

I. Cơ sở lý luận

1. Nội dung chương trình (chương I - giải tích 12 - Ban cơ bản)

Học sinh cần nắm được một số vấn đề sau đây (liên quan đến nội dung và phạm vi nghiên cứu của đề tài)

1.1. Định nghĩa về tính đơn điệu của hàm số:

+ Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** trên khoảng K nếu với mọi x_1, x_2 thuộc K ,
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

+ Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng K nếu với mọi x_1, x_2 thuộc K ,
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

1.2. Tính chất của các hàm số đồng biến, nghịch biến:

+ Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số cùng đồng biến (hoặc nghịch biến) trên D thì tổng $f(x) + g(x)$ cũng là hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên D . Tính chất này nói chung không đúng với hiệu $f(x) - g(x)$.

+ Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số dương, cùng đồng biến (hoặc nghịch biến) trên D thì tích $f(x)g(x)$ cũng là hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên D . Tính chất này nói chung không đúng với tích $f(x)g(x)$ khi $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số không cùng dương trên D .

1.3. Công thức tính đạo hàm:

Hàm số hợp $y = u^\alpha$ có đạo hàm $y' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ (*)

+ công thức (*) chỉ đúng với số mũ α là hằng số.

+ Nếu α không nguyên thì công thức (*) chỉ đúng khi u nhận giá trị dương.

1.4. Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số của hàm số dựa trên định lí sau:

+ Định lí: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong khoảng K .

(Kí hiệu K là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng)

a. Nếu $f'(x) > 0$ với $\forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .

b. Nếu $f'(x) < 0$ với $\forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K .

c. Nếu $f'(x) = 0$ với $\forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ không đổi trên K .

✍ Quy tắc 1 để xét tính đơn điệu của hàm số là điều kiện đủ chứ không phải điều kiện cần.

1.5. Quy tắc tìm điểm cực trị của hàm số dựa trên hai định lí sau:

✦ Định lí 1: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$.

a. Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

b. Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

✦ Định lí 2: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó:

a. Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu

b. Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

✍ Quy tắc 2 để tìm điểm cực trị của hàm số là điều kiện đủ chứ không phải điều kiện cần. Do vậy, điều ngược lại nói chung không đúng.

1.6. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số trên miền D :

$$m = \min_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = m \end{cases}, \quad M = \max_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = M \end{cases}$$

✍ Nếu $f(x) \geq m, \forall x \in D$ (hay $f(x) \leq M, \forall x \in D$) nhưng không $\exists x_0 \in D: f(x_0) = m$ (hay $\exists x_0 \in D: f(x_0) = M$) thì dấu "=" không xảy ra. Khi đó, không tồn tại giá trị nhỏ nhất (hay giá trị lớn nhất) của hàm số $f(x)$ trên miền D .

✍ Khi tìm giá trị nhỏ nhất (hay giá trị lớn nhất) của hàm số $f(x)$ trên miền D mà chuyển sang xét giá trị nhỏ nhất (hay giá trị lớn nhất) của hàm số $g(t)$ với phép đặt $t = u(x)$ thì cần chuyển đổi điều kiện để được bài toán tương đương.

1.7. Về phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$:

✦ Tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ có phương trình: $y = f'(x_0).(x - x_0) + y_0$.

✦ Tiếp tuyến với (C) có hệ số góc k , đi qua điểm $M_1(x_1; y_1)$ có phương trình:

$$y = k.(x - x_1) + y_1. \text{ Trong đó hệ số góc } k \text{ thỏa mãn hệ: } \begin{cases} f(x) = k(x - x_1) + y_1 & (*, *) \\ f'(x) = k \end{cases}$$

✍ Nếu điểm $M_1(x_1; y_1)$ nói trên thuộc (C) thì hệ số góc k vẫn thỏa mãn hệ $(*, *)$. Trong trường hợp này, số tiếp tuyến có thể nhiều hơn 1 tiếp tuyến.

