-m})$

$$\Leftrightarrow 3(f'(t) - t^2) \geq 0 \quad \forall t \in (-\sqrt{3-m}; -\sqrt{-m}).$$



Theo đồ thị ta có đồ thị hàm $f'(x)$ nằm trên $(P): y = x^2$ khi $x \in (-2; 2) \Rightarrow$ yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow (-\sqrt{3-m}; -\sqrt{-m}) \subset (-2; 2) \text{ và } t \leq 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3-m} \geq -2 \\ -\sqrt{-m} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3-m} \leq 2 \\ \sqrt{-m} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0.$$

Với $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0\}$ có 2 giá trị thỏa mãn.

Câu 136: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx + m - 2$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số

m để hàm số $y = g(x) = [f(x)]^3 - 3[f(x)]^2 + 2$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = g(x) = [f(x)]^3 - 3[f(x)]^2 + 2 \Rightarrow g'(x) = 3f'(x)[f(x)]^2 - 6f'(x)f(x)$.

Hàm số $y = g(x) = [f(x)]^3 - 3[f(x)]^2 + 2$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$ khi và chỉ khi

$$g'(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow 3f'(x)[(f(x))^2 - 2f(x)] \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0).$$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0) & (1) \\ (f(x))^2 - 2f(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0) & (2) \end{cases}$$

Ta có $f'(x) = x^2 - 4x + m$ nên $(1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + m \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0)$

$$\Leftrightarrow m \geq -x^2 + 4x, \forall x \in (-\infty; 0) \Rightarrow m \geq \max_{(-\infty; 0]} (-x^2 + 4x).$$

$$\text{Đặt } h(x) = -x^2 + 4x \Rightarrow h'(x) = -2x + 4, \text{ và } h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ta có bảng biến thiên của $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
h'		+	0	-
h	$-\infty$	0	4	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $m \geq 0$.

$$(2) \Leftrightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty; 0) \text{ hoặc } f(x) \geq 2, \forall x \in (-\infty; 0).$$

□ Xét trường hợp $f(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty; 0)$.

$$\text{Vì } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx + m - 2 \text{ nên ta có } m(x+1) \leq -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2, \forall x \in (-\infty; 0) (*).$$

Với $x = -1$ thì (*) đúng với mọi m .

$$\text{Với } x \neq -1 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow m \leq \frac{-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2}{x+1}, \forall x \in (-1; 0) \quad \text{và}$$

$$m \geq \frac{-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2}{x+1}, \forall x \in (-\infty; -1).$$

$$\text{Đặt } k(x) = \frac{-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2}{x+1} \Rightarrow k'(x) = \frac{-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x - 2}{(x+1)^2}.$$

$$k'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx -2,079 \\ x \approx 0,463(\text{loại}), \text{ và } x \approx -2,079 \Rightarrow k \approx -12,64. \\ x \approx 3,116(\text{loại}) \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của $k(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2,079	-1	0
k'		+	0	-
k	$-\infty$	-12,64	$+\infty$	2

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $-12,64 \leq m \leq 2$ mà $m \geq 0$ nên $2 \geq m \geq 0 \Rightarrow m \in \{0; 1; 2\}$.

□ Xét trường hợp $f(x) \geq 2, \forall x \in (-\infty; 0)$.

$$\text{Vì } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx + m - 2 \text{ nên ta có } \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx + m - 4 \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0).$$

Ta nhận thấy với $x = -1$ thì $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx + m - 4 \geq 0 \Rightarrow -\frac{19}{3} \geq 0$ sai.

Vậy không có giá trị của tham số m thỏa điều kiện $f(x) \geq 2, \forall x \in (-\infty; 0)$.

Trường hợp 2:
$$\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty; 0) & (3) \\ (f(x))^2 - 2f(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty; 0) & (4) \end{cases}$$

Ta có $f'(x) = x^2 - 4x + m$ nên ta có

$$(3) \Leftrightarrow x^2 - 4x + m \leq 0, \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow m \leq -x^2 + 4x, \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow m \leq \min_{(-\infty; 0]} h(x) \Rightarrow m \in \emptyset.$$

Vậy không có giá trị của tham số m thỏa điều kiện $f'(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty; 0)$.

