

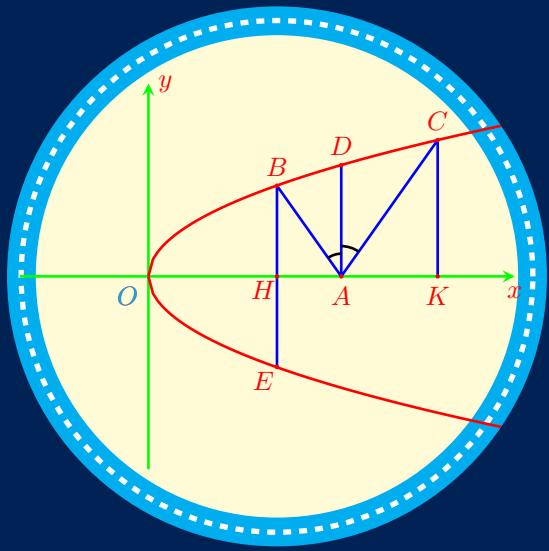
$\sqrt{f(x)} = g(x)$

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

SÁCH CHÂN TRỜI SÁNG TẠO - HKI

MÔN TOÁN 11

$y = x^2 - 4x + 3$



$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

MỤC LỤC

PHẦN I HKI

Chương 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	2
Bài 1. GÓC LƯỢNG GIÁC	2
(A) KIẾN THỨC TRỌNG TÂM	2
(B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	5
Dạng 1. Chuyển đổi đơn vị độ - radian	5
Dạng 2. Số đo của một góc lượng giác	7
Dạng 3. Độ dài của một cung tròn	7
Dạng 4. Biểu diễn góc trên đường tròn lượng giác	8
(C) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	8
Bài 2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC	12
(A) KIẾN THỨC TRỌNG TÂM	12
(B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	15
Dạng 1. Dấu của các giá trị lượng giác	15
Dạng 2. Tính giá trị lượng giác của một góc	16
Dạng 3. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt	16
(C) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	17
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	20
Bài 3. CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	28
(A) KIẾN THỨC TRỌNG TÂM	28
(B) MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	30
Dạng 1. Áp dụng công thức cộng	30
Dạng 2. Áp dụng công thức nhân đôi, hạ bậc	31
Dạng 3. Áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng, tổng thành tích	33
Dạng 4. Kết hợp nhiều công thức lượng giác	34
Dạng 5. Nhận dạng tam giác	35
(C) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	36
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	39
Bài 4. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ	50
(A) KIẾN THỨC TRỌNG TÂM	50
(B) MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	54
Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác	54
Dạng 2. Sự biến thiên của hàm số lượng giác	55
(C) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	58
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	61

Bài 5. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN	70
(A) KIẾN THỨC CẦN NHỚ	70
(B) MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	74
Dạng 1. Phương trình lượng giác cơ bản dùng Radian	74
Dạng 2. Phương trình lượng giác cơ bản dùng độ	75
Dạng 3. Phương trình đưa về phương trình lượng giác cơ bản	76
Dạng 4. Toán thực tế liên môn	77
(C) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	79
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	82
Bài 6. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I	90
(A) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	90
(B) BÀI TẬP TỰ LUẬN	91
Chương 2. DÃY SỐ, CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN	94
Bài 1. DÃY SỐ	94
(A) KIẾN THỨC TRỌNG TÂM	94
(B) MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	98
Dạng 1. Số hạng tổng quát, biểu diễn dãy số	98
Dạng 2. Tìm số hạng cụ thể của dãy số	100
Dạng 3. Xét tính tăng giảm của dãy số	101
Dạng 4. Xét tính bị chặn của dãy số	102
Dạng 5. Toán thực tế về dãy số	103
(C) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	105
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	108
Bài 2. CẤP SỐ CỘNG	116
(A) KIẾN THỨC TRỌNG TÂM	116
(B) MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	119
Dạng 1. Nhận diện cấp số cộng, công sai d	119
Dạng 2. Số hạng tổng quát của cấp số cộng	120
Dạng 3. Tìm số hạng cụ thể trong cấp số cộng	121
Dạng 4. Các bài toán thực tế	123
(C) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	124
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	127
Bài 3. CẤP SỐ NHÂN	136
(A) KIẾN THỨC TRỌNG TÂM	136
(B) MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	139
Dạng 1. Nhận diện cấp số nhân, công bội q	139
Dạng 2. Số hạng tổng quát của cấp số nhân	140
Dạng 3. Tìm số hạng cụ thể của CSN	141
Dạng 4. Tìm điều kiện để một dãy số lập thành CSN	142
Dạng 5. Tính tổng của cấp số nhân	143

Dạng 6. Kết hợp cấp số cộng và cấp số nhân	144
Dạng 7. Bài toán thực tế.....	145
(C) BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....	147
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM LẦN 1.....	150
(E) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM LẦN 2.....	157
Bài 4. ÔN TẬP CHƯƠNG 2	164
(A) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	164
(B) BÀI TẬP TỰ LUẬN.....	168
Chương 3. GIỚI HẠN	171
Bài 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ	171
(A) KIẾN THỨC TRỌNG TÂM.....	171
(B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	175
Dạng 1. Phương pháp đặt thừa số chung.....	175
Dạng 2. Phương pháp lượng liên hợp.....	175
Dạng 3. Giới hạn tại vô cực.....	177
Dạng 4. Tính tổng của dãy cấp số nhân lùi vô hạn.....	177
Dạng 5. Toán thực tế, liên môn liên quan đến giới hạn dãy số.....	179
(C) BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....	181
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	183
Bài 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ	191
(A) KIẾN THỨC TRỌNG TÂM.....	191
(B) MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	195
Dạng 1. Thay số trực tiếp.....	195
Dạng 2. Phương pháp đặt thừa số chung - kết quả hữu hạn.....	196
Dạng 3. Phương pháp đặt thừa số chung - kết quả vô cực.....	198
Dạng 4. Phương pháp lượng liên hợp kết quả hữu hạn.....	199
Dạng 5. Giới hạn một bên.....	200
Dạng 6. Toán thực tế, liên môn về hàm số liên tục.....	201
(C) BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....	202
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	205
Bài 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC	213
(A) KIẾN THỨC TRỌNG TÂM.....	213
(B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	215
Dạng 1. Dựa vào đồ thị xét tính liên tục của hàm số tại một điểm, một khoảng.....	215
Dạng 2. Hàm số liên tục tại một điểm.....	216
Dạng 3. Hàm số liên tục trên khoảng, đoạn.....	218
(C) BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....	219
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	222

Bài 4. ÔN TẬP CHƯƠNG III	232
(A) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	232
(B) BÀI TẬP TỰ LUẬN	237
Chương 4. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN	241
Bài 1. ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN	241
(A) KIẾN THỨC TRỌNG TÂM	241
(B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	246
Dạng 1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng	246
Dạng 2. Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng	247
Dạng 3. Tìm thiết diện của hình ($\mathcal{H}$) khi cắt bởi mặt phẳng (P)	248
Dạng 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng	249
Dạng 5. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy	251
Dạng 6. Bài toán quỹ tích và điểm cố định	252
Dạng 7. Bài toán thực tế	254
(C) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	254
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	256
Bài 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG	263
(A) KIẾN THỨC TRỌNG TÂM	263
(B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	267
Dạng 1. Hai đường thẳng song song	267
Dạng 2. Tìm giao tuyến bằng cách kẻ song song	269
Dạng 3. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng	270
Dạng 4. Tìm thiết diện bằng cách kẻ song song	271
Dạng 5. Bài toán quỹ tích và điểm cố định	272
Dạng 6. Bài toán thực tế	273
(C) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	275
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	277
Bài 3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG	285
(A) KIẾN THỨC TRỌNG TÂM	285
(B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	287
Dạng 1. Đường thẳng song song với mặt phẳng	287
Dạng 2. Xác định thiết diện bằng cách kẻ song song	288
Dạng 3. Bài toán quỹ tích và điểm cố định	289
(C) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	290
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	292
Bài 4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG	300
(A) KIẾN THỨC TRỌNG TÂM	300
(B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	304
Dạng 1. Chứng minh hai mặt phẳng song song	304
Dạng 2. Tìm giao tuyến bằng cách kẻ song song	305
Dạng 3. Xác định giao điểm của một đường thẳng với mặt phẳng	306

	▢ Dạng 4. Xác định thiết diện bằng cách kẻ song song.....	307
(C)	BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....	308
(D)	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	310
Bài 5.	PHÉP CHIỀU SONG SONG	316
(A)	KIẾN THỨC TRỌNG TÂM.....	316
(B)	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	318
	▢ Dạng 1. Hình biểu diễn của một hình không gian.....	318
	▢ Dạng 2. Xác định yếu tố song song.....	320
(C)	BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....	321
Bài 6.	BÀI TẬP CHƯƠNG IV	324
(A)	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	324
(B)	BÀI TẬP TỰ LUẬN.....	326
Chương 5.	MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT	330
Bài 1.	SỐ TRUNG BÌNH CỘNG VÀ MỘT CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	330
(A)	KIẾN THỨC TRỌNG TÂM.....	330
(B)	MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	333
	▢ Dạng 1. Nhận dạng mẫu số liệu ghép nhóm.....	333
	▢ Dạng 2. Chuyển mẫu số liệu không ghép nhóm sang mẫu số liệu ghép nhóm.....	334
	▢ Dạng 3. Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm.....	335
	▢ Dạng 4. Một.....	336
(C)	BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....	337
Bài 2.	TRUNG VỊ VÀ TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	340
(A)	KIẾN THỨC TRỌNG TÂM.....	340
(B)	MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	343
	▢ Dạng 1. Số trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.....	343
	▢ Dạng 2. Tứ phân vị.....	344
(C)	BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....	346
Bài 3.	ÔN TẬP CHƯƠNG V	348
(A)	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	348
(B)	BÀI TẬP TỰ LUẬN.....	350



HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. GÓC LƯỢNG GIÁC

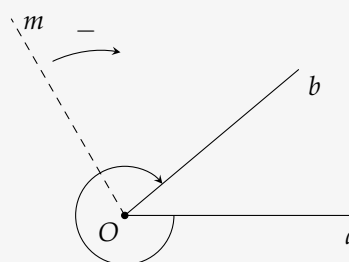
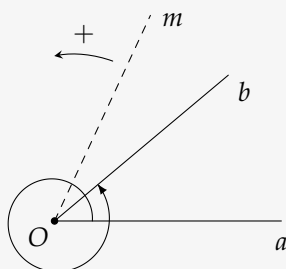
A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Góc lượng giác

1.1. Khái niệm góc lượng giác

Định nghĩa 1.1. Cho hai tia Oa, Ob .

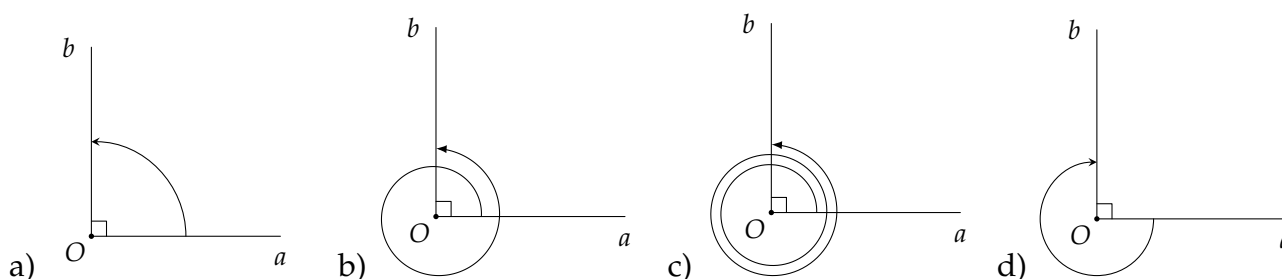
- ✓ Nếu một tia Om quay quanh gốc O của nó theo một chiều cố định bắt đầu từ vị trí tia Oa và dừng ở vị trí tia Ob thì ta nói tia Om quét một **góc lượng giác** có tia đầu Oa , tia cuối Ob . Ký hiệu: (Oa, Ob) .
- ✓ Khi tia Om quay một góc α , ta nói số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) bằng α . Ký hiệu: $(Oa, Ob) = \alpha$.



! Với hai tia Oa và Ob cho trước, có vô số góc lượng giác có tia đầu Oa và tia cuối Ob .

Ví dụ 1

Xác định số đo của các góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình sau





! Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có công thức tổng quát là

$$\text{sđ}(Oa, Ob) = \alpha^\circ + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

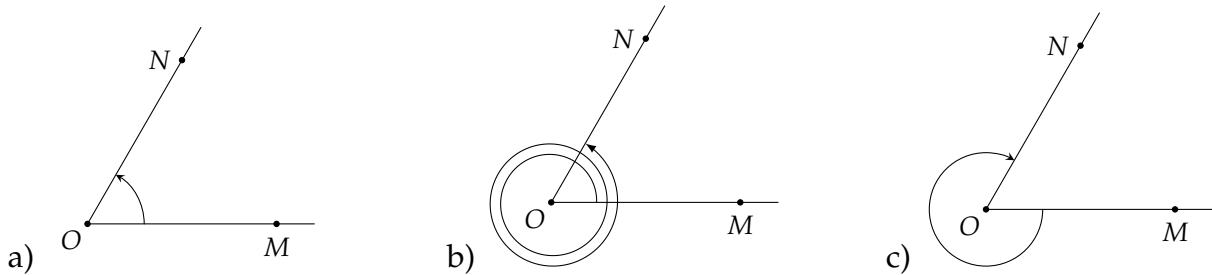
hoặc thường viết là

$$(Oa, Ob) = \alpha^\circ + k360^\circ.$$

với α° là số đo của một góc lượng giác bất kì có tia đầu Oa và tia cuối Ob . Chẳng hạn, trong hình đầu tiên của ví dụ trên thì $(Oa, Ob) = 90^\circ + k360^\circ$.

Ví dụ 2

Cho $\widehat{MON} = 60^\circ$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình vẽ và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OM, ON) .



Ví dụ 3

Trong các khoảng thời gian từ 0 giờ đến 2 giờ 15 phút, kim phút quét một góc lượng giác là bao nhiêu độ?

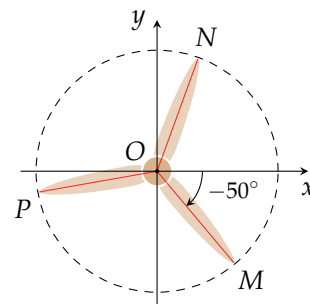
1.2. Hệ thức Chasles (Sa-lơ)

Định nghĩa 1.2 (Hệ thức Chasles). Với ba tia Oa, Ob và Oc bất kì, ta có

$$(Oa, Ob) + (Ob, Oc) = (Oa, Oc) + k360^\circ, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 4

Trong hình bên, chiếc quạt có ba cánh được phân bố đều nhau. Viết công thức tổng quát đo số đo của các góc lượng giác (Ox, ON) và (Ox, OP) .

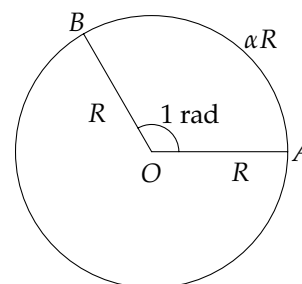


2. Đơn vị radian

Trên đường tròn bán kính R tùy ý, góc ở tâm chắn một cung có độ dài đúng bằng R được gọi là một góc có số đo 1 radian (đọc là 1 ra-di-an, viết tắt là 1rad).

Trên đường tròn bán kính R , một góc ở tâm có số đo α rad thì chắn một cung có độ dài αR (Hình 10). Vì góc bẹt (180°) chắn nửa đường tròn với độ dài là πR , nên góc bẹt có số đo theo đơn vị radian là π . Khi đó ta viết

$$180^\circ = \pi \text{ rad.}$$



Hình 10

Suy ra, với $\pi \approx 3,14$, ta có $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,0175 \text{ rad}$ và $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57,3^\circ$ (hay $57^\circ 17' 45''$).

Do đó ta có công thức chuyển đổi số đo góc từ đơn vị radian sang độ và ngược lại như sau:

$a^\circ = \frac{\pi a}{180} \text{ rad}$	$\alpha \text{ rad} = \left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^\circ$
---	---

Ví dụ 5

Đổi các số đo góc sau đây từ radian sang độ hoặc ngược lại

- a) -60° . b) $\frac{2\pi}{5} \text{ rad}$. c) 3 rad .



a) Khi ghi số đo của một góc theo đơn vị radian, người ta thường bỏ đi chữ rad sau số đo. Ví dụ, $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ được viết là $\frac{\pi}{2}$, 2 rad được viết là 2.

b) Với đơn vị radian, công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Oa, Ob) là

$$(Oa, Ob) = \alpha + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

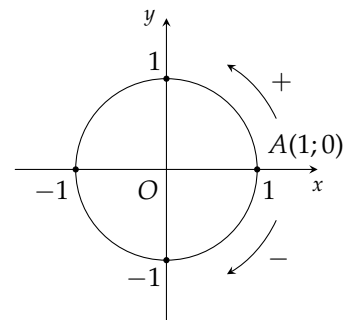
Trong đó α là số đo theo radian của một góc lượng giác bất kì có tia đầu Oa và tia cuối Ob . **Lưu**



ý: không được viết $\alpha + k360^\circ$ hay $a^\circ + k2\pi$ (vì không cùng đơn vị đo).

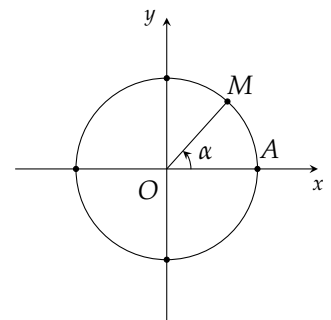
3. Đường tròn lượng giác

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn tâm O bán kính bằng 1. Trên đường tròn này, chọn điểm $A(1;0)$ làm gốc, chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ và chiều âm là chiều cùng chiều kim đồng hồ. Đường tròn cùng với gốc và chiều như trên được gọi là **đường tròn lượng giác**.



Hình 11

Cho số đo góc α bất kì. Trên đường tròn lượng giác, ta xác định được duy nhất một điểm M sao cho số đo góc lượng giác (OA, OM) bằng α (Hình 12). Khi đó điểm M được gọi là **điểm biểu diễn** của góc có số đo α trên đường tròn lượng giác.



Hình 12

Ví dụ 6

Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo là:

a) 865° ;

b) $\frac{-7\pi}{3}$.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Chuyển đổi đơn vị độ - radian

Để chuyển đổi đơn vị độ - radian cần nhớ:

✓ $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \Rightarrow a^\circ = \frac{a \cdot \pi}{180} \text{ rad}$

✓ $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \Rightarrow n \text{ rad} = \left(\frac{n \cdot 180}{\pi}\right)^\circ$

Ví dụ 1

Đổi 50° sang radian.

✓ $50^\circ = \frac{5\pi}{18} \text{ rad}.$

Ví dụ 2

Đổi $\frac{3\pi}{4}$ rad sang độ.

$$\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = 135^\circ.$$

Ví dụ 3

a) Đổi từ độ sang radian các số đo sau: $45^\circ; 150^\circ$.

b) Đổi từ radian sang độ các số đo sau: $\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{4}$.

Ví dụ 4

Đổi số đo của các góc sau ra radian: $72^\circ; 600^\circ; -37^\circ 45' 30''$.

Ví dụ 5

Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}; \frac{3\pi}{5}; -4$.

Ví dụ 6

Hoàn thành bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc đặc biệt sau

Độ	30°	?	60°	?	120°	?	180°
Radian	?	$\frac{\pi}{4}$	?	$\frac{\pi}{2}$	?	$\frac{3\pi}{4}$	?

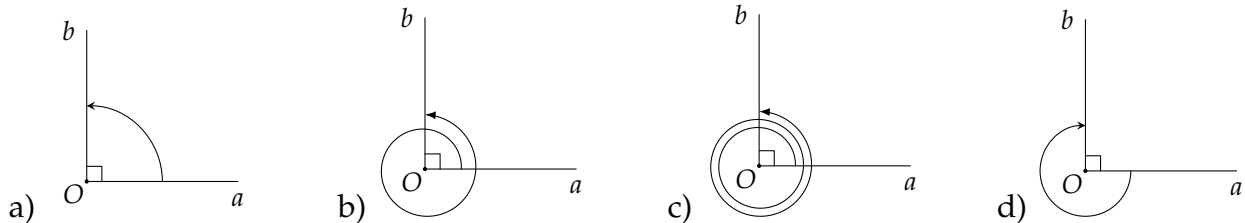
**Dạng 2** Số đo của một góc lượng giác

Để xác định số đo của một góc lượng giác ta chú ý tia đầu, tia cuối và chiều cụ thể

- ✔ Chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ;
- ✔ Chiều âm là chiều cùng chiều kim đồng hồ

Ví dụ 1

Xác định số đo của các góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình sau

**Dạng 3** Độ dài của một cung tròn

Ta có công thức $l = R\alpha$ với R, α lần lượt là bán kính của đường tròn và số đo tính bằng rad

Ví dụ 1

Một đường tròn có bán kính 20 cm. Tìm độ dài các cung trên đường tròn đó có số đo sau:

- a) $\frac{\pi}{12}$; b) 1,5; c) 35° ; d) 315° .

Ví dụ 2

Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9 000 km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 giờ.

- a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 1 giờ; 3 giờ; 5 giờ.
b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200 000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị)?

Dạng 4 Biểu diễn góc trên đường tròn lượng giác

Để biểu diễn các góc lượng giác trên đường tròn lượng giác ta thường sử dụng các kết quả sau:

- ✔ Góc α (a°) và cung có số đo $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ($a^\circ + k360^\circ$) có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.
- ✔ Số điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác số đo có dạng $\alpha + \frac{k2\pi}{m}$ (hay $a^\circ + \frac{k360^\circ}{m}$) (với k là số nguyên và m là số nguyên dương) là m . Từ đó để biểu diễn các góc lượng giác đó ta lần lượt cho k từ 0 tới $m - 1$ rồi biểu diễn các góc đó.

Ví dụ 1

Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo sau (với k là số nguyên tùy ý)

a) $\alpha = k\pi$;

b) $\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Ví dụ 2

Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo là

a) 865° ;

b) -1485° ;

c) $\frac{13}{3}\pi$;

d) $-\frac{7}{3}\pi$.

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Đổi số đo của các góc sau đây sang radian:

a) 38° ;

b) -115° ;

c) $\left(\frac{3}{\pi}\right)^\circ$.

Bài 2

Đổi số đo của các góc sau đây sang độ:

a) $\frac{\pi}{12}$;

b) -5 ;

c) $\frac{13\pi}{9}$.

Bài 3

Biểu diễn các góc lượng giác sau trên đường tròn lượng giác:

a) $-\frac{17\pi}{3}$;

b) $\frac{13\pi}{4}$;

c) -765° .

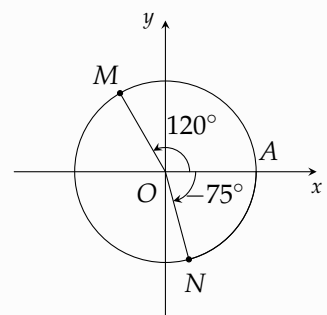
Bài 4

Góc lượng giác $\frac{31\pi}{7}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào sau đây?

$\frac{3\pi}{7}; \frac{10\pi}{7}; -\frac{25\pi}{7}$.

Bài 5

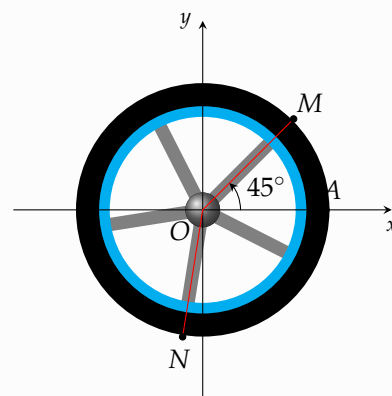
Viết công thức số đo tổng quát của các góc lượng giác (OA, OM) và (OA, ON) trong hình bên.



Hình 14

Bài 6

Trong hình vẽ bên, mâm bánh xe ô tô được chia thành năm phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON) .



Hình 15

Bài 7

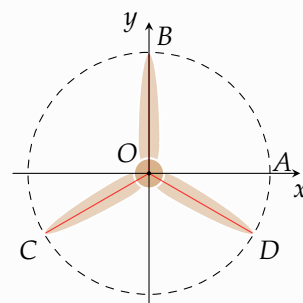
Trên đường tròn lượng giác, hãy biểu diễn các góc lượng giác có số đo có dạng là:

- a) $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$; b) $k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 8

Vị trí các điểm B, C, D trên cánh quạt động cơ máy bay trong hình 16 có thể được biểu diễn cho các góc lượng giác nào sau đây?

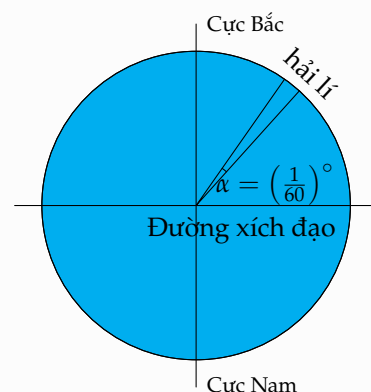
$$\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}); \quad \frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}); \quad \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$



Bài 9

Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ của đường kinh tuyến (Hình 17).

Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6371 km . Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 17

.....

.....

.....

.....



§2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

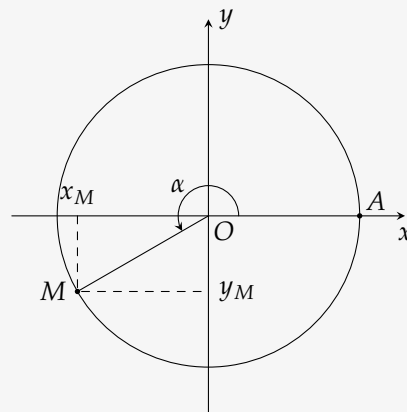
A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Giá trị lượng giác của một góc lượng giác

Định nghĩa 2.1. Trên đường tròn lượng giác, gọi M là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α .

Khi đó:

- ✔ Tung độ y_M của M gọi là **sin** của α , kí hiệu $\sin \alpha$.
- ✔ Hoành độ x_M của M gọi là **côsin** của α , kí hiệu $\cos \alpha$.
- ✔ Nếu $x_M \neq 0$ thì tỉ số $\frac{y_M}{x_M} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là **tang** của α , kí hiệu $\tan \alpha$.
- ✔ Nếu $y_M \neq 0$ thì tỉ số $\frac{x_M}{y_M} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là **côtang** của α , kí hiệu $\cot \alpha$.



Các giá trị $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của góc lượng giác α .

⚠ Chú ý:

- ✔ Ta gọi trục hoành là **trục côsin**, còn trục tung là **trục sin**.
- ✔ $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$;
 $\tan \alpha$ chỉ xác định với các góc $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);
 $\cot \alpha$ chỉ xác định với các góc $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- ✔ Với mọi góc lượng giác α và số nguyên k , ta có

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + k2\pi) &= \sin \alpha; & \tan(\alpha + k\pi) &= \tan \alpha; \\ \cos(\alpha + k2\pi) &= \cos \alpha; & \cot(\alpha + k\pi) &= \cot \alpha.\end{aligned}$$

- ✔ Ta đã biết bảng giá trị lượng giác của một số góc α đặc biệt với $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (hay $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) như sau:

độ	0°	30°	45°	60°	90°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

**Ví dụ 1**

Tính các giá trị lượng giác của các góc

a) $\frac{13\pi}{3};$

b) $-45^\circ.$

2. Tính giá trị lượng giác của một góc bằng máy tính cầm tay

Ta có thể tính giá trị lượng giác của một góc lượng giác bất kì bằng máy tính cầm tay. Lưu ý trước khi tính, cần chọn đơn vị đo góc như sau:

- ✔ Lần lượt ấn các phím **[SHIFT]**, **[MENU]** và **[2]** để màn hình hiện lên bảng lựa chọn đơn vị đo góc.
- ✔ Tiếp tục ấn phím **[1]** để chọn đơn vị độ (**Degree**) hoặc phím **[2]** để chọn đơn vị radian.
- ✔ Ấn các phím **[MENU]** **[1]** để vào chế độ tính toán.

3. Hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác

✔ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

✔ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ với $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

✔ $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ với $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

✔ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ với $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 2

Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ với $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

4. Giá trị lượng giác của các góc lượng giác có liên quan đặc biệt**4.1. Hai góc đối nhau: α và $-\alpha$**

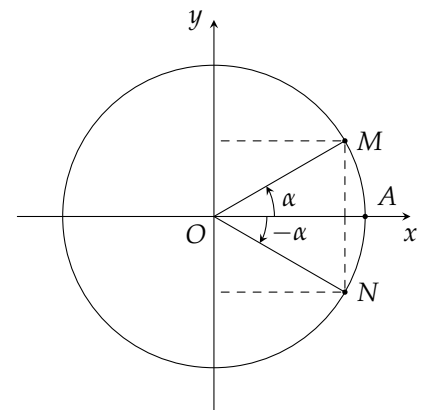
Các điểm biểu diễn của hai góc α và $-\alpha$ đối xứng qua trục Ox (Hình 7), nên ta có

✔ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

✔ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

✔ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

✔ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

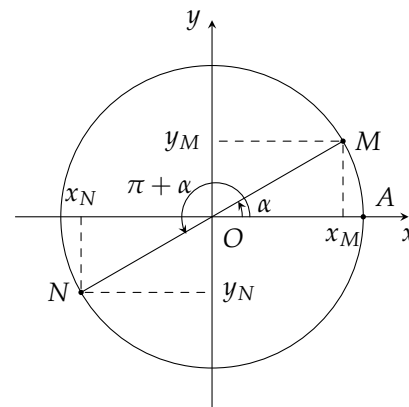


Hình 7

4.2. Hai cung hơn kém nhau π : α và $\alpha + \pi$

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $\alpha + \pi$ đối xứng nhau qua gốc toạ độ O (Hình 8), nên ta có

- ✔ $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$
- ✔ $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$
- ✔ $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$
- ✔ $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$

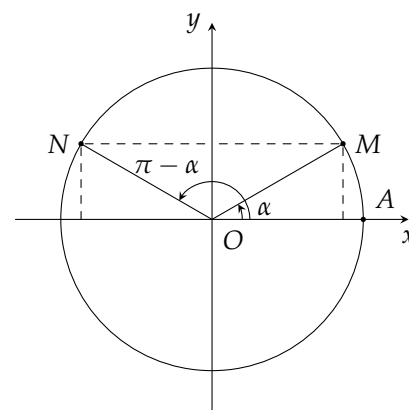


Hình 8

4.3. Hai góc bù nhau: α và $\pi - \alpha$

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $\pi - \alpha$ đối xứng nhau qua trục Oy (Hình 9), nên ta có

- ✔ $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- ✔ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- ✔ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
- ✔ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$

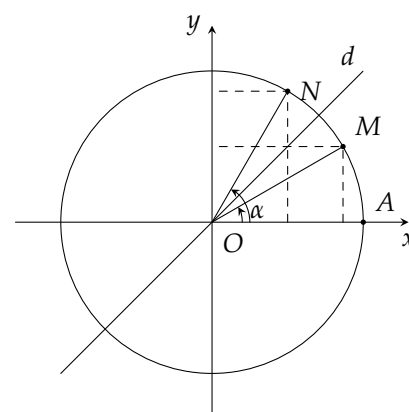


Hình 9

4.4. Hai góc phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$ đối xứng nhau qua đường phân giác d của góc xOy (Hình 10) nên ta có

- ✔ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
- ✔ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
- ✔ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
- ✔ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$



Hình 10

Ví dụ 3

- a) Biểu diễn $\sin \frac{61\pi}{8}$ qua giá trị lượng giác có số đo từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$.
- b) Biểu diễn $\tan 258^\circ$ qua giá trị lượng giác có số đo từ 0° đến 45° .



B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Dấu của các giá trị lượng giác

Ta có thể dựa vào đường tròn lượng giác để suy ra dấu của các giá trị lượng giác $\sin a$, $\cos a$, $\tan a$, $\cot a$ cụ thể như sau

Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\sin a$	+	+	−	−
$\cos a$	+	−	−	+
$\tan a$	+	−	+	−
$\cot a$	+	−	+	−

Ví dụ 1

Xét dấu các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$.

Ví dụ 2

Xác định dấu các biểu thức:

a) $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-100^\circ);$

b) $B = \sin 195^\circ \cdot \tan \frac{20\pi}{7}.$

Ví dụ 3

Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right);$

b) $B = \tan\left(\frac{2019\pi}{2} - \alpha\right).$

Dạng 2 Tính giá trị lượng giác của một góc

✓ $\sin^2 a + \cos^2 a = 1.$

✓ $\tan^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 a}.$

✓ $\tan a \cdot \cot a = 1.$

✓ $\cot^2 a + 1 = \frac{1}{\sin^2 a}.$

Ví dụ 1

Cho góc lượng giác có số đo bằng $-\frac{\pi}{3}$.

a) Xác định điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác đã cho.

b) Tính các giá trị lượng giác của góc lượng giác đã cho.

Ví dụ 2

Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết

a) $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

b) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

c) $\tan \alpha = \sqrt{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

d) $\cot \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Dạng 3 Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

a) Góc đối nhau (α và $-\alpha$)

✓ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

✓ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

✓ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

✓ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

✓ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$

✓ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$

✓ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$

✓ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$

b) Góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$)

✓ $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

✓ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

✓ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$

✓ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$

d) Góc hơn kém π (α và $\pi + \alpha$)

✓ $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$

✓ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$

✓ $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$

✓ $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$

c) Góc phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$)

**Ví dụ 1**

Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức

$$A = \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{13\pi}{36} + \cos \frac{5\pi}{36} + \cos \frac{8\pi}{9} - \cos \pi.$$

Ví dụ 2

Tính giá trị đúng của các biểu thức sau (không dùng máy tính cầm tay).

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sin \frac{\pi}{36} + \sin \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{35\pi}{36} + \sin \pi; & \text{b) } B &= \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{36} - \sin \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{11\pi}{36}; \\ \text{c) } C &= \tan \frac{5\pi}{36} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{23\pi}{36}; & \text{d) } D &= \cot \frac{\pi}{18} \cdot \cot \frac{\pi}{6} \cdot \cot \frac{5\pi}{9}. \end{aligned}$$

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 1**

Các đẳng thức sau có thể đồng thời xảy ra không?

$$\text{a) } \sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ và } \cos \alpha = -\frac{4}{5}; \quad \text{b) } \sin \alpha = \frac{1}{3} \text{ và } \cot \alpha = \frac{1}{2}; \quad \text{c) } \tan \alpha = 3 \text{ và } \cot \alpha = \frac{1}{3}.$$

Bài 2

Cho $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. Tính $\sin \left(-\frac{15\pi}{2} - \alpha \right) - \cos(13\pi + \alpha)$.

Bài 3

Tính các giá trị lượng giác của góc α , nếu:

$$\text{a) } \sin \alpha = \frac{5}{13} \text{ và } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \quad \text{b) } \cos \alpha = \frac{2}{5} \text{ và } 0 < \alpha < 90^\circ;$$

c) $\tan \alpha = \sqrt{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

d) $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$ và $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Bài 4

Biểu diễn các giá trị lượng giác sau qua các giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$ hoặc từ 0° đến 45° và tính:

a) $\cos \frac{21\pi}{6}$;

b) $\sin \frac{129\pi}{4}$;

c) $\tan 1020^\circ$.

Bài 5

Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 1 - 2\cos^2 \alpha$;

b) $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$.

Bài 6

Rút gọn các biểu thức sau:

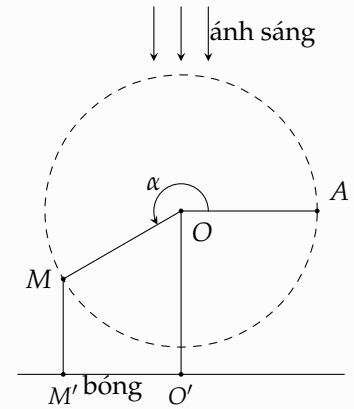
a) $\frac{1}{\tan \alpha + 1} + \frac{1}{\cot \alpha + 1}$;

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi + \alpha)$;

c) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(-\alpha + 6\pi) - \tan(\alpha + \pi) \cot(3\pi - \alpha)$.

Bài 7

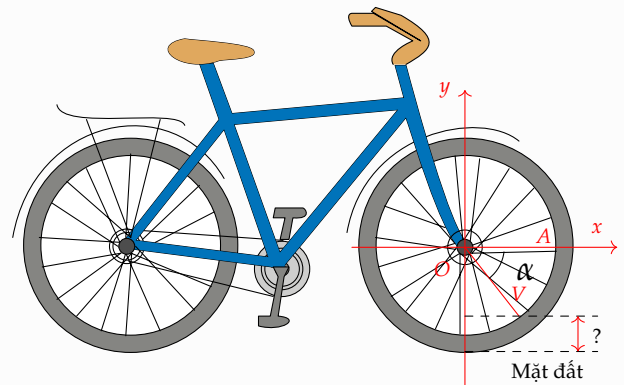
Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như Hình 12. Vị trí ban đầu của thanh là OA . Hỏi độ dài bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $3\frac{1}{10}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 15 cm? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 12

Bài 8

Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là 11 rad/s (hình bên). Ban đầu van nằm ở vị trí A . Hỏi sau một phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu, biết bán kính $OA = 58$ cm? Giả sử độ dày của lốp xe không đáng kể. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Cung có số đo 270° thì có số đo theo đơn vị là radian là

(A) $\frac{25\pi}{12}$.

(B) $\frac{25\pi}{18}$.

(C) $\frac{25\pi}{9}$.

(D) $\frac{35\pi}{18}$.

Câu 2

Nếu một cung tròn có số đo bằng radian là $\frac{5\pi}{4}$ thì số đo bằng độ của cung tròn đó là

(A) 172° .

(B) 15° .

(C) 225° .

(D) 5° .

Câu 3

Nếu một cung tròn có số đo bằng radian là $\frac{17\pi}{6}$ thì số đo bằng độ của cung tròn đó là

(A) 30° .

(B) 390° .

(C) 510° .

(D) 520° .

Câu 4

Trên đường tròn lượng giác gốc A, cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành tam giác đều?

(A) $\frac{k\pi}{3}$.

(B) $\frac{k\pi}{2}$.

(C) $\frac{k\pi}{4}$.

(D) $\frac{k2\pi}{3}$.



Câu 5

Cho L, M, N, P lần lượt là điểm chính giữa các cung $AB, BA', A'B', B'A$. Cung α có mút đầu trùng với A và số đo $\alpha = -\frac{3\pi}{4} + k\pi$ hay $\alpha = -135^\circ + k180^\circ$. Mút cuối của α ở đâu?

- ☐ A M hoặc P .
 ☐ B M hoặc N .
 ☐ C L hoặc N .
 ☐ D L hoặc P .

Câu 6

Cho lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn lượng giác có gốc là A , các đỉnh lấy theo thứ tự đó và các điểm B, C có tung độ dương. Khi đó góc lượng giác có tia đầu OA , tia cuối OC bằng

- ☐ A $240^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
 ☐ B 120° .
 ☐ C -240° .
 ☐ D $120^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 7

Trên đường tròn lượng giác, cung lượng giác có điểm đầu là A và điểm cuối là M sẽ có

- ☐ A một số đo duy nhất.
 ☐ B hai số đo, sao cho tổng của chúng là 2π .
 ☐ C hai số đo hơn kém nhau 2π .
 ☐ D vô số số đo sai khác nhau một bội của 2π .

Câu 8

Cho $a = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Tìm k để $10\pi < a < 11\pi$.

- ☐ A $k = 5$.
 ☐ B $k = 6$.
 ☐ C $k = 7$.
 ☐ D $k = 4$.

Câu 9

Bánh xe của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 6 giây. Hỏi trong 1 giây, bánh xe quay được bao nhiêu độ?

- (A) 60° . (B) 72° . (C) 240° . (D) 120° .

Câu 10

Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho M và N là hai điểm thuộc đường tròn lượng giác. Hai góc lượng giác (Ox, OM) và (Ox, ON) lệch nhau 180° . Chọn nhận xét đúng?

- (A) M, N có tung độ và hoành độ đều bằng nhau.
 (B) M, N có tung độ và hoành độ đều đối nhau.
 (C) M, N có tung độ bằng nhau và hoành độ đối nhau.
 (D) M, N có hoành độ bằng nhau và tung độ đối nhau.

Câu 11

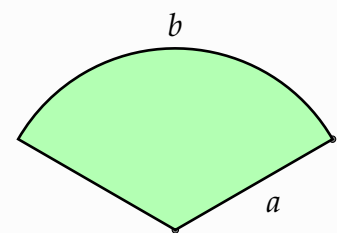
Bánh xe của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 1 giây, bánh xe quay được một góc bao nhiêu độ?

- (A) 144° . (B) 288° . (C) 36° . (D) 72° .

Câu 12

Người ta muốn làm một cánh điều hình quạt có bán kính là a , độ dài cung tròn là b và có chu vi là 80 cm (như hình vẽ). Khi diện tích cánh điều đạt giá trị lớn nhất, tổng $a + b$ bằng

- (A) 50 cm. (B) 40 cm. (C) 70 cm. (D) 60 cm.



Câu 13

Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là

- (A) 40° . (B) 50° . (C) 60° . (D) 30° .

**Câu 14**

Bánh xe của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 1 giây, bánh xe quay được một góc bao nhiêu độ?

- (A) 144° . (B) 288° . (C) 36° . (D) 72° .

Câu 15

Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Mệnh đề nào đúng?

- (A) $\cos \alpha > 0$. (B) $\tan \alpha > 0$. (C) $\sin \alpha > 0$. (D) $\cot \alpha > 0$.

Câu 16

Cho $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Kết quả đúng là:

- (A) $\tan \alpha < 0; \cot \alpha > 0$. (B) $\tan \alpha < 0; \cot \alpha < 0$.
(C) $\tan \alpha > 0; \cot \alpha < 0$. (D) $\tan \alpha > 0; \cot \alpha > 0$.

Câu 17

Câu 1. Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sin \alpha, \tan \alpha$ trái dấu?

- (A) Thứ I. (B) Thứ II hoặc IV. (C) Thứ II hoặc III. (D) Thứ I hoặc IV.

Câu 18

Gọi M là điểm cuối khi biểu diễn cung lượng giác α trên đường tròn lượng giác. Trong các phát biểu sau đây, phát biểu nào đúng?

- (A) Nếu M nằm phía trên trục hoành thì $\sin \alpha > 0$.
(B) Nếu M nằm bên phải trục tung thì $\cos \alpha < 0$.
(C) Nếu M thuộc góc phần tư thứ tư thì $\sin \alpha < 0$ và $\cos \alpha < 0$.
(D) Nếu M thuộc góc phần tư thứ hai thì $\sin \alpha > 0$ và $\cos \alpha > 0$.

Câu 19

Cho $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Kết quả đúng là:

- ☐ A $\tan \alpha < 0; \cot \alpha > 0$.
 ☐ B $\tan \alpha < 0; \cot \alpha < 0$.
 ☐ C $\tan \alpha > 0; \cot \alpha < 0$.
 ☐ D $\tan \alpha > 0; \cot \alpha > 0$.

Câu 20

Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Mệnh đề nào đúng?

- ☐ A $\cos \alpha > 0$.
 ☐ B $\tan \alpha > 0$.
 ☐ C $\sin \alpha > 0$.
 ☐ D $\cot \alpha > 0$.

Câu 21

Câu 1. Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sin \alpha, \tan \alpha$ trái dấu?

- ☐ A Thứ I.
 ☐ B Thứ II hoặc IV.
 ☐ C Thứ II hoặc III.
 ☐ D Thứ I hoặc IV.

Câu 22

Cho góc α thỏa mãn $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây sai?

- ☐ A $\tan \alpha < 0$.
 ☐ B $\cot \alpha > 0$.
 ☐ C $\sin \alpha > 0$.
 ☐ D $\cos \alpha > 0$.

Câu 23

Câu 5. Cho góc α thỏa mãn $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A Các giá trị lượng giác của góc α là các số dương.
 ☐ B Các giá trị lượng giác của góc α là các số âm.
 ☐ C $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$ trái dấu.
 ☐ D $\cos \alpha$ và $\tan \alpha$ trái dấu.

**Câu 24**

Cho $\tan \alpha = \frac{3}{4}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây là sai

- Ⓐ $\sin \alpha > 0$. Ⓑ $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. Ⓒ $\cot \alpha = \frac{4}{3}$. Ⓓ $\cos \alpha > 0$.

Câu 25

Cho $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Giá trị của $\sin \alpha$ là

- Ⓐ $\frac{5}{\sqrt{13}}$. Ⓑ $-\frac{5}{\sqrt{13}}$. Ⓒ $-\frac{5}{13}$. Ⓓ $\frac{5}{13}$.

Câu 26

Cho $\tan \alpha - \cot \alpha = 3$. Tính giá trị của biểu thức $A = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

- Ⓐ 12. Ⓑ 11. Ⓒ 13. Ⓓ 5.

Câu 27

Biết $\sin a = \frac{5}{13}, \cos b = \frac{3}{5} \left(\frac{\pi}{2} < a < \pi, 0 < b < \frac{\pi}{2} \right)$. Hãy tính $\sin(a + b)$.

- Ⓐ $-\frac{33}{65}$. Ⓑ $\frac{63}{65}$. Ⓒ $\frac{56}{65}$. Ⓓ 0.

Câu 28

Cho $\cot \alpha = 4 \tan \alpha$ và $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$. Khi đó $\sin \alpha$ bằng

- Ⓐ $\frac{\sqrt{5}}{5}$. Ⓑ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Ⓒ $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. Ⓓ $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 29

Cho $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$, với $\left(-\frac{\pi}{2} < x < 0\right)$ thì $\sin x$ có giá trị bằng

- Ⓐ $\frac{3}{\sqrt{5}}$. Ⓑ $-\frac{3}{\sqrt{5}}$. Ⓒ $-\frac{1}{\sqrt{5}}$. Ⓓ $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 30

Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Chọn kết quả đúng

- Ⓐ $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Ⓑ $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Ⓒ $\tan \alpha = \frac{-4}{3}$. Ⓓ $\cos \alpha = \frac{-4}{5}$.

Câu 31

Giá trị $\cot \frac{89\pi}{6}$ là

- Ⓐ $-\sqrt{3}$. Ⓑ $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $\sqrt{3}$.

Câu 32

Cho $\sin \alpha = -1$. Tính α .

- Ⓐ $\alpha = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$. Ⓑ $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.
Ⓒ $\alpha = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$. Ⓓ $\alpha = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 33

Nếu $\sin^2 \alpha = \frac{1}{3}$ thì $1 + \tan^2 \alpha$ bằng

- Ⓐ $\frac{9}{8}$. Ⓑ 4. Ⓒ $\frac{3}{2}$. Ⓓ $\frac{8}{9}$.



Câu 34

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{4 \sin \alpha + 5 \cos \alpha}$ biết $\cot \alpha = -3$.

(A) -1 .

(B) $\frac{7}{9}$.

(C) $\frac{9}{7}$.

(D) 1 .

Câu 35

Cho $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Giá trị của $\sin \alpha$ là

(A) $\frac{5}{\sqrt{13}}$.

(B) $-\frac{5}{\sqrt{13}}$.

(C) $-\frac{5}{13}$.

(D) $\frac{5}{13}$.

§3. CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Công thức cộng

Công thức cộng

$$\checkmark \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$

$$\checkmark \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

$$\checkmark \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha.$$

$$\checkmark \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$\checkmark \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

$$\checkmark \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Ví dụ 1

Tính giá trị $\cos \frac{\pi}{12}$.

Ví dụ 2

Tính $\sin \frac{\pi}{12}$ và $\tan \frac{\pi}{12}$.

2. Công thức góc nhân đôi

Công thức góc nhân đôi

$$\checkmark \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

$$\checkmark \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\checkmark \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

Ví dụ 3

Tính giá trị $\sin \frac{\pi}{8}$.

**Ví dụ 4**

Tính $\cos \frac{\pi}{8}$ và $\tan \frac{\pi}{8}$.

.....

.....

.....

3. Công thức biến đổi tích thành tổng**Công thức biến đổi tích thành tổng**

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)];$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)];$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta)].$$

Ví dụ 5

Tính giá trị của biểu thức $\cos \frac{11\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}$.

.....

.....

.....

Ví dụ 6

Tính giá trị của biểu thức $\sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24}$ và $\sin \frac{7\pi}{8} \sin \frac{5\pi}{8}$.

.....

.....

.....

4. Công thức biến đổi tổng thành tích**Công thức biến đổi tổng thành tích**

$$a) \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$b) \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$c) \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$d) \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Ví dụ 7

Tính $\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}$.

.....

.....

.....

Ví dụ 8

Tính $\cos \frac{7\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$.

B MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Áp dụng công thức cộng

Một số trường hợp rút gọn nên nhớ:

- ✔ $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$
- ✔ $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right).$
- ✔ $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right).$

Ví dụ 1

Không dùng máy tính, hãy tính $\cos 105^\circ$ và $\cot \frac{\pi}{12}$.

$$\cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}, \cot \frac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}.$$

Ví dụ 2

Chứng minh rằng $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right).$

Ví dụ 3

Tính $\sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right)$, biết $\sin a = \frac{12}{13}$ và $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

$$\sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{17\sqrt{2}}{26}.$$

Ví dụ 4

Không sử dụng máy tính, hãy tính $P = \cos 10^\circ \cos 35^\circ - \cos 55^\circ \cos 80^\circ$.

$$P = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Ví dụ 5**

Chứng minh giá trị của biểu thức

$$P = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \cos \alpha$$

không phụ thuộc vào α .

🔗 $P = 0$.

Ví dụ 6

Một thiết bị trễ kỹ thuật số lặp lại tín hiệu đầu vào bằng cách lặp lại tín hiệu đó trong một khoảng thời gian cố định sau khi nhận được tín hiệu. Nếu một thiết bị như vậy nhận được nốt thuần $f_1(t) = 5 \sin t$ và phát lại nốt thuần $f_2(t) = 5 \cos t$ thì âm kết hợp là $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, trong đó t là biến thời gian. Chứng tỏ rằng âm kết hợp viết được dưới dạng $f(t) = k \sin(t + \varphi)$, tức là âm kết hợp là sóng hình sin. Hãy xác định biên độ âm k và pha ban đầu φ ($-\pi < \varphi < \pi$) của sóng âm.

🔗 $k = 5\sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$.

Dạng 2**Áp dụng công thức nhân đôi, hạ bậc**

Công thức nhân đôi	Công thức hạ bậc
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$	$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$	$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$
$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$	$\cot^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$

Ví dụ 1

Biến đổi thành tích biểu thức sau

$$A = \sin 2x - \sin x + 2 \cos x - 1.$$

Ví dụ 2

Rút gọn các biểu thức (giả sử các góc làm cho biểu thức có nghĩa).

$$\text{a) } A = \frac{(1 + \sin 2a)(\cos a - \sin a)}{\cos 2a(\cos a + \sin a)}.$$

$$\text{b) } B = \frac{\sin a + \sin 2a}{\cos a + \cos 2a + 1}.$$

Ví dụ 3

Cho $\cos a = \frac{5}{13}$ với $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\tan 2a$, $\sin\left(2a + \frac{\pi}{3}\right)$, $\tan\left(2a - \frac{\pi}{6}\right)$.

Ví dụ 4

Cho $\sin 2a = \frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính $\tan a + \cot a$, $\tan a - \cot a$.

Ví dụ 5

Cho $\sin a + \cos a = m$, $(-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2})$. Tính $|\sin a - \cos a|$.

Ví dụ 6

Rút gọn biểu thức $P = \frac{3 - 4 \cos 2a + \cos 4a}{3 + 4 \cos 2a + \cos 4a}$.

Ví dụ 7

Chứng minh các đẳng thức

$$\text{a) } \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{3}{4};$$

$$\text{b) } \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{3}{8} \cos 4x + \frac{5}{8}.$$

**Dạng 3** Áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng, tổng thành tích**Ví dụ 1**

Biến đổi các tổng sau thành tích

a) $A = \sin 5x + \sin 6x + \sin 7x + \sin 8x.$

b) $B = \sin x - \sin 3x + \sin 7x - \sin 5x.$

c) $C = \cos 7x + \sin 3x + \sin 2x - \cos 3x.$

d) $D = \sin 35^\circ + \cos 40^\circ + \sin 55^\circ + \cos 20^\circ.$

Ví dụ 2Chứng minh đẳng thức $\cos^3 a \cos 3a - \sin^3 a \sin 3a = \frac{3}{4} \cos 4a + \frac{1}{4}.$ **Ví dụ 3**

Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \cos 11x \cos 3x - \cos 17x \cos 9x.$

b) $B = \sin 18x \cos 3x - \sin 19x \cos 4x.$

c) $C = \sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x.$

d) $D = \sin 2x \sin 6x - \cos x \cos 3x.$

Ví dụ 4Cho $\tan 3a = 2023$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\sin 2a - \sin 3a + \sin 4a}{\cos 2a - \cos 3a + \cos 4a}.$ **Ví dụ 5**Rút gọn biểu thức $S = 2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x)$. Từ đó tính giá trị biểu thức

$$P = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}.$$

Dạng 4 Kết hợp nhiều công thức lượng giác

Ví dụ 1

Chứng minh rằng $4 \cos x \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = \cos 3x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2

(VDT) Chứng minh rằng với mọi $a \in \mathbb{R}$: $\cos^3 a \cos 3a - \sin^3 a \sin 3a = \frac{3}{4} \cos 4a + \frac{1}{4}$.

Ví dụ 3

Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau đây không phụ thuộc vào biến số x :

$$S = \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - x \right).$$

Ví dụ 4

Rút gọn biểu thức $A = 2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x)$.

Từ đó tính giá trị biểu thức $T = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$.

$$\text{☞ } A = \sin 6x; T = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 5

Tính giá trị biểu thức $A = \sin^2 10^\circ + \cos 70^\circ \cos 50^\circ$.

$$\text{☞ } A = \frac{1}{4}$$

**Dạng 5 Nhận dạng tam giác**

☑ Một số lưu ý khi giả thiết cho A, B, C là ba góc của một tam giác

- $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow (A + B)$ và C bù nhau, tương tự với $(B + C)$ và $A, \dots$
- $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ \Rightarrow \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)$ và $\frac{C}{2}$ phụ nhau, tương tự với $\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)$ và $\frac{A}{2}, \dots$
- Các góc A, B, C đều có số đo trong khoảng $(0^\circ; 180^\circ)$.
- Các góc $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ đều là các góc nhọn nên có các giá trị lượng giác đều dương.

☑ Phương pháp:

- Biến đổi, dẫn đến $\sin A = 1$ hoặc $\cos A = 0$ sẽ có $A = 90^\circ$.
- Nếu $a^2 + b^2 = c^2$ thì $C = 90^\circ$.
- Nếu $\sin(A - B) = 0$ hoặc $\cos(A - B) = 1$ thì $A = B$, suy ra tam giác cân.
- Tam giác cân mà có một góc bằng 60° là tam giác đều.

Ví dụ 1

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông khi $\sin A \sin C = \cos A \cos C$.

Ví dụ 2

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân khi $2 \sin A \sin B = 1 + \cos C$.

(1)

Ví dụ 3

Tam giác ABC là tam giác gì nếu $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$?

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Không dùng máy tính cầm tay, tính các giá trị lượng giác của các góc:

a) $\frac{5\pi}{12}$.

b) -555° .