2. Sai lầm thường gặp khi giải toán

1.1. Sai lầm trong bài toán xét tính đơn điệu của hàm số, khi không nắm vững định nghĩa về tính đơn điệu của hàm số hay không chú ý tới các điểm tới hạn của hàm số.

1.2. Sai lầm trong bài toán chứng minh bất đẳng thức, khi không nhớ chính xác tính đơn điệu của hàm số để vận dụng hoặc vận dụng sai tính chất của các hàm đồng biến, nghịch biến.

1.3. Sai lầm trong việc giải các bài toán liên quan tới đạo hàm, khi vận dụng sai công thức tính đạo hàm hay hiểu sai công thức lũy thừa với số mũ thực.

1.4. Sai lầm trong việc giải các bài toán liên quan tới cực trị của hàm số, khi vận dụng sai về điều kiện để hàm số có cực trị hay điều kiện để hàm số đơn điệu trên khoảng $(a;b)$.

1.5. Sai lầm trong việc giải các bài tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số trên một miền D , khi chuyển đổi bài toán không tương đương.

1.6. Sai lầm trong việc giải các bài toán viết phương trình tiếp tuyến đi qua một điểm $M_1(x_1; y_1)$ thuộc đồ thị (C) của hàm số.

Trong thực tế, khi học sinh học chương I “Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số” thường gặp phải những khó khăn sau:

- Không nắm vững định nghĩa về tính đơn điệu của hàm số trên một khoảng, không hiểu chính xác về định nghĩa điểm tới hạn của hàm số.
- Không nắm vững điều kiện để hàm số đơn điệu trên một khoảng.
- Không nắm vững điều kiện để hàm số đạt cực trị tại một điểm x_0 .
- Không nắm vững định nghĩa về giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số trên một miền D .
- Không nắm vững bản chất sự khác nhau giữa tiếp tuyến tại một điểm thuộc đồ thị số với tiếp tuyến kẻ từ một điểm đến đồ thị hàm số đã cho.

II. Nghiên cứu thực tế

1. Phân tích những sai lầm thông qua một số ví dụ minh họa

1.1. Sai lầm khi xét tính đơn điệu của hàm số

➤ Các em thường mắc phải sai lầm khi không nắm vững định nghĩa về tính đơn điệu của hàm số.

Ví dụ minh họa 1:

Xét tính đơn điệu của hàm số: $y = f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Một số học sinh trình bày như sau:

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Ta có: $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	1 	$+\infty$	 1

Suy ra: Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

Phân tích:

Lời giải trên có vẻ như đúng rồi, nếu ta không chú ý đến kết luận của bài toán !

Chú ý rằng: nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên tập D thì với mọi x_1, x_2 thuộc D,

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Trong kết luận của bài toán, nếu ta lấy $x_1 = -2 \in D$ và

$x_2 = 0 \in D$ thì $x_1 < x_2$ nhưng $f(x_1) = 3 > -1 = f(x_2)$???

Lời giải đúng là:

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Ta có: $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	1 	$+\infty$	 1

Suy ra: Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Phân tích sai lầm khi học chương "Ứng dụng đạo hàm để khảo sát, vẽ đồ thị hàm số"...

➤ Nhiều khi các em không chú ý đến các điểm tới hạn của hàm số, vì vậy việc xét dấu của đạo hàm y' sẽ bị sai.

Ví dụ minh họa 2:

Xét tính đơn điệu của hàm số: $y = f(x) = x - 1 + \sqrt{4 - x^2}$

Một số học sinh trình bày như sau:

Tập xác định: $D = [-2; 2]$

Ta có: $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow 4 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Trên từng khoảng giữa hai điểm tới hạn liên tiếp nhau, $f'(x)$ luôn giữ nguyên một dấu, vì $f'(0) > 0$ nên ta có bảng biến thiên như sau:

x	-2	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2			
y'	///	-	0	+	0	-	///
y	///	-3		$2\sqrt{2}-1$		1	///

Suy ra: hàm số đồng biến trên khoảng $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ và nghịch biến trên các khoảng $(-2; -\sqrt{2})$ và $(\sqrt{2}; 2)$.

