

Đề chính thức
(Gồm có 01 trang)

Câu 1 (2,0 điểm): Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ (C)...

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại giao điểm của đồ thị với trục tung.

Câu 2 (1,0 điểm): a) Giải phương trình $\sqrt{2}\sin 2x = 2\cos x + 1 - \sqrt{2}\sin x$.

b) Cho số phức z thỏa mãn $z + 3\bar{z} = 8 - 4i$. Tìm mô đun của số phức $\omega = z - 10$.

Câu 3 (1,0 điểm): Tính tích phân $I = \int_0^1 x \left(\frac{x^2 e^x + 2 + e^x}{1 + x^2} \right) . dx$

Câu 4 (1,0 điểm): a) Giải bất phương trình $\log_2 x \leq 1 + \frac{1}{\log_2 \sqrt{x}}$

b) Một tổ có 5 học sinh nam và 7 học sinh nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 4 học sinh để tham gia buổi trực nề nếp. Tính xác suất để 4 học sinh được chọn có cả nam và nữ.

Câu 5: (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy - 5x + y + 2 = \sqrt{y - 2x + 1} - \sqrt{3 - 3x} \\ x^2 - y - 1 = \sqrt{4x + y + 5} - \sqrt{x + 2y - 2} \end{cases}$$

Câu 6 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $SA \perp mp(ABCD)$, SC tạo với $mp(ABCD)$ một góc 45° và $SC = 2a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác ABC đến $mp(SCD)$ theo a .

Câu 7 (1,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi K là điểm đối xứng của A qua C . Đường thẳng đi qua K vuông góc với BC cắt BC tại E và cắt AB tại $N(-1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng góc $AEB = 45^\circ$, phương trình đường thẳng BK là $3x + y - 15 = 0$ và điểm B có hoành độ lớn hơn 3.

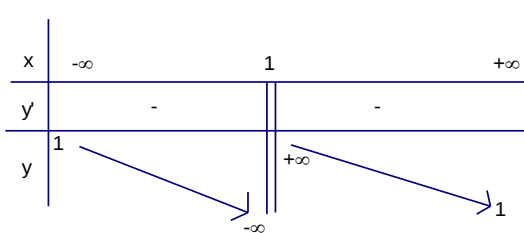
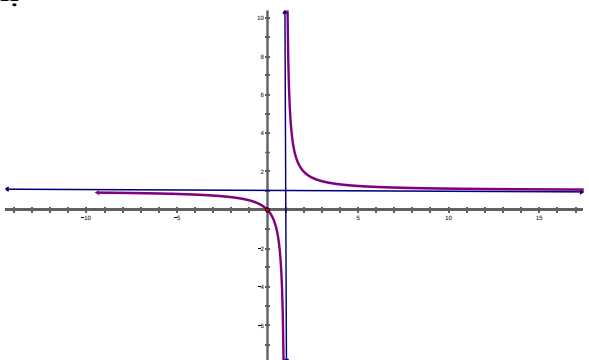
Câu 8: (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-4;1;3)$, $B(1;5;5)$ và đường thẳng $d: \frac{-x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{3}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d . Tìm tọa độ điểm C thuộc d sao cho tam giác ABC có diện tích là $S_{\triangle ABC} = \frac{15}{2}$.

Câu 9: (1,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab \geq 1$; $c(a+b+c) \geq 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{b+2c}{1+a} + \frac{a+2c}{1+b} + 6\ln(a+b+2c)$.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinhSBD:
(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm, thí sinh không được sử dụng tài liệu)

Câu	ý	Nội dung	Biểu điểm								
1	a	Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ (C). * TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y' = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$ * Giới hạn và tiệm cận : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ nên $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số * Bảng biến thiên <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">y</td> <td style="padding: 5px;">$-$</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">$-$</td> </tr> </table>  * Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$, hàm số không có cực trị. * Đồ thị : Vẽ chính xác đồ thị  Nhận xét : Đồ thị nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận $I(1; 1)$ làm tâm đối xứng	x	$-\infty$	1	$+\infty$	y	$-$		$-$	0,25 0,5 0,25
x	$-\infty$	1	$+\infty$								
y	$-$		$-$								
1	b	Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại giao điểm của đồ thị với trục tung: * Đồ thị cắt Oy tại $O(0; 0)$ * Gọi (d) là tiếp tuyến của đồ thị tại O, khi đó (d) có hệ số góc k xác định bởi $k = y'(0) = -1$. * Phương trình tiếp tuyến (d) cần tìm là $y = -1(x - 0) + 0 \Leftrightarrow y = -x$	0,25 0,5 0,25								
2	a	Giải phương trình: $\sqrt{2}\sin 2x = 2\cos x + 1 - \sqrt{2}\sin x$. Ta có $\sqrt{2}\sin 2x = 2\cos x + 1 - \sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x(2\cos x + 1) - (2\cos x + 1) = 0$									