Bài 2

Tính $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ biết $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Bài 3

Tính các giá trị lượng giác của góc 2α , biết:

a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

b) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$ và $\pi < \alpha < 2\pi$.

Bài 4

Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \cos \alpha$;

b) $(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - \sin 2\alpha$.

Bài 5

Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết:

a) $\cos 2\alpha = \frac{2}{5}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$;

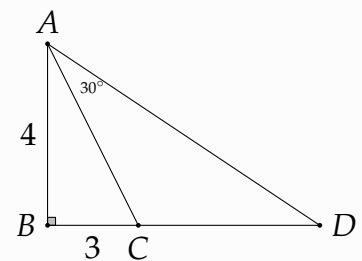
b) $\sin 2\alpha = -\frac{4}{9}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.

Bài 6

Chứng minh rằng trong tam giác ABC , ta có $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$.

Bài 7

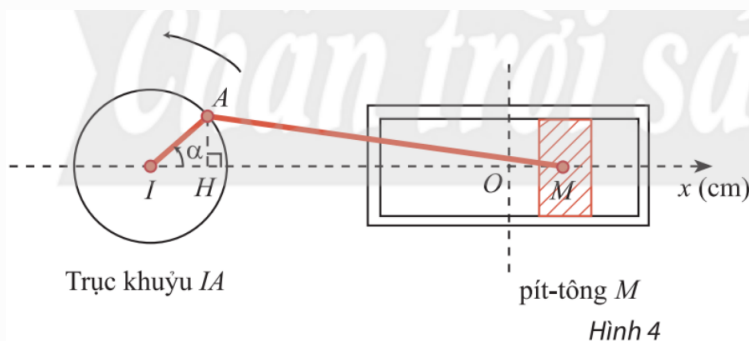
Trong hình bên, tam giác ABC vuông tại B và có hai cạnh góc vuông là $AB = 4$, $BC = 3$. Vẽ điểm D nằm trên tia đối của tia CB thỏa mãn $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Tính $\tan \widehat{BAD}$, từ đó tính độ dài cạnh CD .



Bài 8

Trong Hình 4, pít-tông M của động cơ chuyển động tịnh tiến qua lại dọc theo xi-lanh làm quay trục khuỷu IA . Ban đầu I, A, M thẳng hàng. Cho α là góc quay của trục khuỷu, O là vị trí của pít-tông khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ và H là hình chiếu của A lên Ix . Trục khuỷu IA rất ngắn so với độ dài thanh truyền AM nên có thể xem như độ dài MH không đổi và gần bằng MA .

- Biết $IA = 8$ cm, viết công thức tính tọa độ x_M của điểm M trên trục Ox theo α .
- Ban đầu $\alpha = 0$. Sau 1 phút chuyển động, $x_M = -3$ cm. Xác định x_M sau 2 phút chuyển động. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.





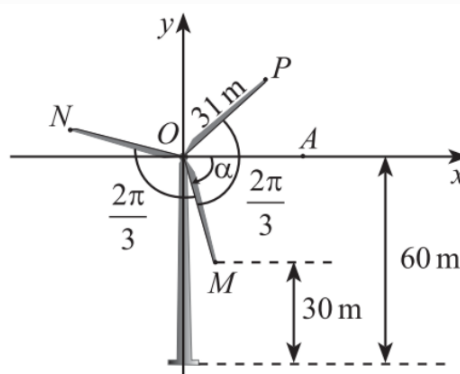
Bài 9

Trong Hình 5, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua-bin gió. Biết các cánh quạt dài 31 m, độ cao của điểm M so với mặt đất là 30 m, góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số đo góc (OA, OM) là α .

- Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.
- Tính $\sin$ của các góc lượng giác (OA, ON) và (OA, OP) , từ đó tính chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 5





D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	7	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Cho $\tan x = \frac{1}{2}$. Tính $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

(A) 2.

(B) $\frac{3}{2}$.

(C) 6.

(D) 3.

Câu 2

Với mọi α thì $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ bằng

(A) $-\sin \alpha$.

(B) $-\cos \alpha$.

(C) $\cos \alpha$.

(D) $\sin \alpha$.

Câu 3

Nếu biết $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), $\cos \beta = \frac{3}{5}$ ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$) thì giá trị đúng của $\cos(\alpha - \beta)$ là

(A) $\frac{16}{65}$.

(B) $-\frac{16}{65}$.

(C) $\frac{18}{65}$.

(D) $-\frac{18}{65}$.

Câu 4

Biết $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tính $P = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ theo m

(A) $\frac{m}{\sqrt{2}}$.

(B) $m\sqrt{2}$.

(C) $\frac{m}{2}$.

(D) $2m$.



Câu 5

Cho $M = 3 \sin x + 4 \cos x$. Chọn khẳng định **đúng**.

- Ⓐ $M \leq 5$. Ⓑ $M > 5$. Ⓒ $M \geq 5$. Ⓓ $-5 \leq M \leq 5$.

Câu 6

Trong các công thức sau, công thức nào đúng?

- Ⓐ $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$. Ⓑ $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$.
 Ⓒ $\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$. Ⓓ $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$.

Câu 7

Kết quả rút gọn của biểu thức $\left(\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + 1} \right)^2 + 1$ bằng

- Ⓐ 2. Ⓑ $1 + \tan \alpha$. Ⓒ $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$. Ⓓ $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Câu 8

Biểu thức $\sin x \sin y + \cos x \cos y$ bằng

- Ⓐ $\sin(x - y)$. Ⓑ $\cos(x + y)$. Ⓒ $\sin(x + y)$. Ⓓ $\cos(x - y)$.

Câu 9

Giá trị của biểu thức $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ$ bằng

- Ⓐ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $-\sqrt{3}$. Ⓓ $\sqrt{3}$.



Câu 10

Cho $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, khi đó giá trị của $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ là

☐ A $\frac{\sqrt{2}}{34}$.

☐ B $-\frac{\sqrt{2}}{26}$.

☐ C $\frac{17\sqrt{2}}{26}$.

☐ D $-\frac{7\sqrt{2}}{26}$.

Câu 11

Cho $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, khi đó giá trị của $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ là

☐ A $\frac{\sqrt{2}}{34}$.

☐ B $-\frac{\sqrt{2}}{26}$.

☐ C $\frac{17\sqrt{2}}{26}$.

☐ D $-\frac{7\sqrt{2}}{26}$.

Câu 12

Cho $\tan x = \frac{1}{2}$. Tính $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

☐ A 2.

☐ B $\frac{3}{2}$.

☐ C 6.

☐ D 3.

Câu 13

Biểu thức $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$ được viết lại

☐ A $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \sin a + \frac{1}{2}$.

☐ B $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sin a - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos a$.

☐ C $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a - \frac{1}{2}\cos a$.

☐ D $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a + \frac{1}{2}\cos a$.

Câu 14

Giá trị của biểu thức $\frac{\cos \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{15} - \sin \frac{\pi}{15} \sin \frac{\pi}{10}}{\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{15} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}}$ bằng

☐ A $\sqrt{3}$.

☐ B 1.

☐ C -1.

☐ D $\frac{1}{2}$.

Câu 15

Biểu thức $\sin x \sin y + \cos x \cos y$ bằng

- Ⓐ $\sin(x - y)$. Ⓑ $\cos(x + y)$. Ⓒ $\sin(x + y)$. Ⓓ $\cos(x - y)$.

Câu 16

Giá trị của biểu thức $\cos \frac{37\pi}{12}$ bằng

- Ⓐ $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. Ⓑ $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$. Ⓒ $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. Ⓓ $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Câu 17

Cho các góc α, β thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi$, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \beta = -\frac{2}{3}$. Tính $\sin(\alpha + \beta)$.

- Ⓐ $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}$. Ⓑ $\sin(\alpha + \beta) = \frac{2\sqrt{10} - 2}{9}$.
 Ⓒ $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5} - 4\sqrt{2}}{9}$. Ⓓ $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5} + 4\sqrt{2}}{9}$.

Câu 18

Cho $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ($-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$). Tính giá trị của $\sin(\frac{\pi}{6} - \alpha)$.

- Ⓐ $\frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$. Ⓑ $\frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}$. Ⓒ $\frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}$. Ⓓ $\frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

Câu 19

Rút gọn biểu thức: $\cos 54^\circ \cos 4^\circ - \cos 36^\circ \cos 86^\circ$, ta được:

- Ⓐ $\cos 58^\circ$. Ⓑ $\sin 50^\circ$. Ⓒ $\sin 58^\circ$. Ⓓ $\cos 50^\circ$.

**Câu 20**

Câu 2. Giá trị của biểu thức $\sin 2 \cdot \cos 3 - \sin 3 \cdot \cos 2$ bằng?

- (A) $\sin 5$. (B) $\sin 1$. (C) $-\cos 5$. (D) $-\sin 1$.

Câu 21

Cho x, y là các góc nhọn và dương thỏa $\cot x = \frac{3}{4}, \cot y = \frac{1}{7}$. Tổng $x + y$ bằng

- (A) $\frac{\pi}{3}$. (B) π . (C) $\frac{\pi}{4}$. (D) $\frac{3\pi}{4}$.

Câu 22

Với mọi α thì $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ bằng

- (A) $-\sin \alpha$. (B) $-\cos \alpha$. (C) $\cos \alpha$. (D) $\sin \alpha$.

Câu 23

Biểu thức $\sin x \sin y + \cos x \cos y$ bằng

- (A) $\sin(x - y)$. (B) $\cos(x + y)$. (C) $\sin(x + y)$. (D) $\cos(x - y)$.

Câu 24

Cho các góc lượng giác a, b và $T = \cos(a + b) \cos(a - b) - \sin(a + b) \sin(a - b)$. Mệnh đề sau đây đúng?

- (A) $T = \sin 2b$. (B) $T = \cos 2a$. (C) $T = \sin 2a$. (D) $T = \cos 2b$.



Câu 25

Biết $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tính $P = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$ theo m .

- Ⓐ $P = 2m$. Ⓑ $P = \frac{m}{2}$. Ⓒ $P = \frac{m}{\sqrt{2}}$. Ⓓ $P = m\sqrt{2}$.

Câu 26

Nếu biết $\sin \alpha = \frac{5}{13} \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \right)$, $\cos \beta = \frac{3}{5} \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2} \right)$ thì giá trị đúng của $\cos(\alpha - \beta)$ là

- Ⓐ $\frac{16}{65}$. Ⓑ $-\frac{16}{65}$. Ⓒ $\frac{18}{65}$. Ⓓ $-\frac{18}{65}$.

Câu 27

Rút gọn biểu thức: $\cos 54^\circ \cos 4^\circ - \cos 36^\circ \cos 86^\circ$, ta được:

- Ⓐ $\cos 58^\circ$. Ⓑ $\sin 50^\circ$. Ⓒ $\sin 58^\circ$. Ⓓ $\cos 50^\circ$.

Câu 28

Cho $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Giá trị của $\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right)$ bằng

- Ⓐ $\frac{2 - \sqrt{6}}{2\sqrt{6}}$. Ⓑ $\sqrt{6} - \frac{1}{2}$. Ⓒ $\sqrt{6} - 3$. Ⓓ $\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2}$.

Câu 29

Cho hai góc nhọn a và b với $\tan a = \frac{1}{7}$ và $\tan b = \frac{3}{4}$. Tính $a + b$.

- Ⓐ $\frac{\pi}{3}$. Ⓑ $\frac{\pi}{4}$. Ⓒ $\frac{\pi}{6}$. Ⓓ $\frac{2\pi}{3}$.

**Câu 30**

Cho $M = 3 \sin x + 4 \cos x$. Chọn khẳng định **đúng**.

- Ⓐ $M \leq 5$. Ⓑ $M > 5$. Ⓒ $M \geq 5$. Ⓓ $-5 \leq M \leq 5$.

Câu 31

Với mọi a, b khẳng định nào dưới đây đúng?

- Ⓐ $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$. Ⓑ $\cos(a + b) = \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b$.
 Ⓒ $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$. Ⓓ $\sin(a + b) = \sin a \cdot \sin b + \cos a \cdot \cos b$.

Câu 32

Biểu thức $A = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$ có giá trị bằng

- Ⓐ 1. Ⓑ -1. Ⓒ 2. Ⓓ -2.

Câu 33

Tính giá trị của biểu thức $P = (1 - 2 \cos 2\alpha)(2 + 3 \cos 2\alpha)$ biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

- Ⓐ $P = \frac{49}{27}$. Ⓑ $P = \frac{50}{27}$. Ⓒ $P = \frac{48}{27}$. Ⓓ $P = \frac{47}{27}$.

Câu 34

Cho $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. Giá trị của $P = \cos 2\alpha + \sin \alpha$ bằng

- Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ $\frac{1}{2}$. Ⓓ 0.

Câu 35

Cho $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Khi đó, $\cos 2\alpha$ bằng

- Ⓐ $\frac{1}{8}$. Ⓑ $\frac{\sqrt{7}}{4}$. Ⓒ $-\frac{\sqrt{7}}{4}$. Ⓓ $-\frac{1}{8}$.

Câu 36

Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ với $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Giá trị của $\sin 2\alpha$ bằng

- Ⓐ $\frac{2}{3}$. Ⓑ $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. Ⓒ $\frac{8}{9}$. Ⓓ $\frac{2\sqrt{2}}{9}$.

Câu 37

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- Ⓐ $\sin 4x = 4 \sin x \cdot \cos x$. Ⓑ $\sin 4x = 4 \sin 2x \cdot \cos 2x$.
Ⓒ $\sin 4x = 2 \sin 2x \cdot \cos 2x$. Ⓓ $\sin 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$.

Câu 38

Rút gọn biểu thức $P = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin 2x}$ ($\sin 2x \neq 0$) ta được

- Ⓐ $P = \frac{1}{2} \tan x$. Ⓑ $P = \frac{1}{2} \cot x$. Ⓒ $P = 2 \cot x$. Ⓓ $P = 2 \tan x$.

Câu 39

Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng

- Ⓐ $-\frac{3}{4}$. Ⓑ $\frac{1}{4}$. Ⓒ $\frac{1}{2}$. Ⓓ $-\frac{1}{2}$.

**Câu 40**

Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

☐ A $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

☐ B $\cos 2a = 1 - 2 \cos^2 a$.

☐ C $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$.

☐ D $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$.

Câu 41

Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

☐ A $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

☐ B $\cos 2a = 1 - 2 \cos^2 a$.

☐ C $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$.

☐ D $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$.

Câu 42

Biết $\sin^4 x = a + b \cos 2x + c \cdot \cos 4x$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính tổng $S = a + b + c$.

☐ A $S = 0$.

☐ B $S = -1$.

☐ C $S = 1$.

☐ D $S = 4$.

Câu 43

Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

☐ A $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

☐ B $\cos 2a = 1 - 2 \cos^2 a$.

☐ C $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$.

☐ D $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$.

Câu 44

Chọn công thức sai trong các công thức dưới đây

☐ A $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$.

☐ B $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$.

☐ C $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$.

☐ D $\cos a - \cos b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$.



Câu 45

Cho hai góc nhọn a và b . Biết $\cos a = \frac{1}{3}$, $\cos b = \frac{1}{4}$. Giá trị $\cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$ bằng

- Ⓐ $-\frac{113}{144}$. Ⓑ $-\frac{115}{144}$. Ⓒ $-\frac{117}{144}$. Ⓓ $-\frac{119}{144}$.

Câu 46

Biểu thức $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ đồng nhất với biểu thức nào dưới đây ?

- Ⓐ $\sin 2\alpha$. Ⓑ $\cos 2\alpha$. Ⓒ $\sin \alpha$. Ⓓ $\cos \alpha$.

Câu 47

Trong các công thức sau, công thức nào **sai**?

- Ⓐ $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$. Ⓑ $\cos a - \cos b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$.
 Ⓒ $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$. Ⓓ $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$.

Câu 48

Tính $M = \cos a + \cos(a + 120^\circ) + \cos(a - 120^\circ)$.

- Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ -2.

Câu 49

Rút gọn biểu thức $\sin(a - 17^\circ) \cdot \cos(a + 13^\circ) - \sin(a + 13^\circ) \cdot \cos(a - 17^\circ)$, ta được

- Ⓐ $\sin 2a$. Ⓑ $\cos 2a$. Ⓒ $-\frac{1}{2}$. Ⓓ $\frac{1}{2}$.

**Câu 50**

Gọi $M = \cos(a + b) \cdot \cos(a - b) + \sin(a + b) \cdot \sin(a - b)$ thì

- ☐ (A) $M = \sin 4b$. ☐ (B) $M = 1 - 2\sin^2 b$. ☐ (C) $M = 1 + 2\sin^2 b$. ☐ (D) $M = \cos 4b$.

.....

.....

.....



§4. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Hàm số lượng giác

Các hàm số lượng giác

- ✔ Hàm số **sin** là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\sin x$, kí hiệu $y = \sin x$.
- ✔ Hàm số **côsin** là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\cos x$, kí hiệu $y = \cos x$.
- ✔ Hàm số **tang** là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ với } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ kí hiệu } y = \tan x.$$

- ✔ Hàm số **côtang** là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ với } x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ kí hiệu } y = \cot x.$$

Tập xác định hàm số lượng giác

- ✔ Tập xác định của hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- ✔ Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- ✔ Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn

a) Hàm số chẵn, hàm số lẻ

- ✔ Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathcal{D}$ được gọi là **hàm số chẵn** nếu với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = f(x)$.
- ✔ Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathcal{D}$ được gọi là **hàm số lẻ** nếu với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = -f(x)$.

Chú ý:

- ✔ Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- ✔ Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

b) Hàm số tuần hoàn

- ✔ Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathcal{D}$ được gọi là **hàm số tuần hoàn** nếu tồn tại một số T khác 0 sao cho với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $x \pm T \in \mathcal{D}$ và $f(x + T) = f(x)$.
- ✔ Số T dương nhỏ nhất thoả mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn $y = f(x)$.

Chú ý:

- ✔ Đồ thị của hàm số tuần hoàn chu kỳ T được lặp lại trên từng đoạn giá trị của x có độ dài T .

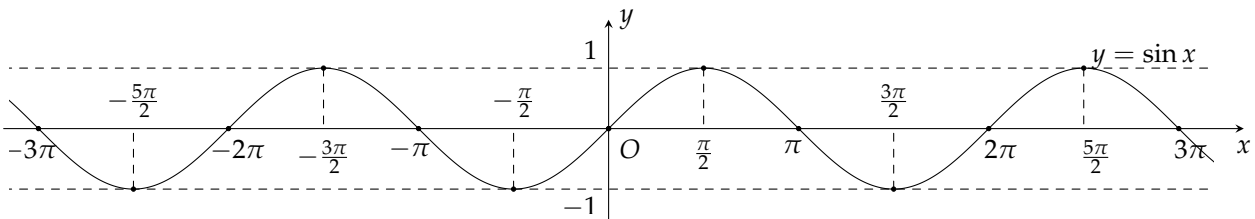
☑ Người ta chứng minh được rằng

- Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là các hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là các hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .

3. Đồ thị của các hàm số lượng giác

3.1. Hàm số $y = \sin x$

Ta có đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$ như sau



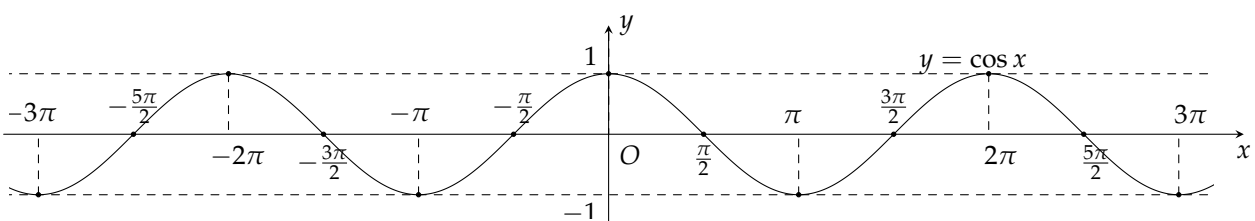
Chú ý: Vì $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên để vẽ đồ thị của nó trên đoạn $[-\pi; \pi]$, ta có thể vẽ trên đoạn $[0; \pi]$, sau đó lấy đối xứng qua gốc tọa độ.

Từ đồ thị trên, ta thấy hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $[-1; 1]$ và có các tính chất sau

- a) Hàm số tuần hoàn chu kỳ 2π .
- b) Hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O .
- c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

3.2. Hàm số $y = \cos x$

Ta có đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên $\mathbb{R}$ như sau



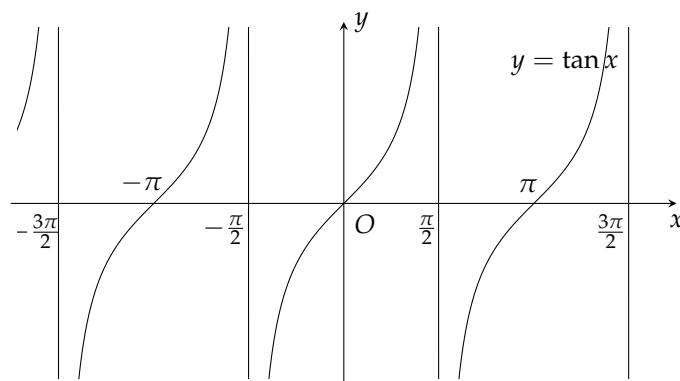
Chú ý: Vì $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên để vẽ đồ thị của nó trên đoạn $[-\pi; \pi]$, ta có thể vẽ trên đoạn $[0; \pi]$, sau đó lấy đối xứng qua trục tung.

Từ đồ thị trên, ta thấy hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $[-1; 1]$ và có các tính chất sau

- a) Hàm số tuần hoàn chu kỳ 2π .
- b) Hàm số chẵn, có đồ thị đối xứng qua trục Oy .
- c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

3.3. Hàm số $y = \tan x$

Ta có đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ như sau



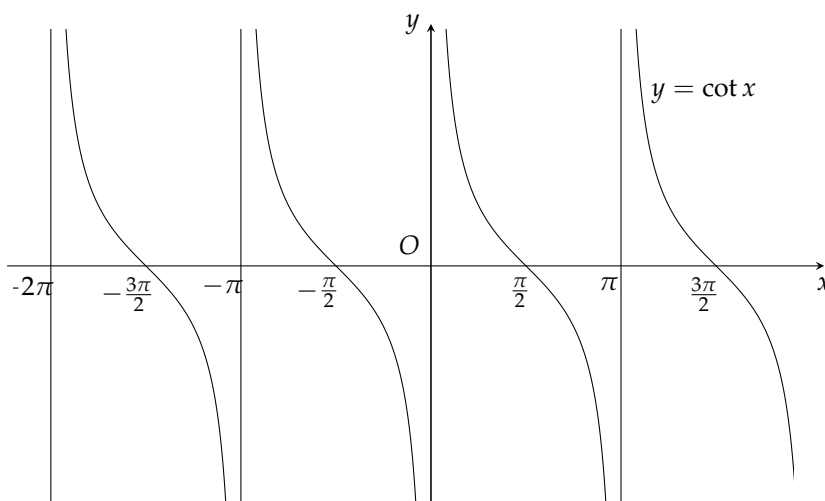
Chú ý: Vì $y = \tan x$ là hàm số lẻ nên để vẽ đồ thị của nó trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có thể vẽ trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, sau đó lấy đối xứng qua gốc tọa độ.

Từ đồ thị trên, ta thấy hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, tập giá trị là $\mathbb{R}$ và có các tính chất sau

- a) Hàm số tuần hoàn chu kì π .
- b) Hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O .
- c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

3.4. Hàm số $y = \cot x$

Ta có đồ thị của hàm số $y = \cot x$ trên $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ như sau



Từ đồ thị trên, ta thấy hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, tập giá trị là $\mathbb{R}$ và có các tính chất sau

- a) Hàm số tuần hoàn chu kì π .
- b) Hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O .
- c) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Ví dụ 1

Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số lượng giác $y = \cos x$, $y = \tan x$.

Ví dụ 2

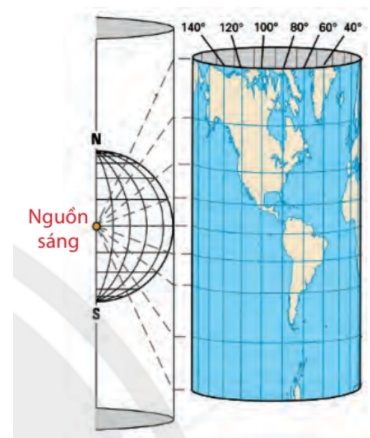
Xét tính tuần hoàn của hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \tan x$.

Ví dụ 3

Nhiệt độ ngoài trời T (tính bằng $^{\circ}\text{C}$) vào thời điểm t giờ trong một ngày ở một thành phố được tính bởi công thức $T = 20 + 4\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{5\pi}{6}\right)$. Để bảo quản các tác phẩm nghệ thuật, hệ thống điều hoà nhiệt độ của một bảo tàng sẽ được tự động bật khi nhiệt độ ngoài trời từ 22°C trở lên. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy xác định khoảng thời gian t trong ngày ($0 \leq t \leq 24$) hệ thống điều hoà được bật. (Theo <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0168192385900139>)

Ví dụ 4

Trong Địa lí, phép chiếu hình trụ được sử dụng để vẽ một bản đồ phẳng như trong hình bên. Trên bản đồ phẳng lấy đường xích đạo làm trục hoành và kinh tuyến 0° làm trục tung. Khi đó tung độ của một điểm có vĩ độ φ° ($-90 < \varphi < 90$) được cho bởi hàm số $y = 20 \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right)$ (cm). Sử dụng đồ thị hàm số tang, hãy cho biết những điểm ở vĩ độ nào nằm cách xích đạo không quá 20 (cm) trên bản đồ. (Theo <https://geologyscience.com/geology/types-of-maps/>)



B MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Để tìm tập xác định của hàm số lượng giác ta cần nhớ

$$\checkmark y = \tan f(x) = \frac{\sin f(x)}{\cos f(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} \cos f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\checkmark y = \cot f(x) = \frac{\cos f(x)}{\sin f(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} \sin f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$\checkmark$ Một số trường hợp tìm tập xác định thường gặp:

$$\text{a) } y = \frac{1}{P(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} P(x) \neq 0. \quad \text{b) } y = \sqrt[n]{P(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} P(x) \geq 0.$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{\sqrt[n]{P(x)}} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} P(x) > 0.$$

 Khi tìm tập xác định, ta xem nó có mẫu không? có tan, cot không? có căn không?

$\checkmark$ Với $k \in \mathbb{Z}$, ta cần nhớ những trường hợp đặc biệt:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left\{ \begin{array}{l} + \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. \\ + \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi. \\ + \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi. \end{array} \right. & \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} + \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi. \\ + \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi. \\ + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{array} \right. \\ \text{c) } \left\{ \begin{array}{l} + \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi. \\ + \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi. \\ + \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi. \end{array} \right. & \text{d) } \left\{ \begin{array}{l} + \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi. \\ + \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi. \\ + \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{array} \right. \end{array}$$

Ví dụ 1

Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\tan 2x}{\cos x + 1} + \sin x$.

Ví dụ 2

Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\cos 3x}{1 - \sin x} + \tan x$.

**Ví dụ 3**

Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{2 \tan 2x - 5}{\sin 2x + 1}$.

Ví dụ 4

Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{3}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \tan x$.

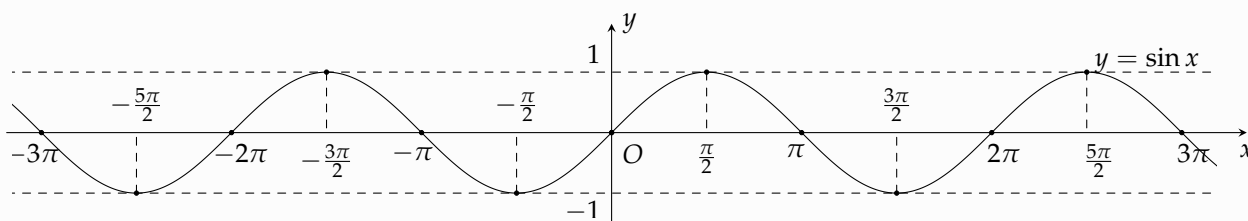
Ví dụ 5

Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$.

Dạng 2 Sự biến thiên của hàm số lượng giác

Hàm số $y = \sin x$

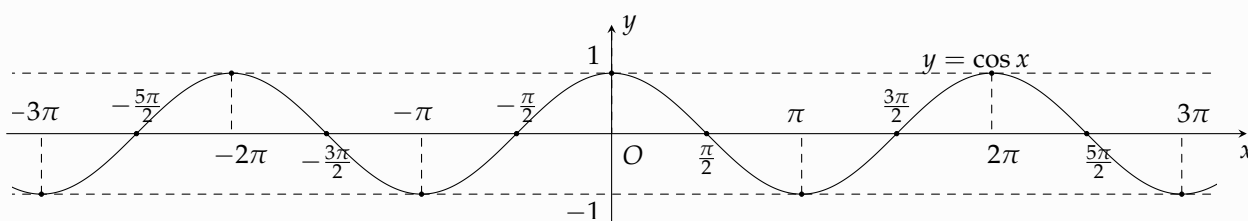
Ta có đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$ như sau



Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Hàm số $y = \cos x$

Ta có đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên $\mathbb{R}$ như sau

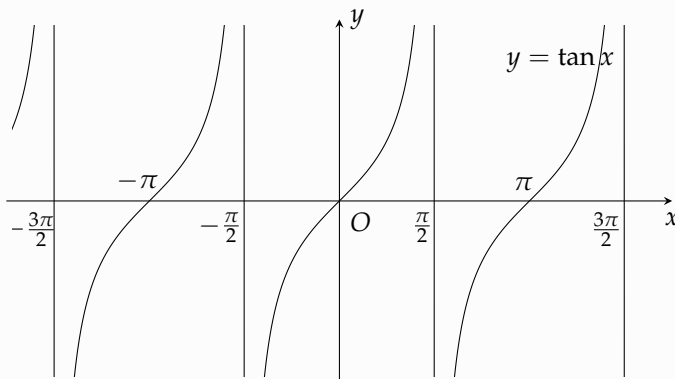


Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Hàm số $y = \tan x$

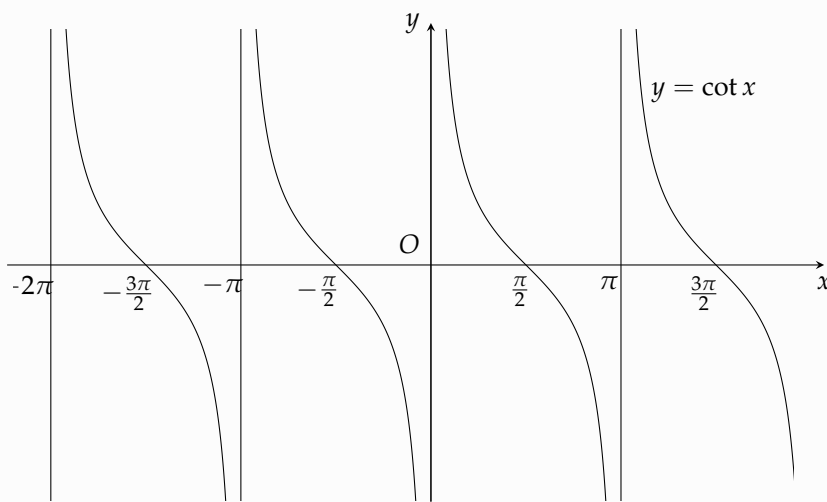
Ta có đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ như hình bên.

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ ($k \in \mathbb{Z}$).



Hàm số $y = \cot x$

Ta có đồ thị của hàm số $y = \cot x$ trên $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ như hình bên. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$).



Ví dụ 1

Hàm số $y = \sin x$

- Ⓐ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi \right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\pi + k2\pi; k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- Ⓑ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2} + k2\pi; \frac{5\pi}{2} + k2\pi \right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- Ⓒ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi \right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- Ⓓ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi \right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2

Hàm số $y = \cos x$



- Ⓐ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\pi + k2\pi; k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- Ⓑ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- Ⓒ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- Ⓓ đồng biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\pi + k2\pi; 3\pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 3

Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- Ⓐ $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Ⓑ $(0; \pi)$. Ⓒ $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$. Ⓓ $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 4

Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- Ⓐ $(0; 2\pi)$. Ⓑ $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$. Ⓒ $(-\pi; 0)$. Ⓓ $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 5

Hàm số $y = \sqrt{3} + 2 \cos x$ tăng trên khoảng

- Ⓐ $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$. Ⓑ $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. Ⓒ $\left(\frac{7\pi}{6}; 2\pi\right)$. Ⓓ $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Các hàm số dưới đây có là hàm số chẵn hay hàm số lẻ không?

a) $y = 5 \sin^2 x + 1$;

b) $y = \cos x + \sin x$;

c) $y = \tan 2x$.

Bài 2

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{\cos x}$;

b) $y = \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$;

c) $y = \frac{1}{2 - \sin^2 x}$.

Bài 3

Tìm tập giá trị của hàm số $y = 2 \cos x + 1$.

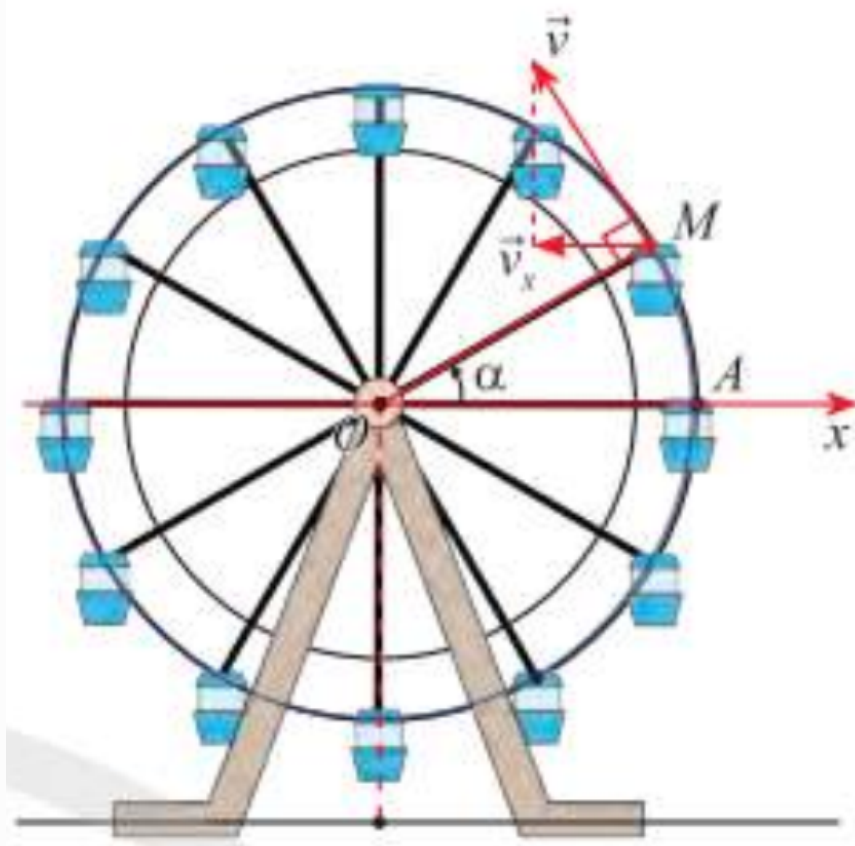
Bài 4

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \sin x$, xác định các giá trị $x \in [-\pi; \pi]$ thỏa mãn $\sin x = \frac{1}{2}$.

Bài 5

Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0,3 \sin \alpha$ (m/s) (Hình vẽ bên).

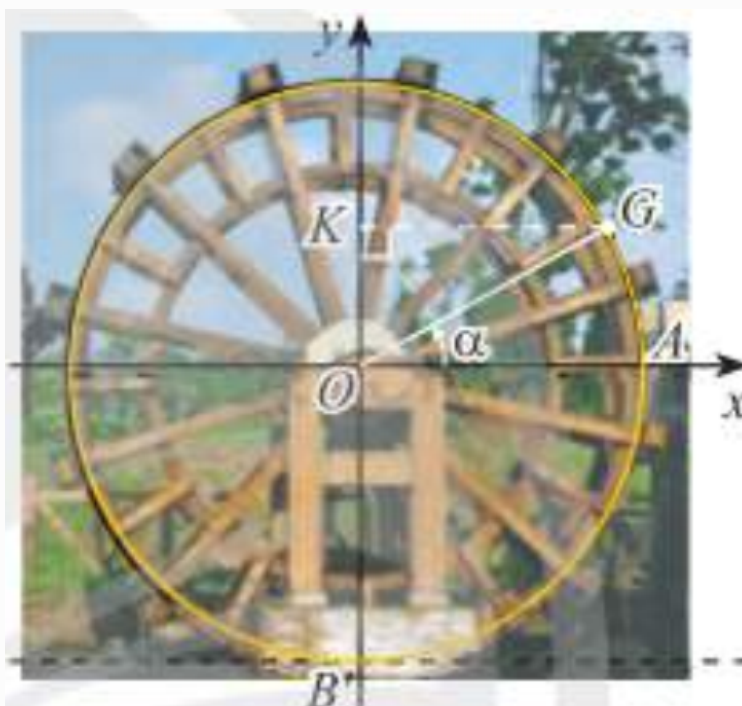
- Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x .
- Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng?



Bài 6

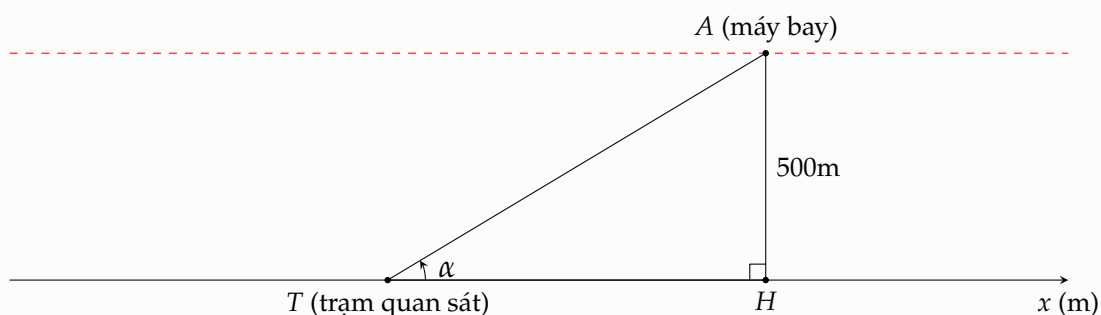
Khoảng cách từ tâm một guồng nước đến mặt nước và bán kính của guồng đều bằng 3 m. Xét gàu G của guồng. Ban đầu gàu G nằm ở vị trí A (Hình vẽ bên).

- Viết hàm số h biểu diễn chiều cao (tính bằng mét) của gàu G so với mặt nước theo góc $\alpha = (OA, OG)$.
- Guồng nước quay hết mỗi vòng trong 30 giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết ở các thời điểm t nào trong 1 phút đầu, khoảng cách của gàu đến mặt nước bằng 1,5 mét?



Bài 7

Trong hình vẽ bên dưới, một chiếc máy bay A bay ở độ cao 500 m theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H , α là góc lượng giác (Tx, TA) ($0 < \alpha < \pi$).



- Biểu diễn tọa độ x_H của điểm H trên trục Tx theo α .
- Dựa vào đồ thị hàm số cotang, hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Hàm số $y = \tan x$ xác định khi nào?

(A) $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(B) $x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(C) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(D) $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 2

Tìm tập xác định của hàm số $y = \cot x$.

(A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

(C) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

(D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 3

Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{2}{\cos x - 1}$ là

(A) $\cos x \neq -1$.

(B) $\cos x \neq 1$.

(C) $\cos x \neq 2$.

(D) $\cos x \neq 0$.

Câu 4

HK1 THPT Hưng Nhân, Tỉnh Thái Bình]Hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ có tập xác định là

(A) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(B) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(C) $\mathbb{R}$.

(D) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 5

Xét bốn mệnh đề

(1) Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

(2) Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

(3) Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

(4) Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Số mệnh đề đúng là

(A) 4.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 1.

Câu 6

Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ là

(A) $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(B) $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

(C) $x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

(D) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 7

Tập xác định của hàm số $y = \sin 2x$ là:

(A) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$.

(B) $\mathbb{R}$.

(C) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

(D) $(-\infty; 2)$.

**Câu 8**

Trong các hàm số sau, hàm số nào có tập xác định là $\mathbb{R}$?

- Ⓐ $y = \sin x$. Ⓑ $y = \tan x$. Ⓒ $y = \cot x$. Ⓓ $y = \sqrt{x}$.

Câu 9

Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{2}{\cos x - 1}$ là

- Ⓐ $\cos x \neq -1$. Ⓑ $\cos x \neq 1$. Ⓒ $\cos x \neq 2$. Ⓓ $\cos x \neq 0$.

Câu 10

Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\cos x}$.

- Ⓐ $\mathcal{D} = \left\{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 Ⓒ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Ⓓ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 11

Cho hàm số $y = \frac{\sin 2x}{2 \cos x - 3}$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- Ⓐ Hàm số đã cho là hàm số chẵn.
 Ⓑ Hàm số đã cho là hàm số lẻ.
 Ⓒ Hàm số đã cho có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.
 Ⓓ Hàm số đã cho là hàm số không chẵn, không lẻ.

Câu 12

Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- Ⓐ $y = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$. Ⓑ $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$. Ⓒ $y = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$. Ⓓ $y = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x}$.

Câu 13

Cho hai hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $g(x) = \cos 3x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- ☐ A $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số chẵn. ☐ B $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số lẻ.
☐ C $f(x)$ là hàm số chẵn và $g(x)$ là hàm số lẻ. ☐ D $f(x)$ là hàm số lẻ và $g(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 14

Cho biết khẳng định nào sau đây là **sai**?

- ☐ A Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ. ☐ B Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.
☐ C Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ. ☐ D Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

Câu 15

Trong các hàm số $y = \sin x$, $y = x$, $y = x^2 + 1$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ có tất cả bao nhiêu hàm số lẻ?

- ☐ A 6. ☐ B 3. ☐ C 5. ☐ D 4.

Câu 16

Hàm số lượng giác nào dưới đây là hàm số lẻ?

- ☐ A $y = \sin^2 x$. ☐ B $y = \sin x$. ☐ C $y = \cos x$. ☐ D $y = \tan^2 x$.

Câu 17

Trong các khẳng định sau khẳng định nào là **sai**?

- ☐ A Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ. ☐ B Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ.
☐ C Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ. ☐ D Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

**Câu 18**

Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ trên tập xác định?

- Ⓐ $y = 1 + \tan x$. Ⓑ $y = \frac{1}{2} \sin x \cos 2x$. Ⓒ $y = 2 \cos 2x$. Ⓓ $y = \frac{x}{\sin x}$.

Câu 19

Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn

- Ⓐ $y = \tan x + x^2$. Ⓑ $y = -|\sin 2x|$. Ⓒ $y = \cos(4x - x^2)$. Ⓓ $y = \cos x + x$.

Câu 20

Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

- Ⓐ $y = \sin 3x$. Ⓑ $y = \cos x \tan 2x$. Ⓒ $y = x \cos x$. Ⓓ $y = \frac{\tan x}{\sin x}$.

Câu 21

Hàm số lượng giác nào dưới đây là hàm số chẵn?

- Ⓐ $y = \sin 2x$. Ⓑ $y = \cos 3x$. Ⓒ $y = \cot 3x$. Ⓓ $y = \tan 2x$.

Câu 22

Trong các hàm số được cho bởi các phương án sau đây, hàm số nào là hàm số chẵn?

- Ⓐ $y = \cot 2x$. Ⓑ $y = \sin 2x$. Ⓒ $y = \tan 2x$. Ⓓ $y = \cos 2x$.

Câu 23

Xét trên tập xác định của hàm số thì khẳng định nào sau đây là **sai**?

- Ⓐ Hàm số $y = \sin 2x$ là hàm số lẻ. Ⓑ Hàm số $y = \tan 2x$ là hàm số lẻ.
Ⓒ Hàm số $y = \cot 2x$ là hàm số lẻ. Ⓓ Hàm số $y = \cos 2x$ là hàm số lẻ.

Câu 24

Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- Ⓐ $y = \frac{x - \sin x}{\cos 2x}$. Ⓑ $y = \frac{3x^2 - \sin x}{\cos 3x}$. Ⓒ $y = \frac{x - \sin x}{\sin x}$. Ⓓ $y = \frac{x^3 - \sin x}{\sin 3x}$.

Câu 25

Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$?

- Ⓐ $y = -\sin x$. Ⓑ $y = \cos x$. Ⓒ $y = -\cot x$. Ⓓ $y = \tan x$.

Câu 26

Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trong khoảng nào sau đây?

- Ⓐ $\left(7\pi; \frac{15\pi}{2}\right)$. Ⓑ $\left(-\frac{7\pi}{2}; -3\pi\right)$. Ⓒ $\left(\frac{19\pi}{2}; 10\pi\right)$. Ⓓ $(-6\pi; -5\pi)$.

Câu 27

Khẳng định nào sau đây đúng?

- Ⓐ Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.
 Ⓑ Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.
 Ⓒ Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$.
 Ⓓ Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$.



Câu 28

Với $x \in \left(\frac{31\pi}{4}; \frac{33\pi}{4}\right)$, mệnh đề nào sau đây là đúng?

- ☐ A Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến. ☐ B Hàm số $y = \sin x$ đồng biến.
☐ C Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến. ☐ D Hàm số $y = \tan x$ nghịch biến.

Câu 29

Xét hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; 0]$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- ☐ A Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
☐ B Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
☐ C Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
☐ D Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Câu 30

Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.
☐ B Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.
☐ C Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$.
☐ D Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 31

Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

- ☐ A $y = \cos x$. ☐ B $y = \tan x$. ☐ C $y = \sin x$. ☐ D $y = \cot x$.

Câu 32

Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trong khoảng nào sau đây?

- Ⓐ $\left(7\pi; \frac{15\pi}{2}\right)$. Ⓑ $\left(-\frac{7\pi}{2}; -3\pi\right)$. Ⓒ $\left(\frac{19\pi}{2}; 10\pi\right)$. Ⓓ $(-6\pi; -5\pi)$.

Câu 33

Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$?

- Ⓐ $y = \sin x$. Ⓑ $y = \cos x$. Ⓒ $y = \cot x$. Ⓓ $y = \tan x$.

Câu 34

Hãy chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định dưới đây: Trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ thì

- Ⓐ hàm số $y = \cot x$ là hàm số đồng biến. Ⓑ hàm số $y = \tan x$ là hàm số đồng biến.
Ⓒ hàm số $y = \cos x$ là hàm số nghịch biến. Ⓓ hàm số $y = \sin x$ là hàm số nghịch biến.

Câu 35

Xét các mệnh đề sau:

(I): $\forall x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ nghịch biến.

(II): $\forall x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ hàm số $y = \frac{1}{\cos x}$ nghịch biến.

Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên.

- Ⓐ Cả hai đúng. Ⓑ Chỉ (I) đúng. Ⓒ Chỉ (II) đúng. Ⓓ Cả hai sai.

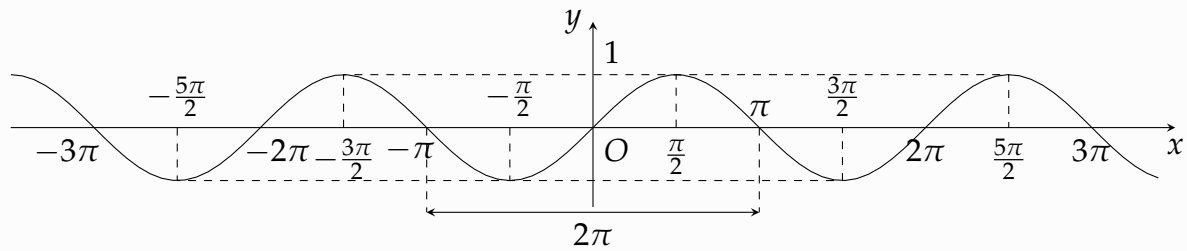
Câu 36

Hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$. Ⓑ $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right)$. Ⓒ $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right)$. Ⓓ $\left(\frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right)$.

Câu 37

Cho đồ thị hàm số $y = \sin x$ như hình vẽ sau



Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A** Hàm số $y = \sin x$ tăng trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- B** Hàm số $y = \sin x$ giảm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.
- C** Hàm số $y = \sin x$ giảm trên khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right)$.
- D** Hàm số $y = \sin x$ tăng trên khoảng $(0; \pi)$.

Câu 38

Xét sự biến thiên của hàm số $y = \cot 2x$. Trong các kết luận sau, kết luận nào **đúng**?

- A** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- B** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
- C** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
- D** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

§5. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình tương đương

Định nghĩa 5.1. Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Ví dụ 1

Phương trình $x^2 - 4 = 0$ tương đương với phương trình nào sau đây?

a) $2x^2 = 8$.

b) $x^2 - 4 + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2}$.

2. Phương trình $\sin x = m$

Định nghĩa 5.2. Xét phương trình $\sin x = m$.

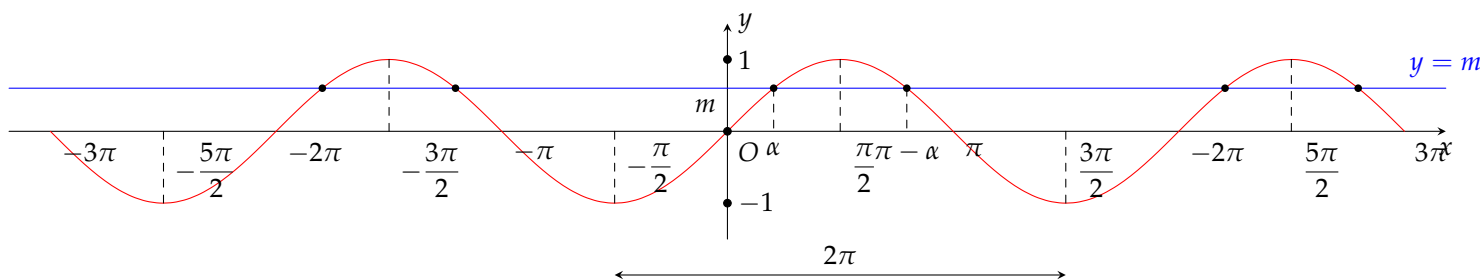
✔ Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.

✔ Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình có nghiệm:

$$x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } x = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin \alpha = m$.



a) Một số trường hợp đặc biệt

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\sin u = \sin v \Leftrightarrow u = v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $u = \pi - v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) $\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

**Ví dụ 2**

Giải các phương trình sau

a) $\sin x = \frac{1}{2}$.

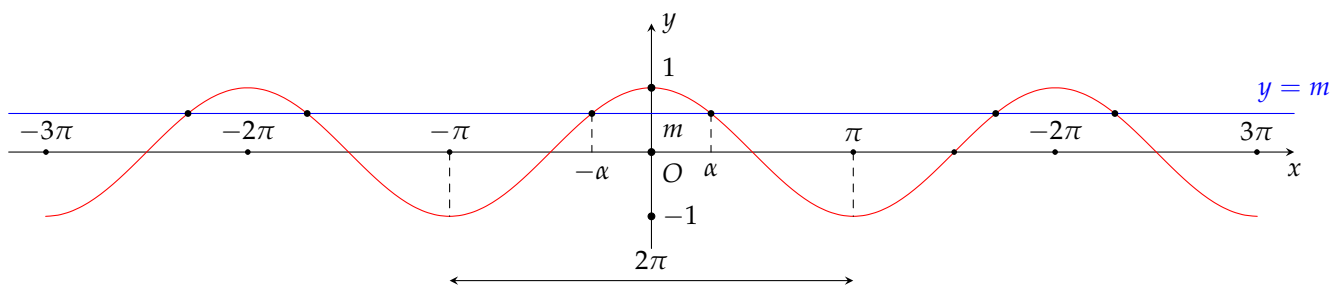
b) $\sin x = -\frac{3}{2}$.

c) $\sin 2x = \sin 3x$.

3. Phương trình $\cos x = m$ **Định nghĩa 5.3.** Xét phương trình $\cos x = m$.✔ Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.✔ Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình có nghiệm

$$x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } x = -\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $[0; \pi]$ sao cho $\cos \alpha = m$.

a) Một số trường hợp đặc biệt

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $u = -v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

c) $\cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = -a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

Ví dụ 3

Giải các phương trình sau

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$.

b) $\cos 2x = \cos (x + 60^\circ).$

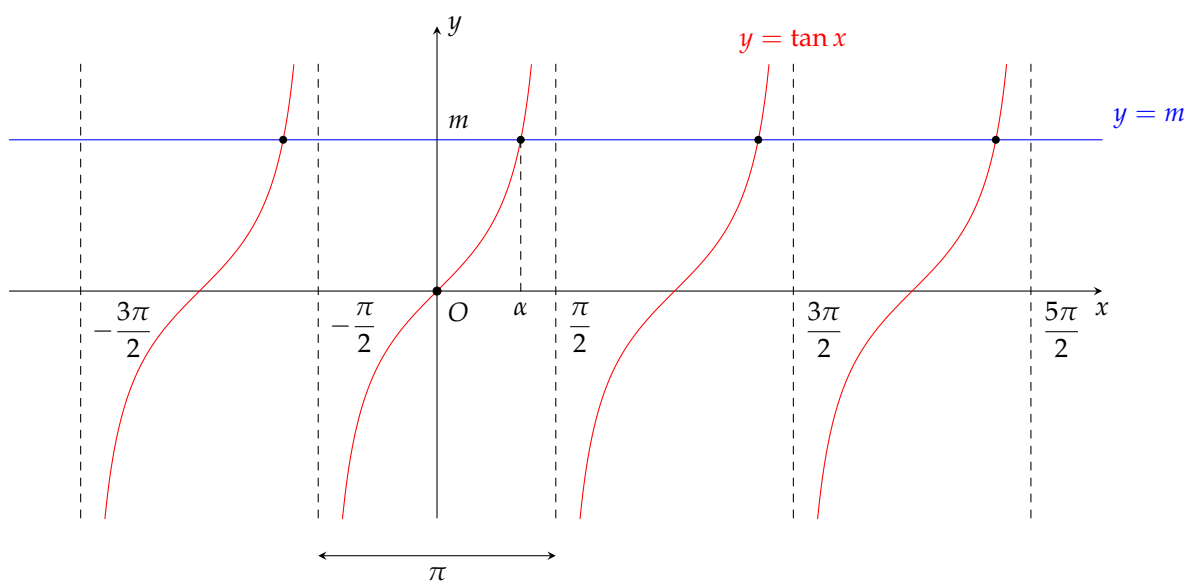
c) $\cos 3x = \sin x.$

4. Phương trình $\tan x = m$

Định nghĩa 5.4. Với mọi số thực m , phương trình $\tan x = m$ có nghiệm

$$x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan \alpha = m$.