Phân tích: Nếu để ý ở bảng biến thiên ta thấy ngay một điều vô lý là trên đoạn $[-2; -\sqrt{2}]$ giá trị của hàm số giảm từ -3 xuống -1 ??? Thực ra ở đây $-\sqrt{2}$ không phải là điểm tới hạn của hàm số.

Lời giải đúng là:

Tập xác định: $D = [-2; 2]$. Ta có: $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Trên từng khoảng giữa hai điểm tới hạn liên tiếp nhau, $f'(x)$ luôn giữ nguyên một dấu, vì $f'(0) > 0$ nên ta có bảng biến thiên như sau:

x	-2	$\sqrt{2}$	2
y'	///	+ 0 -	///
y	///	$2\sqrt{2}-1$	///

$-3 \xrightarrow{\quad\quad\quad} 2\sqrt{2}-1 \xrightarrow{\quad\quad\quad} 1$

Suy ra: hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; \sqrt{2})$ và nghịch biến trên khoảng $(\sqrt{2}; 2)$.

1.2. Sai lầm khi chứng minh bất đẳng thức

➤ Khi sử dụng tính đơn điệu của hàm số để chứng minh bất đẳng thức, học sinh thường mắc phải sai lầm là không nhớ chính xác định nghĩa tính đơn điệu của hàm số để vận dụng.

Ví dụ minh họa 3: (Bài tập 5, trang 10, sách giáo khoa giải tích 12 - ban cơ bản)

Chứng minh rằng: $\tan x > x$, với $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Một số học sinh trình bày như sau:

Xét hàm số $f(x) = \tan x - x$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x > 0$, $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Từ $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow \tan x - x > \tan 0 - 0$ hay $\tan x > x$, với $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Phân tích: Lời giải trên có vẻ đúng, nhưng sai lầm ở đây khá tinh vi (?!). Sau khi kết luận $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì vì sao từ $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$???

Sai lầm ở đây là $0 \notin \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Nhớ rằng: nếu $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a; b]$ (tức là $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f'(x) > 0$ với $\forall x \in (a; b)$) thì với $\forall x_1, x_2 \in [a; b]$, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Lời giải đúng là:

Xét hàm số $f(x) = \tan x - x$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Phân tích sai lầm khi học chương "Ứng dụng đạo hàm để khảo sát, vẽ đồ thị hàm số"...

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x \geq 0$, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, dấu "=" xảy ra chỉ tại $x = 0$, suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Từ $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow \tan x - x > \tan 0 - 0$ hay $\tan x > x$, với $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

➤ Các em cũng hay mắc những sai lầm khi vận dụng sai tính chất của các hàm đồng biến, nghịch biến.

Ví dụ minh họa 4:

Chúng minh rằng nếu với $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ thì $x.e^x > -\frac{1}{e}$.

Một số học sinh trình bày như sau:

Xét các hàm số $f(x) = x$, $g(x) = e^x$ là các hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $h(x) = x.e^x$ là tích của hai hàm đồng biến nên cũng đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra, từ $x > -1 \Rightarrow f(x) > f(-1)$ hay $x.e^x > -\frac{1}{e}$.

Phân tích:

Lời giải trên sai lầm ở chỗ: tích của hai hàm đồng biến là một hàm đồng biến chỉ đúng khi hai hàm đó dương (!).

Lời giải đúng là:

Xét hàm số $f(x) = x.e^x$, ta có $f'(x) = e^x(x+1) \geq 0$, $\forall x \geq -1$, dấu "=" xảy ra chỉ tại $x = -1$. Suy ra, hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[-1; +\infty)$. Từ $x > -1 \Rightarrow f(x) > f(-1)$ hay $x.e^x > -\frac{1}{e}$.