Tóm lại, ta có 3 giá trị m thỏa mãn bài toán là $m \in \{0; 1; 2\}$.

Câu 137: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 12x^2 + ax + b$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(f(f(3))) = 3$ và $f(f(f(f(4)))) = 4$. Tính $f(7)$.

A. 31.

B. 30.

C. 32.

D. 34.

Lời giải

Chọn A

Do hàm số $f(x) = x^3 - 12x^2 + ax + b$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nếu $f(3) > 3$ thì $f(f(3)) > f(3) \Rightarrow f(f(f(3))) > f(f(3)) > f(3) > 3$.

Tương tự nếu $f(3) < 3$ thì

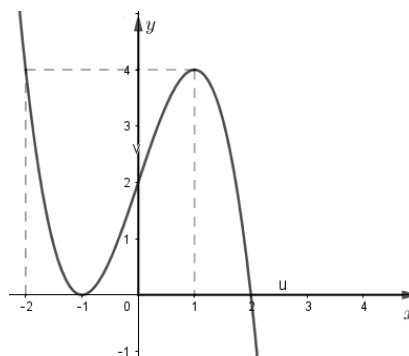
$$f(f(3)) < f(3) \Rightarrow f(f(f(3))) < f(f(3)) < f(3) < 3.$$

Vậy suy ra $f(3) = 3$.

Chứng minh tương tự $f(4) = 4$. Từ đó ta có hệ:

$$\begin{cases} 3a + b = 84 \\ 4a + b = 132 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 48 \\ b = -60 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 12x^2 + 48x - 60 \Rightarrow f(7) = 31.$$

Câu 138: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số

$$g(x) = f(x^2 + x - 1) + \frac{480}{m(x^2 + x + 2)}$$

nghịch biến trên $(0; 1)$?

A. 4.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

Do $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 1) \Leftrightarrow g(x)$ nghịch biến trên $[0; 1]$.

Ta có:

$$g'(x) = (2x+1)f'(x^2+x-1) - \frac{480(2x+1)}{m(x^2+x+2)^2} = (2x+1) \left[f'(x^2+x-1) - \frac{480}{m(x^2+x+2)^2} \right].$$

Ta có $x \in [0;1]$ nên $\begin{cases} -1 \leq x^2+x-1 \leq 1 \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow f'(x^2+x-1) - \frac{480}{m(x^2+x+2)^2} \leq 0, \forall x \in [0;1]$

$$\Leftrightarrow (x^2+x+2)^2 f'(x^2+x-1) \leq \frac{480}{m}, \forall x \in [0;1] \quad (*).$$

Dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta thấy khi $-1 \leq x^2+x-1 \leq 1$ thì $\max_{x \in [0;1]} (f'(x^2+x-1)) = 4$, dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Mà $\max_{x \in [0;1]} (x^2+x+2)^2 = 16$, dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Nên $\max_{x \in [0;1]} [(x^2+x+2)^2 f'(x^2+x-1)] = 4.16 = 64$, dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow \frac{480}{m} \geq 64 \Leftrightarrow m \leq \frac{15}{2}$.

Vì m là số nguyên dương nên ta có 7 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Câu 139: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x^2-4x+m)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f(x-1)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$?

A. 2020.

B. 2014.

C. 2019.

D. 2016.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = f'(x-1) = (x-1)(x-2)[(x-1)^2 - 4(x-1) + m]$
 $= (x-1)(x-2)(x^2 - 6x + m + 5)$

Mà $(x-1)(x-2) > 0 \quad \forall x \in (-\infty; 0)$

Khi đó hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0) \Leftrightarrow g'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (-\infty; 0)$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + m + 5 \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty; 0) \quad (*)$$

Đặt $h(x) = -x^2 + 6x - 5$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	3	0
$h(x)$	$-\infty$	4	-5

Từ bảng biến thiên và (*), ta có $m \geq 4$ mà m nguyên thuộc $[-2019; 2019]$.