! $\tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

Ví dụ 4

Giải các phương trình sau

a) $\tan x = \sqrt{3}.$

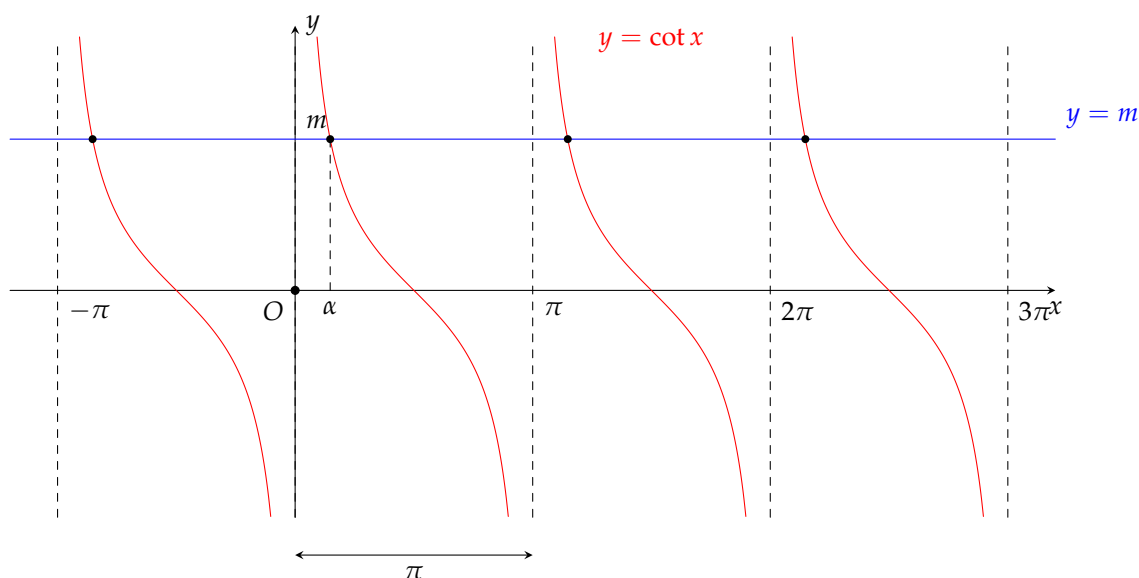
b) $\tan 2x = \tan \frac{\pi}{11}.$

5. Phương trình $\cot x = m$

Định nghĩa 5.5. Với mọi số thực m , phương trình $\cot x = m$ có nghiệm

$$x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

với α là góc thuộc $(0; \pi)$ sao cho $\cot \alpha = m$.



⚠ $\cot x = \cot a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

Ví dụ 5

Giải các phương trình sau

a) $\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

b) $\cot 3x = \cot \frac{\pi}{7}.$

6. Giải phương trình lượng giác bằng máy tính cầm tay

Ta có thể giải phương trình lượng giác dạng $\sin x = m$, $\cos x = m$, $\tan x = m$ và $\cot x = m$ bằng máy tính cầm tay như trong ví dụ sau

Ví dụ 6

Sử dụng máy tính cầm tay để giải các phương trình sau

a) $\sin x = -\frac{1}{2}.$ Kết quả ghi theo đơn vị radian.

b) $\cot x = 3.$ Kết quả ghi theo đơn vị độ.

⚠ Để giải phương trình $\cot x = m (m \neq 0)$, ta giải phương trình $\tan x = \frac{1}{m}.$

B MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Phương trình lượng giác cơ bản dùng Radian

$$\checkmark \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\checkmark \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\checkmark \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\checkmark \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 1

Giải phương trình $\sin x = 1$.

$$\text{Q. } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 2

Giải phương trình $\cos x = 1$.

$$\text{Q. } x = 2k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 3

Giải phương trình $\sin\left(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

$$\text{Q. } x = \frac{10\pi}{9} + \frac{k8\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 4

Giải phương trình $\tan x - 1 = 0$.

$$\text{Q. } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 5

Giải phương trình $\sqrt{3} \tan x - 1 = 0$.

$$\text{Q. } x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

**Ví dụ 6**

Giải phương trình $\cot 3x = \cot x$.

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Dạng 2 Phương trình lượng giác cơ bản dùng độ

$$\checkmark \sin x = \sin \alpha^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \alpha^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\checkmark \cos x = \cos \alpha^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = -\alpha^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\checkmark \tan x = \tan \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\checkmark \cot x = \cot \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 1

Tìm góc lượng giác x sao cho:

a) $\sin x = \sin 55^\circ$;

c) $\tan x = \tan 67^\circ$;

b) $\cos x = \cos(-87^\circ)$;

d) $\cot x = \cot(-83^\circ)$.

Ví dụ 2

Giải các phương trình sau:

a) $\sin(x + 20^\circ) = \frac{1}{2}$;

b) $\sin(x + 30^\circ) = \sin(x + 60^\circ)$.

Ví dụ 3

Giải phương trình $\sin 2x = \sin(60^\circ - 3x)$.

Ví dụ 4

Giải phương trình $\cos 2x = \cos (45^\circ - x)$.

Ví dụ 5

Giải phương trình: $\sqrt{3} \tan \left(\frac{x}{2} + 15^\circ \right) = 1$.

Dạng 3 Phương trình đưa về phương trình lượng giác cơ bản

Lưu ý một số phương trình sau:

$$\checkmark \sin u = -\sin v \Leftrightarrow \sin u = \sin(-v).$$

$$\checkmark \cos u = -\sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos \left(\frac{\pi}{2} + v \right).$$

$$\checkmark \sin u = \cos v \Leftrightarrow \sin u = \sin \left(\frac{\pi}{2} - v \right).$$

$$\checkmark \tan u = -\tan v \Leftrightarrow \tan u = \tan(-v).$$

$$\checkmark \sin u = -\cos v \Leftrightarrow \sin u = \sin \left(v - \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\checkmark \tan u = \cot v \Leftrightarrow \tan u = \tan \left(\frac{\pi}{2} - v \right).$$

$$\checkmark \cos u = -\cos v \Leftrightarrow \cos u = \cos(\pi - v).$$

$$\checkmark \cos u = \sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos \left(\frac{\pi}{2} - v \right).$$

$$\checkmark \tan u = -\cot v \Leftrightarrow \tan u = \tan \left(\frac{\pi}{2} + v \right).$$

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1

Giải phương trình: $\sin 2x = \cos 3x$.

Ví dụ 2

Giải phương trình: $\sin 4x - \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 0$.

**Ví dụ 3**

Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x + \cos 4x = 0$.

b) $\cos 3x = -\cos 7x$.

Ví dụ 4

Giải phương trình: $\cos^2 2x = \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Ví dụ 5

Giải phương trình: $\sin x + \sin 2x = 0$.

Dạng 4 Toán thực tế liên môn**Ví dụ 1**

Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t) = 29 + 3 \sin \frac{\pi}{12} (t - 9).$$

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ.

a) Tính nhiệt độ lúc 12 giờ trưa.

b) Tính thời gian nhiệt độ thấp nhất trong ngày.

Ví dụ 2

Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182} \cdot (t - 80) \right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 \leq t \leq 365.$$

Hỏi thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?

Ví dụ 3

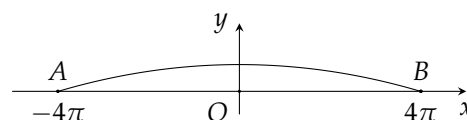
Giả sử một vật dao động điều hòa xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2 \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right)$$

Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Ví dụ 4

Một cây cầu có dạng cung AB của đồ thị hàm số $y = 4,2 \cdot \cos \frac{x}{8}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở hình bên. Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3 m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 12,5 m.



Ví dụ 5

Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500$ m/s hợp với phương ngang một góc α . Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + x \tan \alpha$, ở đó $g = 10$ m/s² là gia tốc trọng trường.

- Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).
- Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22 000 (m).



C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

b) $\sin \left(x - \frac{\pi}{7} \right) = \sin \frac{2\pi}{7}$.

c) $\sin 4x - \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 0$.

Bài 2

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\cos 4x = \cos \frac{5\pi}{12}$.

c) $\cos^2 x = 1$.

Bài 3

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\tan x = \tan 55^\circ$.

b) $\tan \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$.

Bài 4

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\cot \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} \right) = -1$.

b) $\cot 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

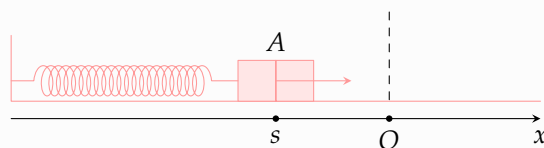
Bài 5

Tại các giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = \cos x$ và $y = \sin x$ giao nhau?

Bài 6

Trong hình dưới, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Toạ độ s (cm) của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10 \sin \left(10t + \frac{\pi}{2} \right)$. Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3}$ cm ?

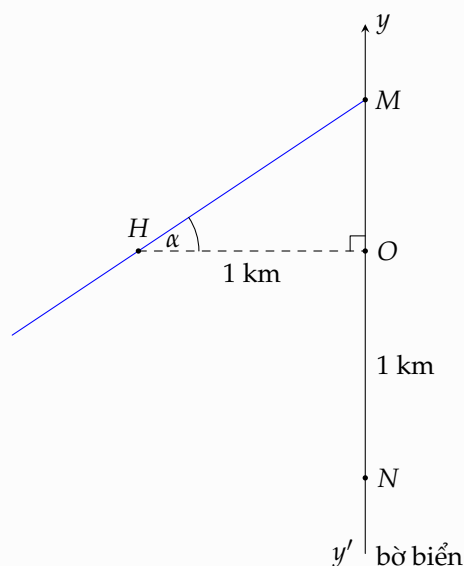
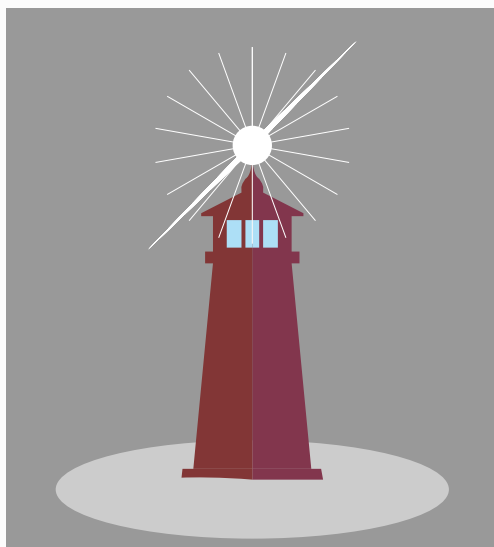
(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)



Bài 7

Trong hình dưới, ngọn đèn trên hải đăng H cách bờ biển yy' một khoảng $HO = 1$ km. Đèn xoay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\frac{\pi}{10}$ rad/s và chiếu hai luồng ánh sáng về hai phía đối diện nhau. Khi đèn xoay, điểm M mà luồng ánh sáng của hải đăng rơi vào bờ biển chuyển động dọc theo bờ.

(Theo <https://www.mnhs.org/splitrock/learn/technology>)



- a) Ban đầu luồng sáng trùng với đường thẳng HO . Viết hàm số biểu thị toạ độ y_M của điểm M trên trục Oy theo thời gian t .



b) Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với tọa độ $y_N = -1$ (km). Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.

.....

.....

.....

.....



D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Phương trình $(\sqrt{3} \tan x + 1)(\sin^2 x + 1) = 0$ có nghiệm là

- (A) $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. (B) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. (C) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. (D) $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 2

Phương trình $\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$ có nghiệm là

- (A) $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$. (B) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. (C) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. (D) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 3

Khẳng định nào sau đây là đúng

- (A) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$. (B) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.
 (C) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$. (D) $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Câu 4

Tập nghiệm S của phương trình $3 \tan x - \sqrt{3} = 0$ là

- (A) $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. (B) $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.



Ⓒ $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Ⓓ $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 5

Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = \sin x$ là

Ⓐ $S = \left\{ k2\pi; \frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Ⓑ $S = \left\{ k2\pi; \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Ⓒ $S = \left\{ k2\pi; -\frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Ⓓ $S = \{k2\pi; \pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

Câu 6

Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{-1}{2\sqrt{2}\cos x}$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ là

Ⓐ $\frac{9\pi}{8}.$

Ⓑ $\frac{15\pi}{8}.$

Ⓒ $5\pi.$

Ⓓ $\frac{11\pi}{8}.$

Câu 7

Phương trình lượng giác $2\sin x + \sqrt{2} = 0$ có nghiệm là

Ⓐ $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Ⓑ $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Ⓒ $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Ⓓ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 8

Phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ có tập nghiệm là:

Ⓐ $\left\{ -\frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Ⓑ $\left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Ⓒ $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Ⓓ $\left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 9

Nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ là

(A) $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

(B) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ và $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$.

(C) $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

(D) $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 10

Phương trình $\cos 2x = m$ vô nghiệm khi m thỏa

(A) $m < -1$.

(B) $m > 1$.

(C) $-1 \leq m \leq 1$.

(D) $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$.

Câu 11

Giải phương trình $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

(A) $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

(B) $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

(C) $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

(D) $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 12

Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ là

(A) $-\frac{\pi}{3}$.

(B) $-\frac{\pi}{6}$.

(C) $-\frac{5\pi}{6}$.

(D) $-\frac{2\pi}{3}$.



Câu 13

Phương trình $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ có nghiệm là

(A) $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(B) $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(C) $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(D) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 14

Nghiệm của phương trình $2 \cos \frac{x}{2} + \sqrt{3} = 0$ là

(A) $x = \pm \frac{5\pi}{3} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(B) $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(C) $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

(D) $x = \pm \frac{5\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 15

Phương trình lượng giác: $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$ có nghiệm là

(A) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x = \frac{7\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$

Câu 16

Khẳng định nào sau đây là đúng

(A) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}.$

(B) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi; k \in \mathbb{Z}.$

(C) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi; k \in \mathbb{Z}.$

(D) $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi; k \in \mathbb{Z}.$

Câu 17

Đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = \cos x$ tại những điểm có hoành độ là

- (A) $\pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 (B) $\pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 (C) $\pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 (D) $\pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 18

Phương trình $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0; 3\pi)$?

- (A) 4.
 (B) 1.
 (C) 6.
 (D) 2.

Câu 19

Trong các phương trình sau, phương trình nào vô nghiệm?

- (A) $\sin x - \cos x = 1$.
 (B) $\sin x = -\frac{3}{4}$.
 (C) $\cot x = 2018$.
 (D) $\sin x = 2$.

Câu 20

Phương trình $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ có nghiệm là

- (A) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.
 (B) $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$.
 (C) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$.
 (D) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}$.

Câu 21

Tập nghiệm của phương trình $\tan \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ là

- (A) $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 (B) $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 (C) $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 (D) $S = \left\{ \frac{-\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.



Câu 22

Giải phương trình $2 \cos x - 1 = 0$.

A $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 23

Phương trình: $\sin x = \cos 5x$ có các nghiệm là

A $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ và $x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

B $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \frac{-\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

C $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$ và $x = \frac{-\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

D $x = \frac{-\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$ và $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 24

Nghiệm của phương trình $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ là

A $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

B $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

C $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

D $x = \frac{25\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Câu 25

Số nghiệm của phương trình $\sin x - \frac{1}{2} = 0$ trên khoảng $(0; 4\pi)$ là

A 4.

B 3.

C 2.

D 1.

Câu 26

Phương trình $\sin x = m$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1. \end{cases}$

B $-1 \leq m \leq 1$.

C $m < -1$.

D $m > 1$.



Câu 27

Phương trình $\sin^2 x + \cos 2x = -\cos^2 x$ có nghiệm là

- ☐ A $x = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
☐ B $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
☐ C $x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
☐ D $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 28

Cho hai phương trình $\cos 3x - 1 = 0$ (1); $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ (2). Tập các nghiệm của phương trình (1) đồng thời là nghiệm của phương trình (2) là

- ☐ A $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
☐ B $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
☐ C $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
☐ D $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 29

Cho phương trình $\sin x - \sin 2x + \sin 3x = 0$. Nghiệm của phương trình là

- ☐ A $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$
☐ B $x = k\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
☐ C $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
☐ D $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 30

Tìm số nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ trên đoạn $[0; \pi]$.

- ☐ A 2.
 ☐ B 1.
 ☐ C 3.
 ☐ D 4.



Câu 31

Nghiệm lớn nhất của phương trình $2 \cos 2x - 1 = 0$ trong đoạn $[0; \pi]$ là

- Ⓐ $x = \pi$. Ⓑ $x = \frac{11\pi}{12}$. Ⓒ $x = \frac{2\pi}{3}$. Ⓓ $x = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 32

Tìm tập nghiệm của phương trình $2 \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{3} = 0$.

- Ⓐ $\left\{ -\frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}, \frac{13\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z} \right\}$. Ⓑ $\left\{ \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 Ⓒ $\left\{ \frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}, -\frac{13\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z} \right\}$. Ⓓ $\left\{ \frac{7\pi}{36} + k2\pi, -\frac{13\pi}{36} + k2\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 33

Trong các phương trình sau, phương trình nào vô nghiệm?

- Ⓐ $\sin x - \cos x = 1$. Ⓑ $\sin x = -\frac{3}{4}$. Ⓒ $\cot x = 2018$. Ⓓ $\sin x = 2$.

Câu 34

Phương trình $\sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(x + \frac{3\pi}{4} \right)$ có tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ bằng

- Ⓐ $\frac{7\pi}{2}$. Ⓑ π . Ⓒ $\frac{3\pi}{2}$. Ⓓ $\frac{\pi}{4}$.

§6. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

A BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Góc lượng giác nào tương ứng với chuyển động quay $3\frac{1}{5}$ vòng ngược chiều kim đồng hồ?

- Ⓐ $\frac{16\pi}{5}$. Ⓑ $\left(\frac{16}{5}\right)^\circ$. Ⓒ 1152° . Ⓓ 1152π .

Câu 2

Trong trường hợp nào dưới đây $\cos \alpha = \cos \beta$ và $\sin \alpha = -\sin \beta$?

- Ⓐ $\beta = -\alpha$. Ⓑ $\beta = \pi - \alpha$. Ⓒ $\beta = \pi + \alpha$. Ⓓ $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$.

Câu 3

Khẳng định nào sau đây đúng?

- Ⓐ Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn. Ⓑ Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
Ⓒ Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn. Ⓓ Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn.

Câu 4

Nghiệm âm lớn nhất của phương trình lượng giác $\cos 2x = \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ là

- Ⓐ $-\frac{\pi}{9}$. Ⓑ $-\frac{5\pi}{3}$. Ⓒ $-\frac{7\pi}{9}$. Ⓓ $-\frac{13\pi}{9}$.

Câu 5

Số nghiệm của phương trình $\tan x = 3$ trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{3}\right)$ là

- Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.



Câu 6

Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t) = 29 + 3 \sin \frac{\pi}{12}(t - 9)$$

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là bao nhiêu độ C và vào lúc mấy giờ?

(Theo <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0168192385900139>)

- Ⓐ 32°C, lúc 15 giờ. Ⓑ 29°C, lúc 9 giờ. Ⓒ 26°C, lúc 3 giờ. Ⓓ 26°C, lúc 0 giờ.

B BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1

Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 45 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều thuận. Sau 3 giây, quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

Bài 2

Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính:

a) $\sin \alpha$;

b) $\sin 2\alpha$;

c) $\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right)$.

Bài 3

Chứng minh đẳng thức lượng giác:

a) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$;

b) $\cos^4 \alpha - \cos^4 \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \cos 2\alpha$.

Bài 4

Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin 2x = 0$ là bao nhiêu?

Bài 5

Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x + \cos 3x = 0$ b) $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4};$ c) $\sin x + \sin 2x = 0.$

Bài 6

Độ sâu h (m) của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,8 \cos 0,5t + 4$.

(Theo <https://noc.ac.uk/files/documents/business/an-introduction-to-tidalmodelling.pdf>)

- Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là bao nhiêu mét?
- Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,6 m để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số côsin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thủy triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thủy. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Bài 7

Cho vận tốc v (cm/s) của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức $v = -3 \sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right).$

(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

- Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất;
- Vận tốc con lắc bằng 1,5 cm/s.

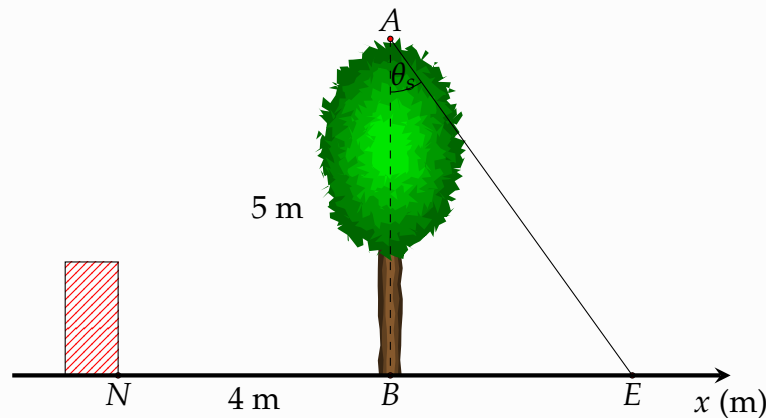
Bài 8

Trong hình vẽ, cây xanh AB nằm trên đường xích đạo được trồng vuông góc với mặt đất và có chiều cao 5 m. Bóng của cây là BE . Vào ngày xuân phân và hạ phân, điểm E di chuyển trên đường thẳng Bx . Góc thiên đỉnh $\theta_s = (AB, AE)$ phụ thuộc vào vị trí của Mặt Trời và thay đổi theo thời gian trong ngày theo công thức

$$\theta_s(t) = \frac{\pi}{12}(t - 12) \text{ rad}$$

với t là thời gian trong ngày (theo đơn vị giờ, $6 < t < 18$).

(Theo <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/solar-hour-angle>)



- Viết hàm số biểu diễn tọa độ của điểm E trên trục Bx theo t .
- Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với tọa độ là $x_N = -4$ (m). Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

§1. DÃY SỐ

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Định nghĩa dãy số

Định nghĩa 1.1. Hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (hay gọi tắt là dãy số), nghĩa là

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n = u(n). \end{aligned}$$

Dãy số trên được kí hiệu là (u_n) . Dạng khai triển của dãy số (u_n) là: $u_1; u_2; \dots; u_n; \dots$

⚠ Chú ý:

- a) $u_1 = u(1)$ gọi là số hạng đầu, $u_n = u(n)$ gọi là số hạng thứ n (hay số hạng tổng quát) của dãy số.
b) Nếu $u_n = C$ với mọi n , ta nói (u_n) là dãy số không đổi.

Ví dụ 1

Cho hàm số:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) = n^2. \end{aligned}$$

Hàm số trên có là dãy số hay không? Nếu có, hãy tìm số hạng thứ nhất, thứ hai, thứ ba và số hạng tổng quát của dãy số.

Ví dụ 2

Cho hàm số:

$$\begin{aligned} v : \{1; 2; 3; 4; 5\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto v(n) = 2n. \end{aligned}$$

Tính $v(1), v(2), v(3), v(4), v(5)$.

Định nghĩa 1.2. Hàm số u xác định trên tập hợp $M = \{1; 2; 3; \dots; m\}$ thì được gọi là một dãy số hữu hạn. Dạng khai triển của dãy số này là $u_1, u_2, \dots, u_m$, trong đó u_1 là số hạng đầu và u_m là số hạng cuối.

Ví dụ 3

Dãy gồm 10 số tự nhiên lẻ đầu tiên $1; 3; 5; \dots; 19$ có phải là dãy số hữu hạn không? Nếu có, tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số.

Ví dụ 4

Cho dãy số:

$$u : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u_n = n^3.$$

- Hãy cho biết dãy số trên là hữu hạn hay vô hạn.
- Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

Ví dụ 5

Cho 5 hình tròn theo thứ tự có bán kính $1; 2; 3; 4; 5$.

- Viết dãy số chỉ diện tích của 5 hình tròn này.
- Tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số trên.

2. Cách xác định dãy số

Ví dụ 6

Cho các dãy số $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ được xác định như sau:

- $a_1 = 0; a_2 = 1; a_3 = 2; a_4 = 3; a_5 = 4.$
- $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_n = c_{n-1} + 1 \end{cases} \quad (n \geq 2).$
- $b_n = 2n.$
- d_n là chu vi của đường tròn có bán kính $n.$

Tìm bốn số hạng đầu tiên của các dãy số trên.



Định nghĩa 1.3. Thông thường một dãy số có thể được cho bằng các cách sau:

- a) Cách 1: Liệt kê các số hạng (với các dãy số hữu hạn).
- b) Cách 2: Cho công thức của số hạng tổng quát u_n .
- c) Cách 3: Cho hệ thức truy hồi, nghĩa là
 - ✔ Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu tiên);
 - ✔ Cho một công thức tính u_n theo u_{n-1} (hoặc theo vài số hạng đứng ngay trước nó).
- d) Cách 4: Cho bằng cách mô tả.

Ví dụ 7

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n-1}{3n+1}$.

- a) Tìm ba số hạng đầu tiên.
- b) Tính u_{50} và u_{99} .

Ví dụ 8

Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad (n \geq 3). \end{cases}$$

Tính u_5 .

Ví dụ 9

Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

- a) Chứng minh $u_2 = 2 \cdot 3; u_3 = 2^2 \cdot 3; u_4 = 2^3 \cdot 3$.
- b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .



3. Dãy số tăng, dãy số giảm

Ví dụ 10

Cho hai dãy số (a_n) và (b_n) được xác định như sau: $a_n = 3n + 1$; $b_n = -5n$.

a) So sánh a_n và a_{n+1} , $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) So sánh b_n và b_{n+1} , $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Định nghĩa 1.4. Cho dãy số (u_n) .

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1} > u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1} < u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 11

Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau

a) (a_n) với $a_n = \frac{1}{n}$;

b) (b_n) với $b_n = n^2$;

c) (c_n) với $c_n = (-2)^n$.

Ví dụ 12

Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau

a) (a_n) với $a_n = \frac{n}{n+1}$;

b) (b_n) với $b_n = n - n^2$.

Ví dụ 13

Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau

a) (u_n) với $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$;

b) (x_n) với $x_n = \frac{n+2}{4^n}$;

c) (t_n) với $t_n = (-1)^n \cdot n^2$.

4. Dãy số bị chặn

Ví dụ 14

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n}$. So sánh các số hạng của dãy số với 0 và 1.

Định nghĩa 1.5.

a) Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho

$$u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho

$$u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

c) Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại các số M và m sao cho

$$m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ví dụ 15

Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{2^n}$.

Ví dụ 16

Xét tính bị chặn của các dãy số sau

a) (a_n) với $a_n = \cos \frac{\pi}{n}$;

b) (b_n) với $b_n = \frac{n}{n+1}$.

B MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Số hạng tổng quát, biểu diễn dãy số

Để tìm số hạng tổng quát của một dãy bất kỳ khi biết một vài số hạng đầu của dãy số ta làm như sau

- ✔ Phân tích các số hạng sau theo các số hạng đã biết theo một quy luật nào đó.



- ☑ Dự đoán số hạng tổng quát
- ☑ Kiểm tra bằng cách thay lần lượt các giá trị $n \in \mathbb{N}^*$ vào công thức tổng quát (Chứng minh bằng phương pháp quy nạp).

Để biểu diễn một dãy số khi biết công thức tổng quát ta lần lượt thay $n \in \mathbb{N}^*$ vào công thức tổng quát để tìm các số hạng thứ nhất, thứ hai, ...

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1

(NB) Xác định số hạng đầu là số hạng tổng quát của dãy số (u_n) các số tự nhiên lẻ 1, 3, 5, 7, ...

$$u_n = 2n - 1$$

Ví dụ 2

(NB) Xác định số hạng đầu là số hạng tổng quát của dãy số (v_n) các số nguyên dương chia hết cho 5: 5, 10, 15, 20, ...

$$v_n = 5n$$

Ví dụ 3

(NB) Viết năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 3n - 2$.

$$u_{100} = 298$$

Ví dụ 4

(NB) Cho dãy số xác định bằng hệ thức truy hồi: $u_1 = 1, u_n = 3u_{n-1} + 2$ với $n \geq 2$. Viết ba số hạng đầu của dãy số này.

$$u_1 = 1, u_2 = 5, u_3 = 17$$

Ví dụ 5

(NB) Dãy số (u_n) cho bởi hệ thức truy hồi: $u_1 = 1, u_n = n \cdot u_{n-1}$ với $n \geq 2$. Viết năm số hạng đầu của dãy số và dự đoán công thức tổng quát u_n .

$$u_n = n!$$



Dạng 2 Tìm số hạng cụ thể của dãy số

Để tìm số hạng cụ thể của dãy số ta làm như sau

- ✓ Với trường hợp dãy số đã cho biết công thức tổng quát của dãy số thì ta chỉ cần thay giá trị tương ứng của số hạng đó vào công thức tổng quát.
- ✓ Với trường hợp dãy số cho bởi công thức truy hồi hoặc dưới dạng thì ta phải tìm lần lượt từ những số hạng đầu tiên cho đến số đứng trước số cần tìm trong dãy.

Ví dụ 1

Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3 .

$u_3 = -\frac{8}{3}$

☐ A $u_3 = -\frac{8}{3}$.

☐ B $u_3 = 2$.

☐ C $u_3 = -2$.

☐ D $u_3 = \frac{8}{3}$.

Ví dụ 2

Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$. Tìm số hạng u_5 .

$u_5 = \frac{7}{4}$

☐ A $u_5 = \frac{1}{4}$.

☐ B $u_5 = \frac{7}{4}$.

☐ C $u_5 = \frac{17}{12}$.

☐ D $u_5 = \frac{71}{39}$.

Ví dụ 3

Cho dãy số u_n bao gồm các số nguyên tố. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

$u_5 = 11$

Ví dụ 4

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

$u_5 = 15$

☐ A 11.

☐ B 15.

☐ C 16.

☐ D 12.

**Ví dụ 5**

Cho dãy số xác định bằng hệ thức truy hồi

$$u_1 = 1, u_n = 3u_{n-1} + 2 \text{ với } n \geq 2$$

Viết ba số hạng đầu của dãy số này.

$u_5 = 17$

Ví dụ 6

Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Số 20 là số hạng thứ mấy trong dãy?

số hạng thứ 6

Dạng**3****Xét tính tăng giảm của dãy số**

a) Phương pháp 1. Xét dấu của hiệu số $u_{n+1} - u_n$.

(a) Nếu $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.

(b) Nếu $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

b) Phương pháp 2. Nếu $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

(a) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.

(b) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Nếu $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

(a) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.

(b) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

c) Phương pháp 3. Nếu dãy số (u_n) cho bởi hệ thức truy hồi thì thường dùng phương pháp quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (hoặc $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$).

Ví dụ 1

Xét sự tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$.

dãy không tăng không giảm



Ví dụ 2

Xét tính tăng giảm của dãy số sau (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

dãy số tăng

Ví dụ 3

Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+2}$.

dãy số tăng

Ví dụ 4

Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{3^n}$.

dãy số giảm

Ví dụ 5

Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 1}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

dãy số tăng

Dạng 4 Xét tính bị chặn của dãy số

- ✔ Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn trên bởi M , ta chứng minh $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ✔ Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi m , ta chứng minh $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ✔ Để chứng minh dãy số bị chặn ta chứng minh nó bị chặn trên và bị chặn dưới.
 - Nếu dãy số (u_n) tăng thì bị chặn dưới bởi u_1 .
 - Nếu dãy số (u_n) giảm thì bị chặn trên bởi u_1 .

Ví dụ 1

Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n}{n^2+9}$ bị chặn trên bởi $\frac{1}{2}$.

dãy số đã cho bị chặn trên bởi $\frac{1}{2}$



Ví dụ 2

Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \frac{8n+3}{3n+5}$ là một dãy số bị chặn.  dãy số bị chặn

Ví dụ 3

Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n+1}{n+3}$.  dãy số bị chặn

Ví dụ 4

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \frac{u_n+2}{u_n+1}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy (u_n) bị chặn trên bởi số $\frac{3}{2}$ và bị chặn dưới bởi số 1.

Ví dụ 5

Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \sin n + \cos n$.  dãy số bị chặn

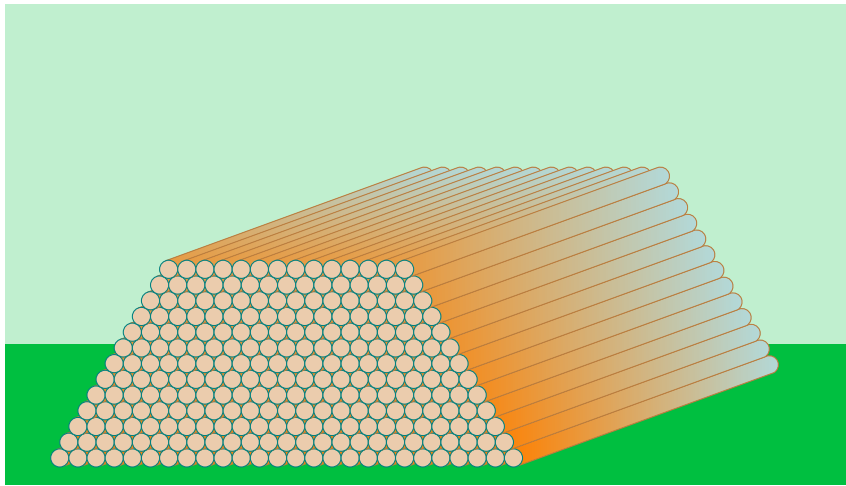
Dạng

5

Toán thực tế về dãy số

Ví dụ 1

Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau một cột gỗ.



- Gọi $u_1 = 25$ là số cột gỗ có ở hàng dưới cùng của chồng cột gỗ, u_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ dưới lên trên. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.
- Gọi $v_1 = 14$ là số cột gỗ có ở hàng trên cùng của chồng cột gỗ, v_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ trên xuống dưới. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.

Ví dụ 2

Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau. Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

- Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.
- Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.
- Dự đoán công thức của P_n tính theo n .

Ví dụ 3

Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 triệu đồng. Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có

$$s_1 = 200, s_n = s_{n-1} + 25 \text{ với } n \geq 2.$$

- Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty.
- Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

Ví dụ 4

Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$$A_n = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^n.$$

- Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.
- Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

Ví dụ 5

Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất 0,8% số tiền còn lại của mỗi tháng. Gọi A_n , ($n \in \mathbb{N}$) là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

- Tìm lần lượt $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.
- Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n) .

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Tìm u_2, u_3 và dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n của dãy số:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n} \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

Bài 2

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$. Tìm u_1, u_2, u_3 và dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n .



Bài 3

Xét tính tăng, giảm của dãy số (y_n) với $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Bài 4

Xét tính bị chặn của các dãy số sau

a) (a_n) với $a_n = \sin^2 \frac{n\pi}{3} + \cos \frac{n\pi}{4}$; b) (u_n) với $u_n = \frac{6n-4}{n+2}$.

Bài 5

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$. Chứng minh (u_n) là dãy số tăng và bị chặn.

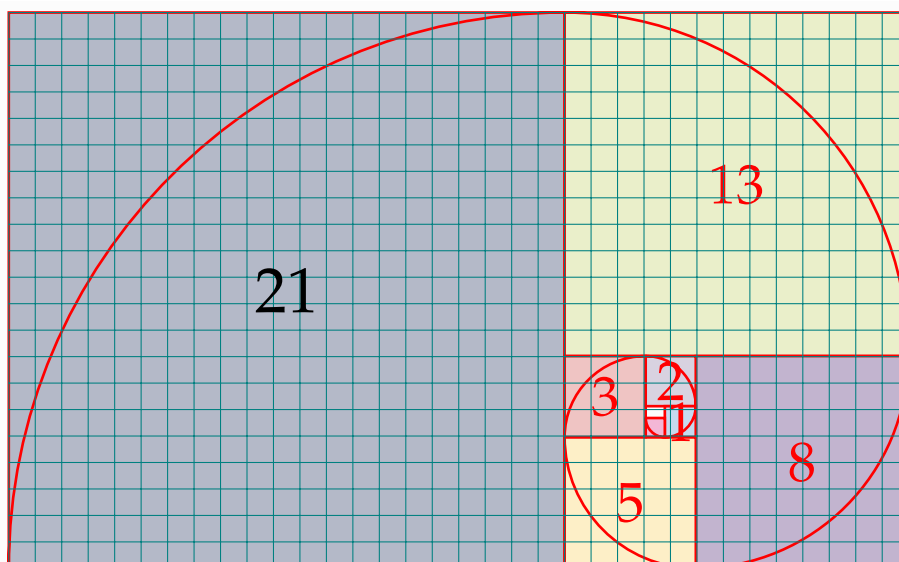
Bài 6

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{na+2}{n+1}$. Tìm giá trị của a để

a) (u_n) là dãy số tăng; b) (u_n) là dãy số giảm.

Bài 7

Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như Hình vẽ. Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhận xét gì về dãy số trên?





D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

(A) $1; 1; 1; 1; 1; 1; \dots$

(B) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$

(C) $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$

(D) $1; 3; 5; 7; 9; \dots$

Câu 2

Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$. Tìm số hạng u_5 .

(A) $u_5 = \frac{1}{4}$.

(B) $u_5 = \frac{7}{4}$.

(C) $u_5 = \frac{17}{12}$.

(D) $u_5 = \frac{71}{39}$.

Câu 3

Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 0$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là lần lượt là những số nào dưới đây?

(A) $-1; 2; 5$.

(B) $-1; 3; 7$.

(C) $1; 4; 7$.

(D) $4; 7; 10$.



Câu 4

Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3 .

(A) $u_3 = -\frac{8}{3}$.

(B) $u_3 = 2$.

(C) $u_3 = -2$.

(D) $u_3 = \frac{8}{3}$.

Câu 5

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4 .

(A) $u_4 = \frac{2}{3}$.

(B) $u_4 = 1$.

(C) $u_4 = \frac{14}{27}$.

(D) $u_4 = \frac{5}{9}$.

Câu 6

Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{-n}{n+1}$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

(A) $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}$.

(B) $-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; -\frac{5}{6}$.

(C) $-\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; -\frac{5}{6}; -\frac{6}{7}$.

(D) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}$.

Câu 7

Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot 2n$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $u_3 = -6$.

(B) $u_2 = 4$.

(C) $u_4 = -8$.

(D) $u_1 = -2$.

Câu 8

Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

(A) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}$.

(B) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$.

(C) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{26}$.

(D) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$.



Câu 9

Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

- ☐ A $u_n = (-2)^n$.
 ☐ B $u_n = \frac{2}{3^n}$.
 ☐ C $u_n = \frac{3}{n}$.
 ☐ D $u_n = 2^n$.

Câu 10

Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 3^n$. Tìm số hạng u_{2n-1} .

- ☐ A $u_{2n-1} = 3^{2(n-1)}$.
 ☐ B $u_{2n-1} = 3^{2n} - 1$.
☐ C $u_{2n-1} = 3^n \cdot 3^{n-1}$.
 ☐ D $u_{2n-1} = 3^2 \cdot 3^n - 1$.

Câu 11

Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số bị chặn?

- ☐ A $u_n = n + \frac{1}{n}$.
 ☐ B $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$.
 ☐ C $u_n = \frac{n}{n+1}$.
 ☐ D $u_n = 2^n + 1$.

Câu 12

Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2; 0; 2; 4; 6; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là công thức nào dưới đây?

- ☐ A $u_n = -2(n+1)$.
 ☐ B $u_n = -2n$.
 ☐ C $u_n = 2n - 4$.
 ☐ D $u_n = n - 2$.

Câu 13

Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

- ☐ A $u_n = \sqrt{n+1}$.
 ☐ B $u_n = n^2$.
 ☐ C $u_n = 3^n$.
 ☐ D $u_n = \frac{1}{2^n}$.

**Câu 14**

Dãy số có các số hạng cho bởi: $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$ có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

☐ A $u_n = \frac{n+1}{n}$.

☐ B $u_n = \frac{n-1}{n}$.

☐ C $u_n = \frac{n^2 - n}{n+1}$.

☐ D $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Câu 15

Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

☐ A $u_n = 2^n$.

☐ B $u_n = 2^{n+1}$.

☐ C $u_n = 2$.

☐ D $u_n = n^{n-1}$.

Câu 16

Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n - 1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

☐ A $u_n = 2 - (n-1)^2$.

☐ B $u_n = 2 + n^2$.

☐ C $u_n = 2 + (n-1)^2$.

☐ D $u_n = 2 + (n+1)^2$.

Câu 17

Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

☐ A $u_n = n^2$.

☐ B $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$.

☐ C $u_n = \sqrt{n+2}$.

☐ D $u_n = \frac{1}{2^n}$.

Câu 18

Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

☐ A $u_n = \frac{1}{n}$.

☐ B $u_n = \frac{1}{2^n}$.

☐ C $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$.

☐ D $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$.



Câu 19

Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{3n-1}{3n+1}$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

☐ A $\frac{1}{2}$.

☐ B $\frac{1}{3}$.

☐ C 1.

☐ D 0.

Câu 20

Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n+5}{5n-4}$. Số $\frac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

☐ A 9.

☐ B 6.

☐ C 10.

☐ D 8.

Câu 21

Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn trên?

☐ A $u_n = n^2$.

☐ B $u_n = \frac{1}{n}$.

☐ C $u_n = 2^n$.

☐ D $u_n = \sqrt{n+1}$.

Câu 22

Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

☐ A $u_n = -\frac{n}{n+1}$.

☐ B $u_n = \frac{n+1}{n}$.

☐ C $u_n = \frac{-n+1}{n}$.

☐ D $u_n = -\frac{n+1}{n}$.

Câu 23

Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 2 \cdot 3^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Công thức truy hồi của dãy số đó là:

☐ A $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 6u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$

☐ B $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 3u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$



Ⓒ $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 6u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$

Ⓓ $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 3u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$

Câu 24

Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$.

Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- Ⓐ $u_n = 1 + (-1)^{2n}$. Ⓑ $u_n = n$. Ⓒ $u_n = 1 + n$. Ⓓ $u_n = 1 - n$.

Câu 25

Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1} .

- Ⓐ $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$. Ⓑ $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$.
 Ⓒ $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$. Ⓓ $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$.

Câu 26

Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 2^n$. Tìm số hạng u_{n+1} .

- Ⓐ $u_{n+1} = 2^n + 1$. Ⓑ $u_{n+1} = 2^n \cdot 2$. Ⓒ $u_{n+1} = 2^n + 2$. Ⓓ $u_{n+1} = 2(n+1)$.

Câu 27

Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

- Ⓐ 7. Ⓑ 6. Ⓒ 5. Ⓓ 8.



Câu 28

Cho dãy số (u_n) , với $u_n = (-1)^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.
 ☐ B Dãy số (u_n) là dãy số tăng.
 ☐ C Dãy số (u_n) là dãy số không bị chặn.
 ☐ D Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Câu 29

Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- ☐ A $u_n = \frac{1}{2} - 2n$.
 ☐ B $u_n = \frac{1}{2} + 2n$.
 ☐ C $u_n = \frac{1}{2} + 2(n-1)$.
 ☐ D $u_n = \frac{1}{2} - 2(n-1)$.

Câu 30

Dãy số có các số hạng cho bởi: $-1; 1; -1; 1; -1; \dots$ có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

- ☐ A $u_n = -1$.
 ☐ B $u_n = (-1)^n$.
 ☐ C $u_n = 1$.
 ☐ D $u_n = (-1)^{n+1}$.

Câu 31

Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- ☐ A $u_2 = \frac{5}{2}$.
 ☐ B $u_4 = \frac{31}{8}$.
 ☐ C $u_3 = \frac{15}{4}$.
 ☐ D $u_5 = \frac{63}{16}$.

Câu 32

Cho dãy số (u_n) , với $u_n = 5^{n+1}$. Tìm số hạng u_{n-1} .

- ☐ A $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n-1}$.
 ☐ B $u_{n-1} = 5^{n-1}$.
 ☐ C $u_{n-1} = 5^n$.
 ☐ D $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n+1}$.

Câu 33

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ Dãy số $u_n = \frac{1}{n} - 2$ là dãy tăng. Ⓑ Dãy số $u_n = 2n + \cos \frac{1}{n}$ là dãy tăng.
 Ⓒ Dãy số $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm. Ⓓ Dãy số $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$ là dãy giảm.

Câu 34

Cho dãy số (a_n) , được xác định $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n, n \geq 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- Ⓐ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{93}{16}$. Ⓑ $a_{10} = \frac{3}{512}$.
 Ⓒ $a_n = \frac{3}{2^n}$. Ⓓ $a_{n+1} + a_n = \frac{9}{2^n}$.

Câu 35

Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \sqrt{3} \cos n - \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

- Ⓐ $m = -\frac{1}{2}; M = \frac{1}{2}$. Ⓑ $m = -\sqrt{3} + 1; M = \sqrt{3} - 1$.
 Ⓒ $m = -2; M = 2$. Ⓓ $m = -\frac{1}{2}; M = \sqrt{3} + 1$.

—HẾT—

§2. CẤP SỐ CỘNG

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Cấp số cộng

Định nghĩa 2.1. *Cấp số cộng* là một dãy số (vô hạn hoặc hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số d không đổi, nghĩa là:

$$u_{n+1} = u_n + d \quad \text{với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Số d được gọi là *công sai* của cấp số cộng.

Ví dụ 1

Tìm cấp số cộng trong mỗi dãy số sau

- a) 5; 10; 15; 20; 25; 30.
- b) 1; 2; 4; 8.
- c) 7; 7; 7; 7; 7.

Ví dụ 2

Cho cấp số cộng 3; 6; 9; 12; Tìm số hạng đầu, công sai và u_5 .

Ví dụ 3

Chứng minh mỗi dãy số sau là cấp số cộng. Xác định số hạng đầu và công sai của mỗi cấp số cộng đó.

- a) Dãy số (u_n) với $u_n = 2n + 1$.
- b) Dãy số (v_n) với $u_n = -3n + 5$.

Ví dụ 4

Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng. Tính b theo a và c .

! Nếu (u_n) là cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \quad (k \geq 2).$$

Ví dụ 5

Chứng minh mỗi dãy số sau là cấp số cộng. Xác định công sai của mỗi cấp số cộng đó.

a) 3; 7; 11; 15; 19; 23.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = 9n - 9$.

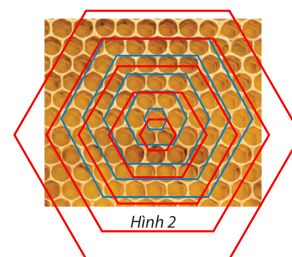
c) Dãy số (v_n) với $v_n = an + b$, trong đó a và b là các hằng số.

Ví dụ 6

Số đo ba góc của một tam giác vuông lập thành cấp số cộng. Tìm số đo ba góc đó.

Ví dụ 7

Mặt cắt của một tổ ong có hình lưới tạo bởi các ô hình lục giác đều. Từ một ô đầu tiên, bước thứ nhất, các ong thợ tạo ra vòng 1 gồm 6 ô lục giác; bước thứ hai, các ong thợ tạo ra vòng 2 gồm 12 ô bao quanh vòng 1; bước thứ 3, các ong thợ tạo ra vòng 3 gồm 18 ô bao quanh vòng 2; cứ thế tiếp tục. Số ô trên các vòng theo thứ tự có tạo thành cấp số cộng không? Nếu có tìm công sai của cấp số cộng này.



2. Số hạng tổng quát của cấp số cộng

Định lý 2.1. Nếu một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 + (n - 1)d, \quad n \geq 1.$$

Ví dụ 8

Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 9$.



Ví dụ 9

Tìm số hạng tổng quát của các cấp số cộng sau

- a) Cấp số cộng (a_n) có $a_1 = 5$ và $d = -5$;
- b) Cấp số cộng (b_n) có $b_1 = 2$ và $b_{10} = 20$.

Ví dụ 10

Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (c_n) có $c_4 = 80$ và $c_6 = 40$.

3. Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng

Định lý 2.2. Giả sử (u_n) là một cấp số cộng có công sai d . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \quad \text{hay} \quad S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$$

Ví dụ 11

Tính các tổng sau

- a) Tính tổng của 100 số nguyên dương đầu tiên.
- b) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 + u_6 = 20$. Tính tổng 9 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.
- c) Cho cấp số cộng (v_n) có $S_3 = -3$ và $S_5 = -15$. Tính S_{50} .

Ví dụ 12

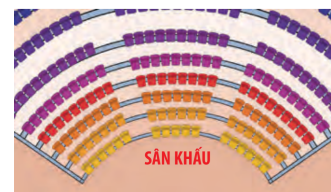
Tính tổng sau

- a) Tính tổng của 50 số tự nhiên chẵn đầu tiên.
- b) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Tính tổng 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.
- c) Cho cấp số cộng (v_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20} .

Ví dụ 13

Một rạp hát có 20 hàng ghế xếp theo hình quạt. Hàng thứ nhất có 17 ghế, hàng thứ hai có 20 ghế, hàng thứ ba có 23 ghế, ... cứ thế tiếp tục cho đến hàng cuối cùng.

- Tính số ghế có ở hàng cuối cùng.
- Tính tổng số ghế có ở trong rạp.



Hình 4

B MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Nhận diện cấp số cộng, công sai d

Dựa theo định nghĩa của cấp số cộng, để nhận diện (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d$. Khi đó công sai $d = u_{n+1} - u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 1

Dãy số hữu hạn nào là một cấp số cộng? Vì sao?

- $-2, 1, 4, 7, 10, 13, 16$.
- $1, -2, -4, -6, -8$.

🔍 Dây số 1 là một cấp số cộng, dây số 2 không là một cấp số cộng.

Ví dụ 2

Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

- Dãy số (a_n) với $a_n = 4n - 3$;
- Dãy số (c_n) với $c_n = 2018^n$.

🔍 Dây số 1 là một cấp số cộng, dây số 2 không là một cấp số cộng.

Ví dụ 3

Cho cấp số cộng (u_n) có công thức số hạng tổng quát $u_n = 3n + 1, n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d ?

🔍 $u_1 = 4, d = 3$.



Ví dụ 4

Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3, u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng bao nhiêu?

$d = 6$

Ví dụ 5

Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của một cấp số cộng biết $u_4 = 10$ và $u_7 = 19$.

$u_1 = 1, d = 3$.

Dạng 2 Số hạng tổng quát của cấp số cộng

Để xác định số hạng tổng quát của một cấp số cộng, ta sử dụng công thức

$$u_n = u_1 + (n - 1)d \text{ hoặc } u_n = u_{n-1} + d \text{ với } n \geq 2.$$

Tức là ta cần xác định số hạng đầu u_1 và công sai d .

Ví dụ 1

Xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_7 = 8 \\ d = 2. \end{cases}$

$u_n = 2n - 6$

Ví dụ 2

Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17. \end{cases}$

$u_1 = 16, d = -3$

Ví dụ 3

Cho cấp số cộng (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -9 \\ u_{n-1} = u_n - 5 \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) .

$u_n = 5n - 14$

**Ví dụ 4**

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{20} = -52$ và $u_{51} = -145$. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

$$\text{☞ } u_n = -3n + 8$$

Ví dụ 5

Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết

$$\text{a) } \begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7. \end{cases}$$

$$\text{☞ } u_1 = 3, d = 4; u_1 = 36, d = -13$$

Ví dụ 6

Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết

$$\text{a) } \begin{cases} -u_3 + u_7 = 8 \\ u_2 u_7 = 75. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} u_5 = 4u_3 \\ u_2 u_6 = -11. \end{cases}$$

$$\text{☞ } \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = -17 \\ d = 2 \end{cases}; \begin{cases} u_1 = -4 \\ d = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = 4 \\ d = -3 \end{cases}$$

Dạng 3 Tìm số hạng cụ thể trong cấp số cộng

Tìm số hạng thứ k ($k \in \mathbb{N}^*$) bằng công thức

$$u_k = u_1 + (k - 1)d.$$

Ví dụ 1

Cho cấp số cộng (u_n) , biết

$$\begin{cases} u_1 = -15 \\ d = 18. \end{cases}$$

a) Tìm $u_5, u_{10}, u_{15}, u_{20}, u_{25}$.

b) Số 1209 là số hạng thứ bao nhiêu ?

$$\text{☞ } u_5 = 57, u_{10} = 147, u_{15} = 237, u_{20} = 327, u_{25} = 417; 1209 \text{ là số hạng thứ } 69$$



Ví dụ 2

Tìm sáu số trong khoảng $(7; 35)$ để được một cấp số cộng gồm tám số hạng với $u_1 = 7, u_8 = 35$.

11; 15; 19; 23; 27; 31

Ví dụ 3

Một cấp số cộng có năm số hạng mà tổng số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 28, tổng của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng 40. Hãy tìm cấp số cộng đó.

11; 14; 17; 20; 23

Ví dụ 4

Xác định 4 góc của một tứ giác lồi, biết rằng 4 góc hợp thành cấp số cộng và góc lớn nhất bằng 5 lần góc nhỏ nhất.

$36^\circ; 72^\circ; 108^\circ; 144^\circ$

Ví dụ 5

Cho cấp số cộng (u_n) với $\begin{cases} u_5 = -43 \\ u_{21} = -171. \end{cases}$

- Tìm d và u_1 .
- Tìm u_{29} .
- -16187 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng trên?
- -35 có thuộc cấp số cộng trên hay không?

$\begin{cases} u_1 = -11 \\ d = -8 \end{cases}; u_{29} = -235; -16187 \text{ là số hạng thứ } 2023; -35 \text{ thuộc cấp số cộng đã cho}$

Dạng 4 Các bài toán thực tế

Các bài toán thực tế về cấp số cộng có thể được giải bằng cách sử dụng công thức của cấp số cộng. Công thức của cấp số cộng là: $u_n = u_1 + (n - 1)d$. Trong đó:

- ☑ u_n là số hạng thứ n của cấp số cộng.
- ☑ u_1 là số hạng đầu tiên của cấp số cộng.
- ☑ d là công sai của cấp số cộng.
- ☑ Một số công thức thường gặp:

$$\text{☑ } u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} = u_1 + (n - 1)d.$$

$$\text{☑ } S_n = \frac{(u_1 + u_n) \cdot n}{2} = \frac{2u_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n.$$

Ví dụ 1

Một người có một khoản tiền gửi ngân hàng với lãi suất 10% năm. Nếu sau 5 năm người đó nhận được tổng số tiền là 550 triệu đồng thì số tiền gửi ban đầu của người đó là bao nhiêu?

🔍 366,67 triệu đồng.

Ví dụ 2

Bạn An muốn mua một món quà tặng mẹ nhân ngày mừng 8/3. Bạn quyết định tiết kiệm từ ngày 1/2/2017 đến hết ngày 6/3/2017. Ngày đầu An có 5 000 đồng, kể từ ngày thứ hai số tiền An tiết kiệm được ngày sau cao hơn ngày trước mỗi ngày 1 000 đồng. Tính số tiền An tiết kiệm được để mua quà tặng mẹ.

🔍 731 000 đồng.

Ví dụ 3

Một hội đồng quản trị quyết định tăng lương cho nhân viên hàng năm theo tỷ lệ cố định. Ví dụ, lương của một nhân viên được tăng thêm 5% so với năm trước. Hỏi nếu lương của một nhân viên là 10 triệu đồng/năm vào năm nay, thì lương của nhân viên đó sẽ là bao nhiêu vào năm thứ 5?

🔍 12,1550625 triệu đồng/năm.



Ví dụ 4

Hùng đang tiết kiệm để mua một cây guitar. Trong tuần đầu tiên, anh ta để dành 42 đô la, và trong mỗi tuần tiếp theo, anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình. Cây guitar Hùng cần mua có giá 400 đô la. Hỏi vào tuần thứ bao nhiêu thì anh ấy có đủ tiền để mua cây guitar đó?

$n = 46$.

Ví dụ 5

Hàng tháng ông An gửi vào ngân hàng một số tiền như nhau là 5 000 000 đồng (vào ngày đầu mỗi tháng) với lãi suất 0,5% một tháng, biết tiền lãi của tháng trước được nhập vào tiền gốc của tháng sau. Hỏi sau 36 tháng ông An nhận được số tiền vốn và lãi là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị).

197 663 927 đồng.

Ví dụ 6

Một xưởng có đăng tuyển công nhân với đãi ngộ về lương như sau: Trong quý đầu tiên thì xưởng trả là 6 triệu đồng/quý và kể từ quý thứ 2 sẽ tăng lên 0,5 triệu cho 1 quý. Hỏi với đãi ngộ trên thì sau 5 năm làm việc tại xưởng, tổng số lương của công nhân đó là bao nhiêu?

215 triệu đồng.