1.3. Sai lầm khi giải các bài toán liên quan tới đạo hàm

➤ Sai lầm khi vận dụng các công thức tính đạo hàm.

Ví dụ minh họa 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = (2x+1)^x$.

Một số học sinh trình bày như sau:

Ta có $y' = x(2x+1)^{x-1}(2x+1)' = 2x.(2x+1)^{x-1}$.

Phân tích:

Lời giải trên đã vận dụng công thức $(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$. Vận dụng như vậy là sai, vì công thức này chỉ áp dụng cho số mũ α là một hằng số.

Lời giải đúng là:

Điều kiện: $x > -\frac{1}{2}$, $x \neq 0$ (khi đó $y > 0$)

$$\text{Từ } y = (2x+1)^x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln(2x+1) \Rightarrow (\ln y)' = (x \cdot \ln(2x+1))' \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1}$$

$$\Rightarrow y' = (2x+1)^x \cdot \left[\ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1} \right]$$

➤ Sai lầm khi tính đạo hàm của hàm số tại một điểm.

Các em hay mắc phải sai lầm ở dạng này là áp dụng công thức $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, $\alpha \in \mathbb{R}$, nhưng quên rằng nếu như α không nguyên thì công thức này chỉ đúng khi u nhận giá trị dương.

Ví dụ minh họa 6: Cho hàm số $y = \sqrt[3]{x^2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = -1$.

Một số học sinh trình bày như sau:

$$\text{Với } x = -1 \text{ ta có } y = \sqrt[3]{(-1)^2} = 1$$

$$\text{Ta có } y = x^{\frac{2}{3}} \text{ suy ra } y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y'(-1) = \frac{2}{3}(-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}(-1)^{-\frac{2}{6}} = \frac{2}{3} [(-1)^2]^{-\frac{1}{6}} = \frac{2}{3} \cdot 1^{-\frac{1}{6}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: } y = \frac{2}{3}(x+1)+1 \text{ hay } y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Phân tích: Sai lầm ở đây là các em không chú ý đến điều kiện lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số phải dương. Vì vậy, viết $(-1)^{-\frac{1}{3}}$ là không đúng (!).

Lời giải đúng là:

$$\text{Với } x = -1 \text{ ta có } y = \sqrt[3]{(-1)^2} = 1$$

$$\text{Ta có } y^3 = x^2 \Rightarrow (y^3)' = (x^2)' \Rightarrow 3 \cdot y^2 y' = 2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{3y^2} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y'(-1) = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: } y = -\frac{2}{3}(x+1)+1 \text{ hay } y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}.$$

1.4. Sai lầm khi giải các bài toán liên quan tới cực trị của hàm số

➤ Khi sử dụng quy tắc I để xét tính đơn điệu của hàm số các em quên rằng đó là điều kiện đủ chứ không phải là điều kiện cần.

Quy tắc:

- $y' > 0, \forall x \in (a; b) \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$
- $y' < 0, \forall x \in (a; b) \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$

Điều ngược lại nói chung là không đúng (!).

Ví dụ minh họa 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Một số học sinh trình bày như sau:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 2mx + 1. \text{ Hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ m^2 - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}.$$

Phân tích: Chẳng hạn, hàm số $y = x^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nhưng $y' = 3x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, dấu "=" xảy ra chỉ tại $x = 0$ (!). Nhớ rằng: nếu hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$ và dấu "=" xảy ra chỉ tại hữu hạn điểm thuộc khoảng $(a; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.

Lời giải đúng là:

$$\text{Hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ m^2 - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3}.$$

➤ Khi sử dụng quy tắc II để xác định cực trị của hàm số các em cũng quên rằng đó chỉ là điều kiện đủ chứ không phải là điều kiện cần.

Quy tắc:

- $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực tiểu
- $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực đại

Điều ngược lại nói chung là không đúng (!).

Ví dụ minh họa 8: Cho hàm số $y = f(x) = mx^4$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt cực đại tại $x = 0$?