Nên $m \in \{4; 5; 6; \dots; 2019\}$ nên có 2016 giá trị m thỏa bài toán.

Câu 140: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+3)(x^2+4x+m-1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$?

A. 1010.

B. 2016.

C. 4029.

D. 2020.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = -2f'(3-2x) = -2(3-2x)^2(6-2x)(4x^2-20x+20+m)$.

Nhận thấy rằng $-2(3-2x)^2(6-2x) \leq 0, \forall x < 2$.

Do vậy để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ thì $4x^2 - 20x + 20 + m \geq 0, \forall x < 2$

$$\Leftrightarrow m \geq -4x^2 + 20x - 20, \forall x < 2 \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in (-\infty; 2)} (-4x^2 + 20x - 20) (*)$$

Đặt $y = -4x^2 + 20x - 20$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
y	$-\infty$	4	5	$-\infty$

Từ bảng biến thiên và từ (*) ta được $m \geq 4$

Vì $m \in [-2019; 2019], m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{4; 5; \dots; 2019\}$.

Vậy có 2016 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 141: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + 6x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $(-2020; 2020)$ của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - (2m+4)x - 5$ nghịch biến trên $(0; 2)$?

A. 2008.

B. 2007.

C. 2018.

D. 2019.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = f'(x) - (2m+4)$.

Hàm số $g(x) = f(x) - (2m+4)x - 5$ nghịch biến trên $(0; 2)$ khi $g'(x) \leq 0, \forall x \in (0; 2)$

$$\Leftrightarrow f'(x) - (2m+4) \leq 0, \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 4 \leq 2m+4, \forall x \in (0; 2).$$

Xét hàm số $h(x) = 3x^2 + 6x + 4 \Rightarrow h'(x) = 6x + 6$. Ta có BBT:

x	0	2
$h'(x)$		+
$h(x)$	4	28

Vậy $2m + 4 \geq 28 \Leftrightarrow m \geq 12$. Vì m nguyên thuộc $(-2020; 2020)$ nên có 2008 giá trị thỏa mãn.

Câu 142: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x^2+mx+5), \forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x) = f(x^2+x-2)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

$$g'(x) = (x^2+x-2)' \cdot f'(x^2+x-2) = (2x+1) \cdot f'(x^2+x-2).$$

$$\Rightarrow g'(x) = (2x+1) \cdot (x^2+x-2)^2 \cdot (x^2+x) \cdot [(x^2+x-2)^2 + m(x^2+x-2) + 5], \forall x \in (1; +\infty), \text{ ta}$$

có: $2x+1 > 0, x^2+x > 0, x^2+x-2 > 0$.

m thỏa bài toán $\Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2 + m(x^2+x-2) + 5 \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) (*).$$

$$\text{Đặt } t = x^2+x-2 = h(x) \Rightarrow h'(x) = 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	1	$+\infty$
$h'(x)$		+
$h(x)$	0	$+\infty$

Suy ra $t \in (0; +\infty)$.

Khi đó (*) trở thành:

$$t^2 + mt + 5 \geq 0, \forall t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow mt \geq -t^2 - 5, \forall t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \geq -t - \frac{5}{t}, \forall t \in (0; +\infty).$$

$$\text{Đặt } k(t) = -t - \frac{5}{t} \Rightarrow k'(t) = -1 + \frac{5}{t^2} = \frac{-t^2 + 5}{t^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{5} & (N) \\ t = -\sqrt{5} & (L) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0	$\sqrt{5}$	$+\infty$	
$k'(t)$		+	0	-
$k(t)$			$-2\sqrt{5}$	

$\Rightarrow m \geq -2\sqrt{5} \approx -4,47$. Chọn $m \in \{-4; -3; -2; -1\}$.

Câu 143: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^2(x^2 + 2mx + 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(2x+1)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$?