C

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Chứng minh dãy số hữu hạn sau là cấp số cộng: 1; -3; -7; -11; -15.

Bài 2

Cho (u_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 4$ và công sai $d = -10$. Viết công thức số hạng tổng quát u_n .

Bài 3

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$ và công sai $d = 2$.

- Tìm u_{12} .
- Số 195 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng đó?

Bài 4

Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là cấp số cộng? Tìm số hạng đầu và công sai của nó.

- $u_n = 3 - 4n$;
- $u_n = \frac{n}{2} - 4$;
- $u_n = 5^n$;
- $u_n = \frac{9 - 5n}{3}$.

Bài 5

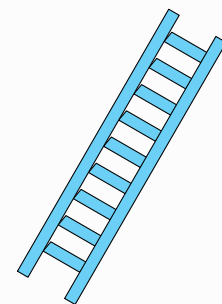
Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết:

- $\begin{cases} u_3 - u_1 = 20 \\ u_2 + u_5 = 54; \end{cases}$
- $\begin{cases} u_2 + u_3 = 0 \\ u_2 + u_5 = 80; \end{cases}$
- $\begin{cases} u_5 - u_2 = 3 \\ u_8 \cdot u_3 = 24. \end{cases}$

Bài 6

Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm các thanh ngang của một cái thang. Biết rằng chiều dài các thanh ngang của cái thang đó (từ bậc dưới cùng) lần lượt là 45 cm, 43 cm, 41 cm, ..., 31 cm.

- Cái thang đó có bao nhiêu bậc?
- Tính chiều dài thanh gỗ mà người đó cần mua, giả sử chiều dài các mối nối (phần gỗ bị cắt thành mùn cưa) là không đáng kể.



**Bài 7**

Khi một vận động viên nhảy dù nhảy ra khỏi máy bay, giả sử quãng đường người ấy rơi tự do (tính theo feet) trong mỗi giây liên tiếp theo thứ tự trước khi bung dù lần lượt là: 16; 48; 80; 112; 144; ... (các quãng đường này tạo thành cấp số cộng).



Hình 6

- Tính công sai của cấp số cộng trên.
- Tính tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên.

Bài 8

Ở một loài thực vật lưỡng bội, tính trạng chiều cao cây do hai gene không alen là A và B cùng quy định theo kiểu tương tác cộng gộp. Trong kiểu gene nếu cứ thêm một alen trội A hay B thì chiều cao cây tăng thêm 5 cm. Khi trưởng thành, cây thấp nhất của loài này với kiểu gene $aabb$ có chiều cao 100 cm. Hỏi cây cao nhất với kiểu gene $AABB$ có chiều cao bao nhiêu?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Xen vào giữa hai số 4 và 40 bốn số để được một cấp số cộng? Tìm tổng bốn số đó?

- (A) 72. (B) 88. (C) 100. (D) 66.

Câu 2

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng $u_5 = 13$, $u_6 = 17$. Số hạng thứ 10 là

- (A) 33. (B) 37. (C) 40. (D) 45.

Câu 3

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này.

- (A) $S_{16} = -24$. (B) $S_{16} = 26$. (C) $S_{16} = -25$. (D) $S_{16} = 24$.

Câu 4

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$ và $d = \frac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n+1)$. (B) $u_n = -3 + \frac{1}{2}n - 1$.
 (C) $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n-1)$. (D) $u_n = -3 + \frac{1}{4}(n-1)$.



Câu 5

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$, $u_{20} = 60$. Tổng S_{20} của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là

- Ⓐ $S_{20} = 600$. Ⓑ $S_{20} = 60$. Ⓒ $S_{20} = 250$. Ⓓ $S_{20} = 500$.

Câu 6

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và $u_2 = 3$. Giá trị của u_3 bằng

- Ⓐ 6. Ⓑ 9. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Câu 7

Cho cấp số cộng (u_n) có $\begin{cases} u_3 = 9 \\ u_4 = 3 \end{cases}$. Khi đó công sai là

- Ⓐ 6. Ⓑ 12. Ⓒ 3. Ⓓ -6.

Câu 8

Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n = \frac{3n^2 - 19n}{4}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

- Ⓐ $u_1 = 2, d = -\frac{1}{2}$. Ⓑ $u_1 = -4, d = \frac{3}{2}$. Ⓒ $u_1 = -\frac{3}{2}, d = -2$. Ⓓ $u_1 = \frac{5}{2}, d = \frac{1}{2}$.

Câu 9

Dãy số nào sau đây là một cấp số cộng?

- Ⓐ $u_n = 3n^2 + 1$. Ⓑ $u_n = 2^n$.
Ⓒ $u_n = \sqrt{n+5}$. Ⓓ $u_n = 2020 - 2019n$.

**Câu 10**

Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông, người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt nhiều hơn ô thứ nhất là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt nhiều hơn ô thứ hai là 5, ... và cứ thế tiếp tục đến ô thứ n . Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta phải sử dụng 25450 hạt. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô vuông?

☐ (A) 100.☐ (B) 102.☐ (C) 98.☐ (D) 104.**Câu 11**

Nếu các số $5 + m; 7 + 2m; 17 + m$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì m bằng bao nhiêu?

☐ (A) $m = 3$.☐ (B) $m = 2$.☐ (C) $m = 4$.☐ (D) $m = 5$.**Câu 12**

Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

☐ (A) $u_n = 7 - 3^n$.☐ (B) $u_n = 7 - 3n$.☐ (C) $u_n = 7 \cdot 3^n$.☐ (D) $u_n = \frac{7}{3n}$.**Câu 13**

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -5$ và $d = 3$. Số 100 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng?

☐ (A) Thứ 36.☐ (B) Thứ 15.☐ (C) Thứ 20.☐ (D) Thứ 35.**Câu 14**

Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 u_7 = 75 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

☐ (A) $d = 3$.☐ (B) $d = 2$.☐ (C) $d = \frac{1}{2}$.☐ (D) $d = \frac{1}{3}$.



Câu 15

Với giá trị nào của x và y thì các số $-7; x; 11; y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng?

- (A) $x = 4; y = 18$. (B) $x = 1; y = 21$. (C) $x = 2; y = 20$. (D) $x = 3; y = 19$.

Câu 16

Cho hai số -3 và 23 . Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2$. Tìm n .

- (A) $n = 12$. (B) $n = 13$. (C) $n = 14$. (D) $n = 15$.

Câu 17

Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_8 + u_9 + u_{15} = 100$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

- (A) $S_{16} = 300$. (B) $S_{16} = 200$. (C) $S_{16} = 100$. (D) $S_{16} = 400$.

Câu 18

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 2001$ và $u_5 = 1995$. Khi đó u_{1001} bằng:

- (A) $u_{1001} = 1$. (B) $u_{1001} = 4005$. (C) $u_{1001} = 4003$. (D) $u_{1001} = 3$.

Câu 19

Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ 2 giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5.000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50 m mới có nước. Vậy hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

- (A) 10.125.000 đồng. (B) 4.000.000 đồng. (C) 4.245.000 đồng. (D) 5.2500.000 đồng.

**Câu 20**

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$ và $u_{14} = 18$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

☐ (A) $u_1 = -22; d = 3$.

☐ (B) $u_1 = -21; d = 3$.

☐ (C) $u_1 = -21; d = -3$.

☐ (D) $u_1 = -20; d = -3$.

Câu 21

Cho cấp số cộng (u_n) , biết: $u_n = -1, u_{n+1} = 8$. Tính công sai d của cấp số cộng đó.

☐ (A) $d = -9$.

☐ (B) $d = -7$.

☐ (C) $d = 9$.

☐ (D) $d = 7$.

Câu 22

Ba góc A, B, C ($A < B < C$) của tam giác tạo thành cấp số cộng, biết góc lớn nhất gấp đôi góc bé nhất. Hiệu số đo độ của góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng:

☐ (A) 60° .

☐ (B) 80° .

☐ (C) 45° .

☐ (D) 40° .

Câu 23

Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

☐ (A) $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -3 \end{cases}$.

☐ (B) $\begin{cases} u_1 = 18 \\ d = 3 \end{cases}$.

☐ (C) $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 3 \end{cases}$.

☐ (D) $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 4 \end{cases}$.

Câu 24

Một cấp số cộng có 12 số hạng. Biết rằng tổng của 12 số hạng đó bằng 144 và số hạng thứ mười hai bằng 23. Khi đó công sai d của cấp số cộng đã cho là bao nhiêu?

☐ (A) $d = 2$.

☐ (B) $d = 4$.

☐ (C) $d = 3$.

☐ (D) $d = 5$.



Câu 25

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -5$ và $d = 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A $u_{15} = 45$.
 ☐ B $u_{13} = 31$.
 ☐ C $u_{15} = 34$.
 ☐ D $u_{10} = 35$.

Câu 26

Viết ba số hạng xen giữa các số 2 và 22 để được một cấp số cộng có năm số hạng.

- ☐ A 6; 12; 18.
 ☐ B 7; 12; 17.
 ☐ C 8; 13; 18.
 ☐ D 6; 10; 14.

Câu 27

Người ta trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây, ... Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

- ☐ A 75.
 ☐ B 73.
 ☐ C 77.
 ☐ D 79.

Câu 28

Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = -\frac{1}{2}$, công sai $d = \frac{1}{2}$. Năm số hạng liên tiếp đầu tiên của cấp số này là:

- ☐ A $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}$.
 ☐ B $-\frac{1}{2}; 0; 1; \frac{1}{2}; 1$.
 ☐ C $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}$.
 ☐ D $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$.

Câu 29

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$ và $d = -5$. Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

- ☐ A $S_{100} = -24350$.
 ☐ B $S_{100} = 24600$.
 ☐ C $S_{100} = 24350$.
 ☐ D $S_{100} = -24600$.

**Câu 30**

Cho các số $-4; 1; 6; x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm x .

- (A) $x = 10$. (B) $x = 12$. (C) $x = 11$. (D) $x = 7$.

Câu 31

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$ và $d = \frac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n-1)$. (B) $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n+1)$.
 (C) $u_n = -3 + \frac{1}{4}(n-1)$. (D) $u_n = -3 + \frac{1}{2}n - 1$.

Câu 32

Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là $5; 9; 13; 17; \dots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

- (A) $u_n = 4n - 1$. (B) $u_n = 5n - 1$. (C) $u_n = 5n + 1$. (D) $u_n = 4n + 1$.

Câu 33

Một rạp hát có 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 25 ghế. Mỗi dãy sau có hơn dãy trước 3 ghế. Hỏi rạp hát có tất cả bao nhiêu ghế?

- (A) 1635. (B) 2055. (C) 1792. (D) 3125.

Câu 34

Cho dãy số $\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2}; -1; -\frac{3}{2}; \dots$ là cấp số cộng với:

- (A) Số hạng đầu tiên là $\frac{1}{2}$, công sai là $-\frac{1}{2}$. (B) Số hạng đầu tiên là 0, công sai là $\frac{1}{2}$.
 (C) Số hạng đầu tiên là 0, công sai là $-\frac{1}{2}$. (D) Số hạng đầu tiên là $\frac{1}{2}$, công sai là $\frac{1}{2}$.



Câu 35

Cho cấp số cộng (u_n) có $d = -2$ và $S_8 = 72$. Tìm số hạng đầu tiên u_1

- ☐ A $u_1 = 16$.
 ☐ B $u_1 = -16$.
 ☐ C $u_1 = \frac{1}{16}$.
 ☐ D $u_1 = -\frac{1}{16}$.

Câu 36

Ba góc của một tam giác vuông tạo thành cấp số cộng. Hai góc nhọn của tam giác có số đo (độ) là:

- ☐ A 45° và 45° .
 ☐ B 20° và 45° .
 ☐ C 30° và 60° .
 ☐ D 20° và 70° .

Câu 37

Tính tổng $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \dots + (2n - 1) - 2n$ với $n \geq 1$ và $n \in \mathbb{N}$.

- ☐ A $S = 0$.
 ☐ B $S = -1$.
 ☐ C $S = n$.
 ☐ D $S = -n$.

Câu 38

Cho cấp số cộng $u_1; u_2; u_3; \dots; u_n$ có công sai d , các số hạng của cấp số cộng đã cho đều khác 0.

Với giá trị nào của d thì dãy số $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \dots; \frac{1}{u_n}$ là một cấp số cộng?

- ☐ A $d = 0$.
 ☐ B $d = 1$.
 ☐ C $d = -1$.
 ☐ D $d = 2$.

Câu 39

Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_{23} = 60$. Tính tổng S_{24} của 24 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

- ☐ A $S_{24} = 60$.
 ☐ B $S_{24} = 120$.
 ☐ C $S_{24} = 1440$.
 ☐ D $S_{24} = 720$.



Câu 40

Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) biết $d < 10$.

☐ A $d = 4$.

☐ B $d = 3$.

☐ C $d = 6$.

☐ D $d = 5$.

—HẾT—



§3. CẤP SỐ NHÂN

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Cấp số nhân

Định nghĩa 3.1. Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số q không đổi, nghĩa là

$$u_{n+1} = u_n \cdot q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Số q được gọi là **công bội** của cấp số nhân.

Ví dụ 1

Tìm số hạng đầu và công bội của các cấp số nhân sau:

a) 3; 6; 12; 24; 48; ...;

b) $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots;$

c) 9; 9; 9; 9; 9; ...

Ví dụ 2

Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân? Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

a) 1; 11; 121; 12321; 1234321;

b) $1; -1; 1; -1; 1;$

c) 4; 8; 12; 16.

Ví dụ 3

Cho cấp số nhân: 1; 10; 100; 1000; 10000. Biểu diễn số hạng 10 và 100 theo hai số hạng kề nó.

⚠ Chú ý: Dãy số (u_n) là cấp số nhân thì $u_n^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1}$ với $n \geq 2$.

Ví dụ 4

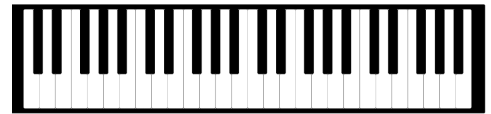
Cho ba số tự nhiên $m; n; p$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh ba số $2^m; 2^n; 2^p$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Ví dụ 5

Một quốc gia có dân số năm 2011 là P triệu người. Trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm dân số tăng $a\%$. Chứng minh rằng dân số các năm từ năm 2011 đến năm 2021 của quốc gia đó tạo thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân này.

Ví dụ 6

Tần số của ba phím liên tiếp Sol, La, Si trên một cây đàn organ tạo thành cấp số nhân. Biết tần số của hai phím Sol và Si lần lượt là 415 Hz và 466 Hz (theo: [https://vi.wikipedia.org/wiki/Đô_\(nốt_nhạc\)](https://vi.wikipedia.org/wiki/Đô_(nốt_nhạc))). Tính tần số của phím La (làm tròn đến hàng đơn vị).



2. Số hạng tổng quát của cấp số nhân

Định lý 3.1. Nếu một cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 2.$$

Ví dụ 7

Cho cấp số nhân có 8 số hạng, số hạng đầu là 4374, số hạng cuối là 2. Tìm công bội của cấp số nhân đó.

Ví dụ 8

Viết công thức số hạng tổng quát u_n theo số hạng đầu u_1 và công bội q của các cấp số nhân sau:

a) $5; 10; 20; 40; 80; \dots;$

b) $1; \frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \frac{1}{1000}; \frac{1}{10000}; \dots$



Ví dụ 9

Chu kỳ bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa (theo: <https://vi.wikipedia.org/wiki/Poloni-210>).
Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau:

a) 690 ngày;

b) 7314 ngày (khoảng 20 năm).

3. Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân

Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

a) So sánh $q \cdot S_n$ và $(u_2 + u_3 + \dots + u_n) + q \cdot u_1$; b) So sánh $u_1 + q \cdot S_n$ và $S_n + u_1 \cdot q^n$.

Định lý 3.2. Giả sử (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

⚠ Chú ý: Khi $q = 1$ thì $S_n = n \cdot u_1$.

Ví dụ 10

Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 2$.

Ví dụ 11

Tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) trong các trường hợp sau:

a) $u_1 = 10^5, q = 0,1, n = 5$;

b) $u_1 = 10, u_2 = -20, n = 5$.

Ví dụ 12

Trong bài toán ở đầu bài học, tính tổng các độ cao của quả bóng sau 10 lần rơi đầu tiên.

B MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Nhận diện cấp số nhân, công bội q

Để nhận diện (chứng minh) một dãy số là cấp số nhân, ta làm như sau:

Chứng minh $u_{n+1} = u_n q, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và q là một số không đổi.

Nếu $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta lập tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n} = k$.

✔ Nếu k là hằng số thì (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = k$.

✔ Nếu k phụ thuộc vào n thì (u_n) không phải là cấp số nhân.

Để chứng minh dãy (u_n) không phải là một cấp số nhân. Khi đó, ta chỉ cần chỉ ra ba số hạng liên tiếp không tạo thành một cấp số nhân, chẳng hạn $\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}$.

Để chứng minh ba số a, b, c theo thứ tự đó lập được một cấp số nhân, thì ta chứng minh $ac = b^2$ hoặc $|b| = \sqrt{ac}$.

Ví dụ 1

Dãy số $1; 1; 1; 1; \dots$ có phải là một cấp số nhân hay không?

👉 Dãy số $1; 1; 1; 1; \dots$ là một cấp số nhân.

Ví dụ 2

Dãy số $u_n = 3^n$ có phải là một cấp số nhân không? Nếu có, hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

👉 (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 3$.

Ví dụ 3

Dãy số $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{9}{u_n} \end{cases}$ có phải là một cấp số nhân không? Nếu có, hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

👉 (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 1$.

Ví dụ 4

Cho (u_n) là cấp số nhân có công bội $q \neq 0, u_1 \neq 0$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n = u_n u_{2n}$ cũng là một cấp số nhân.

👉 (v_n) là một cấp số nhân với công bội là q^3 .



Ví dụ 5

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

$\Rightarrow (v_n)$ là cấp số nhân với công bội $q = 4$ và số hạng đầu $v_1 = 5$.

Dạng 2 Số hạng tổng quát của cấp số nhân

Dựa vào giả thuyết, ta lập một hệ phương trình chứa công bội q và số hạng đầu u_n . Giải hệ phương trình này tìm được u_1 và q .

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

Ví dụ 1

Tìm số hạng tổng quát của dãy số $2; 4; 8; 16; 32; \dots$, biết dãy (u_n) là một cấp số nhân.

$$\Rightarrow u_n = 2 \cdot 2^{n-1}.$$

Ví dụ 2

Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102. \end{cases}$

$$\Rightarrow u_1 = 3, q = 2 \text{ và } u_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

Ví dụ 3

Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_1 + u_6 = 30 \\ u_2 + u_7 = 120. \end{cases}$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{6}{205}, q = 4 \text{ và } u_n = \frac{6}{205} \cdot 4^{n-1}.$$

**Ví dụ 4**

Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_3 = 40 \\ u_6 = 160. \end{cases}$
 $\Rightarrow u_1 = \frac{40}{9}, q = 3$ và $u_n = 40 \cdot 3^{n-3}$.

Ví dụ 5

Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân có công bội $q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, biết $\begin{cases} u_2 + u_4 = 10 \\ u_1 + u_3 + u_5 = -21. \end{cases}$
 $\Rightarrow u_1 = -1, q = -2$ và $u_n = \frac{(-2)^n}{2}$.

Dạng 3 Tìm số hạng cụ thể của CSN

Ta chuyển các số hạng của CSN về số hạng đầu u_1 và công bội q . Sử dụng công thức $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

Chia hai phương trình về theo u_1 ta thu được phương trình theo q .
 Giải tìm q và u_1 . Từ đó tìm được số hạng cần tìm thỏa ycbt.

Ví dụ 1

Cho u_n là CSN thỏa $u_1 = 2; u_4 = 16$. Tìm số hạng thứ 5 của CSN.

Ví dụ 2

Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$. Tính số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp Số nhân.

Ví dụ 3

Cho cấp số nhân có $u_1 = -3, q = \frac{2}{3}$. Số $\frac{-96}{243}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?



Ví dụ 4

Cấp số nhân (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = \frac{3}{5} \cdot 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân đó là

Ví dụ 5

Người ta thiết kế một cái tháp gồm 10 tầng theo cách: Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích bề mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt của tầng 1 bằng nửa diện tích bề mặt đế tháp. Biết diện tích bề mặt đế tháp là $12\,288 \text{ m}^2$, tính diện tích bề mặt trên cùng của tháp.

Dạng 4 Tìm điều kiện để một dãy số lập thành CSN

Dãy số a, b, c lập thành CSN khi $b^2 = a \cdot c$.

Dãy số a, b, c, d lập thành CSN khi $\begin{cases} b^2 = a \cdot c \\ c^2 = b \cdot d. \end{cases}$

Ví dụ 1

Cho dãy $3, x, 12, y$. Tìm x, y để dãy là CSN.

Ví dụ 2

Cho dãy $x - 1, 2x, 4x + 3$. Tìm x để dãy là CSN.

Ví dụ 3

Các số $x + 6y, 5x + 2y, 8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng, đồng thời, các số $x + \frac{5}{3}, y - 1, 2x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x và y .

**Ví dụ 4**

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân $x^3 - 7x^2 + 2(m^2 + 6m)x - 8 = 0$.

Ví dụ 5

Các số $x + 6y, 5x + 2y, 8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x - 1, y + 2, x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính $x^2 + y^2$.

Dạng 5 Tính tổng của cấp số nhân

Phương pháp

- ✔ Xác định số hạng đầu u_1 , công bội q .
- ✔ Áp dụng công thức tính tổng các số hạng của cấp số nhân.

Ví dụ 1

Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = -3$ và công bội $q = -2$.

$$S_{10} = 1023$$

Ví dụ 2

Tính tổng 8 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 3$ và $u_2 = 6$.

$$S_8 = 765$$

Ví dụ 3

Tính tổng vô hạn $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

$$S = 2$$



Ví dụ 4

Tính tổng 200 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$.

Ví dụ 5

Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội $q = 2$. Biết $S_n = 765$, tìm n .

$q, n = 8$

Dạng 6 Kết hợp cấp số cộng và cấp số nhân

Nhắc lại tính chất CSC, CSN

- ✔ 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành CSC thì $a + c = 2b$.
- ✔ 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành CSN thì $a.c = b^2$.

Ví dụ 1

Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một CSN với công bội $q (q \neq 1)$, đồng thời các số $x, 2y, 3z$ theo thứ tự đó lập thành một CSC với công sai d . Hãy tìm q ?

Ví dụ 2

Biết rằng a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một CSC và a, c, b là ba số hạng liên tiếp của một CSN, đồng thời $a + b + c = 30$. Tìm a, b, c .

Ví dụ 3

Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một CSN. Ba số $x, y - 4, z$ theo thứ tự đó lập thành CSN. Đồng thời các số $x, y - 4, z - 9$ theo thứ tự đó lập thành CSC. Tìm x, y, z .

**Ví dụ 4**

Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một CSN và $a, b, c - 4$ là ba số hạng liên tiếp của một CSC, đồng thời $a, b - 1, c - 5$ là ba số hạng liên tiếp của một CSN. Tìm a, b, c biết a, b, c là các số nguyên.

Ví dụ 5

Cho 4 số nguyên dương, trong đó 3 số đầu lập thành một CSC, 3 số hạng sau thành lập CSN. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối là 37, tổng của hai số hạng giữa là 36. Tìm tổng 4 số đó

Dạng 7**Bài toán thực tế****Ví dụ 1**

Dân số trung bình của Việt Nam năm 2020 là 97,6 triệu người, tỉ lệ tăng dân số là 1,14%/năm.

(Nguồn: Niên giám thống kê của Việt Nam năm 2020, NXB Thống kê, 2021)

Giả sử tỉ lệ tăng dân số không đổi qua các năm.

- Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là bao nhiêu triệu người (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?
- Viết công thức tính dân số Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020.

$\approx 98,7$ triệu người

Ví dụ 2

Bác Linh gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng tiền tiết kiệm với hình thức lãi kép, kì hạn 1 năm với lãi suất 6%/năm. Viết công thức tính số tiền (cả gốc và lãi) mà bác Linh có được sau n năm (giả sử lãi suất không thay đổi qua các năm).

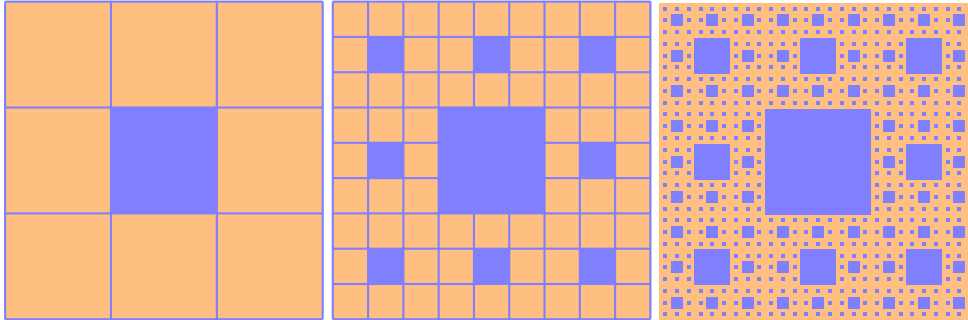
$100 \cdot 1,06^n$ triệu đồng



Ví dụ 3

Một hình vuông màu vàng có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như Hình 2.1 Mỗi hình vuông màu vàng nhỏ hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh là bao nhiêu?

$$Q \approx \frac{26281}{39366}$$



Ví dụ 4

Một khay nước có nhiệt độ 23° được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt độ của khay nước đó sau 6 giờ theo đơn vị độ C.

$$Q \approx 7,5^\circ \text{ gam}$$

Ví dụ 5

Chu kỳ bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa (theo: <https://vi.wikipedia.org/wiki/Poloni-210>). Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau:

a) 690 ngày;

b) 7314 ngày (khoảng 20 năm).

$$Q \approx \frac{20}{2^{53}} \text{ gam}$$

Ví dụ 6

Tế bào E.Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Hỏi sau 24 giờ, tế bào ban đầu sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

$$Q \approx 2^{72}$$

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

a) $u_n = 3(-2)^n$;

b) $u_n = (-1)^{n+1} \cdot 7^n$;

c) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3. \end{cases}$

Bài 2

Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) , biết:

a) $\begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6; \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases}$

Bài 3

- a) Số đo bốn góc của một tứ giác lập thành cấp số nhân. Tìm số đo của bốn góc đó biết rằng số đo của góc lớn nhất gấp 8 lần số đo của góc nhỏ nhất.
- b) Viết sáu số xen giữa các số -2 và 256 để được cấp số nhân có tám số hạng. Nếu viết tiếp thì số hạng thứ 15 là bao nhiêu?

Bài 4

Ba số $\frac{2}{b-a}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b-c}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân.



Bài 5

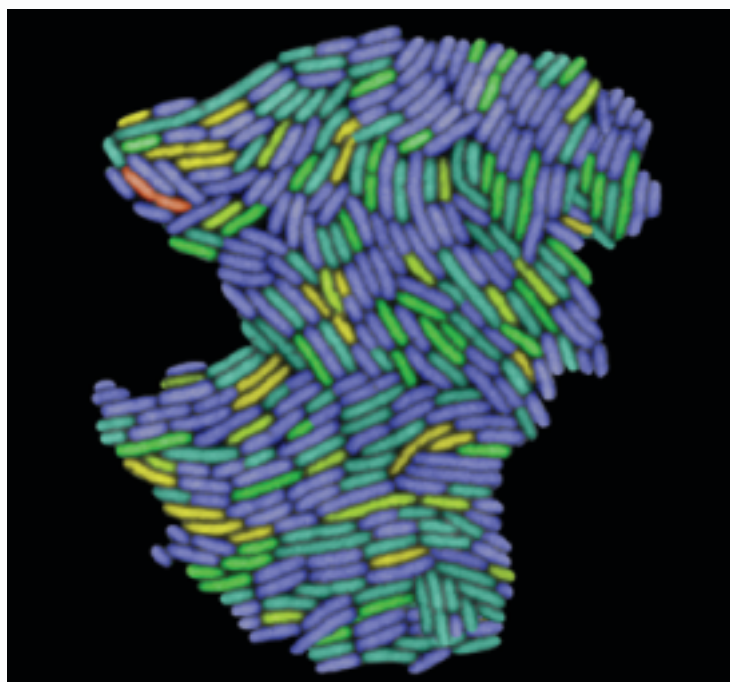
Tính các tổng sau:

a) $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n};$

b) $S_n = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ chữ số } 9}.$

Bài 6

Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong phòng thí nghiệm, cứ mỗi phút số lượng lại tăng lên gấp đôi số lượng đang có. Từ một vi khuẩn ban đầu, hãy tính tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút.



Bài 7

Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0,75%.

- Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032;
- Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022?

Bài 8

Trong trò chơi mạo hiểm nhảy bungee, mỗi lần nhảy, người chơi sẽ được dây an toàn có tính đàn hồi kéo nảy ngược lên 60% chiều sâu của cú nhảy. Một người chơi bungee thực hiện cú nhảy đầu tiên có độ cao nảy ngược lên là 9 m.



- Tính độ cao nảy ngược lên của người đó ở lần nảy thứ ba;
- Tính tổng các độ cao nảy ngược lên của người đó trong 5 lần nảy đầu.

.....

.....

.....

.....

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM LẦN 1

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Một cấp số nhân có công bội bằng 3 và số hạng đầu bằng 5. Biết số hạng chính giữa là 32805. Hỏi cấp số nhân đã cho có bao nhiêu số hạng?

- (A) 18. (B) 17. (C) 9. (D) 16.

Câu 2

Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$ và $q = -\frac{1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

- (A) Số hạng thứ 104. (B) Không là số hạng của cấp số đã cho.
(C) Số hạng thứ 105. (D) Số hạng thứ 103.

Câu 3

Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = -2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

- (A) $S_{10} = 1025$. (B) $S_{10} = -1025$. (C) $S_{10} = -511$. (D) $S_{10} = 1023$.

Câu 4

Tìm $b > 0$ để các số $\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{b}; \sqrt{2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.



- ☐ A $b = 2.$
☐ B $b = -1.$
☐ C $b = -2.$
☐ D $b = 1.$

Câu 5

Thêm hai số thực dương x và y vào giữa hai số 5 và 320 để được bốn số 5; x ; y ; 320 theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\begin{cases} x = 15 \\ y = 45 \end{cases}$
☐ B $\begin{cases} x = 25 \\ y = 125 \end{cases}$
☐ C $\begin{cases} x = 20 \\ y = 80 \end{cases}$
☐ D $\begin{cases} x = 30 \\ y = 90 \end{cases}$

Câu 6

Cho cấp số nhân (u_n) có tổng của hai số hạng đầu tiên bằng 4, tổng của ba số hạng đầu tiên bằng 13. Tính tổng của năm số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho, biết công bội của cấp số nhân là một số dương.

- ☐ A $S_5 = 121.$
☐ B $S_5 = \frac{35}{16}.$
☐ C $S_5 = 141.$
☐ D $S_5 = \frac{181}{16}.$

Câu 7

Cho cấp số nhân $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots; \frac{1}{4096}$. Hỏi số $\frac{1}{4096}$ là số hạng thứ mấy trong cấp số nhân đã cho?

- ☐ A 13.
☐ B 10.
☐ C 11.
☐ D 12.

Câu 8

Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A $S = 9 + 99 + 999 + \dots + 999 \dots 9.$
☐ B $S = \frac{10^n - 1}{9}.$
☐ C $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}.$
☐ D $u_k = u_1 \cdot q^{k-1}.$



Câu 9

Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}}$. Tìm số hạng thứ 5 của cấp số nhân đã cho.

☐ A $u_5 = \frac{2}{3^5}$.

☐ B $u_5 = \frac{2}{3^4}$.

☐ C $u_5 = 3^5$.

☐ D $u_5 = \frac{5}{3^5}$.

Câu 10

Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân đã cho.

☐ A $u_4 = 124$.

☐ B $u_4 = 500$.

☐ C $u_4 = 624$.

☐ D $u_4 = 100$.

Câu 11

Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -6$ và $u_6 = -486$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho, biết rằng $u_3 > 0$

☐ A $q = -3$.

☐ B $q = 3$.

☐ C $q = -\frac{1}{3}$.

☐ D $q = \frac{1}{3}$.

Câu 12

Ba số hạng đầu của một cấp số nhân là $x - 6$; x và y . Tìm y , biết rằng công bội của cấp số nhân là 6

☐ A $y = 12$.

☐ B $y = 216$.

☐ C $y = \frac{324}{5}$.

☐ D $y = \frac{1296}{5}$.

Câu 13

Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n) , biết $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384. \end{cases}$

☐ A $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 3 \end{cases}$.

☐ B $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 3 \end{cases}$.

☐ C $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$.

☐ D $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases}$.

**Câu 14**

Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là 1; 4; 16; 64; ... Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $S_n = \frac{n(1 + 4^{n-1})}{2}$.

(B) $S_n = 4^{n-1}$.

(C) $S_n = \frac{4(4^n - 1)}{3}$.

(D) $S_n = \frac{4^n - 1}{3}$.

Câu 15

Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, n \geq 1 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 1, n \geq 1 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} u_1 = \frac{\pi}{2} \\ u_n = \sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right), n \geq 1 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = -3u_n, n \geq 1 \end{cases}$

Câu 16

Tìm x để ba số $1 + x; 9 + x; 33 + x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

(A) $x = 3$.

(B) $x = 3; x = 7$.

(C) $x = 1$.

(D) $x = 7$.

Câu 17

Một cấp số nhân có ba số hạng là a, b, c (theo thứ tự đó) trong đó các số hạng đều khác 0 và công bội $q \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $\frac{1}{c^2} = \frac{1}{ba}$.

(B) $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{bc}$.

(C) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$.

(D) $\frac{1}{b^2} = \frac{1}{ac}$.

Câu 18

Một cấp số nhân có số hạng thứ hai bằng 4 và số hạng thứ sáu bằng 64, thì số hạng tổng quát của cấp số nhân đó có thể tính theo công thức nào dưới đây?

(A) $u_n = 2^n$.

(B) $u_n = 2^{n+1}$.

(C) $u_n = 2^{n-1}$.

(D) $u_n = 2n$.



Câu 19

Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Tính tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

- Ⓐ $S_{1000} = \frac{1 - 3^{1000}}{6}$. Ⓑ $S_{1000} = \frac{1 - 3^{1000}}{4}$. Ⓒ $S_{1000} = \frac{3^{1000} - 1}{2}$. Ⓓ $S_{1000} = \frac{3^{1000} - 1}{6}$.

Câu 20

Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; \dots; 2048$. Tính tổng S của tất cả các số hạng của cấp số nhân đã cho.

- Ⓐ $S = 4096,75$. Ⓑ $S = 2049,75$. Ⓒ $S = 2047,75$. Ⓓ $S = 4095,75$.

Câu 21

Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và $u_2 = -8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ $S_5 = 256$. Ⓑ $u_5 = 256$. Ⓒ $q = -4$. Ⓓ $S_6 = 130$.

Câu 22

Tìm x để các số 2; 8; x ; 128 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

- Ⓐ $x = 32$. Ⓑ $x = 14$. Ⓒ $x = 64$. Ⓓ $x = 68$.

Câu 23

Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là x ; 12; y ; 192. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $x = 3$; $y = 48$. Ⓑ $x = 1$; $y = 144$. Ⓒ $x = 2$; $y = 72$. Ⓓ $x = 4$; $y = 36$.

**Câu 24**

Tìm tất cả giá trị của x để ba số $2x - 1; x; 2x + 1$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

(A) $x = \pm 3$.

(B) $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(C) $x = \pm \frac{1}{3}$.

(D) $x = \pm \sqrt{3}$.

Câu 25

Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 - u_2 = 36 \\ u_5 - u_3 = 72 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

(A) $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 2 \end{cases}$.

(B) $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$.

(C) $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 3 \end{cases}$.

(D) $\begin{cases} u_1 = 4 \\ q = 2 \end{cases}$.

Câu 26

Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

(A) $u_n = 7 - 3n$.

(B) $u_n = \frac{7}{3n}$.

(C) $u_n = 7 - 3^n$.

(D) $u_n = 7 \cdot 3^n$.

Câu 27

Với giá trị x, y nào dưới đây thì các số hạng lần lượt là $-2; x; -18; y$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân?

(A) $\begin{cases} x = 6 \\ y = -54 \end{cases}$.

(B) $\begin{cases} x = -6 \\ y = -54 \end{cases}$.

(C) $\begin{cases} x = -10 \\ y = -26 \end{cases}$.

(D) $\begin{cases} x = -6 \\ y = 54 \end{cases}$.

Câu 28

Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $3; 9; 27; 81$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân đã cho.

(A) $u_n = 3^{n-1}$.

(B) $u_n = 3^n$.

(C) $u_n = 3 + 3^n$.

(D) $u_n = 3^{n+1}$.



Câu 29

Dãy số $u_n = 3 + 3^n$ là một cấp số nhân với

- ☐ A Công bội là 4 và số hạng đầu tiên là 2.
 ☐ B Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2.
 ☐ C Công bội là 3 và số hạng đầu tiên là 1.
 ☐ D Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.

Câu 30

Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là 12288 m^2). Tính diện tích mặt trên cùng.

- ☐ A 10 m^2 .
 ☐ B 12 m^2 .
 ☐ C 6 m^2 .
 ☐ D 8 m^2 .

Câu 31

Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = \frac{2}{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A $u_5 = -\frac{16}{27}$.
 ☐ B $u_5 = -\frac{27}{16}$.
 ☐ C $u_5 = \frac{27}{16}$.
 ☐ D $u_5 = \frac{16}{27}$.

—HẾT—

E BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM LẦN 2

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 2

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Với giá trị x nào dưới đây thì các số $-4; x; -9$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân?

- (A) $x = -\frac{13}{2}$. (B) $x = -36$. (C) $x = 6$. (D) $x = 36$.

Câu 2

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3}{2} \cdot 5^n$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = \frac{3}{2}$.
 (B) (u_n) không phải là cấp số nhân.
 (C) (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = \frac{5}{2}$ và số hạng đầu $u_1 = 3$.
 (D) (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = \frac{15}{2}$.

Câu 3

Một dãy số được xác định bởi $u_1 = -4$ và $u_n = -\frac{1}{2}u_{n-1}, n \geq 2$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số đó là

- (A) $u_n = -4 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. (B) $u_n = (-2)^{n-1}$.
 (C) $u_n = -4 \cdot (2^{-n+1})$. (D) $u_n = 2^{n-1}$.



Câu 4

Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $u_7 = u_4 \cdot q^5$. Ⓑ $u_7 = u_4 \cdot q^3$. Ⓒ $u_7 = u_4 \cdot q^4$. Ⓓ $u_7 = u_4 \cdot q^6$.

Câu 5

Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số nhân?

- Ⓐ $4; 2; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots$ Ⓑ $\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi^2}; \frac{1}{\pi^4}; \frac{1}{\pi^6}; \dots$
 Ⓒ $1; 2; 4; 8; \dots$ Ⓓ $3; 3^2; 3^3; 3^4; \dots$

Câu 6

Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -6$ và $q = -2$. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho bằng 2046. Tìm n .

- Ⓐ $n = 10$. Ⓑ $n = 12$. Ⓒ $n = 9$. Ⓓ $n = 11$.

Câu 7

Một cấp số nhân có số hạng thứ bảy bằng $\frac{1}{2}$, công bội bằng $\frac{1}{4}$. Hỏi số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng bao nhiêu?

- Ⓐ $\frac{1}{512}$. Ⓑ 4096. Ⓒ 2048. Ⓓ 1024.

Câu 8

Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$ và $q = -5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

- Ⓐ $-2; -10; -50; -250$. Ⓑ $-2; 10; -50; 250$.
 Ⓒ $-2; 10; 50; -250$. Ⓓ $-2; 10; 50; 250$.

**Câu 9**

Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 16 và 36. Số hạng tiếp theo là

- Ⓐ 81. Ⓑ 64. Ⓒ 720. Ⓓ 56.

Câu 10

Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

- Ⓐ Số hạng thứ 7. Ⓑ Số hạng thứ 6.
Ⓒ Không là số hạng của cấp số đã cho. Ⓓ Số hạng thứ 5.

Câu 11

Hai số hạng đầu của của một cấp số nhân là $2x + 1$ và $4x^2 - 1$. Số hạng thứ ba của cấp số nhân là:

- Ⓐ $2x - 1$. Ⓑ $8x^3 + 4x^2 - 2x - 1$.
Ⓒ $8x^3 - 4x^2 - 2x + 1$. Ⓓ $2x + 1$.

Câu 12

Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- Ⓐ $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$. Ⓑ $u_n = n + \frac{1}{3}$. Ⓒ $u_n = \frac{1}{3^n} - 1$. Ⓓ $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$.

Câu 13

Một cấp số nhân có 6 số hạng, số hạng đầu bằng 2 và số hạng thứ sáu bằng 486. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

- Ⓐ $q = 3$. Ⓑ $q = -2$. Ⓒ $q = -3$. Ⓓ $q = 2$.



Câu 14

Cho một cấp số nhân có 15 số hạng. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

☐ A $u_1 \cdot u_{15} = u_{12} \cdot u_4$.

☐ B $u_1 \cdot u_{15} = u_6 \cdot u_9$.

☐ C $u_1 \cdot u_{15} = u_2 \cdot u_{14}$.

☐ D $u_1 \cdot u_{15} = u_5 \cdot u_{11}$.

Câu 15

Bốn góc của một tứ giác tạo thành cấp số nhân và góc lớn nhất gấp 27 lần góc nhỏ nhất. Tổng của góc lớn nhất và góc bé nhất bằng:

☐ A 252° .

☐ B 168° .

☐ C 56° .

☐ D 102° .

Câu 16

Tính tổng $S = -2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \dots + (-2)^{n-1} + (-2)^n$ với $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

☐ A $S = -2 \cdot \frac{1 - (-2)^n}{3}$.

☐ B $S = 2n$.

☐ C $S = \frac{-2(1 - 2^n)}{1 - 2}$.

☐ D $S = 2^n$.

Câu 17

Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cược trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách trên thắng hay thua bao nhiêu?

☐ A Hòa vốn.

☐ B Thua 40000 đồng.

☐ C Thua 20000 đồng.

☐ D Thắng 20000 đồng.

Câu 18

Gọi $S = 1 + 11 + 111 + \dots + 111\dots 1$ (n số 1) thì S nhận giá trị nào sau đây?

☐ A $S = \frac{10^n - 1}{81}$.

☐ B $S = 10\left(\frac{10^n - 1}{81}\right) - n$.

☐ C $S = 10\left(\frac{10^n - 1}{81}\right)$.

☐ D $S = \frac{1}{9} \left[10\left(\frac{10^n - 1}{9}\right) - n \right]$.



Câu 19

Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \end{cases}$. Tính u_2

☐ A $u_2 = 4$.

☐ B $u_2 = 8$.

☐ C $u_2 = 10$.

☐ D $u_2 = 6$.

Câu 20

Cho một cấp số nhân có n số hạng ($n > k > 55$) Đẳng thức nào sau đây sai?

☐ A $u_1 \cdot u_n = u_k \cdot u_{n-k+1}$.

☐ B $u_1 \cdot u_n = u_5 \cdot u_{n-4}$.

☐ C $u_1 \cdot u_n = u_2 \cdot u_{n-1}$.

☐ D $u_1 \cdot u_n = u_{55} \cdot u_{n-55}$.

Câu 21

Cho cấp số nhân $u_1; u_2; u_3; \dots$ với $u_1 = 1$. Tìm công bội q để $4u_2 + 5u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất?

☐ A $q = \frac{2}{5}$.

☐ B $q = -\frac{2}{5}$.

☐ C $q = 0$.

☐ D $q = 1$.

Câu 22

Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0$ Với $1 < k < m$, đẳng thức nào dưới đây là đúng?

☐ A $u_m = u_k \cdot q^{m-k}$.

☐ B $u_m = u_k \cdot q^m$.

☐ C $u_m = u_k \cdot q^{m+k}$.

☐ D $u_m = u_k \cdot q^k$.

Câu 23

Ba số $x; y; z$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1; đồng thời các số $x; 2y; 3z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị của q .

☐ A $q = -3$.

☐ B $q = \frac{1}{9}$.

☐ C $q = -\frac{1}{3}$.

☐ D $q = \frac{1}{3}$.



Câu 24

Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

- Ⓐ $q = 4$. Ⓑ $q = 2$. Ⓒ $q = -2$. Ⓓ $q = -4$.

Câu 25

Gọi $S = 9 + 99 + 999 + \dots + 999 \dots 9$ (n số 9) thì S nhận giá trị nào sau đây?

- Ⓐ $S = 10\left(\frac{10^n - 1}{9}\right)$. Ⓑ $S = 10\left(\frac{10^n - 1}{9}\right) - n$.
 Ⓒ $S = 10\left(\frac{10^n - 1}{9}\right) + n$. Ⓓ $S = \frac{10^n - 1}{9}$.

Câu 26

Một cấp số nhân có 6 số hạng với công bội bằng 2 và tổng số các số hạng bằng 189. Tìm số hạng cuối u_6 của cấp số nhân đã cho.

- Ⓐ $u_6 = 104$. Ⓑ $u_6 = 96$. Ⓒ $u_6 = 48$. Ⓓ $u_6 = 32$.

Câu 27

Các số $x + 6y, 5x + 2y, 8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x - 1, y + 2, x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính $x^2 + y^2$.

- Ⓐ $x^2 + y^2 = 25$. Ⓑ $x^2 + y^2 = 40$. Ⓒ $x^2 + y^2 = 10$. Ⓓ $x^2 + y^2 = 100$.

Câu 28

Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q . Tìm q .

- Ⓐ $q = -\frac{3}{2}$. Ⓑ $q = \frac{3}{2}$. Ⓒ $q = -2$. Ⓓ $q = 2$.

**Câu 29**

Cho dãy số tăng a, b, c ($c \in \mathbb{Z}$) theo thứ tự lập thành cấp số nhân; đồng thời $a, b + 8, c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $a, b + 8, c + 64$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $P = a - b + 2c$.

☐ A $P = \frac{184}{9}$.

☐ B $P = 64$.

☐ C $P = 32$.

☐ D $P = \frac{92}{9}$.

Câu 30

Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$. Tính u_3 .

☐ A $u_3 = 10$.

☐ B $u_3 = 15$.

☐ C $u_3 = 20$.

☐ D $u_3 = 25$.

—HẾT—

§4. ÔN TẬP CHƯƠNG 2

A BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng?

(A) $21, -3, -27, -51, -75.$

(B) $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \frac{15}{4}.$

(C) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}.$

(D) $\frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \frac{1}{50}, \frac{1}{60}.$

Câu 2

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -5$, công sai $d = 4$. Công thức của số hạng tổng quát u_n là:

(A) $u_n = -5 + 4n.$

(B) $u_n = -1 - 4n.$

(C) $u_n = -5 + 4n^2.$

(D) $u_n = -9 + 4n.$

Câu 3

Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3 .

(A) $u_3 = -\frac{8}{3}.$

(B) $u_3 = 2.$

(C) $u_3 = -2.$

(D) $u_3 = \frac{8}{3}.$



Câu 4

Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

(A) $u_n = (-1)^n(2n + 1).$

(B) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} - 1 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} \end{cases}$

(D) $u_n = \sin \frac{\pi}{n}.$

Câu 5

Cho cấp số nhân (u_n) có $u_n = 81$ và $u_{n+1} = 9$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $q = 9.$

(B) $q = \frac{1}{9}.$

(C) $q = -9.$

(D) $q = -\frac{1}{9}.$

Câu 6

Tổng của 100 số tự nhiên lẻ đầu tiên tính từ 1 là:

(A) 10000.

(B) 10100.

(C) 20000.

(D) 20200.

Câu 7

Trong các dãy số (u_n) cho bằng phương pháp truy hồi sau, dãy số nào là cấp số nhân?

(A) Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = u_{n-1}(n - 1)$ với mọi $n \geq 2$.

(B) Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = 2u_{n-1} + 1$ với mọi $n \geq 2$.

(C) Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = u_{n-1}^2$ với mọi $n \geq 2$.

(D) Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 3$ và $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$.

Câu 8

Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$, công bội $q = -\frac{1}{10}$. Khi đó $\frac{1}{10^{2017}}$ là số hạng thứ:

(A) 2016.

(B) 2017.

(C) 2018.

(D) 2019.



Câu 9

Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số tăng?

- ☐ A $u_n = \sin n$.
 ☐ B $u_n = n(-1)^n$.
 ☐ C $u_n = \frac{1}{n}$.
 ☐ D $u_n = 2^{n+1}$.

Câu 10

Tính tổng $T = 15 + 20 + 25 + \dots + 7515$.

- ☐ A $T = 5651625$.
 ☐ B $T = 5651265$.
 ☐ C $T = 5651526$.
 ☐ D $T = 5651256$.

Câu 11

Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n = \frac{3n^2 - 19n}{4}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

- ☐ A $u_1 = -4; d = \frac{3}{2}$.
 ☐ B $u_1 = \frac{5}{2}; d = \frac{1}{2}$.
 ☐ C $u_1 = -\frac{3}{2}; d = -2$.
 ☐ D $u_1 = 2; d = -\frac{1}{2}$.

Câu 12

Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là

- ☐ A $\frac{3}{4}; 1; \frac{5}{4}$.
 ☐ B $\frac{1}{4}; 1; \frac{7}{4}$.
 ☐ C $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$.
 ☐ D $\frac{1}{3}; 1; \frac{5}{3}$.

Câu 13

Xét các số nguyên dương chia hết cho 3. Tổng số 50 số nguyên dương đầu tiên đó bằng:

- ☐ A 3825.
 ☐ B 3900.
 ☐ C 7500.
 ☐ D 7650.

**Câu 14**

Nếu $a; b; c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì dãy số nào sau đây lập thành cấp số cộng?

- Ⓐ $2b; a; c$. Ⓑ $-2b; -2a; -2c$. Ⓒ $2b; -a; -c$. Ⓓ $2b^2; a^2; c^2$.

Câu 15

Biết các số C_n^1, C_n^2, C_n^3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với $n > 3$. Tìm n .

- Ⓐ $n = 5$. Ⓑ $n = 11$. Ⓒ $n = 9$. Ⓓ $n = 7$.

Câu 16

Một cấp số cộng có 6 số hạng. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối bằng 17; tổng của số hạng thứ hai và số hạng thứ tư bằng 14. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

- Ⓐ $d = 2$. Ⓑ $d = 5$. Ⓒ $d = -3$. Ⓓ $d = 4$.

Câu 17

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 15$ và $d = -2$. Tìm u_n

- Ⓐ $u_n = \frac{3}{2}n^2 - 4$. Ⓑ $u_n = -3n - 17$. Ⓒ $u_n = -2n + 21$. Ⓓ $u_n = -\frac{3}{2}n + 12$.

Câu 18

Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào **không** phải là cấp số cộng?

- Ⓐ $u_n = -2^n + 15$. Ⓑ $u_n = -4n + 9$. Ⓒ $u_n = -2n - 21$. Ⓓ $u_n = -2n + 19$.

Câu 19

Một chiếc đồng hồ đánh chuông, kể từ thời điểm 0 (giờ) thì sau mỗi giờ thì số tiếng chuông được đánh đúng bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông. Hỏi một ngày đồng



hồ đó đánh bao nhiêu tiếng chuông?

(A) 78.

(B) 156.

(C) 300.

(D) 48.

Câu 20

Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_7 = 26 \\ u_2^2 + u_6^2 = 466 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\begin{cases} u_1 = 13 \\ d = -3 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} u_1 = 10 \\ d = -3 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 4 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} u_1 = 13 \\ d = -4 \end{cases}$

Câu 21

Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n = n^2 + 4n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đã cho.

(A) $u_n = 5 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^{n-1}$

(B) $u_n = 3n + 2$

(C) $u_n = 5 \cdot 3^{n-1}$

(D) $u_n = 2n + 3$

Câu 22

Cho $a; b; c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $a^2 + c^2 + 2ac = 4b^2$.

(B) $a^2 + c^2 = 2ab - 2bc$.

(C) $a^2 - c^2 = 2ab - 2bc$.

(D) $a^2 - c^2 = ab - bc$.

B BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1

Xét tính tăng, giảm và bị chặn của mỗi dãy số (u_n) sau, biết số hạng tổng quát:

a) $u_n = \frac{n^2}{n+1}$;

b) $u_n = \frac{2}{n^5}$;

c) $u_n = (-1)^n \cdot n^2$.



Bài 2

Cho cấp số cộng (u_n) . Tìm số hạng đầu u_1 , công sai d trong mỗi trường hợp sau:

a) $u_2 + u_5 = 42$ và $u_4 + u_9 = 66$;

b) $u_2 + u_4 = 22$ và $u_1 \cdot u_5 = 21$.

Bài 3

Cho cấp số nhân (u_n) . Tìm số hạng đầu u_1 , công bội q trong mỗi trường hợp sau:

a) $u_6 = 192$ và $u_7 = 384$;

b) $u_1 + u_2 + u_3 = 7$ và $u_5 - u_2 = 14$.

Bài 4

Tứ giác $ABCD$ có số đo bốn góc A, B, C, D theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Biết số đo góc C gấp 5 lần số đo góc A . Tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$ theo đơn vị độ.

Bài 5

Người ta trồng cây theo các hàng ngang với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây, ... ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng người ta trồng hết 4950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

Bài 6

Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là $12288m^2$. Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

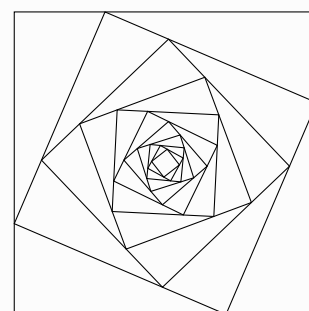


Bài 7

Một khay nước có nhiệt độ 23° được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt độ của khay nước đó sau 6 giờ theo đơn vị độ C.

Bài 8

Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (Hình 4). Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$. Gọi a_n là độ dài cạnh hình vuông C_n . Chứng minh rằng dãy số (a_n) là cấp số nhân.



Hình 4

Bài 9

Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 12%/năm. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối tháng ông trả ngân hàng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Giới hạn hữu hạn của dãy số

1.1. Giới hạn 0 của dãy số

Định nghĩa 1.1. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ nhỏ hơn một số dương bất kì cho trước, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$. Ta còn viết $\lim u_n = 0$.

Ví dụ 1

Với dãy số $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, sử dụng định nghĩa, chứng tỏ rằng $\lim u_n = 0$.

Định lý 1.1. Một số giới hạn cơ bản

- a) $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, với k nguyên dương bất kì.
b) $\lim q^n = 0$, với q là số thực thoả mãn $|q| < 1$.

Ví dụ 2

Áp dụng giới hạn cơ bản, tìm $\lim \frac{1}{(\sqrt{3})^n}$.



Ví dụ 3

Tìm các giới hạn sau

a) $\lim \frac{1}{n^2}.$

b) $\lim \left(-\frac{3}{4}\right)^n.$

1.2. Giới hạn hữu hạn của dãy số

Định nghĩa 1.2. Ta nói dãy số (u_n) có **giới hạn hữu hạn** là số a (hay u_n dần tới a) khi n dần tới dương vô cực, nếu $\lim (u_n - a) = 0$. Khi đó, ta viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ hay $\lim u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.

⚠ Chú ý: Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$.