		$\Leftrightarrow (\sqrt{2}\sin x - 1)(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x - 1 = 0 \vee 2\cos x + 1 = 0$	0,25
		$* \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k.2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k.2\pi \end{cases}; \quad * \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k.2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$	0,25
2	b	Số phức z thỏa mãn $z + 3\bar{z} = 8 - 4i$. Tìm mô đun của số phức $\omega = z - 10$. * Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số phức đã cho, khi đó $\bar{z} = a - bi \Rightarrow 3\bar{z} = 3(a - bi)$ * Từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} 4a = 8 \\ -2b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow z = 2 + 2i$ * Số phức $\omega = z - 10 = 2 + 2i - 10 = -8 + 2i$ có mô đun là $\omega = \sqrt{(-8)^2 + 2^2} = 2\sqrt{17}$	0,25 0,25
3		Tính tích phân $I = \int_0^1 x \left(\frac{x^2 e^x + e^x + 2}{1 + x^2} \right) dx$ + Viết lại được: $I = \int_0^1 x \left(\frac{2}{1 + x^2} + e^x \right) dx = \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int_0^1 x e^x dx$ + Lần lượt tính được $I_1 = \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln 2$ và $I_2 = \int_0^1 x e^x dx = 1$ + Vậy $I = 1 + \ln 2$	0,25 0,5 0,25
4	a	Giải bất phương trình $\log_2 x \leq 1 + \frac{1}{\log_2 \sqrt{x}}$. * ĐKXD: $x > 0; x \neq 1$, khi đó BPT $\log_2 x \leq 1 + \frac{1}{\log_2 \sqrt{x}} \Leftrightarrow \log_2 x \leq 1 + \frac{2}{\log_2 x}$ Đặt $t = \log_2 x$ ta thu được BPT $t \leq 1 + \frac{2}{t} \Leftrightarrow \frac{t^2 - t - 2}{t} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ 0 < t \leq 2 \end{cases}$ * $t \leq -1 \Rightarrow \log_2 x \leq -1 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2}$, * $0 < t \leq 2 \Rightarrow 0 < \log_2 x \leq 2 \Leftrightarrow 1 < x \leq 4$ * Tập nghiệm của BPT là $S = (0; \frac{1}{2}] \cup (1; 4]$	0,25 0,25
4	b	Một tổ có 5 học sinh nam và 7 học sinh nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 4 học sinh để tham gia buổi trực nề nếp. Tính xác suất để 4 học sinh được chọn có cả nam và nữ. Xét phép thử T “ chọn ngẫu nhiên 4 học sinh từ một tổ có 12 học sinh” * Số cách chọn 4 học sinh từ 12 học sinh của tổ là $C_{12}^4 = 495$ do đó số phần tử của không gian mẫu là $\Omega = 495$. * Gọi A là biến cố ” 4 học sinh được chọn có cả nam và nữ” Khi đó $\bar{A}$ là biến cố ” 4 học sinh được chọn chỉ toàn nam hoặc nữ” Ta có $\Omega_{\bar{A}} = C_5^4 + C_7^4 = 5 + 35 = 40$ $P(\bar{A}) = \frac{40}{495} \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{455}{495} = \frac{91}{99}$	0,25 0,25