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x) = 2f'(2x+1) = 2(2x+1)(2x+2)^2[(2x+1)^2 + 2m(2x+1) + 1]$

Đặt $t = 2x+1$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (3;5)$

$$\Leftrightarrow t(t^2 + 2mt + 1) \geq 0, \forall t \in (7;11) \Leftrightarrow t^2 + 2mt + 1 \geq 0, \forall t \in (7;11) \Leftrightarrow 2m \geq \frac{-t^2 - 1}{t}, \forall t \in (7;11)$$

Xét hàm số $h(t) = \frac{-t^2 - 1}{t}$ trên $[7;11]$, có $h'(t) = \frac{-t^2 + 1}{t^2}$

BBT:

t	$-\infty$	7	11	$+\infty$
$h'(t)$			-	
		$-\frac{50}{7}$	$-\frac{122}{11}$	

$$\text{Dựa vào BBT ta có } 2m \geq \frac{-t^2 - 1}{t}, \forall t \in (7;11) \Leftrightarrow 2m \geq \max_{[7;11]} h(t) \Leftrightarrow m \geq -\frac{50}{14}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1\}$.

Câu 144: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)e^x$, có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $y = g(x) = f(\ln x) - mx^2 + mx - 2$ nghịch biến trên $(1; e^2)$.

A. 2018.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2021.

Lời giải

Chọn B

Trên $(1; e^2)$ ta có $g'(x) = \frac{1}{x} \cdot f'(\ln x) - 2mx + m = \ln x + 1 - (2x - 1)m$

Để hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(1; e^2)$ thì $g'(x) = \ln x + 1 - (2x - 1)m \leq 0, \forall x \in (1; e^2)$

$$\Leftrightarrow \ln x + 1 - (2x - 1)m \leq 0, \forall x \in (1; e^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x + 1}{2x - 1} \leq m, \forall x \in (1; e^2)$$

Xét hàm số $h(x) = \frac{\ln x + 1}{2x - 1}$ trên $(1; e^2)$, ta có $h'(x) = \frac{-\frac{1}{x} - 2 \ln x}{(2x - 1)^2} < 0, \forall x \in (1; e^2)$, từ đây suy ra

$m \geq 1$. Vậy có 2019 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

Câu 145: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-3)^2(x^2 + mx + 16)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x) = f(5-x)$ đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$?

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g(x) = f(5-x) \Rightarrow g'(x) = -f'(5-x) = (x-5)(2-x)^2[(5-x)^2 + m(5-x) + 16]$.

Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (6; +\infty)$

$$\Leftrightarrow (x-5)(2-x)^2[(5-x)^2 + m(5-x) + 16] \geq 0, \forall x \in (6; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow (5-x)^2 + m(5-x) + 16 \geq 0, \forall x \in (6; +\infty) \text{ (vì } x-5 > 0 \text{ và } (2-x)^2 > 0, \forall x \in (6; +\infty))$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{(x-5)^2 + 16}{x-5}, \forall x \in (6; +\infty).$$

Đặt $h(x) = \frac{(x-5)^2 + 16}{x-5}$, với $x \in (6; +\infty)$.

Do $x \in (6; +\infty)$ nên $x-5 > 0$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$h(x) = \frac{(x-5)^2 + 16}{x-5} = (x-5) + \frac{16}{x-5} \geq 2\sqrt{(x-5) \cdot \frac{16}{x-5}} = 8, \text{ dấu "=" xảy ra khi } x = 9.$$

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \leq 8$.

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta được $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Vậy có 8 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 146: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(3x^4 + mx^3 + 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải:

Chọn B

Ta có: $g'(x) = 2xf'(x^2) = 2x \cdot x^2(x^2-1)^2(3x^8 + mx^6 + 1)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 3x^8 + mx^6 + 1 \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow -m \leq 3x^2 + \frac{1}{x^6}, \forall x \in (0; +\infty).$$

$$h(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^6} = x^2 + x^2 + x^2 + \frac{1}{x^6} \stackrel{\text{Cosi}}{\geq} 4, \forall x \in (0; +\infty). \text{ Đẳng thức xảy ra khi: } x^2 = \frac{1}{x^6} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Vậy } -m \leq 3x^2 + \frac{1}{x^6}, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow -m \leq 4 \Leftrightarrow m \geq -4.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên âm của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 147: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f(|1-x|)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A. 2012.