Ví dụ 4

Dùng định nghĩa, tìm giới hạn $\lim \frac{3n^2 + 1}{n^2}.$

Ví dụ 5

Tìm các giới hạn sau

a) $\lim \left(2 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$

b) $\lim \left(\frac{1 - 4n}{n}\right).$

2. Các phép toán về giới hạn hữu hạn của dãy số

Tính chất 1.1. Cho $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ và c là hằng số. Khi đó

a) $\lim (u_n + v_n) = a + b.$

b) $\lim (u_n - v_n) = a - b.$

c) $\lim (c \cdot u_n) = c \cdot a.$

d) $\lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b.$

e) $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \ (b \neq 0).$

f) Nếu $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}.$

Ví dụ 6

Tìm các giới hạn sau



a) $\lim \frac{3n+2}{2n-1}.$

b) $\lim \frac{\sqrt{9n^2+1}}{n}.$

Ví dụ 7

Tìm các giới hạn sau

a) $\lim \frac{2n^2+3n}{n^2+1}.$

b) $\lim \frac{\sqrt{4n^2+3}}{n}.$

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Định nghĩa 1.3. Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là **cấp số nhân lùi vô hạn**.

Cấp số nhân lùi vô hạn này có tổng là

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \frac{u_1}{1-q}.$$

Ví dụ 8

Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \cdots + \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \cdots$

Ví dụ 9

Biết rằng có thể coi số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,666\ldots$ là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn:

$$0,666\ldots = 0,6 + 0,06 + 0,006 + \cdots = 0,6 + 0,6 \cdot \frac{1}{10} + 0,6 \cdot \frac{1}{10^2} + \cdots$$

Hãy viết $0,666\ldots$ dưới dạng phân số.

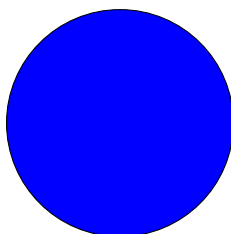
Ví dụ 10

Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \cdots$

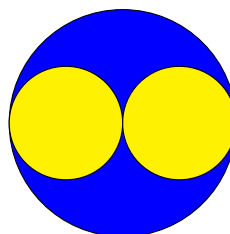


Ví dụ 11

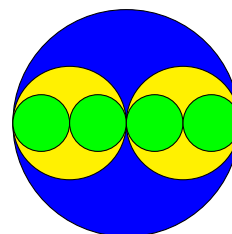
Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính R (cm) như Hình 3a. Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\frac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình 3b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình 3c. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.



a)



b)



c)

Hình 3

4. Giới hạn vô cực

Định nghĩa 1.4.

- ✔ Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu u_n lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.
- ✔ Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim (-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

⚠ **Chú ý:** Ta có các kết quả sau:

- a) $\lim u_n = +\infty$ khi và chỉ khi $\lim (-u_n) = -\infty$.
- b) Nếu $\lim u_n = +\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$.
- c) Nếu $\lim u_n = 0$ và $u_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{1}{u_n} = +\infty$.

Ví dụ 12

Tìm giới hạn $\lim q^n$ với $q > 1$.



a) $\lim n^k = +\infty$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 1$).

b) $\lim q^n = +\infty$ ($q > 1$).



B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Phương pháp đặt thừa số chung

Ví dụ 1

Tìm giới hạn sau $\lim \frac{2n^3 - 2n + 3}{1 - 4n^3}$.

.....

.....

.....

Ví dụ 2

Tìm giới hạn sau $\lim \frac{\sqrt{n^4 + 2n + 2}}{n^2 + 1}$.

.....

.....

.....

Ví dụ 3

Tìm giới hạn sau $\lim \frac{3^{n+1} - 4^n}{4^{n-1} + 3}$.

.....

.....

.....

Ví dụ 4

Tìm giới hạn sau $\lim \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n}$.

.....

.....

.....

Dạng 2 Phương pháp lượng liên hợp

Nếu giới hạn của dãy số ở dạng vô định thì ta sử dụng các phép biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

Một số phép biến đổi liên hợp:



$$f(n) - g(n) = \frac{(f(n))^2 - (g(n))^2}{f(n) + g(n)}$$

$$\sqrt{f(n)} - \sqrt{g(n)} = \frac{f(n) - g(n)}{\sqrt{f(n)} + \sqrt{g(n)}}$$

$$\sqrt{f(n)} - g(n) = \frac{f(n) - (g(n))^2}{\sqrt{f(n)} + g(n)}$$

$$\sqrt[3]{f(n)} - \sqrt[3]{g(n)} = \frac{f(n) - g(n)}{\sqrt[3]{(f(n))^2} + \sqrt[3]{f(n)g(n)} + \sqrt[3]{(g(n))^2}}$$

Ví dụ 1

Tính giới hạn $I = \lim (\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n)$.

Ví dụ 2

Tính giới hạn $I = \lim (\sqrt{n^2 + 7} - \sqrt{n^2 + 5})$.

Ví dụ 3

Tính giới hạn $I = \lim (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n})$.

Ví dụ 4

Tính giới hạn $I = \lim (\sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{2n^2 - 3n + 2})$.

Ví dụ 5

Tính giới hạn $I = \lim (n - \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1})$.

**Dạng 3** Giới hạn tại vô cực

- ✔ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$;
- ✔ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$ với k là số nguyên dương;
- ✔ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

Định lý:

- ✔ Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ với $v_n > 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$;
- ✔ Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$.

Ví dụ 1

Tìm giới hạn

a) $\lim(n^3 + n^2 + n + 1)$.

b) $\lim(n^2 - n\sqrt{n} + 1)$.

Ví dụ 2

Tìm giới hạn

a) $\lim \frac{n^5 + n^4 - n - 2}{4n^3 + 6n^2 + 9}$.

b) $\lim \frac{\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 12}$.

c) $\lim(n + \sqrt{n^2 - n + 1})$.

Ví dụ 3

Tìm giới hạn

a) $\lim \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^2 + 3n\sqrt{n} + 2}$.

b) $\lim(n + \sqrt[3]{n^3 - 2n + 1})$.

c) $\lim \frac{n^3 - 3n}{2n + 15}$.

Dạng 4 Tính tổng của dãy cấp số nhân lùi vô hạnCấp số nhân vô hạn $u_1, u_1q, \dots, u_1q^{n-1}, \dots$ có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân

lũy vô hạn. Tổng của cấp số nhân lũy vô hạn đã cho là

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots = \frac{u_1}{1 - q}.$$

Ví dụ 1

Cho cấp số nhân (u_n) , với $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

- So sánh $|q|$ với 1.
- Tính $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ từ đó hãy tính $\lim S_n$.

Ví dụ 2

Tính tổng $T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$

Ví dụ 3

Tính tổng $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$

Ví dụ 4

Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $2,222\dots$ dưới dạng phân số.

Ví dụ 5

Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,(3)$ dưới dạng phân số.

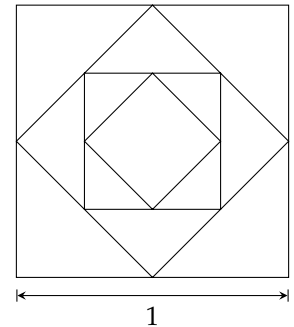
Dạng 5 Toán thực tế, liên môn liên quan đến giới hạn dãy số

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots = \frac{u_1}{1 - q}.$$

Ví dụ 1

Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như hình bên. Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.

- Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành từ bước thứ n .
- Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.



Ví dụ 2

Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là *chu kỳ bán rã*).

(Nguồn: Đại số và giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021)

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kỳ thứ n .

- Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n) .
- Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.
- Từ kết quả câu 2, chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

Ví dụ 3

Gọi C là nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$.

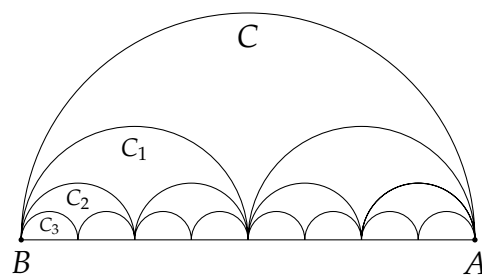
C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2}$,

C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{4}, \dots$

C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^n}, \dots$

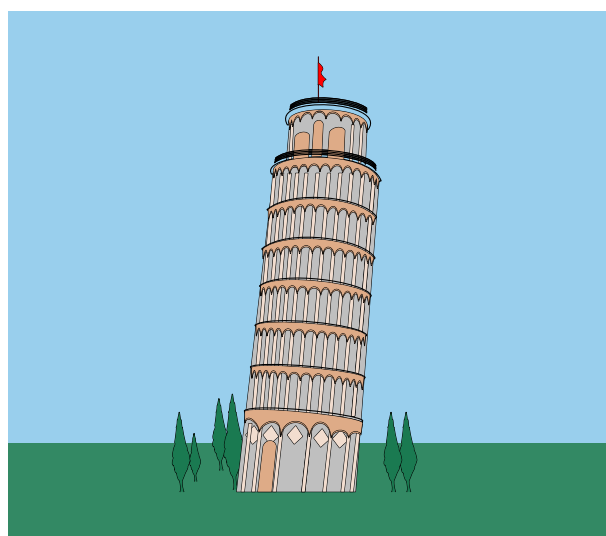
Gọi p_n là độ dài của C_n , S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB .

- Tính p_n, S_n .
- Tính giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .



Ví dụ 4

Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất hình bên dưới. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.



Ví dụ 5

Cho một tam giác đều ABC cạnh a . Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC , tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1, \dots$, tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n, \dots$. Gọi $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ và $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n, \dots$

- Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .
- Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$ và $S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n+1}{n}$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16n^2-2}}{n}$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{2n+1}$.

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2n+3}{2n^2}$.

Bài 2

Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn sau

a) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \dots$.

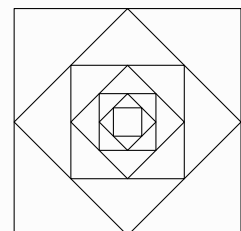
b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots$.

Bài 3

Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,444\dots$ dưới dạng một phân số.

Bài 4

Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông (xem Hình 5).



Hình 5

a) Kí hiệu a_n là diện tích của hình vuông thứ n và S_n là tổng diện tích của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính a_n, S_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) và tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng diện tích của các hình vuông).

b) Kí hiệu p_n là chu vi của hình vuông thứ n và Q_n là tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên.

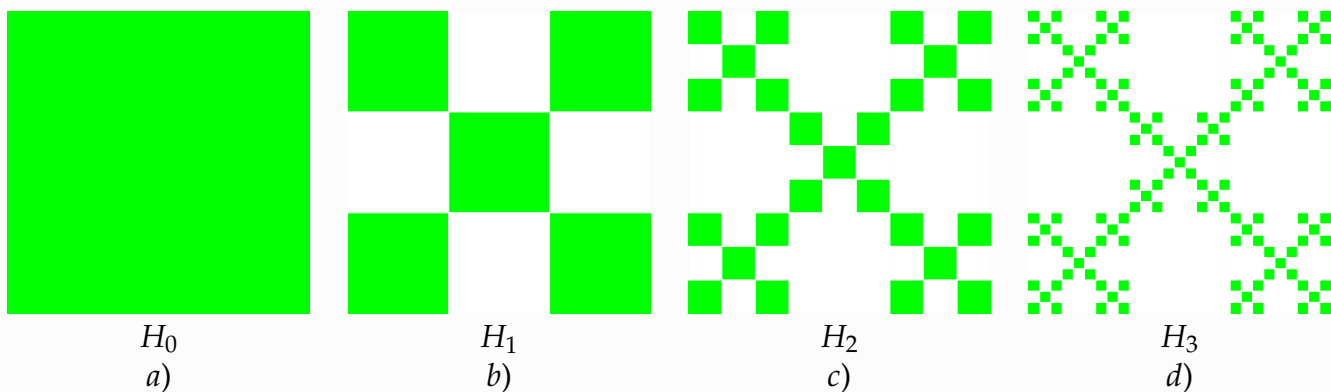


Viết công thức tính p_n và Q_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) và tìm lim Q_n (giới hạn này nếu có được gọi là tổng chu vi của các hình vuông).

Bài 5

Xét quá trình tạo ra hình có chu vi vô cực và diện tích bằng 0 như sau:

Bắt đầu bằng một hình vuông H_0 cạnh bằng 1 đơn vị độ dài (xem Hình 6a). Chia hình vuông H_0 thành chín hình vuông bằng nhau, bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_1 (xem Hình 6b). Tiếp theo, chia mỗi hình vuông của H_1 thành chín hình vuông, rồi bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_2 (xem Hình 6c). Tiếp tục quá trình này, ta nhận được một dãy hình H_n ($n = 1, 2, 3, \dots$).



Hình 6

Ta có: H_1 có 5 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}$;

H_2 có $5 \cdot 5 = 5^2$ hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}; \dots$

Từ đó, nhận được H_n có 5^n hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3^n}$.

a) Tính diện tích S_n của H_n và tính lim S_n .

b) Tính chu vi p_n của H_n và tính lim p_n .

(Quá trình trên tạo nên một hình, gọi là một fractal, được coi là có diện tích lim S_n và chu vi lim p_n).

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Giá trị của giới hạn $\lim \left(4 + \frac{(-1)^n}{n+1} \right)$ bằng

- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.

Câu 2

Giá trị của giới hạn $\lim \frac{-3}{4n^2 - 2n + 1}$ là

- (A) $-\frac{3}{4}$. (B) $-\infty$. (C) 0. (D) -1.

Câu 3

Giá trị của giới hạn $\lim \frac{n + 2n^2}{n^3 + 3n - 1}$ bằng

- (A) 2. (B) 1. (C) $\frac{2}{3}$. (D) 0.

Câu 4

Giá trị của giới hạn $\lim \frac{3n^3 - 2n + 1}{4n^4 + 2n + 1}$ là

(A) $+\infty$.

(B) 0.

(C) $\frac{2}{7}$.

(D) $\frac{3}{4}$.

Câu 5

Tính giới hạn $L = \lim \frac{n^2 + n + 5}{2n^2 + 1}$.

(A) $L = \frac{3}{2}$.

(B) $L = \frac{1}{2}$.

(C) $L = 2$.

(D) $L = 1$.

Câu 6

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5}$. Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

(A) $a = -4$.

(B) $a = 4$.

(C) $a = 3$.

(D) $a = 2$.

Câu 7

Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

(A) $\lim \frac{3 + 2n^3}{2n^2 - 1}$.

(B) $\lim \frac{2n^2 - 3}{-2n^3 - 4}$.

(C) $\lim \frac{2n - 3n^3}{-2n^2 - 1}$.

(D) $\lim \frac{2n^2 - 3n^4}{-2n^4 + n^2}$.

Câu 8

Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

(A) $u_n = \frac{1 + n^2}{5n + 5}$.

(B) $u_n = \frac{n^2 - 2}{5n + 5n^3}$.

(C) $u_n = \frac{n^2 - 2n}{5n + 5n^2}$.

(D) $\frac{1 + 2n}{5n + 5n^2}$.

Câu 9

Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

(A) $\frac{1 + 2n}{5n + 5n^2}$.

(B) $u_n = \frac{n^3 + 2n - 1}{-n + 2n^3}$.



Ⓒ $u_n = \frac{2n^2 - 3n^4}{n^2 + 2n^3}.$

Ⓓ $u_n = \frac{n^2 - 2n}{5n + 1}.$

Câu 10

Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n}{2}}{n^2 + 1}$ bằng

Ⓐ $\frac{1}{8}.$

Ⓑ 1.

Ⓒ $\frac{1}{2}.$

Ⓓ $\frac{1}{4}.$

Câu 11

Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\frac{9}{4}$. Số hạng đầu u_1 của cấp số nhân đó là

Ⓐ $u_1 = 3.$

Ⓑ $u_1 = 4.$

Ⓒ $u_1 = \frac{9}{2}.$

Ⓓ $u_1 = 5.$

Câu 12

Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots$

Ⓐ $S = \frac{27}{2}.$

Ⓑ $S = 14.$

Ⓒ $S = 16.$

Ⓓ $S = 15.$

Câu 13

Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})$ bằng

Ⓐ 0.

Ⓑ 1.

Ⓒ 3.

Ⓓ 5.

Câu 14

Giá trị của giới hạn $\lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right)$ bằng

- (A) 0. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1.

Câu 15

Giá trị của giới hạn $\lim \left(\frac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4} \right)$ bằng

- (A) 0. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) 1.

Câu 16

Giá trị của giới hạn $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ là

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) 1. (C) 0. (D) $-\infty$.

Câu 17

Tính tổng $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \cdots + \frac{2^n}{3^n} + \cdots$.

- (A) $S = 3$. (B) $S = 4$. (C) $S = 5$. (D) $S = 6$.

Câu 18

Giá trị của giới hạn $\lim (\sqrt{n^2 - n + 1} - n)$ là

- (A) $-\frac{1}{2}$. (B) 0. (C) 1. (D) $-\infty$.

**Câu 19**

Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,5111\ldots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính tổng $T = a + b$.

(A) 17.**(B)** 68.**(C)** 133.**(D)** 137.**Câu 20**

Số thập phân vô hạn tuần hoàn $A = 0,353535\ldots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T = ab$.

(A) 3456.**(B)** 3465.**(C)** 3645.**(D)** 3546.**Câu 21**

Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = \frac{1}{n+1}$ và $v_n = \frac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim \frac{v_n}{u_n}$ có giá trị bằng

(A) 1.**(B)** 2.**(C)** 0.**(D)** 3.**Câu 22**

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

(A) $a = 10$.**(B)** $a = 8$.**(C)** $a = 6$.**(D)** $a = 4$.**Câu 23**

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, giá trị của b là

(A) b là một số thực tùy ý.**(B)** $b = 2$.**(C)** không tồn tại b .**(D)** $b = 5$.



Câu 24

Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 3an^4}{(1-a)n^4 + 2n + 1} > 0$.

- Ⓐ $a \leq 0; a \geq 1$. Ⓑ $0 < a < 1$. Ⓒ $a < 0; a > 1$. Ⓓ $0 \leq a < 1$.

Câu 25

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(-10; 10)$ để $L = \lim_{n \rightarrow \infty} (5n - 3(a^2 - 2)n^3) = -\infty$?

- Ⓐ 19. Ⓑ 3. Ⓒ 5. Ⓓ 10.

Câu 26

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + \dots + (\sqrt{2})^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\lim u_n = -\infty$. Ⓑ $\lim u_n = \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$.
 Ⓒ $\lim u_n = +\infty$. Ⓓ Không tồn tại $\lim u_n$.

Câu 27

Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_n = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}, n \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

- Ⓐ $\lim u_n = -1$. Ⓑ $\lim u_n = 0$. Ⓒ $\lim u_n = \frac{1}{2}$. Ⓓ $\lim u_n = 1$.

Câu 28

Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}, n \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

- Ⓐ $\lim u_n = 1$. Ⓑ $\lim u_n = 0$. Ⓒ $\lim u_n = 2$. Ⓓ $\lim u_n = +\infty$.



Câu 29

Biết rằng $\lim \frac{\sqrt[3]{an^3 + 5n^2 - 7}}{\sqrt{3n^2 - n + 2}} = b\sqrt{3} + c$ với a, b, c là các tham số. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a+c}{b^3}$.

- (A) $P = 3$. (B) $P = \frac{1}{3}$. (C) $P = 2$. (D) $P = \frac{1}{2}$.

Câu 30

Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim (\sqrt{n^2 + a^2n} - \sqrt{n^2 + (a+2)n + 1}) = 0$?

- (A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Câu 31

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim u_n = -1$.

- (A) 3. (B) 2. (C) -2. (D) -3.

Câu 32

Biết rằng $\lim \left(\frac{(\sqrt{5})^n - 2^{n+1} + 1}{5 \cdot 2^n + (\sqrt{5})^{n+1} - 3} + \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1} \right) = \frac{a\sqrt{5}}{b} + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $S = a^2 + b^2 + c^2$.

- (A) $S = 26$. (B) $S = 30$. (C) $S = 21$. (D) $S = 31$.


Câu 33

Tìm tất cả giá trị nguyên của a thuộc $(0; 2018)$ để $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+a}}} \leq \frac{1}{1024}$.

(A) 2007.

(B) 2008.

(C) 2017.

(D) 2016.

Câu 34

Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc $(0; 20)$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 + \frac{an^2 - 1}{3 + n^2}} - \frac{1}{2^n}$ là một số nguyên?

(A) 1.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 4.

Câu 35

Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n}$ ($|a| < 1, |b| < 1$) bằng

(A) 0.

(B) $\frac{1-b}{1-a}$.

(C) $\frac{1-a}{1-b}$.

(D) Không tồn tại.

—————HẾT—————

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

Định nghĩa 2.1. Cho điểm x_0 thuộc khoảng K và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn hữu hạn** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

Ví dụ 1

Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

⚠ $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ (c là hằng số).

Ví dụ 2

Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - x)$;

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$.

2. Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số

⚠ a) Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:

✔ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$;

✔ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$;

✔ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$;

✔ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (với $M \neq 0$).

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.
(Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng tìm giới hạn, $x \neq x_0$).



a) $\lim_{x \rightarrow x_0} x^k = x_0^k$, k là số nguyên dương;

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ($c \in \mathbb{R}$, nếu tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$).

Ví dụ 3

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 2);$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 2}{2x + 1}.$

Ví dụ 4

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2};$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}.$

Ví dụ 5

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 5x - 2);$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$

3. Giới hạn một phía

Định nghĩa 2.2.

- ☑ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn bên phải** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.
- ☑ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn bên trái** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.



a) Ta thừa nhận các kết quả sau:

☑ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$;

☑ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ thì không tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

b) Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số ở Mục 2 vẫn đúng khi ta thay $x \rightarrow x_0$ bằng $x \rightarrow x_0^+$ hoặc $x \rightarrow x_0^-$.

**Ví dụ 6**

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 0 \\ 1 & \text{khi } x > 0. \end{cases}$

- a) Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. b) Có tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

Ví dụ 7

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{khi } x \leq -1 \\ x^2 + 2 & \text{khi } x > -1. \end{cases}$

Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (nếu có).

4. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực**Định nghĩa 2.3.**

- ✔ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn hữu hạn** là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.
- ✔ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn hữu hạn** là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Ví dụ 8

Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.



- a) Với c là hằng số và k là số nguyên dương, ta luôn có:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

- b) Các phép toán trên giới hạn hàm số ở Mục 2 vẫn đúng khi thay $x \rightarrow x_0$ bằng $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.

Ví dụ 9

Tìm $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x}{2x^2 + 1}$.

Ví dụ 10

Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 3x^2}{x^2 + 2x}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x + 1}$.

Ví dụ 11

Một cái hồ đang chứa 200 m³ nước mặn với nồng độ muối 10 kg/m³. Người ta ngọt hóa nước trong hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với vận tốc 2 m³/phút.

- Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.
- Tìm giới hạn $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa.

5. Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm

Định nghĩa 2.4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

- ☑ Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn bên phải** là $+\infty$ khi x dần tới x_0 về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow +\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ hay $f(x) \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow x_0^+$.
- ☑ Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn bên phải** là $-\infty$ khi x dần tới x_0 về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow -\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ hay $f(x) \rightarrow -\infty$ khi $x \rightarrow x_0^+$.

- ⚠ a) Các giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa như trên.

b) Ta có các giới hạn thường dùng như sau:

☑ $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x - a} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x - a} = -\infty$ ($a \in \mathbb{R}$);

- ✔ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương;
- ✔ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ với k là số chẵn;
- ✔ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ với k là số lẻ.

c) Các phép toán trên giới hạn hàm số của Mục 2 chỉ áp dụng được khi tất cả các hàm số được xét có giới hạn hữu hạn. Với giới hạn vô cực, ta có một số quy tắc sau đây.

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = +\infty$ (hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = -\infty$) thì $\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x) \cdot g(x)]$ được tính theo quy tắc cho bởi bảng sau:

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x) \cdot g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng khi thay x_0^+ thành x_0^- (hoặc $+\infty, -\infty$).

Ví dụ 12

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-2x}{x-2};$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1).$

Ví dụ 13

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3};$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 1).$

B MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Thay số trực tiếp

Ví dụ 1

Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 2);$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 2}{2x + 1}.$

Ví dụ 2

Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2}{x^3 - x - 6}}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{\frac{2x^4 + 3x + 2}{x^2 - x + 2}}.$

Ví dụ 3

Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{x - 1} = 24$. Tính giới hạn sau

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{(x - 1)(\sqrt{2f(x) + 4} + 6)}.$$

Dạng 2

Phương pháp đặt thừa số chung - kết quả hữu hạn

- ✔ Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- ✔ $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.
- ✔ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$ với c là hằng số và $k \in \mathbb{N}$.
- ✔ $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2b} & a \geq 0 \\ -\sqrt{a^2b} & a < 0. \end{cases}$

Ví dụ 1

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$

 $I = 6.$

Ví dụ 2

Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$.

$\text{A. } I = -1.$

Ví dụ 3

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 7}{x^4 + 1}$.

$\text{A. } 1.$

Ví dụ 4

Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{2x^4 + x^2 - 3}}$.

$\text{A. } 0.$

Ví dụ 5

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$.

$\text{A. } -1.$

Ví dụ 6

Cho m, n là các số thực khác 0. Nếu giới hạn $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + mx + n}{x + 5} = 3$, hãy tìm mn .

$\text{A. } mn = 520.$

Ví dụ 7

Tìm số thực a thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2x^2 + 3} + 2024}{2x + 2023} = \frac{1}{2}$.

$\text{A. } a = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Dạng 3 Phương pháp đặt thừa số chung - kết quả vô cực

Để tìm giới hạn của hàm số ta cần nhớ

$$\textcircled{v} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty, k = 2n \\ -\infty, k = 2n + 1. \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Ví dụ 1

Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$.

$\textcircled{v} +\infty$.

Ví dụ 2

Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x + 1)$.

$\textcircled{v} -\infty$

Ví dụ 3

Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^5 - 3x^3 + x + 1)$.

$\textcircled{v} +\infty$.

Ví dụ 4

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+2}{(x+3)^2}$.

$\textcircled{v} -\infty$.

Ví dụ 5

Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(m^2 - 1)x^3 + 2x] = -\infty$.

$\textcircled{v} m = 0$

Dạng 4 Phương pháp lượng liên hợp kết quả hữu hạn

Ví dụ 1

Cho $P = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}$. Tính P .

(A) $P = \frac{1}{4}$.

(B) $P = \frac{1}{2}$.

(C) $P = 1$.

(D) $P = 0$.

Ví dụ 2

Cho m là hằng số. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 + mx - x - m}$.

(A) $\frac{1}{m}$.

(B) 1.

(C) $\frac{1}{4}$.

(D) $\frac{1}{4(m+1)}$.

Ví dụ 3

Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x + 1) = a$. Tính $2a + 1$.

(A) -1.

(B) -3.

(C) 0.

(D) 3.

Ví dụ 4

Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (ax + b)) = 0$. Tính giá trị biểu thức $T = a - 4b$.

(A) $T = -2$.

(B) $T = 5$.

(C) $T = -1$.

(D) $T = 3$.

Ví dụ 5

Cho $f(x)$ là hàm đa thức thỏa $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 1}{x - 2} = a$ và tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x) + 2x + 1} - x}{x^2 - 4} = T$. Chọn đẳng thức đúng

(A) $T = \frac{a+2}{16}$.

(B) $T = \frac{a+2}{8}$.

(C) $T = \frac{a-2}{8}$.

(D) $T = \frac{a-2}{16}$.

Dạng 5 Giới hạn một bên

Ví dụ 1

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{2 - x}}$.

$$\text{☞ } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{2 - x}} = 0$$

Ví dụ 2

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^3 + 1}{x^3 + 2x^2 + x}$.

$$\text{☞ } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^3 + 1}{x^3 + 2x^2 + x} = -\infty$$

Ví dụ 3

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9 - x^2} & \text{khi } -3 \leq x < 3 \\ 1 & \text{khi } x = 3 \\ \sqrt{x^2 - 9} & \text{khi } x > 3. \end{cases}$

Hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 3$ hay không?

$$\text{☞ } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$

Ví dụ 4

Ta gọi phần nguyên của số thực x là số nguyên lớn nhất không lớn hơn x và kí hiệu nó là $[x]$.
Ví dụ $[5] = 5$; $[3, 12] = 3$; $[-2, 725] = -3$.

Tìm $\lim_{x \rightarrow 1^-} [x]$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} [x]$. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$ có tồn tại hay không?

$$\text{☞ } \lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0; \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1$$



Ví dụ 5

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{2x}}{4 - x^2} & \text{khi } x < 2 \\ x^2 - x + m & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ (m là tham số).

Tìm m để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 2$.

$$\text{Đ. } m = -\frac{17}{8}$$

Dạng 6

Toán thực tế, liên môn về hàm số liên tục

Ví dụ 1

Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x\sqrt{x}} - x + 1)$.

(A) $+\infty$.

(B) 4.

(C) $-\infty$.

(D) $\frac{1}{2}$.

Ví dụ 2

Giới hạn hàm số $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x\sqrt{|x|} + 3} + x)$ bằng

(A) 0.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $+\infty$.

(D) $-\infty$.

Ví dụ 3

Tìm giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^4 + 4x^3 + 1} - x^2)$

(A) $I = -4$.

(B) $I = 1$.

(C) $I = -2$.

(D) $I = -1$.

Ví dụ 4

Tính $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 7x\sqrt{|x|} + 1} - \sqrt{x^2 - 3x\sqrt{|x|} + 2})$.

(A) $L = +\infty$.

(B) $L = -\infty$.

(C) $L = 2$.

(D) $L = -2$.

Ví dụ 5

Tìm tham số m để $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3 + mx^2} - x\sqrt{x}) = -\infty$.

(A) $m = 0$.

(B) $m > 0$.

(C) $m < 0$.

(D) $m = 2$.

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 7x + 4)$;

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{x+8}}{x-1}$.

Bài 2

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{khi } x < 1 \\ x & \text{khi } x \geq 1. \end{cases}$

Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (nếu có).

Bài 3

Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+3}{2x}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3x+1}$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

Bài 4

Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1};$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x^2);$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{3-x}.$

Bài 5

Trong hồ có chứa 6000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t) = \frac{30t}{400+t}$ (gam/lít).

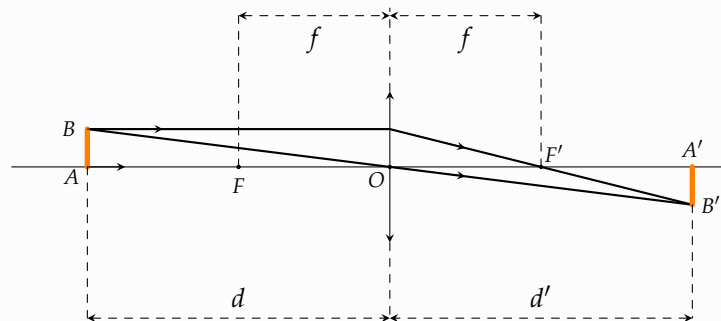
b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu $t \rightarrow +\infty$.

Bài 6

Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là $f > 0$ không đổi. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ vật thật và ảnh của nó tới quang tâm O của thấu kính (xem hình bên dưới). Ta có công thức:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f} \text{ hay } d' = \frac{df}{d-f}.$$

Xét hàm số $g(d) = \frac{df}{d-f}$. Tìm các giới hạn sau đây và giải thích ý nghĩa.



a) $\lim_{d \rightarrow f^+} g(d);$

b) $\lim_{d \rightarrow +\infty} g(d).$

.....

.....



D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11)$ là

- (A) 37. (B) 38. (C) 39. (D) 40.

Câu 2

Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2}$ là

- (A) 1. (B) -2. (C) 2. (D) $-\frac{3}{2}$.

Câu 3

Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - x}{x - 1}$ là

- (A) $-\frac{3}{2}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{3}{2}$.

Câu 4

Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 15}{x - 2}$ là

- (A) $-\infty$. (B) $+\infty$. (C) $-\frac{15}{2}$. (D) 1.

Câu 5

Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ là

(A) $-\infty$.

(B) $+\infty$.

(C) $-\frac{15}{2}$.

(D) Không xác định.

Câu 6

Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ là

(A) $-\infty$.

(B) $+\infty$.

(C) $-\frac{1}{3}$.

(D) $\frac{1}{3}$.

Câu 7

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ là

(A) $+\infty$.

(B) 2.

(C) 4.

(D) $-\infty$.

Câu 8

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ là

(A) $+\infty$.

(B) -1.

(C) 0.

(D) 1.

Câu 9

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{với } x > 3 \\ 1 & \text{với } x = 3 \\ 3 - 2x^2 & \text{với } x < 3 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

(A) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$.

(B) Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

(C) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6$.

(D) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -15$.

Câu 10

Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^3 + 1)$ là

(A) 1.

(B) $-\infty$.

(C) 0.

(D) $+\infty$.

Câu 11

Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x|^3 + 2x^2 + 3|x|)$ là

(A) 0.

(B) $+\infty$.

(C) 1.

(D) $-\infty$.

Câu 12

Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ là

(A) 0.

(B) $+\infty$.

(C) 3.

(D) Không xác định.

Câu 13

Biết rằng $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^3 + 6\sqrt{3}}{3 - x^2} = a\sqrt{3} + b$. Tính $a^2 + b^2$.

(A) 10.

(B) 25.

(C) 5.

(D) 13.

Câu 14

Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x}}{x^2}$ là

- (A) 0. (B) $-\infty$. (C) 1. (D) $+\infty$.

Câu 15

Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3}$ là

- (A) -2. (B) $+\infty$. (C) 3. (D) 2.

Câu 16

Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 7x^2 + 11}{3x^6 + 2x^5 - 5}$ là

- (A) -2. (B) $+\infty$. (C) 0. (D) $-\infty$.

Câu 17

Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2)$ là

- (A) 1. (B) $+\infty$. (C) -1. (D) $-\infty$.

Câu 18

Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1 + 2x^2} - x)$ là

- (A) 0. (B) $+\infty$. (C) $\sqrt{2} - 1$. (D) $-\infty$.



Câu 19

Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$ là

- (A) $-\infty$. (B) $+\infty$. (C) 0. (D) 1.

Câu 20

Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right]$ là

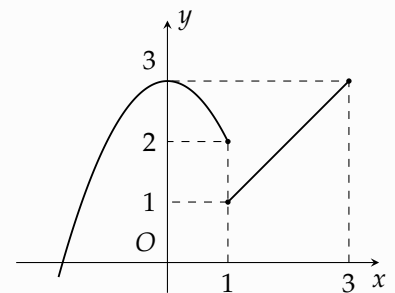
- (A) $+\infty$. (B) -1 . (C) 0. (D) $+\infty$.

Câu 21

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x).$$

- (A) 5. (B) 4.
(C) 2. (D) 0.

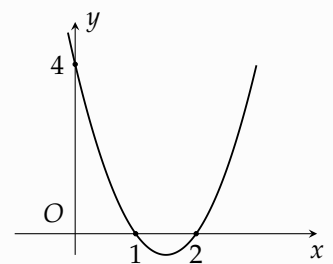


Câu 22

Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Tính

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{3x^2 + 1}.$$

- (A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{2}{3}$.
(C) 2. (D) 1.





Câu 23

Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$. Tính $m + n$.

- (A) $m + n = 0$. (B) $m + n = 1$. (C) $m + n = -1$. (D) $m + n = 3$.

Câu 24

Biết rằng $b > 0, a + b = 5$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-bx}}{x} = 2$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- (A) $1 < a < 3$. (B) $b > 1$. (C) $a^2 + b^2 > 10$. (D) $a - b < 0$.

Câu 25

Tìm tất cả các giá trị của a để $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + ax)$ là $+\infty$.

- (A) $a > \sqrt{2}$. (B) $a < \sqrt{2}$. (C) $a > 2$. (D) $a < 2$.

Câu 26

Biết rằng $a + b = 4$ và $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right)$ hữu hạn. Tính giới hạn

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{b}{1-x^3} - \frac{a}{1-x} \right).$$

- (A) 1. (B) 2. (C) 1. (D) -2.

Câu 27

Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4x + 3}$ là

- (A) $\frac{3}{2}$. (B) $\frac{5}{2}$. (C) $\frac{7}{5}$. (D) $\frac{8}{7}$.



Câu 28

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{3 + 2x}{x + 2}$.

(A) $-\infty$.

(B) 2.

(C) $+\infty$.

(D) $\frac{3}{2}$.

Câu 29

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - x - 4}{x^2 - 1}$.

(A) $\frac{7}{6}$.

(B) $\frac{7}{2}$.

(C) 3.

(D) $\frac{1}{2}$.

Câu 30

Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$.

(A) $\frac{5}{2}$.

(B) $+\infty$.

(C) 2.

(D) 3.

Câu 31

Giới hạn nào sau đây không tồn tại?

(A) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x^2 - 4}$.

(B) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x^2 - 4}$.

(C) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x^2 - 4}$.

(D) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{|x^2 - 4|}$.

Câu 32

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{2x^2 + 5x + 2}$.

(A) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{2x^2 + 5x + 2} = -\frac{1}{3}$.

(B) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{2x^2 + 5x + 2} = 0$.

☐ C $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{2x^2+5x+2} = -\frac{1}{2}.$

☐ D $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{2x^2+5x+2} = \frac{1}{2}.$

Câu 33

Xác định $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2}.$

☐ A 0.

☐ B $-\infty.$

☐ C Không tồn tại.

☐ D $+\infty.$

HẾT

§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Hàm số liên tục tại một điểm

Định nghĩa 3.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

! Để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì phải có cả ba điều sau

a) Hàm số xác định tại x_0 .

b) Tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

c) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

! Khi hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại điểm x_0 thì ta nói $f(x)$ gián đoạn tại điểm x_0 và x_0 được gọi là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$.

Ví dụ 1

Xét tính liên tục của hàm số

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ tại điểm $x_0 = 2$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x > 0 \\ 2x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

Định nghĩa 3.2.

☑ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm trong khoảng ấy.

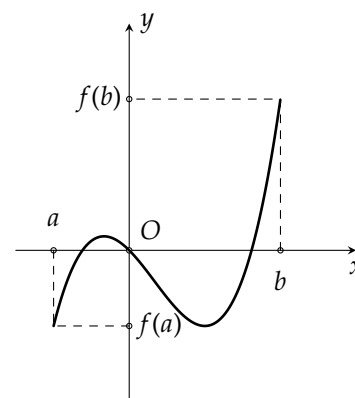
☑ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a; b]$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu $f(x)$ liên tục tại trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.



! Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ là một đường liền, có điểm đầu, điểm cuối như hình vẽ bên. Nếu hai điểm này nằm về hai phía so với trục hoành thì đường liền nói trên luôn cắt trục hoành tại ít nhất một điểm. Điều này có thể được phát biểu dưới dạng như sau:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì luôn tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.



Ví dụ 2

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

3. Tính liên tục của hàm số sơ cấp

Định nghĩa 3.3.

- ✔ Hàm số đa thức $P(x)$, các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- ✔ Hàm số phân thức $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, hàm số căn thức $y = \sqrt{P(x)}$, các hàm số lượng giác $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên các khoảng của tập xác định của chúng. Trong đó, $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức.

! Hàm số thuộc những loại trên được gọi chung là hàm số sơ cấp. Khi nói xét tính liên tục của một hàm số mà không nói gì thêm thì ta xét tính liên tục của hàm số đó trên những khoảng của tập xác định của chúng.

Ví dụ 3

Xét tính liên tục của các hàm số sau

a) $y = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 2$.

b) $y = \frac{3x^2 + x - 1}{x - 2}$.

4. Tổng, hiệu, tích, thương của hàm số liên tục

Định nghĩa 3.4. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

- ✔ Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 .
- ✔ Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

**Ví dụ 4**

Xét tính liên tục của hàm số $y = \frac{\sin x}{x+1}$.

.....

.....

.....

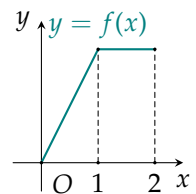
B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP**Dạng 1** Dựa vào đồ thị xét tính liên tục của hàm số tại một điểm, một khoảng.

Để xét tính liên tục của hàm số khi biết đồ thị, ta cần nhớ:

- ✔ Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền nét trên khoảng đó.
- ✔ Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0; 2)$.



📌 Hàm số liên tục trên khoảng $(0; 2)$.

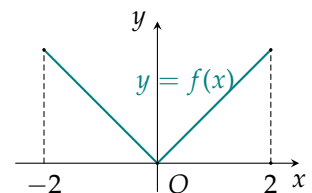
.....

.....

.....

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-2; 2)$.



📌 Hàm số liên tục trên khoảng $(-2; 2)$.

.....

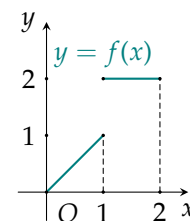
.....

.....



Ví dụ 3

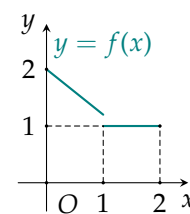
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0; 2)$.



📌 Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(0, 1)$, $(1, 2)$ và gián đoạn tại $x = 1$.

Ví dụ 4

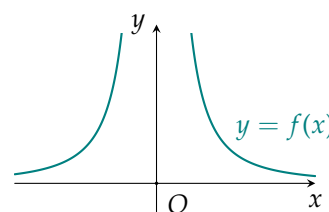
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0; 2)$.



📌 Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(0, 1)$, $(1, 2)$ và gián đoạn tại $x = 1$.

Ví dụ 5

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có đồ thị như hình bên. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathcal{D}$.



📌 Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$. Gián đoạn tại điểm $x = 0$.

Dạng 2 Hàm số liên tục tại một điểm

Để kiểm tra tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ ta cần làm như sau:

- ✔ Bước 1: Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
- ✔ Bước 2: Tính $f(x_0)$. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ thì kết luận hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = x_0$.
Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì kết luận hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = x_0$.

**Ví dụ 1**

Biết rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Xét tính liên tục của $y = f(x)$ tại $x = 0$?

$f(x)$ không liên tục tại $x = 0$.

Ví dụ 2

Hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x^4 + x}{x^2 + x} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x = -1, x = 0$.

Hàm số liên tục tại $x = -1, x = 0$.

Ví dụ 3

Tìm số điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x(x+1)}{x^2-1} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$?

Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Ví dụ 4

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ tại $x = 0$?

Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

Ví dụ 5

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x} & \text{khi } x < 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = 0, x = 1$?

 Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0$ và $x = 1$.

Dạng 3 Hàm số liên tục trên khoảng, đoạn

✔ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

✔ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục trên khoảng (a, b) và

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

✔ Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền nét trên khoảng đó.

Ví dụ 1

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x + 2} - 2} & \text{khi } x > 2 \\ m^2x - 4m + 6 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$, m là tham số. Với giá trị nào của m thì hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$?

 $m = 1$.

Ví dụ 2

Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x < -1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$ liên tục tại $x = -1$?

 $m = \frac{5}{2}$.

Ví dụ 3

Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{khi } x > 4 \\ mx + 1 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 4$. $\text{Đ} \quad m = \frac{7}{4}$.

Ví dụ 4

Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \text{khi } x > -1 \\ mx - 2m^2 & \text{khi } x \leq -1 \end{cases}$ liên tục tại $x = -1$. $\text{Đ} \quad m \in \left\{1; -\frac{3}{2}\right\}$.

Ví dụ 5

Tìm giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ m + \frac{1-x}{1+x} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$? $\text{Đ} \quad m = -2$.

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ tại điểm $x = 0$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.



Bài 2

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ a & \text{khi } x = -2. \end{cases}$

Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 3

Xét tính liên tục của các hàm số sau

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

b) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

c) $h(x) = \cos x + \tan x$.

Bài 4

Cho hàm số $f(x) = 2x - \sin x$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$.

Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x) \cdot g(x)$ và $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Bài 5

Một bãi đậu xe ô-tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x) = \begin{cases} 60.000 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ 100.000 & \text{khi } 2 < x \leq 4 \\ 200.000 & \text{khi } 4 < x \leq 24. \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

**Bài 6**

Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của

$$\text{nó là } F(r) = \begin{cases} \frac{GM}{R^3} & \text{khi } 0 < r \leq R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geq R \end{cases}, \text{ trong đó } M \text{ là khối lượng, } R \text{ là bán kính của Trái Đất, } G$$

là hằng số hấp dẫn. Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0; +\infty)$ không?

.....

.....

.....

.....



D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^2}{x}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- (A) Hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \neq 0$.
 (B) Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
 (C) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
 (D) Vì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nên $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Câu 2

Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x + 4}$ với $x \neq -4$. Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -4$ thì ta cần bổ sung giá trị $f(-4)$ bằng bao nhiêu?

- (A) 5. (B) -5. (C) 3. (D) 0.

Câu 3

Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x = 1$?

- (A) $y = \frac{x-1}{x^2+x+1}$. (B) $y = \frac{x^2-x+1}{x+1}$.
 (C) $y = (x-1)(x^2+x+1)$. (D) $y = \frac{x^2+2}{x-1}$.



Câu 4

Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

(A) $a = -1$.

(B) $a = 2$.

(C) $a = 1$.

(D) $a = 0$.

Câu 5

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + 7 & \text{khi } x \neq -1 \\ 2x + m - 1 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -1$.

(A) $m = 10$.

(B) $m = 8$.

(C) $m = -10$.

(D) $m = 12$.

Câu 6

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ mx + 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x = 2$.

(A) $m = \frac{15}{2}$.

(B) $m = \frac{11}{2}$.

(C) $m = \frac{17}{2}$.

(D) $m = \frac{13}{2}$.

Câu 7

Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ n & \text{khi } x = 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Biết hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$. Giá trị của m, n là

(A) $n = m = 1$.

(B) $n = 1, m = 0$.

(C) $n = -1, m = 0$.

(D) $n = 0, m = 1$.



Câu 8

Cho a, b là hai số thực sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} & , \text{ với } x \neq 1 \\ 2ax - 1 & , \text{ với } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $a - b$.

Ⓐ -5 . Ⓑ 7 . Ⓒ -1 . Ⓓ 0 .

Câu 9

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{khi } x \neq 4 \\ ax - 1 & \text{khi } x = 4 \end{cases}$. Tập hợp các giá trị của a để hàm số liên tục tại $x = 4$ là

Ⓐ $\{8\}$. Ⓑ $\{0\}$. Ⓒ $\left\{-\frac{9}{4}\right\}$. Ⓓ $\left\{\frac{9}{4}\right\}$.

Câu 10

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{khi } |x| \leq 1 \\ x + 1 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
 Ⓑ Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
 Ⓒ Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
 Ⓓ Hàm số gián đoạn tại $x = \pm 1$.

Câu 11

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + m & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x - 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$.

Ⓐ $m = 0$. Ⓑ $m = 1$. Ⓒ $m = 3$. Ⓓ $m = 2$.

**Câu 12**

Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $m(x-1)^3(x-2) + 2x - 3 = 0$ vô nghiệm.

- ☐ A $m = 1$.
 ☐ B $m = 0$.
 ☐ C $\forall m \in \mathbb{R}$.
 ☐ D Không có giá trị m .

Câu 13

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{với } x \neq 2 \\ 2m + 1 & \text{với } x = 2 \end{cases}$. Với giá trị nào của m sau đây để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

- ☐ A 2.
 ☐ B 0.
 ☐ C 1.
 ☐ D -1.

Câu 14

Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + 3$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- ☐ A Hàm số đã cho gián đoạn tại $x_0 = \frac{1}{5}$.
 ☐ B Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(0; +\infty)$.
 ☐ C Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$.
 ☐ D Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 15

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & , \text{ khi } x > 1 \\ 2x + 1 & , \text{ khi } x \leq 1 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng.

- ☐ A Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 1$.
 ☐ B Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
 ☐ C Hàm số $f(x)$ không xác định tại $x = 1$.
 ☐ D Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$.



Câu 16

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - (a-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 8 + a^2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số liên tục tại $x = 1$.

- (A) 2. (B) 0. (C) 1. (D) 3.

Câu 17

Cho hàm số $f(x) = x^5 + x - 1$. Xét phương trình $f(x) = 0$ (1). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- (A) Phương trình (1) vô nghiệm.
 (B) Phương trình (1) không có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$.
 (C) Phương trình (1) có nghiệm trên khoảng $(0; 1)$.
 (D) Phương trình (1) không có nghiệm trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 18

Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

- (A) $m = -2$. (B) $m = 2$. (C) $m = -1$. (D) $m = 1$.

Câu 19

Tìm P để hàm số $y = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ 6Px - 3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- (A) $P = \frac{1}{3}$. (B) $P = \frac{5}{6}$. (C) $P = \frac{1}{6}$. (D) $P = \frac{1}{2}$.



Câu 20

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2a - \frac{5}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

☐ A $a = \frac{3}{4}$.

☐ B $a = -\frac{3}{4}$.

☐ C $a = \frac{4}{3}$.

☐ D $a = -\frac{4}{3}$.

Câu 21

Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

☐ A Hàm số $y = 2x^3 - 10x^2 + 3x + 2017$ liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

☐ B Hàm số $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

☐ C Hàm số $y = \frac{1}{x^3 + 1}$ liên tục tại mọi điểm $x \neq -1$.

☐ D Hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{2-x}}$ liên tục tại mọi điểm $x \neq 2$.

Câu 22

Hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ x + m & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$ khi m nhận giá trị

☐ A $m = 1$.

☐ B $m = 2$.

☐ C $m = -1$.

☐ D $m = -2$.

Câu 23

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) \geq x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x, \forall x > 0$ và $f(1) = -1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

☐ A phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm trên $(0; +\infty)$.

☐ B phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(0; 1)$.

☐ C phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(1; 2)$.

☐ D phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(2; 5)$.



Câu 24

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) \leq 0$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- Ⓐ Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[a; b]$.
- Ⓑ Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$.
- Ⓒ Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$ là “đường liền”.
- Ⓓ Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = a$.

Câu 25

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K chứa a . Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = a$ nếu

- Ⓐ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- Ⓑ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a$.
- Ⓒ $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow a$.
- Ⓓ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$.

Câu 26

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + a - 1 & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của a để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

- Ⓐ $a = 2$.
- Ⓑ $a = 3$.
- Ⓒ $a = 1$.
- Ⓓ $a = 4$.

Câu 27

Biết hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{khi } x \neq 1, \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Để hàm số liên tục tại $x = 1$ thì giá trị của a bằng

- Ⓐ 1.
- Ⓑ -1.
- Ⓒ 2.
- Ⓓ 8.

**Câu 28**

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x^2-4}-2}{x-2} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

(A) 8.**(B)** 6.**(C)** 2.**(D)** 4.**Câu 29**

Khẳng định nào sau đây là đúng?

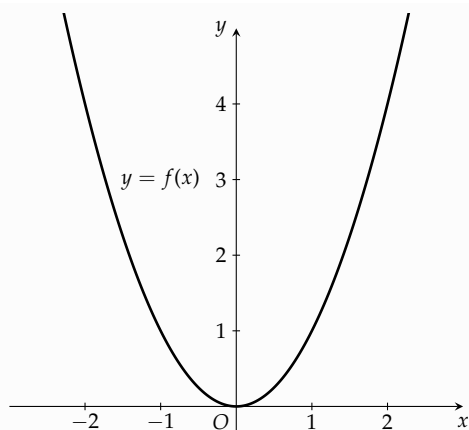
(A) Hàm số $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.**(B)** Hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.**(C)** Hàm số $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.**(D)** Hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.**Câu 30**

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x}{x+1} & \text{với } x < 0, x \neq -1 \\ 1 & \text{với } x = -1 \\ \sqrt{x} \cos x & \text{với } x \geq 0. \end{cases}$

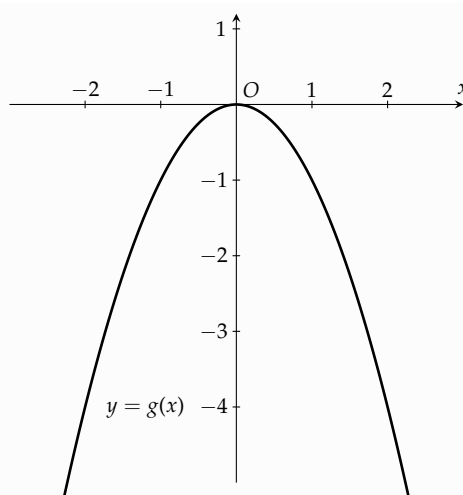
Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.**(B)** $f(x)$ liên tục tại mọi điểm, trừ điểm $x = -1$.**(C)** $f(x)$ liên tục tại mọi điểm, trừ điểm $x = 0$.**(D)** $f(x)$ liên tục tại mọi điểm, trừ điểm $x = 0$ và $x = 1$.**Câu 31**

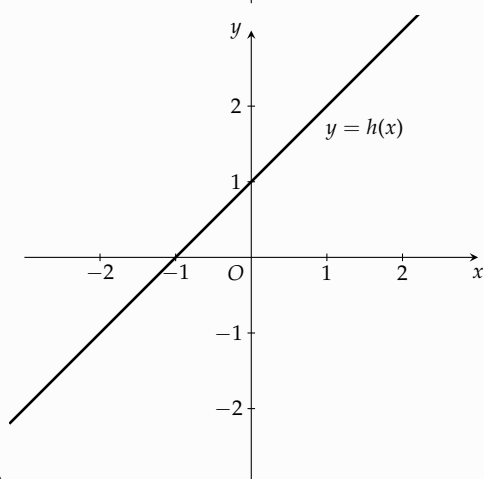
Các đồ thị của các hàm số $y = f(x), y = g(x), y = h(x), y = t(x)$ như hình vẽ bên dưới. Đồ thị nào thể hiện hàm số không liên tục trên khoảng $(-2; 2)$?



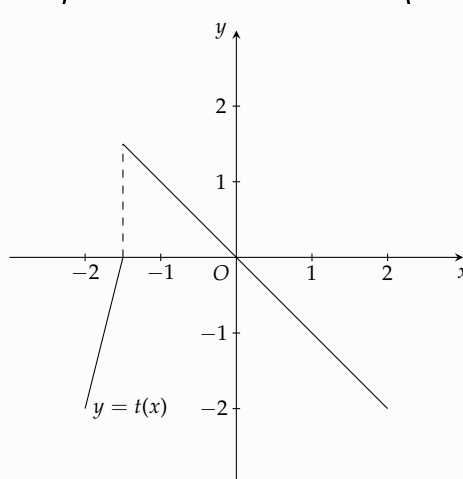
A



B



C



D

Câu 32

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thỏa mãn $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$, với $m > 0$. Chọn câu khẳng định đúng trong các câu sau.

- A** Phương trình luôn có nghiệm $x \in (-2; -1)$.
- B** Phương trình luôn có nghiệm $x \in (1; 2)$.
- C** Phương trình luôn có nghiệm $x \in (2; 3)$.
- D** Phương trình luôn có nghiệm $x \in (0; 1)$.

Câu 33

Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{khi } x > 4 \\ mx + 1 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 4$.



$\textcircled{\text{A}} \ m = 8.$

$\textcircled{\text{B}} \ m = -\frac{7}{4}.$

$\textcircled{\text{C}} \ m = \frac{7}{4}.$

$\textcircled{\text{D}} \ m = -8.$

—————HẾT—————





§4. ÔN TẬP CHƯƠNG III

A BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 là

- (A) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
 (B) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
 (C) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.
 (D) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Câu 2

Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x + 1}{5x - 1}$.

- (A) 0. (B) $\frac{4}{5}$. (C) $\frac{5}{4}$. (D) -1.

Câu 3

Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n^3}{2n^3 + 5n - 2}$.

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{5}$. (C) $-\frac{3}{2}$. (D) 0.

**Câu 4**

Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0 ?

(A) $(\sqrt{2})^n$.

(B) $(-1, 101)^n$.

(C) $(0, 919)^n$.

(D) $(1, 001)^n$.

Câu 5

Tính $\lim(\sqrt{4n^2 + 2n} - 2n)$.

(A) 0.

(B) $\frac{1}{4}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) 1.

Câu 6

Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$.

(A) 0.

(B) $+\infty$.

(C) 3.

(D) 1.

Câu 7

Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

(A) $\lim \frac{2^n + 3}{1 - 2^n}$.

(B) $\lim \frac{(2n + 1)(n - 3)^2}{n - 2n^3}$.

(C) $\lim \frac{1 - n^3}{n^2 + 2n}$.