Một số học sinh trình bày như sau:

$$f'(x) = 4mx^3, f''(x) = 12mx^2.$$

Điều kiện để hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ là: $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m \cdot 0 = 0 \\ 12m \cdot 0 < 0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm m .

Vậy không tồn tại giá trị nào của m để hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

Phân tích:

Ta thấy, với $m = -1$, hàm số $y = -x^4$ có $y' = -4x^3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+	0	-
y	$-\infty$	0	$-\infty$

Suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ (!)

Vậy lời giải trên sai ở đâu ???

Nhớ rằng, nếu x_0 thỏa mãn $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực đại của hàm số, còn điều ngược lại thì chưa chắc đúng (!) Vì nếu x_0 là điểm cực đại thì vẫn có thể $f''(x_0) = 0$. Lí do là điều kiện $f''(x_0) < 0$ chỉ là điều kiện đủ để hàm số $g(x) = f'(x)$ nghịch biến trong lân cận $(x_0 - h; x_0 + h)$ (với $h > 0$), khi đó:

$$\begin{cases} f'(x) > f'(x_0) = 0, \forall x \in (x_0 - h; x_0) \\ f'(x) < f'(x_0) = 0, \forall x \in (x_0; x_0 + h) \end{cases} \Rightarrow x_0 \text{ là điểm cực đại của hàm số.}$$

Lời giải đúng là:

① Cách 1:

Ta có $y' = 4mx^3$. Để hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ thì $y'(x) > 0, \forall x \in (-h; 0)$, với $h > 0$.

$$\text{Tức là: } \begin{cases} 4mx^3 > 0 \\ -h < x < 0 \end{cases} \Rightarrow m < 0.$$

Thử lại, ta thấy với $\boxed{m < 0}$ là điều kiện cần tìm.

② Cách 2: xét 3 trường hợp ($m = 0, m > 0, m < 0$)

❖ $m = 0$: Ta có $y = f(x) = 0$ là hàm hằng nên hàm số không có cực trị.

❖ $m > 0$: Ta có $y' = 4mx^3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Lập bảng biến thiên ta thấy x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

Phân tích sai lầm khi học chương "Ứng dụng đạo hàm để khảo sát, vẽ đồ thị hàm số"...

❖ $m < 0$: Ta có $y' = 4mx^3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Lập bảng biến thiên ta thấy x_0 là điểm cực đại của hàm số.

Kết luận: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ khi và chỉ khi $\boxed{m < 0}$.

Ví dụ minh họa 9: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 + mx^3 + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$?

Một số học sinh trình bày như sau:

$$f'(x) = 4x^3 + 3mx^2, f''(x) = 12x^2 + 6mx.$$

$$\text{Điều kiện để hàm số đạt cực tiểu tại } x = 0 \text{ là: } \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \cdot 0^3 + 3m \cdot 0^2 = 0 \\ 12m \cdot 0^2 + 6m \cdot 0 > 0 \end{cases}$$

hệ vô nghiệm m .

Vậy không tồn tại giá trị nào của m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Phân tích:

Ta thấy, với $m = 0$, hàm số $y = x^4 + 1$

$$y' = 4x^3, y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	1	$+\infty$

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ (!)

Lời giải đúng là:

① Cách 1:

$$\text{Để hàm số đạt cực tiểu tại } x = 0 \text{ thì } \begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (-h; 0) \quad (1) \\ f'(x) > 0, \forall x \in (0; h) \quad (2) \end{cases} \quad (\text{với } h > 0)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in (-h; 0) \\ 4x^3 + 3mx^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in (-h; 0) \\ 4x + 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in (-h; 0) \\ x < -\frac{3m}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3m}{4} \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0 \quad (1')$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in (0; h) \\ 4x^3 + 3mx^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in (0; h) \\ 4x + 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in (0; h) \\ x > -\frac{3m}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3m}{4} \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0 \quad (2')$$

Từ (1') và (2') suy ra $m = 0$

Vậy với $\boxed{m = 0}$ thì hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$.