B. 2011.

C. 2009.

D. 2010.

Lời giải

Chọn B

$$g(x) = f(|1-x|) = f(1-x), \forall x \in (-\infty; -1). \text{ Suy ra } g'(x) = [f(1-x)]' = -f'(1-x) = -(1-x)^2(1-x-2)[(1-x)^2-6(1-x)+m] = (x-1)^2(x+1)(x^2+4x+m-5).$$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1) \Leftrightarrow g'(x) \leq 0$ với mọi $x < -1$ (dấu " $=$ " chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm)

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + m - 5 \geq 0 \text{ với mọi } x \in (-\infty; -1) \text{ (vì } (x-1)^2(x+1) < 0, \forall x \in (-\infty; -1))$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 \geq 9-m \text{ với mọi } x \in (-\infty; -1) \Leftrightarrow 9-m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 9.$$

Do m nguyên và $m \in [-2019; 2019]$ nên suy ra $m \in \{9; 10; 11; \dots; 2019\}$.

Vậy có 2011 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện.

Câu 148: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-4); \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m < 2020$ để hàm số $g(x) = f\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

A. 2018.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2021

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } g'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right).$$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \geq 0; \forall x \in (2; +\infty)$$

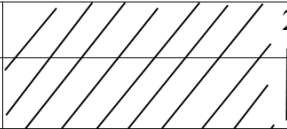
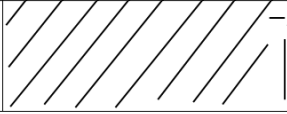
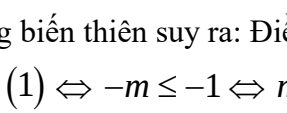
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{(x+1)^2} f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right) \geq 0; \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right) \leq 0; \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\text{Ta có: } f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right) \leq 0; \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{1+x} - m \leq -1; \forall x \in (2; +\infty) & (1) \\ 1 \leq \frac{2-x}{1+x} - m \leq 4; \forall x \in (2; +\infty) & (2) \end{cases}$$

Hàm số $h(x) = \frac{2-x}{1+x}; x \in (2; +\infty)$ có bảng biến thiên:

x		2	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$		$-m$	$-\infty$

Căn cứ bảng biến thiên suy ra: Điều kiện (2) không có nghiệm m thỏa mãn.

Điều kiện (1) $\Leftrightarrow -m \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 1$, kết hợp điều kiện $m < 2020$ suy ra có 2019 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Có thể mở rộng bài toán đã nêu như sau:

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-4)$; $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m < 2020$ để hàm số $g(x) = f\left(\frac{2-x}{1+x} + h(m)\right)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Câu 149: Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[10; 2019]$ để hàm số $y = f\left(\frac{m}{3}x^3 + (m-4)x^2 + 9x + 2019\right)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. 16.

B. 2009

C. 2010

D. 7

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} - \text{Ta có } y' &= \left[f\left(\frac{m}{3}x^3 + (m-4)x^2 + 9x + 2019\right) \right]' \\ &= \left(\frac{m}{3}x^3 + (m-4)x^2 + 9x + 2019\right)' f'\left(\frac{m}{3}x^3 + (m-4)x^2 + 9x + 2019\right) \\ &= (mx^2 + 2(m-4)x + 9) \cdot f'\left(\frac{m}{3}x^3 + (m-4)x^2 + 9x + 2019\right). \end{aligned}$$

- Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ ta có $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm)

$$\Leftrightarrow (mx^2 + 2(m-4)x + 9) \cdot f'\left(\frac{m}{3}x^3 + (m-4)x^2 + 9x + 2019\right) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow mx^2 + 2(m-4)x + 9 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (do } f'\left(\frac{m}{3}x^3 + (m-4)x^2 + 9x + 2019\right) \leq 0) (*)$$

Dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm vì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $f'\left(\frac{m}{3}x^3 + (m-4)x^2 + 9x + 2019\right) = 0$ chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm. Mặt khác nếu $mx^2 +$

$$2(m-4)x + 9 = 0, \forall x \in (x_1; x_2) \text{ với } (x_1; x_2) \text{ nào đó thì ta phải có } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 2(m-4) = 0 \\ 9 = 0 \end{cases}$$

vô lý.