(D) $\lim \frac{2^n + 1}{3 \cdot 2^n - 3^n}$.

Câu 8

Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$.

(A) $-\frac{1}{3}$.

(B) $\frac{1}{3}$.

(C) 1.

(D) -1.



Câu 9

Hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 - x + 2}{x^2 - 4} & \text{nếu } x \neq -2 \\ a & \text{nếu } x = -2 \end{cases}$. Hàm số liên tục tại $x = -2$ khi:

(A) $a = \frac{3}{4}$.

(B) $a = -\frac{3}{4}$.

(C) $a = \frac{1}{4}$.

(D) $a = -\frac{1}{4}$.

Câu 10

Chọn mệnh đề sai.

(A) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20} = \frac{9}{8}$.

(B) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 2$.

(C) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{5}{4}$.

(D) $\lim_{x \rightarrow 1} (4x^6 - 5x^5 + x) = 0$.

Câu 11

Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 10} - x)$.

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) 0.

(C) $+\infty$.

(D) $-\infty$.

Câu 12

Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 2x + 1}{4x - x^2}$.

(A) -3.

(B) $\frac{3}{4}$.

(C) $-\infty$.

(D) $+\infty$.

Câu 13

Tính $\lim \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$.

(A) $\frac{1}{3}$.

(B) $\frac{2}{3}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) 1.

Câu 14

Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2 - 1}$

Ⓐ 0.

Ⓑ $\frac{1}{2}$.

Ⓒ 1.

Ⓓ $\frac{3}{2}$.

Câu 15

Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right)$.

Ⓐ -2.

Ⓑ 2.

Ⓒ 1.

Ⓓ -1.

Câu 16

Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 1} + x}{3x + 1}$.

Ⓐ 0.

Ⓑ $\frac{2}{3}$.Ⓒ $-\frac{2}{3}$.Ⓓ $\frac{1}{3}$.

Câu 17

Với giá trị nào của a hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 5x + a & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $a = 2$.Ⓑ $a = 1$.Ⓒ $a = -1$.Ⓓ $a = -2$.

Câu 18

Với giá trị nào của a hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x + 2} - 2} & \text{khi } x > 2 \\ a + 2x & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$?

Ⓐ $a = -20$.Ⓑ $a = 5$.Ⓒ $a = 12$.Ⓓ $a = 10$.



Câu 19

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- (A) Phương trình $2x^3 - 10x - 7 = 0$ có nghiệm.
- (B) Phương trình $2x + 6\sqrt[3]{1-x} = 3$ có đúng 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4; 7)$.
- (C) Phương trình $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có 5 nghiệm thuộc khoảng $(-2; 3)$.
- (D) Phương trình $\cos^2 x - \sqrt{x} = 0$ vô nghiệm.

Câu 20

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$

- (A) 2.
- (B) 0.
- (C) 1.
- (D) -2.

Câu 21

Có bao nhiêu giá trị của tham số $m \in \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+m} + \sqrt[3]{x-m}}{x} = 1.$$

- (A) 1.
- (B) 3.
- (C) 0.
- (D) 2.

Câu 22

Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3} - x\sqrt{3}} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} + d (a, b, c, d \in \mathbb{Q})$. Tính $ab - cd$.

- (A) 0.
- (B) 1.
- (C) 2.
- (D) 3.



Câu 23

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{2017x^2 - 2017}$ có giá trị bao nhiêu?

(A) $-\frac{11}{48408}$.

(B) $\frac{11}{48408}$.

(C) $-\frac{11}{48409}$.

(D) $-\frac{11}{46391}$.

Câu 24

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^{100} - 2017x^{50} + 32} - x^{50})$ có giá trị bao nhiêu?

(A) 0.

(B) $-\frac{1}{2}$.

(C) $-\frac{2017}{2}$.

(D) $+\infty$.

Câu 25

Từ một hình vuông có diện tích là 1m^2 . Gọi A, B, C, D lần lượt là trung điểm bốn cạnh của hình vuông, bạn Hùng dùng bút chì vẽ theo hình vuông $ABCD$ để được hình vuông thứ hai. Bạn Hùng lại tiếp tục vẽ theo bốn trung điểm các cạnh của hình vuông $ABCD$ để được hình vuông thứ ba, và cứ tiếp tục như vậy. Tính tổng diện tích tất cả các hình vuông đã có.

(A) 4.

(B) 2.

(C) 3.

(D) $\frac{1}{2}$.

Câu 26

Cho $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x^2-1} - \sqrt[4]{1+5x}}{x-3} = \frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ tối giản. Tìm giá trị của tổng $a^2 + b^2$.

(A) 4709.

(B) 6005.

(C) 1145.

(D) 449.

B BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 6n + 1}{8n^2 + 5}$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n + 1}{-3n^3 + 5n^2 - 2}$;

c) $\lim \frac{\sqrt{4n^2 - n + 3}}{8n - 5};$

d) $\lim \left(4 - \frac{2^{n+1}}{3^n} \right);$

e) $\lim \frac{4 \cdot 5^n + 2^{n+2}}{6 \cdot 5^n};$

f) $\lim \frac{2 + \frac{4}{n^3}}{6^n}.$

Bài 2

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} (4x^2 - 5x + 6);$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2};$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}.$

Bài 3

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x + 8}{5x - 2};$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 8}{5x - 2};$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - x + 1}}{3x - 2};$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - x + 1}}{3x - 2};$

e) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2 + 4}{2x + 4};$

f) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^2 + 4}{2x + 4}.$

Bài 4

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{nếu } x < 2 \\ 4 & \text{nếu } x = 2 \\ -3x + b & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$

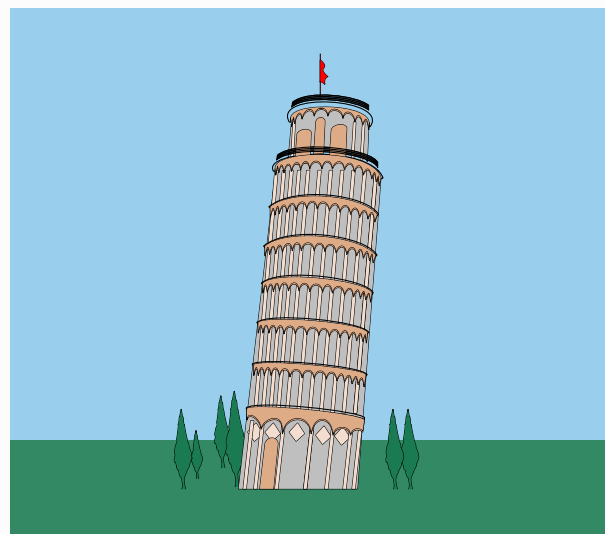
a) Với $a = 0, b = 1$, xét tính liên tục của hàm số tại $x = 2$.

b) Với giá trị nào của a, b thì hàm số liên tục tại $x = 2$?

c) Với giá trị nào của a, b thì hàm số liên tục trên tập xác định?

Bài 5

Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất hình bên dưới. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính lim S_n .



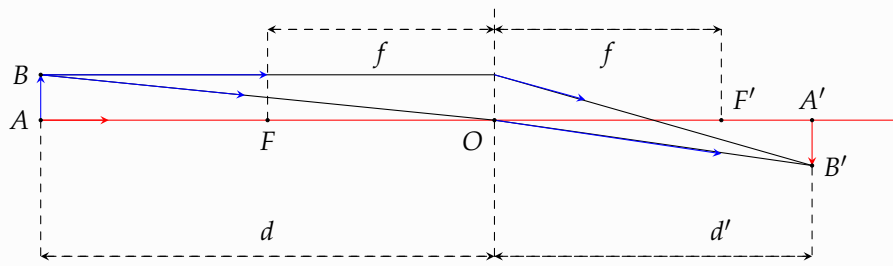
Bài 6

Cho một tam giác đều ABC cạnh a . Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC , tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1, \dots$, tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n, \dots$. Gọi $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ và $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n, \dots$.

- Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .
- Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$ và $S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$.

Bài 7

Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f . Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh $A'B'$ của nó tới quang tâm O của thấu kính như hình vẽ bên dưới. Công thức thấu kính là $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$.



a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d' = \varphi(d)$.

b) Tìm $\lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d)$, $\lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d)$ và $\lim_{d \rightarrow f} \varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.

.....

.....

.....

.....

Chương

4

QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

§1. ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Mặt phẳng trong không gian

1.1. Điểm thuộc mặt phẳng

Cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P) .

- ✔ Nếu điểm A thuộc mặt phẳng (P) thì ta nói A nằm trên (P) hay (P) chứa A , hay (P) đi qua A và kí hiệu là $A \in (P)$.
- ✔ Nếu điểm B không thuộc mặt phẳng (P) thì ta nói B nằm ngoài (P) hay (P) không chứa B và kí hiệu là $B \notin (P)$.

1.2. Biểu diễn các hình trong không gian lên một mặt phẳng

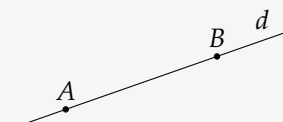
Để biểu diễn một hình trong không gian lên một mặt phẳng (tờ giấy, mặt bảng, ...), ta thường dựa vào các quy tắc sau:

- ✔ Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
- ✔ Giữ nguyên tính liên thuộc (thuộc hay không thuộc) giữa điểm với đường thẳng hoặc với đoạn thẳng.
- ✔ Giữ nguyên tính song song, tính cắt nhau giữa các đường thẳng.
- ✔ Biểu diễn đường nhìn thấy bằng nét vẽ liền và biểu diễn đường bị che khuất bằng nét vẽ đứt đoạn.

2. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

Tính chất 1.1.

Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.



Đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt A, B được kí hiệu là AB . Ta cũng nói đường thẳng AB xác định bởi hai điểm A, B .

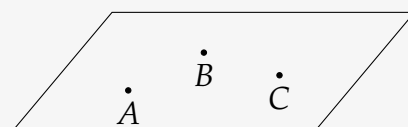


Ví dụ 1

Cho ba điểm phân biệt M, N, P không thẳng hàng. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua hai trong ba điểm đã cho?

Tính chất 1.2.

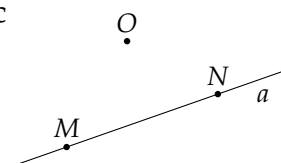
Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.



⚠ Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng được kí hiệu là mặt phẳng (ABC) .

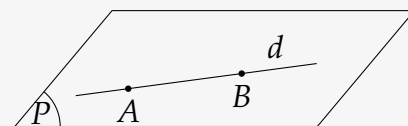
Ví dụ 2

Cho đường thẳng a đi qua hai điểm phân biệt M, N và điểm O không thuộc a . Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua ba điểm M, N, O ?



Tính chất 1.3.

Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.



⚠ Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) thường được kí hiệu là $d \subset (P)$ hoặc $(P) \supset d$.

Ví dụ 3

Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và một điểm M nằm trên đường thẳng BC . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C . Chứng tỏ rằng $M \in (P)$.

Tính chất 1.4. Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

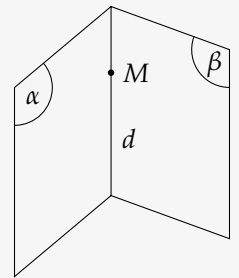
⚠ Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó đồng phẳng, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói chúng không đồng phẳng.

Ví dụ 4

Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trên một mặt phẳng. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua ba trong bốn điểm đã cho?

Tính chất 1.5.

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.



! Đường thẳng d chung của hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là giao tuyến của (P) và (Q) , kí hiệu $d = (P) \cap (Q)$.

Ví dụ 5

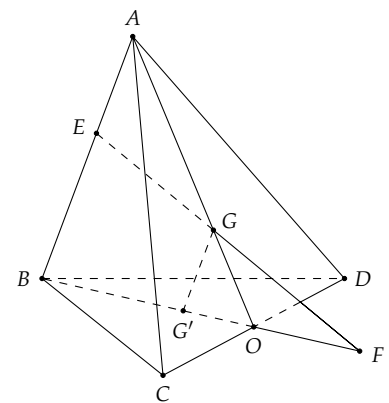
Cho tam giác ABC và một điểm O không thuộc mặt phẳng (ABC) . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (OAB) và (ABC) .

Tính chất 1.6. Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

Ví dụ 6

Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trên một mặt phẳng.

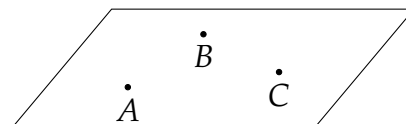
- Gọi O là trung điểm của CD , G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD và BCD . Chứng minh $GG' \parallel AB$.
- Cho điểm E trên AB sao cho EG cắt mặt phẳng đi qua ba điểm B, C, D tại F . Chứng minh bốn điểm B, G', O, F thẳng hàng.

**3. Cách xác định mặt phẳng**



- ✔ Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa ba điểm không thẳng hàng.

Mặt phẳng xác định bởi ba điểm A, B, C không thẳng hàng kí hiệu là $mp(ABC)$ hay (ABC) .



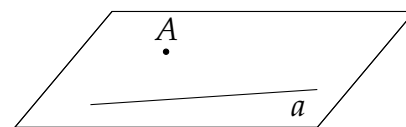
Ví dụ 7

Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và không nằm trong mặt phẳng (P) . Biết ba đường thẳng AB, AC, BC lần lượt cắt (P) tại các điểm M, N, E . Ba điểm M, N, E có thẳng hàng không? Giải thích.



- ✔ Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó.

Mặt phẳng xác định bởi điểm A và đường thẳng a không qua điểm A kí hiệu là $mp(A, a)$ hay (A, a) .



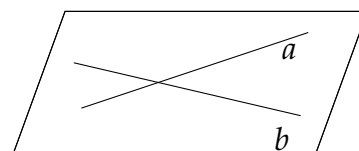
Ví dụ 8

Với đường thẳng d và hai điểm M, N phân biệt không thuộc d , ta xác định được bao nhiêu mặt phẳng?



- ✔ Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Mặt phẳng xác định bởi điểm hai đường thẳng a, b cắt nhau kí hiệu là $mp(a, b)$.



Ví dụ 9

Với ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng và cùng đi qua một điểm O , ta xác định được bao nhiêu mặt phẳng?

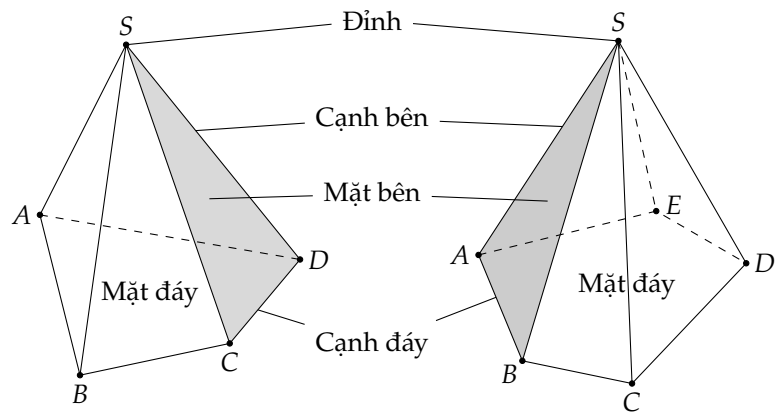
4. Hình chóp và hình tứ diện

4.1. Hình chóp

Cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$ nằm trong mặt phẳng (α) và điểm S không thuộc (α) . Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$. Hình tạo bởi n tam giác đó và đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ được gọi là hình chóp, kí hiệu $S.A_1A_2 \dots A_n$.

Trong hình chóp $S.A_1A_2 \dots A_n$, ta gọi:

- ✔ Điểm S là **đỉnh**;
- ✔ Các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$ là các **mặt bên**;
- ✔ Đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ là **mặt đáy**;
- ✔ Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ là các **cạnh bên**;
- ✔ Các cạnh của đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ là các **cạnh đáy**.



Ta gọi hình chóp có đáy tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... lần lượt là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...

Ví dụ 10

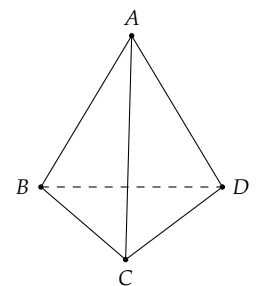
Cho hình chóp $S.ABCD$ (Hình vẽ bên). Gọi tên các mặt bên, mặt đáy, cạnh bên, cạnh đáy của hình chóp $S.ABCD$.

4.2. Hình tứ diện

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình tạo bởi bốn tam giác ABC, ACD, ADB và BCD được gọi là hình tứ diện (hay tứ diện), kí hiệu $ABCD$.

Trong tứ diện $ABCD$, ta gọi:

- ✔ Các điểm A, B, C, D là các **đỉnh**.
- ✔ Các đoạn thẳng AB, AC, AD, BC, CD, BD là các **cạnh** của tứ diện.
- ✔ Hai cạnh không đi qua một đỉnh là **hai cạnh đối diện**.
- ✔ Các tam giác ABC, ACD, ADB, BCD là các **mặt** của tứ diện.
- ✔ Đỉnh không thuộc một mặt của tứ diện là **đỉnh đối diện** với mặt đó.



Ví dụ 11

Gọi tên các mặt, các cặp cạnh đối diện của tứ diện $MNPQ$.



Chú ý:

- ✓ Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều được gọi là hình tứ diện đều.
- ✓ Một tứ diện có thể xem như là một hình chóp tam giác với đỉnh là một đỉnh tùy ý của tứ diện và đáy là mặt của tứ diện không chứa đỉnh đó.

Ví dụ 12

Cho tứ diện $SABC$. Gọi M và N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh AB và BC sao cho MN không song song với AC .

- a) Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) .
- b) Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (SMN) và (SAC) ; (SAN) và (SCM) .

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ta tìm hai điểm phân biệt cùng thuộc cả hai mặt phẳng đó.

Ví dụ 1

Cho S là một điểm không thuộc mặt phẳng hình bình hành $ABCD$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

Ví dụ 2

Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D . Trên hai đoạn AB và AC lấy hai điểm M, N sao cho $\frac{AM}{BM} = 1$ và $\frac{AN}{NC} = 2$. Hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng (DMN) với mặt phẳng (BCD) .

Ví dụ 3

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD , trên cạnh AD lấy điểm P không trùng với trung điểm của AD . Gọi E là giao điểm của đường thẳng MP và đường thẳng BD . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (PMN) và (BCD) .

Ví dụ 4

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD) .
- Gọi M, N là hai điểm lần lượt lấy trên hai đoạn thẳng AB và AC . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN) .

Ví dụ 5

Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là tứ giác $ABCD$ có hai cạnh đối diện AB và CD không song song. Lấy điểm M thuộc miền trong của tam giác SCD . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

- (SBM) và (SCD) ;
- (ABM) và (SCD) ;
- (ABM) và (SAC) .

Dạng 2 Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Muốn tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) , ta tìm giao điểm của d với một đường thẳng a nằm trong (P) . Xét hai khả năng:

① Nếu đường thẳng a dễ thấy, nghĩa là thấy sẵn $a \subset (P)$ và a cắt được d . Khi đó

- Gọi $M = d \cap a$, khi đó $\begin{cases} M \in d \\ M \in a \subset (P) \end{cases}$.
- Vậy $M = d \cap (P)$.

② Nếu đường thẳng a khó thấy, ta thực hiện các bước sau:

- Tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và dễ tìm giao tuyến với (P) ;
- Tìm $(Q) \cap (P) = a$.
- Tìm $M = d \cap a$, suy ra $M = d \cap (P)$.

Ví dụ 1

Cho tứ diện $ABCD$ và E là một điểm nằm trong tam giác BCD . Gọi F là một điểm nằm giữa A và E . Xác định giao điểm của đường thẳng BF và mặt phẳng ACD .



Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của SA . Tìm giao tuyến của đường thẳng SG và mặt phẳng (MBC) .

Ví dụ 3

Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SB . K là điểm trên cạnh AC sao cho $AK > KC$. Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng MNK .

Ví dụ 4

Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AC, AD lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $AC = 3AM, 3AN = 2AD$. Gọi O là điểm thuộc miền trong của tam giác BCD . Tìm giao điểm của BD và mặt phẳng OMN .

Ví dụ 5

Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N tương ứng là các điểm thuộc các cạnh SC và BC . Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN) .

Dạng 3 Tìm thiết diện của hình $(\mathcal{H})$ khi cắt bởi mặt phẳng (P)

Ta tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó là thiết diện cần tìm và các đoạn giao tuyến chính là các cạnh của thiết diện.

Ví dụ 1

Cho tứ diện $ABCD$. Trên các đoạn CA, CB, BD cho lần lượt các điểm M, N, P sao cho MN không song song với AB . Gọi (α) là mặt phẳng xác định bởi ba điểm M, N, P . Dựng thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện $ABCD$.

**Ví dụ 2**

Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA, SB lần lượt lấy M, N sao cho MN không song song với AB . Gọi P là điểm thuộc miền trong tam giác ABC . Xác định thiết diện khi cắt hình chóp bởi mặt phẳng (MNP) .

Ví dụ 3

Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi K, N lần lượt là trung điểm SA, BC và M là điểm thuộc đoạn SC sao cho $3SM = 2MC$.

- Tìm thiết diện của (KMN) và hình chóp.
- Mặt phẳng (KMN) cắt AB tại I . Đặt $IA = kIB$. Tìm k .

Ví dụ 4

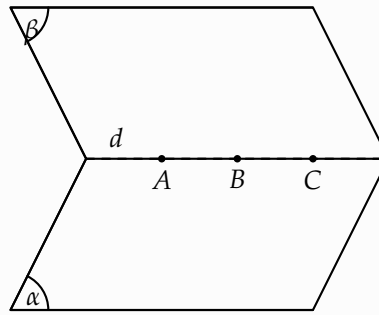
Cho hình chóp $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M , điểm N trên BC thỏa $BN = 2NC$, P là trung điểm CD . Xác định thiết diện khi cắt hình chóp bởi mặt phẳng (MNP) .

Ví dụ 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang đáy lớn AD . Lấy điểm M trên cạnh SB . Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AMD) và hình chóp.

Dạng 4**Chứng minh ba điểm thẳng hàng**

Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta cần chứng minh ba điểm này lần lượt thuộc hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) . Nghĩa là chúng cùng thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng (α) và (β) nên chúng thẳng hàng.



Ví dụ 1

Cho tứ diện $SABC$. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho MN cắt AB tại I, NP cắt BC tại J và MP cắt AC tại K . Chứng minh rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Ví dụ 2

Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD .

- Xác định giao tuyến của (ADN) và (ABP) .
- Gọi $I = AG \cap MP$ và $J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

Ví dụ 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD , điểm P thuộc SC và không là trung điểm của SC .

- Tìm giao điểm của SO với (MNP) .
- Tìm giao điểm Q của SA với mặt phẳng (MNP) .
- Gọi F, G, H lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD . Chứng minh ba điểm F, G, H thẳng hàng.

Ví dụ 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC . Lấy M thuộc SB và O là giao điểm AC với BD .

- Tìm giao điểm N của SC với (ADM) .



b) Gọi $I = AN \cap DM$. Chứng minh S, I, O thẳng hàng.

Ví dụ 5

Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD .

- Tìm giao tuyến của (ADN) và (ABP) .
- Gọi $I = AG \cap MP$ và $J = CM \cap AN$ Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

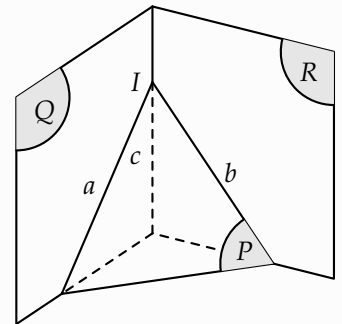
Dạng 5 Chứng minh ba đường thẳng đồng quy

Để chứng minh ba đường thẳng a, b, c đồng quy ta làm theo các bước sau:

- ✔ Chọn mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và b .
- ✔ Tìm mặt phẳng (Q) chứa a và (R) chứa b sao cho $(Q) \cap (R) = c \Rightarrow I \in c$.

Suy ra: a, b, c đồng quy tại I .

$$\text{Nghĩa là: } \begin{cases} a \subset (P), b \subset (P), I = a \cap b \\ a = (P) \cap (Q) \\ b = (P) \cap (R) \\ c = (Q) \cap (R) \end{cases} \Rightarrow a, b, c \text{ đồng quy tại } I.$$



Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB không song song CD . Gọi M là trung điểm SC và O là giao điểm AC với BD .

- Tìm giao điểm N của SD với (MAB) .
- Chứng minh ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.



Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Lấy M trên cạnh SC . Gọi N là giao điểm của SB và (ADM) . Gọi O là giao điểm AC và BD . Chứng minh rằng SO, AM, DN đồng qui.

Ví dụ 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác mà AB không song song với CD . Trên cạnh SC lấy E không trùng với S và C .

- Tìm giao điểm F của SD và (ABE) .
- Chứng minh ba điểm AB, CD, EF đồng quy.

Ví dụ 4

Cho tứ diện $ABCD$. Lấy M, N, P lần lượt trên các cạnh AB, AC, BD sao cho MN cắt BC tại I , MP cắt AD tại J . Chứng minh: PI, NJ, CD đồng quy.

Ví dụ 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB \cap CD = E$ và $AD \cap BC = K$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC .

- Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD) .
- Tìm giao tuyến của (MNP) và (SBD) .
- Tìm giao điểm của Q của SD và (MNP) .
- Gọi $H = MN \cap PQ$. Chứng minh: S, H, E thẳng hàng.
- Chứng minh: SK, QM, NP đồng quy.

**Ví dụ 1**

Cho tứ diện $ABCD$ và M, N là các điểm thay đổi trên các cạnh AB, CD sao cho $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND}$. Chứng minh MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

Ví dụ 2

Cho tứ diện $ABCD$ và M, N là các điểm thay đổi trên các cạnh AB, CD sao cho $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND}$. Giả sử $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = k > 0$ và P là một điểm trên cạnh AC sao cho $PA = kPC$. Khi đó tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP) .

Ví dụ 3

Cho tứ diện $ABCD$ và M, N là các điểm thay đổi trên các cạnh AB, CD sao cho $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = k > 0$ và P là một điểm trên cạnh AC sao cho $PA \neq kPC$. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP) .

Ví dụ 4

Cho tứ diện $ABCD$ và M, N là các điểm thay đổi trên các cạnh AB, CD sao cho $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = k > 0$ và P là một điểm trên cạnh AC sao cho $PA \neq kPC$. Tính theo k tỉ số diện tích tam giác MNP và diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP) .

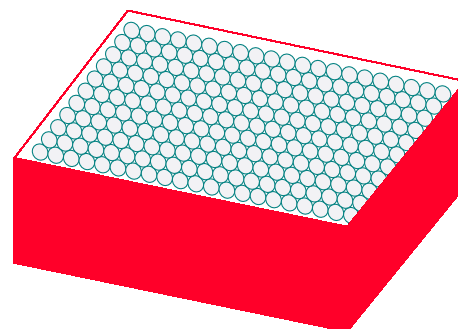
Ví dụ 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O có $AC = a, BD = b$. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và đi qua điểm I trên đoạn AO và $AI = x$ ($0 < x < a$). Tính diện tích thiết diện theo a, b và x .

Dạng 7 Bài toán thực tế

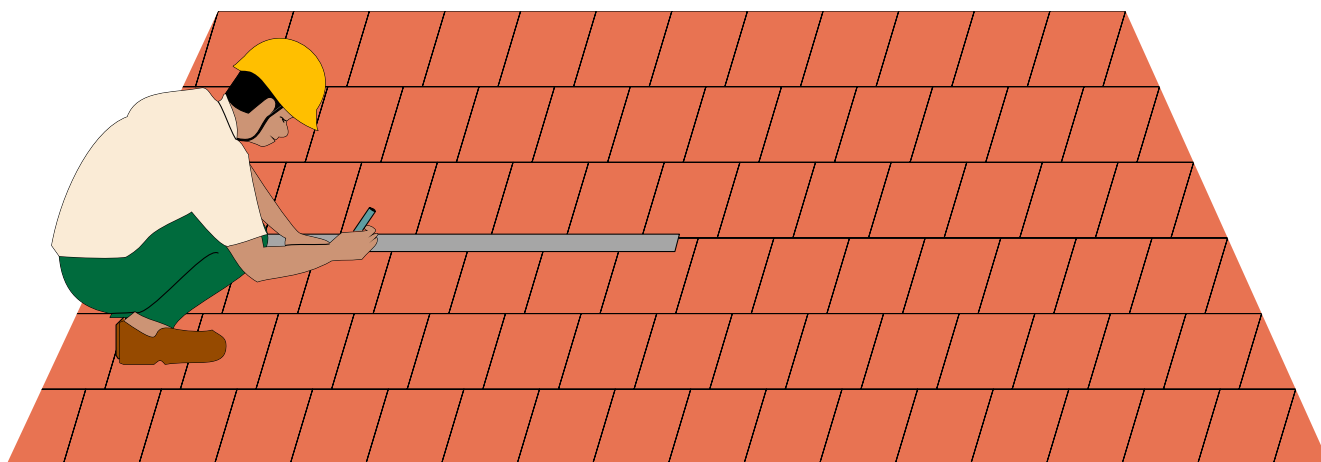
Ví dụ 1

Dựa trên hình bên, vẽ hình biểu diễn của hộp phần.



Ví dụ 2

Hình bên dưới minh họa người thợ đang kiểm tra độ phẳng của mặt sàn nhà. Hãy cho biết người thợ kiểm tra độ phẳng của mặt sàn nhà bằng cách nào?



C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Lấy M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SC .

- Chứng minh đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (SAC) .
- Chứng minh O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

**Bài 2**

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC .

- Tìm giao điểm I của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD) . Chứng minh $IA = 2IM$.
- Tìm giao điểm E của đường thẳng SD và mặt phẳng (ABM) .
- Gọi N là một điểm tùy ý trên cạnh AB . Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .

Bài 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD ; M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD ; P thuộc đoạn SC và không là trung điểm của SC .

- Tìm giao điểm E của đường thẳng SO và mặt phẳng (MNP) .
- Tìm giao điểm Q của đường thẳng SA và mặt phẳng (MNP) .
- Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB , QP và AC , QN và AD . Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Bài 4

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F, G lần lượt là ba điểm trên ba cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I ($I \neq C$), EG cắt AD tại H ($H \neq D$).

- Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (EFG) và (BCD) ; (EFG) và (ACD) .
- Chứng minh ba đường thẳng CD, IG, HF cùng đi qua một điểm.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của

- (A) CD và NP . (B) CD và MN . (C) CD và MP . (D) CD và AP .

Câu 2

Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho MN cắt BD tại I . Điểm I không thuộc mặt phẳng nào sau đây

- (A) (ABD) . (B) (CMN) . (C) (BCD) . (D) (ACD) .

Câu 3

Khối lăng trụ bát giác có tất cả bao nhiêu đỉnh?

- (A) 8. (B) 16. (C) 24. (D) 12.

Câu 4

Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho MN cắt BD tại I . Điểm I không thuộc mặt phẳng nào sau đây

- (A) (ABD) . (B) (CMN) . (C) (BCD) . (D) (ACD) .

**Câu 5**

Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho MN cắt BD tại I . Điểm I không thuộc mặt phẳng nào sau đây

- Ⓐ (ABD) . Ⓑ (CMN) . Ⓒ (BCD) . Ⓓ (ACD) .

Câu 6

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của

- Ⓐ CD và NP . Ⓑ CD và MN . Ⓒ CD và MP . Ⓓ CD và AP .

Câu 7

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AD . Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là

- Ⓐ Đường thẳng SO với O là giao điểm của AC và BD .
 Ⓑ Đường thẳng đi qua S và song song AC .
 Ⓒ Đường thẳng đi qua S và song song BD .
 Ⓓ Đường thẳng SI với I là giao điểm của AB và CD .

Câu 8

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD, AD \parallel BC$. Gọi I là giao điểm của AB và DC, M là trung điểm SC . DM cắt mặt phẳng (SAB) tại J . Khẳng định nào sau đây sai?

- Ⓐ $JM \subset (SAB)$. Ⓑ $DM \subset (SCI)$.
 Ⓒ S, I, J thẳng hàng. Ⓓ $SI = (SAB) \cap (SCD)$.



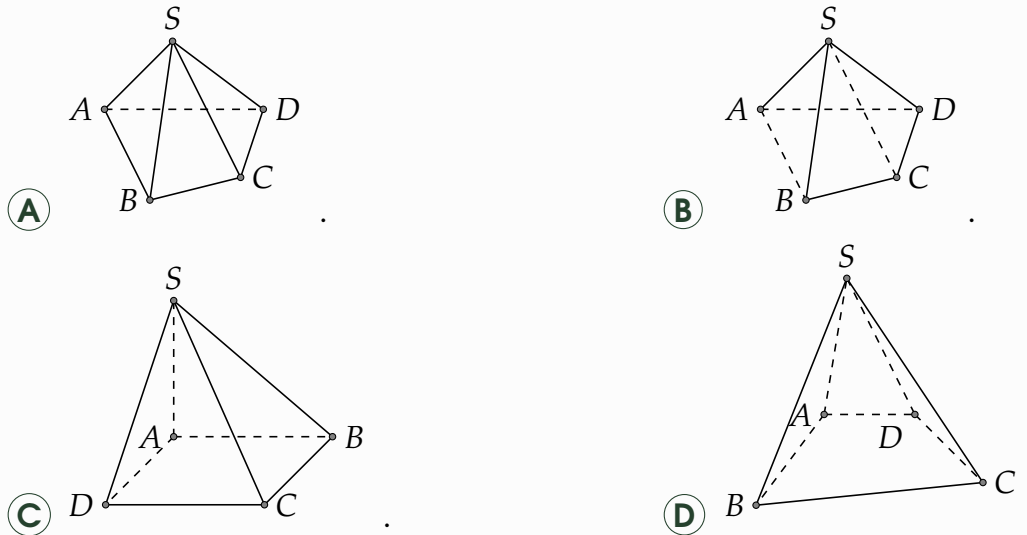
Câu 9

Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây.

- (A) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa ba điểm phân biệt.
- (B) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- (C) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.
- (D) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.

Câu 10

Cho hình chóp $S.ABCD$, trong các cách vẽ sau cách vẽ nào **sai**?



Câu 11

Trong không gian có bao nhiêu vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng?

- (A) 3.
- (B) 4.
- (C) 2.
- (D) 1.

Câu 12

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. O là giao điểm của AC và BD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAO) và (SBC) là đường thẳng

- (A) SA .
- (B) SB .
- (C) SC .
- (D) SO .

**Câu 13**

Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

- ☐ A Nếu ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì chúng thẳng hàng.
- ☐ B Hai mặt phẳng có hai điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
- ☐ C Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
- ☐ D Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung.

Câu 14

Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định nếu biết điều nào sau đây?

- ☐ A Một điểm và một đường thẳng thuộc nó.
- ☐ B Ba điểm mà nó đi qua.
- ☐ C Ba điểm không thẳng hàng.
- ☐ D Hai đường thẳng thuộc mặt phẳng.

Câu 15

Cho hình chóp $S.ABCD$, AB cắt CD tại E và AC cắt BD tại F . Giao tuyến của mặt phẳng (SEF) với các mặt phẳng (SAD) , (SBC) là

- ☐ A SI với $I = EF \cap AD$.
- ☐ B SD .
- ☐ C SA .
- ☐ D SI với $I = ES \cap AD$.

Câu 16

Chọn mệnh đề sai

- ☐ A Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.
- ☐ B Có vô số mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- ☐ C Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.
- ☐ D Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.



Câu 17

Cho tứ diện $ABCD$, M là trung điểm của CD , điểm P thuộc tia đối của tia BD sao cho $PD = 3PB$, mặt phẳng (APM) cắt BC tại Q . Tính tỉ số $\frac{CQ}{QB}$.

- ☐ A $\frac{7}{3}$.
 ☐ B 2.
 ☐ C $\frac{5}{2}$.
 ☐ D 3.

Câu 18

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Gọi M là trung điểm CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là

- ☐ A SI (I là giao điểm của AC và BM).
 ☐ B SJ (J là giao điểm của AM và BD).
 ☐ C SO (O là giao điểm của AC và BD).
 ☐ D SP (P là giao điểm của AB và CD).

Câu 19

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I , J và K lần lượt là trung điểm của AB , BC và BD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là

- ☐ A KD .
 ☐ B Không có.
 ☐ C Đường thẳng đi qua K và song song với AB .
 ☐ D KI .

Câu 20

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là tứ giác lồi $ABCD$, giao tuyến của mặt (SAD) và (SBD) là

- ☐ A SA .
 ☐ B SD .
 ☐ C SC .
 ☐ D SB .

Câu 21

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD , BC , điểm G là trọng tâm của tam giác BCD . Tìm giao điểm của đường thẳng MG và mặt phẳng (ABC) .

- ☐ A Giao điểm của MG và BC .
 ☐ B Giao điểm của MG và AC .
 ☐ C Giao điểm của MG và AN .
 ☐ D Giao điểm của MG và AB .

**Câu 22**

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- ☐ A Hình tứ diện đều là hình có 4 cạnh bằng nhau.
- ☐ B Hình chóp tam giác là hình có 3 đỉnh, 3 cạnh và 3 mặt.
- ☐ C Hình chóp tam giác là hình tứ diện.
- ☐ D Hình chóp tứ giác là hình có 4 mặt là tứ giác.

Câu 23

Hình chóp $S.ABCD$ có tất cả bao nhiêu mặt?

- ☐ A 6.
- ☐ B 3.
- ☐ C 4.
- ☐ D 5.

Câu 24

Cho hình chóp $S.ABCD$, AB cắt CD tại E và AC cắt BD tại F . Giao tuyến của mặt phẳng (SEF) với mặt phẳng (SBC) là

- ☐ A SJ với $I = EF \cap BC$.
- ☐ B SC .
- ☐ C SA .
- ☐ D SJ với $I = ES \cap BC$.

Câu 25

Hình chóp $S.ABCD$ có tất cả bao nhiêu mặt?

- ☐ A 6.
- ☐ B 3.
- ☐ C 4.
- ☐ D 5.

Câu 26

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của

- ☐ A CD và NP .
 ☐ B CD và MN .
 ☐ C CD và MP .
 ☐ D CD và AP .

Câu 27

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD và G là trọng tâm của tam giác BCD . Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là

- ☐ A Giao điểm của đường thẳng EG và AC .
 ☐ B Điểm F .
 ☐ C Giao điểm của đường thẳng EG và AF .
 ☐ D Giao điểm của đường thẳng EG và CD .

Câu 28

Cho tứ diện $S.ABC$. Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB , LN không song song với SC . Mặt phẳng (LMN) cắt các cạnh AB, BC, SC lần lượt tại K, I, J . Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

- ☐ A K, I, J .
 ☐ B K, M, J .
 ☐ C N, I, J .
 ☐ D M, I, J .

Câu 29

Cho tứ diện $S.ABC$. Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB , LN không song song với SC . Mặt phẳng (LMN) cắt các cạnh AB, BC, SC lần lượt tại K, I, J . Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

- ☐ A K, I, J .
 ☐ B K, M, J .
 ☐ C N, I, J .
 ☐ D M, I, J .

Câu 30

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD , M là trung điểm CD , I là điểm ở trên đoạn thẳng AG . Đường thẳng BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- ☐ A $AM = (ACD) \cap (ABG)$.
 ☐ B A, J, M thẳng hàng.
 ☐ C $DJ = (ACD) \cap (BDJ)$.
 ☐ D J là trung điểm của AM .

HẾT

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

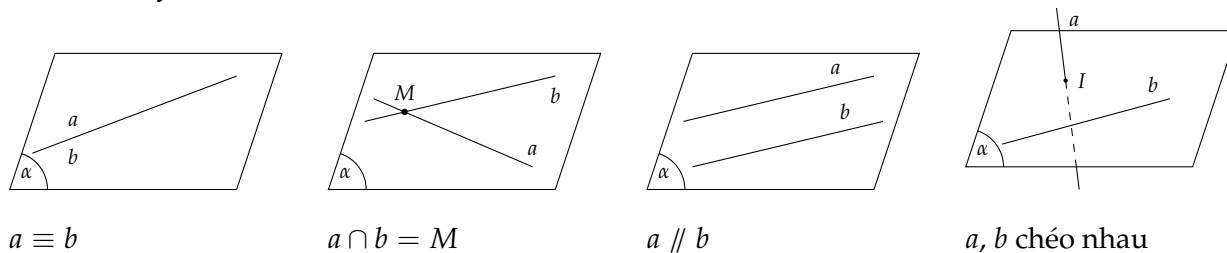
1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Khi đó có thể xảy ra một trong hai trường hợp sau:

✓ **Trường hợp 1:** Có một mặt phẳng chứa a và b . Khi đó ta nói a và b *đồng phẳng*. Theo kết quả của hình học phẳng, có ba khả năng sau đây xảy ra:

- Nếu a và b có hai điểm chung thì ta nói a trùng b , kí hiệu $a \equiv b$.
- Nếu a và b có một điểm chung duy nhất M thì ta nói a và b cắt nhau tại M , kí hiệu $a \cap b = M$.
- Nếu a và b không có điểm chung thì ta nói a và b song song với nhau, kí hiệu $a \parallel b$.

✓ **Trường hợp 2:** Không có mặt phẳng nào chứa cả a và b . Khi đó ta nói hai đường thẳng a và b *chéo nhau* hay a chéo với b .



Hình 3.

Định nghĩa 2.1. Hai đường thẳng gọi là **song song** nếu chúng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung.

- ⚠ a) Hai đường thẳng gọi là **chéo nhau** nếu chúng không đồng phẳng.
- b) Cho hai đường thẳng song song a và b . Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó, kí hiệu $mp(a, b)$.

Ví dụ 1

Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:

a) MN và BC ;

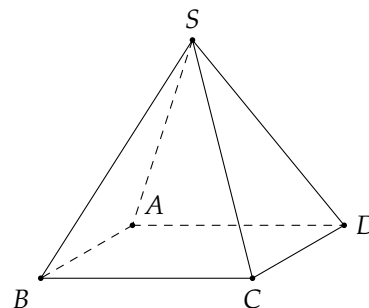
b) AN và CD ;

c) MN và CD .

Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:

- a) AB và CD ; b) SA và SC ; c) SA và BC .



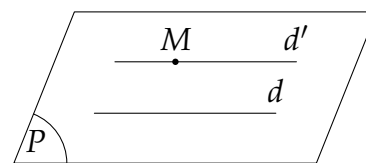
Hình 5.

2. Tính chất cơ bản về hai đường thẳng song song

Ví dụ 3

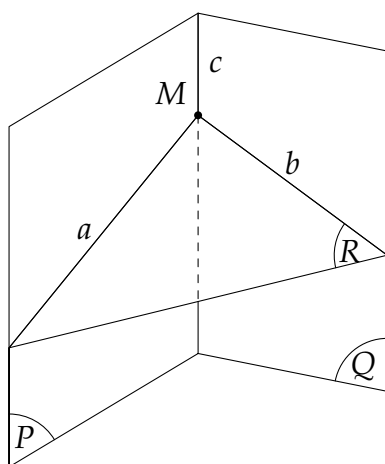
a)

Trong không gian, cho điểm M ở ngoài đường thẳng d . Đặt $(P) = mp(M, d)$. Trong (P) , qua M vẽ đường thẳng d' song song với d , đặt $(Q) = mp(d, d')$. Có thể khẳng định hai mặt phẳng (P) và (Q) trùng nhau không?

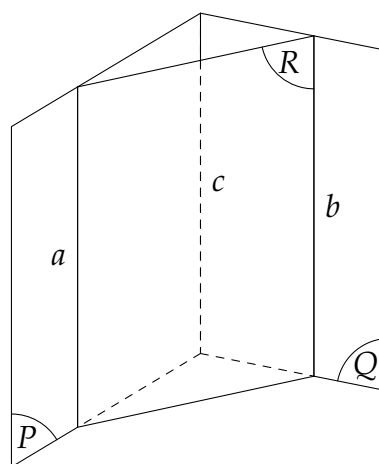


Hình 7

- b) Cho ba mặt phẳng (P) , (Q) , (R) cắt nhau theo ba giao tuyến a , b , c phân biệt với $a = (P) \cap (R)$; $b = (Q) \cap (R)$; $c = (P) \cap (Q)$ (Hình 8). Nếu a và b có điểm chung M thì điểm M có thuộc c không?



a)



b)

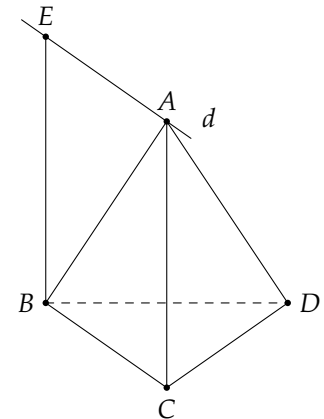
Hình 8

Từ khám phá trên ta có các định lý sau:

Định lý 2.1. Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Ví dụ 4

Cho tứ diện $ABCD$. Trong mặt phẳng (ABC) vẽ hình bình hành $ACBE$. Gọi d là đường thẳng trong không gian đi qua A và song song với BC . Chứng minh điểm E thuộc đường thẳng d .



Hình 9

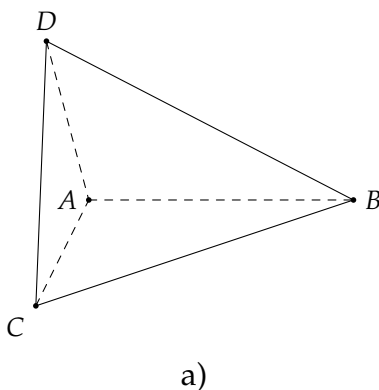
Ví dụ 5

Cho hình chóp $S.ABCD$. Vẽ hình thang $ADMS$ có hai đáy là AD và MS . Gọi d là đường thẳng trong không gian đi qua S và song song với AD . Chứng minh đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (SAD) .

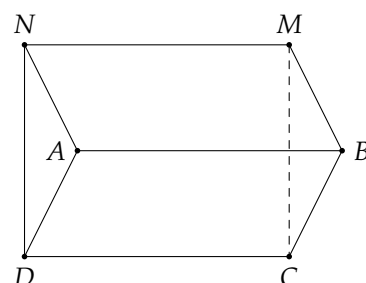
Định lý 2.2. Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Ví dụ 6

- a) Trong Hình 10a, hai tam giác ABC và ABD không cùng nằm trong một mặt phẳng. Tìm ba cặp mặt phẳng có ba giao tuyến đồng quy.
- b) Trong Hình 10b, hai hình bình hành $ABCD$ và $ABMN$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Tìm ba cặp mặt phẳng có ba giao tuyến song song.



a)

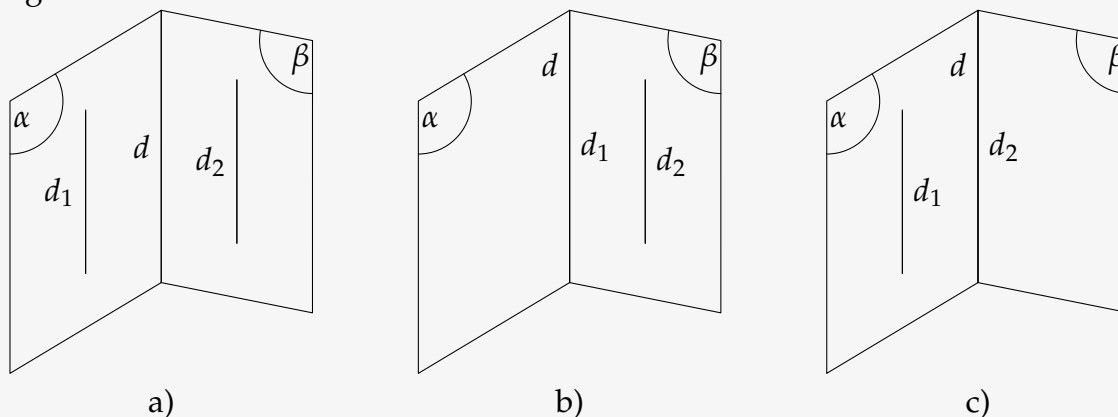


b)

Hình 10.

Từ Định lý 2, ta có hệ quả sau:

Định lý 2.3. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



Hình 11

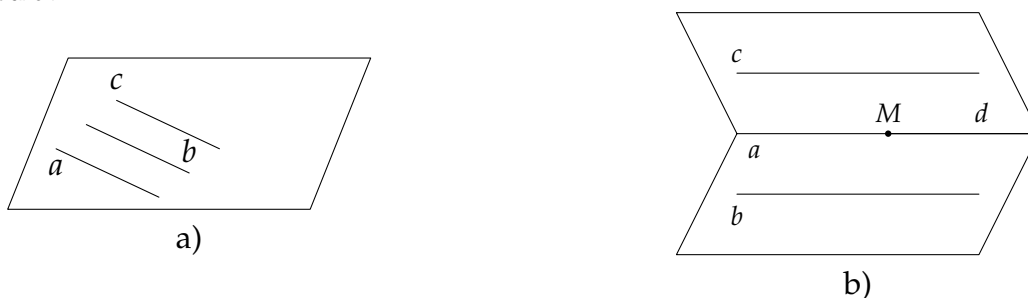
Ví dụ 7

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

Ví dụ 8

Trong không gian, cho ba đường thẳng a, b, c không đồng phẳng, a và b cùng song song với c . Gọi M là điểm thuộc a , d là giao tuyến của $\text{mp}(a, c)$ và $\text{mp}(M, b)$ (Hình 13b).

Do $b \parallel c$ nên ta có $d \parallel b$ và $d \parallel c$. Giải thích tại sao d phải trùng với a . Từ đó, nêu kết luận về vị trí giữa a và b .



Hình 13.

Định lý 2.4. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

! Khi hai đường thẳng phân biệt a, b cùng song song với đường thẳng c thì ta có thể kí hiệu là $a \parallel b \parallel c$ và gọi là ba đường thẳng song song.

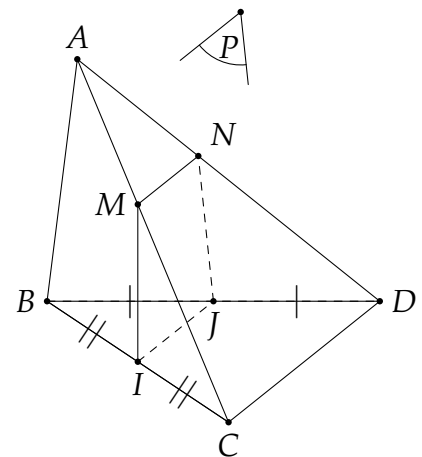
Ví dụ 9

Gọi M, N, P, Q, R, S là trung điểm các cạnh của tứ diện $ABCD$ như Hình 14. Chứng minh rằng các đoạn thẳng MN, PQ, RS có cùng trung điểm.

Ví dụ 10

Cho tứ diện $ABCD$ có I và J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và BD . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua I, J và cắt hai cạnh AC và AD lần lượt tại M và N .

- Chứng minh $IJNM$ là một hình thang.
- Tìm vị trí của điểm M để $IJNM$ là hình bình hành.



B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Hai đường thẳng song song

Phương pháp giải: Ta sẽ sử dụng một trong các cách sau

- ✔ Chứng minh hai đường thẳng đó đồng phẳng rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (Đường trung bình, Định lý Ta-lét đảo,...)
- ✔ Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với một đường thẳng thứ ba.

$$\begin{cases} a \parallel b \\ a \parallel c \Rightarrow b \parallel c. \\ b \neq c \end{cases}$$

- ✔ Áp dụng định lý về giao tuyến song song.
- ✔ Áp dụng hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với



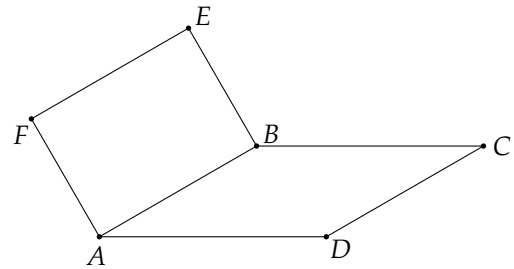
một trong hai đường thẳng đó.

$$\begin{cases} d' \subset (\alpha) \\ d'' \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ d' \parallel d'' \end{cases} \Rightarrow d \parallel d'', d \parallel d'$$

Ví dụ 1

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

- Quan sát bốn đường thẳng AB, BC, CD, DA . Chỉ ra các cặp đường thẳng cắt nhau, các cặp đường thẳng song song.
- Trong ba đường thẳng AB, AF, BE có hai đường thẳng nào chéo nhau hay không?



Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB . Chứng minh rằng tứ giác $MNCD$ là hình thang.

Ví dụ 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Ví dụ 4

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và DBC . Chứng minh $MN \parallel AD$.

Ví dụ 5

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh BC ; (α) là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD , cắt các cạnh BD, AD, AC lần lượt tại N, P, Q . Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành.

Dạng 2 Tìm giao tuyến bằng cách kẻ song song

Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ngoài phương pháp "Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng", ta còn có thể tìm bằng cách sau:

- ✔ Bước 1. Chỉ ra rằng mặt phẳng α, β lần lượt chứa hai đường thẳng song song a và b .
- ✔ Bước 2. Tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng.
- ✔ Bước 3. Khi đó $(\alpha) \cap (\beta) = Mx \parallel a \parallel b$.

Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SD .

- a. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MAB) và (SCD) .
- b. Gọi N là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (MAB) . Chứng minh rằng MN là đường trung bình của tam giác SCD .

Ví dụ 3

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD và P là một điểm thuộc cạnh AC . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (BPD) và chứng minh giao tuyến đó song song với BD .

Ví dụ 4

Cho tứ diện $ABCD$, M là điểm thuộc cạnh AC . Gọi (P) là mặt phẳng qua M song song với AB và CD . Tìm giao tuyến của (P) với mặt phẳng (BCD) .

Ví dụ 5

Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo; M là trung điểm của SC .

- Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBA) .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD) .

Dạng 3 Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

☑ Cách 1. Tìm giao điểm trực tiếp

Bước 1. Tìm đường thẳng $\Delta \subset (\alpha)$ mà d cắt Δ .

Bước 2. Tìm giao điểm $I = d \cap \Delta$.

Bước 3. Kết luận $I = d \cap (\alpha)$

☑ Cách 2. Tìm giao điểm qua mặt phẳng phụ

Bước 1. Tìm $(\beta) \supset d$ mà $(\alpha) \cap (\beta) = \Delta$.

Bước 2. Tìm giao điểm $I = d \cap \Delta$.

Bước 3. Kết luận $I = d \cap (\alpha)$

Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Trên cạnh BC, AD, SD lần lượt lấy các điểm I, J, K sao cho $\frac{BI}{BC} = \frac{AJ}{AD} = \frac{SK}{SD}$. Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (IJK) .

Ví dụ 2

Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC . $P \in BD$ với $PB = \frac{1}{4}BD$. Xác định giao điểm của AD với mặt phẳng (MNP) .

Ví dụ 3

Cho hình chóp $S.ABCD$. Mặt đáy là hình thang có cạnh đáy lớn AD , AB cắt CD tại K , điểm M thuộc cạnh SD .

- Xác định giao tuyến (d) của (SAD) và (SBC) .
- Tìm giao điểm N của KM và (SBC) .

Ví dụ 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB . Điểm H thuộc đoạn SD thỏa mãn $\frac{SH}{SD} = \frac{3}{4}$. Tìm giao điểm của đường thẳng SC và $mp(HMN)$.

Ví dụ 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD .

- Tìm giao tuyến của (SBD) và (SIK) .
- Cho M là trung điểm của SB . Tìm giao điểm F của DM và (SIK) .