	* G là trọng tâm tam giác ABC nên $\frac{GD}{BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(G, (SCD)) = \frac{2}{3}.d(B, (SCD))$ + Gọi H là hình chiếu của A lên SD thì $AH \perp (SCD)$. Vì $AB // mp(SCD)$ nên $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AH$ + Trong ΔSAD có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$ $\Rightarrow d(G, (SCD)) = \frac{2}{3}.d(B, (SCD)) = \frac{4a\sqrt{21}}{21}$	0,25
		0,25
7	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi K là điểm đối xứng của A qua C. Đường thẳng đi qua K vuông góc với BC cắt BC tại E và cắt AB tại N(-1;3). Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $AEB = 45^\circ$, phương trình đường thẳng BK là $3x + y - 15 = 0$ và điểm B có hoành độ lớn hơn 3. Giải: (Hình vẽ) * Tứ giác ABKE nội tiếp $\Rightarrow AKB = AEB = 45^\circ$ $\Rightarrow \Delta AKB$ vuông cân tại A $\Rightarrow ABK = 45^\circ$ * Đường thẳng BK có vtpt $\vec{n}_1 = (3;1)$, gọi $\vec{n}_2 = (a;b)$ là vtpt của đt AB và φ là góc giữa BK và AB Ta có $\cos \varphi = \frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \vec{n}_2 } = \frac{ 3a + b }{\sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 3a + b = \sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ $\Leftrightarrow 4a^2 + 6ab - 4b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a = -2b \end{cases}$ + Với $a = -2b$, chọn $\vec{n}_2 = (-2;1) \Rightarrow AB: -2x + y - 5 = 0 \Rightarrow B(2;9)$ (Loại) + Với $b = 2a$, chọn $\vec{n}_2 = (1;2) \Rightarrow AB: x + 2y - 5 = 0 \Rightarrow B(5;0)$ (TM) * Tam giác BKN có BE và KA là đường cao $\Rightarrow C$ là trực tâm của BKN $\Rightarrow CN \perp BK \Rightarrow CN: x - 3y + 10 = 0$. ΔABK và ΔKCM vuông cân $\Rightarrow KM = \frac{1}{\sqrt{2}}CK = \frac{1}{2\sqrt{2}}AC = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}BK = \frac{BK}{4} \Rightarrow \overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{KM}$ $M = MN \cap BK \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right) \Rightarrow K(3;6)$, Đường thẳng AC qua K vuông góc AB $\Rightarrow AC: 2x - y = 0$ $A = AC \cap AB \Rightarrow A(1;2)$, C là trung điểm của AK $\Rightarrow C(2;4)$. Vậy: A(1;2), B(5;0), C(2;4).	0,25 0,25 0,25 0,25

8	Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(-4; 1; 3)$, $B(1; 5; 5)$ và đường thẳng $d: \frac{-x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{3}$. Viết PT mp (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d. Tìm tọa độ điểm C thuộc d sao cho $S_{\triangle ABC} = \frac{15}{2}$ *) Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u_d} = (-2; 1; 3)$, vì $(P) \perp d$ nên (P) nhận $\vec{u_d} = (-2; 1; 3)$ làm VTPT do đó PT mặt phẳng (P) là : $-2(x+4) + 1(y-1) + 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow -2x + y + 3z - 18 = 0.$ * Vì $C \in d$ nên C có tọa độ $(-1-2t; 1+t; -3+3t)$, nhận thấy $B \in mp(P)$ nên $\triangle ABC$ vuông tại A, do đó $S_{\triangle ABC} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\ = \frac{15}{2}$. * Tính được các véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ theo tọa độ của các điểm nói trên để tìm ra tọa độ của C...	0,5 0,25 0,25
9	Cho a, b, c dương thỏa mãn $ab \geq 1; c(a+b+c) \geq 3$. Tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{b+2c}{1+a} + \frac{a+2c}{1+b} + 6\ln(a+b+2c)$. Giải: Ta có $P+2 = \frac{a+b+2c+1}{1+a} + \frac{a+b+2c+1}{1+b} + 6\ln(a+b+2c)$ $= (a+b+2c+1) \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \right) + 6\ln(a+b+2c)$ Ta chứng minh được các BĐT quen thuộc sau: $+) \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \quad (1) \qquad \qquad \qquad +) \sqrt{ab} \leq \frac{ab+1}{2} \quad (2)$ Thật vậy, $+) \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow (2+a+b)(1+\sqrt{ab}) \geq 2(1+a)(1+b)$ $\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 (\sqrt{ab}-1) \geq 0 \text{ luôn đúng vì } ab \geq 1. \text{ Dấu "=" khi } a=b \text{ hoặc } ab=1$ $+) \sqrt{ab} \leq \frac{ab+1}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{ab}-1)^2 \geq 0. \text{ Dấu "=" khi } ab=1.$ Do đó, $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{1+\frac{ab+1}{2}} = \frac{4}{3+ab}$ $\geq \frac{4}{ab+bc+ca+c^2} = \frac{4}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{16}{(a+b+2c)^2}$ + Đặt $t = a+b+2c, t > 0$ ta có	0,25 0,25 0,25

$$P + 2 \geq f(t) = \frac{16(t+1)}{t^2} + 6\ln t, t > 0;$$

$$f'(t) = \frac{6}{t} - \frac{16(t+1)}{t^3} = \frac{6t^2 - 16t - 32}{t^3} = \frac{(t-4)(6t+8)}{t^3}$$

Lập BBT của hàm f(t) trên khoảng $(0; +\infty)$, ta được

t	0	4	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$			



 $5 + 6.\ln 4$

Vậy, GTNN của P là $3 + 6\ln 4$ khi $a = b = c = 1$.

0,25