- Xét $mx^2 + 2(m-4)x + 9 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

+) **TH1:** Xét $m = 0$ khi đó (*) trở thành $-8x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{9}{8}$ không thỏa mãn bài toán.

+) **TH2:** Xét $m \neq 0$ điều kiện là $\begin{cases} m > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 17m + 16 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1 \leq m \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 16$$

Mặt khác $m \in [10; 2019]$, m nguyên nên tập các giá trị m là:

$S = \{10; 11; 12; 13; 14; 15; 16\}$. có 7 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 116: Cho các hàm số $f(x) = x^2 - 4x + m$ và $g(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)^2(x^2 + 3)^3$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(3; +\infty)$ là

A. $[3; 4)$.

B. $[0; 3)$.

C. $[4; +\infty)$.

D. $[3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x) = x^2 - 4x + m$

$$g(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)^2(x^2 + 3)^3 = a_{12}x^{12} + a_{10}x^{10} + \dots + a_2x^2 + a_0.$$

Suy ra: $f'(x) = 2x - 4$.

$$g'(x) = 12a_{12}x^{11} + 10a_{10}x^9 + \dots + 2a_2x.$$

$$\begin{aligned} [g(f(x))]' &= f'(x) [12a_{12}(f(x))^{11} + 10a_{10}(f(x))^9 + \dots + 2a_2f(x)] \\ &= f(x)f'(x) [12a_{12}(f(x))^{10} + 10a_{10}(f(x))^8 + \dots + 2a_2]. \end{aligned}$$

Ta có: $a_{12}; a_{10}; \dots; a_2; a_0 > 0$ và $f'(x) = 2x - 4 > 0, \forall x > 3$.

Để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(3; +\infty)$ thì

$$[g(f(x))]' \geq 0; \forall x > 3 \Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x > 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + m \geq 0, \forall x > 3.$$

Hay $m \geq 4x - x^2, \forall x > 3 \Rightarrow m \geq \max_{[3; +\infty)} (4x - x^2) = 3$. Vậy $m \in [3; +\infty)$.

Câu 117: Cho các hàm số $f(x) = x^3 + 4x + m$ và $g(x) = (x^2 + 2018)(x^2 + 2019)^2(x^2 + 2020)^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2020; 2020]$ để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(2; +\infty)$?

A. 2005.

B. 2037.

C. 4016.

D. 4041.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$f(x) = x^3 + 4x + m,$$

$$g(x) = (x^2 + 2018)(x^2 + 2019)^2(x^2 + 2020)^3 = a_{12}x^{12} + a_{10}x^{10} + \dots + a_2x^2 + a_0.$$

$$\text{Suy ra } f'(x) = 3x^2 + 4, \quad g'(x) = 12a_{12}x^{11} + 10a_{10}x^9 + \dots + 2a_2x.$$

$$\begin{aligned} \text{Và } [g(f(x))]' &= f'(x) [12a_{12}(f(x))^{11} + 10a_{10}(f(x))^9 + \dots + 2a_2f(x)] \\ &= f(x)f'(x) [12a_{12}(f(x))^{10} + 10a_{10}(f(x))^8 + \dots + 2a_2]. \end{aligned}$$

Để thấy $a_{12}; a_{10}; \dots; a_2; a_0 > 0$ và $f'(x) = 3x^2 + 4 > 0, \forall x > 2$.

$$\text{Do đó } f'(x) [12a_{12}(f(x))^{10} + 10a_{10}(f(x))^8 + \dots + 2a_2] > 0, \forall x > 2.$$

Hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(2; +\infty)$ khi $[g(f(x))]' \geq 0, \forall x > 2 \Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x > 2$.

$$\Leftrightarrow x^3 + 4x + m \geq 0, \forall x > 2 \Leftrightarrow m \geq -x^3 - 4x, \forall x > 2 \Rightarrow m \geq \max_{[2; +\infty)} (-x^3 - 4x) = -16.$$

Vì $m \in [-2020; 2020]$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2037 giá trị thỏa mãn m .