Dạng 4

Tìm thiết diện bằng cách kẻ song song

Ví dụ 1

Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AB, BC, CD lần lượt lấy các điểm P, Q, R sao cho $AP = \frac{1}{3}AB$, $BC = 3QC$ và R không trùng với C, D . Gọi $PQRS$ là thiết diện của mặt phẳng (PQR) với tứ diện $ABCD$. Khi đó $PQRS$ là hình gì?



Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Gọi M là trung điểm SA . Mặt phẳng (MBC) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

Ví dụ 3

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC , E là điểm trên cạnh CD sao cho $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là hình gì?

Dạng 5 Bài toán quỹ tích và điểm cố định

Ví dụ 1

Trong không gian $Oxyz$ cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tìm tập hợp tất cả các giao điểm của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) ?

Ví dụ 2

Trong không gian $Oxyz$ cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD . Tìm tập hợp tất cả các điểm là giao điểm của hai mặt phẳng (AMN) và (ABD) ?

Ví dụ 3

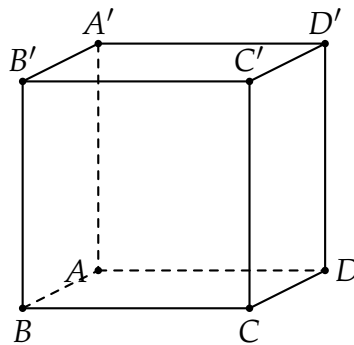
Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$ cho hình chóp $S.ABC$. Gọi $K \in SA$ sao cho $SK = \frac{1}{2}KA$, $H \in SB$ sao cho $SH = \frac{1}{2}HB$. Tìm tập hợp tất cả các điểm chung giữa (CHK) và (ABC) ?



Dạng 6 Bài toán thực tế

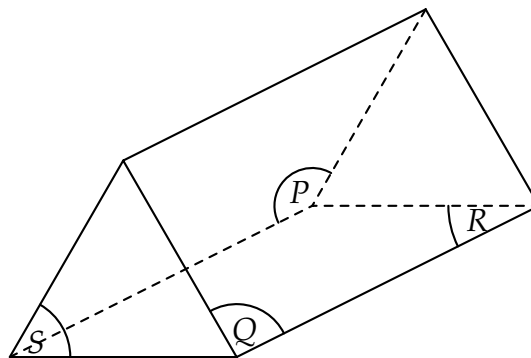
Ví dụ 1

Cho khối rubik có dạng được minh họa như hình bên dưới. Hãy kể tên các cạnh song song với cạnh CD .



Ví dụ 2

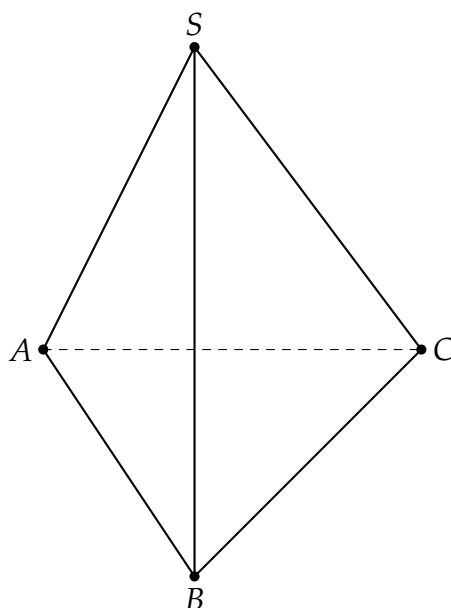
Một chiếc lều được minh họa như hình bên dưới.



- Tìm ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến song song.
- Tìm ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến đồng quy.

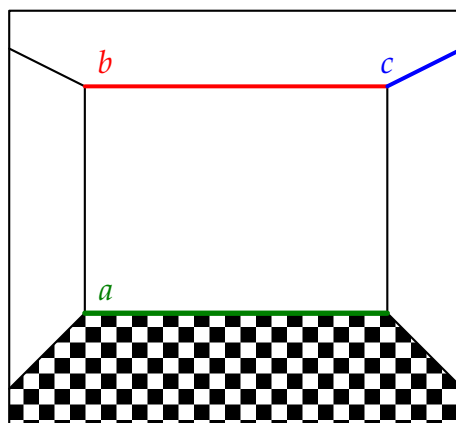
Ví dụ 3

Khối rubik tam giác được minh họa như hình bên dưới. Hãy kể tên các cặp cạnh chéo nhau?



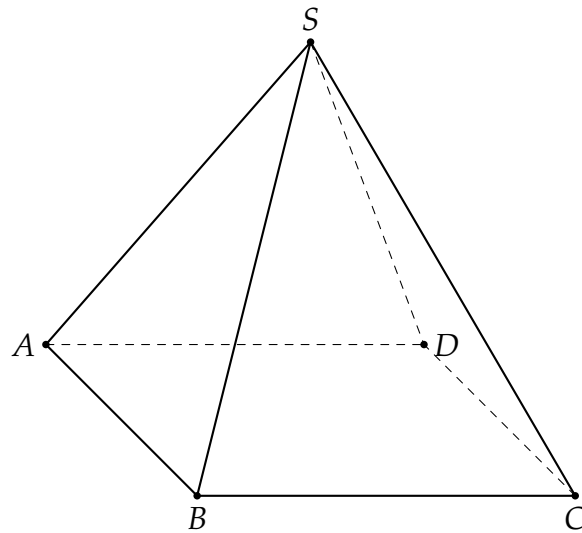
Ví dụ 4

Quan sát một phần căn phòng (Hình bên dưới). Hãy cho biết vị trí tương đối của các cặp đường thẳng a và b ; a và c ; b và c ?



Ví dụ 5

Kim tự tháp Ai Cập được minh họa là hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng AB và CD , SA và SC , SA và BC ?



C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

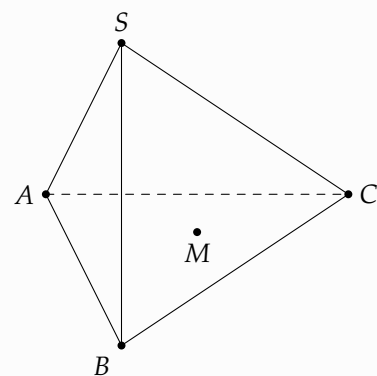
Bài 1

Cho hai đường thẳng song song a và b . Mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- Một đường thẳng c cắt a thì cũng cắt b .
- Một đường thẳng c chéo với a thì cũng chéo với b .

Bài 2

Cho hình chóp $S.ABC$ và điểm M thuộc miền trong tam giác ABC (Hình 17). Qua M , vẽ đường thẳng d song song với SA , cắt (SBC) tại N . Trên hình vẽ, hãy chỉ rõ vị trí của điểm N và xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (CMN) .



Hình 17



Bài 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (SAB) .
- Lấy một điểm M trên đoạn SA (M khác S và A), mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N . Tứ giác $CBMN$ là hình gì?

Bài 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của SD . Hai mặt phẳng (IAC) và (SBC) cắt nhau theo giao tuyến Cx . Chứng minh rằng $Cx \parallel SB$.

Bài 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O . Gọi I là trung điểm của SO . Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M, N .

- Hãy nói cách xác định hai điểm M và N . Cho $AB = a$. Tính MN theo a .
- Trong mặt phẳng $(CDMN)$, gọi K là giao điểm của CN và DM . Chứng minh $SK \parallel BC \parallel AD$.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Cho tứ diện $ABCD$. Khi đó hai đường thẳng AB và CD là hai đường thẳng
 (A) cắt nhau. (B) song song. (C) chéo nhau. (D) trùng nhau.

Câu 2

Chọn khẳng định sai

- (A) Nếu hai đường thẳng chéo nhau thì chúng không đồng phẳng.
- (B) Hai đường thẳng song song thì không đồng phẳng và không có điểm chung.
- (C) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- (D) Hai đường thẳng cắt nhau thì đồng phẳng và có một điểm chung.

Câu 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Qua S kẻ Sx, Sy lần lượt song song với AB, AD . Gọi O là giao điểm của AC và BD . Khi đó khẳng định nào dưới đây đúng?

- (A) Giao tuyến của (SAC) và (SBD) là đường thẳng Sx .
- (B) Giao tuyến của (SBD) và (SAC) là đường thẳng Sy .
- (C) Giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng Sx .
- (D) Giao tuyến của (SAD) và (SBC) là đường thẳng Sx .



Câu 4

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- ☐ A Một đường thẳng có 1 điểm chung với mặt phẳng thì có vô số điểm chung khác nữa.
- ☐ B Một đường thẳng có một điểm chung với mặt phẳng thì điểm chung đó là giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.
- ☐ C Một đường thẳng không cắt mặt phẳng thì không thể có điểm chung với mặt phẳng.
- ☐ D Nếu một đường thẳng cắt một mặt phẳng thì nó sẽ cắt ít nhất một đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

Câu 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A d qua S và song song với BC .
- ☐ B d qua S và song song với DC .
- ☐ C d qua S và song song với AB .
- ☐ D d qua S và song song với BD .

Câu 6

Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2MB$, các điểm N, P lần lượt là trung điểm của BD, AD . Gọi Q là giao điểm của AC với mặt phẳng (MNP) , tính tỉ số $\frac{QC}{QA}$.

- ☐ A $\frac{QC}{QA} = \frac{3}{2}$.
- ☐ B $\frac{QC}{QA} = \frac{5}{2}$.
- ☐ C $\frac{QC}{QA} = 2$.
- ☐ D $\frac{QC}{QA} = \frac{1}{2}$.

Câu 7

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm SC . Gọi K là giao điểm của SD với mặt phẳng (AGM) . Tính tỉ số $\frac{KS}{KD}$.

- ☐ A $\frac{1}{2}$.
- ☐ B $\frac{1}{3}$.
- ☐ C 2.
- ☐ D 3.

**Câu 8**

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD . Gọi I là một điểm trên cạnh B . Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IMN) là hình gì?

- ☐ A Tam giác MNI .
☐ B Tam giác MNQ .
☐ C Hình bình hành $MNIJ$.
☐ D Hình thang $MNIJ$.

Câu 9

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- ☐ A Hai đường thẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác.
☐ B Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không điểm chung.
☐ C Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.
☐ D Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

Câu 10

Cho hình chóp $S.MNPQ$ có đáy $MNPQ$ là hình chữ nhật. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SPQ) song song với đường thẳng nào sau đây?

- ☐ A MN .
☐ B NQ .
☐ C MP .
☐ D SP .

Câu 11

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- ☐ A Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
☐ B Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.
☐ C Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.
☐ D Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

Câu 12

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- ☐ A Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng có điểm chung.



- ☐ B Hai đường thẳng có điểm chung thì chúng cắt nhau.
- ☐ C Hai đường thẳng song song với nhau thì chúng đồng phẳng.
- ☐ D Khi hai đường thẳng ở trên hai mặt phẳng phân biệt thì hai đường thẳng đó chéo nhau.

Câu 13

Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

- ☐ A Tồn tại duy nhất một đường thẳng qua một điểm và song song với một đường thẳng.
- ☐ B Tồn tại duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng.
- ☐ C Hai đường thẳng song song thì đồng phẳng.
- ☐ D Hai đường thẳng không đồng phẳng thì không có điểm chung.

Câu 14

Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O không nằm trong Δ . Qua O có mấy đường thẳng song song với Δ ?

- ☐ A 2.
- ☐ B 3.
- ☐ C 1.
- ☐ D Vô số.

Câu 15

Trong không gian cho hai đường thẳng song song a và b . Kết luận nào sau đây đúng?

- ☐ A Nếu c cắt a thì c và b chéo nhau.
- ☐ B Nếu $c \parallel a$ thì $c \parallel b$ hoặc $c \equiv b$.
- ☐ C Nếu c và a chéo nhau thì c và b chéo nhau.
- ☐ D Nếu c và a cắt nhau thì c và b cắt nhau.

Câu 16

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm AB và AC , E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là

- ☐ A Tam giác MNE .
- ☐ B Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD .
- ☐ C Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.



- Ⓓ Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.

Câu 17

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy lớn AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB . Khẳng định nào sau đây là đúng nhất

- Ⓐ MN song song với CD . Ⓑ MN chéo với CD .
 Ⓒ MN cắt với CD . Ⓓ MN trùng với CD .

Câu 18

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- Ⓐ Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng có điểm chung.
 Ⓑ Hai đường thẳng có điểm chung thì chúng cắt nhau.
 Ⓒ Hai đường thẳng song song với nhau thì chúng đồng phẳng.
 Ⓓ Khi hai đường thẳng ở trên hai mặt phẳng phân biệt thì hai đường thẳng đó chéo nhau.

Câu 19

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ ?

- Ⓐ EF . Ⓑ DC . Ⓒ AD . Ⓓ AB .

Câu 20

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- Ⓐ Hai đường thẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác.
 Ⓑ Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không điểm chung.
 Ⓒ Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.
 Ⓓ Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

Câu 21

Trong không gian, xét các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- ☐ A Hai đường thẳng không có điểm chung thì song song.
- ☐ B Hai đường thẳng nếu không cắt nhau, không trùng nhau thì song song.
- ☐ C Hai đường không có điểm chung thì chéo nhau.
- ☐ D Hai đường thẳng được gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.

Câu 22

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD . Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

- ☐ A Tam giác.
- ☐ B Hình thang.
- ☐ C Hình thang vuông.
- ☐ D Hình bình hành.

Câu 23

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, CD, BC . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- ☐ A $MN \parallel BD$ và $MN = \frac{1}{2}BD$.
- ☐ B $MNPQ$ là hình bình hành.
- ☐ C MQ và NP chéo nhau.
- ☐ D $BD \parallel PQ$ và $PQ = \frac{1}{2}BD$.

Câu 24

Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- ☐ A Hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng thì không chéo nhau.
- ☐ B Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì chéo nhau.
- ☐ C Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau.
- ☐ D Hai đường thẳng phân biệt lần lượt thuộc hai mặt phẳng khác nhau thì chéo nhau.

**Câu 25**

Cho tứ diện $ABCD$, gọi I và J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác ABD . Đường thẳng IJ song song với đường nào dưới đây?

- (A) AB . (B) CD . (C) BC . (D) AD .

Câu 26

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm SC . Gọi K là giao điểm của SD với mặt phẳng (AGM) . Tính tỉ số $\frac{KS}{KD}$.

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) 2. (D) 3.

Câu 27

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Gọi M là trung điểm SA . Mặt phẳng (MBC) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

- (A) một hình bình hành.
(B) một tam giác.
(C) một hình tứ giác (không là hình thang).
(D) một hình thang (không là hình bình hành).

Câu 28

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- (A) IJ cắt AB . (B) IJ song song với CD .
(C) IJ song song với AB . (D) IJ chéo CD .

Câu 29

Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2MB$, các điểm N, P lần lượt là trung điểm của BD, AD . Gọi Q là giao điểm của AC với mặt phẳng (MNP) , tính tỉ số $\frac{QC}{QA}$.



$$\textcircled{A} \frac{QC}{QA} = \frac{3}{2}.$$

$$\textcircled{B} \frac{QC}{QA} = \frac{5}{2}.$$

$$\textcircled{C} \frac{QC}{QA} = 2.$$

$$\textcircled{D} \frac{QC}{QA} = \frac{1}{2}.$$

Câu 30

Ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một thì ba giao tuyến của chúng sẽ có bao nhiêu vị trí tương đối?

$$\textcircled{A} 1.$$

$$\textcircled{B} 2.$$

$$\textcircled{C} 3.$$

$$\textcircled{D} 4.$$

HẾT

§3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

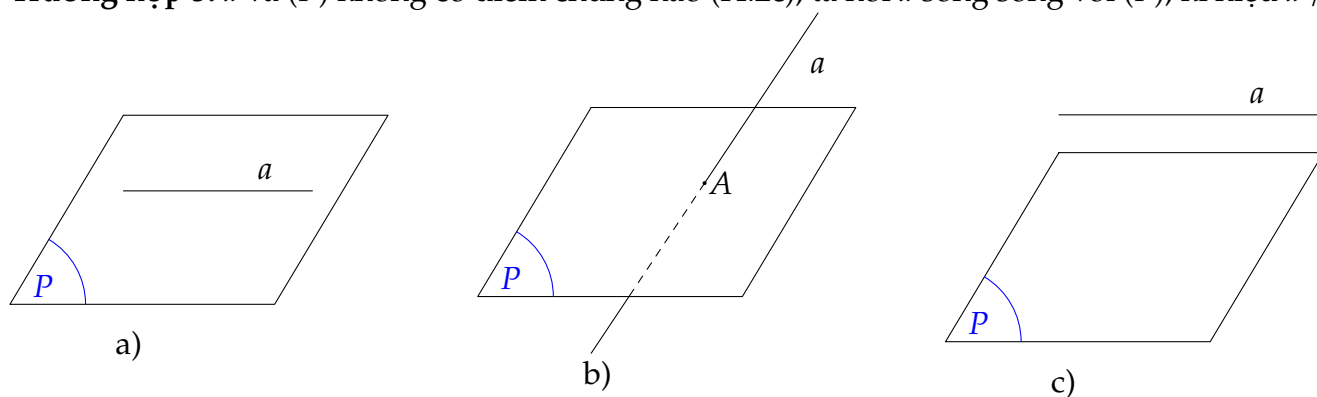
1. Đường thẳng song song với mặt phẳng

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) . Khi đó có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau:

Trường hợp 1: a và (P) có từ hai điểm chung phân biệt trở lên (Hình 2a), suy ra mọi điểm thuộc a đều thuộc (P) , ta nói a nằm trong (P) , kí hiệu $a \subset (P)$.

Trường hợp 2: a và (P) có một điểm chung duy nhất A (Hình 2b), ta nói a cắt (P) tại A , kí hiệu $a \cap (P) = A$.

Trường hợp 3: a và (P) không có điểm chung nào (H.2c), ta nói a song song với (P) , kí hiệu $a \parallel (P)$.



Hình 2

! Đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) nếu chúng không có điểm chung.

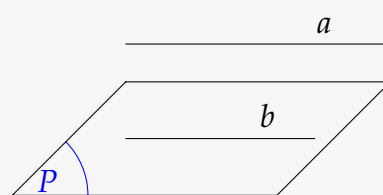
Ví dụ 1

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABMN$ không đồng phẳng. Xác định vị trí tương đối của mặt phẳng $(ABMN)$ lần lượt với các đường thẳng CD , BD và BN .

2. Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng

Định lý 3.1.

Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng b nào đó nằm trong (P) thì a song song với (P) .

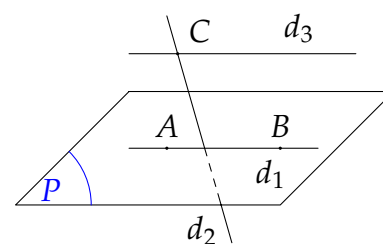


Hình 6



Ví dụ 2

Cho hai điểm A, B cùng thuộc mặt phẳng (P) và một điểm C không thuộc (P) . Vẽ đường thẳng d_1 đi qua A, B ; d_2 đi qua A, C ; d_3 đi qua C và song song với AB (Hình 7). Tìm số điểm chung của mỗi đường thẳng vừa vẽ với (P) . Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) lần lượt đối với các đường thẳng d_1, d_2, d_3 .



Hình 7

3. Tính chất cơ bản của đường thẳng và mặt phẳng song song

Định lý 3.2. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Nếu mặt phẳng (Q) chứa a , cắt (P) theo giao tuyến b thì a song song với b .

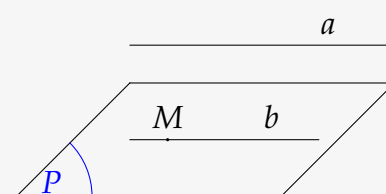
Ví dụ 3

Cho tứ diện $ABCD$ có M và N lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD và BCD (Hình 11). Chứng minh đường thẳng MN song song với các mặt phẳng (CAB) và (DAB) .

Từ định lý 2, ta có các hệ quả sau:

Định lý 3.3.

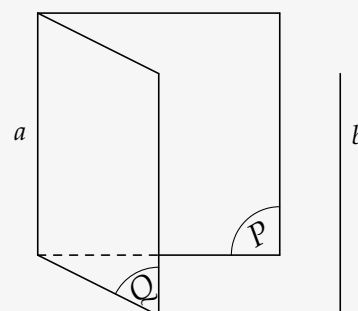
Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Nếu qua điểm M thuộc (P) ta vẽ đường thẳng b song song với a thì b phải nằm trong (P) .



Hình 12

Định lý 3.4.

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



Hình 13

Ví dụ 4

Cho hình chóp $S.ABC$ có M là trung điểm của AB . Gọi (P) là mặt phẳng chứa CB và song song với SA , (Q) là mặt phẳng chứa CM và song song với SA .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) .
- Vẽ đường thẳng b qua B và $b \parallel SA$. Chứng minh $b \subset (P)$.

4. Mặt phẳng đi qua một trong hai đường thẳng chéo nhau và song song với đường còn lại.

Định lý 3.5. Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì qua a , có một và chỉ một mặt phẳng song song với b .

Ví dụ 5

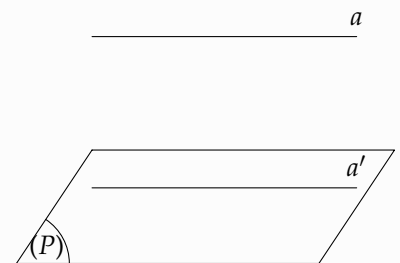
Cho tứ diện $ABCD$.

- Nêu cách vẽ mặt phẳng (P) chứa AB và song song với CD . Ta có thể vẽ bao nhiêu mặt phẳng (P) như vậy?
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (BCD) .

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Đường thẳng song song với mặt phẳng

Với $a \notin (P)$ thì nếu $a \parallel d \in (P) \Rightarrow a \parallel (P)$.



Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Chứng minh rằng $AB \parallel (SCD)$.



Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SC . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

Ví dụ 3

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABMN$ không đồng phẳng, xác định vị trí tương đối của mặt phẳng $(ABMN)$ lần lượt với các đường thẳng CD, BD và BN .

Dạng 2 Xác định thiết diện bằng cách kẻ song song

Để tìm thiết diện của mặt phẳng (P) qua điểm M và song song với hai cạnh a, b của hình chóp ta làm như sau

- ✔ Xét các mặt của hình chóp chứa cạnh a .
- ✔ Trong mặt phẳng đang xét, từ M vẽ đường thẳng song song với a .
- ✔ Xét các mặt của hình chóp chứa cạnh b .
- ✔ Trong mặt phẳng đang xét, từ M vẽ đường thẳng song song với b .

Nối các đoạn giao tuyến lại ta được thiết diện của mặt phẳng (P) với hình chóp.

Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABCD$. M, N là hai điểm trên AB, CD . Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SA . Xác định thiết diện của (P) với hình chóp.

Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$. M, N là hai điểm trên SB, CD . Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC . Xác định thiết diện của (P) với hình chóp.

Ví dụ 3

Cho tứ diện $ABCD$, điểm E nằm giữa hai điểm A và C . Gọi P là mặt phẳng qua E và song song với hai đường thẳng AB, CD . Xác định các giao tuyến của (P) và các mặt của tứ diện. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

Ví dụ 4

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Mặt phẳng (P) đi qua một điểm M trên đoạn IJ và song song với AB và CD . Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

Ví dụ 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành. Một mặt phẳng (P) qua O đồng thời song song với SA và CD . Tìm thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp.

Dạng 3 Bài toán quỹ tích và điểm cố định

Ví dụ 1

Cho tứ diện $ABCD$, một mặt phẳng (P) di động luôn song song với AB và CD và lần lượt cắt các cạnh AC, AD, BD, BC tại M, N, E, F . Tìm quỹ tích giao hai đường chéo của tứ giác $MNEF$.

Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Các điểm M, N lần lượt thuộc AB, CD . Mặt phẳng (P) chứa MN và song song với SA .

- Tìm thiết diện của hình chóp và (P) .
- Gọi I là giao điểm hai cạnh (từ M và N) của thiết diện. Tìm quỹ tích điểm I .



Ví dụ 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm M nằm trên cạnh AB . Mặt phẳng (P) đi qua M , song song với BC, SA , cắt các cạnh CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q . Tìm quỹ tích giao điểm I của MQ và NP .

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo. Cho M là trung điểm của SC .

- Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SAB) .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD) .

Bài 2

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không nằm trong cùng một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $ABEF$.

- Chứng minh đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng $(CDFE)$, (ADF) và (BCE) .
- Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và BE . Chứng minh $MN \parallel (CDFE)$.
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMN) và $(ABCD)$.

Bài 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và một điểm M di động trên cạnh AD . Một mặt phẳng (α) qua M , song song với CD và SA , cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q .

- $MNPQ$ là hình gì?
- Gọi $I = MQ \cap NP$. Chứng minh rằng I luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di động trên AD .

**Bài 4**

Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AB . Gọi (α) là mặt phẳng qua M , song song với hai đường thẳng BC và AD . Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các cạnh AC, CD và DB .

- Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.
- Trong trường hợp nào thì $MNPQ$ là hình thoi?

Bài 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm của CD , (P) là mặt phẳng qua M song song với SA và BC . Tìm giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Cho hai mặt phẳng (P) , (Q) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng d . Đường thẳng a song song với cả hai mặt phẳng (P) , (Q) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) a , d trùng nhau. (B) a , d chéo nhau. (C) a song song d . (D) a , d cắt nhau.

Câu 2

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- (A) AB song song với $(CDD'C')$. (B) DD' song song với $(ABB'A')$.
(C) $B'C'$ song song với (BDD') . (D) AD song song với $(A'B'C'D')$.

Câu 3

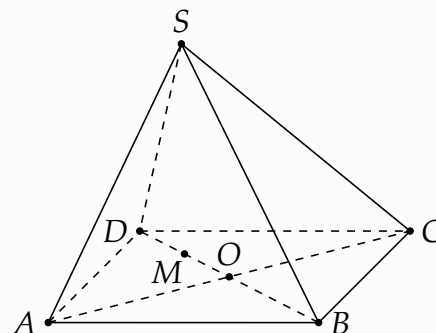
Cho các giả thiết sau đây. Giả thiết nào kết luận đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) ?

- (A) $a \parallel b$ và $b \subset (\alpha)$. (B) $a \parallel (\beta)$ và $(\beta) \parallel (\alpha)$.
(C) $a \parallel b$ và $b \parallel (\alpha)$. (D) $a \cap (\alpha) = \emptyset$.

Câu 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông. Gọi O là giao điểm của AC và BD , M là trung điểm của DO , (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với AC và SD . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?

- ☐ A Ngũ giác. ☐ B Tứ giác.
☐ C Lục giác. ☐ D Tam giác.



Câu 5

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và đường thẳng $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.
☐ B Nếu b cắt (α) thì b cắt a .
☐ C Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.
☐ D Nếu b cắt (α) và mặt phẳng (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b .

Câu 6

Cho tứ diện $ABCD$ lấy I, J lần lượt là trung điểm của AB, AD . Đường thẳng IJ song song với mặt phẳng nào dưới đây?

- ☐ A (ABD) . ☐ B (ABC) . ☐ C (ACD) . ☐ D (CBD) .

Câu 7

Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

- ☐ A AM không song song với (SBC) . ☐ B MO song song với (SAD) .
☐ C MN không song song với $(ABCD)$. ☐ D AD song song với (SBC) .



Câu 8

Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với b .

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) Vô số.

Câu 9

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b .
 (B) Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b .
 (C) Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b .
 (D) Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M cho trước và song song với cả a và b .

Câu 10

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là trung điểm đoạn SB , G là trọng tâm tam giác SAD . Gọi J là giao điểm của AD với (OMG) khi đó $\frac{JD}{AD}$ bằng

- (A) $\frac{2}{5}$. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Câu 11

Cho hai mặt phẳng (P) , (Q) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng d . Đường thẳng a song song với cả hai mặt phẳng (P) , (Q) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) a, d trùng nhau. (B) a, d chéo nhau. (C) a song song d . (D) a, d cắt nhau.

Câu 12

Cho đường thẳng $a \subset (P)$ và đường thẳng b cắt a tại M . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $b \subset (P)$. (B) $b \cap (P) = \emptyset$.
 (C) Nếu $b \not\subset (P)$ thì $b \cap (P) = \{M\}$. (D) (P) là mặt phẳng duy nhất chứa a và b .

**Câu 13**

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là

- ☐ A SO với O là tâm hình bình hành $ABCD$. ☐ B SD .
☐ C SG với G là trung điểm AB . ☐ D SF với F là trung điểm CD .

Câu 14

Cho tứ diện $ABCD$ lấy I, J lần lượt là trung điểm của AB, AD . Đường thẳng IJ song song với mặt phẳng nào dưới đây?

- ☐ A (ABD) . ☐ B (ABC) . ☐ C (ACD) . ☐ D (CBD) .

Câu 15

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A $MN \parallel (ABCD)$. ☐ B $MN \parallel (SAB)$. ☐ C $MN \parallel (SCD)$. ☐ D $MN \parallel (SBC)$.

Câu 16

Trong không gian, có bao nhiêu vị trí tương đối giữa một đường thẳng và một mặt phẳng?

- ☐ A 3. ☐ B 2. ☐ C 1. ☐ D 4.

Câu 17

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .

- ☐ A SA .
☐ B Đường thẳng qua điểm S và song song với AD, BC .
☐ C Đường thẳng qua điểm S và song song với AB, CD .
☐ D SO với O là giao điểm của AC và BD .



Câu 18

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Cắt tứ diện $ABCD$ bởi mặt phẳng qua M và song song với hai cạnh $BC; AD$. Thiết diện thu được là hình gì?

- Ⓐ Tam giác đều. Ⓑ Tam giác vuông. Ⓒ Hình bình hành. Ⓓ Ngũ giác.

Câu 19

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a , điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM = 2MC$. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song BD . Tính diện tích của thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) .

- Ⓐ $\frac{\sqrt{3}a^2}{5}$. Ⓑ $\frac{2\sqrt{26}a^2}{15}$. Ⓒ $\frac{4\sqrt{26}a^2}{15}$. Ⓓ $\frac{2\sqrt{3}a^2}{5}$.

Câu 20

Trong không gian cho đường thẳng a chứa trong mặt phẳng (P) và đường thẳng b song song với mặt phẳng (P) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ $a \parallel b$. Ⓑ a, b không có điểm chung.
Ⓒ a, b cắt nhau. Ⓓ a, b chéo nhau.

Câu 21

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh DC, BC, SA . Gọi H là giao điểm của AC và MN . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- Ⓐ MN chéo SC . Ⓑ $MN \parallel (SBD)$.
Ⓒ $MN \parallel (ABCD)$. Ⓓ MN giao mặt (SAC) tại H .

**Câu 22**

Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- ☐ A a và b chéo nhau.
- ☐ B a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.
- ☐ C a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.
- ☐ D a và b không có điểm chung.

Câu 23

Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B . SA vuông góc với đáy, M là một điểm trên cạnh AB . Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với SA, AD . Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) là

- ☐ A Hình bình hành.
- ☐ B Hình vuông.
- ☐ C Hình thang vuông.
- ☐ D Hình chữ nhật.

Câu 24

Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm tam giác ABD . Trên đoạn BC , lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- ☐ A MG song song (BCD) .
- ☐ B MG song song (ACB) .
- ☐ C MG song song (ABD) .
- ☐ D MG song song (ACD) .

Câu 25

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của $\triangle SAB, \triangle SAD$ và E, F là trung điểm của AB, AD . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- ☐ A $IJ \parallel (SFE)$.
- ☐ B $IJ \parallel (SAB)$.
- ☐ C $IJ \parallel (SBD)$.
- ☐ D $IJ \parallel (SAD)$.

Câu 26

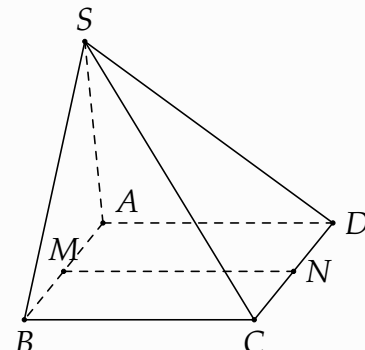
Cho tứ diện $ABCD$ lấy I, J lần lượt là trung điểm của AB, AD . Đường thẳng IJ song song với mặt phẳng nào dưới đây?

- ☐ A (ABD) .
- ☐ B (ABC) .
- ☐ C (ACD) .
- ☐ D (CBD) .

Câu 27

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N là trung điểm AB, CD (như hình vẽ). Tìm mệnh đề đúng.

- ☐ A $MN \parallel (SBC)$. ☐ B $MN \parallel (SAB)$.
☐ C $MN \parallel (SCD)$. ☐ D $MN \parallel (ABCD)$.



Câu 28

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Chọn khẳng định đúng.

- ☐ A $BD \parallel (SAC)$. ☐ B $CD \parallel (SAB)$. ☐ C $CD \parallel (SAC)$. ☐ D $BD \parallel (SAD)$.

Câu 29

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm I của OA song song với BD và song song với SC , (α) cắt SA tại K . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- ☐ A $SK = 2KA$. ☐ B $SK = 3KA$. ☐ C $SK = 4KA$. ☐ D $AK = 3SK$.

Câu 30

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O . Gọi M là trung điểm của OC . Mặt phẳng (α) qua M và (α) song song với SA và BD . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) là hình gì?

- ☐ A Hình tam giác. ☐ B Hình bình hành. ☐ C Hình chữ nhật. ☐ D Hình ngũ giác.

§4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Hai mặt phẳng song song

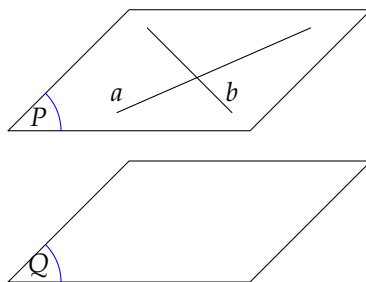
a) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) , có thể xảy ra một trong ba trường hợp:

- ✔ (P) và (Q) có ba điểm chung không thẳng hàng, ta nói hai mặt phẳng (P) và (Q) trùng nhau, kí hiệu $(P) \equiv (Q)$.
- ✔ (P) và (Q) phân biệt và có một điểm chung, ta nói (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d đi qua điểm chung, kí hiệu $(P) \cap (Q) = d$.
- ✔ (P) và (Q) không có bất kì điểm chung nào, nghĩa là $(P) \cap (Q) = \emptyset$, ta nói (P) và (Q) song song với nhau, kí hiệu $(P) \parallel (Q)$ hoặc $(Q) \parallel (P)$.

b) Hai mặt phẳng được gọi là **song song** nếu chúng không có điểm chung.

2. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

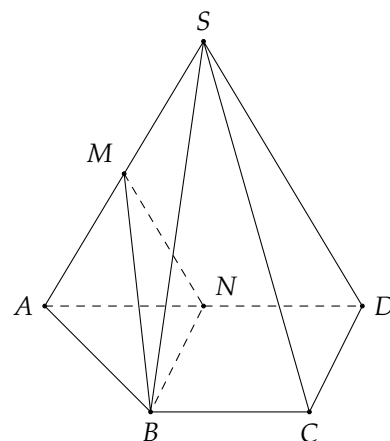
a) Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và hai đường thẳng đó cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q) .



b) Chú ý: Chẳng hạn nếu A, B, C không thẳng hàng và $AB \parallel MN$ và $AC \parallel MP$ thì $(ABC) \parallel (MNP)$.

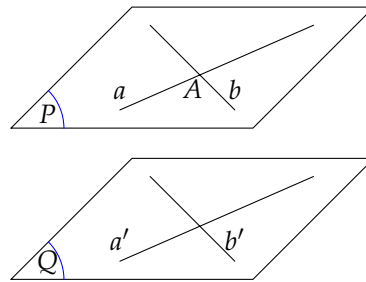
Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ đáy lớn AD và $AD = 2BC$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và AD . Chứng minh rằng hai mặt phẳng (BMN) và (SCD) song song với nhau.

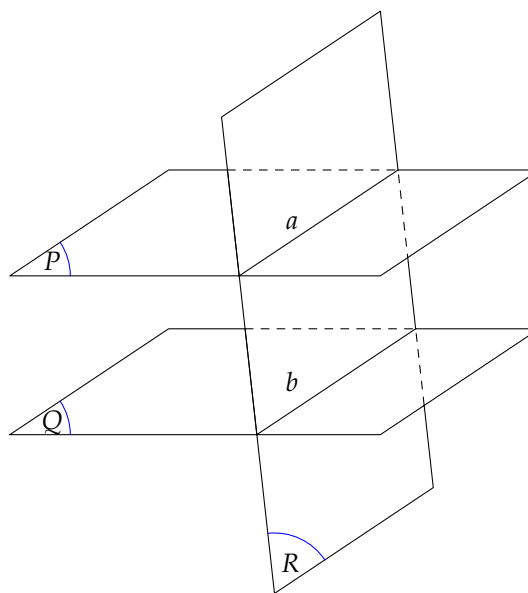


3. Tính chất của hai mặt phẳng song song

- a) Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.



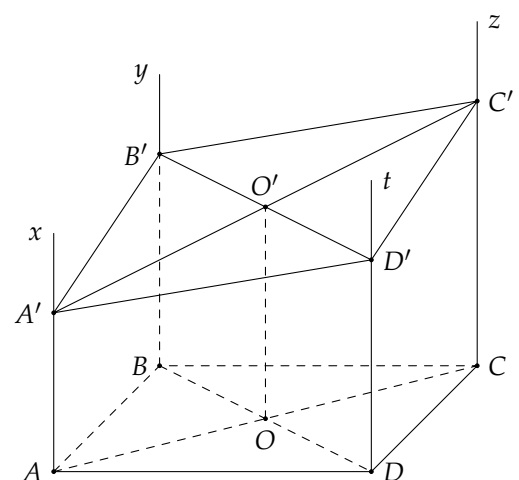
- b) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Nếu (R) cắt (P) thì cắt (Q) và hai giao tuyến của chúng song song với nhau.



Ví dụ 2

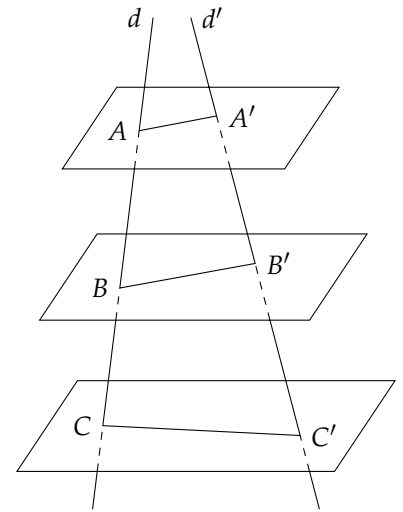
Trong mặt phẳng (P) , cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các nửa đường thẳng song song với nhau, nằm về một phía đối với (P) và lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D . Một mặt phẳng (P') cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D' .

- Chúng minh $mp(AA', BB')$ song song với $mp(CC', DD')$.
- Chứng minh tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.
- Gọi O và O' lần lượt là giao điểm của hai đường chéo của $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Chứng minh $OO' \parallel AA'$.



4. Định lý Thalès trong không gian

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



Ví dụ 3

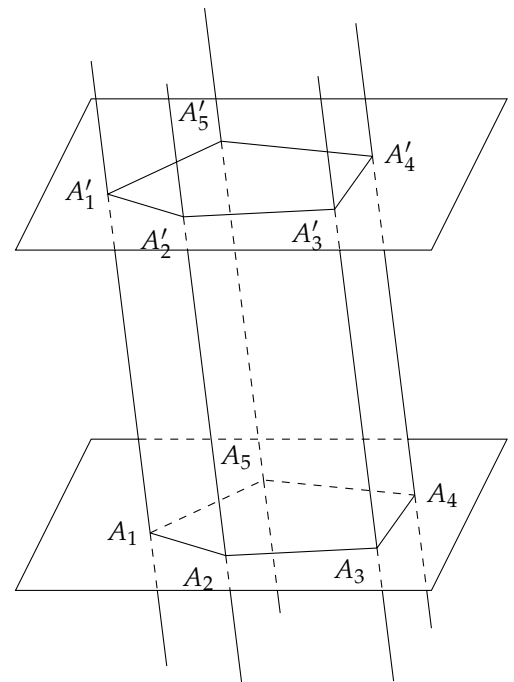
Cho ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ đôi một song song. Hai đường thẳng d và d' cắt ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A, B, C và A', B', C' . Cho $AB = 3, BC = 7, A'C' = 20$. Tính các độ dài $A'B', B'C'$.

5. Hình lăng trụ và hình hộp

- a) **Hình lăng trụ.** Cho hai mặt phẳng (P) và (P') song song với nhau. Trên (P) cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$. Qua các đỉnh của đa giác này, ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (P') lần lượt tại $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$. Hình tạo bởi các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, \dots, A_nA_1A'_1A'_n$ và hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n, A'_1A'_2 \dots A'_n$ gọi là hình lăng trụ, kí hiệu $A_1A_2 \dots A_n \cdot A'_1A'_2 \dots A'_n$.

Trong hình lăng trụ $A_1A_2 \dots A_n, A'_1A'_2 \dots A'_n$, ta gọi

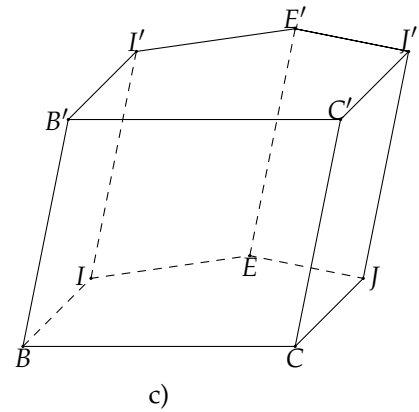
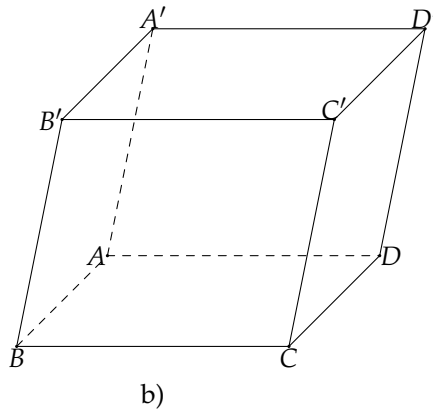
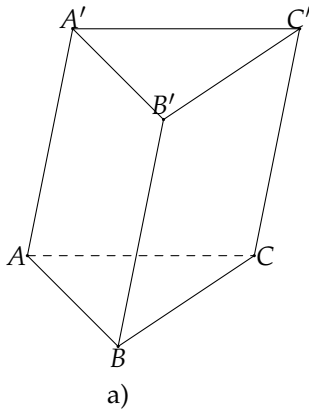
- ✔ Hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ và $A'_1A'_2 \dots A'_n$ là hai **mặt đáy** nằm trên hai mặt phẳng song song.
- ✔ Các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n, A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ là các **đỉnh**.
- ✔ Các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, \dots, A_nA_1A'_1A'_n$ là các **mặt bên**.
- ✔ Các đoạn thẳng $A_1A'_1, A_2A'_2, \dots, A_nA'_n$ là các **cạnh bên**.
- ✔ Các cạnh bên song song và bằng nhau.
- ✔ Các cạnh của hai đa giác đáy là các **cạnh đáy**. Các cạnh đáy tương ứng song song và bằng nhau.



Chú ý: Hình lăng trụ có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... tương ứng được gọi là hình lăng trụ tam giác, hình lăng trụ tứ giác, hình lăng trụ ngũ giác, ...

Ví dụ 4

- Gọi tên các hình lăng trụ trong các hình sau đây.
- Gọi tên các thành phần của hình lăng trụ trong hình đầu tiên.



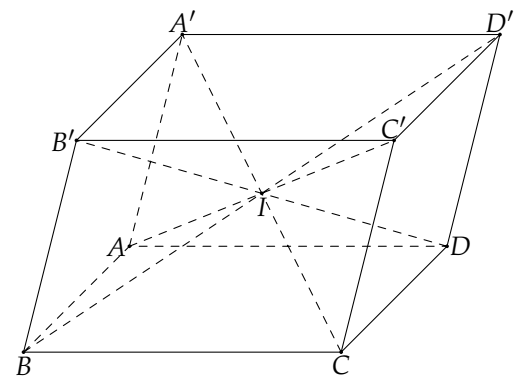
.....

.....

.....

- Hình hộp.** Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành. Trong một hình hộp ta có

- ✔ Sáu mặt là sáu hình bình hành. Mỗi mặt đều có một mặt song song với nó.
- ✔ Hai mặt như thế gọi là hai mặt đối diện.
- ✔ Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là đường chéo.
- ✔ Bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.



Ví dụ 5

Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chứng minh (BDA') và $(B'D'C)$ là các mặt phẳng song song.

.....

.....

.....

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

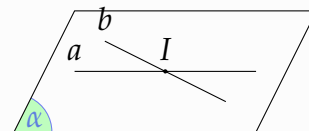
Dạng 1 Chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp Chứng minh hai mặt phẳng song song $(\alpha) \parallel (\beta)$.

Ta chứng minh mặt phẳng (α) có hai đường thẳng **CẮT NHAU** và lần lượt song song với mặt phẳng (β) .

Cụ thể

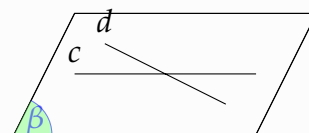
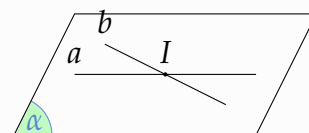
$$\begin{cases} a \parallel (\beta) \\ b \parallel (\beta) \\ a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = I \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$



Ngoài ra, dựa vào phương pháp chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng, ta còn có thể chứng minh hai mặt phẳng song song như sau: **chứng minh hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng này, song song với hai đường thẳng (cắt nhau) nằm trong mặt phẳng kia.**

Cụ thể

$$\begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel d \\ a, b \subset (\alpha) \\ c, d \subset (\beta) \\ a \cap b = I \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$



Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC và K là điểm bất kỳ trên cạnh MN . Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (ABC)$. Từ đó suy ra $PK \parallel (ABC)$.

Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB .

a) Chứng minh $(OMN) \parallel (SCD)$.

b) Gọi K là điểm bất kỳ trên MN . Chứng minh $OK \parallel (SCD)$.

**Ví dụ 3**

Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD . Chứng minh: $(BMN) \parallel (SCD)$, từ đó suy ra $BM \parallel (SCD)$.

Ví dụ 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AD gấp đôi đáy bé BC . Gọi $O = AC \cap BD$, M thuộc cạnh SA sao cho $AM = 2MS$ và N thuộc cạnh SB sao cho $2BN = NS$.

- Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SCD)$.
- Gọi $d = (OMN) \cap (ABCD)$, $P = d \cap AD$, $Q = d \cap BC$. Chứng minh tứ giác $PQCD$ là hình bình hành.

Ví dụ 5

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, M' lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC và $A'B'$.

- Chứng minh $(MNM') \parallel (BCC'B')$.
- Tìm giao điểm N' của $A'C'$ và (MNM') . Tứ giác $MNN'M'$ là hình gì?

Ví dụ 6

Cho hình chóp $S.ABC$, trên cạnh SA lấy hai điểm A_1, A_2 sao cho $A_2A_1 = 2A_1A$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng lần lượt đi qua A_1, A_2 , đồng thời cùng song song với (ABC) . Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_1, C_1 ; mặt phẳng (Q) lần lượt cắt các cạnh SB, SC tại B_2, C_2 . Chứng minh $B_2B_1 = 2B_1B$ và $C_2C_1 = 2C_1C$.

Dạng 2**Tìm giao tuyến bằng cách kẻ song song**

Sử dụng tính chất
$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ (\gamma) \cap (\alpha) = a \Rightarrow a \parallel b \\ (\gamma) \cap (\beta) = b \end{cases}$$



Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm H . Mặt phẳng (P) đi qua H và song song với (SAB) . Tìm giao tuyến của

- Mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$.
- Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC) .

Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm bất kỳ trên AB . Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với (SBC) . Tìm giao tuyến của (α) với cắt mặt của hình chóp.

Ví dụ 3

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, AD, A'D'$. Xác định giao tuyến của (MNP) và các mặt $(A'B'C'D')$, $(AA'B'B)$.

Dạng 3 Xác định giao điểm của một đường thẳng với mặt phẳng

Để tìm giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P) . Ta cần tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường thẳng Δ . Khi đó giao điểm của đường thẳng a và Δ chính là giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P) .

Ví dụ 1

Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Biết mặt phẳng (α) chứa BG và song song với AC . Tìm giao điểm K của AD và mặt phẳng (α) .

Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) qua BD và song song với SA . Tìm giao điểm K của mặt phẳng (α) và SC .

Ví dụ 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi M là một điểm trên CD , (α) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BC . Tìm giao điểm Q của SC và (α) .

Dạng 4

Xác định thiết diện bằng cách kẻ song song

Để xác định được thiết diện của một hình chóp hoặc hình lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (P) ta thường dựng các đoạn giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp hoặc hình lăng trụ đó. Khi ấy, ta sử dụng định lý sau:

Định lý 4.1. Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia theo hai giao tuyến song song với nhau.

Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M là trung điểm SA . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và song song với mặt phẳng (ABC) .

Ví dụ 2

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của $A'B'$. Tìm thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và song song với mặt phẳng $(A'C'C)$. Thiết diện là hình gì?

Ví dụ 3

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AD, CC' sao cho $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NC'}$. Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng qua MN và song song với (ACB')



Ví dụ 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $\triangle SAD$ đều. Đáy $ABCD$ là hình thang có $AD \parallel BC$, $AB = BC = CD = 1$, $AD = 2$. Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm M nằm trên cạnh AB và song song với (SAD) . Đặt $BM = x$, $(0 < x < 1)$. Tìm x để thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi (P) có diện tích bằng một nửa diện tích tam giác SAD .

Ví dụ 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O có $AC = a$, $BD = b$. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và đi qua điểm I trên đoạn AC .

- Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) .
- Tính diện tích thiết diện theo a, b và $x = AI$.

C

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$. Ta dựng các nửa đường thẳng song song với nhau và nằm về một phía đối với (P) lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D . Một mặt phẳng (Q) cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D' . Chứng minh rằng

$$AA' + CC' = BB' + DD'.$$

Bài 2

Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD .

- Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SBC)$.
- Gọi E là trung điểm của AB và F là một điểm thuộc ON . Chứng minh EF song song với (SBC) .



Bài 3

Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N' .

- Chứng minh $(CBE) \parallel (ADF)$.
- Chứng minh $(DEF) \parallel (MNN'M')$.

Bài 4

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác $B'D'A$ và BDC' . Chứng minh G và G' chia đoạn $A'C$ thành ba phần bằng nhau.



D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- ☐ A $A'B' \parallel (SBD)$.
 ☐ B $A'B' \parallel (SAD)$.
 ☐ C $(A'C'D') \parallel (ABC)$.
 ☐ D $A'C' \parallel BD$.

Câu 2

Chọn khẳng định đúng?

- ☐ A Qua một điểm có vô số mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước.
 ☐ B Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có vô số mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.
 ☐ C Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, tồn tại duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.
 ☐ D Qua một điểm tồn tại duy nhất một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước.

Câu 3

Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD . Mặt phẳng (OMN) song song với mặt phẳng nào sau đây?

- ☐ A (SBC) .
 ☐ B (SCD) .
 ☐ C $(ABCD)$.
 ☐ D (SAB) .



Câu 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$. M là điểm thuộc cạnh AD , (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAB) . Biết diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) bằng $\frac{2}{3}$ diện tích tam giác SAB . Tính tỉ số $x = \frac{MA}{MD}$.

☐ A $x = \frac{1}{2}$.

☐ B $x = 1$.

☐ C $x = \frac{3}{2}$.

☐ D $x = \frac{2}{3}$.

Câu 5

Hãy chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau đây.

☐ A Hai mặt phẳng phân biệt không song song thì cắt nhau.

☐ B Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng kia.

☐ C Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì song song với nhau.

☐ D Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

Câu 6

Giả thiết nào dưới đây kết luận đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) ?

☐ A $a \parallel b$ và $b \parallel (\alpha)$.

☐ B $a \parallel (\beta)$ và $(\beta) \parallel (\alpha)$.

☐ C $a \cap (\alpha) = \emptyset$.

☐ D $a \parallel b$ và $b \subset (\alpha)$.

Câu 7

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

☐ A d đi qua S và song song với BD .

☐ B d đi qua S và song song với BC .

☐ C d đi qua S và song song với AB .

☐ D d đi qua S và song song với DC .

Câu 8

Đặc điểm nào sau đây là đúng với hình lăng trụ?

- ☐ A Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên bằng nhau.
- ☐ B Đáy của hình lăng trụ là hình bình hành.
- ☐ C Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên là hình bình hành.
- ☐ D Hình lăng trụ có tất cả các mặt là hình bình hành.

Câu 9

tôi câu này: ID: [1H2B4-6] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SD và AB . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- ☐ A (NOM) cắt (OPM) .
- ☐ B $(MON) \parallel (SBC)$.
- ☐ C $(MNP) \parallel (SBD)$.
- ☐ D $(PON) \cap (MNP) = NP$.

Câu 10

Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD . Mặt phẳng (OMN) song song với mặt phẳng nào sau đây?

- ☐ A (SBC) .
- ☐ B (SCD) .
- ☐ C $(ABCD)$.
- ☐ D (SAB) .

Câu 11

Cho các mệnh đề sau

1. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.
2. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.
3. Bất kì đường thẳng nào cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cũng cắt mặt phẳng còn lại.

Số mệnh đề **sai** là

- ☐ A 0.
- ☐ B 1.
- ☐ C 3.
- ☐ D 2.

**Câu 12**

Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **đúng**?

- ☐ A Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song.
- ☐ B Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- ☐ C Hai mặt phẳng không cắt nhau thì trùng nhau.
- ☐ D Hai mặt phẳng không song song thì trùng nhau.

Câu 13

Phát biểu nào sau đây là **sai**?

- ☐ A Hình lăng trụ có các mặt bên là hình bình hành.
- ☐ B Các mặt bên của hình lăng trụ là hình chữ nhật.
- ☐ C Các mặt bên của hình chóp cụt là những hình thang.
- ☐ D Hình hộp là lăng trụ có đáy là hình bình hành.

Câu 14

tôi câu này: ID: [1H2B4-6] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SD và AB . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- ☐ A (NOM) cắt (OPM) .
- ☐ B $(MON) \parallel (SBC)$.
- ☐ C $(MNP) \parallel (SBD)$.
- ☐ D $(PON) \cap (MNP) = NP$.

Câu 15

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- ☐ A Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β) .
- ☐ B Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (β) .
- ☐ C Nếu hai đường thẳng song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) thì (α) song song với (β) .
- ☐ D Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được vô số mặt phẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

Câu 16

Cho đường thẳng $a \subset mp(P)$ và đường thẳng $b \subset mp(Q)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A a và b chéo nhau. ☐ B $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$.
☐ C $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$. ☐ D $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel (Q)$ và $b \parallel (P)$.

Câu 17

tôi câu này: ID: [1H2B4-6] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SD và AB . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- ☐ A (NOM) cắt (OPM) . ☐ B $(MON) \parallel (SBC)$.
☐ C $(MNP) \parallel (SBD)$. ☐ D $(PON) \cap (MNP) = NP$.

Câu 18

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- ☐ A d đi qua S và song song với BD . ☐ B d đi qua S và song song với BC .
☐ C d đi qua S và song song với AB . ☐ D d đi qua S và song song với DC .

Câu 19

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC và SD . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

- ☐ A $A'C' \parallel (SBD)$. ☐ B $A'B' \parallel (SAD)$.
☐ C $(A'C'D') \parallel (ABC)$. ☐ D $A'C' \parallel BD$.

Câu 20

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang ($AB \parallel CD$) và $AB = 2CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SB và AB . Mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (SAD) ?