② Cách 2: xét 3 trường hợp ($m = 0$, $m > 0$, $m < 0$)

❖ $m = 0$: Ta có $y = x^4 + 1$ có $y' = 4x^3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	1	$+\infty$

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$

❖ $m > 0$: Ta có $y' = x^2(4x + 3m)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -\frac{3m}{4}$. Lập bảng biến thiên ta thấy y' không đổi dấu qua $x = 0$ (nghiệm bội bậc chẵn). Do đó hàm số không có cực trị tại $x = 0$.

❖ $m < 0$: Ta có $y' = x^2(4x + 3m)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -\frac{3m}{4}$. Lập bảng biến thiên ta thấy y' không đổi dấu qua $x = 0$ (nghiệm bội bậc chẵn). Do đó hàm số không có cực trị tại $x = 0$.

Kết luận: với $\boxed{m = 0}$ thì hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$.

1.5. Sai lầm khi giải bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số

➤ Các em thường mắc sai lầm khi không nắm vững định nghĩa giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số trên một miền D .

Ví dụ minh họa 10:

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + 2\left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right) - 1$.

Một số học sinh trình bày như sau:

$$\text{Đặt } t = \cos x + \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = t^2 - 2.$$

Ta được hàm số: $g(t) = t^2 + 2t - 3 = (t+1)^2 - 4 \geq -4, \forall t \in \mathbb{R}$

Vậy $\min f(x) = -4$, khi $t = -1$.

Phân tích: Sai lầm ở đây là chuyển bài toán không tương đương. Giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x)$ không trùng với giá trị nhỏ nhất của hàm $g(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Có thể thấy ngay khi $t = -1$ thì không tồn tại giá trị của x để $\cos x + \frac{1}{\cos x} = -1$ (!)

Nhớ rằng, số $m = \min_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = m \end{cases}$

Lời giải đúng là: Đặt $t = \cos x + \frac{1}{\cos x}$, với $x \in D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\Rightarrow |t| = \left| \cos x + \frac{1}{\cos x} \right| = |\cos x| + \left| \frac{1}{\cos x} \right| \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $|\cos x| = 1$

Khi đó: $\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = t^2 - 2$. Ta được hàm số: $g(t) = t^2 + 2t - 3$.

Lập bảng biến thiên hàm số $g(t)$ (với $|t| \geq 2$):

t	$-\infty$	-2	-1	2	$+\infty$
$g'(t)$	-	-	0	+	+
$g(t)$	$+\infty$ ↘ -3	5			$+\infty$ ↗

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra: $m = \min_D f(x) = \min_{|t| \geq 2} g(t) = -3$

Đạt được khi $t = -2 \Leftrightarrow \cos x + \frac{1}{\cos x} = -2 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

1.6. Sai lầm khi viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Ví dụ minh họa 11:

Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x^2$, có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(-1;4)$

Một số học sinh trình bày như sau:

$$f'(x) = -3x^2 + 6x.$$

Ta có điểm $A(-1;4) \in$ đồ thị (C).

suy ra phương trình tiếp tuyến là:

$$y = f'(-1) \cdot (x+1) + 4 \Leftrightarrow y = -9(x+1) + 4$$

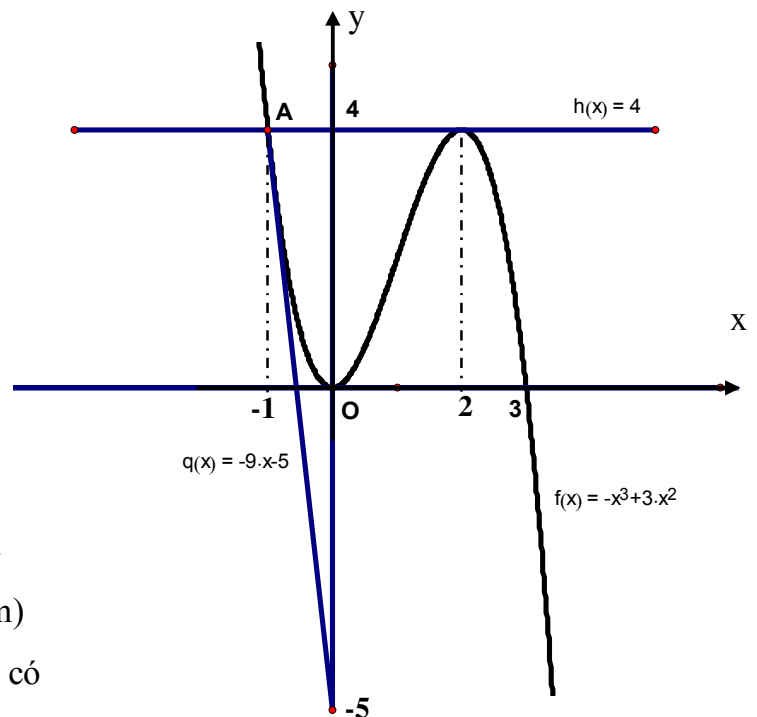
$$\Leftrightarrow y = -9x - 5.$$

Phân tích:

Phương trình tiếp tuyến $y = -9x - 5$ là

tiếp tuyến tại A (nhận A làm tiếp điểm)

tất nhiên là kẻ từ A. Nhưng vẫn có thể có



tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua A mà không nhận A làm tiếp điểm.

Lời giải đúng là:

Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A(-1;4)

và có hệ số góc k là: $y = k(x + 1) + 4$

Điều kiện để đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đồ thị (C) là hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} -x^3 + 3x^2 = k(x+1) + 4 \\ k = -3x^2 + 6x \end{cases} \quad (I).$$

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x - 2 = 0 \\ k = -3x^2 + 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, k = 0 \\ x = -1, k = -9 \end{cases}$$

Từ đó ta có hai tiếp tuyến có phương trình: $y = 4$ và $y = -9x - 5$.

2. Bài tập tương tự

Bài tập 1: Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

a. $y = \frac{2x+3}{1-x}$

b. $y = \frac{x^2+x+1}{x+1}$

c. $y = \cos x - \sin x$

Bài tập 2: Xác định m để hàm số sau không có cực trị:

$$y = \frac{x^2 + 2mx - 3}{x - m}$$

Bài tập 3: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a. $y = (7-x)\sqrt[3]{x+5}$

b. $y = \cos x - \sin x$

c. $y = \sin^2 x$

Bài tập 4: Xác định m để hàm số sau đạt cực trị tại $x = 1$:

$$y = x^3 - mx^2 + \left(m - \frac{2}{3}\right)x + 5$$

Bài tập 5: Xác định a để hàm số sau luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$:

$$y = \frac{(a-1)x^3}{3} + ax^2 + (3a-2)x$$

Bài tập 6: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a. $y = |x^3 + 3x^2 - 72x + 90|$ trên đoạn $[-5; 5]$

b. $y = 2\sin x + \sin 2x$ trên đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

c. $y = \cos^3 x - 6\cos^2 x + 9\cos x + 5$

Bài tập 7: Cho hàm số $y = (x + 1)^2 (2 - x)$, có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(2;0)$

Bài tập 8: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a. $e^x + \cos x \geq 2 + x - \frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$

b. $e^x - e^{-x} \geq 2 \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \forall x \geq 0$

c. $8 \sin^2 \frac{x}{2} + \sin 2x > 2x, \forall x \in [0; \pi]$

Bài tập 9: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (m-3)x + 4\frac{1}{2}$ (m là tham số)

Xác định m để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -3x + 4\frac{1}{2}$ tại ba điểm phân biệt.

Bài tập 10: Với các giá trị nào của tham số m thì phương trình: $x^2 - 2|x| = m(|x| - 1)$ có 4 nghiệm thực phân biệt ?