- ☐ A (BCI) . ☐ B (BIJ) . ☐ C (CIJ) . ☐ D (SJC) .



Câu 21

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB . Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A (NOM) cắt (OPM) .
 ☐ B $(MON) \parallel (SBC)$.
 ☐ C $(PON) \cap (MNP) = NP$.
 ☐ D $(NMP) \parallel (SBD)$.

Câu 22

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- ☐ A d đi qua S và song song với BD .
 ☐ B d đi qua S và song song với BC .
 ☐ C d đi qua S và song song với AB .
 ☐ D d đi qua S và song song với DC .

Câu 23

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (các đỉnh lấy theo thứ tự đó), AC cắt BD tại O còn $A'C'$ cắt $B'D'$ tại O' . Khi đó $(AB'D')$ sẽ song song mặt phẳng nào dưới đây?

- ☐ A $(A'OC')$.
 ☐ B (BDA') .
 ☐ C (BDC') .
 ☐ D (BCD) .

HẾT

§5. PHÉP CHIẾU SONG SONG

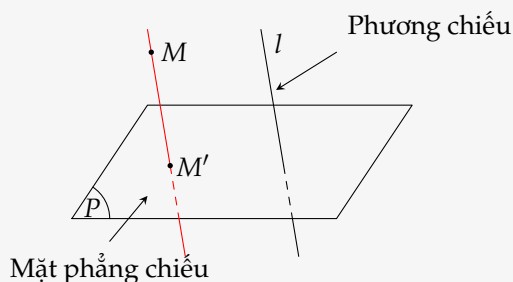
A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Khái niệm phép chiếu song song

Phép chiếu song song thường được dùng để biểu diễn các hình trong không gian lên một mặt phẳng.

Định nghĩa 5.1.

Trong không gian, cho mặt phẳng (P) và đường thẳng l cắt (P) . Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ một đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với l . Đường thẳng này cắt (P) tại M' . Phép cho tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' trong (P) được gọi là phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l .



Mặt phẳng (P) được gọi là **mặt phẳng chiếu** và đường thẳng l được gọi là **phương chiếu** của phép chiếu song song nói trên.

Phép chiếu song song theo phương l còn được gọi tắt là **phép chiếu theo phương l** .

Điểm M' gọi là **ảnh** của điểm M qua phép chiếu theo phương l .

Cho hình $\mathcal{H}$ trong không gian. Ta gọi tập hợp $\mathcal{H}'$ các ảnh M' của tất cả những điểm M thuộc $\mathcal{H}$ qua phép chiếu song song theo phương l là hình chiếu song song của $\mathcal{H}$ lên mặt phẳng (P) .

2. Các tính chất cơ bản của phép chiếu song song

Tính chất 5.1. Hình chiếu song song của một đường thẳng là một đường thẳng. Hình chiếu song song của một đoạn thẳng là một đoạn thẳng. Hình chiếu song song của một tia là một tia.

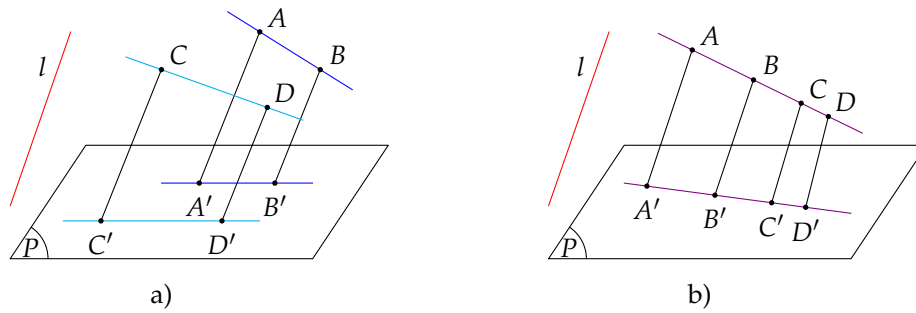
Tính chất 5.2. Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Tính chất 5.3.

- ✔ Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- ✔ Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Ví dụ 1

- a) Tìm hình chiếu song song của đoạn thẳng AC , tia AB và đường thẳng AD trong Hình b).
- b) Quan sát Hình a) và so sánh hai tỉ số $\frac{AB}{CD}, \frac{A'B'}{C'D'}$.
- c) Quan sát Hình b) và so sánh hai tỉ số $\frac{DA}{DB}, \frac{D'A'}{D'B'}$.



3. Hình biểu diễn của một hình không gian

Định nghĩa 5.2. Hình biểu diễn của một hình $\mathcal{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của $\mathcal{H}$ trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

! Dựa theo tính chất của phép chiếu song song, ta phải tuân theo một số quy tắc khi vẽ hình biểu diễn, chẳng hạn như

- Nếu trên hình $\mathcal{H}$ có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) thì chúng được biểu diễn bằng hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) và tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng này phải bằng tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng tương ứng trên hình $\mathcal{H}$.
- Nếu hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu thì
 - ✔ Hình biểu diễn của một đường tròn thường là một elip.
 - ✔ Hình biểu diễn của một tam giác (vuông, cân, đều) là một tam giác.
 - ✔ Hình biểu diễn của hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành.

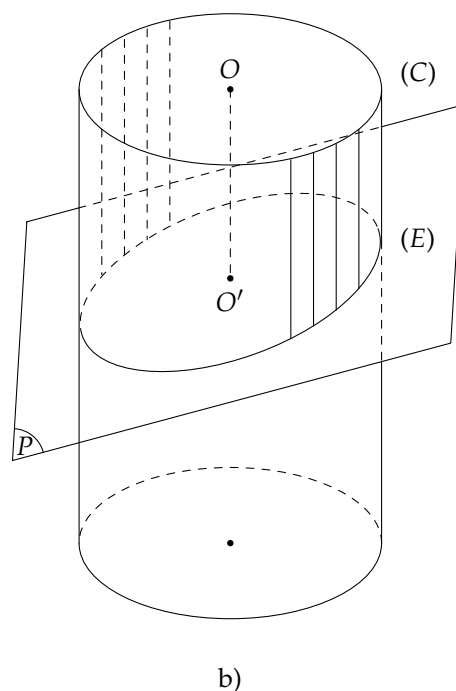
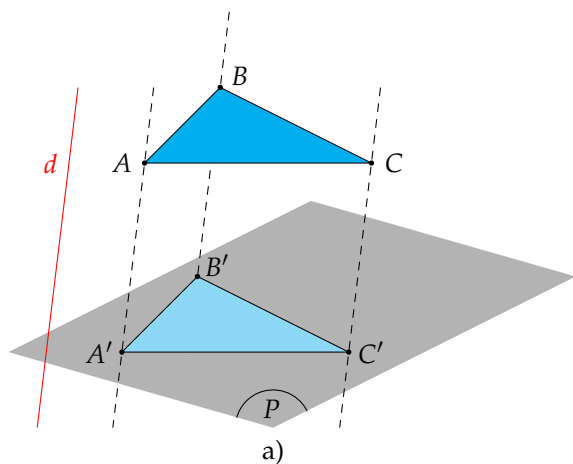
Ví dụ 2

Quan sát bên dưới và tìm hình biểu diễn của

a) đoạn thẳng AB .

b) tam giác ABC .

c) đường tròn (C) tâm O .



Ví dụ 3

Vẽ hình biểu diễn và nêu nhận xét về hình biểu diễn của các mặt của các hình sau

a) Hình hộp.

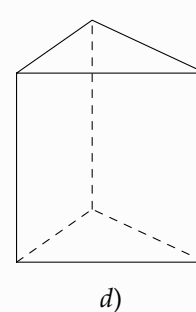
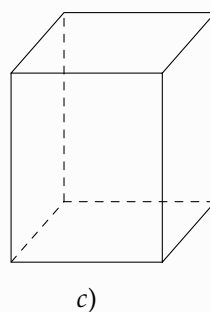
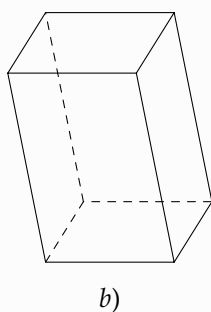
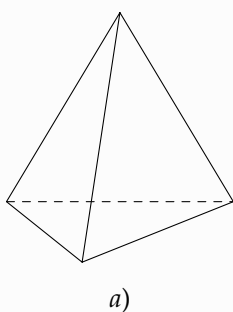
b) Lăng trụ có đáy là lục giác đều.

c) Tứ diện.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

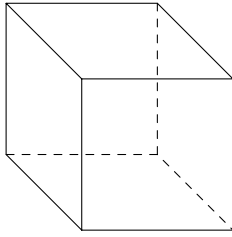
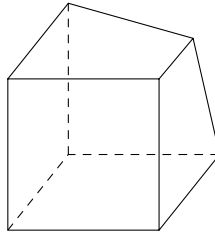
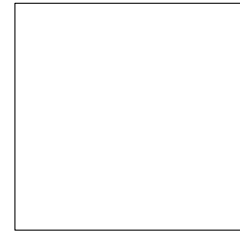
Dạng 1 Hình biểu diễn của một hình không gian

Các hình sau đây thường được sử dụng làm hình biểu diễn của: hình tứ diện (Hình a); hình hộp (Hình b); hình hộp chữ nhật (Hình c); hình lăng trụ tam giác (Hình d).

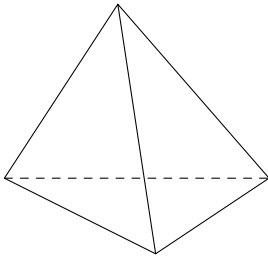
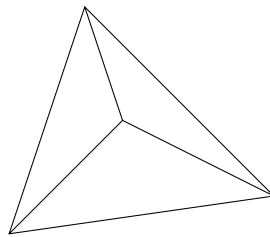
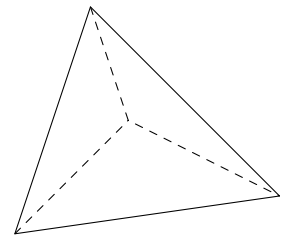


Ví dụ 1

Trong các Hình *a, b, c*, hình nào biểu diễn hình lập phương?

*a)**b)**c)***Ví dụ 2**

Trong các Hình *a), b), c)*, hình nào là hình biểu diễn cho hình tứ diện?

*a)**b)**c)***Ví dụ 3**

Vẽ hình biểu diễn và nêu nhận xét về hình biểu diễn của các mặt của các hình sau

a) Hình hộp.

c) Tứ diện.

b) Lăng trụ có đáy là lục giác đều.

Ví dụ 4

Vẽ hình biểu diễn của hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có mặt đáy $ABCD$ là hình thang, AB song song với CD và $AB = 2CD$.

Dạng 2 Xác định yếu tố song song

Câu 1

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, qua phép chiếu song song phương CC' , mặt phẳng chiếu ($A'B'C'$) biến M thành M' . Trong đó M là trung điểm của BC . Chọn mệnh đề đúng?

- ☐ A M' là trung điểm của $A'B'$.
 ☐ B M' là trung điểm của $B'C'$.
 ☐ C M' là trung điểm của $A'C'$.
 ☐ D Cả ba đáp án trên đều sai.

Câu 2

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của $AB, A'B'$. Qua phép chiếu song song phương AI' , mặt phẳng chiếu ($A'B'C'$) biến I thành?

- ☐ A A' .
 ☐ B B' .
 ☐ C C' .
 ☐ D I' .

Câu 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $MA = 2MS$. Gọi O là tâm của đáy, qua phép chiếu song song phương MO mặt phẳng chiếu ($ABCD$) biến điểm S thành điểm N . Tính tỷ số $\frac{CN}{CA}$

- ☐ A $\frac{1}{2}$.
 ☐ B $\frac{2}{3}$.
 ☐ C $\frac{1}{4}$.
 ☐ D $\frac{1}{3}$.

Câu 4

Cho hình chóp $S.ABC$ các mặt bên là tam giác đều. Gọi M là trung điểm của BC, N là điểm trên cạnh SA sao cho $\frac{SN}{NA} = \frac{1}{2}$. Qua phép chiếu song song phương SM mặt phẳng chiếu (ABC) biến N thành:

- ☐ A Tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
 ☐ B Tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.
 ☐ C Trọng tâm của $\triangle ABC$.
 ☐ D Cả ba đáp án trên đều đúng.



Câu 5

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, gọi M, N, P lần lượt là tâm của các mặt bên $(ABB'A')$, $(BCC'B')$ và $(ACC'A')$. Qua phép chiếu song song phương BC' và mặt phẳng chiếu $(AB'C)$ khi đó hình chiếu của điểm P là

- ☐ A Trung điểm của AN .
 ☐ B Trung điểm của AM .
 ☐ C Trung điểm của $B'N$.
 ☐ D Trung điểm của $B'M$.

.....

.....

.....

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- a) Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó.
 b) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó.
 c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
 d) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

.....

.....

.....

.....

Bài 2

Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.

.....

.....

.....

.....

Bài 3

Vẽ hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một hình tròn.

.....

.....

.....

.....



Bài 4

Cho hai điểm A, B nằm ngoài mặt phẳng (α) và đường thẳng d cắt (α) . Giả sử đường thẳng AB cắt (α) tại điểm O . Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu song song của A và B trên (α) theo phương của đường thẳng d . Ba điểm O, A', B' có thẳng hàng không? Vì sao? Chọn d sao cho

a) $A'B' = AB$.

b) $A'B' = 2AB$.

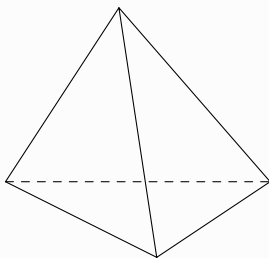
Bài 5

Vẽ hình biểu diễn của

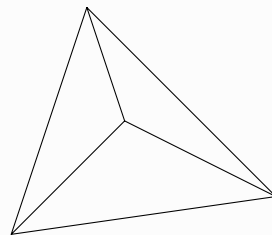
- a) Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều.
- b) Hình lăng trụ có đáy là lục giác đều.
- c) Hình hộp.

Bài 6

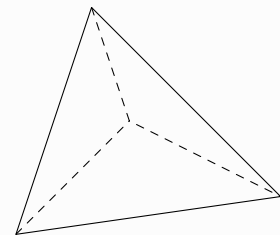
Trong các Hình $a), b), c)$, hình nào là hình biểu diễn cho hình tứ diện?



a)



b)



c)

Bài 7

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định ảnh của tam giác $A'C'D'$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$.

Bài 8

Vẽ hình biểu diễn của các vật trong Hình 89 và Hình 90.

*Hình 89**Hình 90***Bài 9**

Vẽ hình biểu diễn của

- a) Một tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn;
- b) Một lục giác đều.

§6. BÀI TẬP CHƯƠNG IV

A BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Trong không gian, hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi

- (A) Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.
- (B) Hai đường thẳng không có điểm chung.
- (C) Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng.
- (D) Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba.

Câu 2

Cho hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b ?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

Câu 3

Trong không gian, đường thẳng song song với mặt phẳng khi và chỉ khi

- (A) Đường thẳng đó song song với một đường thẳng thuộc mặt phẳng.
- (B) Đường thẳng và mặt phẳng không có điểm chung.
- (C) Đường thẳng đó không có điểm chung với một đường thẳng thuộc mặt phẳng.
- (D) Đường thẳng đó không có điểm chung với hai đường thẳng thuộc mặt phẳng.

**Câu 4**

Trong không gian, hai mặt phẳng song song với nhau khi và chỉ khi

- ☐ A Có một mặt phẳng chứa hai đường thẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng còn lại.
- ☐ B Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng.
- ☐ C Hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ ba.
- ☐ D Hai mặt phẳng không có điểm chung.

Câu 5

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường thẳng b . Vị trí tương đối của hai đường thẳng a và b là

- ☐ A chéo nhau.
- ☐ B cắt nhau.
- ☐ C song song.
- ☐ D trùng nhau.

Câu 6

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SD . Đường thẳng SB song song với mặt phẳng

- ☐ A (CDM) .
- ☐ B (ACM) .
- ☐ C (ADM) .
- ☐ D (ACD) .

Câu 7

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng

- ☐ A $(ABCD)$.
- ☐ B $(BCC'B')$.
- ☐ C (BDA') .
- ☐ D (BDC') .

Câu 8

Cho ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ đôi một song song với nhau. Đường thẳng a cắt các mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ và đường thẳng b cắt các mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A', B', C' . Tỷ số $\frac{A'B'}{B'C'}$ bằng

(A) $\frac{2}{3}$.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{3}{2}$.

(D) $\frac{2}{5}$.

Câu 9

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD , K là giao điểm của mặt phẳng (AMN) và đường thẳng SC . Tỉ số $\frac{SK}{SC}$ bằng

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) $\frac{1}{3}$.

(C) $\frac{1}{4}$.

(D) $\frac{2}{3}$.

Câu 10

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$. Hình chiếu của $\triangle B'DM$ qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương AA' là

(A) $\triangle B'A'M'$.

(B) $\triangle C'D'M'$.

(C) $\triangle DMM'$.

(D) $\triangle B'D'M'$.

B BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB \parallel CD$ và $AB < CD$. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng sau

a) (SAD) và (SBC) .

b) (SAB) và (SCD) .

c) (SAC) và (SBD) .

Bài 2

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và AA' .

a) Xác định giao điểm của mặt phẳng (MNP) và đường thẳng $B'C$.

b) Gọi K là giao điểm của của mặt phẳng (MNP) với đường thẳng $B'C$. Tính tỉ số $\frac{KB'}{KC}$.

Bài 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD, SCD .

- Chứng minh $GK \parallel (ABCD)$.
- Mặt phẳng chứa đường thẳng GK và song song với mặt phẳng $(ABCD)$ cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, E, F . Chứng minh rằng tứ giác $MNEF$ là hình bình hành.

Bài 4

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $AB, C'D'$.

- Chứng minh rằng $(A'DN) \parallel (B'CM)$.
- Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng $D'B$ với các mặt phẳng $(A'DN), (B'CM)$. Chứng minh rằng $D'E = BF = \frac{1}{2}EF$.

Bài 5

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh $AD, A'B'$. Chứng minh rằng

- $BD \parallel B'D', (A'BD) \parallel (CB'D')$ và $MN \parallel (BDD'B')$
- Đường thẳng AC' đi qua trọng tâm G của tam giác $A'BD$.

Bài 6

Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 3AM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với hai đường thẳng AD và BC .

- Xác định giao điểm K của mặt phẳng (P) với đường thẳng CD .



b) Tính tỉ số $\frac{KC}{CD}$.

Bài 7

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BD . Điểm P thuộc cạnh AC sao cho $PA = 2PC$.

- Xác định giao điểm E của đường thẳng MP với mặt phẳng (BCD) .
- Xác định giao điểm Q của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP) .
- Xác định giao tuyến của mặt phẳng (ACD) với mặt phẳng (MNP) .
- Gọi I là giao điểm của MQ và NP , G là trọng tâm của tam giác ABD . Chứng minh C, I, G thẳng hàng.

Bài 8

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD . Xác định giao tuyến của mặt phẳng (AMN) với mỗi mặt phẳng sau

- (SCD) ;
- (SBC) .

Bài 9

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$) và $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB . Chứng minh rằng

- $MN \parallel (SCD)$;
- $DM \parallel (SBC)$;
- Lấy điểm I thuộc cạnh SD sao cho $\frac{SI}{SD} = \frac{2}{3}$. Chứng minh rằng $SB \parallel (AIC)$.

§1. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG VÀ MỐT CỦA MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Số liệu ghép nhóm

Định nghĩa 1.1. Mẫu số liệu ghép nhóm thường được trình bày dưới dạng bảng thống kê có dạng như sau:

Bảng 1: Bảng tần số ghép nhóm

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	...	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

- ⚠
- ✔ Bảng trên gồm k nhóm $[u_j; u_{j+1})$ với $1 \leq j \leq k$, mỗi nhóm gồm một số giá trị được ghép theo một tiêu chí xác định.
 - ✔ Cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.
 - ✔ Giá trị chính giữa mỗi nhóm được dùng làm giá trị đại diện cho nhóm ấy. Ví dụ nhóm $[u_1; u_2)$ có giá trị đại diện là $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$.
 - ✔ Hiệu $u_{j+1} - u_j$ được gọi là độ dài của nhóm $[u_j; u_{j+1})$.

Ví dụ 1

Tính giá trị đại diện và độ dài của mỗi nhóm trong mẫu số liệu sau

Khoảng tuổi	$[20; 30)$	$[30; 40)$	$[40; 50)$	$[50; 60)$	$[60; 70)$
Số khách hàng nữ	3	9	6	4	4

- ⚠ **Một số quy tắc ghép nhóm của mẫu số liệu**
Mỗi mẫu số liệu có thể được ghép nhóm theo nhiều cách khác nhau nhưng thường tuân theo một số quy tắc sau:



- ✔ Sử dụng từ $k = 5$ đến $k = 20$ nhóm. Cỡ mẫu càng lớn thì cần càng nhiều nhóm số liệu. Các nhóm có cùng độ dài bằng L thoả mãn $R < k \cdot L$, trong đó R là khoảng biến thiên, k là số nhóm.
- ✔ Giá trị nhỏ nhất của mẫu thuộc vào nhóm $[u_1; u_2)$ và càng gần u_1 càng tốt. Giá trị lớn nhất của mẫu thuộc nhóm $[u_k; u_{k+1})$ và càng gần u_{k+1} càng tốt.

Ví dụ 2

Cân nặng của 28 học sinh nam lớp 11 được cho như sau:

55,4 62,6 54,2 56,8 58,8 59,4 60,7 58 59,5 63,6 61,8 52,3 63,4 57,9
49,7 45,1 56,2 63,2 46,1 49,6 59,1 55,3 55,8 45,5 46,8 54 49,2 52,6

Hãy chia mẫu dữ liệu trên thành 5 nhóm, lập bảng tần số ghép nhóm và xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm.



- ✔ Các đầu mút của các nhóm có thể không là giá trị của mẫu số liệu.
- ✔ Ta hay gặp các bảng số liệu ghép nhóm là số nguyên, chẳng hạn như bảng thống kê số lỗi chính tả trong bài kiểm tra giữa học kì 1 môn Ngữ Văn của học sinh khối 11 như sau:

Số lỗi	[1;2]	[3;4]	[5;6]	[7;8]	[9;10]
Số bài	122	75	14	5	2

Bảng số liệu này không có dạng như Bảng 1. Để thuận lợi cho việc tính các số đặc trưng cho bảng số liệu này, người ta hiệu chỉnh về dạng như Bảng 1 bằng cách thêm và bớt 0,5 đơn vị vào đầu mút bên phải và bên trái của mỗi nhóm số liệu như sau:

Số lỗi	[0,5;2,5)	[2,5;4,5)	[4,5;6,5)	[6,5;8,5)	[8,5;10,5)
Số bài	122	75	14	5	2

Ví dụ 3

Một cửa hàng đã thống kê số ba lô bán được mỗi ngày trong tháng 9 với kết quả cho như sau:

12 29 12 19 15 21 19 29 28 12 15 25 16 20 29
21 12 24 14 10 12 10 23 27 28 18 16 10 20 21

Hãy chia mẫu số liệu trên thành 5 nhóm, lập bảng tần số ghép nhóm, hiệu chỉnh bảng tần số ghép nhóm và xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm.



2. Số trung bình

Định nghĩa 1.2. Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\bar{x}$, được tính như sau

$$\bar{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + \cdots + n_kc_k}{n},$$

trong đó $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Ví dụ 4

Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng A và B được cho ở bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

- Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A và lô hàng B.
- Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng nào nặng hơn?

! Ý nghĩa của số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm: Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc. Nó thường dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

3. Một

Nhóm chứa một của mẫu số liệu ghép nhóm là nhóm có tần số lớn nhất.

Giả sử nhóm chứa một là $[u_m; u_{m+1})$, khi đó một của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là M_0 , được xác định bởi công thức

$$M_0 = u_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

! Nếu không có nhóm kề trước của nhóm chứa một thì $u_{m-1} = 0$. Nếu không có nhóm kề sau của nhóm chứa một thì $n_{m+1} = 0$.

Ví dụ 5

Một công ty xây dựng khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà ở mức giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau

Mức giá (triệu đồng/m ²)	[10; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)
Số khách hàng	54	78	120	45	12

- Tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- Công ty nên xây nhà ở mức giá nào để nhiều người có nhu cầu mua nhất?

Ví dụ 6

Số cuộc gọi điện thoại một người thực hiện mỗi ngày trong 30 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên được thống kê trong bảng sau:

Số cuộc gọi	[3;5]	[6;8]	[9;11]	[12;14]	[15;17]
Số ngày	5	13	7	3	2

- Tìm môđ của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- Hãy dự đoán xem khả năng người đó thực hiện bao nhiêu cuộc gọi mỗi ngày là cao nhất.

! Ý nghĩa của môđ của mẫu số liệu ghép nhóm

- Môđ của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị có khả năng xuất hiện cao nhất khi lấy mẫu. Môđ của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm M_0 xấp xỉ với môđ của mẫu số liệu không ghép nhóm. Các giá trị nằm xung quanh M_0 thường có khả năng xuất hiện cao hơn các giá trị khác.
- Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều nhóm chứa môđ và nhiều môđ.

B MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Nhận dạng mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 1

Mẫu số liệu sau cho biết phân bố theo độ tuổi của dân số Việt Nam năm 2019.

Độ tuổi	Dưới 15 tuổi	Từ 15 đến dưới 65 tuổi	Từ 65 tuổi trở lên
Số người	23 371 882	65 420 451	7 416 651

- Mẫu số liệu đã cho có là mẫu số liệu ghép nhóm hay không?
- Nêu các nhóm và tần số tương ứng. Dân số Việt Nam năm 2019 là bao nhiêu?



Ví dụ 2

Bảng thống kê sau cho biết thời gian chạy (phút) của 30 vận động viên (VĐV) trong một giải chạy Marathon.

Thời gian	129	130	133	134	135	136	138	141	142	143	144	145
Số VĐV	1	2	1	1	1	2	3	3	4	5	2	5

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang mẫu số liệu ghép nhóm gồm sáu nhóm có độ dài bằng nhau và bằng 3.

Ví dụ 3

Mẫu số liệu sau cho biết kết quả kiểm tra môn Toán của lớp 11A năm 2022.

Điểm số	[3; 5)	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)
Số học sinh	5	18	10	7

- Mẫu số liệu đã cho có là mẫu số liệu ghép nhóm hay không?
- Nêu các nhóm và tần số tương ứng. Số học sinh của lớp 11A là bao nhiêu?

Dạng 2

Chuyển mẫu số liệu không ghép nhóm sang mẫu số liệu ghép nhóm

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1

Bảng thống kê sau cho biết thời gian chạy (phút) của 30 vận động viên (VĐV) trong một giải chạy Marathon.

Thời gian	129	130	133	134	135	136	138	141	142	143	144	145
Số VĐV	1	2	1	1	1	2	3	3	4	5	2	5

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang mẫu số liệu ghép nhóm gồm sáu nhóm có độ dài bằng nhau và bằng 3.

**Ví dụ 2**

Cân nặng (kg) của 35 người trưởng thành tại một khu dân cư được cho như sau:

43 51 47 62 48 40 50 62 53 56 40 48 56 53 50 42 55
52 48 46 45 54 52 50 47 44 54 55 60 63 58 55 60 58 53.

Chuyển mẫu số liệu trên thành dạng ghép nhóm, các nhóm có độ dài bằng nhau, trong đó có nhóm $[40; 45)$.

Dạng**3****Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm**

Cho bảng số liệu bên dưới

Nhóm	$[a_1; a_2)$	...	$[a_i; a_{i+1})$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	...	m_i	...	m_k

Bảng 3.2

Khi đó

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm kí hiệu là $\bar{x}$.

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + \dots + m_kx_k}{n}$$

trong đó, $n = m_1 + \dots + m_k$ là cỡ mẫu và $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ (với $i = 1, \dots, k$) là giá trị đại diện của nhóm $[a_i; a_{i+1})$.

Ví dụ 1

Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng A và B được cho ở bảng sau:

Cân nặng (g)	$[150; 155)$	$[155; 160)$	$[160; 165)$	$[165; 170)$	$[170; 175)$
Số quả cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

a) Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A và lô hàng B.

b) Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng nào nặng hơn?



Dạng 4 Một

Để tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện theo các bước sau:

- ✔ Bước 1. Xác định nhóm có tần số lớn nhất (gọi là nhóm chứa một), giả sử là nhóm j : $[a_j; a_{j+1})$.
- ✔ Bước 2. Một được xác định là

$$M_0 = a_j + \frac{m_j - m_{j-1}}{(m_j - m_{j-1}) + (m_j - m_{j+1})} \cdot h$$

trong đó m_j là tần số của nhóm j (quy ước $m_0 = m_{k+1} = 0$) và h là độ dài của nhóm.

Ví dụ 1

Bảng số liệu ghép nhóm sau cho biết chiều cao (cm) của 50 học sinh lớp 11A.

Khoảng chiều cao (cm)	[145; 150)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)
Số học sinh	7	14	10	10	9

Tính một của mẫu số liệu ghép nhóm này. Có thể kết luận gì từ giá trị tính được?

Ví dụ 2

Tuổi thọ (năm) của 50 bình ắc quy ô tô được cho như sau:

Tuổi thọ (năm)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)	[4; 4,5)	[4,5; 5)
Tần số	4	9	14	11	7	5

Xác định một và giải thích ý nghĩa.

Ví dụ 3

Một thư viện thống kê số lượng sách được mượn mỗi ngày trong ba tháng ở bảng sau

Số sách	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]	[36; 40]	[41; 45]
Số ngày	3	6	15	27	22	14

Xác định một của mẫu số liệu ghép nhóm này.

Ví dụ 4

Thời gian (phút) để học sinh hoàn thành một câu hỏi thi được cho như sau:

Thời gian (phút)	$[0, 5; 10, 5)$	$[10, 5; 20, 5)$	$[20, 5; 30, 5)$	$[30, 5; 40, 5)$	$[40, 5; 50, 5)$
Số học sinh	2	10	6	4	3

Xác định một của mẫu số liệu ghép nhóm này.

Ví dụ 5

Điểm kiểm tra môn Toán của lớp 12A được cho trong bảng sau

Thời gian (phút)	$[3; 5)$	$[5; 7)$	$[7; 9)$	$[9; 11)$
Số học sinh	5	18	10	7

Xác định một của mẫu số liệu ghép nhóm này.

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Anh Văn ghi lại cự li 30 lần ném lao của mình ở bảng sau (đơn vị: mét):

72,1	72,9	70,2	70,9	72,2	71,5	72,5	69,3	72,3	69,7
72,3	71,5	71,2	69,8	72,3	71,1	69,5	72,2	71,9	73,1
71,6	71,3	72,2	71,8	70,8	72,2	72,2	72,9	72,7	70,7

a) Tính cự li trung bình của mỗi lần ném.

b) Tổng hợp lại kết quả ném của anh Văn vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Cự li (m)	$[69,2; 70)$	$[70; 70,8)$	$[70,8; 71,6)$	$[71,6; 72,4)$	$[72,4; 73,2)$
Số lần	?	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng cự li trung bình mỗi lần ném từ bảng tần số ghép nhóm trên.

d) Khả năng anh Văn ném được khoảng bao nhiêu mét là cao nhất?



Bài 2

Người ta đếm số xe ô tô đi qua một trạm thu phí mỗi phút trong khoảng thời gian từ 9 giờ đến 9 giờ 30 phút sáng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

15	16	13	21	17	23	15	21	6	11	12	23	19	25	11
25	7	29	10	28	29	24	6	11	23	11	21	9	27	15

- Tính số xe trung bình đi qua trạm thu phí trong mỗi phút.
- Tổng hợp lại số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Số xe	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]
Số lần	?	?	?	?	?

- Hãy ước lượng trung bình số xe đi qua trạm thu phí trong mỗi phút từ bảng tần số ghép nhóm trên.

Bài 3

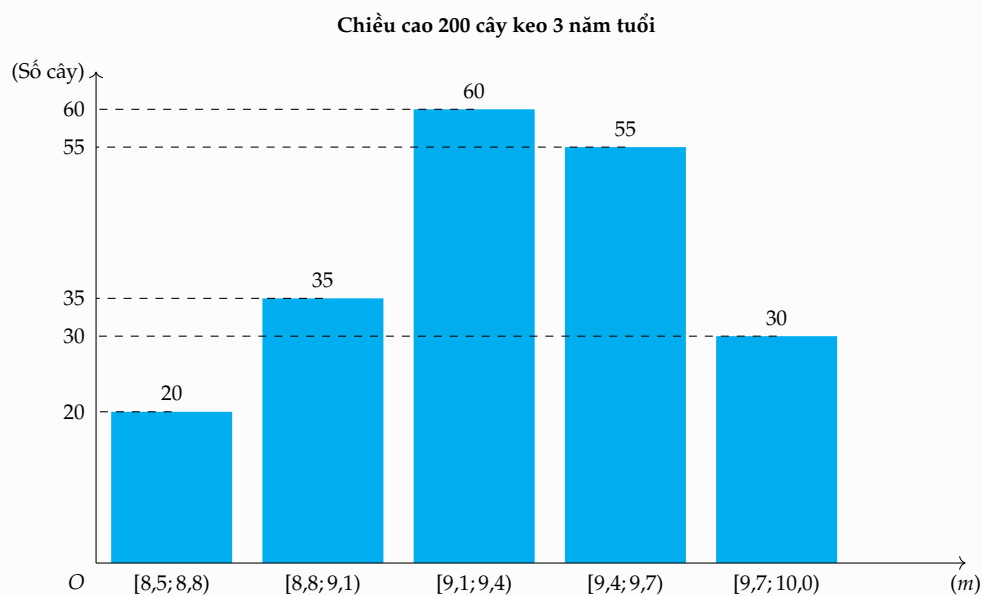
Một thư viện thống kê số lượng sách được mượn mỗi ngày trong ba tháng ở bảng sau:

Số sách	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]	[36; 40]	[41; 45]	[46; 50]
Số ngày	3	6	15	27	22	14	5

Hãy ước lượng số trung bình và một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài 4

Kết quả đo chiều cao của 200 cây keo 3 năm tuổi ở một nông trường được biểu diễn ở biểu đồ dưới đây.



Hãy ước lượng số trung bình và một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

§2. TRUNG VỊ VÀ TỬ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Trung vị

Định nghĩa 2.1. Công thức xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- ✔ Gọi n là cỡ mẫu.
- ✔ Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa trung vị;
- ✔ n_m là tần số của nhóm chứa trung vị;
- ✔ $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$.

Khi đó

$$M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

Ví dụ 1

Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả bơ ở một lô hàng cho trong bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả bơ	1	7	12	3	2

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

.....

.....

.....

Ví dụ 2

Trong tuần lễ bảo vệ môi trường, các học sinh khối 11 tiến hành thu nhặt vỏ chai nhựa để tái chế. Nhà trường thống kê kết quả thu nhặt vỏ chai của học sinh khối 11 ở bảng sau:

Số vỏ chai nhựa	[11; 15]	[16; 29]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]
Số học sinh	53	82	48	39	18

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

.....

.....

.....

! Ý nghĩa của trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm
 Từ dữ liệu ghép nhóm nói chung không thể xác định chính xác trung vị của mẫu số liệu gốc. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho mẫu số liệu gốc và có thể lấy làm giá trị đại diện cho mẫu số liệu.

Ví dụ 3

Trong một hội thao, thời gian chạy 200 m của một nhóm các vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian (giây)	[21; 21,5)	[21,5; 22)	[22; 22,5)	[22,5; 23)	[23; 23,5)
Số vận động viên	5	12	32	45	30

Dựa vào bảng số liệu trên, ban tổ chức muốn chọn ra khoảng 50% số vận động viên chạy nhanh nhất để tiếp tục thi vòng 2. Ban tổ chức nên chọn các vận động viên có thời gian chạy không quá bao nhiêu giây?

2. Tứ phân vị

Định nghĩa 2.2. Công thức xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm
Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_2 , cũng chính là trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Để tìm tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_1 , ta thực hiện như sau:

- ✔ Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa tứ phân vị thứ nhất;
- ✔ n_m là tần số của nhóm tứ phân vị thứ nhất;
- ✔ $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$.

Khi đó

$$Q_1 = u_m + \frac{\frac{n}{4} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

Tương tự, để tìm tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_3 , ta thực hiện như sau:

- ✔ Giả sử nhóm $[u_j; u_{j+1})$ chứa tứ phân vị thứ ba;
- ✔ n_j là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ ba;
- ✔ $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{j-1}$.

Khi đó

$$Q_3 = u_j + \frac{\frac{3n}{4} - C}{n_j} \cdot (u_{j+1} - u_j).$$

Ví dụ 4

Thời gian luyện tập trong một ngày (tính theo giờ) của một số vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian luyện tập (giờ)	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Số vận động viên	3	8	12	12	4

Hãy xác định các tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho.

Huấn luyện viên muốn xác định nhóm gồm 25% các vận động viên có số giờ luyện tập cao nhất. Hỏi huấn luyện viên nên chọn các vận động viên có thời gian luyện tập từ bao nhiêu giờ trở lên vào nhóm này?

! Nếu tứ phân vị thứ k là $\frac{1}{2}(x_m + x_{m+1})$, trong đó x_m và x_{m+1} thuộc hai nhóm liên tiếp, ví dụ như $x_m \in [u_{j-1}; u_j)$ và $x_{m+1} \in [u_j; u_{j+1})$ thì ta lấy $Q_k = u_j$.

Ví dụ 5

Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở bảng sau:

Số lần gặp sự cố	[1; 2]	[3; 4]	[5; 6]	[7; 8]	[9; 10]
Số xe	17	33	25	20	5

- Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- Một người cho rằng có trên 25% xe của hãng gặp không ít hơn 4 sự cố về động cơ trong 2 năm sử dụng đầu tiên. Nhận định trên có hợp lí không?

! Ý nghĩa của tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- ✓ Ba điểm tứ phân vị chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự không giảm thành bốn phần đều nhau.
- ✓ Giống như với trung vị, nói chung không thể xác định chính xác các điểm tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.
- ✓ Bộ ba tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và được sử dụng làm giá trị đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.
- ✓ Tứ phân vị thứ nhất và thứ ba đo xu thế trung tâm của nửa dưới (các dữ liệu nhỏ hơn Q_2) và nửa trên (các dữ liệu lớn hơn Q_2) của mẫu số liệu.

Ví dụ 6

Một người thống kê lại thời gian thực hiện các cuộc gọi điện thoại của người đó trong một tuần ở bảng sau:

Thời gian (đơn vị: giây)	[0; 60)	[60; 120)	[120; 180)	[180; 240)	[240; 300)	[300; 360)
Số cuộc gọi	8	10	7	5	2	1



Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Ví dụ 7

Một phòng khám thống kê số bệnh nhân đến khám bệnh mỗi ngày trong tháng 4 năm 2022 ở bảng sau:

Số bệnh nhân	[1; 10]	[11; 20]	[21; 30]	[31; 40]	[41; 50]
Số ngày	7	8	7	6	2

- Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- Quản lý phòng khám cho rằng có khoảng 25% số ngày khám có nhiều hơn 35 bệnh nhân đến khám. Nhận định trên có hợp lý không?

B MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Số trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- ✔ Gọi n là cỡ mẫu.
- ✔ Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa trung vị;
- ✔ n_m là tần số của nhóm chứa trung vị;
- ✔ $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$.

Khi đó

$$M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

Ví dụ 1

Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả bơ ở một lô hàng cho trong bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả bơ	1	7	12	3	2

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.



Ví dụ 2

Trong tuần lễ bảo vệ môi trường, các học sinh khối 11 tiến hành thu nhặt vỏ chai nhựa để tái chế. Nhà trường thống kê kết quả thu nhặt vỏ chai của học sinh khối 11 ở bảng sau:

Số vỏ chai nhựa	[11; 15]	[16; 29]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]
Số học sinh	53	82	48	39	18

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Ví dụ 3

Trong một hội thao, thời gian chạy 200 m của một nhóm các vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian (giây)	[21; 21,5)	[21,5; 22)	[22; 22,5)	[22,5; 23)	[23; 23,5)
Số vận động viên	5	12	32	45	30

Dựa vào bảng số liệu trên, ban tổ chức muốn chọn ra khoảng 50% số vận động viên chạy nhanh nhất để tiếp tục thi vòng 2. Ban tổ chức nên chọn các vận động viên có thời gian chạy không quá bao nhiêu giây?

Dạng 2 Tứ phân vị

Tứ phân vị Q_1 , Q_2 , Q_3 được xác định như sau

$$Q_1 = a_p + \frac{\frac{n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p);$$

$$Q_3 = a_p + \frac{\frac{3n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p);$$

$$Q_2 = M_e = a_p + \frac{\frac{n}{2} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p).$$

Ví dụ 1

Tìm tứ phân vị thứ nhất Q_1 và tứ phân vị thứ ba Q_3 của mẫu số liệu ghép nhóm cho trong bảng sau

Thời gian (phút)	[9, 5; 12, 5)	[12, 5; 15, 5)	[15, 5; 18, 5)	[18, 5; 21, 5)	[21, 5; 24, 5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Ví dụ 2

Trong phòng thí nghiệm, người ta chia 99 mẫu vật thành năm nhóm căn cứ trên khối lượng của chúng (đơn vị: gam) và lập bảng tần số ghép nhóm như sau.

Nhóm (gam)	[27, 5; 32, 5)	[32, 5; 37, 5)	[37, 5; 42, 5)	[42, 5; 47, 5)	[47, 5; 52, 5)
Số mẫu vật	16	24	20	30	9

Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu.

Ví dụ 3

Sau khi điều tra về số học sinh trong 100 lớp học, người ta chia mẫu số liệu đó thành năm nhóm căn cứ vào số lượng học sinh của mỗi lớp (đơn vị: học sinh) và lập bảng tần số ghép nhóm như sau. Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

Nhóm (học sinh)	[36; 38)	[38; 40)	[40; 42)	[42; 44)	[44; 46)
Số lớp	9	15	25	30	21

Ví dụ 4

Giáo viên chủ nhiệm chia thời gian sử dụng Internet trong một ngày của 40 học sinh thành năm nhóm (đơn vị: phút) và lập bảng tần số ghép nhóm như sau. Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

Nhóm (phút)	[0; 60)	[60; 120)	[120; 180)	[180; 240)	[240; 300)
Số học sinh	6	13	13	6	2

Ví dụ 5

Thời gian luyện tập trong một ngày (tính theo giờ) của một số vận động viên được ghi lại ở bảng sau

Thời gian luyện tập (giờ)	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Số vận động viên	3	8	12	12	4

Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Lương tháng của một số nhân viên văn phòng được ghi lại như sau (đơn vị: triệu đồng):

12,5	9,6	11,7	12,7	10,0	10,0	12,2	9,8	10,9	6,7	13,6	9,2
13,1	6,5	10,7	8,9	11,2	13,2	8,3	11,1	11,9	8,4	6,7	13,8

- Tìm tứ phân vị của dãy số liệu trên.
- Tổng hợp lại dãy số liệu trên dựa vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Lương tháng (triệu đồng)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)
Số nhân viên	?	?	?	?

- Hãy ước lượng tứ phân vị của số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

Bài 2

Số điểm một cầu thủ bóng rổ ghi được trong 20 trận đấu được cho ở bảng sau:

25	23	21	13	8	14	15	18	22	11
24	12	14	14	18	6	8	25	10	11

- Tìm tứ phân vị của dãy số liệu trên.
- Tổng hợp lại dãy số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Điểm số	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	[21; 25]
Số trận	?	?	?	?

- Hãy ước lượng tứ phân vị của số liệu từ bảng tần số ghép nhóm trên.

Bài 3

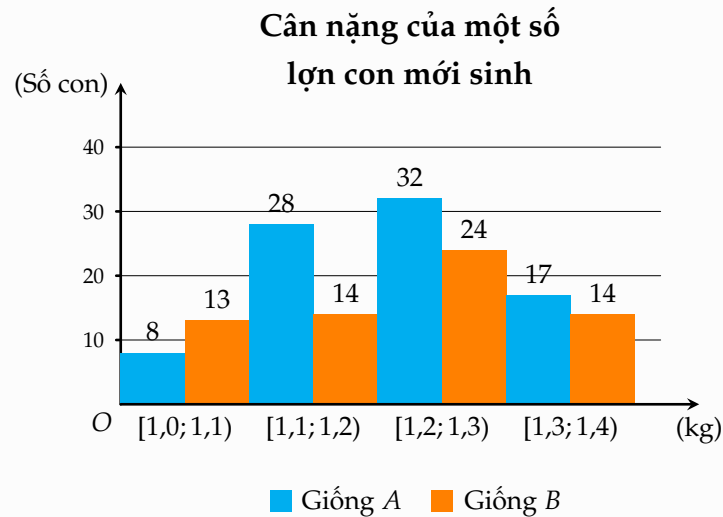
Kiểm tra điện lượng của một số viên pin tiểu do một hãng sản xuất thu được kết quả như sau:

Điện lượng (nghìn mAh)	$[0,9; 0,95)$	$[0,95; 1,0)$	$[1,0; 1,05)$	$[1,05; 1,1)$	$[1,1; 1,15)$
Số viên pin	10	20	35	15	5

Hãy ước lượng số trung bình, một và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài 4

Cân nặng của một số lợn con mới sinh thuộc hai giống A và B được cho ở biểu đồ dưới đây (đơn vị: kg).



- Hãy so sánh cân nặng của lợn con mới sinh giống A và giống B theo số trung bình và trung vị.
- Hãy ước lượng tứ phân vị thứ nhất và thứ ba của cân nặng lợn con mới sinh giống A và của cân nặng lợn con mới sinh giống B.

§3. ÔN TẬP CHƯƠNG V

A BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Người ta tiến hành phỏng vấn 40 người về một mẫu áo sơ mi mới. Người điều tra yêu cầu cho điểm mẫu áo đó theo thang điểm là 100. Kết quả được trình bày trong *Bảng dưới*.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[50;60)	4	4
[60;70)	5	9
[70;80)	23	32
[80;90)	6	38
[90;100)	2	40
$n = 40$		

a) Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với giá trị:

- ☐ A 74.
 ☐ B 75.
 ☐ C 76.
 ☐ D 77.

b) Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng đơn vị là)

- ☐ A $Q_1 \approx 71; Q_2 \approx 76; Q_3 \approx 78$.
 ☐ B $Q_1 \approx 71; Q_2 \approx 75; Q_3 \approx 78$.
- ☐ C $Q_1 \approx 70; Q_2 \approx 76; Q_3 \approx 79$.
 ☐ D $Q_1 \approx 70; Q_2 \approx 75; Q_3 \approx 79$.

c) Một của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị) là:

- ☐ A 73.
 ☐ B 74.
 ☐ C 75.
 ☐ D 76.

Câu 2

Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 21 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng:

- ☐ A $\frac{11}{21}$.
 ☐ B $\frac{221}{441}$.
 ☐ C $\frac{10}{21}$.
 ☐ D $\frac{1}{2}$.

Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	[5;7)	[7;9)	[9;11)	[11;13)	[13;15)
Số ngày	2	7	7	3	1



Câu 3

Số trung bình của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- ☐ A [7; 9). ☐ B [9; 11). ☐ C [11; 13). ☐ D [13; 15).

Câu 4

Trung vị của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- ☐ A [7; 9). ☐ B [9; 11). ☐ C [11; 13). ☐ D [13; 15).

Câu 5

Mốt của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- ☐ A [7; 9). ☐ B [9; 11). ☐ C [11; 13). ☐ D [13; 15).

Câu 6

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau

- ☐ A 7. ☐ B 7,6. ☐ C 8. ☐ D 8,6.

Câu 7

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau

- ☐ A 10. ☐ B 11. ☐ C 12. ☐ D 13.

Khảo sát thời gian tập thể dục trong ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

**Câu 8**

Giá trị đại diện của nhóm $[20; 40)$ là

- ☐ A 10. ☐ B 20. ☐ C 30. ☐ D 40.

Câu 9

Mẫu số liệu ghép nhóm này có số mốt là

- ☐ A 0. ☐ B 1. ☐ C 2. ☐ D 3.

Câu 10

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu này là

- ☐ A $[20; 40)$. ☐ B $[40; 60)$. ☐ C $[60; 80)$. ☐ D $[80; 100)$.

Câu 11

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

- ☐ A $[0; 20)$. ☐ B $[20; 40)$. ☐ C $[40; 60)$. ☐ D $[60; 80)$.

Câu 12

Nhóm chứa trung vị là

- ☐ A $[0; 20)$. ☐ B $[20; 40)$. ☐ C $[40; 60)$. ☐ D $[60; 80)$.

B**BÀI TẬP TỰ LUẬN****Bài 1**

Mẫu số liệu dưới đây ghi lại độ dài quãng đường di chuyển trong một tuần (đơn vị: kilômét) của 40 chiếc ô tô:



100	105	115	116	130	135	138	132	135	120
125	128	120	124	140	140	146	145	142	142
145	148	150	150	159	155	151	156	155	151
154	152	153	160	162	175	176	165	188	198

a) Lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy với năm nhóm ứng với năm nửa khoảng:

[100; 120), [120; 140), [140; 160), [160; 180), [180; 200).

b) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

c) Một của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

Bài 2

Bạn Dũng và bạn Hương tham gia đội văn nghệ của nhà trường. Nhà trường chọn từ đội văn nghệ đó một bạn nam và một bạn nữ để lập tiết mục song ca. Xác suất được nhà trường chọn vào tiết mục song ca của Dũng và Hương lần lượt là 0,7 và 0,9. Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) A: "Cả hai bạn được chọn vào tiết mục song ca";
- b) B: "Có ít nhất một bạn được chọn vào tiết mục song ca";
- c) C: "Chỉ có bạn Hương được chọn vào tiết mục song ca".

Bài 3

Hai bạn Mai và Thi cùng tham gia một kì kiểm tra ngoại ngữ một cách độc lập nhau. Xác suất để bạn Mai và bạn Thi đạt từ điểm 7 trở lên lần lượt là 0,8 và 0,9. Tính xác suất của biến cố C: "Cả hai bạn đều đạt từ điểm 7 trở lên".



Bài 4

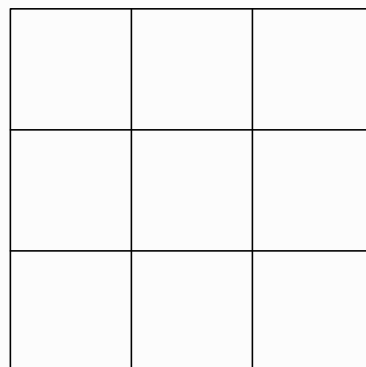
Một người cho ngẫu nhiên 3 lá thư vào 3 chiếc phong bì đã ghi địa chỉ sao cho mỗi phong bì chỉ chứa một lá thư. Tính xác suất để có ít nhất một lá thư được cho vào đúng phong bì đã ghi địa chỉ theo lá thư đó.

Bài 5

Một hộp chứa 9 quả cầu có cùng kích thước và khối lượng, trong đó có 4 quả cầu màu xanh đánh số từ 1 đến 4, có 3 quả cầu màu vàng đánh số từ 1 đến 3, có 2 quả cầu màu đỏ đánh số 1 và 2. Lấy ngẫu nhiên 2 quả cầu từ hộp. Tính xác suất để 2 quả cầu được lấy vừa khác màu vừa khác số.

Bài 6

Bạn Anh vẽ trên đất một bảng gồm 9 ô vuông như Hình bên. Sau đó, bạn An cầm 4 viên bi giống nhau đặt ngẫu nhiên vào 4 ô vuông trong bảng đó. Tính xác suất để bất kì hàng nào và cột nào của bảng cũng có viên bi.



Bài 7

Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp 11 được cho ở bảng sau:

Khoảng điểm	[6,5; 7)	[7; 7,5)	[7,5; 8)	[8; 8,5)	[8,5; 9)	[9; 9,5)	[9,5; 10)
Tần số	8	10	16	24	13	7	4

Hãy ước lượng số trung bình, tứ phân vị và một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài 8

Để kiểm tra thời gian sử dụng pin của một chiếc điện thoại mới, chị An thống kê thời gian sử dụng điện thoại của mình từ lúc sạc đầy pin cho đến khi hết pin ở bảng sau:

Thời gian sử dụng (giờ)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)	[15; 17)
Số lần	2	5	7	6	3

- Hãy ước lượng thời gian sử dụng trung bình từ lúc chị An sạc đầy pin điện thoại cho tới khi hết pin.
- Chị An cho rằng có khoảng 25% số lần sạc điện thoại chỉ dùng được 10 giờ. Nhận định của chị An có hợp lí không?

Bài 9

Tổng số lượng mưa trong tháng 8 đo được tại một trạm quan trắc đặt tại Vũng Tàu từ năm 2002 đến năm 2020 được ghi lại như dưới đây (đơn vị: mm)

121,8 158,3 334,9 200,9 165,6 161,5 194,3 220,7 189,8 243,2
165,9 165,9 134 173 169, 189, 254 168 255

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

- Xác định số trung bình, tứ phân vị và mốt của mẫu số liệu trên.
- Hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Tổng lượng mưa trong tháng 8 (mm)	[120; 175)	[175; 230)	[230; 285)	[285; 340)
Số năm	?	?	?	?

- Hãy ước lượng số trung bình, tứ phân vị và mốt của mẫu số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.



Bài 10

Bảng sau thống kê số ca nhiễm mới SARS-CoV-2 mỗi ngày trong tháng 12/2021 tại Việt Nam.

Ngày	Số ca	Ngày	Số ca	Ngày	Số ca	Ngày	Số ca
1	15 139	9	15 965	17	15 685	25	16 046
2	14 295	10	15 474	18	16 363	26	15 667
3	14 254	11	16 830	19	16 586	27	15 310
4	14 598	12	15 264	20	15 420	28	14 866
5	14 927	13	16 035	21	16 806	29	14 299
6	15 215	14	15 871	22	17 044	30	20 454
7	14 433	15	16 192	23	16 860	31	17 004
8	15 223	16	15 720	24	16 633		

(Nguồn: worldmeters.info)

- a) Xác định số trung bình và tứ phân vị của mẫu số liệu trên. Mẫu số liệu có bao nhiêu có bao nhiêu giá trị ngoại lệ?
- b) Hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Số ca (nghìn)	[14; 15,5)	[15,5; 17)	[17; 18,5)	[18,5; 20)	[20; 21,5)
Số ngày	?	?	?	?	?

- c) Hãy ước lượng số trung bình và tứ phân vị của mẫu số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

Bài 11

Cơ cấu dân số Việt Nam năm 2020 theo độ tuổi được cho trong bảng sau

Độ tuổi	Dưới 5 tuổi	5 – 14	15 – 24	25 – 64	Trên 65
Số người (triệu)	7,89	14,68	13,32	53,78	7,66

Chọn 80 là giá trị đại diện cho nhóm trên 65 tuổi. Tính tuổi trung bình của người Việt Nam năm 2020.

**Bài 12**

Người ta ghi lại tuổi thọ của một số con ong cho kết quả như sau

Tuổi thọ (ngày)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số lượng	5	12	23	31	29

Tìm một của mẫu số liệu. Giải thích ý nghĩa của giá trị nhận được.

Bài 13

Một bảng xếp hạng đã tính điểm chuẩn hoá cho chỉ số nghiên cứu của một số trường đại học ở Việt Nam và thu được kết quả như sau

Điểm	Dưới 20	[20; 30)	[30; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số lượng	4	19	6	2	3	1

Xác định điểm ngưỡng để đưa ra danh sách 25% trường đại học có chỉ số nghiên cứu tốt nhất Việt Nam